时间序列分析 B

JiangYiFu

2024 年 6 月 17 日

目录

1 前言 **2**

2 金融时间序列基础知识 **2**

3 线性时间序列分析及其应用 **3**

4 条件异方差模型 **5**

5 多元时间序列分析及其应用 **6**

6 考试重点-真题 **6**

1 前言

这份复习总结是我在准备期末考试时完成的，前面几章对应课本的第一/二/三/八章节，也就是考试要求的全部章节，内容基本是我在复习过程中对课本的摘录，如果你对课本完全不熟悉可以稍微看看. 最后一个章节是对考试内容的具体总结，基本选自往年真题，希望快速备考的同学建议直接看最后一章. 时 2024 春，时间序列分析 B 常被诟病简单且考试题目类型雷同，不知道以后会不会进行课程改革，故此资料仅作参考. 欢迎后人对源文件进行修改.

2 金融时间序列基础知识

简单收益率 R_t, 多期简单收益率 $R_t[k]$,

$$1 + R_t[k] = \prod_{j=0}^{k-1}(1 + R_{t-j})$$

连续复合，理解为利息计算时间由 1 年转变为每时每刻都在结息 (即结算时间无穷小，转化为极限计算，得到的结果是理论上利息最高值)，此时资产净值为，

$$A = C \cdot exp(r \times n)$$

其中 C 是初始资产，r 是年利率，n 是年数.

资产的简单毛收益率的自然对数称为 1 连续复合收益率或对数收益率，

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

，注意到其多期情况计算的简便性，

$$r_t[k] = \sum_{i=0}^{k-1} r_{t-i}$$

随机变量的矩，一个连续型随机变量 X 的 l 阶矩定义为，

$$m_l' = E(X^l) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)dx$$

, 一阶矩称为 X 的均值或期望，记为 μ_x，X 的 l 阶中心矩定义为，

$$m_l = E((X-\mu_x)^l) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^l f(x)dx$$

二阶中心矩称为 X 的方差，记为 σ_x^2，三阶中心矩度量 X 关于其均值的对称性，而四阶中心矩度量 X 的尾部，标准化的三阶矩称为偏度，标准化的四阶矩称为峰度.

$$S(x) = E[\frac{(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}], K(x) = E[\frac{(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}]$$

3 线性时间序列分析及其应用

把资产收益率（如股票的对数收益率 r_t）看成随时间推移而形成的一族随机变量，我们就有了一个时间序列 $\{r_t\}$. 特别地，所研究的变量与其过去值的相关系数成为线性时间序列分析的焦点. 这些相关系数称为序列相关系数或自相关系数.

平稳性是时间序列分析的基础. 如果对所有的 t,任意正整数 k 和任意 k 个正整数 $(t_1,...,t_k)$, $(r_{t_1},...,r_{t_k})$ 的联合分布与 $(r_{t_1+t},...,r_{t_k+t})$ 的联合分布是相同的，那么时间序列 $\{r_t\}$ 称为严平稳的. 如果 r_t 的均值与 r_t 和 r_{t-l} 的协方差不随时间而改变，其中 l 是任意整数, 那么时间序列 $\{r_t\}$ 称为弱平稳的.

$$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$$

协方差为 0 的两个随机变量称为是不相关的.

两个随机变量 X 和 Y 的相关系数定义为

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

考虑弱平稳收益率序列 r_t. 当我们考虑 r_t 与它的过去值 r_{t-i} 的线性相依关系时，可以把相关系数的概念推广到自相关系数 (ACF).r_t 与 r_{t-l} 的相关系数称为 r_t 的间隔为 l 的自相关系数，通常记为 ρ_l，注意到方差和协方差之间的联系.

$$\rho_l = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{Var(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}$$

如果 $\{r_t\}$ 是一个具有有限均值和有限方差的独立同分布随机变量序列，那么时间序列 $\{r_t\}$ 称为一个白噪声序列. 特别地，如果 r_t 还服从均值为 0，方差为 σ^2 的正态分布，则称这个序列为高斯白噪声.

时间序列 $\{r_t\}$ 称为线性序列，如果它能写成

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i},$$

其中 μ 是 r_t 的均值，$\psi_0 = 1$，$\{a_t\}$ 是白噪声序列. 我们主要关心的是 a_t 为连续型随机变量的情形.

$$E(r_t) = \mu, Var(r_t) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$$

r_t 的间隔为 l 的自协方差为

$$\gamma_l = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+l}$$

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t,$$

一阶自回归（AR）模型，或者简称 AR(1) 模型. 其中 a_t 是均值为 0 的白噪声序列. 由该模型可以推得，

$$E(r_t|r_{t-1}) = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1}, Var(r_t|r_{t-1}) = Var(a_t) = \sigma_a^2$$

AR(1) 模型的弱平稳性的充分必要条件 $\Longrightarrow |\phi_1| < 1$.(思考证明过程)

AR(2) 模型形如

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi r_{t-2} + a_t.$$

利用与 AR(1) 情形相同的方法，我们知道，只要 $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$，就有

$$E(r_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

对式子进行处理得到

$$\gamma_l = \phi_1 \gamma_{l-1} + \phi_2 \gamma_{l-2}$$

被称为平稳 AR(2) 模型的矩方程. 对其两端同除以 γ_0，得到 r_t 的 ACF 的性质.

上面的式子说的是：平稳 AR(2) 序列的 ACF 满足二阶差分方程

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\gamma_l=0$$

其中 B 是向后推移算子，即 $B\gamma_l=\gamma_{l-1}$.

滑动平均模型 (MA), 看成参数受某种限制的无穷阶 AR 模型.MA(1) 模型的一般形式为

$$r_t=c_0+a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

其中 c_0 是一个常数，$\{a_t\}$ 是一个白噪声序列. 类似地，MA(2) 模型的形式为

$$r_t=c_0+a_t-\theta_1 a_{t-1}-\theta_2 a_{t-2}$$

MA 模型总是弱平稳的，因为它们是白噪声序列的有限线性组合，其前二阶矩是不随时间变化的.

$$E(r_t)=c_0, Var(r_t)=(1+\theta_1^2+\theta_2^2+...+\theta_q^2)\sigma_a^2.$$

关于定阶，MA 模型—ACF(自相关函数),AR 模型—PACF(偏自相关函数).

自回归滑动平均 (ARMA) 模型，ARMA(1,1) 模型

$$r_t-\phi_1 r_{t-1}=\phi_0+a_t-\theta_1 a_{t-1}$$

单位根非平稳序列—随机游动模型.

4 条件异方差模型

用 r_t 表示某资产在 t 时刻的对数收益率，波动率研究的基本思想是，序列 $\{r_t\}$ 是序列不相关或低阶序列相关，但是它是相依序列.

本章的条件异方差模型就是用来描述 σ_t^2 的演变的.σ_t^2 随时间变化的方式可以用不同的波动率模型来表示. 条件异方差性建模就是对时间序列模型增加一个动态方程，来刻画资产收益率的条件方差随时间的演变规律.

ARCH 模型，其思想是：1. 资产收益率的扰动 a_t 是序列不相关的，但不是独立的.2.a_t 的不独立性可以用其延迟值的简单二次函数来描述.

$$a_t = \sigma_t\varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... + \alpha_m a_{t-m}^2$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 是均值为 0，方差为 1 的独立同分布随机变量序列.

GARCH 模型

$$a_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2,$$

5 多元时间序列分析及其应用

多元时间序列包含多个一元时间序列作为其分量.

6 考试重点-真题

一、 **(20 分)** 已知 $r_1 = 0.5$， $a_1 = 0.02$ 且序列 $\{r_t\}$ 满足如下 ARMA(1,1)模型，请预测未来 3 期即 r_3， r_4， r_5 的 95%置信区间。

$$r_t = 0.8r_{t-1} + a_t - 0.2a_{t-1}, \quad \sigma_a^2 = 0.0025$$

考点解析：线性时间序列预测相关

设 $\hat{r}_h(l)$ 为 $r_(h+l)$ 的最小均方预测. 以 AR(p) 模型为例子, 计算向前 1 步预测, 即计算条件期望

$$\hat{r}_h(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p}\phi_i r_{h+1-i}$$

对应的误差为

$$e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = a_{h+1}.$$

从而，向前 1 步预测误差的方差为 $Var[e_h(1)] = Var(a_{h+1}) = \sigma_a^2$，当 a_t 服从正态分布时，则 r_{h+1} 的 95% 的向前 1 步区间预测是 $\hat{r}_h(1) \pm 1.96 \times \sigma_a$. 而对于向前 2 步预测，处理方式相似，唯一需要注意的是在计算条件期望时结果中会存在向前 1 步预测.

二、 (15 分) 写出 ARMA(p,q)模型的三种表示, 并说明判断其平稳性以及可逆性的充分条件。

考点解析：模型形式默写，平稳性可逆性等性质证明.

AR(p) 模型

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + ... + \phi_p r_{t-p} + a_t,$$

这里的 $\{a_t\}$ 是均值为 0，方差为 σ_a^2 的白噪声序列.

考虑 AR(1) 模型的弱稳定性的充分必要条件. 回想弱稳定性的定义：均值 + 方差 + 协方差.

$$E(r_t) = \mu, Var(r_t) = \gamma_0, Cov(r_t, r_{t-j}) = \gamma_j$$

我们首先讨论 (2.8) 式定义的 AR(1) 模型的弱平稳性的充分必要条件. 假定序列是弱平稳的, 则 $\mathrm{E}(r_t) = \mu$, $\mathrm{Var}(r_t) = \gamma_0$, $\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-j}) = \gamma_j$, 其中 μ, γ_0 是常数, γ_j 是 j 的函数而与 t 无关. 我们容易得到序列的均值、方差和自相关系数. 对 (2.8) 式两边取期望, 因为 $\mathrm{E}(a_t) = 0$, 所以

$$\mathrm{E}(r_t) = \phi_0 + \phi_1 \mathrm{E}(r_{t-1}).$$

在平稳性的条件下, $\mathrm{E}(r_t) = \mathrm{E}(r_{t-1}) = \mu$, 从而

$$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu \quad \text{或} \quad \mathrm{E}(r_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}.$$

这个结果有两个含义：第一, 若 $\phi_1 \neq 1$, 则 r_t 的均值存在; 第二, r_t 的均值为 0 当且仅当 $\phi_0 = 0$. 因此, 对平稳 AR(1) 过程, 常数项 ϕ_0 与 r_t 的均值有关, $\phi_0 = 0$ 意味着 $\mathrm{E}(r_t) = 0$.

我们利用 $\phi_0 = (1 - \phi_1)\mu$ 可以把 AR(1) 模型写成如下形式

$$r_t - \mu = \phi_1 (r_{t-1} - \mu) + a_t. \tag{2.10}$$

重复代入, 由上述方程可推得

$$\begin{aligned} r_t - \mu &= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i a_{t-i}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

这个方程表达了 $\phi_i = \phi_1^i$ 的 (2.4) 式形式的 AR(1) 模型. 因此, $r_t - \mu$ 是 a_{t-i}, $i \geqslant 0$ 的线性函数. 利用这个性质和 $\{a_t\}$ 的独立性, 我们有 $\mathrm{E}\left[(r_t - \mu)\, a_{t+1}\right] = 0$. 由平稳性的假定, 我们有 $\mathrm{Cov}\left(r_{t-1}, a_t\right) = \mathrm{E}\left[(r_{t-1} - \mu)\, a_t\right] = 0$. 此性质可从直观上看出来,

因为 r_{t-1} 发生在 t 时刻之前而 a_t 不依赖于任何过去的信息. 对 (2.10) 两边平方, 然后取期望得到

$$\mathrm{Var}\left(r_t\right) = \phi_1^2 \mathrm{Var}\left(r_{t-1}\right) + \sigma_a^2,$$

其中 σ_a^2 是 a_t 的方差, 这里我们用到 "r_{t-1} 与 a_t 的协方差为零" 这样一个事实. 而在平稳性的假定下, $\mathrm{Var}\left(r_t\right) = \mathrm{Var}\left(r_{t-1}\right)$, 故

$$\mathrm{Var}\left(r_t\right) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2},$$

上式在 $\phi_1^2 < 1$ 时成立. 因为方差是非负有限的, 故要求 $\phi_1^2 < 1$. 这样, 由 AR(1) 模型的弱平稳性可推得 $-1 < \phi_1 < 1$. 反之, 若 $\phi_1 < 1$, 由 (2.11) 式和序列 $\{a_t\}$ 的独立性, 我们可以证明 r_t 的均值和方差是有限的和时不变的, 参见 (2.5) 式. 另外, 由 (2.6) 式, r_t 的自协方差也是有限的. 从而, AR(1) 模型是弱平稳的. 综上所述, (2.8) 式定义的 AR(1) 模型是弱平稳的充分必要条件是 $|\phi_1| < 1$.

MA(q) 模型

$$r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q}.$$

ARMA(p,q) 模型

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i},$$

如果利用向后推移算子，该模型可以写成

$$(1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p) r_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q) a_t.$$

我们用两个多项式比的级数展开式 (长除法).

$$\psi(B) = \frac{1 - \theta_1 B}{1 - \phi_1 B} = 1 + (\phi_1 - \theta_1) B + \phi_1 (\phi_1 - \theta_1) B^2 + \phi_1^2 (\phi_1 - \theta_1) B^3 + \cdots,$$

$$\pi(B) = \frac{1 - \phi_1 B}{1 - \theta_1 B} = 1 - (\phi_1 - \theta_1) B - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) B^2 - \theta_1^2 (\phi_1 - \theta_1) B^3 - \cdots.$$

$$r_t = \frac{\phi_0}{1-\theta_1-\cdots-\theta_q} + \pi_1 r_{t-1} + \pi_2 r_{t-2} + \pi_3 r_{t-3} + \cdots + a_t.$$

同样, 利用 (2.29) 式, ARMA(p, q) 模型也能写成

$$r_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots = \mu + \psi(B)\, a_t,$$

1.判断AR模型平稳性和MA模型可逆性

2.计算ARMA模型的自相关系数

3.根据R语言代码结果写出模型，写出系数置信区间，判断系数是否显著，检验均值是否为某个值，比较两个模型的拟合效果（从两方面）

4.结构方程

5.协整检验

四、 **1. (20 分)** 写出如下二元 VAR(1)模型对应的两个结构方程。

2. (10 分) 判断如下二元 VAR(1)模型的(弱)平稳性并证明。

$$\begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_a = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$