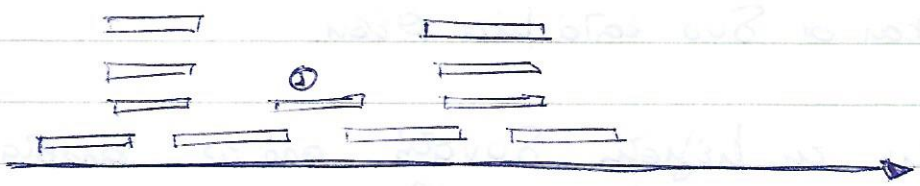
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 7/12/2015

Κουτσογιαννακόπουλος Ιωάννης
03109061

Άσκηση 1: Δρομολόγηση μαθημάτων

(α)

1. Λιγότερες επικαλύψεις: δεν εγγυάται τη βέλτιστη λύση.
Αντιπαράδειγμα:



Σε αυτό το στιγμιότυπο το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις είναι το ①. Όμως η βέλτιστη λύση είναι η πιο κάτω σειρά με τέσσερα μαθήματα, έναντι τριών της σειράς του ①.

2. Μεγαλύτερη διάρκεια: δεν εγγυάται βέλτιστη λύση.
Αντιπαράδειγμα:

Σε αυτό το στιγμιότυπο πρέπει να αφαιρέσουμε ένα μάθημα από την πάνω γραμμή που είναι λάθος, γιατί η πρώτη γραμμή είναι και η ορθή.

3. Περισσότερες Επικαλύψεις: δεν εγγυάται βέλτιστη λύση
Αντιπαράδειγμα: Ίδιο στιγμιότυπο με το (α). 8 μαθήματα εμφανίζουν μέγιστο αριθμό επικαλύψεων (4). Δύο από αυτά εμφανίζονται στη βέλτιστη λύση, οπότε αν αφαιρέσουμε μία από αυτές δεν έχουμε βέλτιστη λύση.

Άσκηση 4: Βγάζοντας βόλτα το σκύλο

Η αναδρομική σχέση που μπορεί να περιγράψει την άσκηση είναι:

$$D(n,m) = \max \begin{cases} \begin{cases} D(n,m-1) & \text{if } n=1 \\ D(n-1,m) & \text{if } m=1 \\ \min \begin{cases} D(n-1,m-1) \\ D(n-1,m) \\ D(n,m-1) \end{cases} \end{cases} \\ d(p_n, p_m) \end{cases}$$

- n: Θέση ανθρώπου
- m: Θέση σκύλου
- $D(1,1) = d(p_1, q_1)$

Σε κάθε συνδυασμό θέσεων πάμε με τρεις πιθανούς τρόπους:
- Να κινηθεί κατά μια θέση ο σκύλος
- Να κινηθεί κατά μια θέση ο άνθρωπος
- Να κινηθούν και οι δύο κατά μια θέση.

Άρα επιλέγουμε τη μέγιστη δυνατή από τις αποστάσεις των θέσεων ανθρώπου-σκύλου, με την ελάχιστη απόσταση που έχει υπάρξει στα προηγούμενα βήματα.
Η αναδρομή τερματίζει στη θέση 1, που έχουμε στο τέλος της διαδρομής

Άσκηση 1

(Β) Πρώτα ταξινομούμε τα μαθήματα σε αύξουσα σειρά σύμφωνα με το χρόνο ολοκλήρωσης. ~~Το επόμενο μάθημα κάθε φορά επιλέγεται ακολουθία~~. Θα χρησιμοποιήσουμε greedy αλγόριθμο για τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης. Το επόμενο μάθημα κάθε φορά υπολογίζεται ή όχι αν εξυπηρετείται το κριτήριο. Σταματάμε όταν βρούμε το πρώτο μάθημα που η ώρα ολοκλήρωσης του ξεπερνάει την αρχή του πρώτου. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται ~~για~~ με όλα τα μαθήματα ως εναρκτήριο. Η πολυπλοκότητα είναι $O(n^2)$ γιατί ο απλήστος αλγόριθμος για ένα μάθημα απαιτεί χρόνο n και είναι n τα μαθήματα.

Άσκηση 1:

(γ) Εφαρμόζουμε δυναμικό προγραμματισμό

Ταξινομούμε τα μαθήματα με βάση την ώρα ολοκλήρωσης

$f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n$

Ξεκινώντας από το τελευταίο μάθημα υπάρχει η πιθανότητα να ~~θα~~ επιλέξουμε το προηγούμενο μάθημα ή όχι:

* από (β) έχουμε δείξει πως επιλέγουμε τα μη επικαλυπτόμενα μαθήματα.

Δημιουργείται η αναδρομική λύση

$$\Pi(j) = \begin{cases} 0 & \text{αν } j=0 \\ \max \to \begin{cases} c_j + \Pi(p(j)) \\ \Pi(j-1) \end{cases} \end{cases}$$

Π: συνολικές πιστωτικές μονάδες

c: credits ενός μαθήματος

Πολυπλοκότητα O(nlogn) από την ταξινόμηση

Άσκηση 3: Τηλεκατευθυνόμενο Drone

Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό. Κάθε χρονική στιγμή i, η πιθανότητα να βρισκόμαστε στη θέση x είναι ίση με την πιθανότητα να βρισκόμαστε στη θέση $x-s_i$ την χρονική στιγμή $i-1$ και να κινηθήκαμε σωστά, συν την πιθανότητα να βρισκόμαστε στη θέση $x+s_i$ τη χρονική στιγμή $i-1$ και να κινηθήκαμε προς τη λάθος κατεύθυνση:

Η αναδρομική σχέση:

$$P(x,i) = P(x-s_i, i-1)\, p_i + P(x+s_i, i-1)\,(1-p_i)$$

α.τ.: $x=k \,/\, i=n \,/\, P(0,0)=1 \,/\, P(x,0)=0,\ x\neq 0$

Άσκηση 2: Πολιοί και δέκτες

(α) Μπορούμε να διατρέξουμε τον πίνακα με τα στοιχεία a και για κάθε πολιό θα αυξάνουμε έναν μετρητή t και για κάθε δέκτη αν $t>0$ τότε $t-1$ και θα αυξάνουμε το μετρητή ζευγαριών c κατά 1. Μία προσπέλαση του a άρα $O(n)$

* στηριζόμαστε στο ότι ένας πολιός αντιστοιχεί αποκλειστικά και υποχρεωτικά σε ένα μόνο δέκτη.

(β) Εφαρμόζουμε δυναμικό προγραμματισμό. Ξεκινάμε από το τελευταίο στοιχείο και πηγαίνουμε προς το πρώτο με counter το i και βήμα 1. Θα αποθηκεύουμε στο k τον αριθμό των δεκτών που θα έχουμε επιλέξει μέχρι και το στοιχείο i. Ξέρουμε ότι υποχρεωτικά το πρώτο στοιχείο πρέπει να είναι πολιός και το τελευταίο δέκτης.

→ κάθε στιγμή πρέπει $k \leq \frac{i}{2}$, οπότε αν $k > \frac{i-1}{2}$ τότε το τελευταίο στοιχείο θα πρέπει να είναι δέκτης.

Η αναδρομική σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$S(i,k) = \begin{cases} S(i-1,k-1) + R(i) & \text{αν } i-1-k < k \Rightarrow k > \frac{i-1}{2} \\ S(i-1,k) + T(i) & k=0 \text{ και } i\neq 1 \\ \min\{S(i-1,k) + T(i),\ S(i-1,k-1)+R(i)\} & \text{όλες υπόλοιπες περιπτώσεις} \end{cases}$$