

量子力学

专题讨论: EPR 佯谬与 Bell 不等式

杨焕雄

中国科学技术大学物理学院近代物理系

hyang@ustc.edu.cn

December 20, 2017

量子力学的完备性:

量子力学自诞生以来 (1925-), 在描写原子及亚原子层次的物理现象方面取得了极大的成功. 量子力学理论预言与实验结果之间的高度符合, 使得即就是对量子力学原理半信半疑的怀疑论者、或者完全不接受量子力学理论的异见人士, 也不得不承认量子力学的理论中包含真理的成分.

然而, 量子力学对体系状态波函数 Ψ 所作出的概率诠释, 引发了量子物理先驱爱因斯坦与玻尔之间旷日持久的有关量子力学是否是一个完备物理理论的争论. 1935 年, 爱因斯坦与 Podolsky, Rosen 合作发表了一篇重要文献:

- ① A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. 47, 777(1935).

爱因斯坦等人的文章坚持定域的物理实在性观点，即认为以类空间隔分开的两个系统具有彼此独立的物理实在性¹。在此基础上，文章论证量子力学不能给出对于微观粒子的完备性描写。

通常称爱因斯坦等人这篇文章中的论证为 EPR 佯谬 (Paradox)。

EPR 佯谬具体考虑的是一个二粒子量子力学体系。构成体系的两个微观粒子均在 x 轴上运动，假设体系的状态波函数为：

$$\psi(x_1, x_2) = 2\pi\delta(x_1 - x_2 + x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp \left[ik(x_1 - x_2 + x_0) \right]$$

- $\psi(x_1, x_2)$ 是构成体系的二粒子相对位置坐标算符 $\hat{X}_1 - \hat{X}_2$ 和总动量算符 $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ 的共同本征态：

$$(\hat{X}_1 - \hat{X}_2)\psi(x_1, x_2) = -x_0\psi(x_1, x_2)$$

$$(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)\psi(x_1, x_2) = 0$$

事实上， $[\hat{X}_1 - \hat{X}_2, \hat{P}_1 + \hat{P}_2] = 0$ 。

¹定域物理实在性的理论基础是狭义相对论的因果律。

- 参数 x_0 的物理意义显然是 $\psi(x_1, x_2)$ 态下构成体系的二粒子之间的相对位移. EPR 假设 x_0 为一宏观距离, 非常大, 大到可以确保二粒子之间不能通过任何物理信号或者相互作用相联系.
- $\psi(x_1, x_2)$ 既不是第一个粒子的动量本征态, 也不是第二个粒子的动量本征态. 但由于 $\psi(x_1, x_2)$ 态下体系的总动量为零, 若在 $\psi(x_1, x_2)$ 态下对粒子一的动量进行测量、获得测量值 $p_1 = \hbar k_1$, 则无须测量即知粒子二的动量为 $p_2 = -\hbar k_1$. 此次对粒子一的动量测量所导致的波函数坍塌为:

$$\psi(x_1, x_2) \rightsquigarrow \psi'(x_1, x_2) = \exp \left[ik_1(x_1 - x_2 + x_0) \right]$$

- 在 $\psi'(x_1, x_2)$ 态下测量粒子一的位置坐标, 引发波函数的第二次坍塌:

$$\psi'(x_1, x_2) \rightsquigarrow \psi''(x_1, x_2) = 2\pi\delta(x_1 - x_2 + x_0)$$

倘若在 $\psi''(x_1, x_2)$ 态下粒子一的位置坐标为 x_1 , 则粒子二的位置必为 $x_2 = x_1 + x_0$.

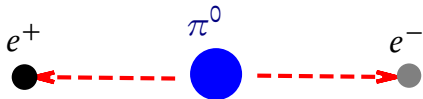
- 对粒子一位置坐标的最新这次测量严重地干扰了粒子一的动量。所以，在坍塌后的 $\psi''(x_1, x_2)$ 态下，虽然粒子一具有确定的位置坐标 x_1 ，它的动量却不再是 $p_1 = \hbar k_1$ 。事实上，此时粒子一的动量是完全不确定的。
- 那么，最新这次对于粒子一位置坐标的测量是否会影响粒子二的动量分布呢？EPR 认为不会。考虑到 $\psi''(x_1, x_2)$ 态下二粒子的空间距离为 x_0 ，它非常大，关于粒子一位置坐标测量的信息传递不到粒子二所处的位置，故可以认为粒子二仍具有确定的动量 $p_2 = -\hbar k_1$ 。据此，EPR 得出结论：体系处在 $\psi''(x_1, x_2)$ 态下时，粒子二同时具有确定的动量和位置坐标，虽然 $[\hat{X}_2, \hat{P}_2] = i\hbar \neq 0$ 。
- 鉴于量子力学理论不能做出粒子二同时具有确定的位置和动量的预言，EPR 宣称量子力学理论和热力学理论类似，它是不完备的。

EPR 佯谬在后来玻姆 (Bohm) 提出的变种中，其表现更尖锐。

EPRB 佯谬:

考虑 π^0 粒子的弱衰变,

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$$



实验分析:

- ❶ 假设 π^0 是静止的, 则动量守恒意味着 e^\pm 的运动方向相反.
- ❷ 由于 π^0 的自旋为零, 角动量守恒要求 e^\pm 体系处于单态组态:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \right]$$

若电子的自旋向上, 正电子的自旋必须向下. 反之亦然.

- ❸ 对于一次具体的 π^0 衰变, 量子力学无法预测将得到哪一种自旋组合, 但是它明确指出电子、正电子自旋的测量是相关的.

相关性:

假设在 π^0 衰变实验中使 e^\pm 各自沿反方向飞行 10 米远, 然后测量电子的自旋. 若观测者测得电子的自旋向上, 他立即就知道了 20 米远处的正电子的自旋向下, 如果另有一位观测者在此处测量正电子的自旋的话.

问题: 从实验角度看, 在异地分别测量电子、正电子自旋取向是两个独立事件. 二者之间为何存在相关性?

① 实在论 (realism) 观点:

电子在产生的那一刻就有向上的自旋 (e^+ 则向下). 只是量子力学无法告知而已. 换言之, 量子力学是不完备的.

② 哥本哈根学派观点:

在测量之前 e^\pm 的自旋是不确定的. 是测量使得电子的态矢量发生坍塌, 同时产生出 20 米远处正电子的自旋.

Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 佯谬:

- ❶ EPR 坚持实在论观点: 无论量子力学能否做出确定的预言, 电子和正电子始终具有确定的自旋.
- ❷ EPR 反对哥本哈根学派的观点. 哥本哈根学派观点的核心内容是: 测量引起了信息的瞬时传递 (超光速). EPR 认为这一观点违背了狭义相对论, 因而是十分荒谬的.
- ❸ EPR 论据是基于任何物理信息的传播速度都不能大于光速这一相对论原则上的. 此原则称为定域性 (locality).

点评:

- 平心而论, EPR 并不是怀疑量子力学的正确性, 他们仅仅是认为使用一个态矢量 (或波函数) 不能完全地描写量子力学体系的状态:
 - ❶ 态矢量并不是描写体系状态所需载体的全部.
 - ❷ 除了态矢量, 为了完全性地描写体系的状态, 还需要另外的一组参量 $\{\lambda\}$, 称其为隐变量.

- 你可以设想态矢量的坍塌

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle] \quad \rightsquigarrow |\uparrow\rangle \otimes |\chi\rangle$$

不是瞬时的，而是以一定的速度传播的。但是，此设想会导致角动量守恒定律被违反。如果我们在电子态矢量坍塌的消息传到之前测量正电子的自旋，测量结果应该是：

$$|\chi\rangle = \begin{cases} |\uparrow\rangle & 50\% \\ |\downarrow\rangle & 50\% \end{cases}$$

第一种结果显然是违反角动量守恒定律的。

- 实验结果是确凿的，违反角动量守恒定律的结果不会出现：电子、正电子自旋的相关性是完美无缺的。 \rightsquigarrow 无论本质如何，态矢量的坍塌是瞬时发生的。

纠缠态：

自旋单态组合

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \right]$$

不能表示为两个单粒子态的乘积，从而无法分别单独讨论每一个粒子的态。这是薛定谔所定义的纠缠态 (entanglement) 的经典例证。

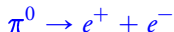
- ① EPR 佯谬充分利用了纠缠态中电子、正电子自旋的相关性。

Bell 不等式：

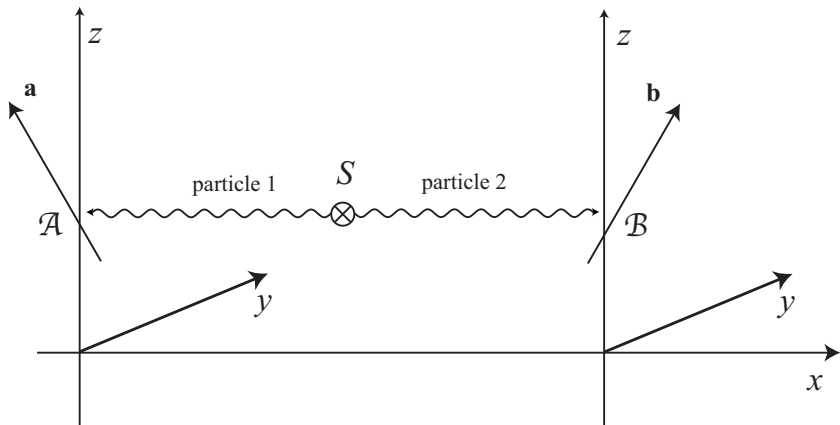
1964 年，Bell 证明了一条定理：任何定域的隐变量理论同量子力学都是不相容的。

Bell 不等式:

考虑 π^0 粒子的弱衰变,



Bell 提出了一个修正版的 EPR 理想实验. 用于测量 e^\pm 自旋的两个探测器可以独立地转动.



- ① 处于 A 处的探测器测量电子自旋沿单位矢量 \vec{a} 的分量, 处于 B 处的探测器测量正电子自旋沿单位矢量 \vec{b} 的分量.
- ② 以 $\hbar/2$ 为单位记录自旋角动量的分量, 则每个探测器沿指定方向的记录数据应该是 $+1$ (自旋向上) 或者 -1 (自旋向下).
- ③ 对多次 π^0 衰变过程所做结果的记录, 应如下表所示:

e^-	e^+	Product
+1	+1	+1
+1	-1	-1
-1	+1	-1
-1	-1	+1
-1	-1	+1
.	.	.
.	.	.

- ④ Bell 建议计算自旋乘积测量结果的平均值 $\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = \langle (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) \rangle$$

现在先看看量子力学对 $\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b})$ 的预言. 设单位矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 之间的夹角为 θ . 不妨取 $\vec{a} = \vec{k}$, 但 $\vec{b} = \vec{k} \cos \theta + \vec{i} \sin \theta$. 如此,

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) = \sigma_{1z}(\sigma_{2z} \cos \theta + \sigma_{2x} \sin \theta)$$

此算符对纠缠态 $|\psi\rangle$ 的作用结果是:

$$\begin{aligned} & (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{1z} (\sigma_{2z} \cos \theta + \sigma_{2x} \sin \theta) \left[|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \right] \\ &= -\cos \theta |\psi\rangle + \sin \theta \left[|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \right] \end{aligned}$$

所以,

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \psi | (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}) | \psi \rangle = -\cos \theta$$

或者等价地,

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Bell 在 1964 年的重大发现是: 上述平均值的量子力学结论与任何定域隐变量理论都是不相容的.

Bell 的发现建立在如下三条基本假设上:

- ❶ 假设 e^\pm 体系的完整量子态是由隐变量 $\{\lambda\}$ 表征的, λ 随时间的变化是我们不知道、也不可控制的。
- ❷ 假设对 e^- 的测量结果是独立于 e^+ 探测器的指向 \vec{b} 的, \vec{b} 的指向可以在对 e^- 马上要进行测量之前由 B 处的观测者选择, 使得 \vec{b} 指向所选择的信息无法在对 e^- 测量之前传递到 e^- 。

显然, 这是定域性假设。

因此, 存在某个函数 $A(\vec{a}, \lambda)$, 它给出对 e^- 自旋测量的结果。存在另一函数 $B(\vec{b}, \lambda)$, 它给出对 e^+ 自旋测量的结果。这些函数的取值是相互独立的、但仅能取:

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$$

- ❸ 当两个探测器指向一致时, 对于所有的隐变量 λ , 结果完全反相关:

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda)$$

因此，计及隐变量的贡献后，测量结果乘积的平均值应该是：

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

或者等价地，

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$$

式中，

- $\rho(\lambda)$ 是隐变量的概率密度。
- $\rho(\lambda) \geq 0$.
- $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$.

若 \vec{c} 是任一可能的单位矢量，则有：

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

注意到,

$$A(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad \rightsquigarrow \quad [A(\vec{b}, \lambda)]^2 = 1$$

可以把上式等价地写为:

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \, \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda)$$

因为 $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$ 也意味着,

$$-1 \leq A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda) \leq +1$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] \geq 0; \\ |A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda)| \leq 1. \end{array} \right.$$

所以,

$$|\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \, \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)] = 1 + \mathcal{P}(\vec{b}, \vec{c})$$

这就是著名的 Bell 不等式.

点评:

- ① 由于对隐变量的属性及其概率分布 $\rho(\lambda)$ 没有做任何具体的假设, 故 Bell 不等式

$$|\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + \mathcal{P}(\vec{b}, \vec{c})$$

对于任意的定域性隐变量理论都成立.

- ② 量子力学的结果:

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

与 Bell 不等式是不相容的. 例如考虑单位矢量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 均处在 xy 平面内, 且

$$\vec{a} = \vec{i}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

如此, 按量子力学则应有:

$$\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \quad \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c}) = \mathcal{P}(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707$$

但是，

$$0.707 = |\mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) - \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{c})| > 1 + \mathcal{P}(\vec{b}, \vec{c}) = 0.293$$

显然违背了 Bell 不等式。

警告：

基于 Bell 不等式给出的判据，EPR 佯谬的意义远比爱因斯坦等人早期对于量子力学完备性的质疑来的深刻：

- ① 若实在论观点是正确的，则量子力学不仅是不完备的，而且是完全错误的。
- ② 若量子力学是正确的，则没有什么隐变量理论可以从爱因斯坦反常的定域性考虑挽救理论对于测量结果预言的或然性²。

²换言之，上帝的确是掷骰子的。

Bell 不等式的实验验证:

1970 年以来, 量子物理学家们做了许多真实的 EPR 实验来检验 Bell 不等式, 其中以 Aspect 小组的工作最有名:

A. Aspect, P. Grangier and G. Roger,

Phys. Rev. Lett. 49, (1982), 1804.

- ① Aspect 的实验研究的是原子的双光子跃迁 (而非思想实验中的 π^0 弱衰变).
- ② 为了排除乙光子探测器察觉到甲光子探测器指针微小变化的可能性, 探测器的指向是在甲光子飞行后随机地设置.
- ③ 实验结果完美地符合于量子力学的预言, 但明显地违反 Bell 不等式.

Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers

Alain Aspect, Jean Dalibard,^(a) and Gérard Roger

Institut d'Optique Théorique et Appliquée, F-91406 Orsay Cédex, France

(Received 27 September 1982)

Correlations of linear polarizations of pairs of photons have been measured with time-varying analyzers. The analyzer in each leg of the apparatus is an acousto-optical switch followed by two linear polarizers. The switches operate at incommensurate frequencies near 50 MHz. Each analyzer amounts to a polarizer which jumps between two orientations in a time short compared with the photon transit time. The results are in good agreement with quantum mechanical predictions but violate Bell's inequalities by 5 standard deviations.

PACS numbers: 03.65.Bz, 35.80.+s

Bell's inequalities apply to any correlated measurement on two correlated systems. For instance, in the optical version of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*,¹ a source emits pairs of photons (Fig. 1). Measurements of the correlations of linear polarizations are performed on two photons belonging to the same pair. For pairs emitted in suitable states, the correlations are strong. To account for these correlations, Bell² considered theories which invoke common properties of both members of the

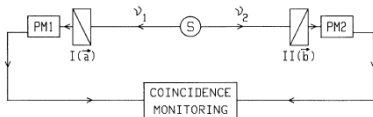


FIG. 1. Optical version of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*. The pair of photons ν_1 and ν_2 is analyzed by linear polarizers I and II (in orientations \vec{a} and \vec{b}) and photomultipliers. The coincidence rate is monitored.

³1989年, Greenberger等人提出了Bell定理的一个改进方案,使得一次测量就可以区分量子力学的预言和任何的定域隐变量理论。详见: Greenberger et al, *Am. J. Phys.* 58, (1990), 1131.

点评:

- ① 实验对于 Bell 不等式的证伪在物理学界产生了极大的震动。许多人由此认识到：量子力学在本质上是非定域的。
- ② 量子力学的非定域性，或者以波函数的瞬时坍塌为其存在形式，或者以全同粒子体系波函数的对称性要求为其存在形式。
- ③ 许多人认为：这种非定域性暗示着量子力学理论中允许某种瞬时超距作用的存在，从而量子力学与狭义相对论在本质上是不相容的。
- ④ 也有一些人认为：量子力学中的非定域性只是体系中两个分离的子系统测量数据的相关性。这种相关性本质上是不能由仅在一处的测量所能检测的，它不是因果关系、因此不能用于传递能量和信息。鉴于此，量子力学的非定域性并不与狭义相对论原则相冲突。

量子力学中测量所扮演的角色

测量过程在量子力学中起着十分独特的作用：

- ① 不确定性及非定域性等量子力学概念上的困难都与理解测量过程有关。
- ② 测量不存在时，体系的状态波函数按照薛定谔方程以符合因果律的定域性方式演化，

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$$

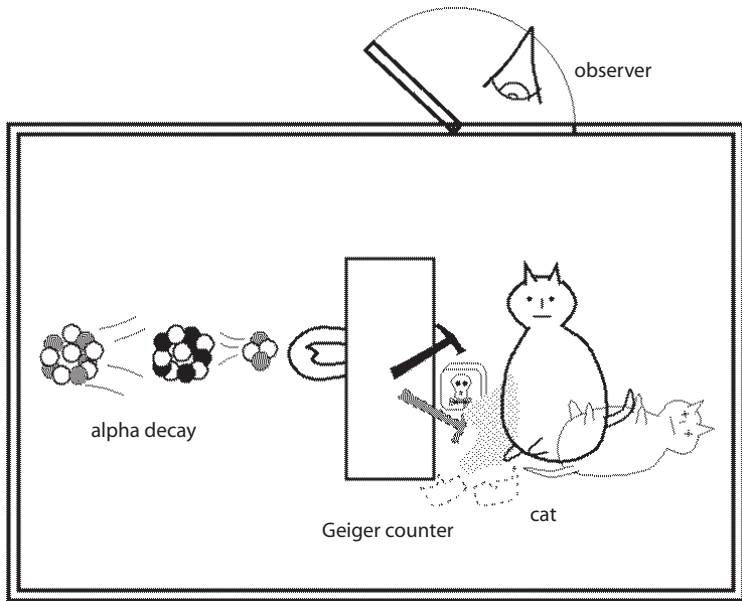
- ⑤ 一旦进行测量，体系的状态波函数立刻从上述正常演化坍塌到某个力学量算符的本征态，从而表现出了令人难以接受的非定域性。

但是，**测量究竟是什么？** 是什么原因使它变得与其他物理过程如此不同？

薛定谔在他著名的猫佯谬 (Schrodinger's Cat) 中尖锐地提出了这个问题:

- ① 设想制作这样一个黑箱子, 其中存有剧毒气体药瓶、稀薄的放射性物质, 且安装着一个的盖革计数器.
- ② 放射性物质在一个小时内可能没有发生原子衰变、也可能发生了一个原子的衰变, 这两种过程的概率相等.
- ③ 倘若发生了一个原子的衰变, 这个原子会触发盖革计数器、通过继电器又会启动小榔头击碎含有剧毒气体的药瓶.
- ④ 现在设想把一只猫关在这个箱子里, 关闭箱子所有的门户.
以猫为研究对象. 请问一小时后这只可怜的猫是死是活?

薛定谔猫:



分析:

- 若可以把猫作为量子力学的研究对象, 则在其被囚禁在黑箱子内一小时后, 其状态应由如下波函数描写:

$$\psi_{\text{cat}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\text{alive}} + \psi_{\text{dead}}]$$

这是因为, 如果此一小时内没有原子衰变, 则剧毒气体不会泄漏, 猫将活着. 如果发生了一个原子的衰变, 剧毒气体会泄漏、猫将被毒死. 然而, 在外部观测者打开箱子的门户之前, 原子衰变与否的概率均等, 因此猫既不是活的也不是死的, 而是二者的线性叠加.

- 只有在外部观测者打开箱门的那一时刻, 猫被迫选择了一种状态, 或者活着、或者死了. 如果你发现猫死了, 那么量子力学对此悲剧的理解就是: 你的观测杀死了猫.

薛定谔认为打开黑箱前猫处在既死又活、非死非活的状态这个结论是谬论, 许多人也持类似观点.

❶ 那么，应该如何理解薛定谔猫佯谬呢？

目前普遍接受的解释是：

- 猫是一个由大量原子、分子构成的宏观体系，其运动只表现出粒子性、并不表现出明显的波粒二象性（退相干效应）。因此，猫不宜作为量子力学直接的研究对象。
- 由于猫本身不适合作为量子力学的研究对象，所以薛定谔猫佯谬问题中的外部观测者打开黑箱门户的动作并不构成一次测量。
- 使用量子力学研究薛定谔猫佯谬时，合适的研究对象是黑箱内放射性物质中的原子。因此，原子衰变触发盖革计数器构成一次测量。猫不会处在既死又活的叠加态⁴，它的死活实际上在外部观测者打开黑箱门户之前就已经确定了。

⁴ 态的线性组合体现的是所谓的相干性，这是波的性质。

点评:

对测量问题及非定域性的研究构成了近年来量子力学前沿研究的一个重要领域, 涉及量子通信、量子计算等许多具有潜在工业价值的新兴学科, 也促进量子力学与广义相对论的统一。

参考文献:

- ① J.Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, 1987, CUP.
- ② D.Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, 2e, 2005, Pearson.
- ③ T.Maudlin, *Quantum non-locality and relativity*, 3e, 2011, Wiley-Blackwell.
- ④ 张永德著, 量子力学(第二版), 2002, 科学出版社.