

Modelagem e Resolução de Problema de Oscilações Elétricas em Circuito RLC a partir de Métodos Numéricos

Gabriel H. Gobi ¹

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - IEC

Jian L. B. Veras ²

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - IEE

Resumo. Neste trabalho, realizou-se a modelagem matemática das oscilações elétricas de um circuito RLC (resistor, indutor e capacitor) em série, o que resultou em uma Equação Diferencial Ordinária linear não homogênea de 2^a ordem, que compõe um Problema de Valor Inicial (PVI). Destarte, o PVI foi solucionado com diferentes métodos numéricos clássicos na literatura, tanto de passo simples, quanto de passo múltiplo. Os resultados foram comparados, tendo em vista a avaliação da qualidade da solução (erro para solução analítica e convergência da solução numérica). Ao fim, conclui-se que dentre os diversos métodos, o mais adequado, com menor erro relativo máximo e melhor convergência, foi o método de passos simples de Runge-Kutta-Fehlberg.

Palavras-chave. Circuito RLC, PVI, Métodos Numéricos, Oscilações Elétricas.

1 Introdução

O circuito RLC em série não autônomo é composto por uma resistência, um capacitor, um indutor e uma fonte de tensão em série. Como a equação diferencial que descreve o comportamento da carga armazenada no capacitor (bem como da corrente que passa pelo circuito, ou da tensão sobre os elementos) é de 2^o ordem, esse sistema é denominado circuito de segunda ordem, ou circuito ressonante.

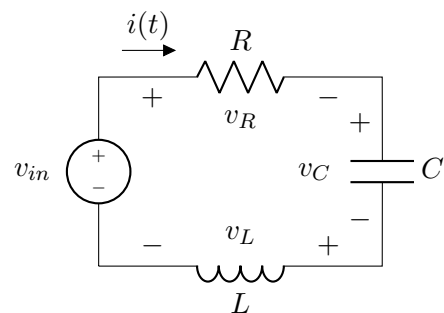


Figura 1: Circuito RLC em série.

¹gabrielghg@ita.br

²jian@ita.br

1.1 Modelagem

O esquemático do circuito pode ser visto na figura 1. Modelou-se a relação da carga armazenada no capacitor *versus* tempo, a partir da equação de estado dos elementos do circuito, presente na equação 1.

$$v_{in}(t) - R \frac{dq(t)}{dt} - \frac{q(t)}{C} - L \frac{d^2q(t)}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

No acionamento do circuito ($t = 0$), considerou-se o capacitor descarregado (Eq. 2) e a corrente nula (Eq. 3). Além disso, utilizou-se onda quadrada como sinal de entrada, de modo que bastou analisar a carga no capacitor para o intervalo de tempo em que v_{in} era constante (Eq. 4).

$$q(0) = 0 \quad (2)$$

$$i(0) = 0 \quad (3)$$

$$v_{in}(t) = V_{DC} \quad (4)$$

Com isso, obtém-se o PVI que descreve as oscilações elétricas do sistema, dado na relação 5.

$$\begin{cases} q''(t) + \frac{R}{L} q'(t) + \frac{1}{LC} q(t) = V_{DC} \\ q(0) = 0 \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

2 Solução Analítica

A solução analítica para o PVI é composta por uma parcela homogênea e uma particular. A solução particular, também chamada de solução em regime, é dominante após longo intervalo de tempo, em que o capacitor se encontra carregado.

Já a solução homogênea, ou transitória, foi obtida a partir de um *Ansatz* exponencial.

Adotou-se um sistema subamortecido, para o qual ocorrem oscilações em torno do valor de regime. Desta forma, a solução do sistema foi dada pela equação 6.

$$q(t) = -\frac{V_{DC}C}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(-\frac{\xi}{\omega_n}\right)\right)} e^{-\xi t} \cos\left(\omega_n t + \operatorname{atan}\left(-\frac{\xi}{\omega_n}\right)\right) + V_{DC}C \quad (6)$$

em que

$$\begin{cases} \xi = \frac{R}{2L} \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (7)$$

3 Soluções Numéricas

Foram utilizados diferentes métodos numéricos lineares de resolução de PVI, tanto de passos simples, quanto de passos múltiplos. Para passos simples, foram realizados os métodos de Euler, Euler Melhorado, Runge-Kutta de 4ª ordem e Runge-Kutta-Fehlberg, com 50, 80, 100 e 200 passos. Já no caso de passos múltiplos, utilizaram-se métodos explícitos (Adams-Bashforth de dois, três e quatro estágios) e implícitos (Adams-Moulton de dois e três estágios), assim como preditor-corretor (misto entre Adams-Bashforth de quatro estágios e Adams-Moulton de três estágios).

Os métodos foram implementados em linguagem *Julia*. Comparou-se os métodos de passo simples entre si, assim como os métodos de passos múltiplos. Em seguida, contrapôs-se o melhor resultado de passos simples e o melhor resultado de passos múltiplos. A análise envolveu verificar graficamente a velocidade de convergência para diferentes tamanhos de malha, bem como o erro em relação à solução analítica.

4 Resultados

Foi considerado um circuito hipotético para as simulações com os valores de tensão, resistência, capacitância e indutância conforme exposto abaixo em 8.

$$\begin{cases} V_{DC} = 1,0V \\ R = 1,5\Omega \\ C = 1F \\ L = 12H \end{cases} \quad (8)$$

além de se considerar um tempo de 80 s de simulação e condições iniciais de carga e corrente nulas.

4.1 Métodos de Passo Simples

As figuras 2a, 2c, 2e e 2g apresentam os gráficos produzidos pelos algoritmos de métodos de passo simples, estando o resultado de cada método indicado na legenda da figura. Além disso, as figuras 2b, 2d, 2f e 2h apresentam a comparação dos erros cometidos em cada método, em relação à solução analítica.

Conforme previsto em teoria, o método de Euler, cujo algoritmo é mais simples em relação aos demais, produz um resultado insatisfatório, com erros sensíveis. Veja que para $N = 50$, o método ainda é incapaz de convergir à solução exata. A melhora de desempenho do algoritmo só ocorre conforme a quantidade de passos aumenta, dada a presença de mais pontos em um mesmo intervalo.

Para o método de Euler melhorado, o algoritmo apresentou resultados com erros pequenos em relação aos demais, para todos os casos testados. Ademais, ponderando o desempenho em diferentes quantidades de passos com a complexidade de implementação, o algoritmo teve um excelente resultado.

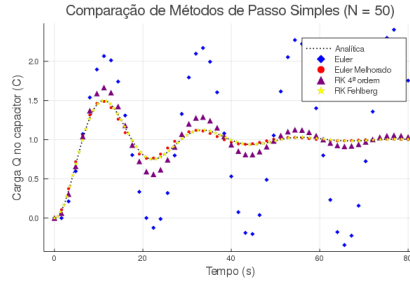
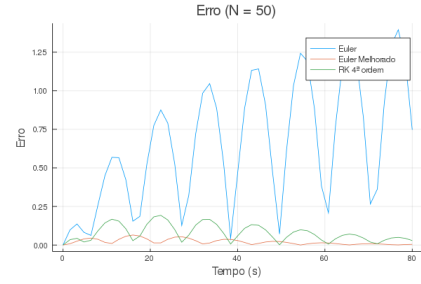
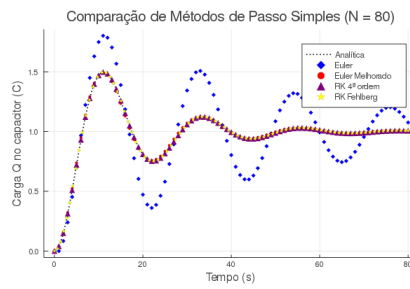
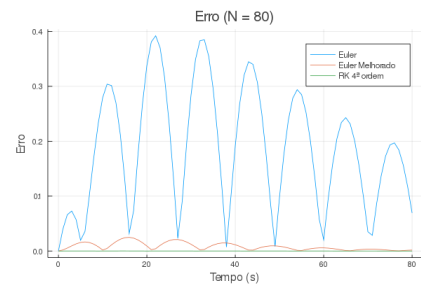
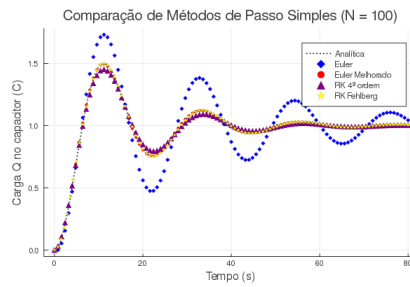
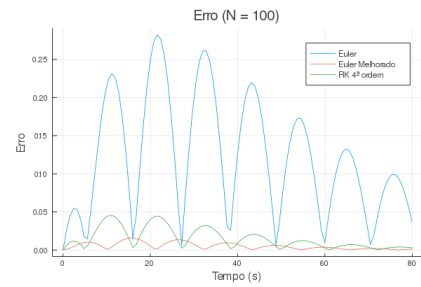
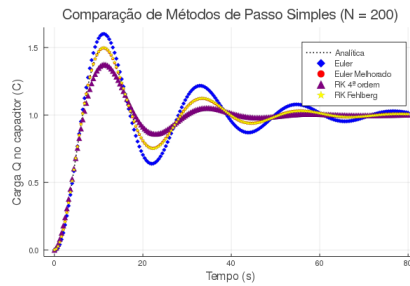
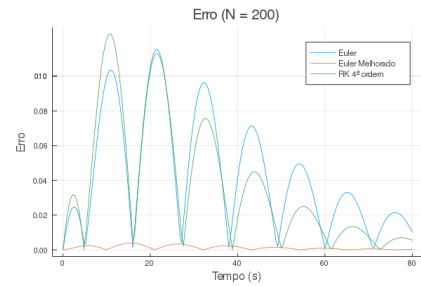
(a) Resultado para $N = 50$ passos.(b) Erro cometido para $N = 50$ passos.(c) Resultado para $N = 80$ passos.(d) Erro cometido para $N = 80$ passos.(e) Resultado para $N = 100$ passos.(f) Erro cometido para $N = 100$ passos.(g) Resultado para $N = 200$ passos.(h) Erro cometido para $N = 200$ passos.

Figura 2: Resultado de métodos de passo simples.

Em relação ao método de Runge-Kutta de 4ª ordem, notou-se que este não se sobressaiu sempre com relação ao método de Euler Melhorado (que também é um método de Taylor), somente para $N = 80$. A partir dessa quantidade de passos, o erro leva mais tempo para convergir a zero. Ainda assim, o algoritmo, nos casos testados, mostrou-se próximo da solução analítica.

O método de Runge-Kutta-Fehlberg mostrou-se eficiente em obter um bom ajuste mesmo para menores quantidades de passos, e o erro cometido, em comparação aos demais, é imperceptível nas curvas de erro. Todavia, ao mesmo tempo que apresentou o melhor ajuste, este método também é o mais sofisticado e de difícil implementação.

4.2 Métodos de Passos Múltiplos

Neste parte da análise, foram utilizados os métodos de passo múltiplo, dos tipos explícito, implícito e misto. Optou-se por comparar o método de Adams-Bashforth de 4 estágios e o de Adams-Moulton de 3 estágios com o Preditor-Corretor por serem os mais eficientes de passo múltiplo. Além disso, os dois primeiros são necessários para a realização do terceiro.

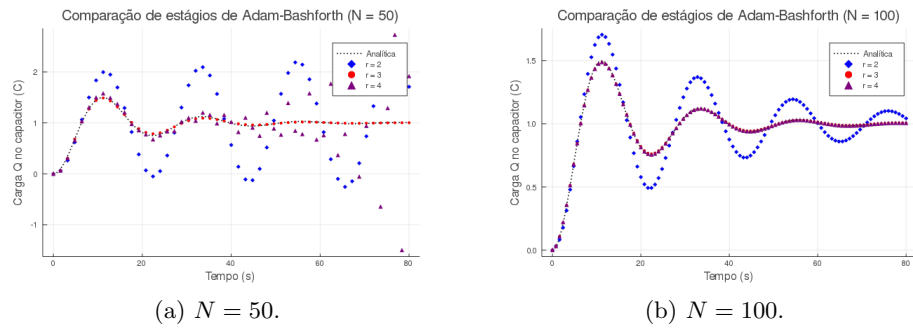


Figura 3: Método de Adams-Bashfort.

Veja que para $N = 50$ o método de 3 estágios performa melhor que o de 4 estágios. Ainda sim, com o aumento do número de passos, é esperado que o de 4 estágios se sobressaia, uma vez que utiliza mais informações para a previsão da solução aproximada.

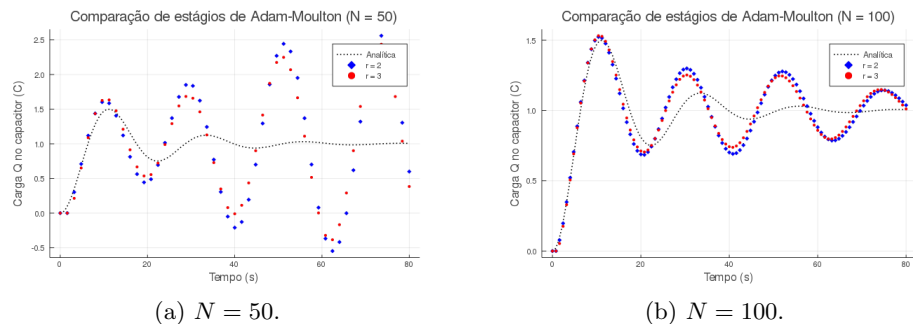


Figura 4: Método de Adams-Moulton.

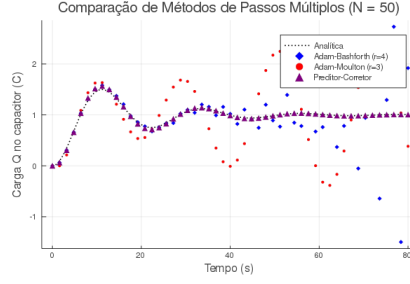
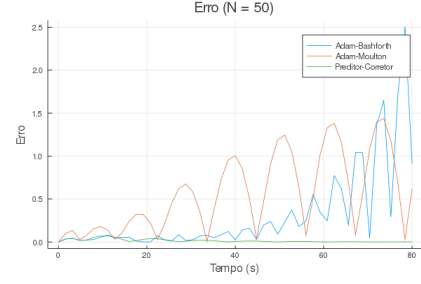
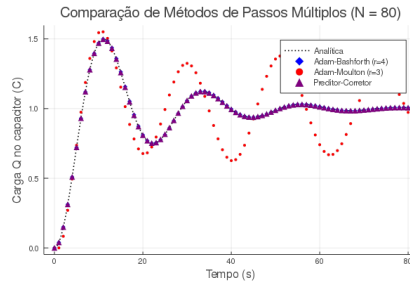
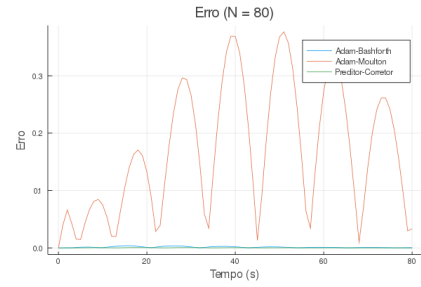
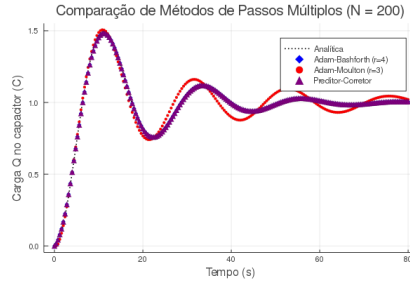
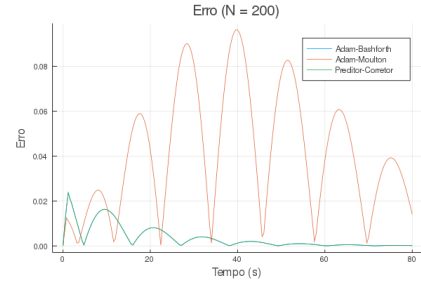
(a) Resultado para $N = 50$ passos.(b) Erro cometido para $N = 50$ passos.(c) Resultado para $N = 80$ passos.(d) Erro cometido para $N = 80$ passos.(e) Resultado para $N = 200$ passos.(f) Erro cometido para $N = 200$ passos.

Figura 5: Resultado de métodos de passos múltiplos.

Como o método de Adams-Moulton é um método implícito, ele precisa de uma previsão anterior da solução nos pontos da malha para realizar sua correção. Neste caso, optamos por realizar a previsão com o método de Euler. Veja que, devido a lenta convergência de Euler, o método de Adams-Moulton também demora a se adaptar a solução analítica, inclusive tem o erro divergindo para $N = 50$. Ainda sim, veja que para $N = 80$ já consegue-se notar uma leve vantagem do método com três estágios.

Em seguida, pôde-se fazer uma comparação entre os resultados dos melhores entre os métodos de passos múltiplos, como pode ser visto na figura 5, em que foram apresentados tanto os gráficos das soluções numéricas do PVI, quanto do erro cometido por cada método e em cada número de passos ($N = 50, 80, 200$).

Finalmente, como se pode observar nas seções 4.1 e 4.2, concluímos que os melhores métodos de passos simples e de passos múltiplos foram, respectivamente, o Runge-Kutta-

Fehlberg e o Preditor-Corretor. Para finalizar, esses métodos foram comparados entre si com um número reduzido de passos, atentando-se às margens de passo e tolerância no Runge-Kutta-Fehlberg para garantir que ambos tivessem uma malha de mesmo tamanho. A 6 mostra a contraposição dos resultados obtidos.

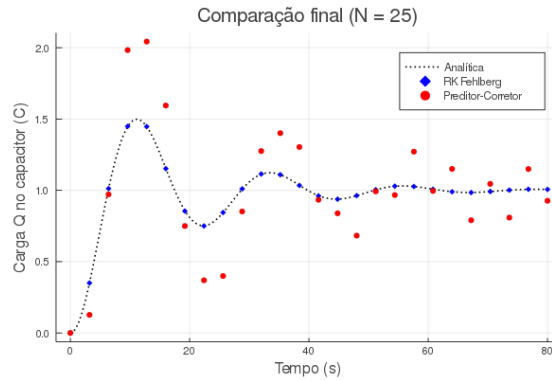


Figura 6: Comparação final entre os melhores métodos de passos simples e múltiplos com $N = 25$

5 Conclusões

Foram comparados, no estudo de oscilações elétricas de um circuito RLC não-autônomo em série, diferentes métodos numéricos lineares de resolução de PVI (passos simples e passos múltiplos), analisando-se o erro cometido e a velocidade de convergência.

Os melhores métodos encontrados foram, respectivamente, o método de Runge-Kutta-Fehlberg e o método Preditor-Corretor. Por fim, constatou-se que mesmo para número reduzido de passos, os métodos convergem satisfatoriamente. Dentre os melhores desempenhos, o Runge-Kutta-Fehlberg apresenta menor erro relativo máximo (0,36%), em relação ao Preditor-Corretor (63,69%), para um número de passos $N = 25$, sendo de longe o método mais adequado para essa simulação.

Agradecimentos

À professora Tiara Martini, do Instituto Tecnológico de Aeronáutica - IEFM, pela dedicação e brilhantismo ao ministrar a disciplina de MAT-91 - Análise Numérica I.

Referências

- [1] T. Martini. *Notas de Aula MAT-91: Análise Numérica I*. São José dos Campos, 2021.
- [2] Y. Burian, e A.C.C. Lyra. *Circuitos elétricos, 1a. edição*. Pearson Prentice-Hall, Capítulo 10, São Paulo, 2006. ISBN: 85-7605-072-2.