数值分析第一次大作业

姜卓 自74 2017010550

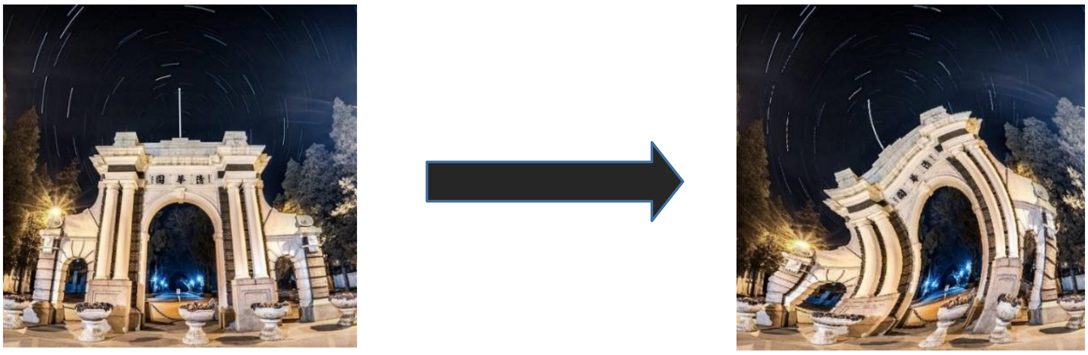
目录

一、 必做部分

必做部分旨在利用最近邻、双线性和双三次三种插值方法分别实现图象扭曲和图象畸变。报告将分析每道题目的需求，给出每种算法的实现原理和设计思路，并进行必要的误差分析。

（一）图象扭曲

1、图象扭曲的需求分析



图片可以看作 512*512 个像素点组成的矩阵，每个象素点有三个通道的 RGB 值，决定该像素点的颜色。这样我们把对图象的操作转换成了对象素点阵的操作。

此外，不难看出扭曲操作需要有一个量来控制扭曲程度，这个量便是最大旋转角度 a_{max}，同时还要给出一个最大半径 Radius 来限定扭曲的范围。与图象中心的距离也决定了扭曲的程度，因此每个点的旋转角度 a 应该与距离 distance 正相关。

2、图象扭曲的实现原理

(1) 理论分析

根据上述需求分析，不难得到如下公式：

$$a=a_{max}\times（1-\frac{Radius-Distance}{Radius}）$$

输入新图象的整数型坐标（x′，y′），经过旋转角度 a，得到新的浮点型坐标（x，y），根据三角函数知识可以求出：

$$\begin{cases} x = x'cosa - y'\ sina \\ y = x'sina + y'\ cosa \end{cases}$$

（2）插值

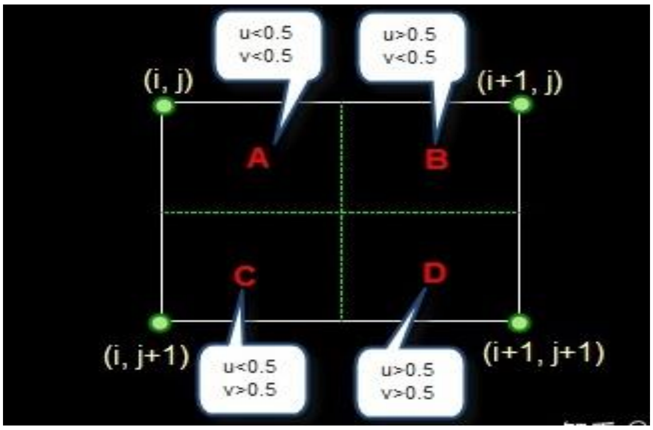
由于旋转得到的坐标为浮点类型，不能直接作为象素点坐标，因此需要进行插值，得到

整数型坐标。

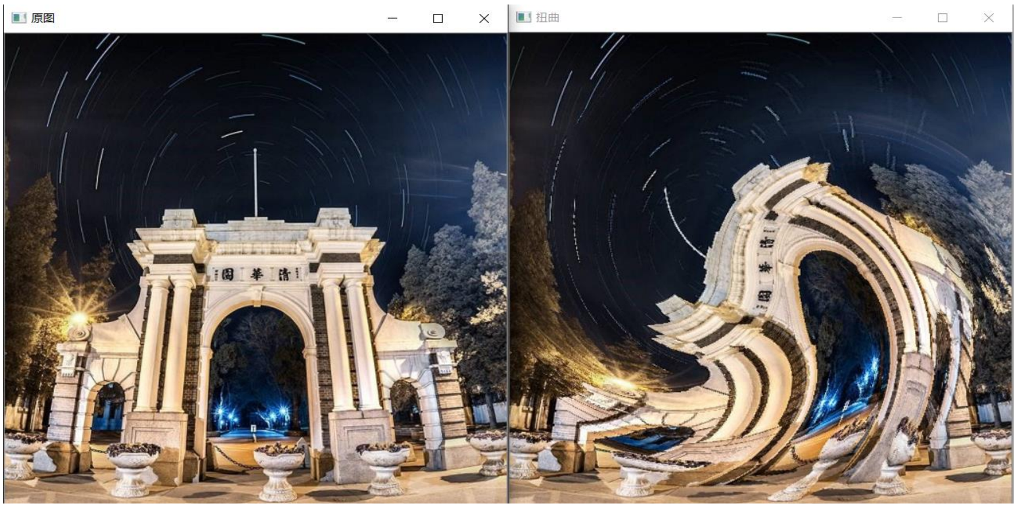
3、最近邻插值方法

最近邻插值根据浮点型坐标点与临近四个整型坐标点的位置来决定，找到最近邻的坐标点，将它的函数值赋给该求点即可。

如下图所示，可以将（I, j）、（i+1， j）、（i， j+1）、（i+1， j+1）四点围成的区域分成四部分，每部分的点与该部分的顶点相对应。



效果展示:



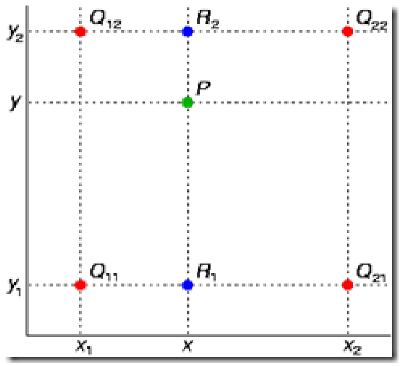
4、双线性插值方法

不难看出，最近邻插值方法并没有充分利用临近各点的函数值，而是仅通过坐标距离将一个整型点的像素值赋值给浮点数坐标，这样难免误差会大一些。双线性插值方法则可以更充分利用临近各点的函数值。

如下图所示，将待求坐标 P（x′，y′）写成（i+u，j+v）的形式，其中 i，j 是坐标

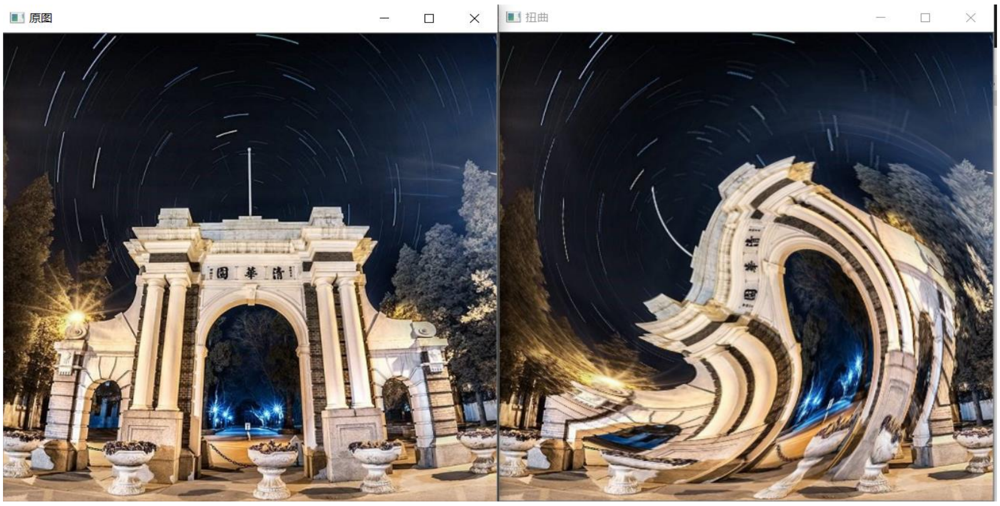
值取整后的结果。则将 P 在 x, y 两个方向上线性插值，便可得到 P 点函数值：

$$f(i+u,j+v)=[1-u,u]\begin{pmatrix} f(i,j) & f(i,j+1) \\ f(i+1,j) & f(i+1,j+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}$$



效果展示：

仔细观察可以发现双线性的清晰度比最近邻方法更高。比如二校门中间大门洞的边缘部分，边界更分明。



5、双三次插值方法

函数 f 在点（x, y）的值可以通过矩形网格中最近的十六个采样点的加权平均得到，在这里需要使用两个多项式插值三次函数，每个方向使用一个。

省去数学推导，得到插值函数为：

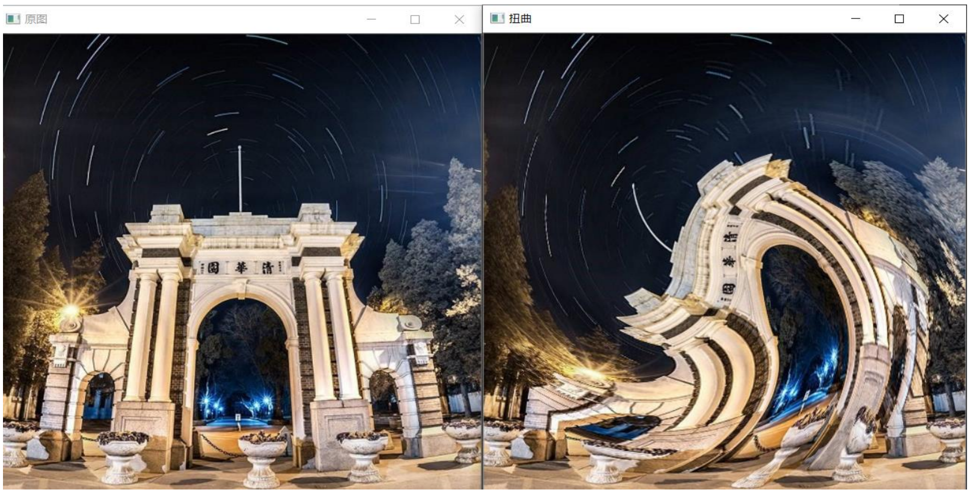
$$f(i+u,j+v)=ABC^{T}$$

$$A=[S(u+1) , S(u) , S(u-1) , S(u-2)]$$

$$C=[S(v+1) , S(v) , S(v-1) , S(v-2)]$$

$$B=\begin{pmatrix} (f(i-1,j-1)) & \cdots & f(i+2,j-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(i-1,j+2) & \cdots & f(i+2,j+2) \end{pmatrix}$$

效果展示：可以看到双三次的插值效果最好，光滑性上比较优秀。



（二）图片畸变

1、图象畸变的需求分析

桶型畸变：

枕型畸变:

从视觉上不难看出，畸变需求为呈现某种“凸凹”效果，并且凸凹程度与球面半径 R 有关，R 越小，凸凹性越明显。对于桶型畸变，当象素点与中心点距离大于 R 时，RGB 值赋 0，呈现黑色；距离在 R 范围内时图片外凸。对于枕性畸变，整体呈现内凹效果，不设 R 的限制。

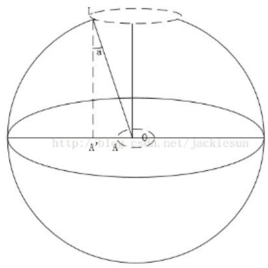
2、图象畸变的实现原理

（1） 桶型畸变

计算浮点型坐标（x,y），有

$$x=[\frac{Radius}{Distance}\times \arcsin(\frac{Distance}{Radius})]\ x'$$

$$y=[\frac{Radius}{Distance}\times \arcsin(\frac{Distance}{Radius})]\ y'$$



输出（x, y）;

其中 Radius 是球面半径，Distance 是象素点到中心点的距离;

（2） 枕型畸变

只需将 arcsin()函数，改为 sin()函数即可，由于$\frac{sinx}{x}$恒小于 1，且在 0~π 单调递减，因而坐标的尺度缩小得以实现，视觉呈现凹陷效果。

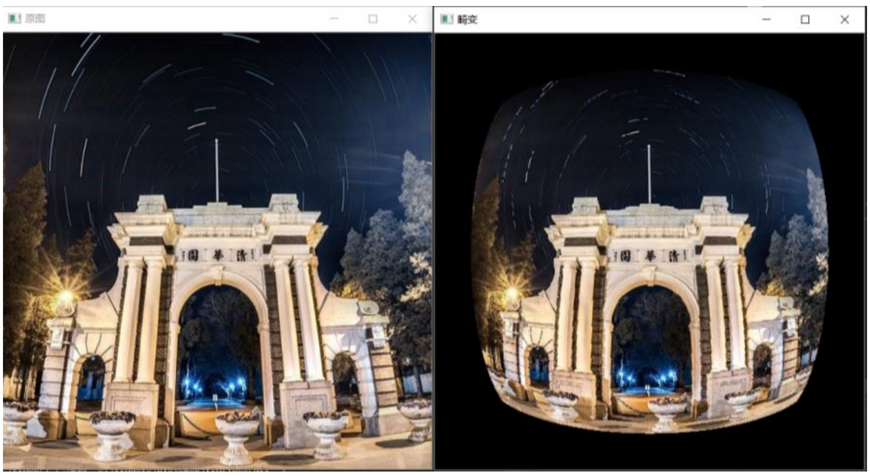
$$x=[\frac{Radius}{Distance}\times \sin(\frac{Distance}{Radius})]\ x'$$

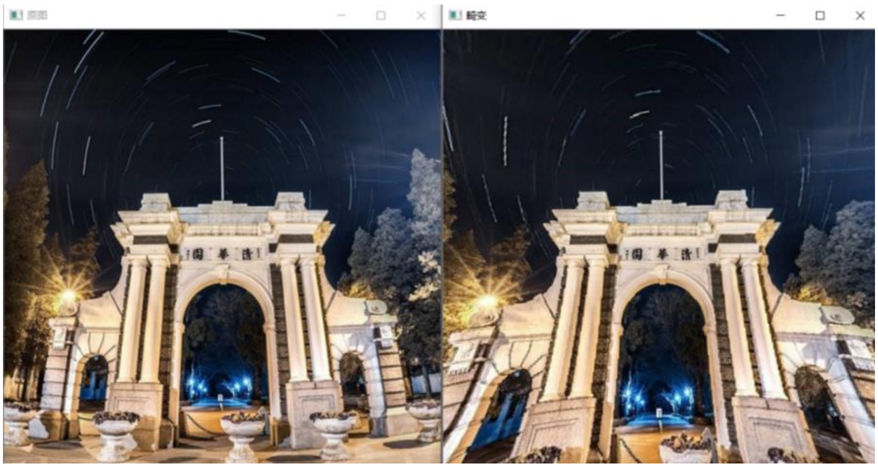
$$y=[\frac{Radius}{Distance}\times \sin(\frac{Distance}{Radius})]\ y'$$

3、最近邻插值方法

插值原理已在“图片扭曲”部分叙述，此处不加赘述，直接给出插值效果图片。

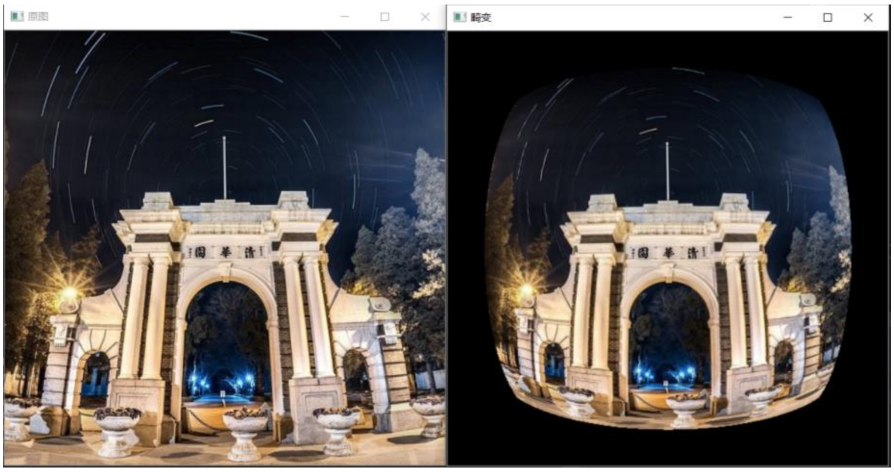
效果展示：

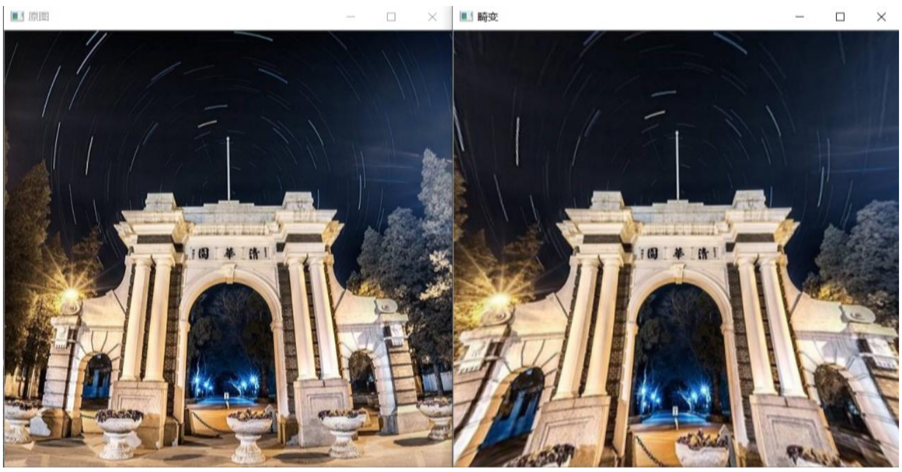




4、双线性插值方法

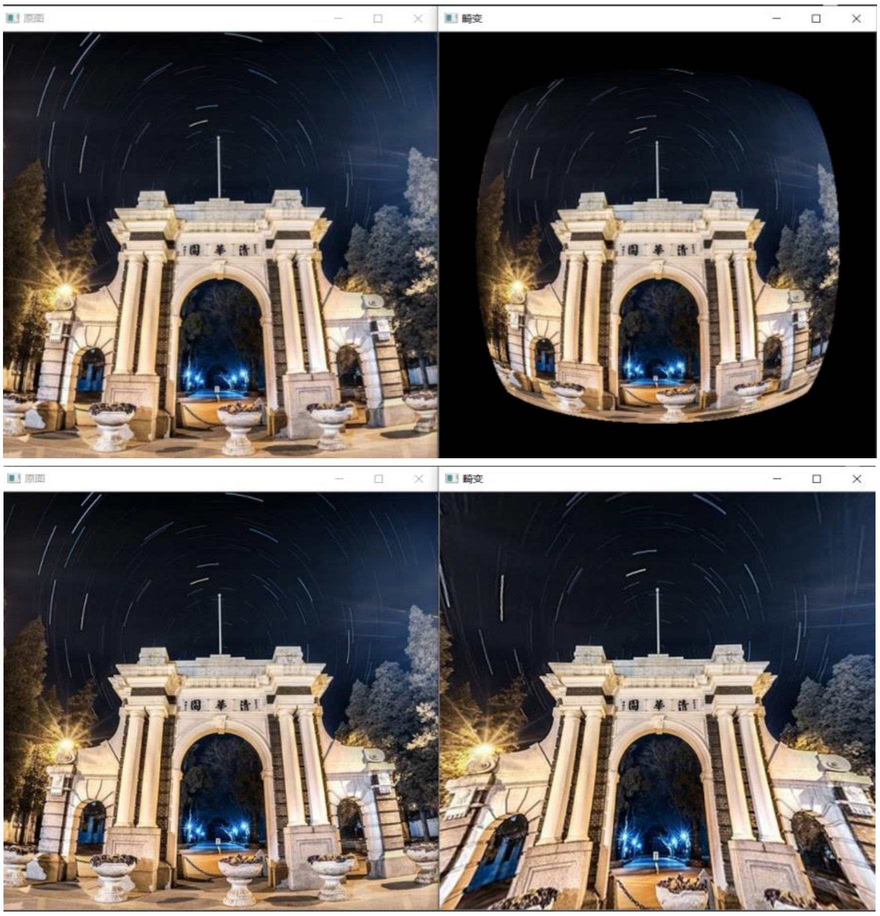
效果展示：放大观察可以发现，与最近邻相比，双线性插值方法的毛刺更少，图片边缘处更加光滑。这是插值时充分利用周围各点 RGB 值的缘故，因此插值误差更小。





5、双三次插值方法

效果展示:仔细观察可以发现双三次插值方法在边缘处和颜色变化较大的地方过渡自然，毛刺较少，因为插值过程利用了更多点的函数值，减小了误差。



（三）误差分析

1. 观测误差

由于计算机在对图象颜色信息进行处理时，将图片的 RGB 值离散化为 uint8 类型的 0-255，因此存在观测误差，最大值为 0.5

2. 舍入误差

程序中利用宏定义 π 为 3.1415926，因此存在舍入误差。

另外，用计算机做数值计算时，由于计算机的字长有限，原始数据在计算机上表示时会

产生误差，计算过程又可能产生新的误差。

而且，在为 Mat 对象的 RGB 赋值时，将 double 类型的函数值转化成了 uint8 类型的 0-255 取值，这部分舍入误差最大为 0.5。

3. 方法误差

方法误差主要针对插值方法而言，现进行展开说明。

（1） 最近邻插值

根据坐标的舍入误差有：

$|\Delta A| \leqslant \max(|\frac{\partial f}{\partial x}|) * |\Delta x| + \max(|\frac{\partial f}{\partial y}|) * |\Delta y| \leqslant \frac{1}{2}[\max(|\frac{\partial f}{\partial x}|) + \max(|\frac{\partial f}{\partial y}|]$

由于数字图像的离散性，因而微分需换成差分。假设 f（x,y）在 x 和 y 方向上一阶导数存在且有界，设为 M1,M2

因而最近邻插值的总方法误差不超过 0.5（M1+M2）

（2） 双线性插值

假设 f（x,y）在 x,y 方向上二阶导存在且有界，设为 M1,M2。考虑 x 分量的插值，每个直线方向上的插值都是一维插值，因此可得每条直线上插值误差为：

$$|R1(x,y)| \leqslant \frac{M1}{2}\max(1-x)x \leqslant \frac{M1}{8}$$

再对插值得到的两点进行 y 方向插值，同为一维插值，可得：

$$|R1(x,y)| \leqslant \frac{M2}{2}\max(1-y)y \leqslant \frac{M2}{8}$$

故双线性插值总的方法误差为$\frac{M1+M2}{8}$

（3） 双三次插值

分析方法与双线性类似，可以将双三次看成 x,y 方向的一维三次埃尔米特插值，考虑一维误差：

$|R(x)| \leqslant \frac{5}{384}M4（\frac{b-a}{n}）4$

因而 x,y 方向上误差分别为：

$$\begin{cases} Rx(x,y) \leq \frac{5}{384}\max|\frac{\partial^4 I}{\partial x^4}| \\ Ry(x,y) \leq \frac{5}{384}\max|\frac{\partial^4 I}{\partial y^4}| \end{cases}$$

综上：双三次插值总的方法误差为$\frac{5}{384}$（$\max|\frac{\partial^4 I}{\partial x^4}| + \max|\frac{\partial^4 I}{\partial y^4}|$）