

论 文

基于采样半径优化的最大化泊松圆盘采样

全卫泽^①, 郭建伟^①, 张义宽^①, 严冬明^{①*}, 孟维亮^①, 张晓鹏^{①*}

① 模式识别国家重点实验室, 中国科学院自动化研究所, 中关村东路95号, 北京100190

* 通信作者. E-mail: yandongming@gmail.com, xiaopeng.zhang@ia.ac.cn

收稿日期: 2015-00-00; 接受日期: 2015-00-00

摘要 最大化泊松圆盘采样 (Maximal Poisson-disk Sampling-MPS) 是计算机图形学领域的一个基础研究问题。一个理想的采样点集应该满足无偏差采样性质, 最小距离属性和最大化性质。传统的最大化泊松圆盘采样一般通过投镖法 (Dart Throwing) 来实现, 但是众所周知, 该方法的不足之处在于无法精确控制采样点数目。针对该问题, 本文提出了一种新的方法可以实现精确控制二维等半径最大化泊松圆盘采样的点数并且同时满足其它性质。与已有方法不同的是, 本文提出的方法通过调整采样半径达到控制采样点数的目的。首先, 根据用户指定的采样点数目和采样区域 (闭合的多边形) 生成随机点集, 并进行Delaunay三角化, 并且将当前三角化中的最短边长作为当前的采样半径; 接着, 迭代地移除全局最短边中邻域平均边长较大的采样点, 然后采用投镖法将其随机插入到以当前采样半径计算得到的空隙区域内。通过迭代地调整采样点的位置, 采样半径不断增大, 从而最后实现固定点数的最大化泊松圆盘采样。大量实验结果表明, 该方法可以得到高质量的采样点集, 同时很好地保持了采样点集的蓝噪声性质。

关键词 最大化泊松圆盘采样 采样半径优化 固定点数 蓝噪声 高质量点集

1 引言

在计算机图形学领域, 泊松圆盘采样是一个基础的研究问题, 采样得到的点集分布既满足随机性又满足均匀性, 并具有蓝噪声特性的频谱。它在很多实际应用中扮演着重要的角色, 如图像渲染 [1,2], 数字半色调 [3,4], 物体分布 [5,6] 以及纹理合成 [7] 等。

一个理想的泊松圆盘采样点集需要满足三个条件: 1. 无偏差采样性质 (采样区域的每个没有被覆盖的点都有相同的概率接受一个新的采样点); 2. 最小距离性质 (任意两个采样点之间的距离大于给定的采样半径); 3. 最大化性质 (采样区域被所有的采样圆盘完全覆盖)。满足这三个条件的采样方法称为最大化泊松圆盘采样 (Maximal Poisson-disk Sampling-MPS)。

产生泊松圆盘采样的经典方法叫做投镖法 (Dart Throwing-DT) [8]。该方法的基本思想是设定采样半径, 然后每次随机产生一个采样点, 如果新的采样点与已有的采样点不冲突, 则接受该采样点, 否则, 拒绝该采样点。针对传统的投镖法在效率和质量方面的不足, 后续研究者提出许多有效

引用格式: 全卫泽, 郭建伟, 张义宽, 严冬明, 孟维亮, 张晓鹏. 基于采样半径优化的最大化泊松圆盘采样. 中国科学: 信息科学,

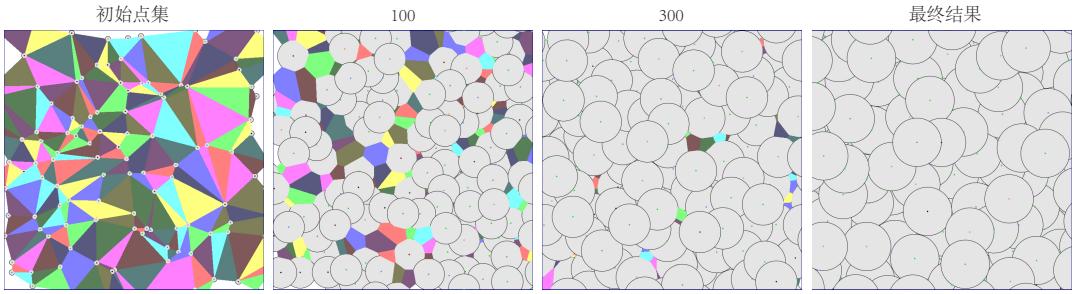


图 1 本文算法的工作流程
Figure 1 The workflow of our method

的数据结构对投镖法进行加速和改进, 如扇区 [9]、Voronoi图 [10]、动态四叉树 [11~13]、隐性四叉树 [14]、Power图 [15]等。虽然投镖法及其变种可以生成高质量的采样点集。但是, 这类方法有一个共同的缺点, 即无法精确地控制采样点的数目。鉴于此, Schröder等 [16]提出了最远点采样优化(Farthest Point Optimization-FPO), 其主要思想是最大化采样点集的全局最短距离。但是, FPO是一个确定性的方法, 它每次将新的采样点插入到“最远点”(剩余点集构成的Delaunay三角化的最大空圆的圆心)。借鉴FPO的思想, Yan等 [17]提出了最短边移除算法(Shortest Edge Removal-SER)。该方法每次选择一个最短边并随机地移除其中一个端点, 然后把它插入到“最远点”。但是, SER方法不能保证达到最大化采样属性。

鉴于以上问题, 本文提出了一种新的迭代方法, 在精确控制采样点数的同时实现最大化泊松圆盘采样。与SER相似, 本文算法也是每次选择一个最短边, 不同的是我们移除邻域平均边长较大的端点, 这样可以使得最小采样半径进一步增大。虽然FPO的采样点数也是固定的, 但不同的是, 我们提出的算法采用投镖法将新的采样点随机地插入到某个空隙(Gap)中, 这样可以提高采样点集的随机性。本文方法采用Yan等 [15]的Gap理论来计算空隙区域。图1展示了本文算法的一个工作流程, 从左到右分别为: 初始的采样点集, 经过100次迭代的结果, 经过300次迭代的结果, 最终结果。其中彩色多边形表示近似的Gap区域, 浅灰色的圆表示采样圆盘。由于初始点集是随机产生的, 采样点集之间的最短距离会非常小, 使得最初的采样半径很小, 绝大部分采样区域未被采样圆盘覆盖。随着算法迭代地进行, Gap面积逐渐减小, 最终实现完全覆盖, 算法收敛。

2 相关工作

从算法实现的角度来看, 现有的蓝噪声采样方法可以大致分成三类: (1) 传统的泊松圆盘采样方法及其变种; (2) 基于迭代的优化方法; (3) 基于样本或者规则的生成方法。本节将重点回顾与本文工作密切相关的二维泊松圆盘采样方法以及采样点集的质量分析。关于后两种方法以及其他有关二维泊松圆盘采样的相关背景, 有兴趣的读者可以参考更详细的综述文献 [18, 19]。

2.1 泊松圆盘采样

Cook等 [8]于1986年首次提出投镖法。但是, 投镖法并不收敛, 不能满足最大化采样的性质。而且投镖法的效率不高, 最坏情况下其复杂度为 $O(n^2)$ 。随后, McCool等 [20]提出一个层次的泊松圆盘采样方法。该方法首先使用一个较大的采样半径进行采样, 之后通过不断缩小采样半径来达到层次采样

的目的，但是该算法仍然不能保证整个采样区域被所有圆盘覆盖。Dunbar [9]提出一个满足最大化采样性质的泊松圆盘采样方法。该方法提出一个有效的数据结构，称为扇区（scalloped sector）。通过跟踪已有采样点集的边界圆弧来确定未被采样的空隙区域，并且对这些空隙区域进行采样，以满足最大化性质。但是由于新的采样点生成顺序依赖于已有的点集的边界，采样过程并不是完全随机，从而不能满足无偏差采样性质。White等 [11]在2007年提出采用动态的四叉树作为基本的数据结构对MPS进行加速。随后，Gamito等 [12]将White等的方法推广到高维空间。虽然这两个方法都声称在机器精度容差内可以达到最大化采样，但是实际结果并不满足最大化性质。Ebeida 等 [14]于2012年提出一个改进的算法可以在线性时间内进行MPS采样，但是与White等 [11]和Gamio等 [12]的方法一样，该方法只在 $r + \epsilon$ 容差范围内满足最大化性质，其中 ϵ 是机器精度。这类算法虽然在速度上有一定优势，但是由于细分导致的误差，实际上很难真正达到最大化采样。这种基于均匀网格的方法被研究者们在图形硬件单元上实现并行泊松圆盘采样（GPUs）[21~23]，该类方法比已有方法加速很多，但是同样没有满足最大化性质。最近，Liang等 [24]提出了一种基于圆盘填充（disk packing）的松弛算法，对于相同的泊松圆盘半径，在很好地平衡随机性和均匀性的情况下，可以产生更多的采样点。同样地，该方法仍然不满足最大化采样性质。

Jones [10]于2006年首次提出一个无偏差的最大化泊松圆盘采样的方法。该方法采用Voronoi图来检测已有点集中的空隙区域，并且将每个采样点对应的空隙区域离散为一系列凸多边形，进而针对空隙区域采样以达到最大化。由于该方法的每一步都要对Voronoi图以及每个采样点的空隙多边形进行更新，导致算法效率不高。Ebeida等 [13]于2011年提出一个混合方式进行快速的MPS。该方法包括两个主要步骤，首先采用经典的投镖法在均匀网格上进行采样，算法收敛后，切换到第二种采样模式：对没有接受采样点的网格单元和已有采样点进行布尔差运算，用一系列凸多边形近似没有被覆盖的区域，继而直接对这些凸多边形进行采样。这个步骤一直重复直到整个采样区域被完全覆盖。最近，Yan等 [15]对空隙存在的条件进行了深入的理论分析，首次提出利用Power图和正则三角化计算空隙区域，并且采用Ebeida 等 [13]提出的两步框架进行采样。该方法不仅可以针对等半径情况，而且适用于变半径的最大化采样。这类方法的缺陷在于不能精确地控制采样点数。

Schlömer等 [16]和Chen等 [25]同时提出基于迭代优化的最大化泊松圆盘采样方法称为最远点采样优化(Farthest Point Optimization–FPO)，主要思想是最大化采样点集中任意两点的最小距离。给定一个初始采样点集，FPO首先构建点集的Voronoi图，找到相关Delaunay边长最短的采样点，将这个采样点从点集删除，并且重新插入一个新点到外接圆半径最大的Delaunay三角形的外接圆心。重复这个步骤直到收敛。FPO算法的每一次迭代都可以保证增加最短边的长度，使得点集分布更加均匀。Chen等 [25]进一步将FPO并行化，并且在GPU上实现，大大提高了算法效率。但是，现有的FPO只能处理二维平面的等半径采样。通过引入正则三角化和Power图，Yan等人 [17]对原始的FPO算法做了两个重要的扩展：自适应的采样以及网格曲面上的采样。另外，他们同时提出了一个SER方法，每一次选择一个最短边并随机地移除其中一个端点，然后把它插入到“最远点”。该方法与FPO类似，唯一不同的是选择最短边的端点，而不是采样点集中的任何一点。SER方法不能保证采样点集满足最大化采样性质，但是，SER方法可以作为FPO方法的预处理步骤，用于加速FPO方法。FPO虽然可以生成分布均匀的点集，但是，该方法是确定性的，破坏了MPS应有的无偏差性质。

2.2 采样点集分析

使用不同的采样算法生成的点集，往往具有不同的特性。因此，如何根据实际的应用选择合适的算法非常重要。目前主要有两类方法来评估一个采样点集的质量：频谱分析和空间统计分析。

频谱分析是分析一个采样分布的通用方法, 它可以有效地检测到点集中的瑕疵。最初始的频谱分析方法由Ulrich [26]提出, 用来研究数字半色调技术中的抖动模式。该方法通过对分布的周期图做平均化处理来计算其频谱, 该周期图由它们的傅里叶变换所决定。由于频谱的径向对称性, 它可以由两个一维的度量来刻画: 径向平均频谱和各向异性。作为一个好的分布, 径向平均频谱应该展现出典型的蓝噪声特性, 即在低频区域接近于零、随后具有一系列逐渐衰减的结构性波峰、最后是一个较平的高频区域; 其各向异性曲线应该稳定地保持在较低值, 以表明优异的对称性。Schlömer等 [27]将该方法进行扩展和改进, 提出了一种解析方法 (Point Set Analysis-PSA) 来精确计算二维点集的傅里叶变换。由于傅里叶变换不能直接应用到网格曲面上, 因此其上的采样分析比较困难。Wei和Wang [28]提出了一种称为Differential Domain Analysis(DDA)的分析工具, 可以分析非均匀的采样, 以及网格曲面上的采样。

空间统计是一个分析采样点集的空间分布属性的有效测度。一种常用的度量是相对半径 [18], $\delta_X = d_{min}/d_{max}$, 其中 d_{min} 为点集 X 任何点对之间的全局最短距离, $d_{max} = \sqrt{2/(\sqrt{3}N)}$ 为任何点对之间的理论最大最小距离。该测度可以衡量泊松圆盘采样的空间均匀性。从点生成过程的角度, 借助成对相关函数 (Pair correlation function- PCF), Öztireli和Gross [29]提出了一个新的分析工具。PCF 描述了在特定位置存在点的联合概率, 因此, 可以反映点集分布的均匀性和不规则性 (随机性)。该方法可以用来分析和合成一般的采样点集。最近, Quan等人 [30]提出了局部PCF 分析, 并将该分析方法扩展到二维自适应采样和网格表面上。局部PCF和DDA相互补充, 为采样点集的空间属性提供一个更全面的分析。

3 核心算法

本节我们首先介绍一下Gap处理方法 [15], 这是本文算法的一个重要部分。接着, 重点介绍本文算法的工作流程和实现细节。

3.1 Gap处理

基于Voronoi图的理论, Yan等 [15]给出了Gap存在的充要条件。如果一个三角形 t 满足 $\Pi(t) > 0$, 则 t 是一个gap三角形, 通过处理gap三角形可以计算空隙区域。 $\Pi(t)$ 的定义为:

$$\Pi(t) = dis(p, c_t) - r > 0, \quad (1)$$

其中, p 是三角形 t 的一个顶点, r 是采样半径, c_t 是Voronoi图的一个顶点, 也叫做三角形 t 的Voronoi中心, $dis(p, c_t)$ 为 p 到 c_t 的欧氏距离。该公式可以描述为: 如果一个三角形的Voronoi 中心未被三角形三个顶点对应的采样圆盘覆盖, 则该三角形就是gap三角形。

关于Gap的处理主要包含两个操作, 分别为Gap检测和Gap基元提取。

Gap检测: 该操作主要是分析当前点集中是否存在gap以及它们的具体位置。如果不存在gap, 则可以确认采样点集已经达到最大化, 算法就可以终止了。一个gap三角形未必意味着这个三角形自身包含一些未被覆盖的区域, 因为它的Voronoi中心可以在三角形的外部。同时, 一个Gap区域可能包含若干个三角形的Voronoi中心, 相应地, 这个Gap就有好几个gap三角形与之对应。因此, 在实际操作中, 我们遍历所有的Delaunay三角形, 计算相应的Voronoi中心和 $\Pi(t)$ 。如果 $\Pi(t)$ 满足(1)式, 则将其标记为gap三角形。该操作的输出是一系列的gap三角形。

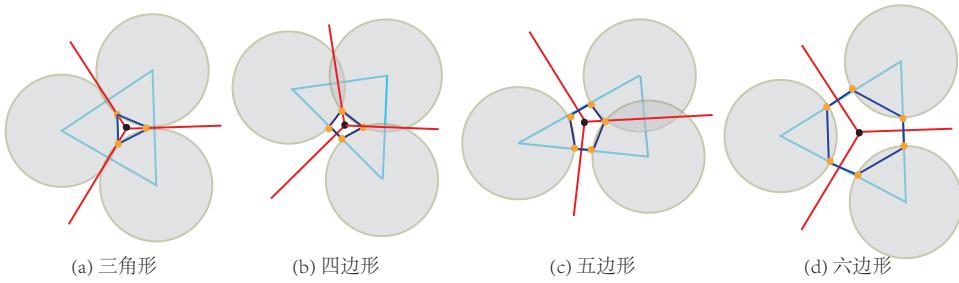


图 2 Gap基元示意图
Figure 2 Illustration of Gap primitives

Gap基元提取：该操作将所有的Gap划分为若干个简单且不重叠的凸多边形（至多六个边），并将其分配给每个gap三角形。图2展示了不同类型的Gap基元，从三角形到六边形（深蓝色线段围成的区域）。对于一个gap三角形来说，提取与之对应的Gap基元的时间复杂度是常数（每一个Gap基元至多有六条边），所以整个Gap基元提取算法的时间复杂度是 $O(n)$ ， n 是gap三角形的个数。

3.2 算法流程

本文算法的核心思想是：每次从点集 X 中删除掉一个点，并将其移动到未被采样圆盘覆盖的区域。首先，本算法可以始终保持最小距离属性，即新插入的采样点不会被已有的点集对应的采样圆盘覆盖，新采样点处的圆盘也不会覆盖已有的点集。其次，每一个新的采样点被随机地插入空隙区域，保证了采样的无偏性。随着算法的迭代进行，点集的全局最短距离在不断增加，采样圆盘的覆盖面积也在渐渐增加，空隙区域的面积相应地不断减小，经过若干次迭代之后，就可以达到最大化，即满足最大化采样属性。本文算法的具体流程如算法1所示。

算法 1 基于采样半径优化的最大化泊松圆盘采样算法

```

1: 输入：采样点数 $N$ 和采样区域 $\Omega$ 
2: 输出：采样点集 $X$ 
3: 初始化：在 $\Omega$ 中随机产生 $N$ 个采样点，并进行Delaunay三角化（DT）;
4: while true do
5:   寻找DT的全局最短边，删除其中邻域平均边长较大的端点;
6:   局部更新DT，更新采样半径为当前DT的最短边长;
7:   执行Gap检测操作;
8:   if 不存在gap三角形 then
9:     将删除的顶点插入到DT的最大外接圆的圆心;
10:    BREAK; //算法结束;
11:   end if
12:   执行Gap基元提取操作;
13:   在空隙区域中随机产生一个采样点，将其插入到 $X$ 中
14:   动态更新DT;
15: end while

```

具体地，由用户指定采样点数 N 和采样区域 Ω 。我们首先在区域 Ω 中随机采样 N 个点得到最初的采样点集 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 。然后，对初始的采样点集 X 进行Delaunay三角化（DT）。

然后，我们通过迭代的方法进行采样半径的优化。在每一次迭代中，首先在DT中寻找最短的边 E ，

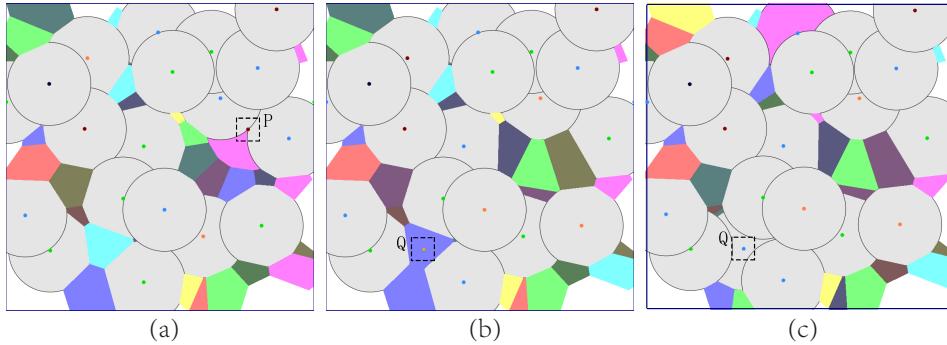


图3 一次迭代过程展示
Figure 3 Illustration of one iteration

并从 X 删除其中的一个端点 v , 然后动态更新DT, 并执行Gap检测操作。接着, 判断算法是否收敛, 如果不存在gap三角形(采样区域被完全覆盖), 则将新的采样点插入到最大外接圆的圆心, 终止算法的执行, 否则继续迭代。之后, 执行Gap基元提取操作, 提取未被采样圆盘覆盖的空隙区域; 在上一步提取的空隙区域中随机产生一个采样点, 并将其插入到 X 中, 动态更新DT。以上过程重复进行, 直到算法收敛。

在我们的具体实现中, 由删除或者插入操作引起的DT的改变是动态的和局部的。特别地, DT的局部更新的时间复杂度是 $O(1)$ 。关于最短边的端点的移除策略, 不同于SER的随机策略, 我们测试了随机策略、最大和最小邻域平均边长移除策略、最大和最小邻域平均面积移除策略。

端点的邻域平均边长定义为:

$$E_{avg} = \frac{1}{N(v)} \sum_{i=1}^{N(v)} l_i, \quad (2)$$

其中, $N(v)$ 是端点 v 的邻域边(边的一个端点为 v)的数目, l_i 是邻域边的长度。

端点的邻域平均面积定义为:

$$A_{avg} = \frac{1}{N(v)} \sum_{i=1}^{N(v)} A_i, \quad (3)$$

其中, $N(v)$ 是端点 v 的邻域面(三角形的一个端点为 v)的数目, A_i 是邻域面的面积。

我们通过大量的实验发现, 移除邻域平均边长较大的端点比随机移除策略更好, 能够进一步地提高采样半径, 同时随机性并没有受到明显的影响。

如图3所示, 展示了一次完整的迭代过程。图3 (a) 中虚线框中的点P是选中的最短边中邻域平均边长较大的端点。我们首先移除点P, 并局部更新DT, 以当前的最短边长为采样半径绘制圆盘。然后更新Gap, 并在Gap采样得到新的点Q, 如图3 (b) 中的虚线框所示。最后, 将Q插入到采样点集中, 如图3 (c) 所示。这样就完成了一次迭代过程。

对于非周期性边界, 首先, 我们在尖锐的角度处进行采样, 并将其固定, 这些点不参与后续的优化过程。其次, 执行迭代优化方法: 首先执行算法1, 然后将Voronoi单元与边界相交的采样点投影到边界上, 重新执行算法1。以上过程重复进行, 直到相对半径没有明显变化为止, 实验发现这一过程一般只需要重复5~10次即可收敛。通过投影处理后, 可以进一步地增大相对半径。

表1 统计采样点集以及三角化的质量

Table 1 Statistics of the sampling and the triangulation quality in periodic domain

采样方法	δ_X	Q_{min}	Q_{avg}	θ_{min}	$\bar{\theta}_{min}$	θ_{max}	$\theta_{<30^\circ}$	$\theta_{>90^\circ}$	$V_{567\%}$
FPO	0.925	0.567	0.856	35.12	50.90	107.51	0.00	6.50	99.61
SER	0.781	0.509	0.813	30.54	46.11	114.41	0.00	14.50	96.48
MPS	0.780	0.487	0.806	30.19	45.30	117.11	0.00	15.07	96.53
OURS	0.855	0.514	0.833	30.21	47.97	113.85	0.00	12.60	98.30
OURS CV(%)	0.19	3.44	0.38	0.22	0.47	1.76	0.00	2.46	0.31

4 实验结果与讨论

首先，我们通过实验结果来表明本文算法可以产生高质量的点集。其次，我们评价算法的稳定性和收敛性。最后，通过实验展示本文算法可以用于非周期边界的情况。我们采用C++实现本文算法，并使用计算几何算法库(CGAL)来计算Delaunay三角化。本文中所有算法的运行时间都是在3.6GHz CPU和16G内存的台式机上获得的。

采样质量分析与比较：我们比较了SER [17], FPO [16], MPS [15]和本文算法的采样点集性质，如图4所示。采样区域是周期边界的正方形区域，采样点数为1024，由于MPS方法不能精确控制采样点数，所以其点数近似为1024。从左到右分别为：采样点集，PSA分析结果 [27]，PCF分析结果 [29]。其中，PSA分析包括：功率谱(左)，半径平均(右上)和各向异性(右下)；PCF分析包括：成对相关函数(上)和不规则性(下)。从图4的第二行可以看出，相较于其他方法，FPO方法得到的点集更规则。另外，从采样点集结果和PCF的分析结果可以看出，SER和MPS的不规则性(随机性)最强，它们的PCF很快趋于平坦且Irregularity略微大一些；本文方法的不规则性次之，FPO最后，主要原因是MPS和本文方法的新的采样点是随机产生的，相比FPO有更多的随机性。值得注意的是，虽然SER和MPS方法的采样策略完全不同，但是它们具有非常相似的点集质量。另外，从PSA的分析结果可以看出，本文算法产生的采样点集具有很好的蓝噪声品质。

网格质量分析与比较：表1统计了上述四种方法的采样点集和三角化网格的质量。采样点数为4096，我们取100次运行结果的平均值。其中， $\delta_X = d_{min}/d_{max}$ 为相对半径， d_{min} 为点集X任何点对之间的全局最短距离， $d_{max} = \sqrt{2}/(\sqrt{3}N)$ 为任何点对之间的理论最大最小距离。 $Q_t = \frac{6}{\sqrt{3} p_t l_t}$ 用于衡量一个三角形的质量， a_t 为三角形t的面积， p_t 是t的半周长， l_t 是t的最长边长； Q_{min} 和 Q_{avg} 分别为最小和平均三角形质量。 θ_{min} 和 θ_{max} 分别为最小和最大角度， $\bar{\theta}_{min}$ 是所有三角形的最小角度的平均。 $\theta_{<30^\circ}$ 和 $\theta_{>90^\circ}$ 分别为 θ_{min} 小于30°和 θ_{max} 大于90°的三角形比例。 $V_{567\%}$ 是度数为5,6,7的顶点百分比。其中，对于 δ_X ，FPO的质量是最高的，我们的方法次之，MPS和SER基本相同。FPO是通过最大化最短距离来调整点集的，因此该方法的相对半径可以达到很大，而我们的方法介于FPO和MPS之间。从表中可以看出，SER和MPS的结果很接近，而且SER略微地好于MPS。这一发现在图4中也得到了证实。另外，除了 θ_{min} ，本文方法的绝大部分性能指标均优于SER和MPS。如图5所示为本文算法在非周期边界的采样结果，从左到右分别为：Wavy, Face, Dolphin, S。同时，统计了采样点集和三角化网格的质量，如表2所示。实验结果说明了本文算法对于非周期边界采样的有效性。

除了上面的分析和比较之外，我们还统计了FPO和本文算法的相对半径的分布情况，如图6所示。第一行对应FPO的结果；第二行对应本文算法的结果。从左到右，采样点数分别为 $N = 0.5K, 2K, 10K$ 。每一种情况执行1000次。从图中可以看出FPO的相对半径比较集中，而本文算法的相对半径有一个相

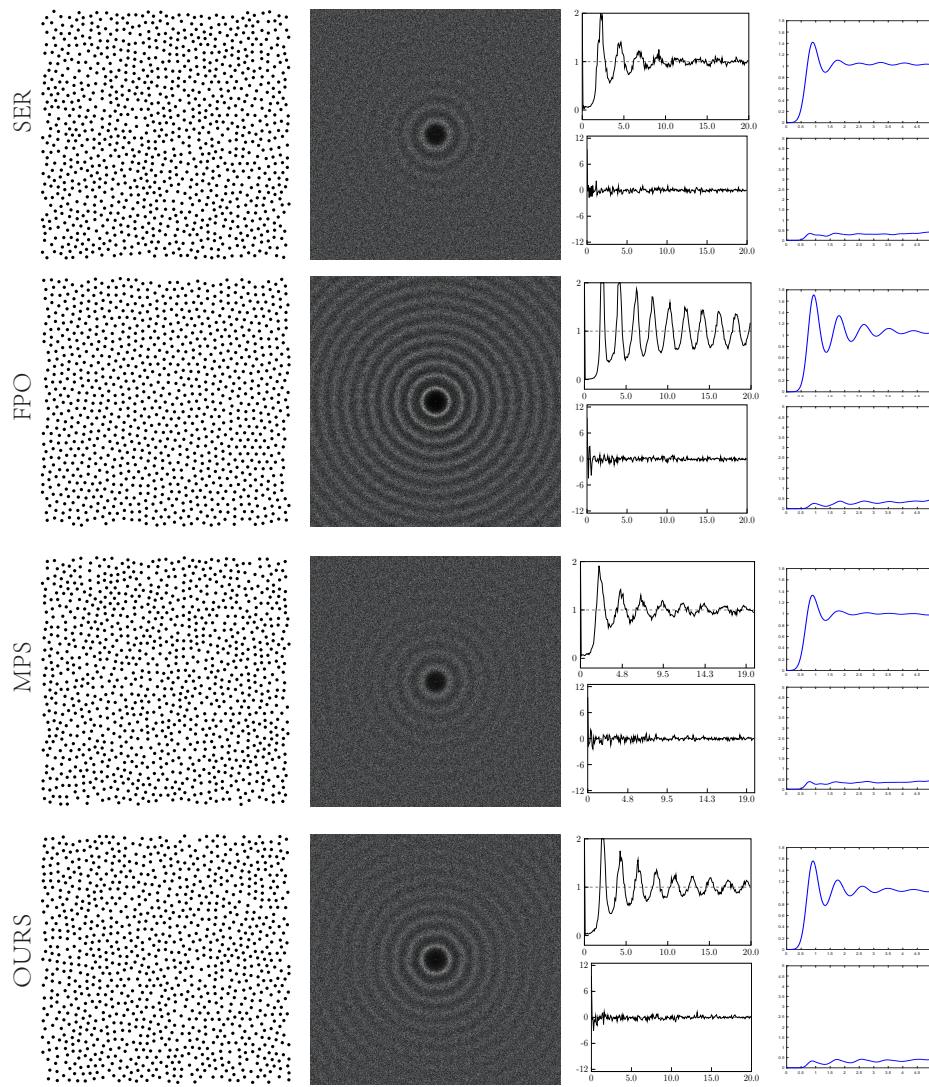


图 4 采样点集质量比较
Figure 4 Comparison of the sampling quality

表 2 统计非周期边界的采样点集以及三角化的质量

Table 2 Statistics of the sampling and the triangulation quality in arbitrary boundary conditions

边界名称	δ_X	Q_{min}	Q_{avg}	θ_{min}	$\bar{\theta}_{min}$	θ_{max}	$\theta_{<30^\circ}$	$\theta_{>90^\circ}$	$V_{567}\%$
Wavy	0.816	0.513	0.813	30.62	45.82	114.01	0.00	14.25	94.85
Face	0.822	0.502	0.818	31.12	45.30	115.33	0.00	13.96	94.12
Dolphin	0.810	0.490	0.813	30.70	46.03	116.84	0.00	14.23	93.95
S	0.830	0.512	0.813	31.02	46.12	113.08	0.00	13.32	94.33

对较大的变化区间，主要原因是本文算法将新的采样点随机地插入到空隙区域，而不是固定的位置（采样点集最大空圆的圆心）。

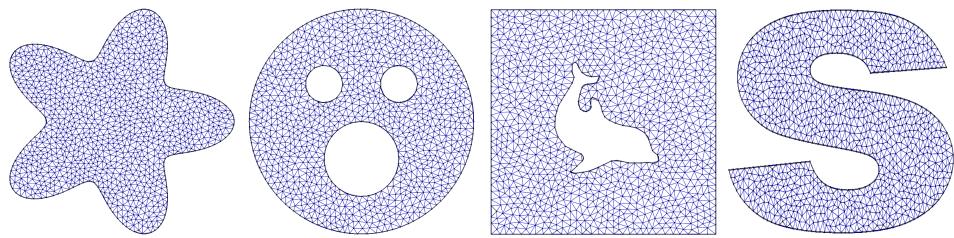


图5 非周期边界的采样结果
Figure 5 Sampling and triangulation in polygonal domains

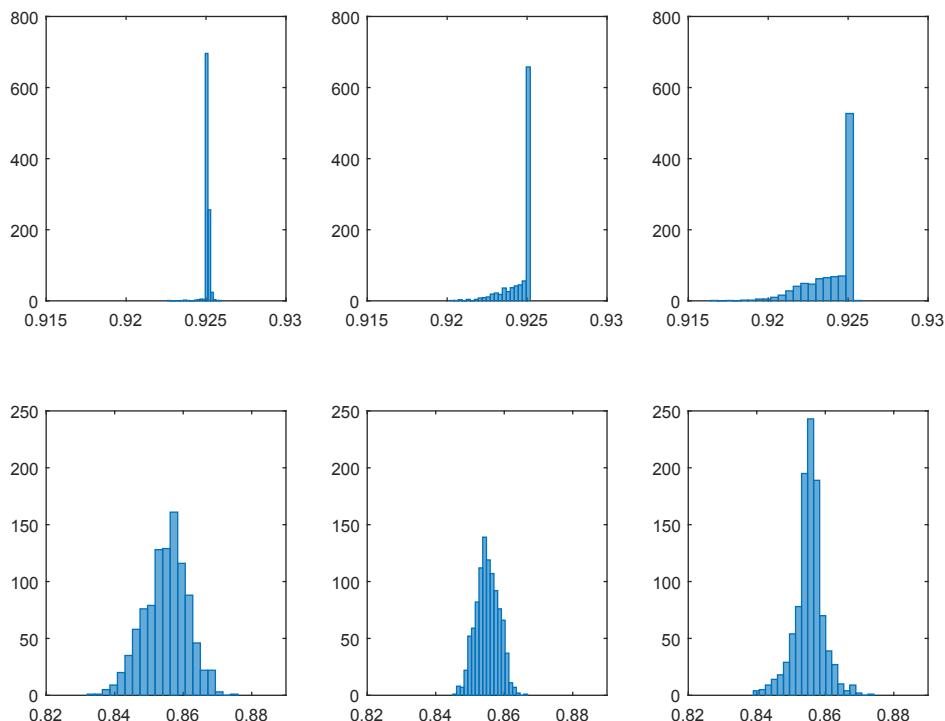


图6 FPO和本文算法的相对半径的直方图
Figure 6 Histogram of the relative radius of FPO and our method

算法稳定性分析：为了展示本文算法的稳定性，我们统计了数百个点到数十万个点的点集的各项性能指标的变异系数CV (Coefficient of Variation)，如表1的最后一行所示。其计算方法为，性能指标的平均值除以相应的标准差。变异系数衡量不同点集的性能指标的变异程度，变异系数越小，变异(偏离)程度越小，它在一定程度上可以分析算法的稳定性，因为，对于一种采样算法，得到的不同数目的采样点集应该具有基本一致的质量。从表1可以看出，对于各个指标，本算法相应的CV值是很低的 ($< 3.5\%$)，说明本文算法是很稳定的。同时，为了进一步验证算法的稳定性，我们对采样点数 $N = 0.5K, 1K, 2K, 20K$ 的点集进行PCF分析，其结果如图7所示。第一行对应PCF，第二行对应Irregularity。从图中可以看出，不同点数的PCF分析结果基本一致。

算法的收敛性分析：关于算法的收敛性，在3.2节已经进行了理论说明。这里，我们通过实验来进

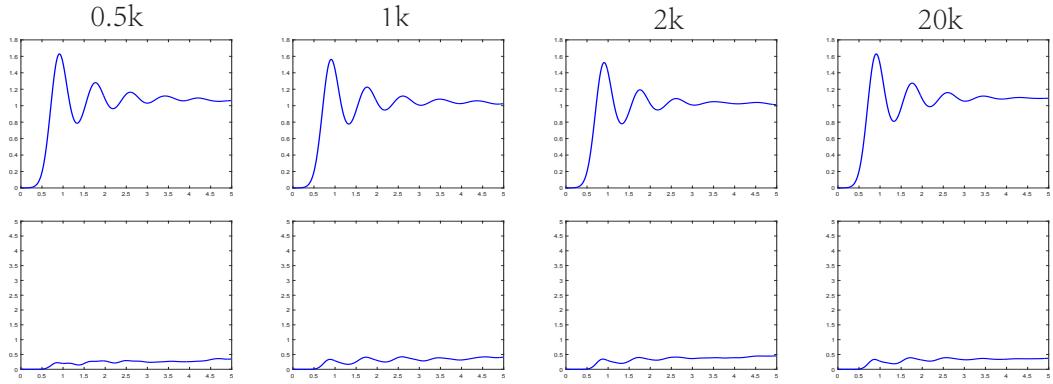


图 7 不同数目的点集的PCF分析
Figure 7 PCF analysis of points with different numbers

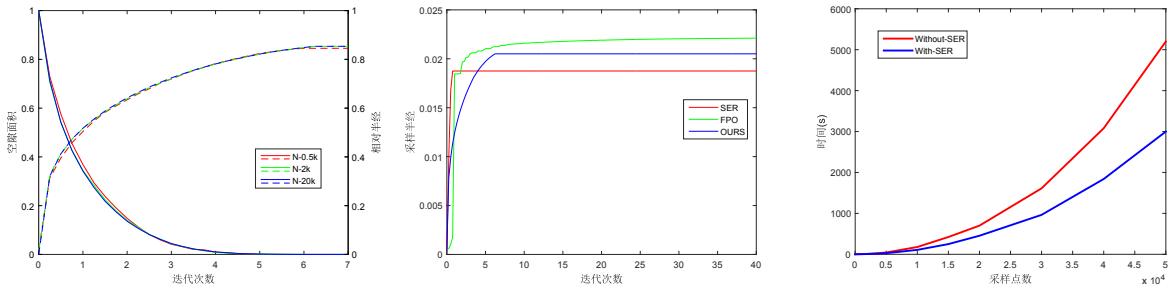


图 8 gap 面积与相对半径统计

Figure 8 Statistics of the gap area and the relative radius

图 9 采样半径的收敛情况

图 10 运行时间的比较

Figure 9 The convergence rate of the sampling radius

Figure 10 Timing comparison

一步证明本文算法可以保证收敛。图8统计了不同数目的点集在算法迭代过程中的空隙面积以及相对半径的变化情况。其中，横坐标表示迭代次数，计算方法与Schlömer等 [16]一致，即移动点的数目等于采样点数表示一次完整的迭代；左边的纵坐标表示空隙面积，对应实线，右边的纵坐标表示相对半径，对应虚线；左下角的“N-0.5k”表示采样点数为 $0.5K$ ；不同的颜色对应不同的采样点数。从图8可以看出，刚开始时空隙面积接近为1，这是因为初始点集是随机产生的，全局最短距离非常小，相应地，相对半径几乎为0。随着算法的不断迭代，相对半径（采样半径）在不断地增大，相应地，空隙面积会不断减小，而且刚开始的空隙面积减小的速度比较快（采样半径增加比较快），经过大约2次迭代之后，空隙面积的减小速度变慢，这是因为此时的空隙面积已经很小了，算法在对点集进行不断地微调，以满足最大化属性。

同时，我们还比较了SER, FPO和本文算法的半径收敛情况，如图9所示。其中，横坐标表示迭代次数，纵坐标表示采样半径；采样点数为 $2K$ 。从图中可以看出，经过几次迭代(< 10)后，SER 和本文方法的采样半径固定不变，这意味着SER和我们的方法已经收敛了，而FPO的采样半径还在一直变大，经过若干次迭代后才收敛。很明显，对于相同的采样点数，FPO的采样半径最大，我们的方法次之，SER最小。这与表1的统计结果也是一致的。

此外，SER方法也可以用于加速本文算法。经过SER的预处理操作，我们得到了一个相对好的分

布点集。然后，执行我们的方法可以很快地得到最终的采样结果。在采用SER加速和不采用SER加速的情况下，统计本文算法得到最终结果所需要的时间，统计结果如图10所示。‘With-SER’表示使用SER加速，对应图中的蓝线；‘Without-SER’表示不使用SER加速，对应图中的红线。我们发现使用SER加速可以获得一个较好的性能提升。

5 结语

本文针对现有的最大化泊松圆盘采样算法不能精确地控制采样点数，提出了一种新的基于迭代优化采样半径的采样算法。根据用户指定的采样点数目和采样区域，随机初始化一个采样点集，借助Gap处理方法，不断调整采样点的位置，使得全局最短距离不断增加，继而使得空隙面积不断减小，最终达到最大化属性。本文算法思想简单，易于实现。大量的实验证明本文算法稳定并且能够收敛，且采样点集具有很好的蓝噪声性质。

本文算法目前只能用于生成二维等半径的均匀采样点集，未来，我们计划把该方法扩展到二维自适应采样的情况，并进一步推广到网格表面上。

致谢 基金项目：国家自然科学基金(61271431,61372168,61571439,61331018)，国家“八六三”高技术研究发展计划(2015AA016402)支持。

参考文献

- 1 Mitchell D P. Generating antialiased images at low sampling densities. In: Proc. the 14th ACM SIGGRAPH, New York, 1987, 21: 65-72
- 2 Chen J T, Ge X Y, Wei L Y, et al. Bilateral blue noise sampling. ACM Trans. on Graphics, 2013, 32(6): 216: 1-11
- 3 Yellot J I. Spectral analysis of spatial sampling by photoreceptors: Topological disorder prevents aliasing. Vision Research, 1982, 22: 1205-1210
- 4 Yellot J I. Spectral consequences of photoreceptor sampling in the rhesus retina. Science 221, 1983, 382-385
- 5 Deussen O, Hanrahan P, Lintermann B, et al. Realistic modeling and rendering of plant ecosystems. In: Proc. of ACM SIGGRAPH 1998, New York, 1998, 275-286
- 6 Cohen M F, Shade J, Hiller S, et al. Wang tiles for image and texture generation. ACM Trans. on Graphics, 2003, 22: 287-294
- 7 Wu F Z, Dong W M, Kong Y, et al. Feature-aware natural texture synthesis. The Visual Computer, 2014, 1-13
- 8 Cook R L. Stochastic sampling in computer graphics. ACM Trans. on Graphics, 1986, 5: 51-72
- 9 Dunbar D, Humphreys G. A spatial data structure for fast Poisson-disk sample generation. ACM Trans. on Graphics, 2006, 25: 503-508
- 10 Jones T R. Efficient generation of Poisson-disk sampling patterns. Journal of Graphics Tools, 2006, 11: 27-36
- 11 White K B, Cline D, Egbert P K. Poisson disk point sets by hierarchical dart throwing. In: Proc. of the IEEE Symposium on Interactive Ray Tracing, 2007, 129-132
- 12 Gamito M N, Maddock S C. Accurate Multidimensional Poisson-Disk Sampling. ACM Trans. on Graphics, 2009, 29(1): 8:1-19
- 13 Ebeida M S, Patney A, Mitchell S A, et al. Efficient maximal Poisson-disk sampling. ACM Trans. on Graphics, 2011, 30(4): 49:1-12
- 14 Ebeida M S, Mitchell S A, Patney A, et al. A simple algorithm for maximal Poisson-disk sampling in high dimensions. Computer Graphics Forum(Proc. EUROGRAPHICS), 2012, 31: 785-794
- 15 Yan D M, Wonka P. Gap Processing for Adaptive Maximal Poisson-Disk Sampling. ACM Trans. on Graphics, 2013, 32(5): 148:1-15

- 16 Schröder T, Heck D, Deussen O. Farthest-Point Optimized Point Sets with Maximized Minimum Distance. In: Proc. of High Performance Graphics, Vancouver, 2011, 35-142
- 17 Yan D M, Guo J W, Jia X H, et al. Blue-Noise Remeshing with Farthest Point Optimization. Computer Graphics Forum (Proc. SGP), 2014, 33: 167-176
- 18 Lagae A, Dutré P. A comparison of methods for generating Poisson disk distributions. Computer Graphics Forum, 2008, 27: 114-129
- 19 Yan D M, Guo J W, Wang B, et al. A Survey of Blue-Noise Sampling and Its Applications. Journal of Computer Science and Technology, 2015, 30: 439-452
- 20 McCool M, Fiume E. Hierarchical Poisson disk sampling distributions. Graphics Interface, 1992, 94-105
- 21 Wei L Y. Parallel Poisson disk sampling. ACM Trans. on Graphics, 2008, 27(3): 20:1-9
- 22 Wei L Y. Multi-class blue noise sampling. ACM Trans. on Graphics, 2010, 29(4): 79:1-8
- 23 Ip C Y, Yalcin M A, Luebke D, et al. PixelPie: Maximal Poisson-disk Sampling with Rasterization. In: Proc. the 5th High-Performance Graphics Conference, Anaheim, 2013, 17-26
- 24 Liang G H, Lu L, Chen Z G, et al. Poisson-Disk Sampling through Disk Packing. Comp. Visual Media(Proc. CVM), 2015, 1:17-26
- 25 Chen R, Gotsman C. Parallel blue-noise sampling by constrained farthest point optimization. Computer Graphics Forum(Proc. SGP), 2012, 31: 1775-1785
- 26 Ulichney R. Digital Halftoning, MIT Press, 1987.
- 27 Schröder T, Deussen O. Accurate Spectral Analysis of Two-Dimensional Point Sets. Journal of Graphics, GPU, and Game Tools, 2011, 15: 152-160
- 28 Wei L Y, Wang R. Differential domain analysis for non-uniform sampling. ACM Trans. on Graphics, 2011, 30(4): 50: 1-8
- 29 Öztireli A C, Gross M. Analysis and synthesis of point distributions based on pair correlation. ACM Trans. on Graphics, 2012, 31(6): 170: 1-10
- 30 Quan W Z, Guo J W, Yan D M, et al. Analysing Surface Sampling Patterns using Pair Correlation Function. Comp. Visual Media, 2016, 2: 1-12

Maximal Poisson-disk sampling by sampling radius optimization

QUAN WeiZe¹, GUO JianWei¹, ZHANG Yi-Kuan¹, YAN Dong-Ming^{1*}, MENG WeiLiang¹ & ZHANG XiaoPeng^{1*}

¹ LIAMA-NLPR, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

*E-mail: yandongming@gmail.com, xiaopeng.zhang@ia.ac.cn

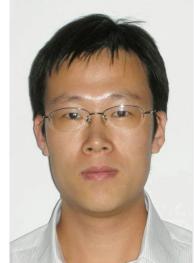
Abstract In the field of computer graphics, Maximal Poisson-disk Sampling (MPS) is a fundamental research topic. An ideal sampling set should satisfy unbiased sampling property, minimal distance property, and maximal sampling property. In general, MPS is obtained by Dart Throwing, as we all know, the drawback of this method is unable to precisely control the number of samples. In view of the above problem, this work proposes a novelty algorithm that can precisely control the number of samples of two-dimensional radius-equal MPS, and satisfy other properties simultaneously. Unlike existing methods, the proposed method controls the number of samples by adjusting sampling radius. Firstly, according to user-specified the number of samples and sampling domain (closed polygon), initial samples are randomly obtained, then Delaunay triangulation is conducted, and taking as current sampling radius the shortest edge length of the triangulation. Secondly, iteratively removing the endpoint of global shortest edge with larger neighborhood-averaged edge length, and then using Dart Throwing to randomly insert it into Gap region that is calculated at current sampling radius. By iteratively adjusting the position of points, the sampling radius increases gradually, finally, MPS with fixed number of sampling point can be achieved. Experimental results show that this method generates point sets with high quality, at the same time,

ensures the excellent blue-noise property for MPS.

Keywords maximal Poisson-disk sampling, sampling radius optimization, fixed number of points, blue-noise, high-quality set of points



QUAN WeiZe received his bachelor degree from Wuhan University of Technology in 2014, and he is currently a Ph.D. candidate in National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interests include 3D shape analysis and geometry processing.



YAN DongMing is an associate professor in National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. He received his Ph.D. degree in computer science from Hong Kong University in 2010, and his master and bachelor degrees in computer science and technology from Tsinghua University in 2005 and 2002, respectively. His research interests include computer graphics, geometric processing, and visualization.



GUO JianWei received his bachelor degree from Shandong University in 2011, and he is currently a Ph.D. candidate in National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences. His research interests include 3D shape analysis and geometry processing.



ZHANG XiaoPeng is a professor in National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation, Chinese Academic of Sciences. He received his Ph.D. degree in computer science from Institute of Software, Chinese Academy of Sciences in 1999. He received the National Scientific and Technological Progress Prize (second class) in 2004. His main research interests include computer graphics and image processing.