Ουρά Προτεραιότητας: Heap

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δομές Δεδομένων

- (Αναπαράσταση,) οργάνωση και διαχείριση συνόλων αντικειμένων για αποδοτική **ενημέρωση** και **ανάκτηση** πληροφορίας.
  - Αποδοτική υλοποίηση αλγορίθμων και Βάσεων Δεδομένων.
- (Αποδοτική) αναπαράσταση – **οργάνωση** «σύνθετων» αντικειμένων με χρήση:
  - Βασικών τύπων δεδομένων (ints, floats, chars, strings, arrays).
  - Μηχανισμών που παρέχονται από γλώσσες προγραμματισμού (structs – records, objects).
- **Διαχείριση:** υλοποίηση στοιχειωδών λειτουργιών
  - Ταξινόμηση, αναζήτηση, min/max/median, first/last, ...
  - Εισαγωγή, διαγραφή, ενημέρωση.
- Λύσεις και τεχνικές για αποδοτική διαχείριση δεδομένων.
  - Ανάλυση για απαιτήσεις και καταλληλότητα.

Γενικευμένος Τύπος Δεδομένων

- **Abstract Data Type** (ADT): σύνολο (στιγμιότυπα) με λειτουργίες (μεθόδους) επί των στοιχείων του.
- **Δομή Δεδομένων**: Υλοποίηση ενός ADT
  - Αναπαράσταση – οργάνωση στιγμιοτύπων και υλοποίηση λειτουργιών με κατάλληλους αλγόριθμους.
  - Διατύπωση: ορισμός αναπαράστασης και περιγραφή υλοποίησης λειτουργιών (ψευδο-κώδικας).
  - Ανάλυση: προσδιορισμός απαιτήσεων σε χώρο αποθήκευσης και χρόνο εκτέλεσης για κάθε (βασική) λειτουργία.

Ουρά Προτεραιότητας (Priority Queue)

- Ουρά όπου **σειρά διαγραφής** καθορίζεται από **προτεραιότητα (μεγαλύτερη** – μικρότερη).
- Στοιχεία (προτεραιότητα, πληροφορία).
- Ακολουθία από λειτουργίες:
  - insert(x): εισαγωγή x.
  - deleteMax(): διαγραφή και επιστροφή στοιχείου μέγιστης προτεραιότητας.
  - max(): επιστροφή στοιχείου μέγιστης προτεραιότητας (χωρίς διαγραφή).
  - changePriority(k): αλλαγή προτεραιότητας θέσης k.
  - isEmpty(), size(): βοηθητικές λειτουργίες.

Εφαρμογές

- Άμεσες εφαρμογές:
  - Υλοποίηση ουρών αναμονής με προτεραιότητες.
    - Δρομολόγηση με προτεραιότητες.
    - Largest (Smallest) Processing Time First.

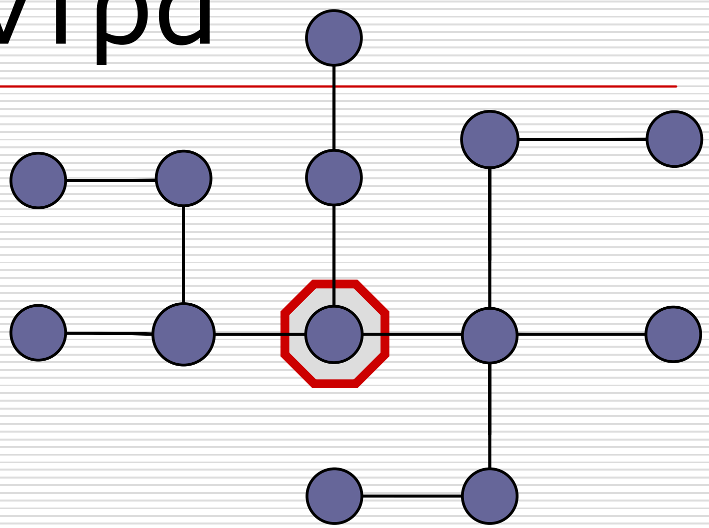
- Έμμεσες εφαρμογές:
  - Βασικό συστατικό **πολλών** ΔΔ και αλγορίθμων:
    - HeapSort (γενικά ταξινόμηση με επιλογή).
    - Αλγόριθμος Huffman.
    - Αλγόριθμοι Prim και Dijkstra.
    - ...

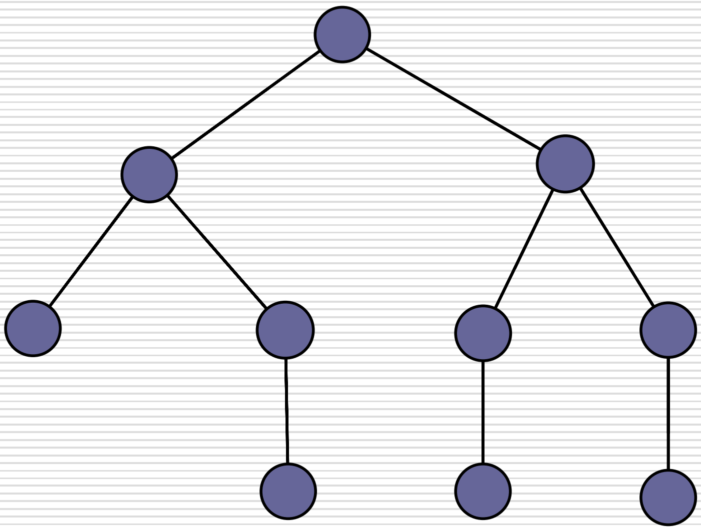
Στοιχεία Ουράς Προτεραιότητας

- Ουρές Προτεραιότητας:
  - **Ολική διάταξη** στοιχείων με βάση προτεραιότητα.
  - Στοιχεία είναι αριθμοί (με συνήθη διάταξη) που δηλώνουν προτεραιότητα.
  - Εφαρμογή για στοιχεία κάθε συνόλου με σχέση ολικής διάταξης (αριθμοί, λέξεις, εισοδήματα, ...).
- Ουρά Προτεραιότητας με γραμμική λίστα:
  - Διαγραφή μέγιστου ή εισαγωγή απαιτεί γραμμικό χρόνο.
- Υλοποίηση ουράς προτεραιότητας με **σωρό** (heap).
  - Δυαδικό δέντρο με διάταξη σε κάθε μονοπάτι ρίζα – φύλλο.

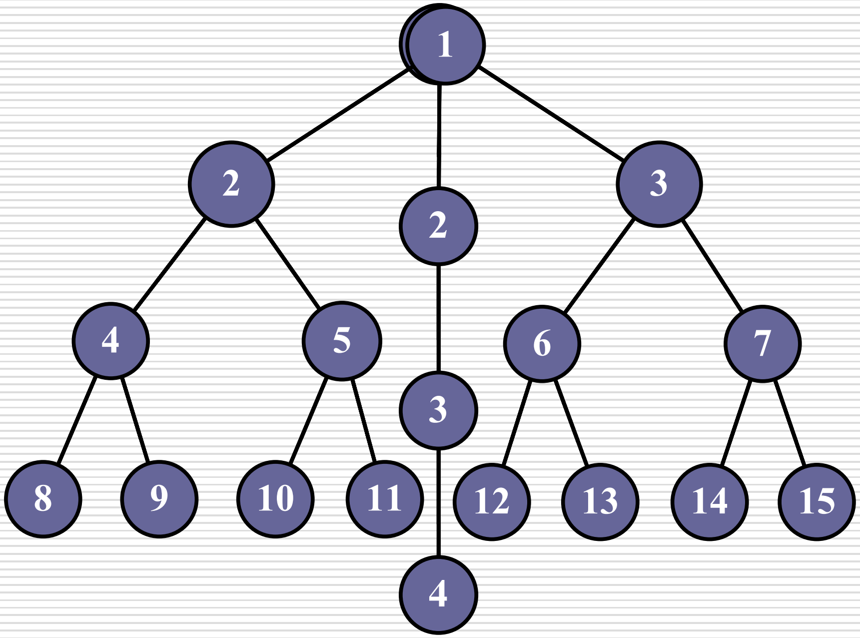
Ιεραρχικές Δομές: Δέντρα

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό.**
- Δέντρο με **n κορυφές** έχει **m = n – 1 ακμές.**
- Δέντρο με **ρίζα** : **Ιεραρχία**
- **Ύψος** : μέγιστη απόσταση φύλλου από ρίζα.
- **Δυαδικό δέντρο** : έχει **ρίζα** και κάθε κορυφή **≤ 2 παιδιά :**
  - Αριστερό και δεξιό.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.



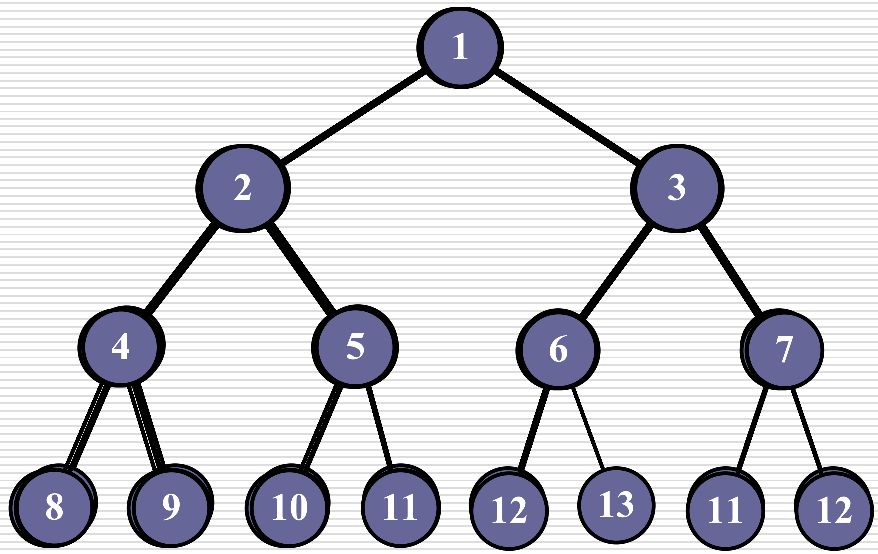


Δυαδικά Δένδρα



- #κορυφών για ύψος = h:
  $h+1 \le$ #κορυφών $\le 2^{h+1} - 1$
  - $h+1$ επίπεδα, ≥ 1 κορ. / επίπ.
  - $\le 2^{i}$ κορυφές στο επίπεδο i .
    $1 + 2 + \ldots + 2^{h} = 2^{h+1} - 1$
- Ύψος για #κορυφών = n:
  $\log_2(n+1) - 1 \le$ ύψος $\le n - 1$
- **Γεμάτο** (full):
  - Κάθε κορυφή είτε φύλλο είτε 2 παιδιά.
- **Πλήρες** (complete) :
  - Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα (εκτός ίσως τελευταίο).
- **Τέλειο** (perfect) : $n = 2^{h+1} - 1$

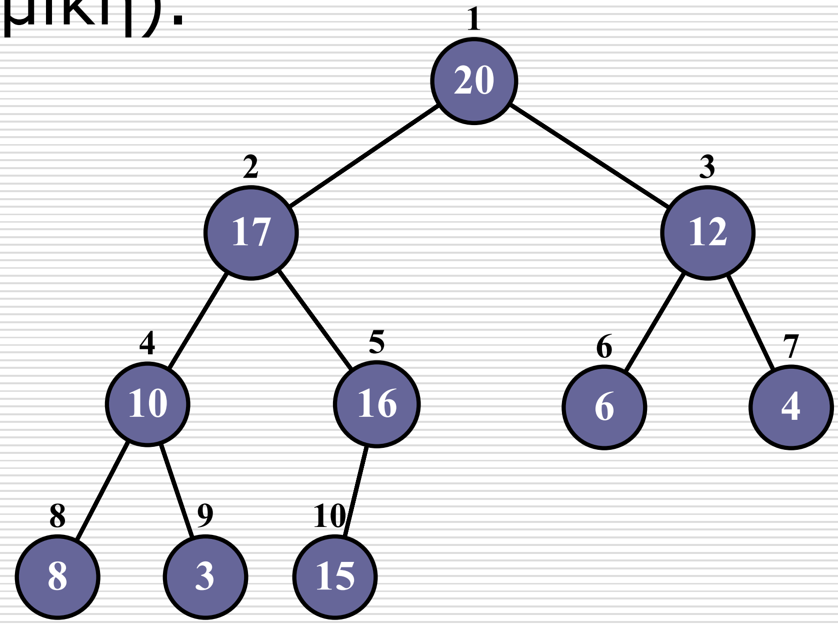
Πλήρες



- Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα εκτός ίσως από τελευταίο που γεμίζει από αριστερά προς τα δεξιά.
- $n(h)$: #κορυφών για ύψος h:
  $2^h \le n(h) \le 2^{h+1} - 1$
  - τέλειο(h) : $2^{h+1} - 1$
  - τέλειο($h - 1$) + 1 : $(2^h - 1) + 1 = 2^h$.
- $h(n)$: ύψος για n κορυφές:
  $\log_2(n+1) - 1 \le h(n) \le \log_2 n$
- Ύψος : $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- #φύλλων $= \lceil n / 2 \rceil$

Αναπαράσταση

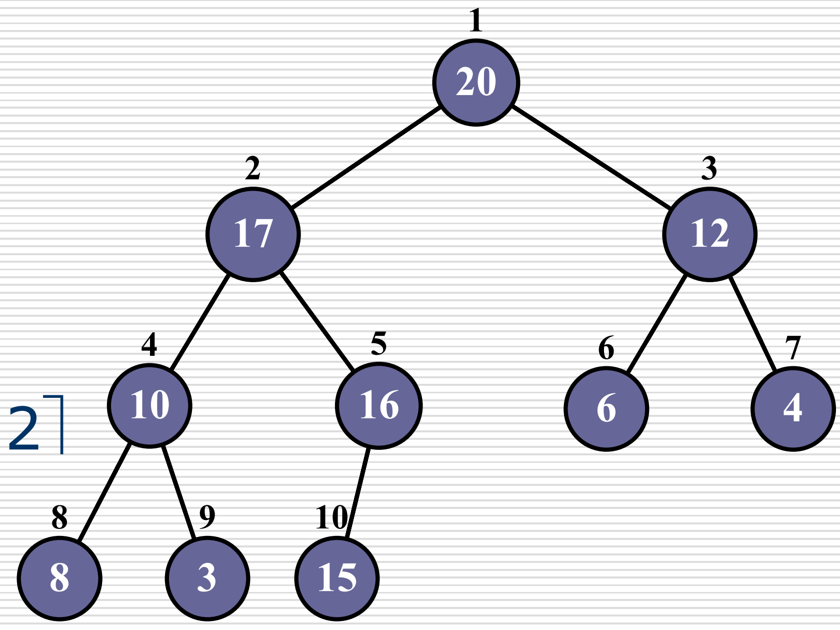
- **Δείκτες** σε παιδιά, πατέρα (δυναμική).
- **Πλήρη** δυαδικά δέντρα :
  - **Πίνακας** (στατική).
  - Αρίθμηση αριστερά → δεξιά και πάνω → κάτω.
  - **Ρίζα** : **Π[1]**
  - **Π[*i*]** : πατέρας **Π[*i* / 2]**
    αριστερό παιδί **Π[2*i*]**
    δεξιό παιδί **Π[2*i*+1]**



20	17	12	10	16	6	4	8	3	15

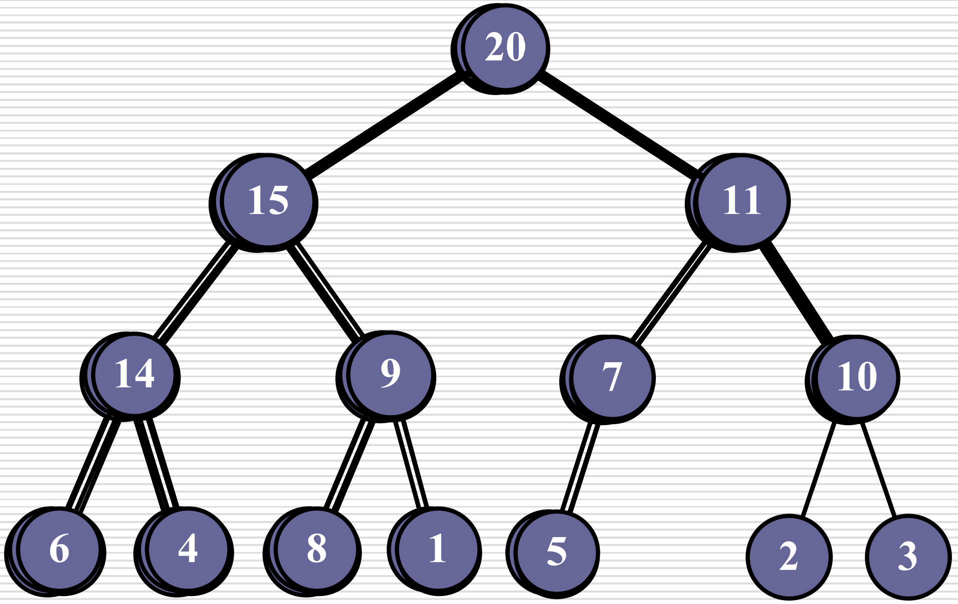
Σωρός (heap)

- Δέντρο **μέγιστου** (ελάχιστου): Τιμές στις κορυφές και τιμή *κάθε* κορυφής ≥ (≤) τιμές παιδιών της.
- **Σωρός** : πλήρες δυαδικό δέντρο μέγιστου (ελάχιστου).
  - Ύψος $\Theta(\log n)$, #φύλλων = $\lceil n/2 \rceil$
- Πίνακας **A[ ]** ιδιότ. **σωρού** :
  $\forall i\ \ A[i] \geq A[2i], A[2i+1]$.
- **Μέγιστο** : ρίζα
  Ελάχιστο : κάποιο φύλλο



20	17	12	10	16	6	4	8	3	15

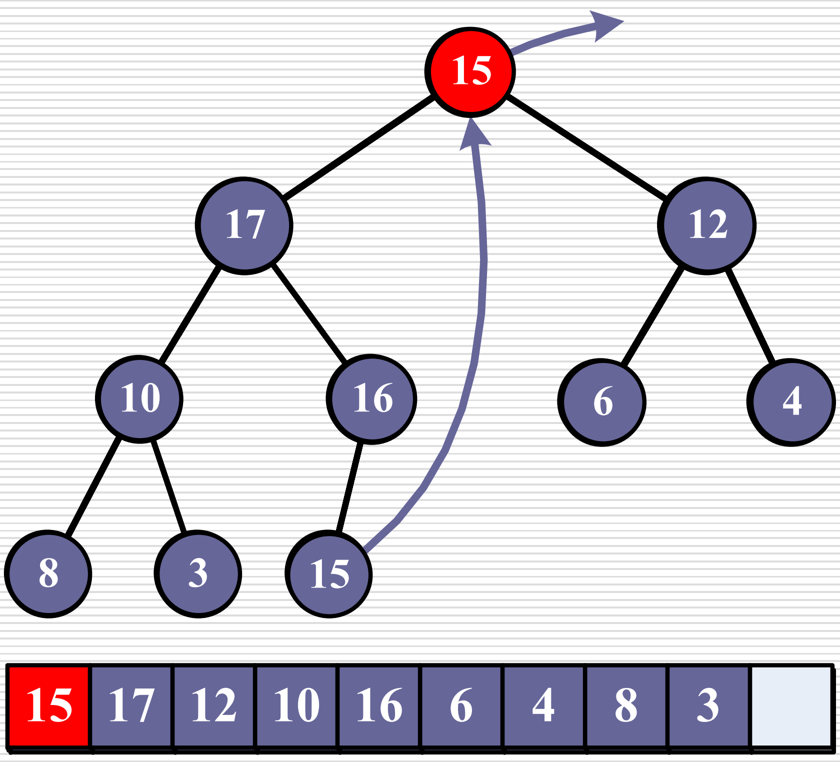
Σωροί και Μη-Σωροί



20	15	14	11	10	9	8	7	6	5	4	1

Σωρός σαν Ουρά Προτεραιότητας

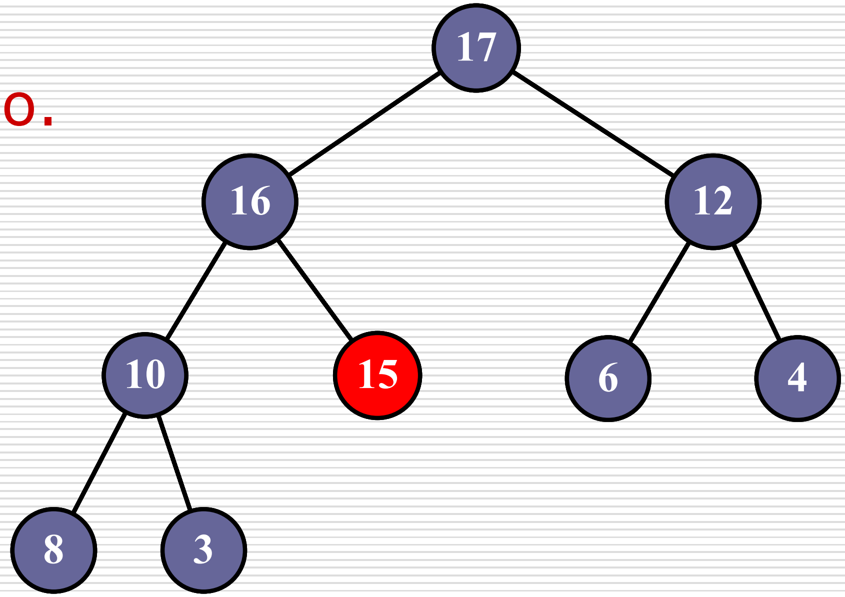
- `int A[n], hs;`
- max() : O(1)
```
int max() { return(A[1]); }
```
- deleteMax() :
```
int deleteMax() {
   if (isEmpty()) return(EMPTY);
   max = A[1]; A[1] = A[hs--];
   combine(1);
   return(max);  }
```



Αποκατάσταση Προς-τα-Κάτω

- combine(i) :
  Ενόσω όχι σωρός,
  - A[i] ↔ max{A[2i], A[2i+1]}
  - συνεχίζω στο αντίστοιχο υποδέντρο.

```
combine(int i) {
  l = 2*i; r = 2*i+1; mp = i;
  if ((l <= hs) && (A[l] > A[mp]))
     mp = l;
  if ((r <= hs) && (A[r] > A[mp]))
     mp = r;
  if (mp != i) {
     swap(A[i], A[mp]);
     combine(mp); } }
```



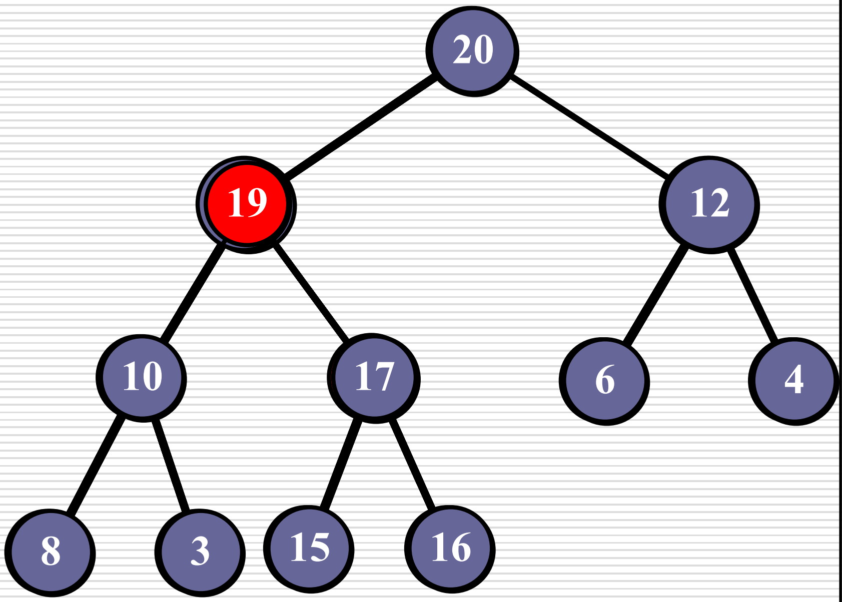
17	16	12	10	15	6	4	8	3	

- Χρόνος για deleteMax() : O(ύψος) = O(log n)

Εισαγωγή: Αποκατάσταση Προς-τα-Πάνω

- insert(*k*) :
  - Εισαγωγή στο τέλος.
  - Ενόσω όχι σωρός, A[*i*] ↔ A[*i* / 2]

```
insert(int k) {
    A[++hs] = k;
    i = hs; p = i / 2;
    while ((i > 1) && (A[p] < A[i]))
    {     swap(A[p], A[i]);
          i = p; p = i / 2; }  }
```

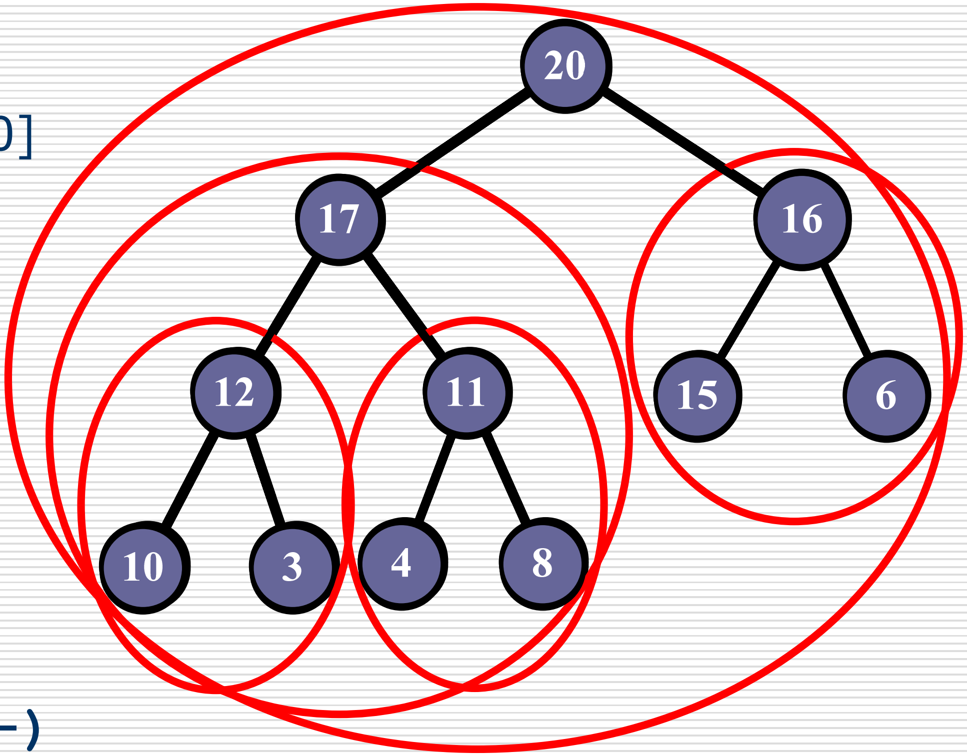


- Χρόνος για insert() : O(ύψος) = O(log n)
- Αύξηση προτεραιότητας : εισαγωγή (αποκατ. προς-τα-πάνω).
  Μείωση προτεραιότητας : διαγραφή (αποκατ. προς-τα-κάτω).

Δημιουργία Σωρού

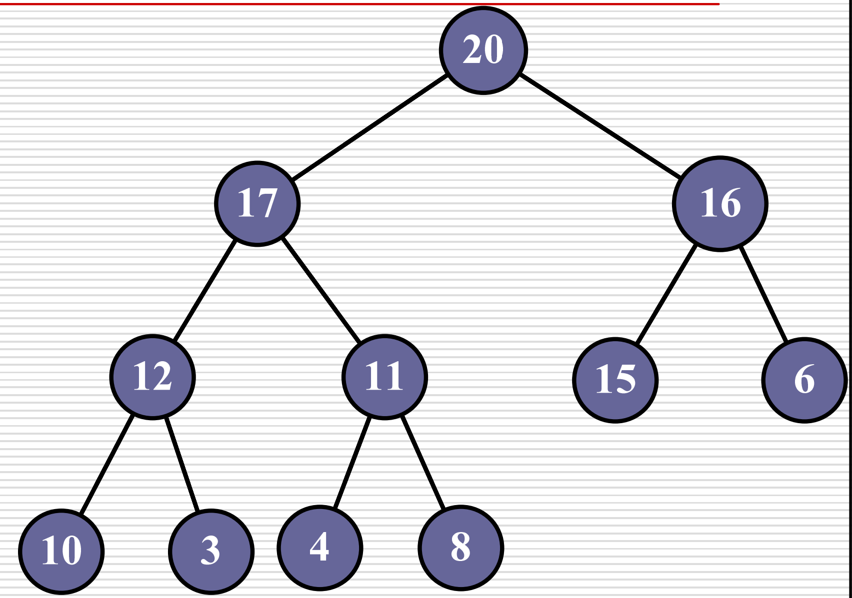
- A[n] → σωρός με *n* εισαγωγές
  [3, 4, 6, 10, 8, 15, 16, 17, 12, 11, 20]
- Χρόνος O(*n*log*n*) .
- **Ιεραρχικά** (bottom-up): Υποδέντρα-σωροί ενώνονται σε δέντρο-σωρό.

```
constructHeap(int n) {
   hs = n;
   for (i = n / 2; i > 0; i--)
      combine(i);
}
```



Χρόνος Δημιουργίας

```
for (i = n / 2; i > 0; i--)
    combine(i);
```



- Χρόνος combine(*i*) = O(ύψος *i*).

  n / 4 στοιχεία χρόνος $1 \times c$

  n / 8 στοιχεία χρόνος $2 \times c$

  . . . .

  $n / 2^k$ στοιχεία χρόνος $(k-1) \times c$, $k \leq \log_2 n$

- $$\sum_{k=2}^{\log n} \frac{n \cdot k \cdot c}{2^k} = \mathrm{O}\left(n \cdot \sum_{k=2}^{\log n} \frac{k}{2^k}\right) = \mathrm{O}(n), \text{ γιατί } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$$

- Χρόνος constructHeap( ) = Θ(n).

Απόδοση Σωρού

- Χώρος : Θ(1) (in-place)
- Χρόνοι :
  - createHeap : Θ(*n*)
  - insert, deleteMax : O(log *n*)
  - max, size, isEmpty : Θ(1)
- Εξαιρετικά εύκολη υλοποίηση!
- Συμπέρασμα:
  - Γρήγορη και ευρύτατα χρησιμοποιούμενη ουρά προτεραιότητας.

Heap-Sort

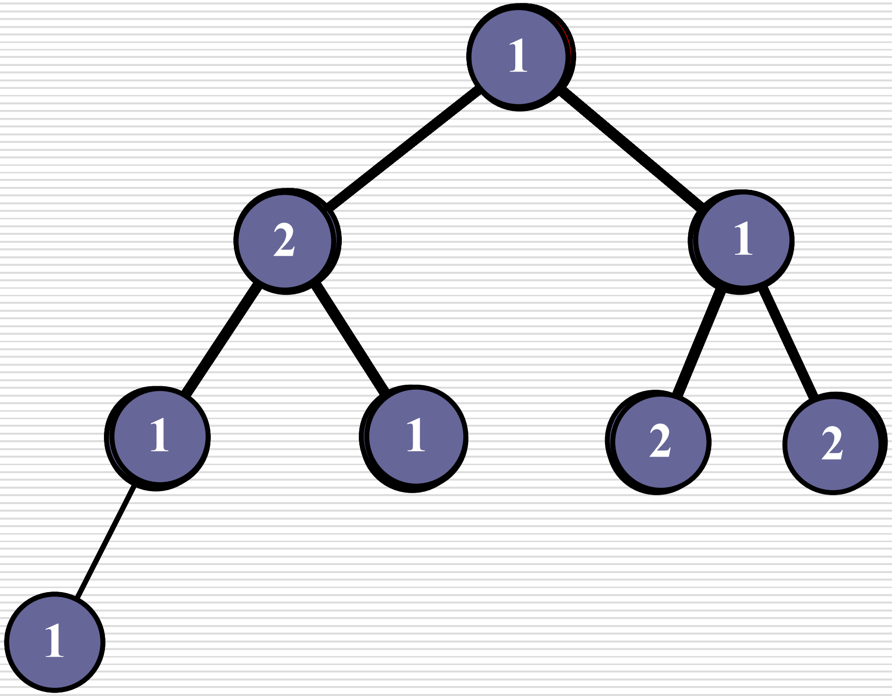
- **Αρχικοποίηση** : δημιουργία σωρού με n στοιχεία.
  - constructHeap() : χρόνος $\Theta(n)$.
- **Εξαγωγή μέγιστου** και τοποθέτηση στο τέλος (n – 1 φορές).
  - deleteMax() : χρόνος $\Theta(\log n)$.
- **Χρόνος** : $\Theta(n) + n\,\Theta(\log n) = \Theta(n \log n)$.

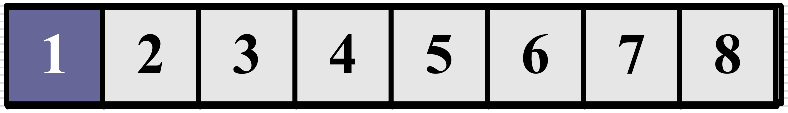
```
hs = n;
constructHeap(n);
   for (i = n; i > 1; i--) {
      swap(A[1], A[i]); hs--;
       combine(1);  }
```

- Χρονική Πολυπλοκότητα Ταξινόμησης: $O(n \log n)$.

Heap-Sort : Παράδειγμα

```
constructHeap(n);
for (i = n; i > 1; i--)  {
        swap(A[1], A[i]); hs--;
        combine(1);   }
```





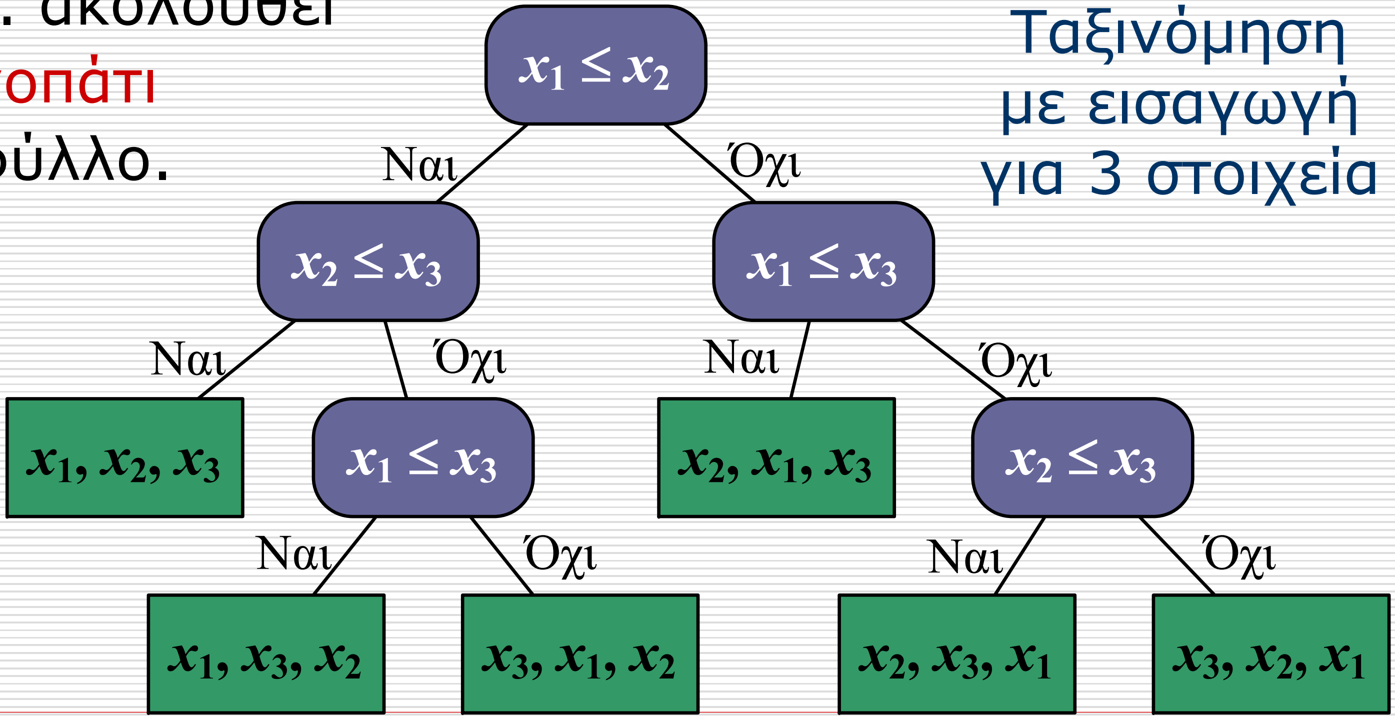
Συγκριτικοί Αλγόριθμοι

- Ταξινόμηση μόνο με συγκρίσεις και αντιμεταθέσεις στοιχείων.
  - Καμία άλλη ενέργεια στα στοιχεία (π.χ. ομαδοποίηση με βάση δυαδική αναπαράσταση).
- Κάθε ντετερμινιστικός συγκριτικός αλγ. ταξινόμησης χρειάζεται $\Omega(n \log n)$ συγκρίσεις μεταξύ στοιχείων.
  - Αντίστοιχο κάτω φράγμα για πιθανοτικούς αλγόριθμους.
- Χρονική Πολυπλοκότητα Ταξινόμησης: $\Theta(n \log n)$
- Υπάρχουν αλγόριθμοι με γραμμικό χρόνο για συγκεκριμένους τύπους δεδομένων (π.χ. αριθμούς).

Δέντρο Συγκρίσεων

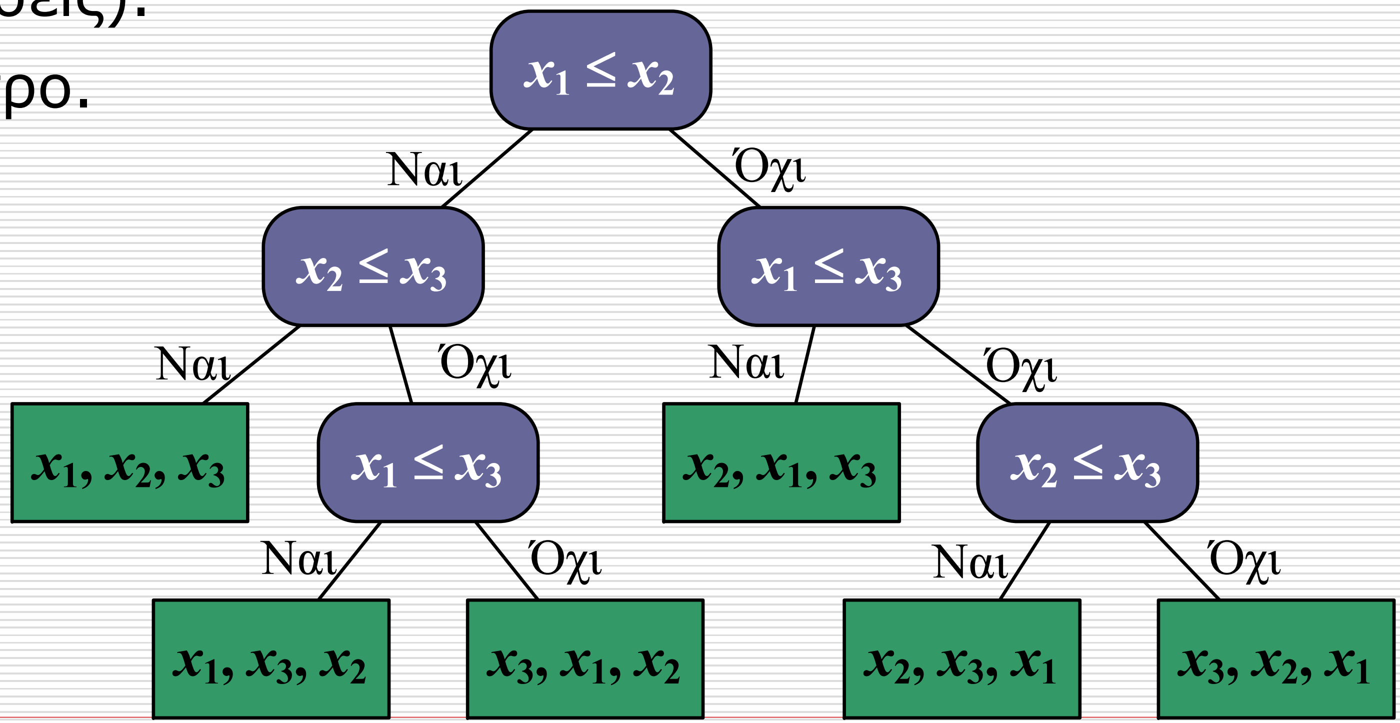
- Λειτουργία συγκριτικών αλγορίθμων αναπαρίσταται με δέντρο συγκρίσεων (ή αποφάσεων).
- Αλγόριθμος $\leftrightarrow$ δέντρο συγκρίσεων.
- $\forall$είσοδο: αλγ. ακολουθεί μοναδικό μονοπάτι από ρίζα σε φύλλο.

Ταξινόμηση με εισαγωγή για 3 στοιχεία



Δέντρο Συγκρίσεων

- Ύψος δέντρου καθορίζει #συγκρίσεων (χ.π.) και αποτελεί κάτω φράγμα στο χρόνο εκτέλεσης.
- Ταξινόμηση *n* στοιχείων: τουλάχιστον *n*! φύλλα (όλες μεταθέσεις).
- Δυαδικό δέντρο.



Δέντρο Συγκρίσεων

- Δυαδικό δέντρο ύψους h έχει $\leq 2^h$ φύλλα.
- Χρόνος εκτέλεσης = $\Omega(h)$.
- Ταξινόμηση n στοιχείων: $2^h \geq n!$

$$
\begin{aligned}
2^h &\geq n! \Rightarrow \\
h &\geq \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \\
&\geq \sum_{k=n/2}^{n} \log k \geq \sum_{k=n/2}^{n} \log \frac{n}{2} \\
&\geq \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \Omega(n \log n)
\end{aligned}
$$