Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή ΗΜ&ΜΥ
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
7ο εξάμηνο
Ακαδημαϊκή περίοδος: 2015-2016

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

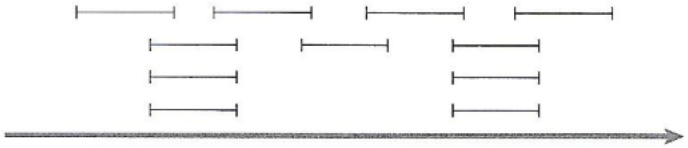
Ψαρουδάκη Ελένη
Α.Μ.: 03112080

3 Δεκεμβρίου 2015

Άσκηση 1: Δρομολόγηση Μαθημάτων

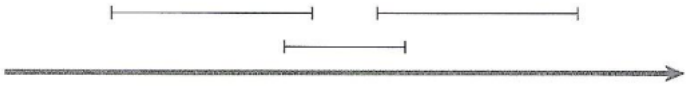
(α)

1. Το κριτήριο αποτυγχάνει. Αυτό γίνεται φανερό στο παρακάτω στιγμιότυπο.



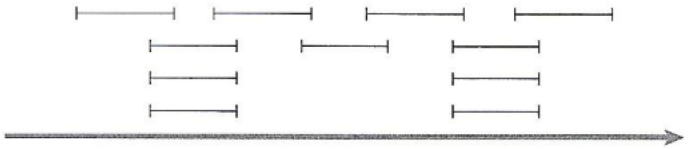
Σύμφωνα με το παραπάνω στιγμιότυπο, το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις είναι το δεύτερο στοιχείο της δεύτερης σειράς. Στο παραπάνω στιγμιότυπο όμως είναι ξεκάθαρο πως η βέλτιστη λύση προκύπτει από το συνδιασμό των τεσσάρων μαθημάτων της πρώτης σειράς. Η πρώτη μας επιλογή θα οδηγήσει σε μία λύση με 3 μαθήματα, πράγμα που την καθιστά μη βέλτιστη.

2. Το κριτήριο αποτυγχάνει. Αυτό γίνεται φανερό στο παρακάτω στιγμιότυπο.



Σύμφωνα με αυτό θα αφαιρεθεί ένα από τα δύο μαθήματα που βρίσκονται στην επάνω σειρά και στη συνέχεια και το δεύτερο. Έτσι θα οδηγηθούμε σε μία λύση που περιελαμβάνει μόνο το μάθημα που βρίσκεται στην δεύτερη γραμμή. Ωστόσο η βέλτιστη λύση προκύπτει από το συνδιασμό των δύο μαθημάτων που βρίσκονται στην επάνω σειρά.

3. Και αυτό το κριτήριο αποτυγχάνει. Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο στιγμιότυπο που χρησιμοποιήσαμε στο 1.



Παρατηρούμε πως υπάρχουν 8 διαφορετικά μαθήματα που εμφανίζουν το μέγιστο αριθμό επικαλύψεων (4). Δύο από αυτά (το δεύτερο και το τρίτο της πρώτης σειράς) ανήκουν στην βέλτιστη λύση. Αν ο αλγόριθμος επιλέξει να αφαιρέσει ένα από αυτά τα δύο, τότε δεν θα οδηγηθούμε σε βέλτιστη λύση. Αυτό όμως δεν μπορούμε να το ελέγξουμε, γιατί εξαρτάται από τη μορφή του στιγμιότυπου κάθε φορά. Επομένως το κριτήριο αποτυγχάνει.

(β)

Για το πρόβλημα αυτό θα ταξινομήσουμε τα μαθήματα σε αύξουσα σειρά σύμφωνα με το χρόνο ολοκήρωσης (θα βρίσκονται σε μορφή κυκλικής λίστας για να βολεύουν στη λύση της άσκησης). Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο άπληστης επιλογής για το ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης. Το επόμενο μάθημα δρομολογείται εάν είναι εφικτό ή αγνοείται αν όχι. Σταματάμε όταν βρούμε το πρώτο μάθημα που η ώρα ολοκλήρωσης του ξεπερνάει την αρχή του πρώτου μαθήματος.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για όλα τα μαθήματα. Αν βρούμε καλύτερη λύση κρατάμε την καινούρια.

Η λύση αυτή θα έχει πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n^2)$ καθώς η greedy λύση για ένα μάθημα απαιτεί χρόνο n και έχουμε n μαθήματα.

(γ)

Στην περίπτωση που τα βάρη έχουν διαφορετική τιμή από την μονάδα, οι greedy αλγόριθμοι δεν δουλεύουν. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό. Για αρχή ταξινομούμε τα διαστήματα σύμφωνα με τον χρόνο ολοκήρωσης ως

$$f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n$$

Ως $p(j)$ ορίζουμε το τελευταίο δυνατό μάθημα $i < j$ έτσι ώστε τα μαθήματα να είναι μη επικαλυπτόμενα. Υπάρχουν δύο δυνατά σενάρια για κάθε μάθημα. Ο αλγόριθμος να το επιλέξει ή όχι.

- Αν το επιλέξει δεν μπορούμε να διαλέξουμε τα μαθήματα $p(j), p(j)+1, ..., j-1$ και πρέπει να επιλέξουμε τη βέλτιστη λύση από τα υπόλοιπα μη επικαλυπτόμενα μαθήματα $1, 2, ..., p(j)$.
- Αν δεν το επιλέξουμε πρέπει να επιλέξουμε τη βέλτιστη λύση από τα υπόλοιπα μη επικαλυπτόμενα μαθήματα $1, 2, ..., j-1$

Επομένως προκύπτει η παρακάτω αναδρομική λύση:

$$C(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ max = \begin{cases} w_j + C(p(j)) \\ C(j-1) \end{cases} & \text{oteherwise} \end{cases}$$

Το κόστος του αλγόριθμου θα είναι $\mathcal{O}(n)$ καθώς είναι υποχρεωτική η ταξινόμηση.

Άσκηση 2: Πομποί και Δέκτες

(α)

Για την λύση αυτού του προβλήματος θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι οι πομποί εκπέμπουν μόνο προς τα ανατολικά και οι δέκτες λαμβάνουν μόνο προς τα δυτικά. Επομένως ζευγάρια στην ακολουθία μπορούν να δημιουργηθούν μόνο αν ο δέκτης βρίσκεται δεξιά του πομπού στην ακολουθία. Παρατηρούμε ότι δεν μας ενδιαφέρει στο δημιουργία ζευγαριών ποιος πομπός συνδέεται με ποιον δέκτη παρά μόνο ο αριθμός των ζευγαριών. Επομένως μπορούμε να ελέγχουμε τα στοιχεία της ακολουθείας και για κάθε πομπό προσθέτουμε ένα στο num και στην περίπτωση που έχουμε δέκτη ελέγχουμε αν υπάρχουν διαθέσιμοι πομποί. Αν υπάρχουν αυξάνουμε τον αριθμό των ζευγαριών κατά ένα. Ακολουθεί ο αλγόριθμος.

Algorithm 1 Function *Find pairs*

```
1: function Function find_pairs(a)
2:     pairs ← 0
3:     num ← 0
4:     for i ← 1 to n do
5:         if a[i] = t then
6:             num ← num + 1
7:         else
8:             if num > pairs then
9:                 pairs ← pairs + 1
```

Το κόστος του αλγόριθμου είναι $\mathcal{O}(n)$ καθώς γίνονται ακριβώς n συγκρίσεις.

(β)

Για το ερώτημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό με την παρακάτω αναδρομική σχέση.

$$C(i,r) = \begin{cases} C(i-1,r-1) + R_i & \text{if } r > \frac{i-1}{2} \\ C(i-1,r) + T_i & \text{if } r = 0 \ \& \ i \neq 1 \\ min = \begin{cases} C(i-1,r) + T_i \\ C(i-1,r-1) + R_i \end{cases} & \text{oteherwise} \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες:

- $i = n$
- $r = \frac{n}{2}$
- $C(1,0) = T_1$

Ως i ορίζουμε το στοιχείο στο οποίο βρισκόμαστε κάθε φορά που κυμαίνεται από n έως 1 και ως r τον αριθμό των δεκτών που έχουμε επιλέξει μέχρι και την στιγμή i. Ξεκινάμε από το τελευταίο στοιχείο (γνωρίζουμε πως θα είναι δέκτης) και υπάρχει ο περιορισμός, πως για κάθε χρονική στιγμή πρέπει να υπάρχουν $r \leq \frac{i}{2}$ δέκτες. Επομένως αν $r > \frac{i-1}{2}$ γνωρίζουμε πως το τελευταίο στοιχείο i θα πρέπει αναγκαστικά να είναι δέκτης. Αν $r \leq \frac{i-1}{2}$ το στοιχείο i μπορεί είτε να είναι δέκτης είτε πομπός. Θέλουμε το minimun από την καθε περίπτωση με το αντίστοιχο κόστος της επιλογής i.

Για την επίλυση θα χρησιμοποιηθεί ένας πίνακας $n \cdot \frac{n}{2}$ ο οποίος στην αρχή έχει όλα τα στοιχεία του μηδενικά (θεωρούμε πως δεν μπορεί να υπάρχει μηδενική κατανάλωση

ισχύος). Ο πίνακας αυτός δεν θα γεμίσει ολόκληρος, καθώς ο αλγόριθμος δεν θα αποκτήσει πρόσβαση σε ορισμένες θέσεις του πίνακα, εξαιτίας της αναδρομικής σχέσης. Ο αλγόριθμος καλείται για $i = n$ και $r = \frac{n}{2}$.

Algorithm 2 Function *Find pairs dynamic*

```
1: function Function find_pairs_dynamic(i, r)
2:     if r = 0 & i = 1 then
3:         C[1, 0] ←T_1
4:     else if r = 0 & i ≠ 1 then
5:         if C[i − 1, r] = 0 then
6:             call find_pairs_dynamic(i − 1, r)
7:         C[i, r] ←C[i-1,r]+T_i
8:     else if r > (i−1)/2 then
9:         if C[i − 1, r − 1] = 0 then
10:            call find_pairs_dynamic(i − 1, r − 1)
11:        C[i, r] ←C[i-1,r-1]+R_i
12:    else
13:        if C[i − 1, r] = 0 then
14:            call find_pairs_dynamic(i − 1, r)
15:        if C[i − 1, r − 1] = 0 then
16:            call find_pairs_dynamic(i − 1, r − 1)
17:        if C[i − 1, r] + T_i < C[i − 1, r − 1] + R_i then
18:            C[i, r] ←C[i-1,r]+T_i
19:        else
20:            C[i, r] ←C[i-1,r-1]+R_i
21:    return
```

Γνωρίζουμε πως η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι ίση με $\mathcal{O}(n^2)$ καθώς προκύπτει από το γινόμενο του statespace ($\frac{n^2}{2}$) με τον χρόνο υπολογισμού σε κάθε βήμα (σταθερός).

Άσκηση 3: Τηλεκατευθυνόμενο Drone

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό με την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$P(x,i) = P(x - \hat{s_i}, i-1) \cdot p_i + P(x + \hat{s_i}, i-1) \cdot (1 - p_i)$$

με αρχικές συνθήκες:

- $x = k$
- $i = n$
- $P(0,0) = 1$
- $P(x,0) = 0 \ \forall x \neq 0$

Οι τελευταίες δύο συνθήκες προκύπτουν από τον περιορισμό να ξεκινάμε μόνο από τη θέση $x = 0$.

Ως x ορίζουμε τη θέση στην οποία βρίσκεται το drone τη χρονική στιγμή i. Στη θέση αυτή μπορούμε να πάμε:

- αν βρισκόμαστε στη θέση $x - \hat{s_i}$ την χρονική στιγμή $i-1$ και κινηθούμε με το σωστό σήμα
- αν βρισκόμαστε στη θέση $x + \hat{s_i}$ την χρονική στιγμή $i-1$ και κινηθούμε με το λανθασμένο σήμα

Η πιθανότητα να βρισκόμαστε στην θέση x προκύπτει λοιπόν απο το άθροισμα των πιθανοτήτων να κινηθούμε με σωστό ή λανθασμένο σήμα, πολλαπλασιασμένο κάθε φορά με την πιθανότητα να βρισκόμαστε στην κατάλληλη θέση.

Για την επίλυση χρησιμοποιούμε έναν πίνακα P με 2n στήλες (όρια -n έως n) και n γραμμές (0 έως n). Ο πίνακας θεωρούμε πως είναι αρχικοποιημένος στην τιμή -1, καθώς δεν υπάρει αρνητική πιθανότητα. Και πάλι ο πίνακας δεν θα συμπληρωθεί ολόκληρος, καθώς θα τον συμπληρώσουμε αναδρομικά και μερικές από τις θέσεις δεν θα μας χρειαστούν, καθώς σε κάθε γραμμή γεμίζουν οι διπλάσιες θέσεις. Ακολουθεί ο αλγόριθμος γεμίσματος του πίνακα.

Algorithm 3 Function *Find possibility*

```
1:  function Function find_possibility(x, i)
2:      if x = 0 & i = 0 then
3:          P[0,0] ← 1
4:      else if i = 0 then
5:          P[x,0] ← 0
6:      else
7:          if P[x − s[i], i − 1] = −1 then
8:              call find_possibility(x − s[i], i − 1)
9:          if P[x + s[i], i − 1] = −1 then
10:             call find_possibility(x + s[i], i − 1)
11:         P[x,i] ← P[x − s[i], i − 1] · p[i] + P[x + s[i], i − 1] · (1 − p[i])
12:     return
```

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι ίση με $\mathcal{O}(n^2)$ καθώς προκύπτει από το γινόμενο του statespace (μέγιστο δυνατό $2 \cdot n^2$) με τον χρόνο υπολογισμού σε κάθε βήμα (σταθερός).

Άσκηση 4: Βγάζοντας Βόλτα το Σκύλο

Για την άσηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό με την παρακάτω αναδρομική σχέση.

$$D(n,m) = max \begin{cases} \begin{cases} D(n,m-1) & \text{if n=1} \\ D(n-1,m) & \text{if m=1} \\ min \begin{cases} D(n-1,m-1) \\ D(n-1,m) \\ D(n,m-1) \end{cases} & \text{oteherwise} \end{cases} \\ \\ d(p_n, q_m) \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες:

- δείκτης για τη θέση του άνθρωπου: n
- δείκτης για θέση του σκύλου: m
- $D(1,1) = d(p_1, q_1)$

Οι τελευταίες τέσσερις συνθήκες προκύπτουν από την ανάγκη για τερματισμό της αναδρομικής σχέσης.Στην περίπτωση που κάποιος από τους δύο (είτε ο άνθρωπος είτε ο σκύλος) έχουν φτάσει στη θέση 0, η αναδρομή δεν συνεχίζεται για αυτόν τον συνδιασμό και η αποστάση δεν λαμβάνεται υπόψιν. Αν φτάσουν και οι δύο στη θέση 1 έχουμε φτάσει στο τέλος της διαδρομής, οπότε και πάλι η αναδρομή τερματίζει.

Σε κάθε συνδιασμό θέσεων μπορούμε να πάμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

- ο άνθρωπος έμεινε ακίνητος και ο σκύλος προχώρησε ένα βήμα
- ο άνθρωπος προχώρησε ένα βήμα και ο σκύλος έμεινε ακίνητος
- και ο άνθρωπος και ο σκύλος προχώρησαν ένα βήμα

Επομένως καθώς αναζητούμε το ελάχιστο δυνατό μήκος λουριού πρέπει να επιλέγουμε κάθε φορά το μέγιστο μεταξύ της απόστασης των θέσεων που βρίσκονται άνθρωπος και σκύλος, με την ελάχιστη δυνατή απόσταση που έχει υπάρξει μέχρι και το προηγούμενο βήμα. Έτσι προκύπτει η παραπάνω αναδρομική σχέση.

Algorithm 4 Function $Find\ Path$

```
1: function Function find_path(n, m)
2:     if n = 1 & m = 1 then
3:         D[1,1] ← d(p[1], q[1])
4:     else if n = 1 & m ≠ 1 then
5:         if D[n, m−1] = −1 then
6:             call find_path(n, m−1)
7:         if D[n, m−1] < d(p[n], q[m]) then
8:             D[n, m] ← d(p[n], q[m])
9:         else
10:            D[n, m] ← D[n, m−1]
11:    else if n ≠ 1 & m = 1 then
12:        if D[n−1, m] = −1 then
13:            call find_path(n−1, m)
14:        if D[n−1, m] < d(p[n], q[m]) then
15:            D[n, m] ← d(p[n], q[m])
16:        else
17:            D[n, m] ← D[n−1, m]
18:    else
19:        if D[n, m−1] = −1 then
20:            call find_path(n, m−1)
21:        min ← D[n, m−1]
22:        if D[n−1, m] = −1 then
23:            call find_path(n−1, m)
24:        if D[n−1, m] < min then
25:            min ← D[n−1, m]
26:        if D[n−1, m−1] = −1 then
27:            call find_path(n−1, m−1)
28:        if D[n−1, m−1] < min then
29:            min ← D[n−1, m−1]
30:        if min < d(p[n], q[m]) then
31:            D[n, m] ← d(p[n], q[m])
32:        else
33:            D[n, m] ← min
34:    return
```

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι ίση με $\mathcal{O}(n^2)$ καθώς προκύπτει από το γινόμενο του statespace (μέγιστο δυνατό $2 \cdot n^2$) με τον χρόνο υπολογισμού σε κάθε βήμα (σταθερό σύμφωνα με την εκφώνηση).

Άσκηση 5: Αναβάθμιση του 242

(α)

Για την άσηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραμματισμό με την παρακάτω αναδρομική σχέση.

$$C(l,r,p) = \begin{cases} min\begin{cases} C(l-1,r,1) + (d_l + d_r) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l-1] + sr[r]) \\ C(l-1,r,0) + (d_l - d_{l-1}) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l-1] + sr[r]) \end{cases} & \text{if } p = 0 \\ \\ min\begin{cases} C(l,r-1,1) + (d_r - d_{r-1}) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l] + sr[r-1]) \\ C(l,r-1,0) + (d_l + d_r) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l] + sr[r-1]) \end{cases} & \text{if } p = 1 \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες:

- $C(1,1,0) = C(0,1,1) + d_{r_1} \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sr[1] + sl[0])$
- $C(1,1,1) = C(1,0,0) + d_{l_1} \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sl[1])$
- $C(0,1,1) = d_{r_1} \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sr[0])$
- $C(1,0,0) = d_{l_1} \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sr[0])$

Οι αρχικές συνθήκες αυτές προκύπτουν από τον περιορισμό της δημιουργίας της πρώτης κίνησης προς τα δεξιά και τα αριστερά μόνο με ένα τρόπο.

Για αρχή μετατρέπουμε το πρόβλημα: θέτουμε ως μηδέν το σημείο εκκίνησης και υπολογίζουμε την απόσταση κάθε σημείου από το κέντρο, αποθηκέυοντας τον ως θετικό αριθμό. Τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του σημείου k, συμβολίζονται με το γράμμα l και τα σημεία που βρίσκονται δεξία με το γράμμα r. Παρατηρώντας το πρόβλημα, κάθε χρονική στιγμή, μας αφορά μόνο ποιο διάστημα έχουμε καλύψει και αν βρισκόμαστε αριστερά ή δεξιά. Επομένως το statespace μας περιέχει μια επιπλέον παράμετρο p με τιμή 0 αν βρισκόμαστε αριστερά και 1 αν βρισκόμαστε δεξιά.

Ξεκινώντας από το 0 (σημείο k) μπορούμε είτε να πάμε αριστέρα είτε δεξιά και κάθε φορά η επιλογή έχει κάποιο κόστος το οποίο ισούται με την απόσταση που διανύεται στο συγκεκριμένο βήμα, πολλαπλασιασμένη με την σταθερά $\frac{50}{30 \cdot 60}$ (προκύπτει από τα δεδομένα) και με τον αριθμό τον φοιτητών που βρίσκονται μέσα στο λεωφορείο. Θεωρούμε πως έχουμε ήδη υπολογίσει τον αριθμό αυτόν των φοιτητών και αποθηκεύσει στους πίνακες sr και sl τον αριθμό των φοιτητών που βρίσκονται στο λεωφορείο και σκοπεύουν να κατέβουν σε μία από τις επόμενες στάσεις από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα.

Algorithm 5 Function *Find route*

function Function $find\_route(l, r, p)$
  if $l = 1$ & $r = 0$ & $p = 0$ **then**
    $C[1, 0, 0] \leftarrow dl[1] \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sr[0])$
  else if $l = 0$ & $r = 1$ & $p = 1$ **then**
    $C[0, 1, 1] \leftarrow dr[1] \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sr[0])$
  else if $l = 1$ & $r = 1$ & $p = 0$ **then**
    if $C[0, 1, 1] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(0, 1, 1)$
    $C[1, 1, 0] \leftarrow C[0, 0, 1] + (dr[1]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[0] + sr[1])$
  else if $l = 1$ & $r = 1$ & $p = 1$ **then**
    if $C[1, 0, 0] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(1, 0, 0)$
    $C[1, 1, 1] \leftarrow C[1, 0, 0] + (dl[1]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[1] + sr[0])$
  else if $p = 0$ **then**
    if $C[l - 1, r, 1] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(l - 1, r, 1)$
    $C[l, r, 0] \leftarrow C[l - 1, r, 1] + (dl[l] + dr[r]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l - 1] + sr[r])$
    if $C[l - 1, r, 0] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(l - 1, r, 0)$
    if $C[l - 1, r, 0] + (dl[l] - dl[l - 1]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l - 1] + sr[r]) < C[l, r, 1]])$ **then**
      $C[l, r, 0] \leftarrow C[l - 1, r, 0] + (dl[l] - dl[l - 1]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l - 1] + sr[r])$
  else
    if $C[l, r - 1, 1] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(l, r - 1, 1)$
    $C[l, r, 1] \leftarrow C[l, r - 1, 1] + (dr[r] - dr[r - 1]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l] + sr[r - 1])$
    if $C[l, r - 1, 0] = -1$ **then**
      $call\ find\_route(l, r - 1, 0)$
    if $C[l, r - 1, 0] + (dl[l] + dr[r]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l] + sr[r - 1]) < C[l, r, 0]])$ **then**
      $C[l, r, 0] \leftarrow C[l - 1, r, 0] + (dl[l - 1] + dr[r]) \cdot \frac{50}{60 \cdot 30} \cdot (sl[l - 1] + sr[r])$
  $return$

Και πάλι έχουμε $\mathcal{O}(n^2)$ καθώς προκύπτει από το γινόμενο του statespace ($2 \cdot n^2$) με τον χρόνο υπολογισμού σε κάθε βήμα (σταθερό - απλές πράξεις).