hw-9

0531

1. 是否有可能在多项式时间内判断无向图G=(V,E)存在规模为5的团集？为什么？

Solution :

可以。设顶点数为 n，从中取出 5 个顶点共有 C_n^5种选法，每种选择均可用常数时间复杂度判断是否为完全子图。因此总的时间复杂度相对于输入为$O(n^5)$，是多项式时间复杂度。

2. 已知顶点覆盖问题是NP完全的，那么如果所有顶点的度数都是偶数，能不能设计出多项式时间的确定性算法？证明你的结论

Solution :

虽然我们不能证明$P \neq NP$，但我们还是认为对于NP完全问题，不存在多项式时间复杂度的确定性算法。下面将使用归约来说明所有顶点度数均为偶数的图的顶点覆盖问题也是NP完全问题。

设$G = (V, E)$为任意简单图，由握手定理知，G中度数为奇数的顶点一定为偶数个。现在考虑向图中增加一个独立的三角形(增加3个顶点)，设其中一个顶点为p，将p向G中原来所有度数为奇数的顶点连一条边，得到图$G' = (V', E')$，且G'中所有顶点的度数均为偶数。

首先给出结论：G有小于等于k的顶点覆盖当且仅当G'有小于等于k+2的顶点覆盖。

- 必要性：若G有小于等于k的顶点覆盖，对于图G'，多出来的三角形至少需要两个点来覆盖，取G原来的顶点覆盖，并上p和三角形中任意另外一点，则得到G'的小于等于k+2的顶点覆盖。(注意，这里必须取p，因为要保证p与G中顶点的连线均被覆盖到)
- 充分性：若G'有小于等于k+2的顶点覆盖，覆盖点集中至少有两个点属于新加的三角形，考虑点集中剩下至多k个点，它们一定覆盖了图G中原有的所有边(因为新加三角形的任意顶点都无法覆盖到这些边)，因此点集中的这些点一定是原图G的一个小于等于k的顶点覆盖。

最后，由图G构造G'在多项式时间复杂度内可以完成(遍历所有点找到度数为奇数的即可)，因此由顶点覆盖问题可以归约到偶度数图顶点覆盖问题，所以偶度数图顶点覆盖问题也为NP完全问题，没有多项式时间的确定性算法。

0601

1. 证明下面的算法能够以80%以上的概率正确判断一个给定的正整数n是否为素数,

算法：Primality

输入：正整数n

输出：n是否为素数（True为素数，False为合数）

1 如果n与30030的最大公约数为1，则返回True

2 否则返回False

Solution :

$$30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

与30030互质等价于与(2,3,5,7,11,13)互质。在该算法中，所有质数均判断正确，与(2,3,5,7,11,13)不互质的合数判断正确，出现错误的是与(2,3,5,7,11,13)互质的合数，只需考虑这些数的占比即可估算出正确率。

$$\begin{aligned} acc &= 1 - \frac{\text{与}(2,3,5,7,11,13)\text{互质的合数}}{\text{所有的数}} \\ &> 1 - \frac{\text{与}(2,3,5,7,11,13)\text{互质的数}}{\text{所有的数}} \\ &\approx 1 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \\ &\approx 1 - 0.19 \\ &= 0.81 > 0.8 \end{aligned}$$

所以正确率高于80%