求解连续 Minimax 问题的粒子群优化方法*

柯　晶[1]　钱积新[2]　乔谊正[1]

[1](山东大学控制科学与工程学院　济南　250061)　[2](浙江大学系统工程研究所　杭州　310027)

摘要　Minimax 问题是一类十分重要同时也是比较困难的优化问题。提出了一种基于粒子群优化的连续 minimax 问题求解方法。方法的基本思想是维持两个在不同搜索空间中不对称共同进化的群体并采用粒子群优化算法获得原 minimax 问题的一个解。仿真结果显示此方法可以有效求解对称和非对称连续 minimax 问题。

关键词　Minimax 问题　进化计算　粒子群优化

Particle Swarm Optimization Method for Solving Continuous Minimax Problems

Ke　Jing[1]　Qian Jixin[2]　Qiao Yizheng[1]

[1]*(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)*

[2]*(Institute of Systems Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)*

Abstract　Minimax problems are a class of important and difficult optimization problems. A particle swarm optimization based method for solving continuous minimax problems is proposed. The basic idea is that the method maintains two populations coevolving asymmetrically in two different search spaces, and a particle swarm optimization algorithm is employed to find a good solution to the minimax problems. Simulation results show that the proposed method can effectively solve symmetric and asymmetric continuous minimax problems.

Key words　Minimax problems　Evolutionary computation　Particle swarm optimization

1　引　　言

作为一类比较特殊的优化问题，minimax（极小极大）问题在最优控制、工程设计、离散优化、Chebyshev 近似以及对策理论中经常遇到[1]。

目前研究较多的是一类离散 minimax 问题[2~3]

$$\min_{x\in X} F(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant M} f_i(x)\qquad X\subseteq R^n \tag{1}$$

其中：$f_i(x)$为 x 的实值函数($i=1,2,\cdots,M$)，M 为有界正整数，即 minimax 问题中的极大只在 M 个离散点上取得。

对于这类离散 minimax 问题，在满足目标函数连续可微等一些条件的前提下，可以应用 SQP、区间分析等方法进行求解[2~3]。粒子群优化(PSO，Particle Swarm Optimization)也可以用于上述离散 minimax 问题的求解[1]。

但是，由于很多问题不能转化为上述离散 minimax 问题，因而经常需要求解如下形式的连续 minimax 问题：

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y)\ (X\subseteq R^n, Y\subseteq R^m) \tag{2}$$

其中：$f(x,y)$为 x 和 y 的实值函数。

文献[4~5]提出了一种求解连续 minimax 问题的两空间遗传算法。该方法采用双群体共同进化(coevolution)的方式求解连续 minimax 问题，但该方法要求原 minimax 问题的解(x^*,y^*)满足如下条件：

$$f(x^*,y)\leqslant f(x^*,y^*)\leqslant f(x,y^*)\quad (\forall x\in X, y\in Y) \tag{3}$$

可以证明，上述条件等价于[6]：

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) \tag{4}$$

当 minimax 问题的解不满足上述条件时，文献[4~5]的方法通常会失效。为此，文献[6~7]提出了一种不对称适应度评价两空间遗传算法。该算法通过在两个群体中采用不对称的适应度函数评价策略，可以有效求解不满足条件(3)的连续 minimax 问题。但该

* 本文于 2003 年 3 月收到。

算法存在排序过程，当群体规模较大时，计算量相对较大。

PSO 是 Kennedy 等人于 1995 年提出的一种新型的进化计算方法[8]。PSO 方法起源于对一个简化社会模型的仿真，它和人工生命(artificial life)理论以及鸟类或鱼类的群集现象有十分明显的联系[8]。从社会认知学的角度来看，PSO 的理论基础主要包括以下几个基本因素：(1)刺激的评价；(2)与近邻的比较；(3)对领先近邻的模仿[9]。

与遗传算法类似，PSO 也是一种基于群体的进化计算方法，但 PSO 与遗传算法不同的是：(1)每一个个体(称为一个粒子)都被赋予了一个随机速度并在整个问题空间中流动；(2)个体具有记忆功能；(3)个体的进化不是通过遗传算子，而是通过个体之间的合作与竞争来实现的[10]。

作为一种新的并行优化算法，PSO 可用于解决大量非线性、不可微和多峰值的复杂问题，再加上程序实现异常简洁，需要调整的参数极少，因而发展很快。对此 Eberhart 等人进行过综述[10]。

文献[11]提出了一种采用共同进化 PSO 算法的连续 minimax 问题求解方法，可以有效求解对称 minimax 问题。本文在文献[4～7,11]的基础上提出一种求解连续 minimax 问题的不对称进化两空间 PSO 算法。仿真结果显示了该方法的有效性。

2 连续 minimax 问题求解

由于求解连续 minimax 问题的 PSO 方法也是一种两空间优化方法，因而先简要介绍一下文献[4～7]的有关结果。

2.1 求解连续 minimax 问题的两空间遗传算法

文献[4～5]提出了一种求解连续 minimax 问题的两空间遗传算法。设 x 和 y 所在的空间分别为 X 和 Y，$L(k)$和 $S(k)$分别表示空间 X 和空间 Y 中的第 k 代群体，则该算法可以描述如下：

算法 1[4,6]

(1)$k=0$，产生初始群体 $L(0)$和 $S(0)$。

(2)对所有 $x\in L(k)$，计算 $h(x)=\max\limits_{y\in S(k)} f(x,y)$。

(3)对所有 $y\in S(k)$，计算 $g(y)=\min\limits_{x\in L(k)} f(x,y)$。

(4)以 $-h(x)$为适应度函数(即 $h(x)$越小对应适应度越大)，对 $L(k)$进行复制、交叉和变异等操作，产生新群体 $L(k+1)$。

(5)以 $g(y)$为适应度函数，对 $S(k)$进行复制、交叉和变异操作，产生新群体 $S(k+1)$。

(6)$k=k+1$，如果 $k<k_{max}$，转到步骤(2)。

(7)执行第(2)步和第(3)步，返回具有最小 $h(x)$的 $x_0\in L(k)$以及具有最大 $g(y)$的 $y_0\in S(k)$作为原 minimax 问题的解。

由于上述算法不能有效求解不满足条件(3)的 minimax 问题，因而文献[6～7]在上述算法的基础上提出如下不对称适应度评价两空间遗传算法，该算法是一种有效求解不满足条件(3)的 minimax 问题的进化计算方法，但由于存在排序过程，计算量相对也较大：

算法 2[6～7]

(1)同算法 1 步骤(1)。

(2)对所有 $x\in L(k)$，令 $h(x)=-\mathrm{Inf}$，对所有 $y\in S(k)$，令 $g(y)=-\mathrm{Inf}$。其中 Inf 代表正无穷大。

(3)对所有 $x\in L(k)$，执行①、②和③：

①对所有 $y\in S(k)$，执行 a 和 b：

a　令 $h(x)=\max[h(x),f(x,y)]$。

b　令 $w(y)=f(x,y)$。

②根据 $w(y)$按升序对 $S(k)$进行排序。

③对于所有 $y\in S(k)$，执行：

如果$\lfloor g(y)\rfloor\neq$(y 在 $S(k)$中的序号)，则令 $g(y)=\max(g(y),y$ 在 $S(k)$中的序号)，否则，令

$$g(y)=g(y)+\frac{1}{|L(k)|+1}$$

(4)同算法 1 步骤(4)

(5)同算法 1 步骤(5)

(6)同算法 1 步骤(6)

(7)执行步骤(2)和步骤(3)，返回具有最小 $h(x)$的 $x_0\in L(k)$以及使得 $f(x_0,y)$最大的 $y_0\in S(k)$作为原 minimax 问题的解。

2.2 求解连续 minimax 问题的 PSO 方法

在文献[4～7,11]的基础上，本节应用 PSO 方法求解连续 minimax 问题。

对应于算法 1，一种直接而又自然的想法是用 PSO 算法代替原算法中的遗传算法，得到一种对称进化两空间 PSO 算法，研究表明此方法可以有效求解满足条件(3)的一类连续 minimax 问题。

为了求解不满足条件(3)的连续 minimax 问题，对应于算法 2，文中提出一种不对称进化两空间 PSO 算法：

算法 3

(1)$k=0$，产生初始群体 $L(0)$和 $S(0)$，令 $w=-\mathrm{Inf}$，$b=-\mathrm{Inf}$。

(2)对所有 $x\in L(k)$，执行①和②：

①对所有 $y\in S(k)$，执行：如 $w<f(x,y)$，则令 $w=f(x,y)$，$(x_w,y_w)=(x,y)$。

② $h(x)=\max\limits_{y\in S(k)} f(x,y)$。

步骤(2)分为上述两个步骤是为了描述方便，实际计算中这两步是合在一起的。

(3)以 $-h(x)$ 为适应度函数(即 $h(x)$ 越小对应适应度越大)，应用粒子群优化产生新群体 $L(k+1)$。

(4)对所有 $y\in S(k)$，计算 $g(y)=\min\limits_{x\in L(k)} f(x,y)$。令 $g_m=\max g(y)$，y_m 等于 g_m 所对应的 $y\in S(k)$，如果 $b<g_m$，则令 $b=g_m$，y_b 等于 y_m。

(5)随机产生群体 $S(k+1)$，然后用 y_w 随机代替 $S(k+1)$ 中的某一个体。

(6) $k=k+1$，如果 $k<k_{max}$，转到步骤(2)。

(7)返回粒子群找到的最优适应度对应的 x_0 以及 y_b 作为原 minimax 问题的解。

需要指出的是，文献[5]和文献[6]都已经注意到维持群体多样性对于采用共同进化求解 minimax 问题的重要性。在上述算法中，步骤(5)使得空间 Y 中群体的多样性始终维持在最大水平上。由于没有排序过程，在相同进化代数的情况下，上述算法的计算量小于算法2。

此外，同遗传算法等大多数进化算法类似，PSO 算法寻找最优区域的速度是比较快的，但局部寻优能力不强，很难收敛到最优解。因此，如对应于算法2的步骤(7)，对算法3的步骤(7)进行修改，即在 x_0 和 y_b 附近再对 x 和 y 进行一次局部寻优的话，则可以在很大程度上提高算法3的寻优精度。为了考察不对称进化两空间 PSO 算法本身的寻优能力，在后面的仿真计算中，只采用基本算法，没有进行局部寻优。

3 仿真示例

考虑如下 minimax 问题，其中问题(a)～(d)出自文献[4]，问题(e)根据文献[6]自行设计，问题(f)～(h)出自文献[6]，(x^*,y^*) 表示正确的 minimax 解：

(a) $f_1(x_1,y_1)=x_1^2-y_1^2 \quad x_1,y_1\in[-2.048,2.044]$

$(x_1^*,y_1^*)=(0,0)$，$f_1(x_1^*,y_1^*)=0$

(b) $f_2(x_1,y_1)=x_1y_1 \quad x_1,y_1\in[-2.048,2.044]$

$(x_1^*,y_1^*)=(0,0)$，$f_2(x_1^*,y_1^*)=0$

(c) $f_3(x_1,y_1)=0.1(x_1-1)^2+4+0.5y_1^2-0.25y_1^4$

$x_1,y_1\in[-2.048,2.044]$

$(x_1^*,y_1^*)=(1,1)$ 或 $(x_1^*,y_1^*)=(1,-1)$

$f_3(x_1^*,y_1^*)=4.25$

(d) $f_4(x_1,y_1)=-100(x_1^2-y_1)^2-(1-x_1)^2$

$x_1,y_1\in[-2.048,2.044]$

$(x_1^*,y_1^*)=(-2.048,2.044)$

$f_4(x_1^*,y_1^*)=-471.671$

(e) $f_5(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum\limits_{i=1}^{2}(x_i-5)^2-\sum\limits_{i=1}^{2}(y_i-5)^2$

$x_i,y_i\in[0,10]$，$i=1,2$

$(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*)=(5,5,5,5)$

$f_5(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*)=0$

(f) $f_6(x_1,y_1)=\min\left(3-\frac{2}{10}x_1+\frac{3}{10}y_1, 3+\frac{2}{10}x_1-\frac{1}{10}y_1\right)$，$x_1,y_1\in[0,10]$

$(x_1^*,y_1^*)=(0,0)$

(g) $f_7(x_1,y_1)=\frac{\sin(x_1-y_1)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$，$x_1,y_1\in(0,10]$

$(x_1^*,y_1^*)=(10,2.125683)$

(h) $f_8(x_1,y_1)=\frac{\cos(\sqrt{x_1^2+y_1^2})}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+10}$，$x_1,y_1\in[0,10]$

$(x_1^*,y_1^*)=(7.04414634,10)$ 或

$(x_1^*,y_1^*)=(7.04414634,0)$

上述连续 minimax 问题有的满足条件(3)，有的不满足条件(3)，有的只有一个最优解，有的则有两个最优解。

如果问题只有一个最优解 $(x_1^*,\cdots,x_n^*,y_1^*,\cdots,y_m^*)$，则定义[6]：

$$MSE(x,y)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{i,t}-x_i^*)^2+\sum_{j=1}^{m}(y_{j,t}-y_j^*)^2\right)$$

其中：T 为仿真次数。

若问题有两个最优解，则 $MSE(x,y)$ 的计算采用如下规定：

在第 t 次仿真中，$t=1,2,\cdots,T$，选择使得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{i,t}-x_i^*)^2+\sum\limits_{j=1}^{m}(y_{j,t}-y_i^*)^2\right)$ 最小的那个最优解参与 $MSE(x,y)$ 的计算。

仿真算法设置如下：在 PSO 算法中引入惯性权重(inertia weight)[10]，在一次运行中，惯性权重从1.2线性递减为0.4。为了便于和其他文献的结果进行比较，空间 X 和空间 Y 中的粒子数均为50。对于问题(a)和(b)，进化代数设为9；对于问题(c)～(e)，进化代数设为200(同文献[4])；对于问题(f)～(h)，进化代数设为100(同文献[6])。仿真运行环境为配有

1.3GHz Celeron 处理器的 PC 机和 Windows98 中文版操作系统。

图1和2分别为问题(a)和(b)的仿真曲线。由图可知,不对称进化两空间 PSO 算法只需几代进化就达到了最优解。

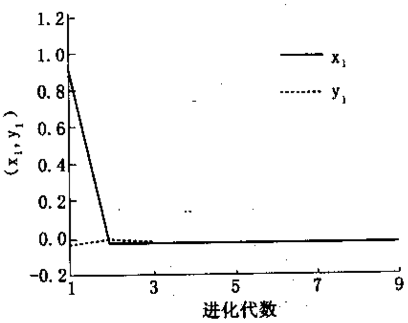

图1 问题(a)仿真曲线

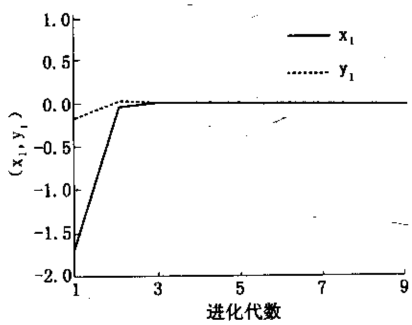

图2 问题(b)仿真曲线

问题(c)有两个解,表1列出了10次仿真实验的具体结果。由表1可知,不对称进化两空间 PSO 算法每次均可以找到近似最优解。进一步研究表明,找到两个解的几率大致相等(从表1中也可以看出这种趋势)。

表1 问题(c)的10次仿真实验结果

次数	函数值	x_1	y_1
1	4.24975	1.02602	−0.982009
2	4.24999	1.00021	0.996867
3	4.24971	1.00138	−1.01698
4	4.24988	0.998533	1.0111
5	4.24978	1.01537	−1.01548
6	4.25001	1.01215	−1.00049
7	4.24998	0.997507	−0.995996
8	4.2496	0.999957	0.979883
9	4.25	0.997853	−1.00149
10	4.24999	1.00941	0.995118

问题(d)和(e)均只有一个最优解,表2列出了10次仿真实验的统计结果。由表2可知,不对称进化两空间 PSO 算法的求解精度是令人满意的。图3为问题(d)的仿真曲线,由图可知其寻优速度是相当快的。

表2 问题(d)和(e)的10次仿真实验统计结果

	函数值		MSE(x,y)
	均值	标准差	
问题(d)	−471.7999	0.1564	2.0789e-7
问题(e)	−0.1286	0.1394	0.1369

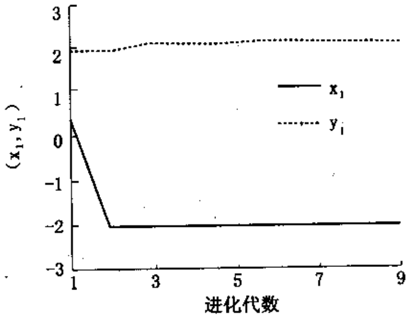

图3 问题(d)仿真曲线

问题(f)～(h)均不满足条件(3),因而不能采用文献[4～5]的方法求解,利用文献[6～7]的非对称算法可以求解。下面采用算法3求解问题(f)～(h)。由于文献[6]给出的结果优于文献[7]的结果,因此我们与文献[6]的结果进行比较。表3为1000次仿真实验的平均结果,其中标有"*"的数据根据文献[6]的结果换算所得。由表3可知:对于问题(f)而言,文献[6]的结果优于本文 PSO 方法得到的结果;对于问题(g),本文 PSO 方法明显优于文献[6]的方法;对于问题(h),本文 PSO 方法略优于文献[6]的方法。

表3 问题(f)～(h)的1000次仿真实验平均结果

	文献[4]方法 MSE(x,y)	文献[6]方法 MSE(x,y)	本文方法 MSE(x,y)	本文方法 仿真时间(s)
问题(f)	10.987*	0.0206616*	0.112257	0.029
问题(g)	43.9585*	1.1390*	0.053720	0.073
问题(h)	14.54523*	0.248721*	0.205131	0.074

图4、5和6分别为问题(f)、(g)和(h)的 MSE(x,y)误差曲线。由图可知,本文 PSO 方法的寻优速度是

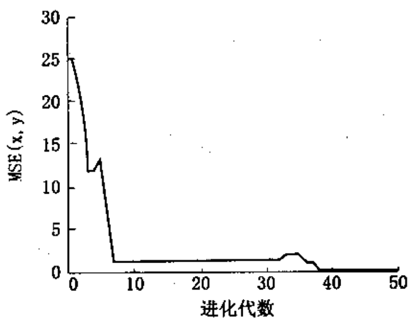

图4 问题(f)误差曲线

比较快的,如对于问题(g)和(h)来说,只需几代进化就基本达到了最优解,问题(f)也只用了30几代进化。

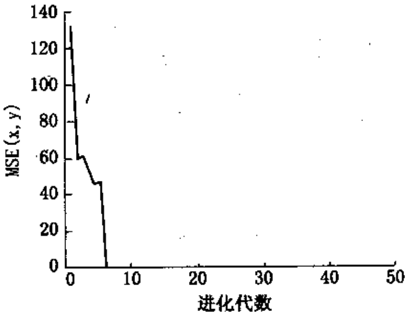

图 5　问题(g)误差曲线

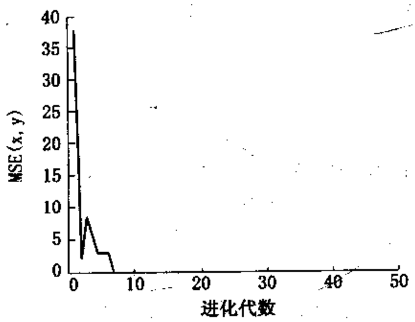

图 6　问题(h)误差曲线

为了直观起见,图 7 和图 8 分别绘出了问题(g)对应的 $f_7(x_1,y_1)$ 的函数曲面图和本文 PSO 方法 1000 次求解结果的位置分布图。由图可知,这是一个典型的不对称

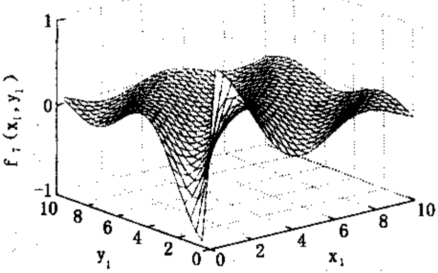

图 7　$f_7(x_1,y_1)$ 的函数曲面图

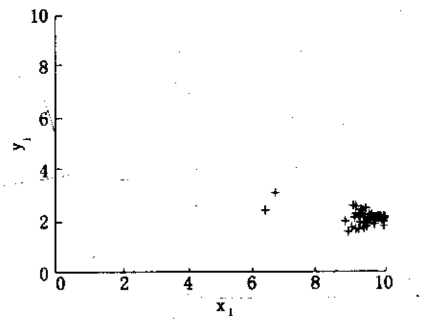

图 8　问题(g)1000 次求解结果的位置分布图

minimax 问题,而本文 PSO 方法对于该问题的求解是比较有效的。如果再引入局部寻优过程的话,还可以进一步提高寻优精度。

由上述仿真结果可以看出,不对称进化两空间 PSO 算法可以有效求解对称和非对称两类连续 minimax 问题。应该指出的是,对于满足条件(3)的对称 minimax 问题,通常用文献[4]或文献[11]的对称算法就可以取得较好的结果。

4　结束语

Minimax 问题作为一类比较特殊的优化问题,具有很强的应用背景,而 PSO 作为一种新的进化计算方法,给大量非线性、不可微和多峰值复杂问题的优化提供了一种新的思路。本文提出了一种基于 PSO 的连续 minimax 问题求解方法。仿真结果显示本方法不仅可以求解对称 minimax 问题,还可以有效求解非对称 minimax 问题。

参考文献

1 Parsopoulos K E, Vrahatis M N. Recent approaches to global optimization problems through particle swarm optimization. Natural Computing, 2002,1(2－3):235～306.

2 薛毅. 求解 minimax 优化问题的 SQP 方法. 系统科学与数学,2002,22(3):355～364.

3 李苏北,曹德欣,陈美蓉. 一类无约束离散 minimax 问题的区间算法. 中国矿业大学学报,2002,31(2):216～220.

4 Herrmann J W. A genetic algorithm for minimax optimization. Technical Report, TR 97－61, USA:The Institute for Systems Research, University of Maryland, 1997,1～15.

5 Herrmann J W. A genetic algorithm for minimax optimization problems. Proc. 1999 Congress on Evolutionary Computation, Washington, D. C., 1999, 1099～1103.

6 Jensen M T. Robust and flexible scheduling with evolutionary computation. PhD Dissertation, Denmark: University of Aarhus, 2001,21～32.

7 Jensen M T. A new look at solving minimax problems with coevolution. 4th Metaheuristics International Conference, Porto, Portugal,2001,103～107.

8 Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization. Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks, Perth, WA, Australia, 1995,1942～1948.

(下转第 282 页)

开始，即内壁温度变化的起始时刻（爆发器压力测试技术发展的已经相当完善，测试精度已接近百分之一量级[5]，实验中认为该测试结果为准确值）。通过依靠电流点燃的点火药 A，使火药 B 着火燃烧，产生的压力及其随时间变化的规律由 D 及相应记录仪器记录，当压力达到一定值后，C 被冲开进行排气，整个过程实现了内弹道过程的模拟。

图 4 为实验测得的压力曲线与温度曲线，由压力曲线知压力在 75.5ms 时开始升高，因此温度曲线的起始变化时刻认为在 75.5ms 处。由此起始时刻出发的各温度曲线如图 5 所示（以温度的起始时刻为横坐标的相对零点），图中 B 曲线为利用软测量模型与 S1 测试结果获得的爆发器内壁面温度，E 线为采用软测量获得的表面温度以及数值传热学方法计算得到的验证点处温度。

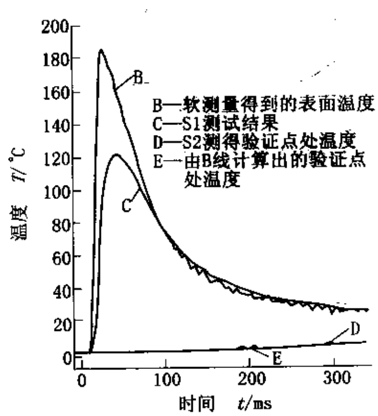

图 5 各温度曲线

由图 4 可见测试点处整个温度变化在 300ms 左右，而上升过程仅为 40ms，结合图 5 可见内壁面温度上升过程仅为 26ms，爆发器腔内的变化过程将更短。图 5 中 E 线与实验测得的验证点处温度曲线 D 线吻合较好，因此获得的温度曲线 B 反映了实际的爆发器内壁面温度变化，从而实现了该温度的测试。

6 结 论

（1）采用软测量方法，选择变化缓慢的壁内温度为二次变量，可以实现密闭腔内毫秒级传热中内壁温度的测量；

（2）对密闭腔内毫秒级传热中内壁温度测试所建立的软测量模型以及给出的相应求解方法是可行的；

（3）对高瞬态温度变化规律的测量，可以采用非高性能温度传感器，结合软测量的方法进行，从而降低传感器的动态特性要求，使测试系统具有低成本性。

参考文献

1 黄吕权，李付国. 薄膜热电偶的技术特性研究[J]. 中国机械工程，1996，7(5)：34～37.

2 钱兰，陈宁. 薄膜热电偶动态响应特性的实验研究[J]. 内燃机学报，1998，16(2)：251～253.

3 李付国，黄吕权，解亚军，等. 薄膜热电偶动态特性研究[J]. 仪器仪表学报，1996，17(3)：316～319.

4 于静江，周春晖. 过程控制中的软测量技术[J]. 控制理论与应用，1996，13(4)：137～144.

5 胡瑜，万学仁，肖圣敏. 密闭爆发器容积弹性增量的计算及对测试结果的修正[J]. 火炸药学报，2001，(4)：54～57.

（上接第 271 页）

9 Dautenhahn K. Book review：swarm intelligence. Genetic Programming and Evolvable Machines，2002，3(1)：93～97.

10 Eberhart R C，Shi Y. Particle swarm optimization：developments，applications and resources. Proc. 2001 Congress on Evolutionary Computation，Seoul，South Korea，2001，81～86.

11 Shi Y，Krohling R A. Co-evolutionary particle swarm optimization to solve min-max problems. Proc. 2002 Congress on Evolutionary Computation，Honolulu，HI，USA，2002，1682～1687.