

# 微分方程模型解决热饮冷却问题

16231235 李谨杰 16231250 王胜剑 16231229 雷彤彤

**摘要：** 本文针对热饮的两种冷却策略，利用COMSOL软件进行仿真分析，得出了不同冷却策略下所需的冷却时间，确定了最佳的冷却方案为先等热饮冷却至一定温度再倒入冰水，随后自然冷却到最终温度。

首先，我们根据日常经验确定了热饮冷却的外界条件和冷却过程的几何模型。继而将冷却过程分为了冰水倒入热水的混合过程与整杯水的自然冷却过程两部分。对于冰水与热饮的混合过程，我们利用傅里叶传导定律以及液体对流方程给出了混合过程的数学模型。对于整杯水的自然冷却过程，我们研究了热饮的所有散热面，依据牛顿冷却定律和傅里叶导热定律给出了四个传热面的散热方程。在得到数学模型的基础上，我们使用COMSOL软件仿真得出了两种策略下的时间。

对于策略1：立即把冰水倒入热水混合然后进行自然冷却的情况，冷却到最终耐受温度的时间为26.50min；对于策略2：先等热饮自然冷却到一定温度，再将冷水倒入的情况，冷却到最终耐受温度的时间为10.57min。显然，策略2所需的时间更短。

**关键词：** 热饮冷却 COMSOL仿真 微分方程模型 傅里叶导热定律 牛顿冷却定律

# 目录

<b>1 问题的重述</b>	<b>3</b>
<b>2 问题分析</b>	<b>3</b>
<b>3 模型假设</b>	<b>3</b>
<b>4 符号说明</b>	<b>4</b>
<b>5 模型的建立</b>	<b>4</b>
5.1 热饮冷却的几何模型 . . . . .	4
5.1.1 玻璃杯 . . . . .	4
5.1.2 杯中热水 . . . . .	5
5.1.3 杯中冷水 . . . . .	5
5.1.4 杯中空气 . . . . .	6
5.2 材料性质参数 . . . . .	7
5.2.1 玻璃杯 . . . . .	7
5.2.2 杯中水 . . . . .	8
5.2.3 杯中空气 . . . . .	9
5.3 热饮自然冷却模型 . . . . .	11
5.4 冰水与热饮混合模型 . . . . .	14
<b>6 COMSOL软件求解及结果</b>	<b>14</b>
6.1 对不同冷却阶段进行仿真 . . . . .	15
6.1.1 阶段一：热水自然冷却到某一温度 . . . . .	15
6.1.2 阶段二：加热水达到稳定温度梯度 . . . . .	15
6.1.3 阶段三：混合后整杯水冷却至适宜温度 . . . . .	16
6.2 仿真结果 . . . . .	17
<b>7 结果比较</b>	<b>17</b>
<b>8 灵敏度分析</b>	<b>18</b>

## 1 问题的重述

现有一杯温度太高的热饮和一杯冰水，为尽快喝到这杯饮料，需要利用冰水使热饮冷却。以下有两种冷却策略：立刻把冰水倒进热饮中；或者先等热饮冷却到一定温度，再把冰水倒进去。通过建立热饮冷却的数学模型，比较两种冷却方式的冷却时间，求出哪一种策略能让热饮尽快冷却。

## 2 问题分析

问题要求我们冷却一杯热饮，但并未给出其他实际条件。为使问题具体化，应先确定问题求解的条件。为尽可能接近实际情况，我们依据现实经验确定冷却的具体条件，其中应包括热饮和冰水的温度、应冷却到的最终耐受温度。接着，需要确定冷却的几何模型，即杯子、冷水和热饮的几何参数和相应的物理性质等。

确定了热饮冷却的具体条件后，我们来考虑热饮冷却的具体过程。我们可将热饮冷却分为两个具体过程即加入冷水的混合过程和整杯热饮的自然冷却过程。策略1与策略2的区别在于冰水和热饮混合过程进行的先后顺序有所差别。我们先分别研究了两个过程，再将其放入具体策略中来计算相应的冷却时间进行比较。

对于加入冰水后的混合过程，我们认为冰水的倒入是瞬间完成的，并且倒入完成的瞬间冰水完全停留在液体表面。此瞬间后进行冰水与热饮的混合。冰水与热饮的混合过程是由两部分液体不同的温度所驱动的，这个过程既有两部分液体的热对流（液体的蒸发属于热对流）和热传导、还包括液体对外的热辐射。由于混合过程时间较短，我们近似认为热饮向外界辐射的热量很小，可忽略不计。当杯中两部分液体在热对流和热传导的作用达到温度均匀分布，我们认为混合结束，进入自然冷却过程。热对流主要依据不同温度液体之间的运动方程，同时根据傅里叶导热定律可以写出不同温度液体间的传热方程。

而自然冷却过程，则主要包括了液体的热辐射和三个散热面的热传导和热对流。首先，液体表面与空气直接接触，与空气发生热对流。其次，对于杯底的传热，我们认为杯底与桌面直接接触，温度始终维持在室温，即杯底只产生液体与杯底的热传导。对于杯子侧面，既包含液体与杯壁之间的热传导、杯壁与空气之间的热传导，同时还应考虑到液体对空气的热辐射。在这些传热过程中，热对流过程由牛顿冷却定律确定，热传导由傅里叶导热定律确定，而热辐射过程则由热辐射方程确定。最终整杯水冷却到目标温度，计算出相应耗费的时间。

对于策略1：立刻把冰水倒入热饮中，全部倒入后，热饮可能还未能冷却到目标温度，故还需经过一段自然冷却时间。对于策略2：先等热饮冷却到一定温度，再把冰水到进入，则是先经历一个自然冷却过程，冷却到一定温度后，倒入冰水即达到目标温度。

根据建立出的微分方程模型，我们利用COMSOL软件进行仿真，最后求解出两种策略下的冷却时间，比较结果以得出最优策略。

## 3 模型假设

1. 假设冰水倒入在瞬间完成，且冰水倒入后没有速度，直接停留在热饮表面

2. 假设自然冷却过程中热饮形成自杯底至水面的温度梯度可忽略，认为整杯热饮的温度均匀，且同一高度上始终具有相同的温度
3. 由于杯底与桌面像接触，认为杯底是固体传热，因为固体传热较快，则杯底始终维持在室温
4. 在玻璃杯与水之间应用无滑移条件，在水与空气之间应用滑移条件

## 4 符号说明

表 1: 符号说明

符号	说明
$\rho$	液体密度
$Q$	热量
$T$	温度
$C$	比热容
$u$	速度
$n$	粒子数
$\mu$	切变模量
$P$	压强

## 5 模型的建立

我们先讨论了热饮冷却的具体化条件，然后将热水冷却问题分为以下三个过程：一、未加冷水的热水在空气中进行自然冷却；二、在某一时刻，将冰水加入热水中，冰水与热水立刻混合直至均匀；三、混合均匀的热水在空气中自然冷却至饮用温度。我们对三个过程建立了微分方程模型，最后利用COMSOL软件仿真求出了结果。

### 5.1 热饮冷却的几何模型

为在更具体的情景下解决这个问题，我们结合实际经验，给出了具体的几何模型。

我们设定热饮的初始温度为 $100^{\circ}\text{C}$ ，冰水的温度为 $0^{\circ}\text{C}$ ，环境温度（室温）为 $25^{\circ}\text{C}$ 。通过查询文献[2]，我们估算出人口腔耐受且不会造成伤害的最高温度约为 $55^{\circ}\text{C}$ 。

我们设定有两个完全相同的圆台形玻璃水杯，一个水杯中装有热饮，热饮占水杯70%的体积，同时该水杯留有30%的余地用以加入冰水，第二个水杯中装有满杯的冰水，即保证了热饮杯中可以加入30%体积的冰水。

#### 5.1.1 玻璃杯

由于玻璃杯的杯壁具有固定厚度，是旋转对称的，故可以使用轴对称几何对整个系统进行二维建模，这样在简化模型的同时由保证了符合实际。

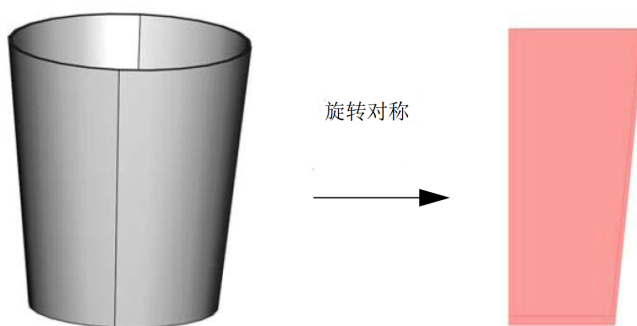


图 1: 玻璃杯旋转对称模型的构建

表 2: 玻璃杯几何尺寸说明

名称	表达式	值	描述
r_top	4.5[cm]	0.045 m	玻璃杯顶面半径
r_bottom	3.5[cm]	0.035 m	玻璃杯底面半径
Hg	10[cm]	0.1 m	玻璃杯高度
h_wall	0.13[cm]	0.0013 m	玻璃杯壁厚度
h_bottom	0.3[cm]	0.003 m	玻璃杯底部厚度

### 5.1.2 杯中热水

我们假设热饮占水杯70%的体积。

表 3: 杯中热水几何尺寸说明

名称	表达式	值	描述
r_top_hot	4.2[cm]	0.042 m	热水顶面半径
r_bottom_hot	3.5[cm]	0.035 m	热水底面半径
Hg_hot	7[cm]	0.07 m	热水高度

### 5.1.3 杯中冷水

加入冷水后，我们假设冷水加入耗费的时间忽略不计，即加入冷水后冷水在此瞬间完全位于热水上方，呈圆角台体的形状。采用这样的形状构建的原因有二，一是这样的形状更接近于冷水加入时，杯中两种不同温度液体的空间分布形状，第二点也是考虑到圆角的边界形状在之后进行仿真求解

时，构建的有限元分割个数更少，计算较为高效。为了保证圆角台体所构建的冷水区域所占体积维持在30%，我们利用了SOLIDWORKS进行立体建模确定了圆角台体的形状参数。

表 4: 杯中冷水几何尺寸说明

名称	表达式	值	描述
r_top-h_wall-0.007	3.93[cm]	0.0393 m	冷水顶面半径
r_bottom-h_wall	3.37[cm]	0.0337 m	冷水底面半径
Hg_cold	3[cm]	0.3 m	冷水高度

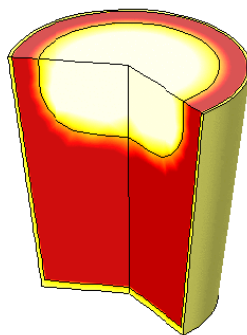


图 2: 冷水加入瞬间的空间分布

#### 5.1.4 杯中空气

如果不加入冷水，即热饮自然冷却时，水杯上30%的区域是空气。其几何参数在设定时与冷水的一致。

表 5: 杯中空气几何尺寸说明

名称	表达式	值	描述
r_top_air	4.5[cm]	0.045 m	空气顶面半径
r_bottom_air	4.2[cm]	0.042 m	空气底面半径
Hg_air	3[cm]	0.03 m	空气高度

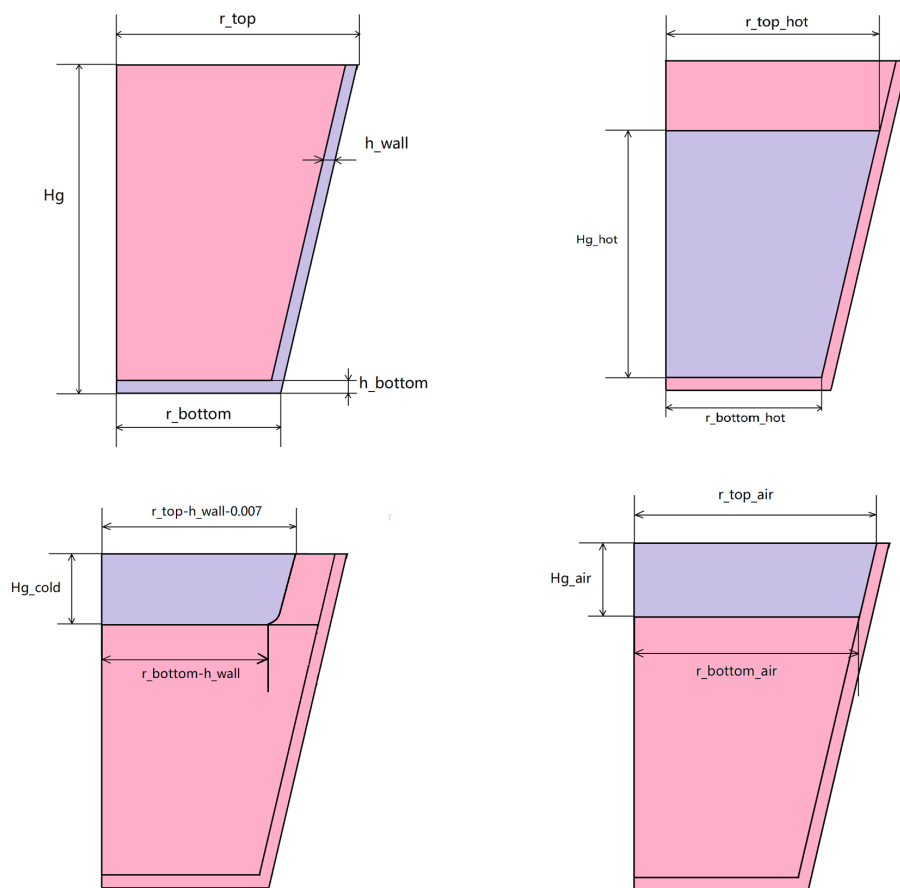


图 3: 各几何尺寸图示

## 5.2 材料性质参数

### 5.2.1 玻璃杯

表 6: 玻璃杯物理性质参数说明

名称	值	单位
恒压热容	703	J/(kg·K)
密度	2203	kg/m <sup>3</sup>
导热系数	1.38	W/(m·K)

### 5.2.2 杯中水

表 7: 杯中水物理性质参数说明

名称	值	单位
比热率	1.0	1
恒压热容	$C_p(T)$	$J/(kg \cdot K)$
密度	$\rho(T)$	$kg/m^3$
导热系数	$k(T)$	$W/(m \cdot K)$

其中 $C_p$ 、 $\rho$ 、 $k$ 为温度 $T$ 的函数，其变化关系如下图所示，由于结合了COMSOL里的内置函数进行了参数估计，所以不必写出具体的函数表达式，得到了明确的变化关系。

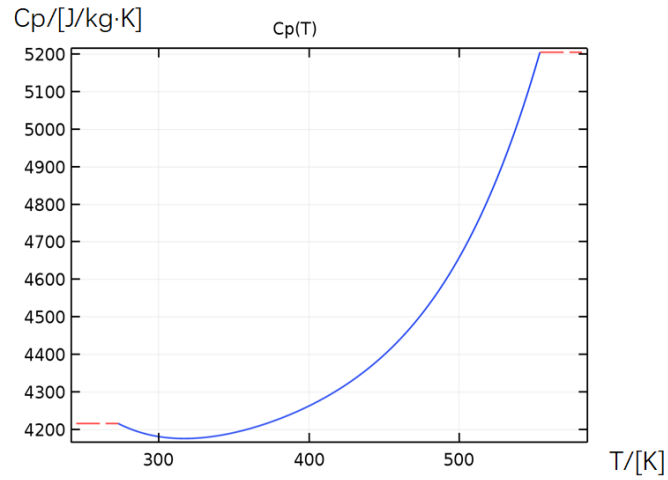


图 4: 水的恒压热容随温度的变换关系



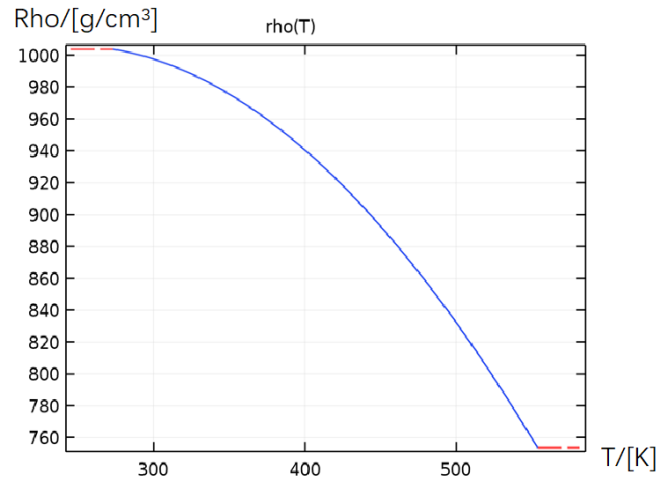


图 5: 水的密度随温度的变换关系

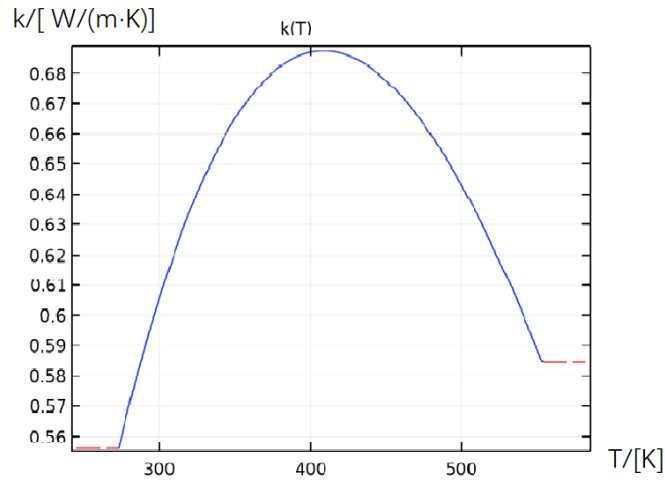


图 6: 水的导热系数随温度的变换关系

### 5.2.3 杯中空气

表 8: 杯中空气物理性质参数说明

名称	值	单位
恒压热容	$C_p(T)$	$J/(kg \cdot K)$
导热系数	$k(T)$	$W/(m \cdot K)$
比气体常数	287	$J/(kg \cdot K)$

其中 $C_p$ 、 $\rho$ 、 $k$ 为温度 $T$ 的函数，其变化关系如下图所示，由于结合了COMSOL里的内置函数进行了参数估计，所以不必写出具体函数表达，得到了明确的变化关系。

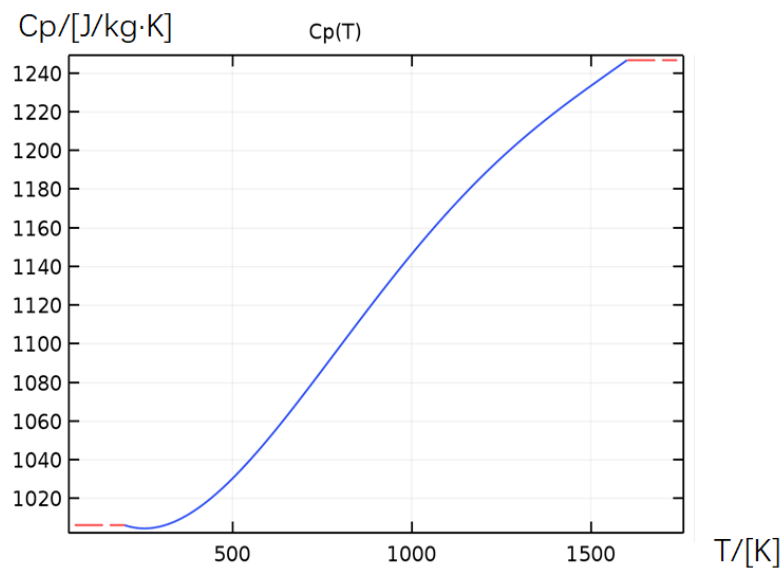


图 7: 空气的恒压热容随温度的变换关系

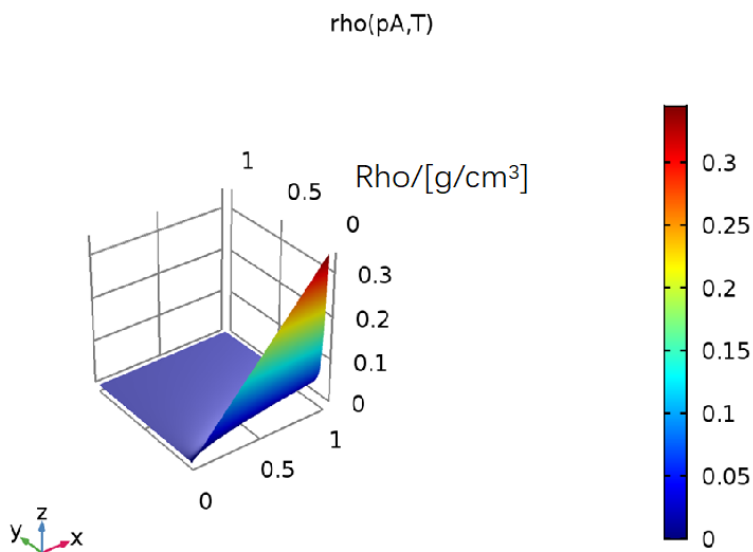


图 8: 空气的密度随温度的变换关系

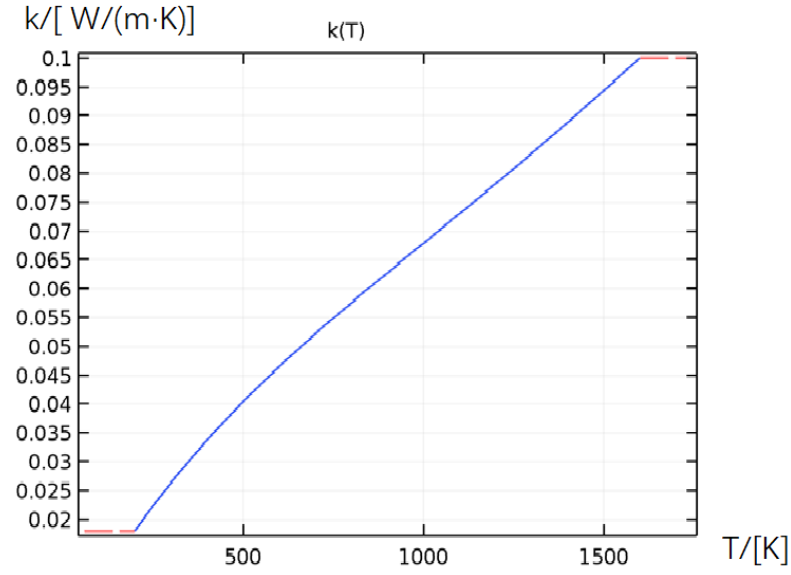


图 9: 空气的导热系数随温度的变换关系

### 5.3 热饮自然冷却模型

首先对热水自然冷却模型结合玻璃杯具体形状进行建模:

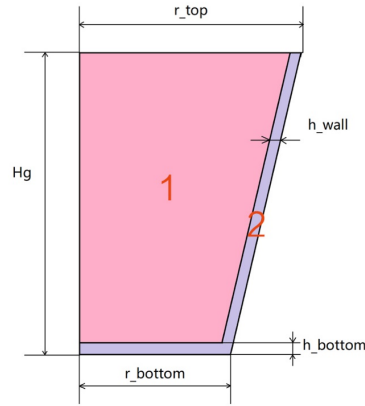


图 10: 玻璃杯形状

考虑一个玻璃杯, 材质主要分为两部分 (如上图): 粉色为水, 流体; 紫色为石英玻璃, 固体。对于这两部分介质, 要考虑其内部的传热。针对流体, 我们经查阅资料 (文献[3]), 选择流体热传导方程:

$$\rho C_p u \cdot \nabla \cdot q = Q + Q_p + Q_{vd}$$

$$q = -k \nabla T$$

进行计算；其中 $q$ 表示单个分子的内能， $\rho$ 表示液体的密度， $Q$ 表示水杯横截面通过的热量， $T$ 表示液体的温度。针对固体，我们采用固体热传导方程：

$$\rho C_p u \cdot \nabla T + \nabla \cdot q = Q + Q_{ted}$$

$$q = -k \nabla T$$

进行计算。

对于流体，还应该考虑其对流传热及重力对对流的影响，因此采用了流体对流方程

$$\rho(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot [-\rho I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot u)I] + F + \rho g$$

$$\nabla \cdot (\rho u) = 0$$

其中 $u$ 代表液体的流速， $C_p$ 表示液体的比热容， $I$ 表示液体的冲量， $\mu$  液体的切变模量， $g$ 是重力加速度。

在这个方程中，解决的是流体微元周围的密度等参量对微元运动状态的影响。流体的热量分布导致密度差异，密度差异导致流体的流动从而影响对流，而对流又能形成新的热量分布，反过来影响了新的热传导。因此，将流体的热传导方程与流体流动方程进行联立，辅助一些边界条件，就可以算出任意时刻流体各部分的状态。

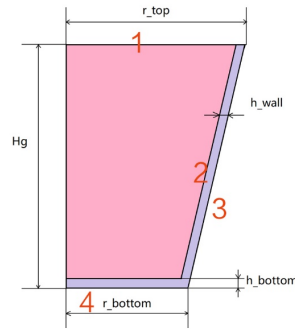


图 11: 接触面

除了介质内部的热量传递，还需要考虑不同介质间的热量传递。对玻璃杯进行分析，我们发现主要有四个接触面： 1. 热水与空气的接触面 2. 热水与玻璃杯的接触面 3. 玻璃杯侧面与空气的接触面 4. 玻璃杯底面与桌子的接触面。

对这四个面，我们分别进行如下分析：

1. 我们将热水与空气的接触面看作：在水面上方，有一小团空气层，温度为环境温度，与热水表面进行自然对流。由于空气的摩擦系数很小，则空气与水面之间可以发生滑移。经查阅资料（文献[3]），适用于此的公式为

$$u \cdot n = 0$$

$$K - (K \cdot n)n = 0, K = [\mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot u)I]n - n \cdot q = q_0$$

$$q_0 = h(T_{ext} - T)$$

$$h = \begin{cases} \frac{K}{L} 0.45 Ra_L^{\frac{1}{4}} & \text{if } T > T_{ext} \text{ and } 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7 \\ \frac{K}{L} 0.15 Ra_L^{\frac{1}{3}} & \text{if } T > T_{ext} \text{ and } 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11} \\ \frac{K}{L} 0.27 Ra_L^{\frac{1}{4}} & \text{if } T > T_{ext} \text{ and } 10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10} \end{cases}$$

其中， $u$ 表示液体流速， $n$ 表示物质的量， $K$ 表示热值， $h$ 表示散热系数， $T_{ext}$ 表示室温， $T$ 表示液体温度， $Ra_L$ 表示雷诺系数。此模型可以很好地模拟水杯放在自然环境中的情形。

2. 由于水和玻璃杯的摩擦系数均较大，因此可以将水与玻璃杯的接触面看作没有滑移，从而使用固体传热公式求解：

$$\begin{aligned} \rho C_p u \cdot \nabla T + \nabla \cdot q &= Q + Q_{ted} \\ q &= -k \nabla T \end{aligned}$$

3. 玻璃杯的侧面与空气的接触面与接触面1类似，看作是外部空气在倾斜表面发生自然对流的过程。经查阅资料（文献[3]），倾斜表面的空气热对流公式为：

$$\begin{aligned} -n \cdot q &= q_0 \\ q_0 &= h(T_{ext} - T) \\ h &= \begin{cases} \frac{K}{L} (0.68 + \frac{0.67((\cos\phi)Ra_L)^{1/4}}{(1+(\frac{0.492k}{\mu C_p})^{4/16})^{4/9}}) & \text{if } Ra_L \leq 10^9 \\ \frac{K}{L} (0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{(1+(\frac{0.492k}{\mu C_p})^{4/16})^{8/27}})^2 & \text{if } Ra_L > 10^9 \end{cases} \end{aligned}$$

4. 底面为固体，而固体的导热能力要远强于空气。热量可以很快地通过底部导走，因此我们假定杯底与桌子的接触面一直是环境温度 $25^\circ C$ 。

给定这些方程后，我们规定边界条件如下：

由于杯子放置在空气中，大部分情况下海拔较低，因而假设外部压强为一个大气压。压强条件如下：

$$\begin{aligned} P_{init} &= P + P_{hydro} \\ P_{hydro} &= \rho_{ref} g \cdot (r - r_{ref}) \end{aligned}$$

$P_{init}$ 表示初始时水杯底部的压强， $P$ 表示大气压强， $P_{hydro}$ 表示杯中液体产生的压强。

由于假设液体与玻璃杯出无滑移，接触面处速度满足 $u = 0$ 。

## 5.4 冰水与热饮混合模型

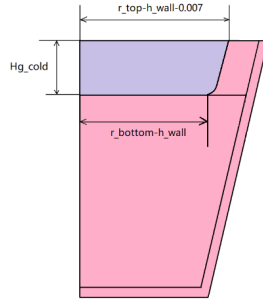


图 12: 混合过程

冷水刚加入热水中，不会在热水表面形成固定的一层，而是聚集在杯子中间的位置，将一部分热水挤到杯子边缘。为了更好地模拟这个过程，我们将加水初始的冷水体积构造为一个圆角梯形。加入冷水后，为模型引入了冷热水的交界面。但由于两种液体只有温度不同，均遵循相同的热对流方程

$$\rho(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot [-\rho I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot u)I] + F + \rho g$$

$$\nabla \cdot (\rho u) = 0$$

其中 $u$ 代表液体的流速， $C_p$ 表示液体的比热容， $I$ 表示液体的冲量， $\mu$  液体的切变模量， $g$ 是重力加速度。同时遵循相同的热传导方程

$$\rho C_p u \cdot \nabla \cdot q = Q + Q_p + Q_{vd}$$

$$q = -k \nabla T$$

其中 $q$ 表示单个分子的内能， $\rho$ 表示液体的密度， $Q$ 表示水杯横截面通过的热量， $T$ 表示液体的温度

因此，只要改变两种液体的初始温度，就可以形象模拟冷热水混合的过程。其他部分与热水冷却相同，在此不再赘述。

我们的思路如下：

首先模拟未加入冷水前的热水降温过程，得到不同时间液体的温度梯度分布。假设冷却了 $t_1$ 时间，温度达到 $T_1$ 摄氏度时，加入冷水。之后改变冷热水混合模型热水的初始值为 $T_1$ ，进行模拟。经 $t_2$ 时间混合均匀后，得到均匀液体的温度为 $T_2$ 。接着，从整杯水自然冷却至饮用温度的仿真过程中，找到从温度 $T_2$ 冷却至饮用温度所需的时间 $t_3$ 。那么，若在 $t_1$ 时间加入冷水，则最终冷却时间为 $t = t_1 + t_2 + t_3$ 。

改变开始降温时间 $t_1$ ，比较总冷却时间 $t$ ，就可以得出所求结论。

## 6 COMSOL软件求解及结果

首先，依照之前初步建立的玻璃杯的几何模型，在COMSOL里实现玻璃杯和水的3D立体模型，然后选择COMSOL里的流体模块和热传导模块以建立符合实际的物理场并将其耦合。

## 6.1 对不同冷却阶段进行仿真

我们将整个的冷却过程拆分为三个阶段：（1）杯中热水冷却至某一温度（2）加入冷水后至温度梯度达到稳定（3）稳定后自然冷却至适宜耐受温度。

### 6.1.1 阶段一：热水自然冷却到某一温度

杯内70%的热水初始温度为373.15K，等其自然冷却，并记录冷却至不同温度所需要的时间 $t_1$ 。

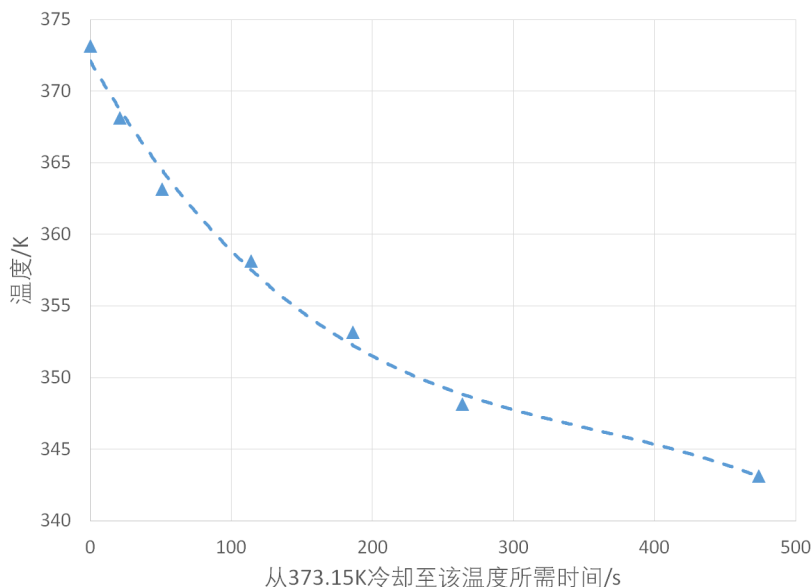


图 13: 70%体积热水冷却至某一温度所需的时间仿真结果

### 6.1.2 阶段二：加热水达到稳定温度梯度

经过多次的仿真试验验证，我们认为混合后的20s后一定会达到稳定的温度梯度，所以主要记录在不同初始温度的前提下，加入冰水混合后20s时所达温度的值。从而这一阶段耗费的时间均为20s，记为 $t_2$ 。下图为在杯中热水冷却至343.15K时加入冷水的仿真过程，时间间隔为1s。

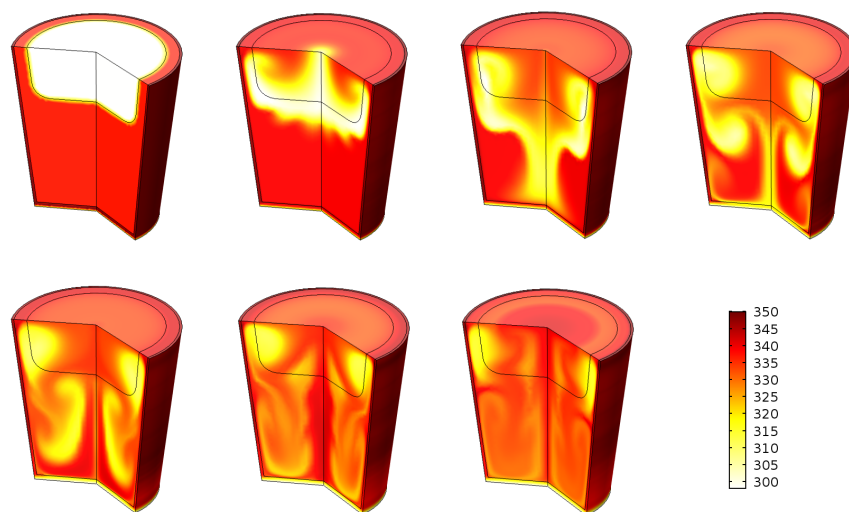


图 14: 343.15K时加入冷水的仿真过程 0 6s 时间间隔为1s

### 6.1.3 阶段三：混合后整杯水冷却至适宜温度

混合后有整杯的水自然冷却，对此进行仿真，记录不同初始温度的整杯水，冷却至适宜饮用的目标温度所需的时间 $t_3$ 。

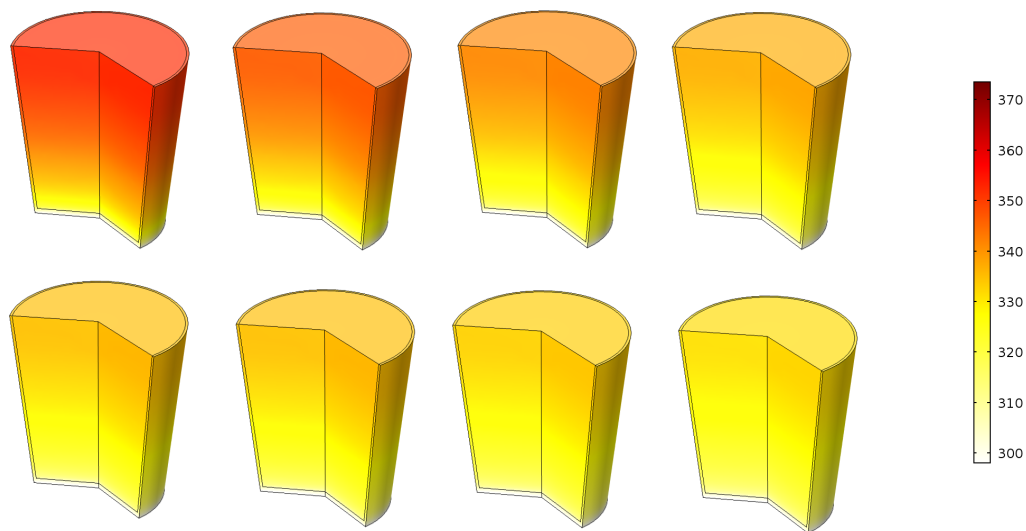


图 15: 整杯水冷却的过程时间间隔为20s



## 6.2 仿真结果

表 9: 冷却至不同温度时加入冷水最终的冷却用时 $t_{\text{总}}$

加冷水时的温度/K	$t_1/\text{s}$	$t_2/\text{s}$	$t_3/\text{s}$	$t/\text{s}$	$t/\text{min}$
343.15	474	20	200	694	11.57
348.15	264	20	350	634	10.57
353.15	186	20	620	826	13.77
358.15	114	20	780	914	15.23
363.15	51	20	1100	1171	19.52
368.15	21	20	1310	1351	22.52
373.15	0	20	1570	1590	26.50

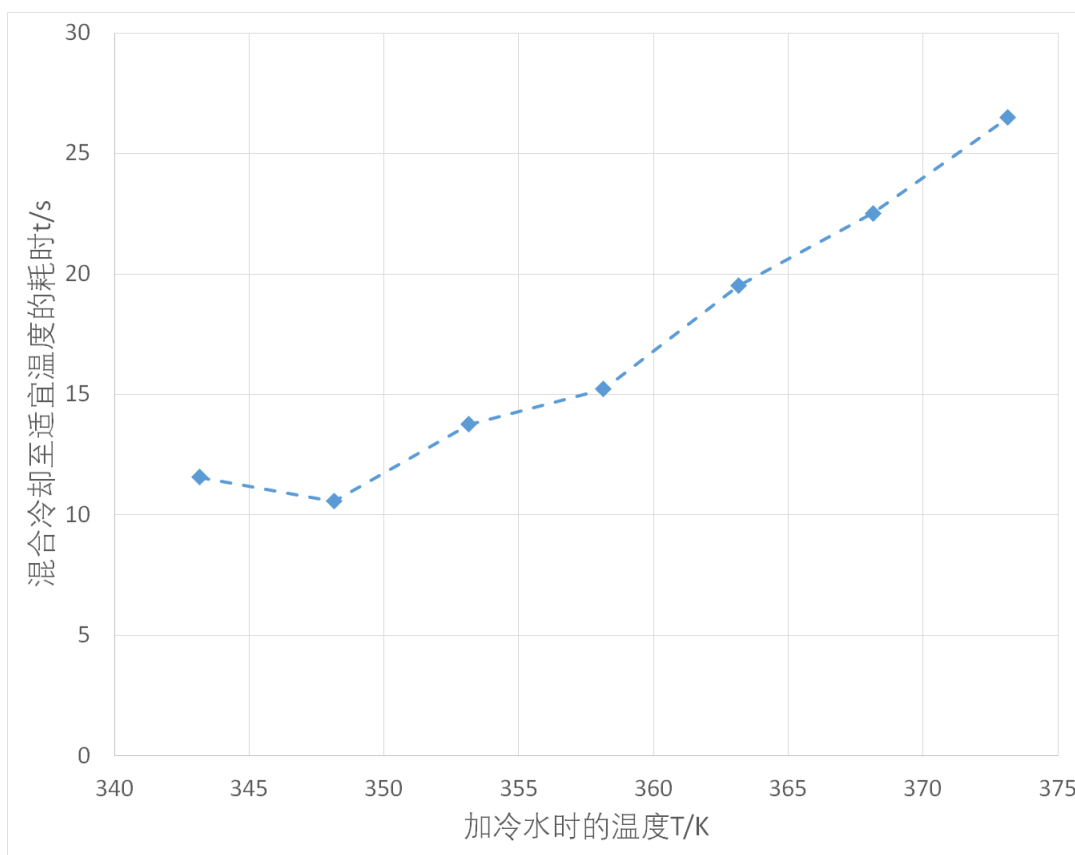


图 16: 各种冷却方案耗时

## 7 结果比较

由上述仿真结果可以看出，对于策略1，在冷却一开始就立即加入冰水，热饮冷却至目标温度共

耗时 $t_1 = 26.50min$ 。对于策略2，冷却至一定温度后再倒入冰水，从仿真结果可看出，冷却至 $75^{\circ}C$ 时（ $348.15K$ ）再倒入冰水冷却至最终温度耗时最少，为 $t_2 = 10.57min$ 。比较两个结果可知，策略2——冷却到一定温度后再倒入冰水能最快地喝到饮料。

## 8 灵敏度分析

对自然降温模型和冷热水混合模型进行分析可得：

自然降温速度主要取决于系统与外界的热量交换，因而不同的杯子厚度，不同的环境温度也许会对降温过程产生较大影响。

下图为三个仿真结果，分别为环境温度 $15^{\circ}C$ ，环境温度 $25^{\circ}C$ ，环境温度 $35^{\circ}C$ 时，自然冷却15min后的温度分布结果。

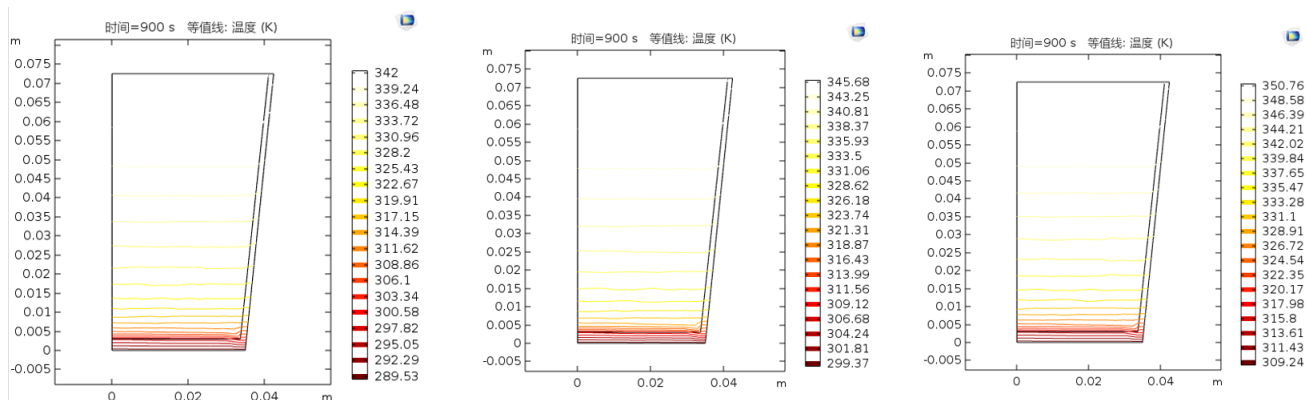


图 17: 环境温度变化

从图中可以看出，随着环境温度的升高，相同时间内降温所达到的温度相处较大，热水降温速度明显减慢。因此可见降温所需时间对环境温度的变化很灵敏。

接着，我们改变杯子厚度为原来的两倍和一半，其他条件不变，分别进行仿真。外形设置如下：

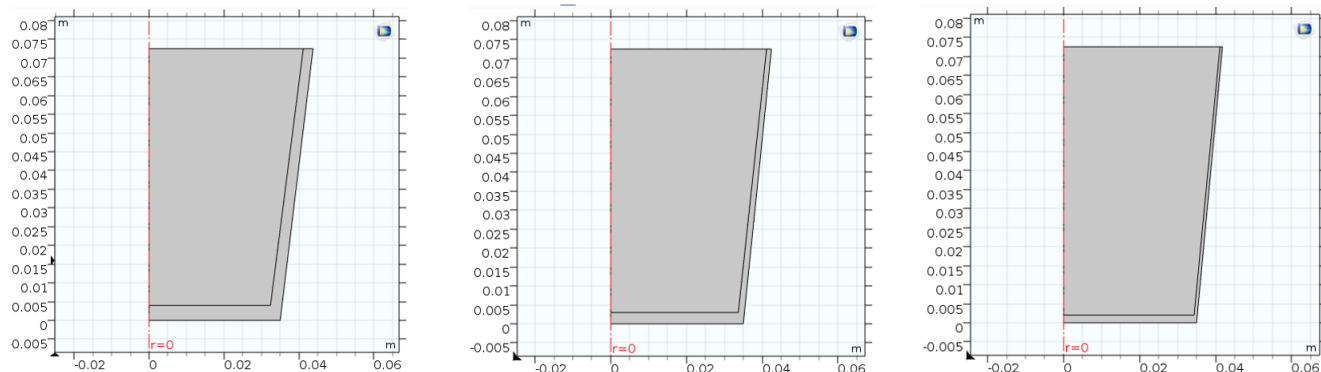


图 18: 被子外形变化

从左至右分别为杯子厚度变为两倍、杯子厚度不变、杯子厚度变为一半的外形，仿真结果如下：

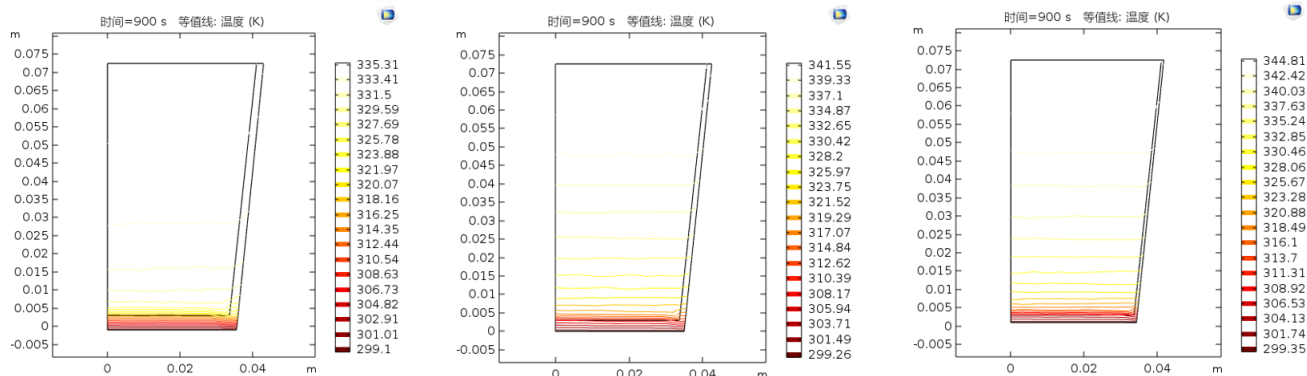


图 19: 被子外形变化仿真结果

由于固体传热比液体传热要快，可以看出在水的体积一定的前提下，玻璃杯越厚，散热越快。因此可见降温所需时间对环境温度的变化很灵敏。

冷热水混合过程主要取决于液体对流，是一个瞬态过程，外界影响较为有限，所以液体本身的性质，如密度、黏度等也许会产生较大影响。由于COMSOL本身的特点，无法保持其他特性不变，只改变液体的密度。所以我将水换成汽油，观察仿真结果。

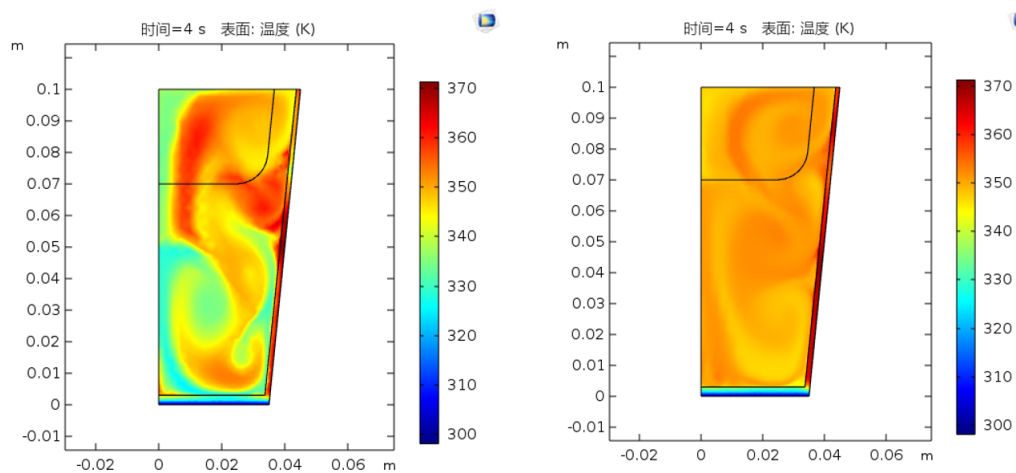


图 20: 改变液体密度

左边是水，右边是汽油。可以看到，在将冷液体加入到热液体后，经过4s，汽油已经混合均匀，而水还在混合的过程中。所以，密度更小的汽油将会更快混合均匀。

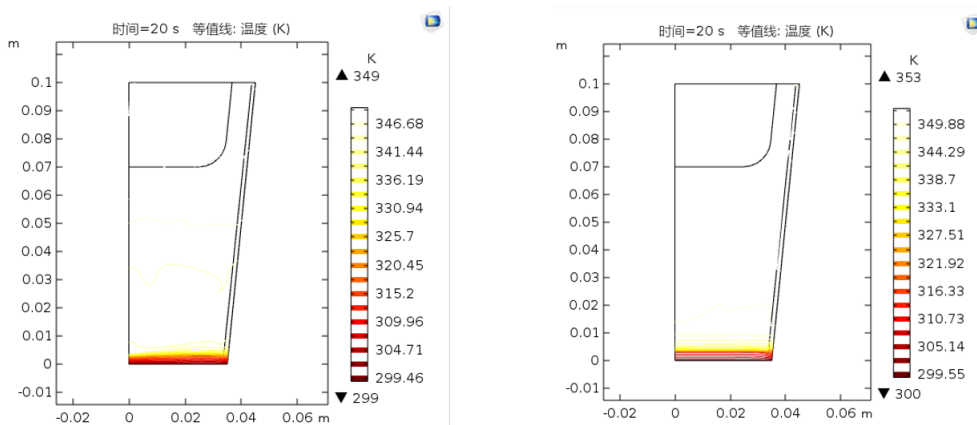


图 21: 改变液体密度仿真结果

左边是水，右边是汽油。可以看到汽油的降温比水的慢。不同液体对降温的影响较大，因此本模型的结论只适用于将冷水往热水中加，或者各项流体参数与纯水差异很小的液体。

由此可见，降温时间对液体的物理性质变化十分灵敏。

## 参考文献

- [1] 刘来福 .数学模型与数学建模 [M]. 北京：北京师范大学出版社， 20 14 .
- [2] 盛颖. 高温热辐射环境对人体生理指标及耐受力影响研究[D]. 天津大学, 2008.
- [3] 黄淑清, 聂宜如, 申先甲. 热学教程, (第二版)[M]. 高等教育出版社, 1994.
- [4] 链接：淘宝上的玻璃杯尺寸参考
- [5] <https://wenku.baidu.com/view/2a91d4ef48d7c1c709a1457b.html?from=search>
- [6] 链接：COMSOL 中国 — 多物理场仿真软件