



北京航空航天大学
B E I H A N G U N I V E R S I T Y

自动控制原理实验 A(2)

实验报告

院(系)名称

高等理工学院

学 号

16231235

姓 名

李谨杰

指导教师

2019 年 5 月

实验五 采样系统研究

实验时间：2019.04.16 实验编号： 同组同学：无

一、实验目的

1. 掌握信号采样和恢复的原理及过程，理解香农定理。
2. 掌握采样系统的瞬态响应与极点分布的对应关系。
3. 理解最少拍采样系统原理，掌握数字控制器的设计方法。

二、实验内容

1. 改变采样周期 $T=0.01s$ 、 $0.2s$ 、 $0.5s$ ，观察研究对象 $G_s(s) = \frac{4}{s+1}$ 在阶跃信号作用下的过渡过程。

被控对象模拟电路图和系统结构分别如图 2.5.1、图 2.5.2 所示。

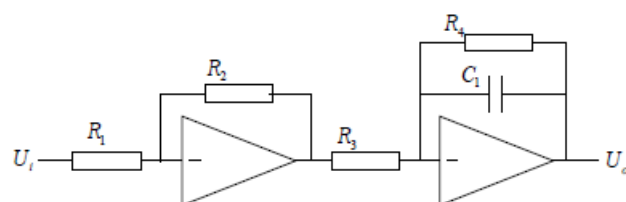


图 2.5.1 系统模拟电路图

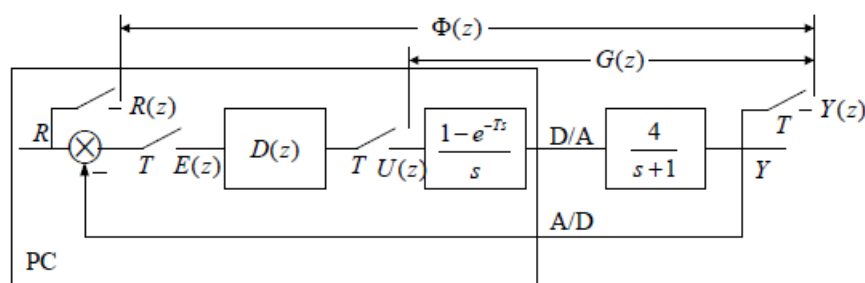


图 2.5.2 系统结构图

图 2.5.2 中, $D(z) = U(z) / E(z) = 1$ ，系统被控对象脉冲传递函数为：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{4}{s+1} \right] = \frac{4(1 - e^{-T})}{z - e^{-T}}$$

系统开环脉冲传递函数为：

$$G_w(z) = D(z)G(z) = \frac{4(1 - e^{-T})}{z - e^{-T}}$$

系统闭环脉冲传递函数为： $\Phi(z) = \frac{G_w(z)}{1 + G_w(z)}$

在 Z 平面内讨论，当采样周期 T 变化时对系统稳定性的影响。

2. 以下数字控制器设计内容 3 选 2:

(1) 当采样周期 $T=1s$ 时, $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 设计 $D(z)$, 使该系统在单位阶跃信号作用下为最小拍无差系统, 观察并记录理论与实际系统输出波形。

(2) 当采样周期 $T=1s$ 时, $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$, 设计 $D(z)$, 使该系统在单位阶跃信号作用下为最小拍无差系统, 观察并记录理论与实际系统输出波形。

(3) 当采样周期 $T=1s$ 时, $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 设计 $D(z)$, 使该系统在斜坡信号作用下为最小拍无差系统, 观察并记录理论与实际系统输出波形。

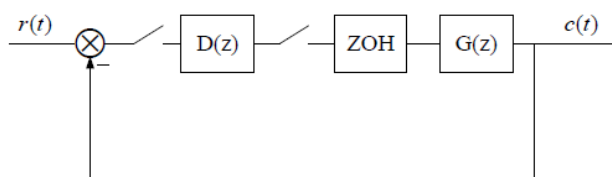


图 2.5.3 最小拍无差系统

三、实验原理

1. 采样: 把连续信号转换成离散信号的过程。

2. 香农定理: 如果选择的采样角频率 ω_s , 满足 $\omega_s \geq 2\omega_{max}$ 条件 (ω_{max} 为连续信号频谱的上限频率), 即在一个周期内采样两次以上, 那么经采样所获得的脉冲序列包含了连续信号的全部信息, 可以通过理想的低通滤波器无失真地恢复成原连续信号。

3. 信号的复现: 把采样信号转换成连续信号的过程。

零阶保持器是将采样信号转换成连续信号的元件, 是一个低通滤波器; 其功能是把每个采样瞬间的采样值保持到下一个采样瞬间, 从而使采样信号变成阶梯信号。其传递函数为 $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ 。

4. 采样系统的极点分布对瞬态响应的影响: Z 平面内的极点分布在单位圆的不同位置, 其对应的瞬态分量是不同的。

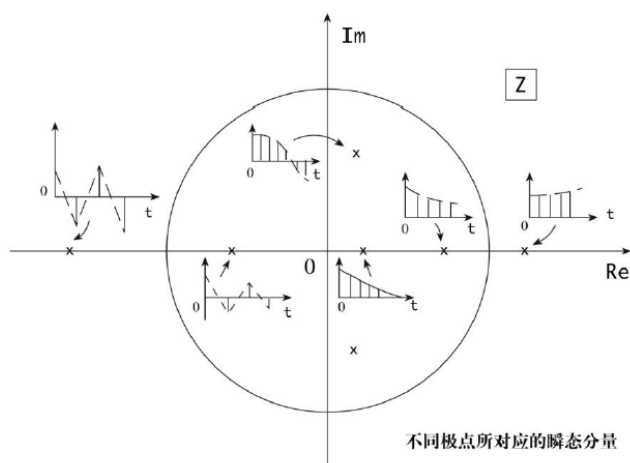


图 2.5.5 Z 平面极点分布图

5. 最少拍无差系统：通常称一个采样周期为一拍，系统过渡过程结束的快慢常采用采样周期来表示，若系统能在最少的采样周期内达到对输入的完全跟踪，则称为最少拍误差系统。对最少拍系统时间响应的要求是：对于某种典型输入，在各采样时刻上无稳态误差；瞬态响应最快，即过渡过程尽量早结束，其调整时间为有限个采样周期。从上面的准则出发，确定一个数字控制器，使其满足最少拍无差系统。

四、实验设备

1. 数字计算机
2. 电子模拟机
3. 万用表
4. 测试导线

五、实验步骤

1. 熟悉 HHMN-1 型电子模拟机的使用方法。将各运算放大器接成比例器，通电调零。
2. 断开电源，按照系统结构图和系统传递函数计算电阻和电容的取值，并按照模拟线路图搭接线路。
3. 谨慎连接输入、输出端口，不可接错（参见注意事项 1）。线路接好后，经教师检查后再通电。
4. 在 Windows XP 桌面用鼠标双击“MATLAB”图标后进入，在命令行处键入“autolab”进入实验软件系统。
5. 在系统菜单中选择实验项目，选择“实验五”，在窗口左侧选择“实验模型”，其它步骤察看概述 3.2 节内容。
6. 观测实验结果，记录实验数据（参见注意事项 2），及时绘制实验结果图形（参见注意事项 3），填写实验数据表格，完成实验报告。
7. 研究性实验方法。实验者可自行设计无纹波最少拍系统，并建立系统的 SIMULINK 模型，进行研究实验。实现步骤可查看概述 3.3 节内容。

六、实验结果

1. 研究采样时间对阶跃信号下过渡过程的影响
计算电路的取值过程如下：

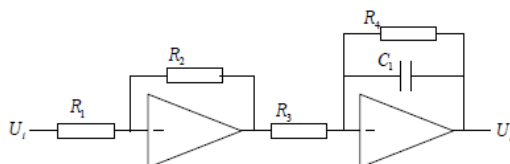


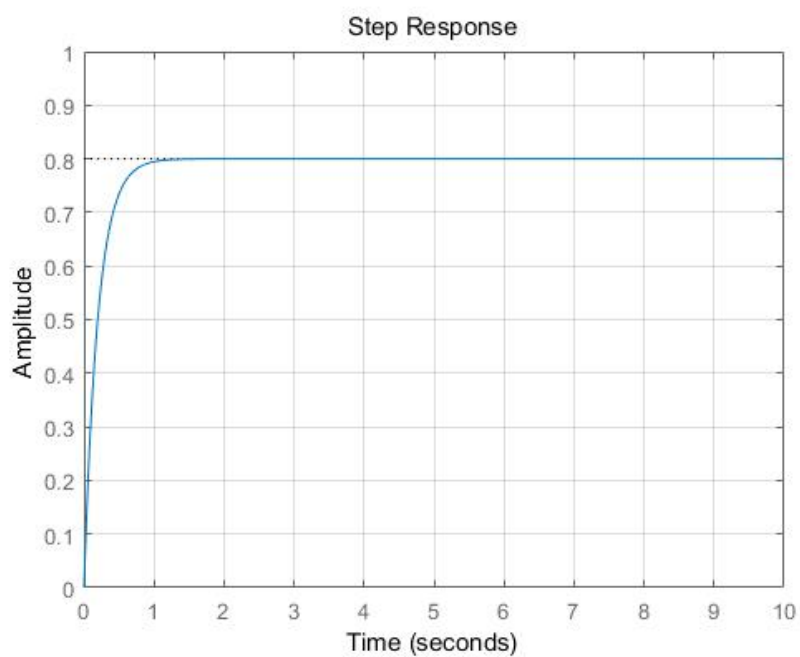
图 2.5.1 系统模拟电路图

由比例电路和积分电路的特性得：

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + C_1 R_4 s}$$

与实际电路结合： $R_2=R_3=R_4=1\text{M}\Omega$ ， $R_1=250\text{k}\Omega$ ， $C_1=1\mu\text{F}$ 。 R_1 由两个 $500\text{k}\Omega$ 电阻并联得到。

仿真得到的理想响应如下：



改变采样时间 T ，采样仿真与实验记录波形记录如下：

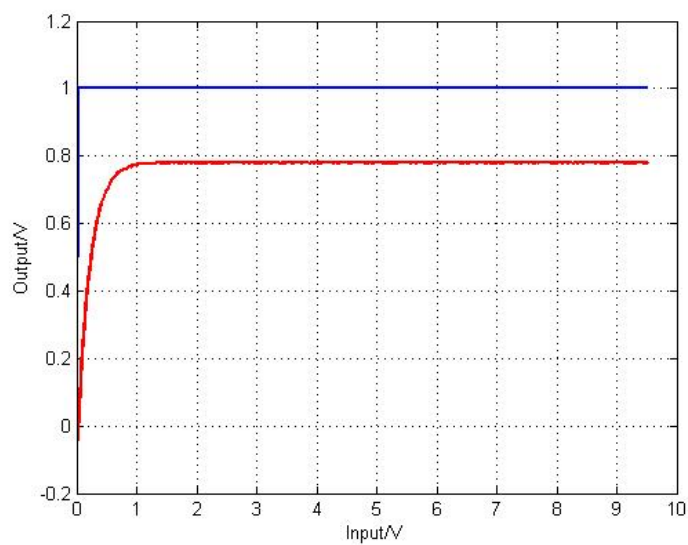
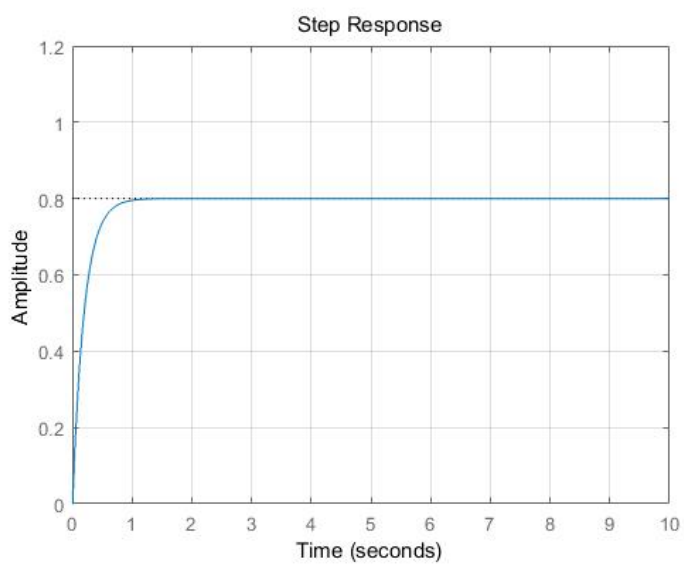


图 1. $T=0.01s$ 时系统的过渡过程，左为仿真，右为实验记录

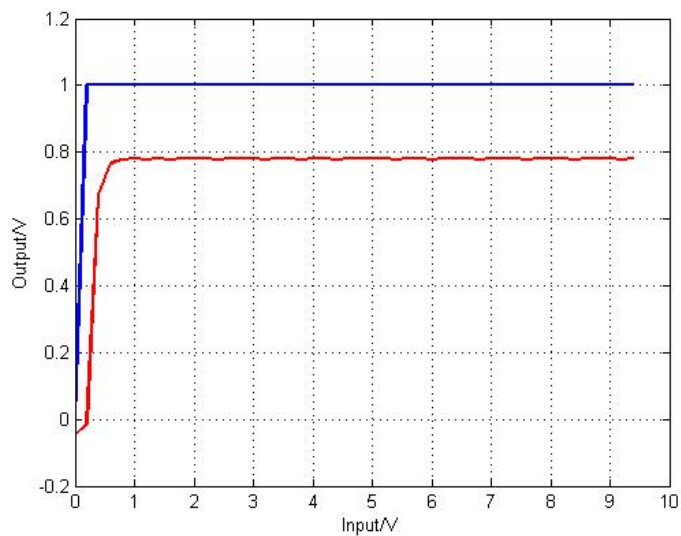
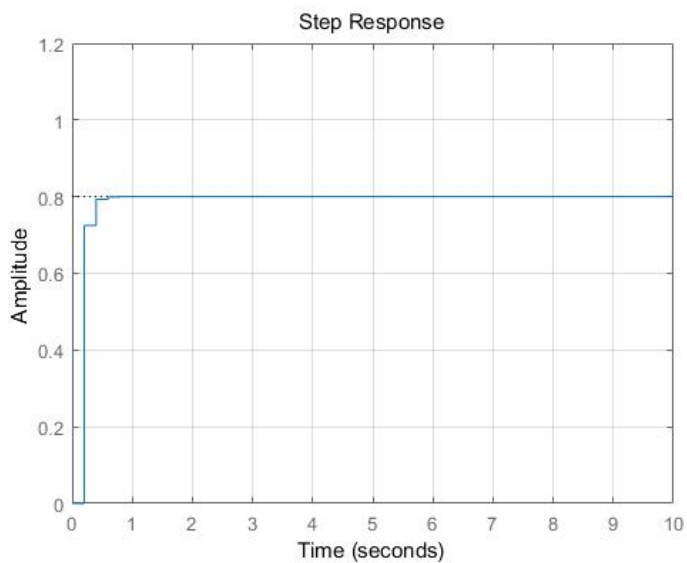


图 2. T=0.2s 时系统的过渡过程，左为仿真，右为实验记录

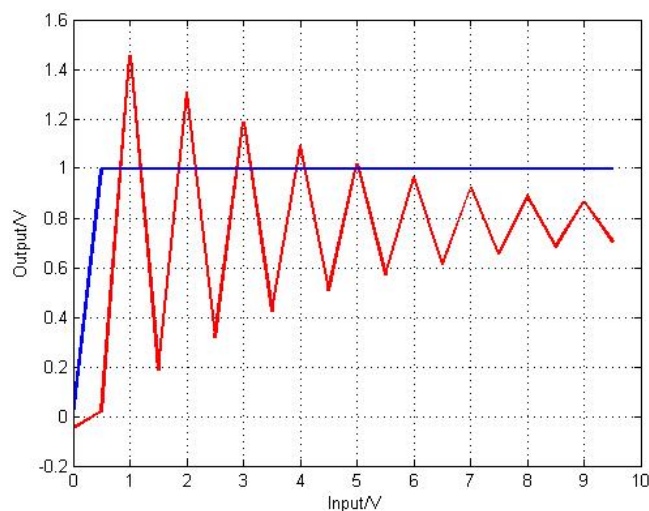
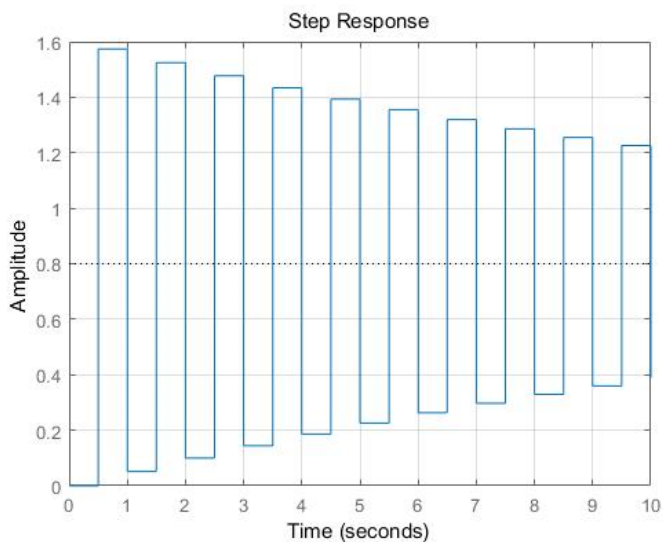


图 3. T=0.5s 时系统的过渡过程，左为仿真，右为实验记录

2. 设计数字控制器

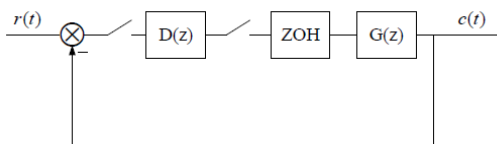


图 2.5.3 最小拍无差系统

由最小拍无差系统的结构图可知，闭环脉冲传递函数为：

$$\Phi(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}$$

当输入为时间的幂函数 $At^q (t > 0)$ 时，若能选择合适的 $D(z)$ ，使

$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^{q+1}$ ，则该闭环采样系统便为最小拍无差系统，数字控制器的脉

冲函数为

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

下面对实验（1）进行设计：

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{(T-1+e^{-T})z \cdot (1+T)e^{-T} + 1}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$T=1s$ ，则

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

因为 $r(t)=1(t)$ ，所以 $q=0$ ，即 $\Phi(z)=1-(1-z^{-1})$

将 $\Phi(z), G(z)$ 代入 $D(z)$ 的方程，解得：

$$D(z) = \frac{z - 0.368}{0.368z + 0.264}$$

将 $D(z)$ 的表达式代入实验框中，采样如图 4：

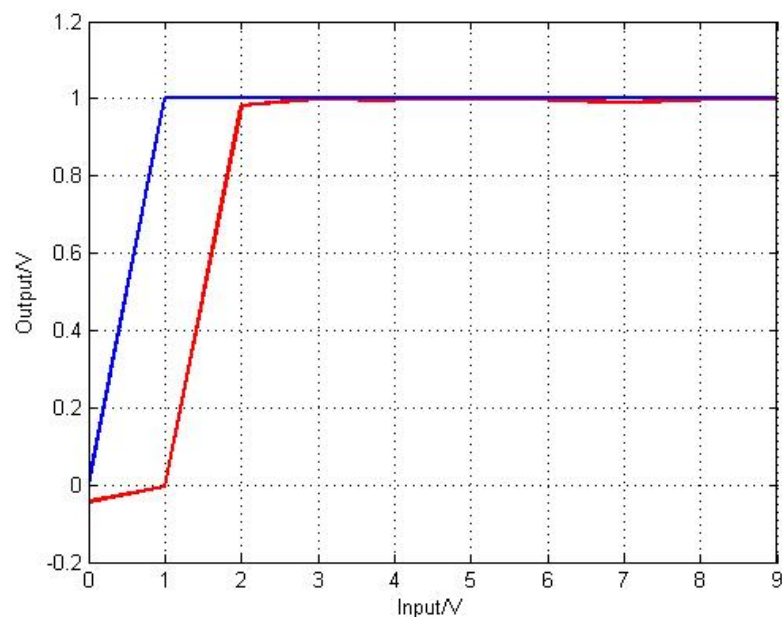


图 4. 设计最小拍无差系统的采样结果

由实验结果可知，经过两拍（2 个采样周期），系统过渡过程结束，达到对输入的完全跟踪。

七、结果分析

1. 由实验结果可知，采样时间会对系统稳定性产生影响。如果采样时间过大，就会使原本稳定的系统产生振荡，甚至变得不稳定。

具体的稳定性判据是判断系统闭环 z 函数的极点位置，不同的位置会有不同

的瞬态分量，判断方法见图 5。

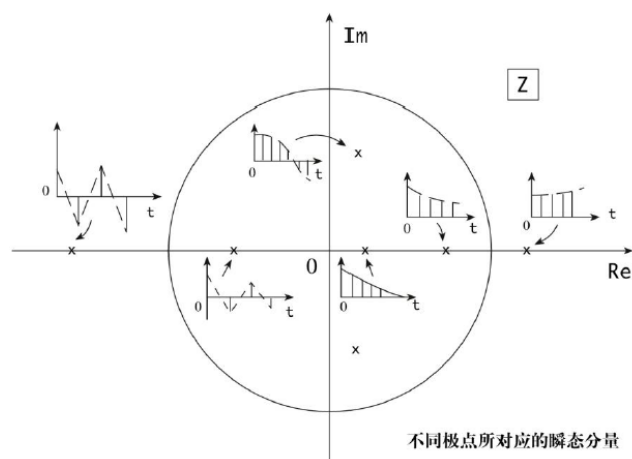


图 5. 不同极点对应的瞬态分量

当 $T=0.2s$ 时， Z 函数为

$$\Phi(z) = \frac{0.7251}{z - 0.09365}$$

极点 $p=0.09365$ 位于正半轴单位圆内，由图 5 可知，将会直接趋近收敛值，与实验结果相符。

当 $T=0.5s$ 时， Z 函数为：

$$\Phi(z) = \frac{1.574}{z + 0.9673}$$

极点 $p=-0.9673$ 位于负半轴单位圆内，由图 5 可知，将会振荡收敛，与实验结果相符。

2. 由实验结果可以看出，系统稳态值与输入值之间存在 0.2 的稳态误差。原连续函数为 0 型系统，系统增益为 $k=4$ ，则单位阶跃响应下的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{k+1} = 0.2$ ，与实验结果相符。因此在采样时间较小时，系统的响应可以看作是对原连续系统响应的采样，不会改变原连续函数的特性。

3. $D(z)$ 设计过程见上一节。

4. 通过 matlab 仿真得到的仿真图与实际图有一定区别，具体分析如下：

(1) matlab 仿真图会保持采样值，而实际图会将两次采样值用直线直接连起来，因此仿真图是矩形的，实际图是三角样子的。

(2) 对于理想单位阶跃输入，在 $t=0$ 时输入已经为 1；但在实验中，可以看到在 $t=0s$ 之后的一个采样点才变为 1，这将会造成结果的差异，且采样周期越长差异越大。

(3) 实际的电阻、电容值与理想值存在差异。

5. 课后思考题-工程中采样频率的选取条件：工程中选择采样频率要考虑系统性能、经济性等参数，也要考虑采样的用途，允许误差，采样信号波形，频谱情况等限制条件。当两采样点与正弦信号的峰点对称时，可得到采样值最大相对误差 $m = 1 - \cos(\frac{f_1}{f_s} 180^\circ)$ 。当信号为简谐波，如要求误差小于 1%，则 f_s/f_1 应不小于 22；当信号为随机波，通带上限分量的幅值为主频值的 1/3 时，如要求误

差小于 1%，则 f_s/f_l 应不小于 13。

6. 由图 2 实验记录的图可知，稳定后出现了上下小幅震荡。根据计算机控制系统的知识，这种震荡是由量化误差引起的。

八、收获、体会及建议

对离散系统进行仿真需要注意的事情：

1. 对于离散系统，输入 `tf` 函数时，要在最后加上采样时间 `t`，告诉 `matlab` 这是 `t` 下的 `Z` 函数，否则系统默认为 `s` 函数。
2. 一定要将开环传递函数通过 `feedback` 函数变为闭环传递函数后，再进行 `step` 仿真。

另附仿真 MATLAB 代码：

```
clear; clc;
T=0.2;
num=4*(1-exp(-T));    %分子系数
den=[1 -exp(-T)];    %分母系数
hd=tf(num,den,T);    %加入 T 表明是离散系统，Z 域，非常重要 开环传递函数
sys=feedback(hd,1);    %变为闭环传递函数!!!!
hds=d2c(hd);    %hds 是由 hd 从 Z 域变换到 s 域的函数
figure;
step(sys);
set(gca,'XLim',[0 10]);
set(gca,'YLim',[0 1.6]);
grid on;
num1=4;
den1=[1,1];
h=tf(num1,den1);
sys1=feedback(h,1);
% figure;
% step(sys1);
% set(gca,'XLim',[0 10]);
% set(gca,'YLim',[0 1]);
% grid on;
```

九、参考文献

- [1]. 黄振平. 采样频率的合理选择[J]. 世界地震工程, 1998(3):63-67.

实验六 状态反馈与状态观测器

实验时间：2019.05.07 实验编号： 同组同学：无

一、实验目的

1. 掌握利用状态反馈进行极点配置的方法。
2. 掌握基于状态观测器的状态反馈系统实现方法。
3. 理解系统极点、观测器极点与系统性能、状态估计误差之间的关系。

二、实验内容

1. $G_c(s) = \frac{1}{0.05s^2 + s + 1}$ 的系统结构图如图 2.6.1 所示，要求设计状态反馈阵 K ，使

动态性能指标满足超调量 $\sigma \% \leq 5\%$ ，峰值时间 $t_p \leq 0.5s$ ，并利用电子模拟机进行实验验证。

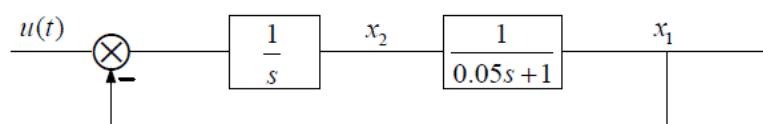


图 2.6.1 二阶系统结构图

2. 被控对象传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 3.945s + 103.57}$$

写成状态方程形式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

为其配置系统极点为 $s_{1,2} = -7.35 \pm j7.5$ ；观测器极点为 $s_{1,2} = -30 \pm j0$ 。分别计算状态反馈增益阵和观测矩阵，并进行实验验证。

分别改变几组系统极点和观测器极点，各自比较系统阶跃响应差异。

被控对象的模拟电路图如图 2.6.2 所示；带有状态观测器的状态反馈系统方框图如图 2.6.3 所示。

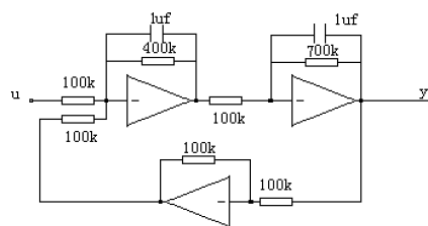


图 2.6.2 模拟电路图

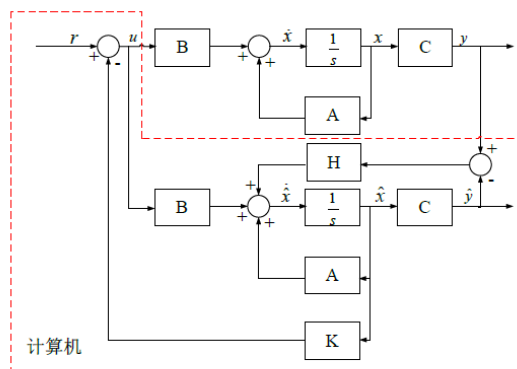


图 2.6.3 带有状态观测器的状态反馈系统方框图

三、实验原理

1. 闭环系统的动态性能与系统的特征根密切相关，在状态空间的分析中可利用状态反馈来配置系统的闭环极点。这种校正手段能提供更多的校正信息，在形成最优控制率、抑制或消除扰动影响、实现系统解耦等方面获得广泛应用。在改善与提高系统性能时不增加系统零、极点，所以不改变系统阶数，实现方便。

2. 已知线形定常系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

为了实现状态反馈，需要状态变量的测量值，而在工程中，并不是状态变量都能测量到，而一般只有输出可测，因此希望利用系统的输入输出量构成对系统状态变量的估计。解决的方法是用计算机构成一个与实际系统具有同样动态方程的模拟系统，用模拟系统的状态向量 $\hat{x}(t)$ 作为系统状态向量 $x(t)$ 的估值。

状态观测器的状态和原系统的状态之间存在着误差，而引起误差的原因之一是无法使状态观测器的初态等于原系统的初态。引进输出误差 $\hat{y}(t) - y(t)$ 的反馈是为了使状态估计误差尽可能快地衰减到零。

状态估计的误差方程为

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A\hat{x}(t) - Ax(t) - HC[\hat{x}(t) - x(t)] = (A - HC)[\hat{x}(t) - x(t)]$$

误差衰减速度取决于矩阵 $(A - HC)$ 的特征值。

3. 若系统是可控可观的，则可按极点配置的需要选择反馈增益阵 K ，然后按观测器的动态要求选择 H ， H 的选择并不影响配置好的闭环传递函数的极点。因此系统的极点配置和观测器的设计可分开进行，这个原理称为分离定理。

四、实验设备

1. 数字计算机
2. 电子模拟机
3. 万用表
4. 测试导线

五、实验步骤

1. 熟悉 HHMN-1 型电子模拟机的使用方法。将各运算放大器接成比例器，

通电调零。

2. 断开电源，按照系统结构图和系统传递函数计算电阻和电容的取值，并按照模拟线路图搭接线路，不用的运算放大器接成比例器。

3. 谨慎连接输入、输出端口，不可接错（参见注意事项 1）。线路接好后，经教师检查后再通电。

4. 在 Windows XP 桌面用鼠标双击“MATLAB”图标后进入，在命令行处键入“autolab”进入实验软件系统。

5. 在系统菜单中选择实验项目，选择“实验六”，在窗口左侧选择“实验模型”，其它步骤察看概述 3.2 节内容。

6. 观测实验结果，记录实验数据（参见注意事项 2），及时绘制实验结果图形（参见注意事项 3），填写实验数据表格，完成实验报告。

7. 研究性实验方法。

实验者可自行确定待测系统传递函数，并建立系统的 SIMULINK 模型，验证自动控制理论相关的理论知识。实现步骤可查看概述 3.3 节内容。

六、实验结果

1. 设计实验一的状态反馈增益阵 K:

由二阶系统参数公式:

$$\text{超调量: } \sigma\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$\text{峰值时间: } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{联立解得: } \zeta=0.69 \quad \omega_n=8.68$$

$$\text{二阶系统特征根: } s_{1,2} = -5.99 \pm 6.28i$$

$$\text{代入 } \zeta, \omega_n \text{ 得理想极点 } s_1 = -5.99 + 6.28i, s_2 = -5.99 - 6.28i$$

对图 2.6.1 建立状态方程:

$$(u - x_1) / s = x_2$$

$$(0.05s + 1) \cdot x_1 = x_2$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u$$

$$y = (1 \quad 0) \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{所以, } A = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = (1 \quad 0) \quad p = (-5.99 + 6.28i \quad -5.99 - 6.28i)$$

利用MATLAB语句: `k=place(A,b,p);`

可得到期望的 K 阵为 (10.7859, -8.0200)

画结构图如下：

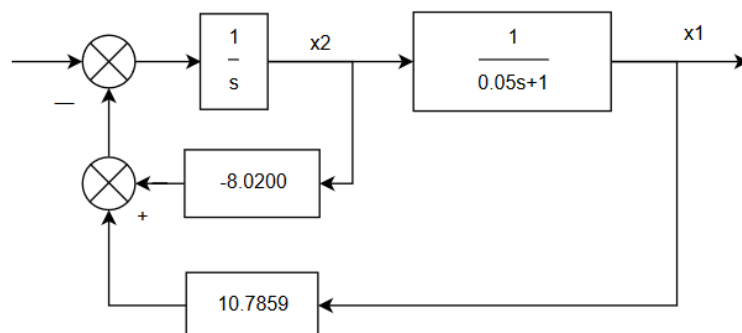


图 6.1 增加状态反馈的结构图

设计电路图：

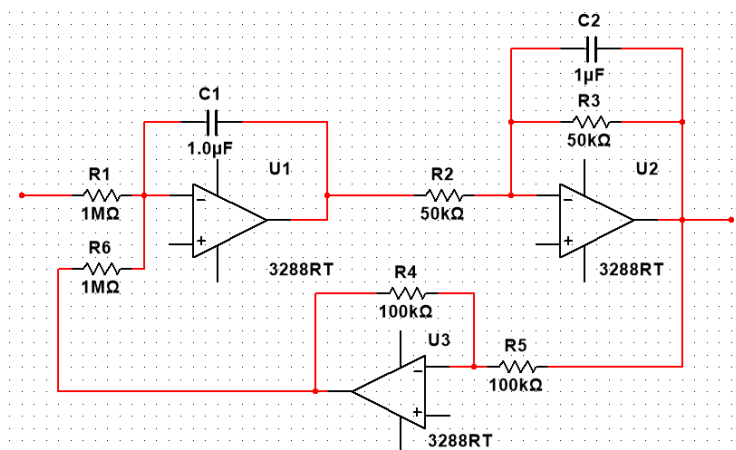


图 6.2 设计电路图

2. 为系统 $G(s) = \frac{100}{s^2 + 3.945s + 103.57}$ 配置观测器

根据可控标准形，可将方程化为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -103.57 & -3.945 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u \quad y = (100 \ 0) \cdot \mathbf{x}$$

所以，
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -103.57 & -3.945 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = (100 \ 0)$$

$$p(\text{状}) = (-7.35 + 7.5i \ -7.35 - 7.5i) \quad p(\text{观}) = (-30 \ -30)$$

由于分离原理，所以可以单独分别配置状态反馈矩阵和观测器矩阵。利用 matlab 进行配置：

`K=place(A,b,p1);`

`H=[acker(A',c',p2)]';` %利用对偶原理配观测器，重根必须用acker

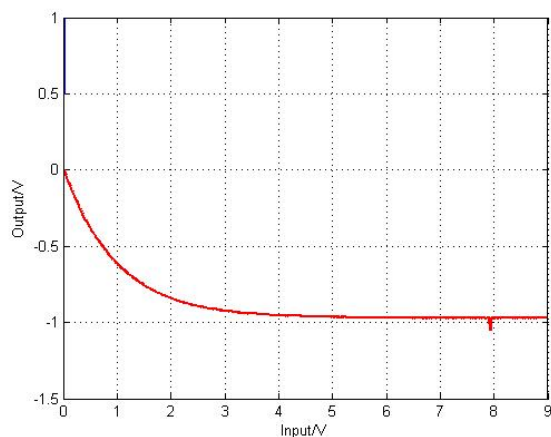
指令配置，不能用place配置

得到： $K = (6.7025, 10.7550)$ $H = (0.5605, 5.7529)'$

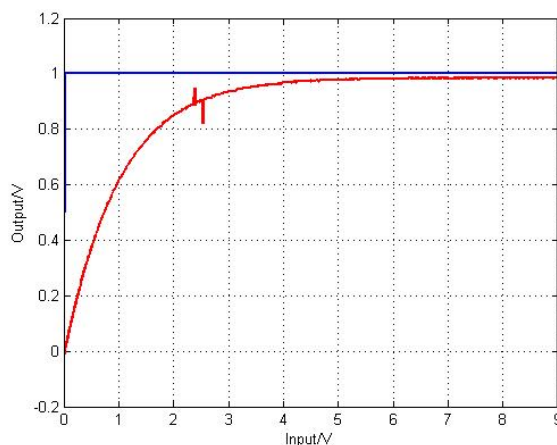
3. 不同系统极点/不同观测器极点时，实验数据收集如下：

(1) 系统 1：无状态反馈和有状态反馈的阶跃响应如下

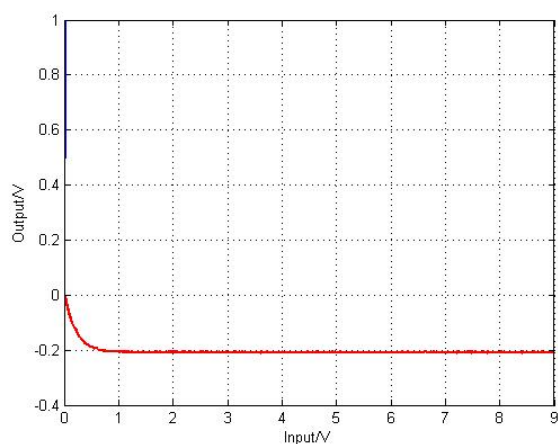
无状态反馈，第一次 ↓



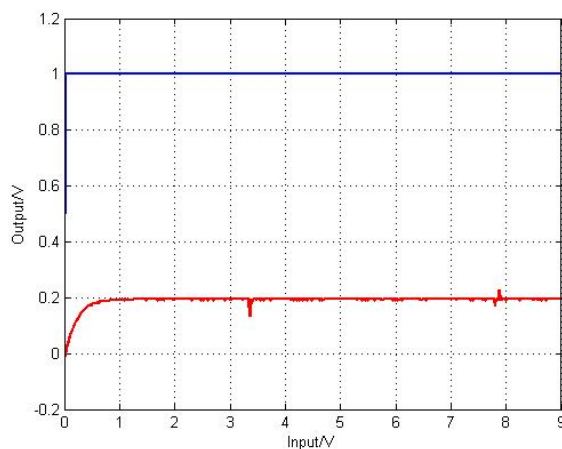
无状态反馈，第二次 ↓



有状态反馈，第一次 ↓



有状态反馈，第二次 ↓



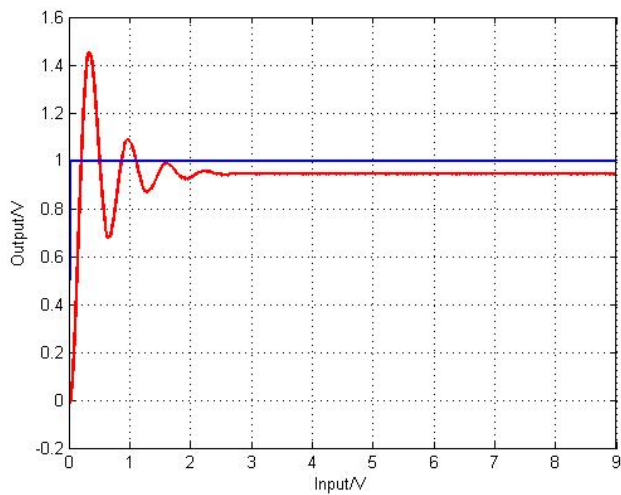
由于第一次没有调整增益因子，所以得到的图是反着的。但是调整正了以后，重复做了很多次，每次都出现因线路连接产生的小的干扰，效果不如第一次好，因此把两张图都放在这里。

观察图像：超调量为 0，峰值时间 $t_p=0.5$ 左右，基本满足要求。

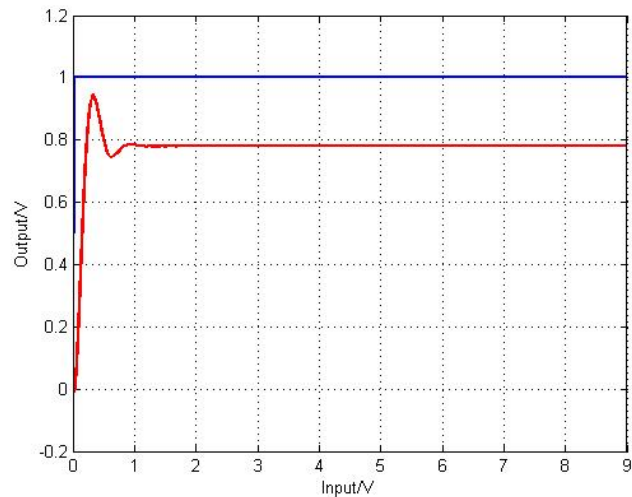
(2) 系统 2 原极点为： $-1.973 \pm 9.984j$ 。配置观测器极点为-30，改变不同系统极点，得到阶跃响应如下：

无状态反馈 ↓

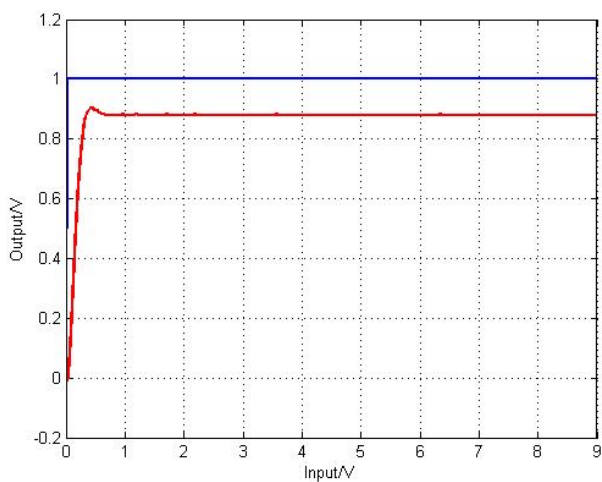
配置极点为 $-5 \pm j10$ ↓



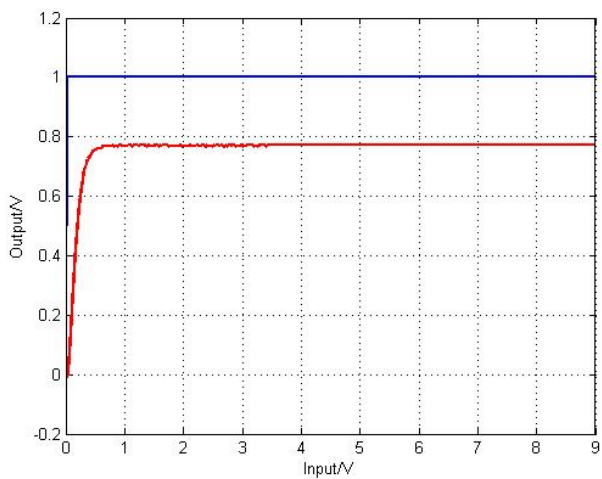
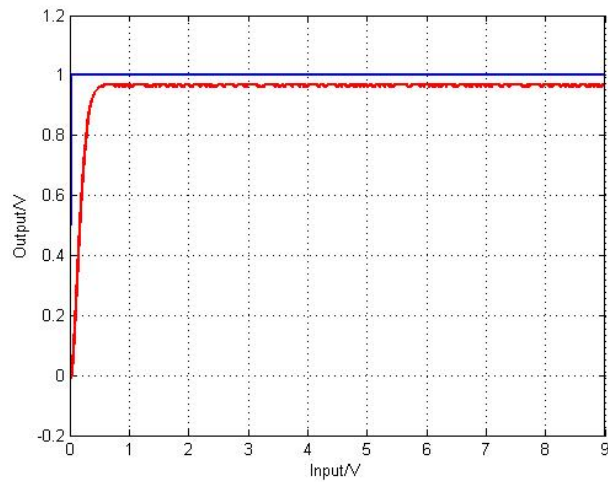
配置极点为 $-7.35 \pm j7.5 \downarrow$



配置极点为 $-8 \pm j6 \downarrow$



配置极点为 $-10 \pm j5 \downarrow$



七、结果分析

1. 写出系统 1 的状态空间表达式，设计反馈矩阵与系统结构图。已在上一小节画出。
2. 为系统 2 配置状态观测器。已在上一小节配完。

3. 从系统 1 的结果：超调量为 0，峰值时间 $t_p=0.5$ 左右，可以看出配置的极点基本满足要求。但对老师给的数据进行验算，解得 $\xi = 0.64$ ，小于 0.69，所以设计上来说不满足要求。这种矛盾的原因应该是实际电路的电阻电容与理论值存在误差造成的。

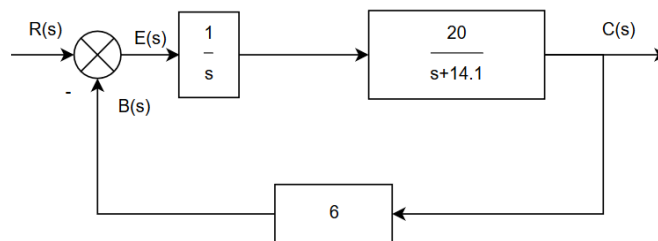
计算特征方程代码：

```
clear;clc;
A=[-20,-20;-1,0]
B=[0;1]
C=[1,0]
k=[10.9,-5.9]
syms s Gs;
A=A-B*k;
Gs=C*inv(s*eye(2)-A)*B
```

配置完的传递函数： $G(s) = \frac{20}{s^2 + 14.1s + 120}$

解得 $\omega_n = 10.95, \xi = 0.644$ 。理想分子应为 120，这样才能满足二阶系统的表达式，所以输出为原来六分之一。这里不是稳态误差的概念，可以从下面思路理解：

将 $G(s)$ 化为程序框图的形式，



可求得 $Gc(s) = \frac{20}{s^2 + 14.1s}$ ， $H(s) = 6$ ，输入阶跃响应为 $R(s) = \frac{1}{s}$ ，进而求得 $E(s) = R(s)(1 - H(s)G(s))$

由终值定理，求得稳态误差 $e_{ss}=0$ ，因此不是稳态误差的原因。而输出 $C(s)$ 需要乘以 $H(s)$ 才能得到 $B(s)$ ，故稳定时输出 $C(s) = R(s)/6 = 0.167 \approx 0.2$ 。

因此，若想得到和输入一样的稳态输出，需要乘 6 才可以。但实验结果是 0.2，五分之一，我认为这里的误差是由电阻电容值没有严格匹配理论值造成的。

4. 分析系统 2 的实验结果：

(1) 所有系统的输出值与 1 均有误差，均不是稳态误差的原因，而是和 3 一样没有配反馈增益的原因。

(2) 对于极点的位置，求 $\cos(\arctan|y/x|)$ 即可得到阻尼比。

将采集图像的性能列表如下：

类型	稳态误差	超调量/%	峰值时间 t_p/s	调节时间 t_s/s	$\cos(\arctan y/x)$
无状态反馈 $s = -1.973 \pm 9.984j$	0.05	53	0.3	2.3	0.193

配置极点为 $-5 \pm j10$	0.21	21	0.3	0.7	0.447
配置极点为 $-10 \pm j5$	0.22	0	0.5	0.4	0.894
配置极点为 $-7.35 \pm j7.5$	0.12	2	0.25	0.35	0.700
配置极点为 $-8 \pm j6$	0.05	0	0.5	0.4	0.8
*注：由于保存的图像是 jpg 格式，只能粗略进行估计，这也会造成误差。					

由于这几个系统的阻尼比均为小于 1，均为欠阻尼状态。对于二阶系统，当阻尼比达到 0.707 时，调节时间最短。

观察阶跃响应，当无状态反馈和极点为 $-5 \pm j10$ 时，阻尼比较小，超调量较大。阻尼比越大，超调量越小。当阻尼比增大到 0.8 以上时，超调已经不易观察出了。

同时观察到当阻尼比为 0.700 时，调节时间最短，也与理论相符。

阻尼比为 0.8 和 0.894 时，没有超调，调节时间与阻尼比为 0.700 时的系统接近，这很有可能是因为实际电路的电阻选值与理论值有误差，影响了极点的位置。

八、收获、体会及建议

通过这次实验，我深入理解了状态反馈和观测器配置的原理，同时学习了 MATLAB 的配置指令，认识到极点分布对系统性能的关键影响，收获非常大。

我建议应该增加一组数据，让我们用自己设计的反馈阵进行实验，这样才能更深刻的认知状态反馈。

实验七 非线性环节对系统动态过程的影响

实验时间：2019.05.07 实验编号： 同组同学：无

一、实验目的

- 1. 熟悉几种典型非线性环节特性及其对系统动态性能的影响。
- 2. 掌握相平面法和描述函数法研究非线性系统稳定性的方法。

二、实验内容

1. 被控对象 $G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ 的模拟电路图及系统结构图如图 2.7.1 和图 2.7.2 所示。

选取的电阻电容值均已标出。

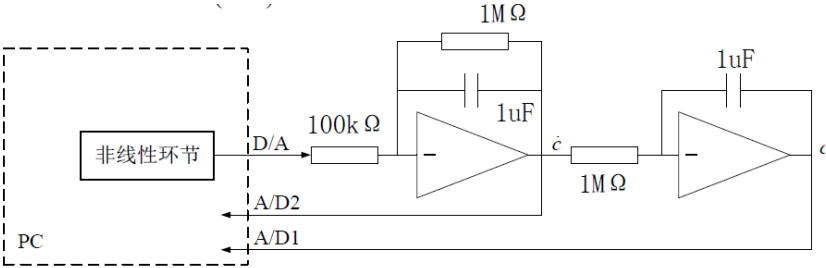


图 2.7.1 被控对象模拟电路图

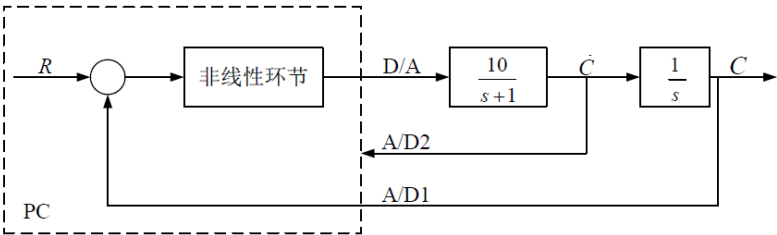


图 2.7.2 非线性系统结构图

2. 非线性环节由计算机模拟产生，分别为：

(1) 摩擦特性，如图 2.7.3。

M=1

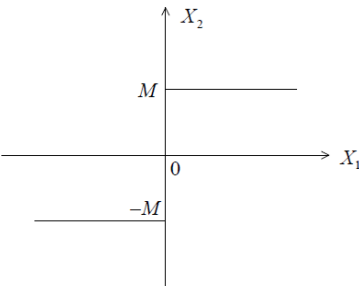


图 2.7.3 ， 摩擦特性

(2) 饱和特性，如图 2.7.4。

k=1, s=0.5; k=1, s=2

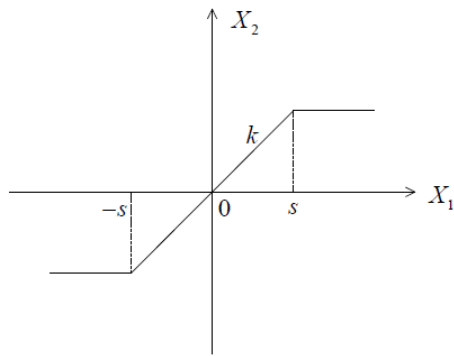


图 2.7.4 饱和特性

(3) 继电特性，如图 2.7.5。

$M=1$ ， $h=0.5$

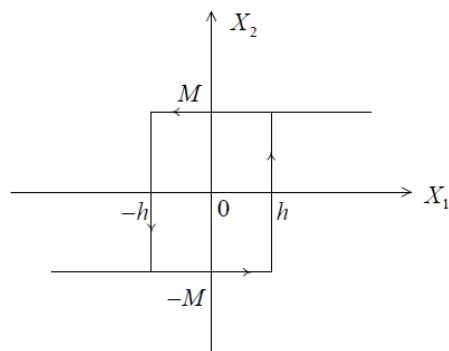


图 2.7.5 继电特性

三、实验原理

1. 非线性系统和线性系统存在本质差别：

(1) 线性系统可采用传递函数、频率特性、脉冲过渡函数等概念，同时由于线性系统的运动形式和输入幅值、初始状态无关，通常是在典型输入函数和零初始条件下进行研究。

(2) 非线性系统由于叠加原理不成立，线性系统的上述方法不适用，所以常采用相平面方法和描述函数方法进行研究。

2. 实验从两方面观察非线性：相轨迹和动态响应

(1) 相轨迹：相平面上的点随时间变化描绘出来的曲线叫相轨迹。相平面的相坐标为 c 和 \dot{c} ，实验软件当中给出的就是在此坐标下自动描绘的相轨迹。

初始条件不同，系统的运动趋势不同，所描绘的相轨迹也会有所不同。

(2) 动态响应：对比有无非线性环节时系统动态响应过程。

四、实验设备

1. 数字计算机
2. 电子模拟机
3. 万用表
4. 测试导线

五、实验步骤

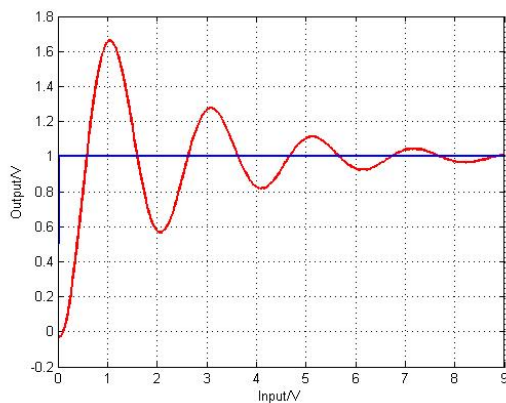
1. 熟悉 HHMN-1 型电子模拟机的使用方法。将各运算放大器接成比例器，通电调零。
 2. 断开电源，按照系统结构图和系统传递函数计算电阻和电容的取值，并按照模拟线路图搭接线路，不用的运算放大器接成比例器。
 3. 谨慎连接输入、输出端口，不可接错（参见注意事项 1）。线路接好后，经教师检查后再通电。
 4. 在 Windows XP 桌面用鼠标双击“MATLAB”图标后进入，在命令行处键入“autolab”进入实验软件系统。
 5. 在系统菜单中选择实验项目，选择“实验四”，在窗口左侧选择“实验模型”，其它步骤察看概述 3.2 节内容。
 6. 观测实验结果，记录实验数据（参见注意事项 2），及时绘制实验结果图形（参见注意事项 3），填写实验数据表格，完成实验报告。
 7. 研究性实验方法。
- 实验者可自行确定待测系统传递函数，并建立系统的 SIMULINK 模型，验证自动控制理论相关的理论知识。实现步骤可查看概述 3.3 节内容。

六、实验结果

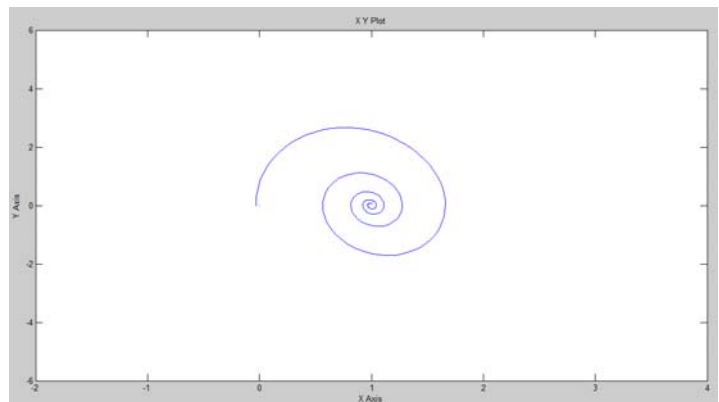
（一）实验曲线整理

1. 没有非线性环节

时域



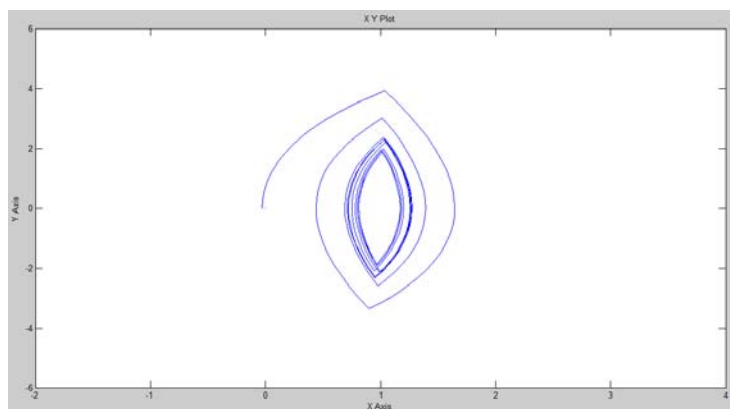
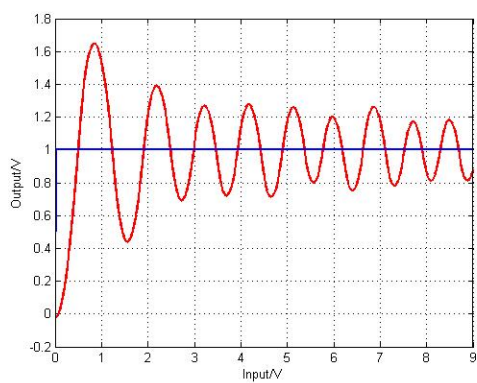
相轨迹



2. 摩擦特性

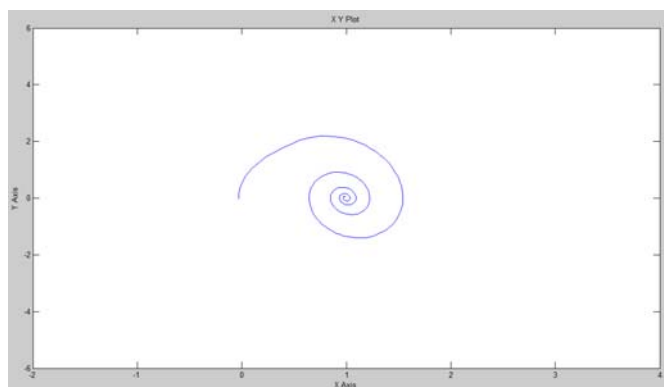
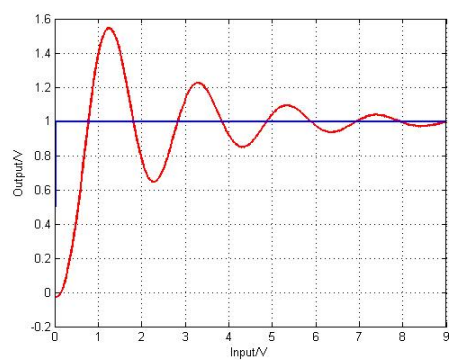
时域

相轨迹



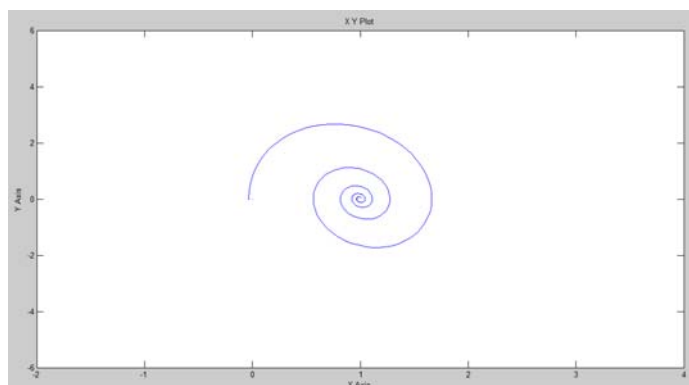
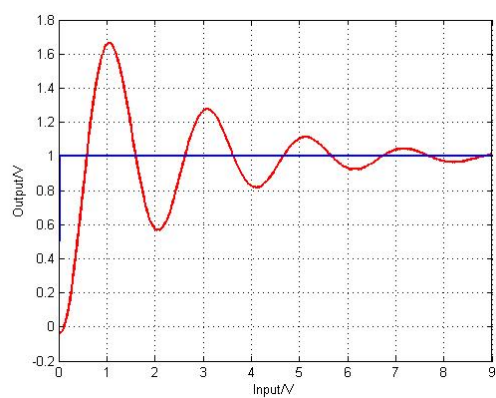
3. 饱和特性
 $k=1, s=0.5$
 时域

相轨迹



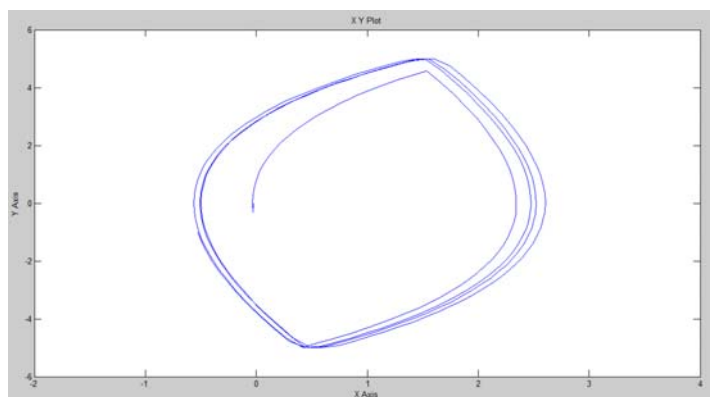
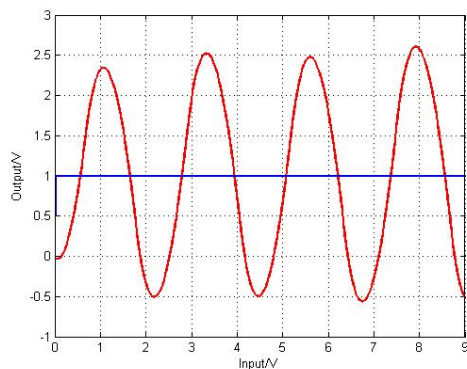
$k=1, s=2$
 时域

相轨迹



4. 继电特性
 时域

相轨迹



由图形测量可知：

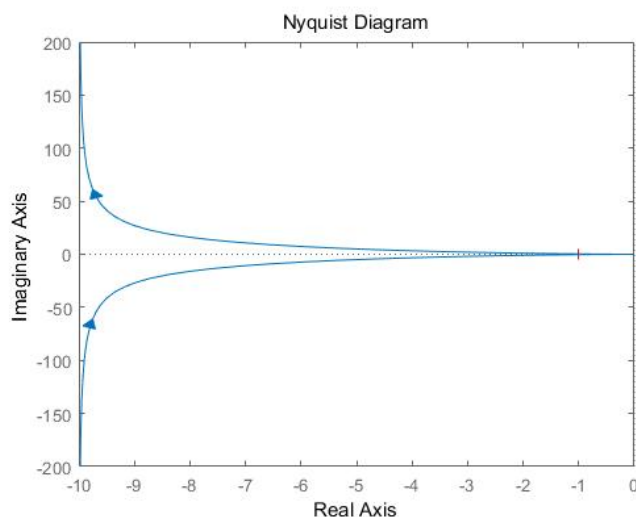
图形类别	超调量 $\sigma\%$	峰值时间 t_p/s	调节时间 t_s/s
无非线性环节	68	1.1	8.5
摩擦特性	66	0.8	大于 9
饱和, $k=1$, $s=0.5$	58	1.2	8.5
饱和, $k=1$, $s=2$	64	1.0	8.2
继电特性	不稳定		

（二）描述函数法分析，求自振时的开环增益。

由结构图，线性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

画奈奎斯特图如下



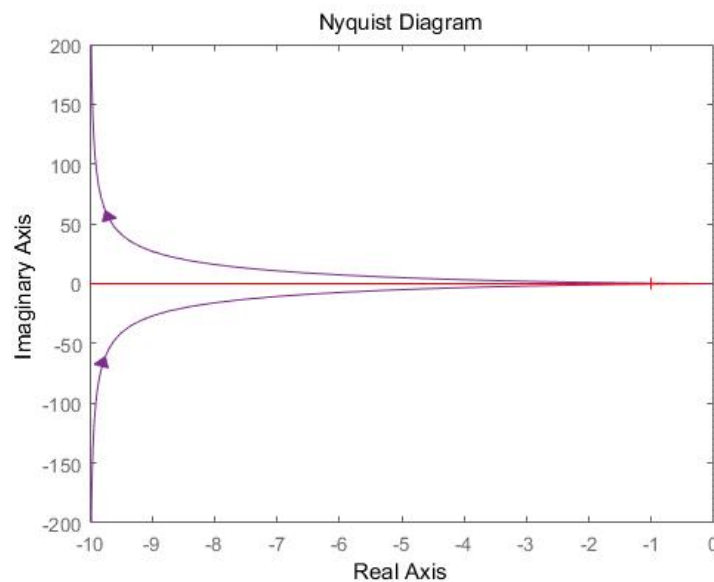
图像右侧无限接近 x 轴，在零点处相交。因为开环系统 $G(s)$ 没有右半平面的极点，且奈奎斯特曲线没有包含 $(-1,0)$ 点，故没有非线性环节时，系统是稳定的。

设非线性环节的描述函数为 $N(X)$ 。则闭环特征方程为 $1 + N(X)G(j\omega) = 0$

查表可知常见非线性环节的描述函数如下：

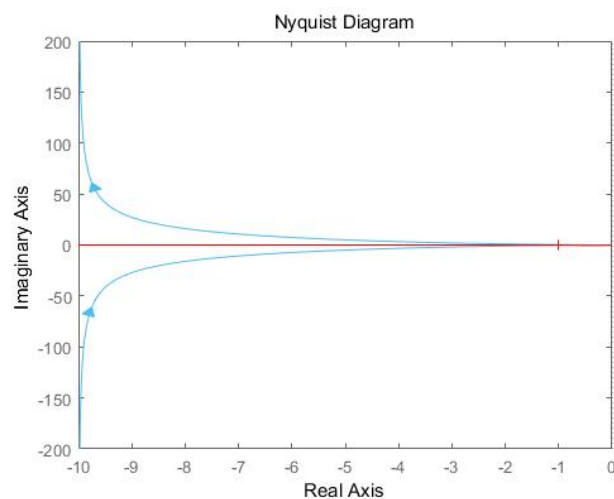
非线性特性	描述函数
摩擦 M=1	$\frac{4M}{\pi X}$
饱和 k=1 s=0.5	$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{s}{A} - \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A} \right)^2} \right]$
饱和 k=1 s=2	$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{s}{A} - \frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A} \right)^2} \right]$
理想继电 M=1, h=0.5	$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A} \right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi A^2} \quad (A > h)$

摩擦特性：



摩擦特性的负倒描述函数没有虚部，故为横轴。由图可知， $G(j\omega)$ 线没有包围负倒描述函数曲线，也没有相交，故此时系统稳定。

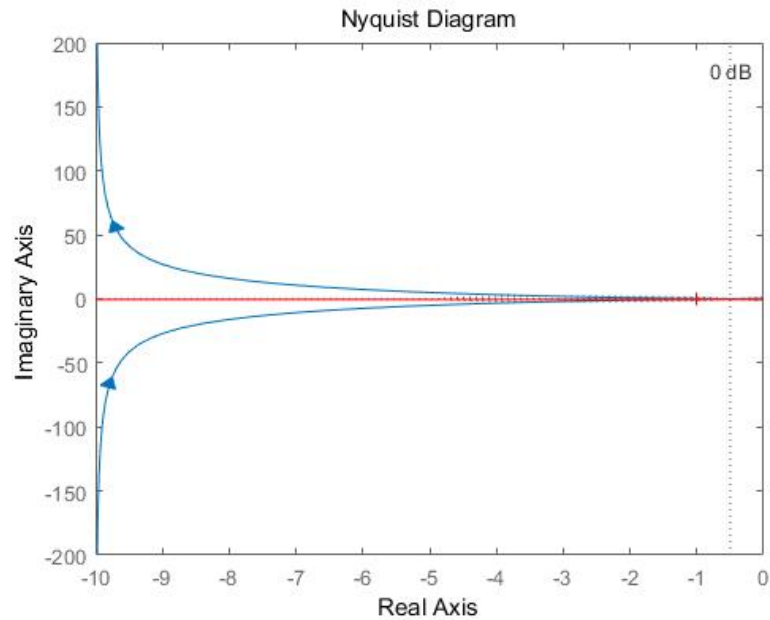
饱和特性：



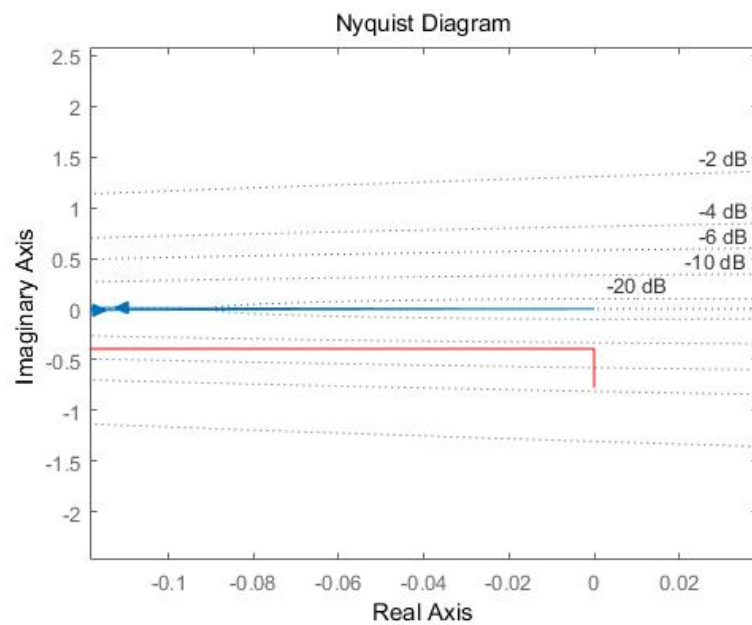
饱和特性的负倒描述函数没有虚部，故为横轴。由图可知， $G(j\omega)$ 线没有包围负倒描述函数曲线，也没有相交，故此时系统稳定。

继电特性：

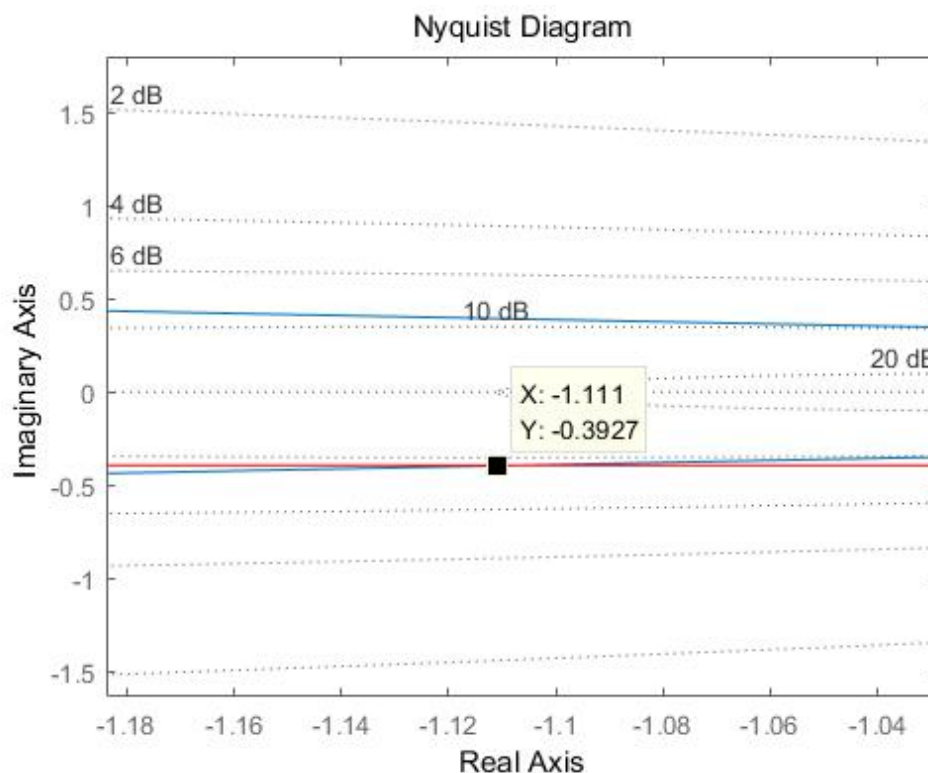
用 matlab 绘制奈奎斯特曲线和负倒描述函数曲线：



整体图如上。



幅值从 0 开始，先向上移动一段，后往左以 -0.3927 的纵坐标沿直线移动，与奈奎斯特曲线相交。从非稳定区穿到稳定区，交点是自振点。



交点为(-1.111,-0.3927)，此时振荡幅值为 1.5。开环增益即为 $G(j\omega)$ 在交点处的幅值，由交点坐标得开环增益 $= \sqrt{(1.111^2 + 0.3927^2)} = 1.178$ 。

七、结果分析

1. 相轨迹已在实验结果中画出。相轨迹均为顺时针，由相轨迹可以看到，如果系统是稳定的，则相轨迹会逐渐向内收缩到 0。如果系统是振荡的，相轨迹会在距原点一定距离处绕圈。对于摩擦特性和理想继电特性，根据表达式可以找到开关线，摩擦特性的开关线为纵轴，继电特性的开关线为一条经过原点的斜线。

2. 动态响应已在实验结果中画出。

图形类别	超调量 $\sigma\%$	峰值时间 t_p/s	调节时间 t_s/s
无非线性环节	68	1.1	8.5
摩擦特性	66	0.8	大于 9
饱和, $k=1, s=0.5$	58	1.2	8.3
饱和, $k=1, s=2$	64	1.0	8.2
继电特性	不稳定		

从表中数据可以看出，均为饱和特性，由于 $s=0.5$ 时较早进入饱和，故 $s=0.5$ 的系统超调量较小；但由于较早进入饱和也削弱了反馈的效应，峰值时间较长。两种系统的调节时间接近。

3. 负倒描述函数曲线和 $G(j\omega)$ 曲线已经在实验结果(二)中绘制。由 matlab 仿真得出的振荡增益比实际增益要小，这可能是由于 matlab 取点作图不精准或者实际硬件电路选值不准确造成的，计算增益的过程对取点的精确性要求很高。

八、收获、体会及建议

非线性环节是工程实践中的重要组成部分。经过本次实验，我系统学习了用相轨迹法和描述函数法对非线性环节进行分析，加深了我对理论课知识的认识，收获很大。

附代码如下：

```
clc;clear;
num=10;
den=[1,1,0];
Gs=tf(num,den);
nyquist(Gs);
grid;
hold on;

% x=0.1:0.1:50; %摩擦
% Nx=zeros(1,500);
% for i=1:500
% Nx(i)=4/(pi*x(i));
% z(i)=-1/Nx(i);
% end
% plot(real(z),imag(z),'r');

% x=0.1:0.1:50; %饱和
% k=1; s=0.5;
% Nx=zeros(1,500);
% for i=1:500
% Nx(i)=(2*k/pi)*(asin(s/x(i))-s/x(i)*sqrt(1-(s/x(i))^2));
% z(i)=-1/Nx(i);
% end
% plot(real(z),imag(z),'r');

x=0.1:0.1:50; %继电
M=1; h=0.5;
Nx=zeros(1,500);
for i=1:500
Nx(i)=(4*M)/(x(i)*pi)*sqrt(1-(h/x(i))^2)-1j*(4*M*h)/(pi*x(i)^2);
z(i)=-1/Nx(i);
end
plot(real(z),imag(z),'r');
```

九、参考文献

[1]. 刘海江，周晓蕾. 基于 MATLAB 的非线性系统的描述函数法[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2003，34(4):445-449.

实验八 状态空间综合实验

实验时间：2019.05.21 实验编号：

同组同学：无

一、实验目的

1. 掌握一般控制系统建模方法；
2. 掌握状态空间设计方法；
3. 了解控制系统的设计过程。

二、实验内容

1. 建立桥式吊车的数学模型，并进行仿真，得到不加控制情况下小车位置及摆角的运动情况。
2. 设计控制器，分别对小车位置和摆角单独进行控制。
3. 设计控制器，对小车位置和摆角综合控制。

三、实验原理

1. 桥式吊车系统概述

桥式吊车是横架于车间、仓库和料场上空进行物料吊运的起重设备，又称天车。由于它的两端坐落在高大的水泥柱或者金属支架上，形状似桥。桥式起重机的桥架沿铺设在两侧高架上的轨道纵向运行，可以充分利用桥架下面的空间吊运物料，不受地面设备的阻碍。它是使用范围最广、数量最多的一种起重机械。在货物运送过程中难免产生晃动，如果吊臂一端与单摆类似摩擦力很小，或者中间的连接机构出现了故障，变成了一个自由端，那么运送的货物就会产生很大的晃动，造成设备损坏或者产生掉落的风险。如何自动控制桥式吊车在运送货物过程中保持吊臂的稳定，出现大幅晃动时能够及时修正正是本次实验要研究的一个问题。

2. 系统组成与建模分析

2.1 桥式吊车数学模型

用动力学方法建立其数学模型，吊车一吊摆的受力分析如下图所示：

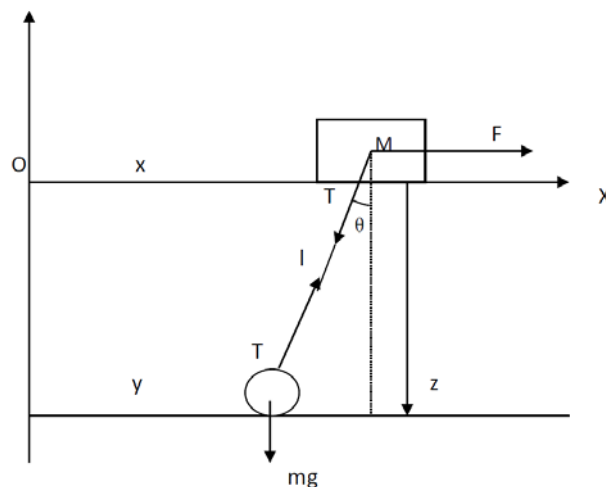


图 2.1 吊车-吊摆受力分析

图中， F ：吊车控制力

M ：吊车质量

m: 吊摆质量

x: 吊车距原点的横坐标

y: 吊摆距原点的横坐标

z: 吊摆距原点的纵坐标

T: 摆杆拉力

l: 摆长

θ : 摆角

建模时不考虑吊车与滑轨间的摩擦力、摆的阻力和摆杆的形变。

根据受力和所建立的坐标系可得:

$$M \cdot \ddot{x} = F - T \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = T \sin \theta$$

$$m\ddot{z} = mg - T \cos \theta$$

由几何关系:

$$y = x - l \sin \theta; \quad z = l \cos \theta$$

对 t 求二阶导:

$$\ddot{y} = \ddot{x} + l \sin \theta \ddot{\theta}^2 - l \cos \theta \ddot{\theta}; \quad \ddot{z} = -l \sin \theta - l \cos \theta \ddot{\theta}^2$$

代入受力分析方程可得:

$$\ddot{x} = \frac{F - m \sin \theta (l \ddot{\theta}^2 + g \cos \theta)}{M + m \sin^2 \theta}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{F \cos \theta - Mg \sin \theta - m \sin \theta (l \ddot{\theta}^2 \sin \theta + g)}{l (M + m \sin^2 \theta)}$$

线性化处理: $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$, $\sin^2 \theta = 0$, $\ddot{\theta}^2 \sin \theta = 0$

取状态变量: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$, 得到状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} F$$

2.2 吊车-电机数学模型

将吊车的状态方程与电机模型结合起来, 如下图所示。其中 r 为皮带轮半径。

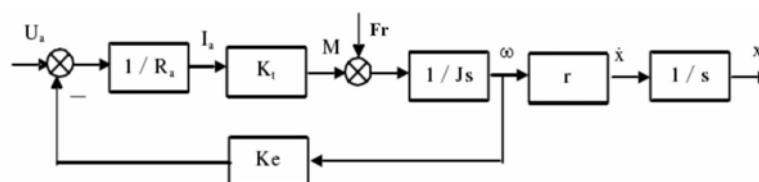


图 2.2 吊车—电机框图

由图可写出：

$$\left[(U_a - K_e \omega) \frac{K_t}{R_a} - F \cdot r \right] \cdot \frac{r}{J_s^2} = x$$

由 $\omega r = \dot{x}$ 可得：

$$-R_a F r^2 + r K_t U_a - K_e K_t \dot{x} = R_a J \ddot{x}$$

求出 F 与系统状态 X、输入电压 U_a 的关系表达式，代入前面的吊车数学模型，可得吊车-电机系统数学模型。整理可得：

$$F = \left[0 \quad -\frac{M K_e K_t}{M R_a r^2 + R_a J} \quad \frac{J m g}{M r^2 + J} \quad 0 \right] \cdot \mathbf{X} + \frac{M r K_t}{M R_a r^2 + R_a J} U_a$$

总状态方程修改为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_e K_t}{M R_a r^2 + R_a J} & -\frac{m g r^2}{M r^2 + J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_e K_t}{l(M R_a r^2 + R_a J)} & -\frac{(M + m) g r^2 + g J}{l(M r^2 + J)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r K_t}{R_a (M r^2 + J)} \\ 0 \\ \frac{r K_t}{l R_a (M r^2 + J)} \end{bmatrix} U_a$$

代入数据：力矩系数 K_t= 0.467 N. m/A

反电势系数 K_e= 0.0482(V · S/rad)

转动惯量 J=5.56e-5kg.m.s²

电枢电阻 R_a=13.9 Ω

杆长 l=1m；小车质量 M=7.9Kg；杆末端质量 m=3.35kg；电机轮半径 r=0.02m

编写 matlab 程序解得：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5036 & -4.0838 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -0.5036 & -13.8838 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2090 \\ 0 \\ 0.2090 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=0$$

3. 性能指标要求与控制方法

3.1 性能指标要求

- (1) 摆角稳态时间<5 秒，摆动次数<3 次。
- (2) 吊车启动时的最大摆角<10 度。
- (3) 吊车最大运动速度≤0.4m/s。

3.2 控制方法

可以采用 PID 等单独控制小车的位置和摆杆的角度，然后将二者结合。也可以用 LQR 最优控制的方法选取合适的 Q, R 阵，根据系统响应的要求，配置最佳反馈矩阵 K 。通常 Q, R 阵的选择遵循一定的规律，它们一般选为对角阵，若把 Q 中某个加权系数增大，则对应的状态变量会收敛得更快些， R 中的某个加权系数增大则对应的控制量会小些。

4. 三维虚拟仿真

四、实验设备

1. 数字计算机
2. 仿真软件

五、实验步骤

1. 建立系统的数学模型；
2. 在 Matlab 中进行仿真，获得未加控制时小车位置、速度，摆杆角度、角速度的变化曲线；
3. 设计控制率，达到指标要求，进行仿真验证。
4. 记录响应曲线与数据，说明参数调整的方法，得到最终的结论。
5. 可使用虚拟仿真方式直观观察控制效果。

六、实验结果

不加反馈时：

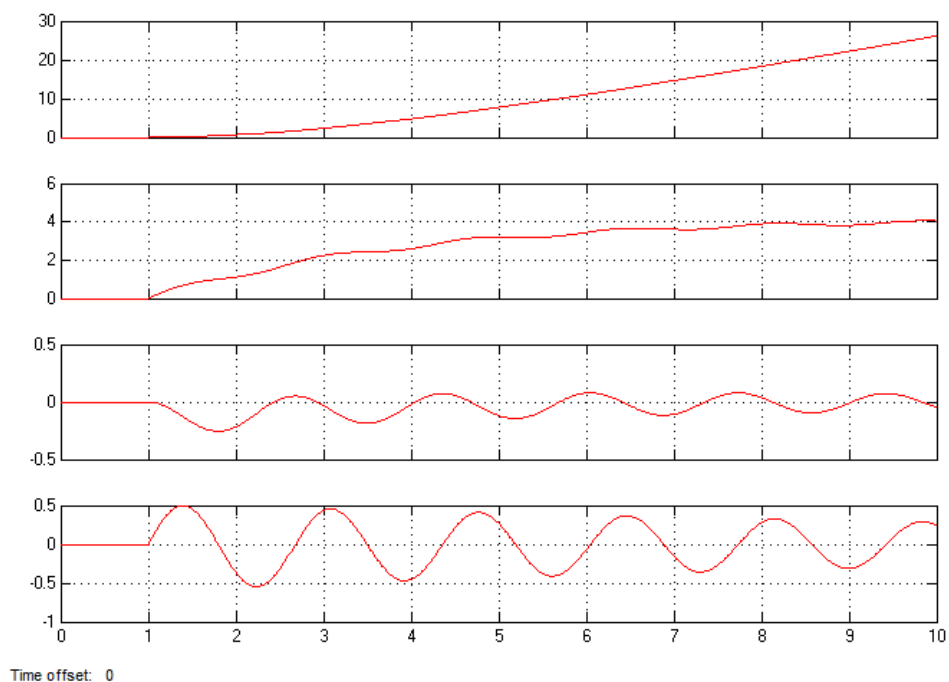


图 6.1 不加控制反馈时的小车位置、速度，摆杆角度、角速度的变化仿真曲线

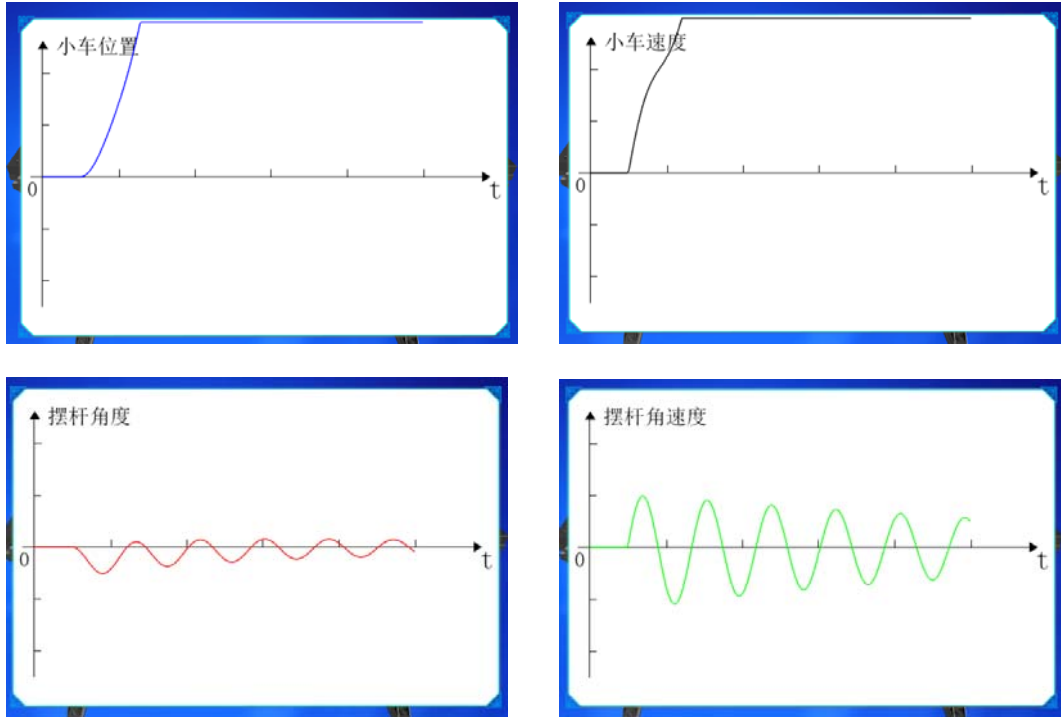


图 6.2 不加控制反馈时的小车位置、速度，摆杆角度、角速度，模拟机仿真曲线

从不加反馈的仿真程序可以看出：小车位置无法稳定，小车速度逐渐增加，摆杆角度处于不停振荡中，同时角速度处于周期状态，整个系统处于不稳定状态。

选用最优控制方法设计 K 。选择指标 $F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x' Q x + u' R u) dt$

由于加大 Q 中某个加权系数，会使得对应的状态变量收敛加快，在设计指标中对角度控制要求严格，其次是位置，故选择 $Q = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$; $R=1$; 加大对角度和位置的控制。

根据最优控制方法，利用 MATLAB 程序计算反馈：

```
K=lqr(A,B,Q,R);
```

解得 $K = (15.8114 \quad 17.1637 \quad 19.5010 \quad 3.7455)$

仿真得到如下结果：

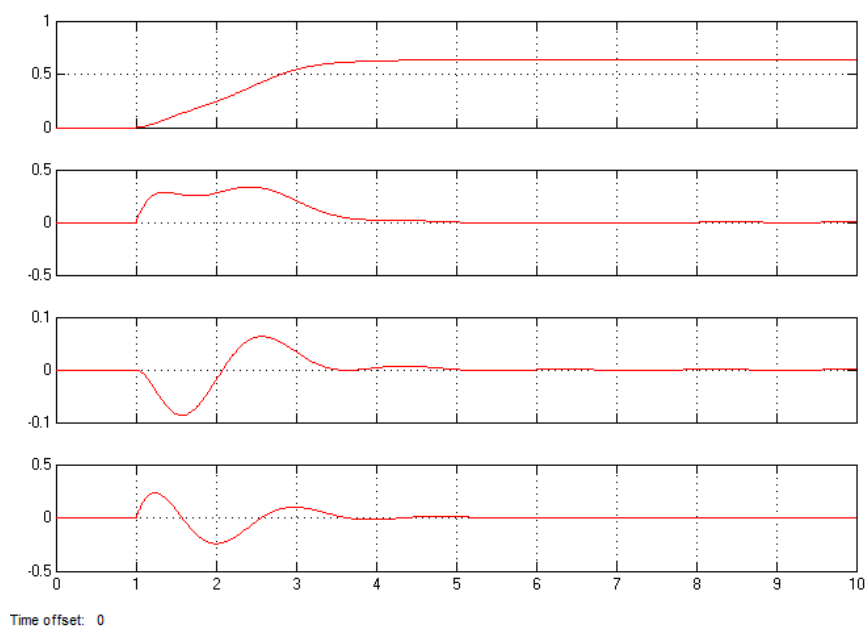


图 6.3 不加控制反馈时的小车位置、速度，摆杆角度、角速度的变化仿真曲线在仿真机里得到如下仿真结果：

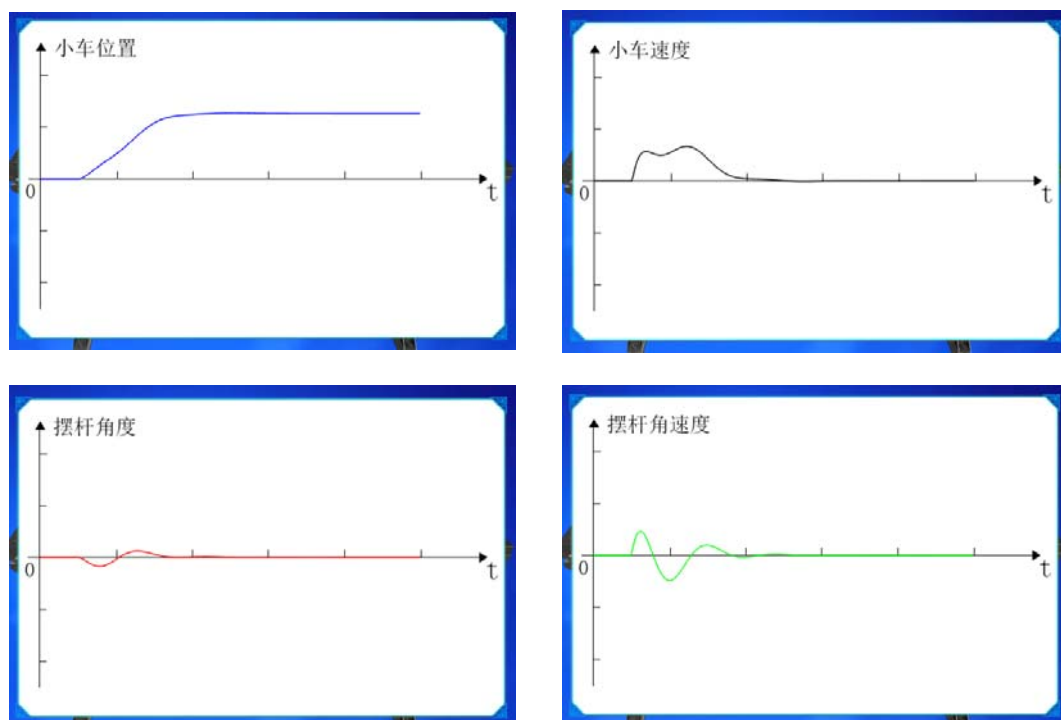


图 6.4 加控制反馈时的小车位置、速度，摆杆角度、角速度，模拟机仿真曲线

从加入反馈的仿真图可以看出，系统性能改善明显，摆角稳定时间在 3s 左右，摆动次数 2 次，吊车启动时的最大摆角为 $0.08\text{rad} < 0.175\text{rad}$ (10°)，最大运动速度 0.38m/s ，满足设计指标。

七、结果分析

1. 桥式吊车系统的建模过程已在实验原理中给出。
2. 控制率设计过程：

选用最优控制方法设计 K 。选择指标 $F = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x' Q x + u' R u) dt$

由于加大 Q 中某个加权系数，会使得对应的状态变量收敛加快，在设计指标中对角度要求最严格，其次是位置，故选择 $Q=[250 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 100 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 300 \ 0; 0 \ 0 \ 100]$; $R=1$; 加大对角度和位置的控制。

3. 仿真结果已在实验结果中给出。

4. 实验结论：根据最优理论设计的状态反馈矩阵 K 可以满足要求。

5. 课后题

(1) 可以先分别调整 PID 控制小车的位置和摆杆的角度，然后将二者结合，这样就不需要状态空间的方法也可以实现对小车位置和摆杆角度的综合控制。

(2) 工业现场中桥式吊车的防摆策略与方法：

1) 模糊控制：由于难以建立精确的数学模型，常采用模糊控制理论，利用模糊规则描述控制过程。有的研究者还引入神经网络等算法，建立模糊控制规则库，生成一系列训练数据，实现计算机控制经验的积累。但是这种方法需要进行一定时间的调整和完善，同时一旦起重机型号发生变化，可能需要修改或重新建立规则库。

2) 时滞滤波理论：通过对控制信号整形，生成一个幅值不同、时滞时间不同的脉冲序列，使得各个输入信号所产生的振动叠加后得以消除。该策略属于开环控制，无法纠正系统的初始状态和外部干扰等不确定因素引起的振动，在实际应用中有一定的局限性。

八、收获、体会及建议

通过本次实验，我深入理解了状态反馈对改善系统性能起到的巨大作用。但是本次实验中涉及到的最优控制方法之前没有学过，而且实验指导书上的一些关键数据缺失（如电机轮半径 r ）造成了预习困难。希望可以进一步优化自动控制原理理论课与实验课的内容协同性。

至此，两个学期的自动控制原理理论课与实验课都已经结束。在两个学期的课程中，我系统学习了经典控制理论和现代控制理论，并借助实验加深了对这些理论的认识，至此我才感觉自己对控制理论刚刚入门。控制，这个基本思想一定会深深影响我之后的学习与工作，我感到收获非常大，谢谢老师们两个学期的付出！

另，如果您对报告或实验有任何问题，请联系我，手机 15652587808，[邮箱 lijinjie362@outlook.com](mailto:lijinjie362@outlook.com)，谢谢！

九、参考文献

[1] 吴昊罡, 潘彦宏, 鄢鹏程. 桥式起重机防摇摆的策略、产品与仿真[J]. 起重运输机械, 2017, (10): 91-94. DOI:10.3969/j.issn.1001-0785.2017.10.012.