2023春-计算方法-第三次上机作业说明文档

1 应用问题

二次型在数学很多分支里都频繁出现,而且在其他学科也到处可见，比如优化、概率图论、统计、机器学习、信号处理等等。二次型的极值问题通常转化成矩阵的最大最小特征值问题解决。

在计算机图形学的四面体网格生成领域，一个常见问题是四面体中向量场的生成，其中一种方法是在每个四面体中定义一组四元数$q_i = (q^w, q^x, q^y, q^z)^T$来表示这个四面体上的场，希望让向量场光滑，得到优化的目标能量为

$$q_{\text{opt}} = \min_q \sum_{ij} w_{ij} \|q_i - q_j\|^2, \quad \|q_i\| = 1 \quad \forall i$$

其中$w_{ij} > 0$为权重。我们将能量放松到全局单位约束$\|q\| = 1$,问题转化为

$$q_{\text{opt}} = \min_{\|q\|=1} \sum_{ij} w_{ij} \|q_i - q_j\|^2$$

该问题能够被作为特征值问题高效求解：

$$Lq_{opt} = \lambda_0 q_{opt}$$

其中λ_0是矩阵L的最小特征值，L是关于w_{ij}的系数矩阵，这可以通过反幂法高效求解。详见《Intrinsic mixed-integer polycubes for hexahedral meshing》

本次实验中，我们要求实现带规范方法的反幂法，求得给定矩阵按模最小特征值以及相应的特征向量。

2 实验要求

给定两个矩阵如下：

1. $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 16 & -2 & -2 & 5 \\ 16 & -3 & -1 & 7 \\ 6 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

用带规范方法的反幂法求得上述两个矩阵的按模最小特征值和特征向量。
要求**按照课本上的反幂法流程实现**，即使用LU分解（Doolittle分解）解迭代方程$X^{k+1}=A^{-1}Y^k$（可使用第二次上机实验的实现代码）。初始向量取全1向量，应计算每次迭代时特征值的估计值，并在相邻两次迭代的特征值的差的绝对值小于10^{-5}时停止迭代。
程序实现完毕后，应撰写实验报告。实验报告中应包含如下内容：

1. 标题、学号、姓名。
2. 实验结果。以表格方式列出迭代过程中的X^k, Y^k, λ，输出按模最小的特征值和特征向量。
3. 结果分析：
   (a) 对比两个迭代过程的迭代次数，分析是否有“A的按模最小特征值越接近于0，收敛越快”。
   (b) “估计每次迭代的特征值”中是否遇到问题，是如何解决的（提示：如X^{k+1}/Y^k时是否有数值问题）。

3 提交要求

3.1 提交方式

请提交源代码和实验报告。新建目录，并以“HW3-学号-姓名”方式命名，该目录下应包含如下内容：

- src\ （文件夹，存放你的源代码）
- report.pdf （你的实验报告）

将该文件夹以压缩包方式（压缩包命名方式为“HW3-学号-姓名.zip”。
发送到课程邮箱 comp_method@163.com，**邮件标题**和压缩包同名。
请严格按照命名方式要求提交，不要交错邮箱，否则可能漏记成绩。

3.2 截止时间

在4月23日23:59分前提交。 **若有特殊情况请向助教说明。**

4 参考

《Intrinsic mixed-integer polycubes for hexahedral meshing》