

Estudo de Métodos de Resolução das Equações de Yule-Walker em Análise Espectral por Modelo Autorregressivo (AR)

Jian Lucas Brito Veras ¹

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Rina Chen Carvalho ²

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Resumo O trabalho analisa diferentes métodos de resolução das Equações de Yule-Walker, aplicadas no estudo de um sinal com ruído branco, ajustadas a um Modelo Autorregressivo. Os métodos consistem em: aplicação da função `aryule`, da linguagem MATLAB[®]; aplicação do *Algoritmo de Bareiss*, dado que o sistema linear é composto por uma matriz de Toeplitz; e aplicação direta da operação de resolução de sistema linear da linguagem MATLAB[®], `mldivide`. Todos os métodos resultaram em uma estimativa de densidade espectral satisfatória para o sinal estudado. Dentre os métodos utilizados, a função `aryule` obteve maior precisão, comparado ao modelo real. O algoritmo de Bareiss, de igual complexidade, apresentou maior estabilidade.

Palavras-chave. Densidade Espectral, Modelo Autorregressivo, Equações de Yule-Walker, Matriz de Toeplitz, Algoritmo de Bareiss. (entre 3-6 palavras-chave)

1 Introdução

Uma área estudada em processamento de sinais é a identificação de frequências correspondentes a periodicidades, chamada de Estimativa de Densidade Espectral. Neste trabalho, será estudado o método de estimativa em modelo autorregressivo, que consiste em caracterizar um sinal aleatório, com ruído, por meio das equações de Yule-Walker.

Dada uma série temporal, um Modelo Autorregressivo (AR) obedece a seguinte relação:

$$x(n) = w(n) - \sum_{k=1}^N a(k) x(n-k) \quad (1)$$

em que $x(n)$ é um sinal aleatório, $w(n)$ é o ruído desse sinal e $a(k)$ são os parâmetros para o modelo regressivo de ordem N .

Multiplicando a equação 1 por $x(n-l)$ e extraíndo o valor esperado (E):

¹jian.veras@ga.ita.br

²rina.carvalho@ga.ita.br

$$\sum_{k=1}^N a(k) E\{x(n-k) x(n-l)\} = E\{w(n) x(n-l)\} \quad (2)$$

Supondo um sinal com ruído branco de distribuição normal com média zero (ruído branco gaussiano) e variância σ^2 , tem-se, por definição:

$$E\{x(n-k) x(n-l)\} = r_{xx}(l-k) \quad (3)$$

em que $r_{xx}(k)$ corresponde à autocovariância do sinal.

No lado direito da equação 2, tem-se:

$$E\{w(n) x(n-l)\} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } l = 0, \\ 0 & \text{se } l \neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

Então, para $l > 0$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^N a(k) r_{xx}(l-k) = -r_{xx}(l) \quad (5)$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(1-N) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(2-N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{xx}(1) \\ -r_{xx}(2) \\ \vdots \\ -r_{xx}(N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

As equações apresentadas em 6 são chamadas **Equações de Yule-Walker**, por meio das quais é possível obter os parâmetros do modelo autorregressivo - a_1, a_2, \dots, a_n .

De 4, para $l = 0$, obtidos os parâmetros, é possível encontrar a variância correspondente ao ruído, σ^2 , e, assim, estimar a densidade espectral, por meio da relação [6] [10]:

$$S(e^{i\omega}) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^N a(k) e^{-i\omega k}\right|^2} \quad (7)$$

O objetivo do trabalho consiste em analisar diferentes métodos de resolução do sistema de equações de Yule-Walker e comparar suas eficiências e precisões.

2 Metodologia

Usando o seguinte vetor de coeficientes polinomiais:

$$A = [1, -0.5, 0.6, -0.4, 0.9]$$

foi gerado um sinal correspondente a um modelo autorregressivo de ordem 4 - AR(4) - por meio da filtragem de 200 amostras de ruído branco, na linguagem MATLAB[®].

Os coeficientes do modelo foram estimados a partir da resolução do sistema de equações de Yule-Walker (6) das seguintes maneiras:

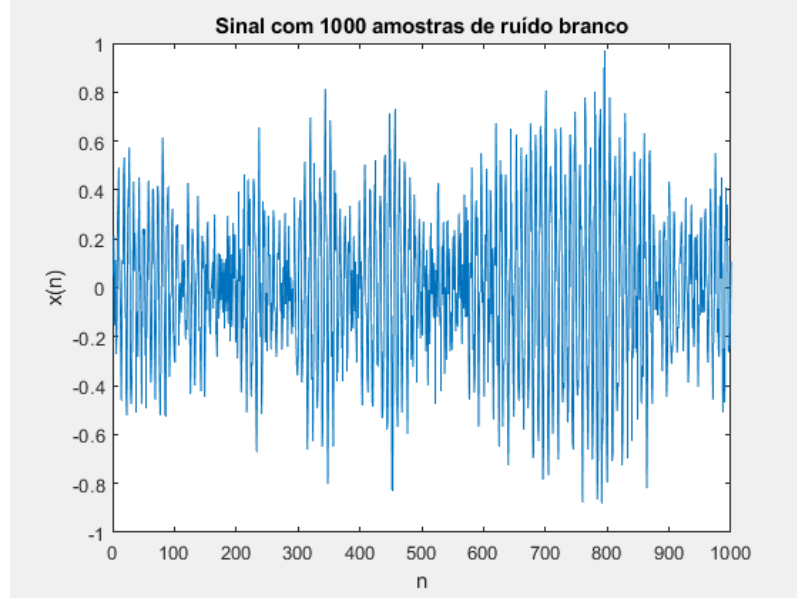


Figura 1: Representação do sinal com ruído aleatório gerado

2.1 Função aryule

A função `aryule`, já implementada nas ferramentas de processamento de sinal da linguagem MATLAB[®], usa a recursão de Levinson-Durbin para resolver o sistema (6) [3] [4], que pode ser denotado por:

$$Ra = r \quad (8)$$

visto que a matriz das autocorrelações, R , é uma matriz de Toeplitz.

A função monta o sistema a partir do sinal e também calcula a variância do sinal, σ^2 , e a densidade espectral, de acordo com a equação 7.

2.2 Método de Bareiss para decomposição da matriz

O sistema em 8 também foi resolvido por meio da decomposição de R pelo algoritmo de Bareiss para matrizes de Toeplitz, por meio da seguinte implementação em MATLAB[®] [11].

```
% Algoritmo de Bareiss para Decomposição LU de matrizes de Toeplitz
negT = R;
posT = R;
for i = 1:4
    negT = negT - negT(i+1,1) * negZ(:, :, i) * posT / negT(1,1);
    posT = posT - posT(1,i+1) * posZ(:, :, i) * negT / negT(i+1,i+1);
end
```

```

% Matrizes Triangular Inferior e Superior:
L = R(1,1)*rot90(posT,2)';
U = negT;

% Resolução do sistema Ra = r, com R = LU
b = linsolve(L,r,struct('LT', true));
a = linsolve(U,b,struct('UT', true));

```

Neste algoritmo ^[11], foram criadas as matrizes de deslocamento (*Shift Matrix*) Z , de modo que as matrizes que deslocam os elementos para cima ($Z_i^{(+)}$) foram denominadas **posZ**, enquanto as de deslocamento para baixo ($Z_i^{(-)}$), **negZ**. O formato de nomenclatura foi mantido para $T^{(+)}$ (**posT**) e $T^{(-)}$ (**negT**).

Dessa forma, U é igual a $T^{(-)}$, enquanto L é obtido a partir do produto $t_0^{(-1)}T^{(+)}T^2$, sendo $t_0^{(-1)}$ fator de multiplicidade igual a 1, e $T^{(+)}T^2$ correspondente à transposição de $T^{(+)}$ ao longo da diagonal secundária.

2.3 Função `mldivide`

O sistema também foi resolvido por meio do operador ' \backslash ' (ou `mldivide`, na linguagem MATLAB [®]), que resolve sistemas lineares do tipo $Ax = b$ usando o método mais apropriado para a matriz A .

3 Resultados

3.1 Coeficientes do Modelo Autorregressivo

Os coeficientes encontrados por meio de cada método utilizado estão descritos na tabela 1:

Tabela 1: Comparação dos Coeficientes do Modelo AR.

Método utilizado	Coeficientes encontrados	Erro relativo
Modelo original	$[1, -0.5, 0.6, -0.4, 0.9]$	—
Função <code>aryule</code>	$[1, -0.4753, 0.5816, -0.3736, 0.8943]$	0.0149
Decomposição LU por Bareiss	$[1, -0.4737, 0.6587, -0.6259, 1.0391]$	0.1014
Operador ' \backslash '	$[1, -0.4741, 0.6589, -0.6255, 1.0388]$	0.1013

Todos os métodos apresentaram valores de coeficientes próximos aos valores utilizados para gerar o sinal. Dentre eles, a função `aryule` apresentou menor resíduo comparado ao modelo original.

No entanto, dada a proximidade entre os resultados obtidos pela decomposição LU por Bareiss e pelo operador ' \backslash ', a principal fonte de erro deve estar associada à geração da matriz de correlações, R , em contraste à resolução do sistema linear.

3.2 Complexidade

Para a análise de complexidade da função `aryule`, foca-se no esforço computacional da recursão de Levinson-Durbin, apesar da função possuir outras etapas que refinam o resultado produzido e aumentam a complexidade da execução. Por Iser, Minker e Schmidt [9], a complexidade do algoritmo é de ordem $O(n^2)$.

Em relação ao resultado obtido pelo algoritmo de Bareiss [11], quanto à formação das matrizes $T^{(+)}$ e $T^{(-)}$, requisitam-se $2n^2 + O(n)$ operações. A etapa extra de multiplicação de $t_0^{(-1)}$ por $T^{(+)}T^2$ demanda mais $\frac{1}{2}n^2 + O(n)$ operações. Portanto, o processo tem complexidade final na ordem de $O(n^2)$.

Avaliando, por último, a complexidade do uso da operação `mldivide`, tem-se, como consta na documentação do MATLAB[®], que o processo envolve diversas etapas analisando as características da matriz de coeficientes do sistema, para então aplicar um método de resolução. Como o sistema avaliado possui uma matriz simétrica (logo, Hermitiana), a operação aplica a *fatoração Cholesky*, se for possível, e caso contrário, a *fatoração LDL*. Como indicado por Krishnamoorthy e Menon [8], ambos os métodos são de complexidade $O(n^3)$. Contudo, é importante ressaltar que os processos em torno de `mldivide` aumentam consideravelmente a complexidade da função.

3.3 Estabilidade

Avaliando, em primeiro lugar, a recursão de Levinson-Durbin, utilizada na função `aryule`, Krishna [7] mostra que o algoritmo é suscetível a erros, isto é, é tido como fracamente estável. Tratando as equações de Yule-Walker, a matriz pode ser mal condicionada quando possui ordem n alta, ou quando o módulo dos coeficientes de reflexão $|\rho_k|$ (característica do algoritmo) é próximo de um. Além disso, Bojanczyk, Brent, Hoog e Sweet [2] mostram que a recursão de Levinson-Durbin pode produzir erros maiores na ordem de cinco vezes a magnitude em relação a métodos estáveis.

Ademais, Bojanczyk, Brent, Hoog e Sweet [2] também indicam que os erros produzidos pelo algoritmo de Bareiss sinalizam um método estável. Acrescenta-se que a diferença entre os erros produzidos no algoritmo de Bareiss e na recursão de Levinson-Durbin se tornam mais evidentes quando se utilizam matrizes mal-condicionadas, comprovando a estabilidade do método de Bareiss e instabilidade da recursão de Levinson-Durbin. Com matrizes bem condicionadas, ambas tem funcionamento semelhante, similar a algoritmos estáveis.

Quanto à fatoração Cholesky, Higham [5] demonstra que o método apresenta excelente estabilidade.

3.4 Estimativa de Densidade Espectral

Usando a função `freqz`, do pacote de processamento de sinais da linguagem MATLAB[®], a variância do ruído e os parâmetros do modelo autorregressivo obtidos em cada método geraram as estimativas de densidade espectral representadas no periodograma em 2.

Novamente, é possível constatar que todos os métodos geraram estimativas próximas ao modelo original. Além disso, a função `aryule` apresentou melhor ajuste, enquanto o

método de Bareiss e o operador ‘\’ obtiveram resultados quase idênticos.

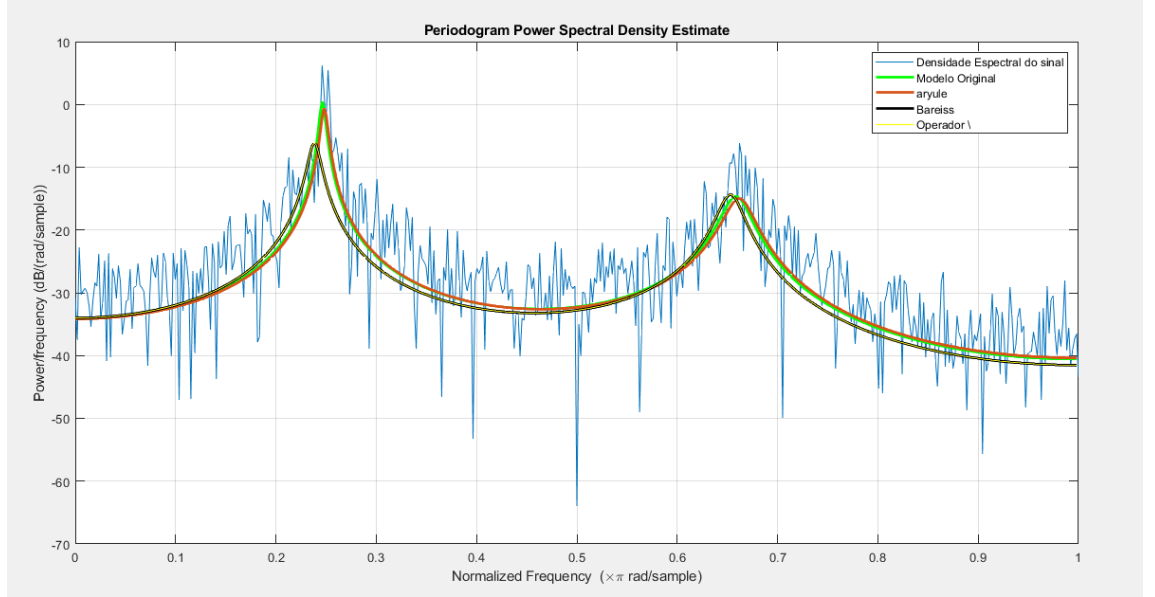


Figura 2: Estimativas de Densidade Espectral

4 Conclusões

Tanto as funções `aryule` e `mldivide` como o algoritmo de Bareiss geraram estimativas de densidade espectral adequadas ao sinal estudado, com precisão satisfatória quanto às frequências de periodicidade do sinal, de acordo com a figura 2.

Quanto à resolução do sistema linear de Yule-Walker, todos os métodos apresentaram resultados precisos. Apesar dos coeficientes do modelo autorregressivo encontrados por Bareiss divergirem moderadamente do modelo original, seus resultados idênticos aos encontrados pelo operador ‘\’ indicam erros na modelagem da matriz de correlações, implementada manualmente, diferentemente da função `aryule`.

Em termos de complexidade, o algoritmo de Bareiss e a recursão de Levinson-Durbin, usada pela função `aryule`, apresentaram $O(n^2)$ operações. Já o operador ‘\’, além das operações de análise do tipo de matriz, necessita de $O(n^3)$ operações para realizar a fatoração Cholesky, tornando-o menos favorável computacionalmente.

Finalmente, a decomposição LU por Bareiss e o operador ‘\’ são algoritmos estáveis, enquanto a recursão de Levinson-Durbin é fracamente estável.

Agradecimentos

À professora Tiara Martini, da Divisão de Matemática do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, por ter ministrado a disciplina Álgebra Linear Computacional com excelência,

preocupando-se com o aprendizado do aluno e a qualidade do ensino.

Referências

- [1] H. Akaike. *Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle*. In: E. Parzen, K. Tanabe, G. Kitagawa (eds) *Selected Papers of Hirotugu Akaike. Springer Series in Statistics (Perspectives in Statistics)*. Springer, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4612-1694-0_15
- [2] A. W. Bojanczyk, R. P. Brent, F. R. de Hoog, D. R. Sweet. *On the stability of the Bareiss and related Toeplitz factorization algorithms*. 1993.
- [3] J. Durbin. *The Fitting of Time-Series in Models*. Review of the International Statistical Institute. Vol. 28, No. 3, pp. 233-244, 1960. DOI: 10.2307/1401322.
- [4] G. H. Golub e C. F. Van Loan. *Matrix Computations, 3rd edition*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [5] N. J. Higham. *Cholesky factorization*. The Manchester University, Manchester, 2008. ISSN: 1749-9097.
- [6] L. Hogben. *Handbook of Linear Algebra, 1st edition*, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [7] H. Krishna. *Toeplitz Matrices: Algebra and Algorithms*. Syracuse University, Syracuse, NY, 1990.
- [8] D. Menon, A. Krishnamoorthy. *Matrix Inversion Using Cholesky Decomposition*. ST-Ericsson India Private Limited, Bangalore,
- [9] W. Minker, G. Schmidt, B. Iser. *Bandwidth Extension of Speech Signals*. 1a edição, pages 119-122. Springer US, 2008. DOI: 10.1007/978-0-387-68899-2
- [10] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing, 2nd edition*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [11] D. R. Sweet. *Numerical Methods for Toeplitz Matrices*. 1982. Tese de Doutorado - University of Adelaide, Adelaide, 1982.