考研复习记录

——数学与编程

JiangYiFu

2024 年 4 月 9 日

前言

2024.2.21，我与相伴两年半（准确来说是 881 天）的女朋友 xkj 分手了，深刻反思自己的过往。她时常说我幼稚，确实，和她在一起的日子里我总是沉溺在名为 love 的一场幻梦。为了准备保研复试，同时也是防患于未然，开始准备考研数学和一些机试的题目。我喜欢把知识点抽象化和简单化，内容大多是我在复习过程中觉得不错的 keypoints。顺便在这里记录一些自己在复习过程中的感悟吧，加油。—2024.3.2

JiangYiFu in USTC

2024 年 4 月 9 日

目录

第一章　函数极限与连续

1.1　如何求解函数方程

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\infty)$，且满足 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f(x)=$ ______。

key: 轮换对称式，高中题目常见

Answer:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1.2　反函数

1. 严格单调函数必有反函数。

2. 有反函数的不一定是单调函数。

求函数 $y=f(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式及其定义域.

key: 注意到代数变形

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}-x$$

Answer:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1.3 复合函数的奇偶性

$f[g(x)]$（内偶则偶，内奇同外）

设对任意 x，y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$f(x)$ 是奇函数.

key: 对 x, y 赋值

$$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}, x\in\mathbb{R}$$

计算

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^x+1}dx$$

key: 注意到 $f(x)$ 是奇函数，且

$$\frac{1}{2^x+1}=\frac{1}{2}\frac{(2^x+1)-(2^x-1)}{2^x+1}$$

1.4 三角函数

$$sec(x)=\frac{1}{cos(x)}, csc(x)=\frac{1}{sin(x)}$$

$$1+tan(\alpha)^2=sec(\alpha)^2$$

1.5 函数极限定义

“$\varepsilon-\delta$” 语言：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

函数极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$

1.6　极限与有界性

极限的局部有界性（常用于证明题）：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \le M$.

若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内必定有界.

在下列区间内，函数

$$f(x) = \frac{xsin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$$

有界的是（　）

A.$(-2,1)$　B.$(-1,0)$　C.$(1,2)$　D.$(2,3)$

key: 函数有界问题 $\iff$ 极限存在问题

Answer:B

局部保号性（*）

1.7　极限："脱帽法"和"戴帽法"

$$\begin{cases} \lim f > 0 \Rightarrow f > 0 \\ \lim f < 0 \Rightarrow f < 0 \\ f \geq 0 \Rightarrow \lim f \geq 0 \\ f \leq 0 \Rightarrow \lim f \leq 0 \end{cases}$$

1.8　无穷小的比阶

并不是任意两个无穷小都可进行比阶.

1.9　极限计算

极限四则运算规则（*）

若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$, 且 $\lim g(x) = 0$, 则 $\lim f(x) = 0$.
若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim f(x) = 0$, 则 $\lim g(x) = 0$.

设 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{e^x - a}(cosx - b) = 5$，那么 $b =$ ____.
Answer:-4

1.10　洛必达法则

法则一：设

1. 当 $x \to a$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零.

2.$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x| > X$，此时 x 为充分大的正数）存在，且 $F'(x) \neq 0$.

3.$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$) 存在或为无穷大，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$$

注意：这是一个后验逻辑命题

法则二：设

1. 当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大.

2.$f^{'}(x)$ 及 $F^{'}(x)$ 在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x|>X$，此时 x 为充分大的正数）存在，且 $F^{'}(x)\neq 0$.

3.$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$) 存在或为无穷大，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{F^{'}(x)}$$

1.11　泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 n 阶可导，则存在 $x=0$ 的一个邻域，对于该邻域内的任一点 x，有

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

常见结论：

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$arcsin(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

1.12　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

1.13　夹逼准则

如果函数 $f(x)$,$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：

（1）$h(x) \le f(x) \le g(x)$.

（2）$\lim g(x) = A, \lim h(x) = A$.

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x) = A$.

1.14　极限计算例题

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \_\_\_\_$$

key:$u^v = e^{vln(u)}$，$e^x - 1 \sim x$

Answer:$-\frac{1}{2}e$

注意：记忆 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 和 $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ 的函数图像

设函数

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)sin^2\pi x}{1 + nsin^2\pi x}$$

则 $f(x) = \_\_\_\_$.

key:$n \to \infty$ 专指 $n \to +\infty$，将 x 视作常数

Answer:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = k \\ x(1-x), & x \ne k \end{cases} (k \in Z)$$

求极限

$$\lim_{x \to 1^-} ln(x)ln(1-x).$$

key: 等价代换后换元，转换为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x^{-\alpha}}$$

求极限

$$\lim_{x\to +\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x].$$

key: 代数变形，减法变乘法，换元

Answer:$\frac{1}{2}$

求极限

$$\lim_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$$

key: 幂指函数

Answer:1

1.15 函数的连续和间断

连续点的定义：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

考察本质是极限的计算.

连续判定：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \iff f(x)\ is\ coiled\ in\ x_0$$

连续性四则运算法则（*）

间断点的定义和分类：

1. 可去间断点（*）
2. 跳跃间断点（*）
3. 无穷间断点（*）
4. 振荡间断点（*）

第二章　数列极限

第三章　CS106L

3.1　Types and Structs