

# Estudo de Métodos de Resolução das Equações de Yule-Walker em Análise Espectral por Modelo Autorregressivo (AR)

Jian Lucas Brito Veras <sup>1</sup>

ITA, São José dos Campos, SP

Rina Chen Carvalho <sup>2</sup>

ITA, São José dos Campos, SP

Uma área estudada em processamento de sinais é a identificação de frequências correspondentes a periodicidades, chamada de estimativa de densidade espectral, a qual é de grande importância para as áreas de eletrônica e comunicações.

Um sinal aleatório  $x(n)$ , com ruído branco  $w(n)$  gaussiano - distribuição normal de média zero - pode ser ajustado a um modelo autorregressivo (AR) de ordem  $N$  com parâmetros  $a(k)$ , conforme equação 1.

$$x(n) = w(n) - \sum_{k=1}^N a(k) x(n-k) \quad (1)$$

Extraindo o valor esperado da expressão anterior, em forma matricial, tem-se o sistema de equações de Yule-Walker, em 2, em que  $r_{xx}(k)$  corresponde à autocovariância do sinal.

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(1-N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(2-N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{xx}(1) \\ -r_{xx}(2) \\ \vdots \\ -r_{xx}(N) \end{bmatrix} \quad (2)$$

A partir da variância do ruído,  $\sigma^2$ , é possível estimar a densidade espectral, conforme 3. [3], [6]

$$S(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^N a(k) e^{-i\omega k} \right|^2} \quad (3)$$

Neste trabalho, foi gerado um sinal aleatório correspondente a um modelo autorregressivo de ordem 4 - AR(4) - por meio da filtragem de 200 amostras de ruído branco.

Os métodos utilizados para estimativa de densidade espectral consistiram em: aplicação da função `aryule`, já implementada nas ferramentas de processamento de sinal da linguagem MATLAB<sup>®</sup>; aplicação do Algoritmo de Bareiss<sup>[7]</sup>, dado que o sistema linear é composto por uma matriz de Toeplitz (diagonais constantes); e aplicação direta da operação de resolução de sistema linear da linguagem MATLAB<sup>®</sup>, `mldivide` (operador “\”).

Todos os métodos resultaram em uma estimativa de densidade espectral satisfatória para o sinal estudado, apresentados na Figura 1.

---

<sup>1</sup>jian.veras@ga.ita.br

<sup>2</sup>rina.carvalho@ga.ita.br

Comparando os métodos utilizados, a função `aryule` apresentou maior precisão, porém suscetível a erros para matrizes mal-condicionadas. O algoritmo de Bareiss, de igual complexidade, apresentou maior estabilidade. O operador `mldivide` apresentou maior complexidade. [1], [2], [4], [5]

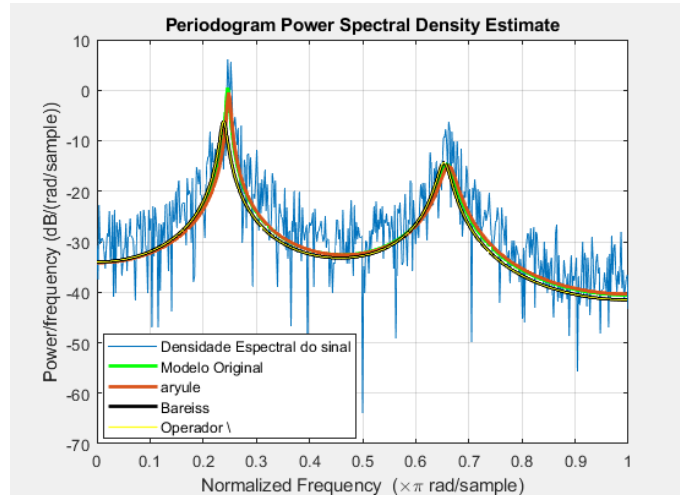


Figura 1: Estimativas de densidade espectral para cada método.

## Agradecimentos

À professora Tiara Martini, da Divisão de Matemática do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, por ter ministrado a disciplina de Álgebra Linear Computacional com excelência, preocupando-se com o aprendizado do aluno e com a qualidade do ensino.

## Referências

- [1] Bojanczyk, A. W., Brent, R. P., De Hoog, F. R. and Sweet, D. R. On the stability of the Bareiss and related Toeplitz factorization algorithms, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 16:14-16, 1993. DOI: 10.1137/S0895479891221563.
- [2] Durbin, J. The fitting of time-series in models, *Review of the International Statistical Institute*, 28(3):233-244, 1960. DOI: 10.2307/1401322.
- [3] Hogben, L. *Handbook of Linear Algebra, 1st edition*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [4] Krishna, H. *Toeplitz Matrices: Algebra and Algorithms*. Syracuse University, Syracuse, 1990.
- [5] Menon, D. and Krishnamoorthy, A. Matrix inversion using Cholesky decomposition, *2013 Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA)*, pages 70-72, 2013.
- [6] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. and Buck, J. R. *Discrete-Time Signal Processing, 2nd edition*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [7] Sweet, D. R. *Numerical methods for Toeplitz matrices*. Tese de Doutorado, University of Adelaide, Adelaide, 1982.