# Αναδρομικές εξισώσεις

Ηλίας Κ. Σταυρόπουλος

*Νοέμβριος 2005*

**Άσκηση 1**
Να λυθούν (με τη μέθοδο της επανάληψης, το δέντρο αναδρομής ή το Θεώρημα της Κυριαρχίας) οι ακόλουθες αναδρομικές εξισώσεις:

1. $T(n) = T(n/2) + 1$
2. $T(n) = 2T(n/2) + 1$
3. $T(n) = T(n/2) + n$
4. $T(n) = 2T(n/2) + n$
5. $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$

**Απάντηση**

1. $T(n) = T(n/2) + 1 = \Theta(\log n)$. Προκύπτει εύκολα με εφαρμογή του Θ. Κυριαρχίας (2η περίπτωση).
2. $T(n) = 2T(n/2) + 1 = \Theta(n)$. Προκύπτει εύκολα με εφαρμογή του Θ. Κυριαρχίας (1η περίπτωση).
3. $T(n) = T(n/2)+n = \Theta(n)$. Προκύπτει εύκολα με τη μέθοδο της επανάληψης. Προσοχή: το Θ. Κυριαρχίας δεν εφαρμόζεται.
4. $T(n) = 2T(n/2) + n = \Theta(n \log n)$. Προκύπτει εύκολα με εφαρμογή του Θ. Κυριαρχίας (2η περίπτωση).
5. $T(n) = T(n/3)+T(2n/3)+n = \Theta(n \log_3 n)$. Προκύπτει εύκολα με το δέντρο αναδρομής. Προσοχή: το Θ. Κυριαρχίας δεν εφαρμόζεται άμεσα.

**Άσκηση 2**

Να λυθούν με εφαρμογή του Θεωρήματος της Κυριαρχίας οι ακόλουθες αναδρομικές εξισώσεις:

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
4. $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$

**Απάντηση**

Το Θεώρημα της Κυριαρχίας εφαρμόζεται για αναδρομικές εξισώσεις της μορφής $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

1. Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n$, οπότε $n^{\log_2 4} = n^2$ και $f(n) = O(n^{2-\epsilon})$, όπου $\epsilon$ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Άρα $T(n) = \Theta(n^2)$.
2. Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n^2$, οπότε $n^{\log_2 4} = n^2$ και $f(n) = \Theta(n^2)$. Άρα $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.
3. Είναι $a = 4, b = 2, f(n) = n^3$, οπότε $n^{\log_2 4} = n^2$ και $f(n) = \Omega(n^{2+\epsilon})$, όπου $\epsilon$ θετική μικρή σταθερά (π.χ. $\epsilon = 0.2$). Επίσης, $af(n/b) = 4(n/2)^3 = 4n^3/8 = \frac{1}{2}n^3 \leq \frac{1}{2}f(n) = cf(n)$, όπου $c = \frac{1}{2}$. Άρα $T(n) = \Theta(n^3)$.
4. Είναι $a = 1, b = 2, f(n) = c$, $c$ θετική σταθερά, οπότε $n^{\log_2 1} = n^0 = 1$ και $f(n) = \Theta(1)$. Άρα $T(n) = \Theta(\log n)$.