贝塞尔曲线的求导、弧长参数化与分段拟合方法

iceytan
中山大学 计算机技术硕士在读

本文篇幅较长，分为

1. N阶贝塞尔曲线的定义
2. N阶贝塞尔曲线的导数求解
3. 曲线的长度求解，arc-length参数化原理及贝塞尔曲线匀弧长采样逼近
4. 贝塞尔曲线的分段拟合

每个部分，都基于Eigen、OpenCV，给出简单的C++代码实现例子。

1. 基本定义

贝塞尔曲线是参数化曲线（Parametric Curves）的一种，其 n 阶次曲线具有如下的形式：

$$\mathbf{C}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\boldsymbol{p}_i \tag{1}$$

其中 $t\in[0,1]$ ，写成矩阵的形式，有：

$$\mathbf{C}(t)=\left[B_{0,n}(t),B_{1,n}(t),\ldots,B_{n,n}(t)\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_0^\top\\ \boldsymbol{p}_1^\top\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^\top\end{bmatrix} \tag{2}$$

(1)与(2)中的 $B_{i,n}(t)$ 称为在 t 参数下的贝塞尔曲线系数，定义是：

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i \tag{3}$$

C_i^n

前半部分实际上是二项式系数，在实现时，可以先使用“杨辉三角”预先计算 $B_{i,n}(t)$ 的前- ...
在进行查询时再乘以对应的 t 相关量。基于Eigen，实现如下：

设n=7

1 7 21 35 35 21 7 1

```
typedef Eigen::Matrix<double, 1, N+1> ParameterType;
typedef Eigen::Matrix<double, N+1, 2> PointsType;

PointsType points_;                      // 控制点
ParameterType pascals_triangle_;         // 二项式系数

...

void compute_combinator()                // 预计算
{
    pascals_triangle_ =  Eigen::Matrix<double, 1, N+1>::Ones();

    for(int i = 2; i <= N; ++i)
    for(int j = i-1; j > 0; --j)
    {
        pascals_triangle_[j] = pascals_triangle_[j] + pascals_triangle_[j-1];
    }
}

Eigen::Vector2d at(const double& t)      // 查询点
{
    ParameterType T;
    for(int i=0; i<=N; ++i)
    {
        T[i] = pow(t, i) * pow(1.0-t,N-i);
    }
    return T.cwiseProduct(pascals_triangle_) * points_;
}
```

以N=3为例

i

2 1 2 1 1

3 1 3 3 1

$(1-t)^{N-i} t^i$

为了保持高阶时 t 幂次的数值稳定性，可以使用 *De Casteljau's Algorithm* 迭代进行(2)(3)的计算。以二次贝塞尔曲线为例，基于(2)展开有：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_2(t) &= (1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)t\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2 \\
&= {\color{red}(1-t)}\,\underline{[(1-t)\boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{p}_1]} + {\color{red}t}\,\underline{[(1-t)\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2]}
\end{aligned} \tag{4}
$$

可以看到高阶项的计算，可以通过复合两个低阶项来完成，而两个复合的低阶项，实际上是该 $\mathbf{C}_2(t)$ 曲线的控制多边形顶点的线性插值来计算。此外，基于(2)展开三次贝塞尔曲线（cubic Bezier curve）有：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_3(t) =&(1-t)^3\boldsymbol{p}_0+3(1-t)^2t\boldsymbol{p}_1+3(1-t)t^2\boldsymbol{p}_2+t^3\boldsymbol{p}3 \\
=&{\color{red}(1-t)}\left[(1-t)^2\boldsymbol{p}_0+2(1-t)t\boldsymbol{p}_1+t^2\boldsymbol{p}_2\right]+ \\
&{\color{red}t}\left[(1-t)^2\boldsymbol{p}_1+2(1-t)t\boldsymbol{p}_2+t^2\boldsymbol{p}3\right].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(5) 中后半部分是两个类似 $\mathbf{C}_2(t)$ 的部分以不同权重进行相乘的结果。下图简单描述了起始的控制点 $\boldsymbol{p}_0^0,\boldsymbol{p}_1^0,\ldots,\boldsymbol{p}_n^0$ 与最终的 $\boldsymbol{p}_0^n$ 之间层次：

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \boldsymbol{p}_0^0 & & \boldsymbol{p}_1^0 & & \boldsymbol{p}_2^0 & & \boldsymbol{p}_3^0 & & \cdots & & \boldsymbol{p}_n^0 \\
 & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & \\
i=0 & \boldsymbol{p}_0^1 & & \boldsymbol{p}_1^1 & & \boldsymbol{p}_2^1 & & \cdots & & \boldsymbol{p}_{n-1}^1 & & \\
 & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & & & & & \\
 & \boldsymbol{p}_0^{n-2} & & \boldsymbol{p}_1^{n-2} & & \boldsymbol{p}_2^{n-2} & & & & & & \\
 & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & & & & & & & \\
 & \boldsymbol{p}_0^{n-1} & & \boldsymbol{p}_1^{n-1} & & & & & & & & \\
 & {\color{red}\downarrow} & {\color{blue}\swarrow} & & & & & & & & & \\
i=N-1 & \boldsymbol{p}_0^n & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

其中，红色箭头 ${\color{red}\downarrow}$ 表示权重 $(1-t)$ ，蓝色箭头 ${\color{blue}\swarrow}$ 表示权重 t ，以下是简单实现：

```
Eigen::Vector2d at(const double& t)     // 查询点，基于De Casteljau's Algorithm
{
    PointsType temp = points_;
    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        for (int j = 0; j < N - i; ++j)
            temp.row(j) = (1.0 - t) * temp.row(j) + t * temp.row(j + 1);
    }
    return temp.row(0);
}
```

2. n-阶导数

2.1 推导

贝塞尔曲线的 k 阶导数可有如下的形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(k)}(t) &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_{i,n-k}\boldsymbol{p}_i^{(k)} \\ \boldsymbol{p}_i^{(k)} &= \boldsymbol{p}_{i+1}^{(k-1)} - \boldsymbol{p}_i^{(k-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

为了证明上式，先证明下面的结论 ***Theorem 1*** 和 ***Theorem 2***:

Theorem 1. n 阶贝塞尔曲线的系数项 $B_{i,n}(t)$ 满足以下公式：

$$B'_{i,n}(t) = n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right) \tag{7}$$

证明如下： $\frac{d}{dt}B_{i,n}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i}t^i\right) &= -(n-i)\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i-1}t^i + i\frac{n!}{(n-i)!i!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -n\frac{(n-1)!}{(n-1-i)!i!}(1-t)^{n-1-i}t^i + n\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\ &= -nB_{i,n-1}(t) + nB_{i-1,n-1}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Theorem 2. 贝塞尔曲线在 t 处的一阶段导数满足

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{p}_i^{(1)} B_{i,n-1}(t) \\ \boldsymbol{p}_i^{(1)} &= n(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i) \end{aligned} \tag{9}$$

证明如下：

由于 $B'_{i,n}(t) = n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right)$ ，并且设 $B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) = 0$ ，那么：

$B_{-1,n-1}(t)=0$

$B_{n,n-1}(t)=0$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(1)}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i B_{i,n}^{(1)}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p}_i n \left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} n\boldsymbol{p}_i B_{i-1,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_i B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_{i+1} B_{i,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n\boldsymbol{p}_i B_{i,n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} n\left(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i\right) B_{i,n-1}(t)\end{aligned} \tag{10}$$

为了得到更高阶次的导数公式，只需要重复 (9) 式即可得到二阶导数：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{(2)}(t) &= \sum_{i=0}^{n-2} \boldsymbol{p}_i^{(2)} B_{i,n-1}(t) \\ \boldsymbol{p}_i^{(2)} &= (n-1)\left(\boldsymbol{p}_{i+1}^{(1)} - \boldsymbol{p}_i^{(1)}\right) = (n-1)n\left(\boldsymbol{p}_{i+2} - 2\boldsymbol{p}_{i+1} + \boldsymbol{p}_i\right)\end{aligned} \tag{11}$$

不断重复这一过程，最终可以获得 (6) 式。

2.2 实现

我们考虑如何计算 (6) 式中的 $\boldsymbol{p}_i^{(k)}$. 观察式 (11) ，可发现与 $(5), (6)$ 有高度的相似性，于是我们同样使用De Casteljau’s Algorithm从底向上迭代计算 $\boldsymbol{p}_i^{(k)}$ ，下面是一个简单的示意图：

$$
\begin{array}{cccccc}
\boldsymbol{p}_0^{(0)} & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_0^{(1)} & & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_0^{(k)} \\
 & {\color{blue}\nearrow} & & \vdots & {\color{blue}\nearrow} & \\
\boldsymbol{p}_1^{(0)} & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_1^{(1)} & & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_1^{(k)} \\
 & {\color{blue}\nearrow} & & & {\color{blue}\nearrow} & \\
\boldsymbol{p}_2^{(1)} & {\color{red}\rightarrow} & \cdots & \vdots & {\color{red}\rightarrow} & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & {\color{blue}\nearrow} & \\
\boldsymbol{p}_{n-2}^{(0)} & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_{n-2}^{(1)} & & {\color{red}\rightarrow} & \mathbf{p}_{n-k}^{(k)} \\
 & {\color{blue}\nearrow} & & \vdots & {\color{blue}\nearrow} & \\
\boldsymbol{p}_{n-1}^{(0)} & {\color{red}\rightarrow} & \boldsymbol{p}_{n-1}^{(1)} & & & \\
 & {\color{blue}\nearrow} & & & & \\
\boldsymbol{p}_n^{(0)} & & & & &
\end{array}
$$

其中蓝色箭头（ $\rightarrow$ ）表示取正，红色箭头（ $\nearrow$ ）表示取负。在计算完毕 $\boldsymbol{p}_i^{(k)}$ 后，使用第一节中的方法计算剩余部分，话不多说，上代码：

```
PointType
at(const double& t, const int& derivative_order = 0)
{
    PointsType temp = points_;

    int prefix = 1;
    for(int i = 0; i < derivative_order; ++i) prefix *= N-i;

    // 1. 计算 p^{(k)}
    for(int k = 0; k < derivative_order; ++k)
    {
        int I_range = N-derivative_order;
        for(int i = 0; i <= I_range; ++i)
        {
            temp.row(i) = temp.row(i+1) - temp.row(i);
        }
    }

    // 2. 计算 C^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N-k} B_{i,N-k}(t) p^{(k)}
    int I_range =  N - derivative_order;
    for (int i = 0; i < I_range; ++i)
    {
```

```
        int J_range = I_range - i;
        for (int j = 0; j < J_range; ++j)
            temp.row(j) = (1.0 - t) * temp.row(j) + t * temp.row(j + 1);
    }
    return prefix * temp.row(0);
}
```

基于[1]中的例子，简单验证一下：

Example 6.2. Consider a cubic Bézier curve defined by control points $(1,1)$, $(3,1)$, $(4,2)$, and $(6,3)$. The differences of the control points are

$$(3,1)-(1,1)=(2,0), \quad (4,2)-(3,1)=(1,1), \quad (6,3)-(4,2)=(2,1).$$

Multiplication by three yields the control points of the first derivative

$$\mathbf{b}_0^{(1)}=(6,0), \quad \mathbf{b}_1^{(1)}=(3,3), \quad \mathbf{b}_2^{(1)}=(6,3).$$

The derivative can be expressed as the quadratic Bézier curve

$$(6,0)(1-t)^2+(3,3)2(1-t)t+(6,3)t^2.$$

To determine the control points of the second derivative we compute the differences

$$(3,3)-(6,0)=(-3,3), \quad (6,3)-(3,3)=(3,0)$$

and multiply by two to get $\mathbf{b}_0^{(2)}=(-6,6)$ and $\mathbf{b}_1^{(2)}=(6,0)$. The second derivative of the cubic Bézier curve can be expressed as the linear curve

$$(-6,6)(1-t)+(6,0)t.$$

To obtain the tangent vector at, for instance, $t=0.5$, we make a substitution $t=0.5$ in the first derivative and get

$$C'(t)=(4.5,2.25).$$

```
#include <iostream>
#include "bezier.hpp" // 悄咪咪封装了
using namespace std;

void mini_test()
{
    Bezier bezier {{1,1},{3,1},{4,2},{6,3}};
    cout << bezier.at(0.5, 1) << endl; // (4.5, 2.25)
}

int main()
{
    mini_test();
    return 0;
}
```

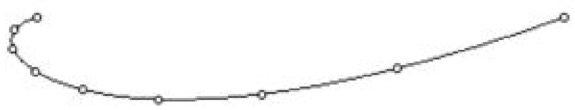
编译运行：

```
➜  ParametricCurves ./cmake-build-debug/ParametricCurves
 4.5 2.25
```

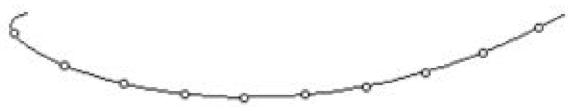
似乎可行

---

3. 弧长的重参数化（arc-length parametrization）



不等距取点



重参数化后等距取点

在实际的应用中，时常需要“贝塞尔曲线上，弧长1/4位置在哪？”这种需求，如果直接以 $t=0.4$ 代入曲线方程并取点，是不准确的。这是因为在弧上，每一点处的**速度**不相同，相同的 Δt 内对应“走过”的弧长也不相同。为了能在贝塞尔曲线上等距采点，考虑面向弧长的重参数化（arc-length parametrization）问题。

3.1 求弧长

首先我们先从如何求曲线弧长（arc-length）开始。为了求得弧长，设定 $0=a=t_1<t_2<\cdots<t_m=b=1$ ，使用区间内离散点之间的距离之和进行长度的近似：

$$L \approx \sum_{j=1}^{m-1}\left|\mathbf{C}\left(t_{j+1}\right)-\mathbf{C}\left(t_j\right)\right|$$

进一步，根据中值定理，可知：

$$L \approx \sum_{j=1}^{m-1}\left|\mathbf{C}'\left(t_j^*\right)\right|\left(t_{j+1}-t_j\right)$$

当 $t_{j+1}-t_j \to 0$ 时，我们得到精准的曲线长度：

$$L \approx \int_0^1 \left|\mathbf{C}'(t)\right| dt \tag{12}$$

对于贝塞尔曲线来说，这一个定积分是没有解析解的，需要通过数值积分的方式进行求解，这里简单使用Simpson's 3/8 rule进行逼近。这一个算法讲的是如何通过函数点获取积分值：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{3h}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]\\ &= \frac{(b-a)}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]\end{aligned} \tag{13}$$

那么结合 (6) (12) (13) ，很容易就可以求出任何阶次的贝塞尔曲线的弧长了。参考zhuanlan.zhihu.com/p/53...，这里给一个自适应的3/8辛普森的简单的实现：

```
struct NumericalIntegration
{
template <typename F>
static double
simpson_3_8(F&& derivative_func, const double& L, const double& R)
{
    double mid_L = (2*L + R) / 3.0, mid_R = (L + 2*R) / 3.0;
    return (derivative_func(L) +
            3.0 * derivative_func(mid_L) +
            3.0 * derivative_func(mid_R) +
            derivative_func(R)) * (R - L) / 8.0;
}

template <typename F>
static double
adaptive_simpson_3_8(F&& derivative_func,
    const double& L, const double& R, const double& eps = 0.0001)
{
    const double mid = (L + R) / 2.0;
    double ST = simpson_3_8(derivative_func, L, R),
           SL = simpson_3_8(derivative_func, L, mid),
           SR = simpson_3_8(derivative_func, mid, R);
    double ans = SL + SR - ST;
    if(fabs(ans) <= 15.0 * eps)  return SL + SR + ans / 15.0;
    return adaptive_simpson_3_8(derivative_func, L, mid, eps / 2.0) +
           adaptive_simpson_3_8(derivative_func, mid, R, eps / 2.0);
```

```
    }
};
```

计算贝塞尔长度时，只需：

```
void computeLength()
{
    auto df = [&](double t) -> double
    {
        return this->at(t,1).norm();
    };
    length_ = NumericalIntegration::adaptive_simpson_3_8(df, 0, 1);
}
```

3.2 arc-length 重参数化

通过定义一个映射 $\Lambda : [a, b] \to [0, L]$ ，获取原弧线参数 t 的定义域 $[a, b]$ 到弧长区间 $[0, L]$ 上的一个“满射”：

$$\Lambda(t) = \int_a^t \left|\mathbf{C}'(z)\right| dz \tag{14}$$

由于这一个函数是严格递增，且连续可导的，那么该映射 Λ 的“反函数”，我们假设为 $\phi(s)$ ，会将 $[0, L] \to [a, b]$. 那么此时，在给定 s 位置下，对应的曲线的参数为 $\phi(s)$ ，令 $|\mathbf{C}'(\phi(s))| = |\tilde{\mathbf{C}}'(s)|$ ， $\mathbf{C}'(\phi(s))$ 关于 t 求导有：

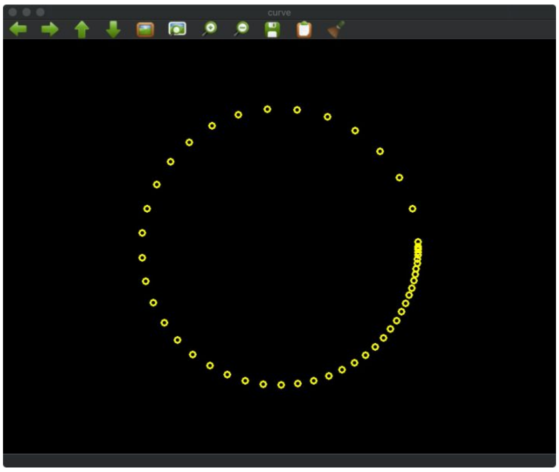
$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}'(s) &= \mathbf{C}'(t)\frac{d\phi(s)}{ds} \\ &= \mathbf{C}'(t)\frac{1}{\Lambda'(t)} \\ &= \frac{\mathbf{C}'(t)}{|\mathbf{C}'(t)|}\end{aligned} \tag{15}$$

整体取2范数后，得到 $|\tilde{\mathbf{C}}'(s)| = 1$. 这一个结论和我们先前的说辞是一致的，即：在贝塞尔曲线上，每一点处的**速度**不相同，相同的 Δt 内对应“走过”的弧长也不相同。当重参数化后的函数导数值恒定为 1 ，那么基于此即可得到等弧长间距的点。

具体举一个栗子。考虑这样一个曲线：

$$\gamma(t) = \left(R\cos t^2, R\sin t^2\right), \quad t \in \left[0, (2\pi)^{1/2}\right]$$

直接使用 t 取点时，具有明显的不均匀现象：



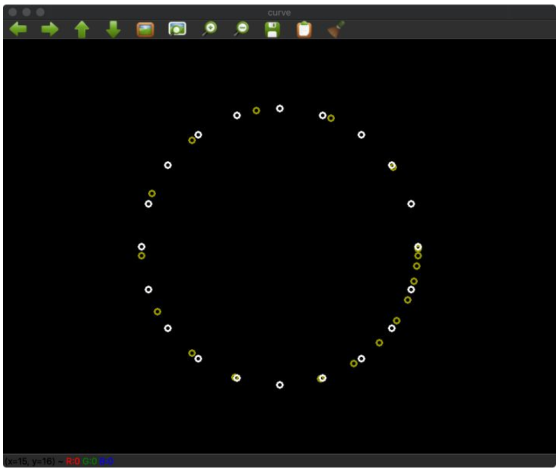
接着，我们先求其 $\Lambda(t)$ ，再求其 $\Lambda(t)$ 的反函数：

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= \int_0^t |\gamma_1'(z)|\, dz \\ &= \int_0^t \sqrt{4R^2 z^2 \sin^2 z^2 + 4R^2 z^2 \cos^2 z^2} dz \\ &= \int_0^t 2Rzdz \\ &= Rt^2\end{aligned} \tag{16}$$

其反函数为 $\phi(s) = \sqrt{s/R}$ ，所以其arc-length 重参数化形式为：

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)) = \left(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right), \quad s \in [0, 2\pi R]$$

使用这结果，再次计算，有：



白色部分为arc-length参数化后结果

以上涉及的实验代码：

```
string window_name = "curve";
int win_width = 800, win_height = 600, R = 200;

cv::namedWindow(window_name);
cv::Mat img {win_height, win_width, CV_8UC3, cv::Scalar(0)};

auto f  = [](double R, double t)->cv::Point2d {return {R*cos(t*t),R*sin(t*t)};};
auto af = [](double R, double s)->cv::Point2d {return {R*cos(s/R),R*sin(s/R)};};

auto draw_func = [&](auto func, double step, double end, const cv::Scalar& color)
{
    double t = 0;
    auto display_bias = cv::Point2d(win_width/2, win_height/2);
    while(t<=end) {
        auto p  = func(R, t) + display_bias;
        cv::circle(img, p, 4, color,2);
        t +=step;
    }
};

draw_func(f,  sqrt(2*M_PI)/20, sqrt(2*M_PI), {0, 155, 155});
draw_func(af, 2*M_PI*R/20,     2*M_PI*R,     {255, 255, 255});

cv::imshow(window_name, img);
cv::waitKey(0);
```

3.3 贝塞尔曲线的 arc-length 参数化逼近

那么，对于贝塞尔曲线来说，可以运用相同的方法求解吗？答案是，**不完全能**，对于高阶次的贝塞尔曲线来说，不具有如同 (16) 一般的闭式解。好了朋友们，那么本文就要在此完毕了吗？先前确实是说了些和求解贝塞尔曲线的arc-length参数化点无关的话，但也是本着科普的心情。那么进入正题：如何通过数值方法求解“从起点出发的 s 弧长位置的贝塞尔参数 t_s ”呢？

在之前的讨论中，我们知道可以基于长度积分公式 (6) 和Simpson's rule (12) 得到贝塞尔曲线的长度，那么若要求得某弧长的参数位置，利用暴力的方法，只需要遍历一遍积分区间 $[0, t_s]$ ，在足够靠近目标弧长值时停下即可。但是，暴力法需要较小的粒度 Δt ，如果贝塞尔曲线很长，需要的查询次数很多，必将消耗大量的时间。接下来的部分，将说明如何使用牛顿法（Newton's method）找到 t_s ，为此，将寻找 t_s 的问题建模为：

$$t_s = \arg\min_{t\in[0,1]} (L(t) - s)^2 = \arg\min_{t\in[0,1]} g(t) \tag{17}$$

其中， $L(t)$ 来自式 (12) ，表示 t 参数位置对应的曲线位置距离其起点的弧长：

$$L(t) \approx \int_0^t \left|\mathbf{C}'(t)\right| dt \tag{18}$$

为了利用牛顿法，求 $g(t)$ 的一阶导数与二阶导数：

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2d|\mathbf{C}'(t)| \\ g''(t) &= 2d|\mathbf{C}''(t)| + |\mathbf{C}'(t)|^2 \\ d &= L(t) - s \end{aligned} \tag{19}$$

那么， t_s 可由下面的迭代公式确定：

$$t_{s,n+1} = t_{s,n} - \frac{g'(t)}{g''(t)} \tag{20}$$

在迭代的过程中， $t_{s,0}$ 可以初始化为 $1.0 \times \dfrac{s}{L}$ ，这一个值在大部分的情况下，已经足够接近真实值了，并且，我们也无须计算 $s=0$ 以及 $s=L$ 处的点（根据公式 (14) 及其附近相关的说明）。每次更新 t 后，都需要计算一次 $L(t)$ ，这一个计算可以通过之前提及的基于Simpson' Rule 的长度积分公式完成，但是这样使得每次都需要进行一次计算量不小的数值积分。

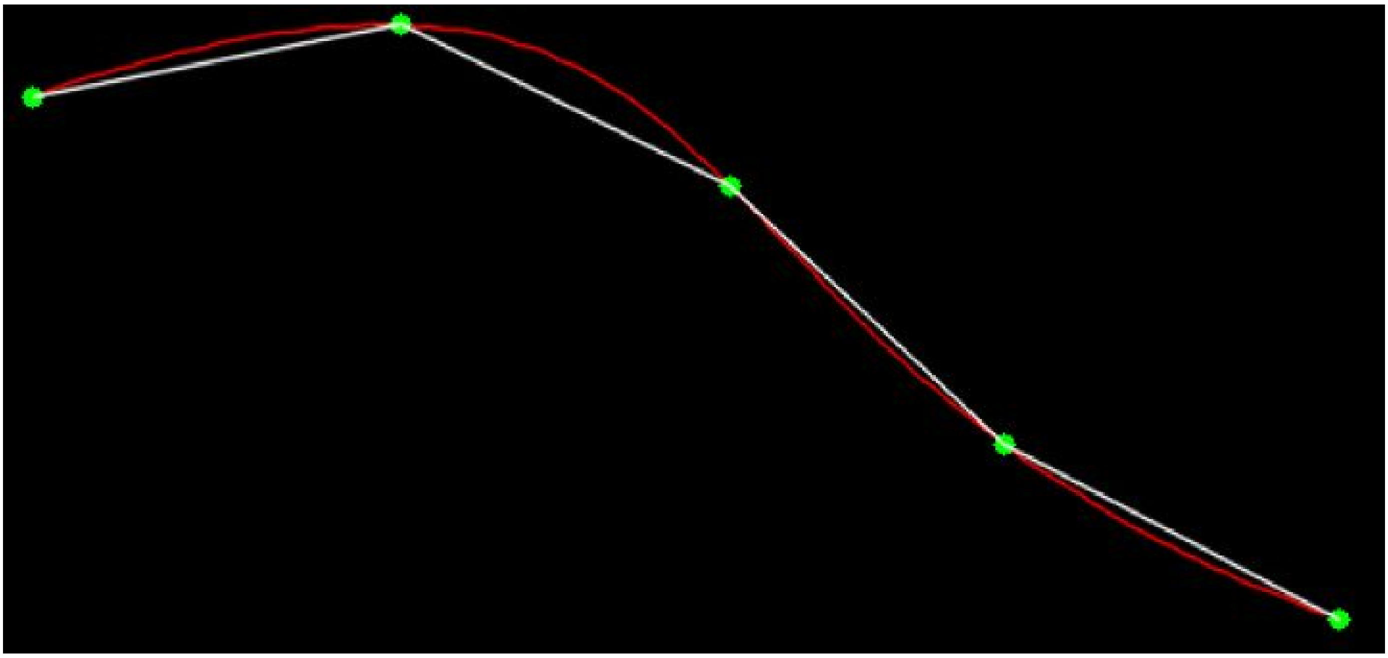
```
const auto df = [&](double t) -> double{ return this->at(t, 1).norm(); };

...
```

```
for(int iter = 0; iter < max_iter_time; ++iter)
{
    double approx_length = NumericalQuadrature::adaptive_simpson_3_8(df, 0, approx_t);
    double d = approx_length - target_length;
    if (abs(d) < iter_eps) break;

    // Newton's method
    double first_order  = this->at(approx_t, 1).norm();
    double second_order = this->at(approx_t, 2).norm();
    double numerator    = d * first_order;
    double denominator  = d * second_order + first_order * first_order;
    // update
    approx_t = approx_t - numerator / denominator;

    if ( abs(approx_t-prev_approx_t) < iter_eps) break;
    else prev_approx_t = approx_t;
}
```



如上图中，我们若要均匀采集5个等弧长间距点，则需要进行三轮大（只需计算中间三个）的数值计算，即每一个点都需要用数值积分和牛顿法找到确切点， 这样的方法，可以**用于单点的精确计算**，如果涉及到在曲线上**采样等弧长间距的多个点，我们不必每次都使用Simpson's Rule**计算每一个采样点的 $L(t)$ ，而是简单地使用采样点与采样点之间的距离（如上图白色直线所示）的累加近似即可，下面给出迭代过程中的简单代码说明：

```
for(int iter = 0; iter < max_iter_time; ++iter)
{
    // 1. 计算上一次迭代确定的 t 参数下，每一个采样点的位置
```

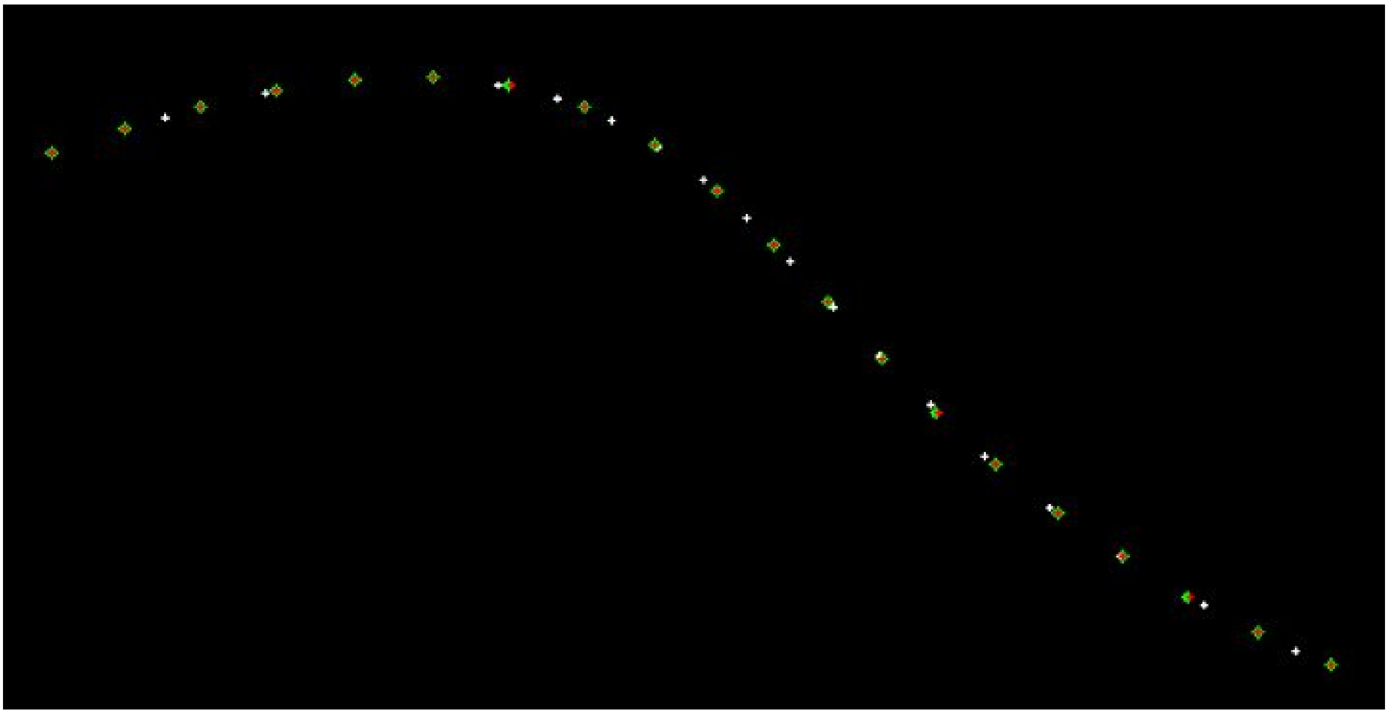
```
    for (int j = 1; j < n; j++) dists[j] = (ret[j]-ret[j-1]).norm();

    double offset = 0;
    for (int j = 1; j < n; j++)
    {
        //2. 累计近似弧长并计算误差
        const double err_dist = dists[j] - avg_distance;
        offset += err_dist;

        //3. Newton's method
        double first_order  = this->at(t_array[j], 1).norm();
        double second_order = this->at(t_array[j], 2).norm();
        double numerator    = offset * first_order;
        double denominator  = offset * second_order + first_order * first_order;

        t_array[j] = t_array[j] - numerator / denominator;

        ret[j] = this->at(t_array[j]);
    }
}
```



根据以上说明，给出一个简单的例子。上图中，白色点为未参数化时的均 t 间距采样结果，绿色为近似方法的采样结果，而红色为使用Simpson' Rule数值逼近的结果。我们认为Simpson' Rule数值逼近的方法具有最高精度，那么此时可以发现，近似方法大部分接近“真实位置”，而未参数化的点则有较大的“偏差”（本来也肯定不是那个位置）。

4. 多段拟合

多段三次贝塞尔曲线拟合

在这一部分中，简单说明如何进行多段三次贝塞尔曲线的拟合（Piecewise Bezier Curve Fitting）。关于具体如何拟合，清参考《Graphics Gems》中的"Algorithm for Automatically Fitting Digitized Curves"、以及 github.com/volkerp/fitC... 的实现里的内容。其中大部分涉及到的知识点，如贝塞尔曲线的定义、求导等，均已在以上几个小节说明，其它较为重要的点为：

- 求某一点到贝塞尔曲线的最短距离，对应代码位置为

https://github.com/volkerp/fitCurves/blob/c59eccf26178a42fcb0dfe4e826...
github.com

这一部分的算法，与前面的3.3小节比较相似，主要利用“点到曲线的最短距离向量”与“对应曲线位置的切线”垂直这一点构建误差方差，接着使用牛顿法确定参数 t 位置，得到距离残差。

- 构建单条贝塞尔曲线，对应代码位置为

https://github.com/volkerp/fitCurves/blob/c59eccf26178a42fcb0dfe4e826...
github.com

这部分比较困难，能看到了这里的朋友应该不难自己看一下原著和代码，此处不多加叙述。

这个文章的涉及到的代码，已经封装成某 `class Beizer` 了，但我是绝对不会放出来的。

参考

1. ^ http://math.aalto.fi/~ahniemi/hss2012/Notes06.pdf

编辑于 2020-05-15

贝塞尔曲线　高精度地图

推荐阅读

#每日读报60秒#2017.3.2 日读报

大微小观　发表于早

3 条评论　切换为时间排序

写下你的评论...

鸭博　1 个月

檀博乃我辈楷模

赞

yfzhang 16 天前

公式8，最后t那项指数是i-1

1

iceytan (作者) 回复 yfzhang 16 天前

多谢指正

赞