



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 10/12/2015

Άσκηση 1: Χημικά Απόβλητα

Σε ένα χημικό εργαστήριο, υπάρχουν N διαφορετικές ουσίες που αποτελούν επικίνδυνα απόβλητα πειραμάτων και πρέπει να τοποθετηθούν σε K μεταλλικές φιάλες για να μεταφερθούν με ασφάλεια σε ειδικό χώρο εκτός του εργαστηρίου. Οι ουσίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το N και, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να τοποθετηθούν στις φιάλες με αυτή τη σειρά και με τη συνολική ποσότητα κάθε ουσίας να βρίσκεται σε μία μόνο φιάλη. Οι φιάλες είναι αρκετά μεγάλες και η συνολική ποσότητα κάθε ουσίας αρκετά μικρή ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα χωρητικότητας (δηλ. ακόμη και όλες οι ουσίες θα μπορούσαν να χωρέσουν στην ίδια φιάλη). Υπάρχει όμως ο κίνδυνος χημικής αντίδρασης μεταξύ των ουσιών στην ίδια φιάλη, οπότε και εκλύονται σημαντικά ποσά ενέργειας. Συγκεκριμένα, για κάθε ζευγάρι ουσιών i και j που βρίσκονται στην ίδια φιάλη, η χημική αντίδραση μεταξύ τους παράγει ενέργεια ίση με $A[i, j]$ μονάδες.

Με βάση τα παραπάνω, η διαδικασία που ακολουθούν οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου για τη συσκευασία των ουσιών είναι η εξής: Οι πρώτες t_1 ουσίες στη σειρά τοποθετούνται στην πρώτη φιάλη, οι επόμενες t_2 ουσίες στη δεύτερη φιάλη, κ.ο.κ., μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι ουσίες στις K φιάλες. Έτσι, η ενέργεια που μπορεί να παραχθεί από τη χημική αντίδραση των ουσιών στην πρώτη φιάλη είναι $\sum_{1 \leq i < j \leq t_1} A[i, j]$, για την δεύτερη φιάλη είναι $\sum_{t_1+1 \leq i < j \leq t_2} A[i, j]$, κ.ο.κ. Η συνολική ενέργεια που θα μπορούσε να παραχθεί από την χημική αντίδραση των ουσιών σε όλες τις K φιάλες είναι το άθροισμα των παραπάνω ποσοτήτων. Για λόγους ασφαλείας κατά τη μεταφορά των ουσιών, οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου θέλουν να προσδιορίσουν τους δείκτες t_1, t_2, \dots, t_{K-1} των ουσιών όπου θα γίνεται αλλαγή φιάλης, ώστε η συνολική ενέργεια που θα εκλυθεί από όλες τις φιάλες να είναι η ελάχιστη δυνατή. Σας ζητούν λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάξει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και K που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ουσιών και το πλήθος των φιαλών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάξει $N - 1$ γραμμές, η i -οστή από τις οποίες θα περιέχει $N - i$ ακραίους χωρισμένους με κενά. Ο j -οστός ακέραιος της i -οστής γραμμής αντιστοιχεί στην ενέργεια $A[i, j + i]$ (ο πίνακας A είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο, δηλ. $A[i, j] = A[j, i]$ για κάθε $1 \leq i < j \leq N$, και η διαγώνιος έχει μηδενικά στοιχεία, δηλ. $A[i, i] = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq N$).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να εκλυθεί¹.

Περιορισμοί:

$$0 \leq A[i, j] \leq 99$$

$$1 \leq K \leq 500$$

$$K \leq N \leq 1500$$

Παράδειγμα Εισόδου:

$$3 \quad 2$$

$$3 \quad 2$$

$$4$$

Παράδειγμα Εξόδου:

$$3$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. Όριο μνήμης: 64MB.

Bonus: κάποια αρχεία με $1 \leq K \leq 700$ και $K \leq N \leq 2500$

¹ **Επεξήγηση παραδείγματος:** Αν βάλουμε τις ουσίες 1 και 2 στην πρώτη φιάλη και την ουσία 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[1, 2] = 3$. Από την άλλη, αν βάλουμε την ουσία 1 στην πρώτη φιάλη και τις ουσίες 2 και 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[2, 3] = 4$. Συνεπώς η πρώτη είναι η καλύτερη επιλογή και η απάντηση είναι 3.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Δράσης

Μόλις ξεκινήσατε να παίζετε το νέο multiplayer RPG Algorithmic Quest III, μαζί με τον καλύτερό σας φίλο. Για να έχετε μεγαλύτερες πιθανότητες επιβίωσης αποφασίσατε να δημιουργήσετε μία φατρία.

Για την εκλογή του αρχηγού της φατρίας, η φατρία μπαίνει σε ένα μπουντρούμι που αποτελείται από ένα ορθογώνιο πλέγμα $N \times M$ δωματίων. Σε κάθε δωμάτιο με συντεταγμένες (x, y) βρίσκονται κάποια τέρατα από τα οποία μπορείτε να συλλέξετε $c(x, y)$ χρυσά νομίσματα, ως λάφυρα, μόλις τα εξοντώσετε. Η φατρία μπαίνει στο μπουντρούμι από το δωμάτιο με συντεταγμένες $(1, 1)$, όπου δεν υπάρχουν τέρατα (ούτε νομίσματα), και η συλλογή νομισμάτων ολοκληρώνεται μόλις η φατρία φτάσει στο δωμάτιο (N, M) .

Οι δύο υποψήφιοι αρχηγοί της φατρίας αποφασίζουν εναλλάξ, ξεκινώντας από εσάς, ποιο θα είναι το επόμενο δωμάτιο που θα μεταφερθεί η φατρία. Η μεταφορά μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε δωμάτιο αρκεί αυτό να βρίσκεται έως και K δωμάτια δεξιά και έως και K δωμάτια κάτω από το τρέχον δωμάτιο. Έτσι, αν η φατρία βρίσκεται στο δωμάτιο με συντεταγμένες (x, y) , το παιχνίδι μπορεί να μεταφερθεί σε οποιοδήποτε δωμάτιο με συντεταγμένες $(x + i, y + j)$, με $0 \leq i \leq K$, $0 \leq j \leq K$, και $i + j > 0$. Για παράδειγμα, αν οι παίκτες βρίσκονται στο δωμάτιο με συντεταγμένες $(3, 4)$ και έχουμε $K = 2$, τότε η φατρία μπορεί να μεταφερθεί σε οποιοδήποτε δωμάτιο από τα $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$ και $(5, 6)$. Μετά από την εξόντωση των τεράτων του δωματίου, τα λάφυρα (χρυσά νομίσματα) κερδίζονται από τον υποψήφιο αρχηγό που επέλεξε το δωμάτιο. Αρχηγός της φατρίας εκλέγεται ο παίκτης που κέρδισε τα περισσότερα χρυσά νομίσματα.

Τόσο εσείς όσο και ο φίλος σας έχετε στην διάθεση σας τον χάρτη του μπουντρουμιού, όπου αναγράφεται για κάθε δωμάτιο πόσα είναι τα συνολικά λάφυρα. Στόχος σας είναι να βρείτε μια στρατηγική για την επιλογή των δωματίων σας εξασφαλίζει όσο το δυνατόν περισσότερα χρυσά νομίσματα στο τέλος του παιχνιδιού, δεδομένου ότι και ο φίλος σας εφαρμόζει βέλτιστη στρατηγική. Αν υπάρχουν περισσότερες από μία διαδρομές που να δίνουν μέγιστο συνολικό κέρδος, θα θέλατε να επιλέξετε αυτή που ελαχιστοποιεί το κέρδος του φίλου σας, ώστε να καταδείξετε την υπεροχή σας.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input τρεις θετικούς ακέραιους αριθμούς που αντιστοιχούν στις διαστάσεις του μπουντρουμιού, N και M , και στο μέγιστο βήμα K . Σε κάθε μία από τις επόμενες N γραμμές, θα υπάρχουν M φυσικοί αριθμοί (χωρισμένοι με κενό) που δηλώνουν το πλήθος των χρυσών νομισμάτων που μπορείτε να συλλέξετε από τα δωμάτια με τις αντίστοιχες συντεταγμένες.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο πλήθος χρυσών νομισμάτων που συλλέγετε εσείς και ο φίλος σας (με αυτή τη σειρά, οι δύο αριθμοί πρέπει να χωρίζονται με ένα κενό) δεδομένου ότι αμφότεροι εφαρμόζετε βέλτιστη στρατηγική.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq N, M \leq 500$	4 4 1	14 10
$1 \leq K \leq 10$	0 8 1 1	
$0 \leq c_i \leq 40000$	8 5 2 1	
	1 1 1 5	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 1 1 4	
Όριο μνήμης: 64 MB.		

Bonus: κάποια αρχεία με $1 \leq N, M \leq 1000$ και $1 \leq K \leq 200$