

三维转动神经网络的研究

(2) 存贮容量^①

陈振湘 帅建伟 郑金城 刘瑞堂

(物理学系)

摘要 在绝热近似基础上,应用信噪比理论分析了网络的存贮容量.当神经元的旋转角态数和方向角态数都很大时,存储容量与神经元的旋转角态数的平方成反比,和方向角态数成正比.当神经元态数较小时,结果趋于 Hopfield 神经网络的存储容量.

关键词 神经网络, 三维转动, 图象识别, 存贮容量

中国图书分类号 O 411.3

我们在文[1]第 3 节中引入了绝热近似,从而有效局域场能正确迭代的几率,等于方向角和旋转角分别能正确迭代的几率的乘积.下面我们应用信噪比理论讨论当 N, M 很大时,三维转动神经网络模型的存储容量 $\gamma = M/N$ 与神经元个数和神经元态数的关系.

1 旋转角正确迭代几率

我们先由文[1]式(17)分析旋转角正确迭代的几率.由于该模型具有旋转对称性,不失一般性,可设 $\alpha_i^1 = 0$, 则得

$$\tilde{H}_{i0} = N + \Delta_0 \exp(i\omega) \quad (1)$$

从几何意义上来理解,如图 1, N 表示在 x 轴上的 \overrightarrow{OA} 矢量, $\Delta_0 \exp(i\omega)$ 表示长度为 r , 且与 x 轴(实轴)夹角为 ω 的 \overrightarrow{AB} 矢量. \tilde{H}_{i0} 即是矢量 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. 要求旋转角能够正确迭代的几率,即 $\Theta(H_{i0}) = \alpha_i^1 = 0$, 也即求点 B 落在 π/q_0 与 $-\pi/q_0$ 的张角(即扇形 COD)内的几率.

由文[1]分析知, \overrightarrow{AB} 矢量具有统计分布性质:径向满足文[1]式(18)的正态分布,而角度均匀分布,故旋转角能正确迭代的几率 ρ_1 为对加权的正态分布函数 $f(r)$ 求积分,加权系数则表示了相应距离处扇形 COD 面积元所占比例:

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \int_0^{r_0} f(r) dr + \int_{r_0}^N \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r}\right) f(r) dr \\ & + \int_N^\infty \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r}\right) f(r) dr \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $r_0 = N \sin(\pi/q_0)$, 为图 2 画有横虚线的小圆 1 的半径,第一项积分表示点 B 落在如图 2 的圆域 1 内的几率,第二项积分表示点 B 落在右斜线所表示的区域 2 内的几率,第三项积分表示点 B 落在左斜线所表示的区域 3 内的几率.表达式中 $f(r)$ 前面的加权系数表示了该距离

① 本文 1995-12-29 收到: 国家自然科学基金重点资助项目和高技术探索资助项目

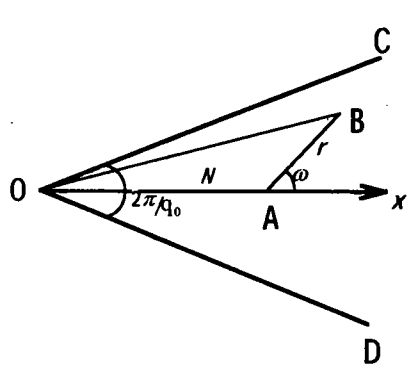


图1 旋转角正确映射的复平面几何理解

Fig. 1 The geometric meaning of rotation angle mapped correctly

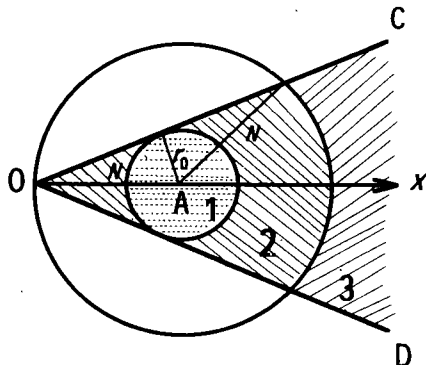


图2 积分式(2)的几何示意图

Fig. 2 The geometric meaning of the equation (2)

处阴影部分面积元所占比例. 当 N 很大时, 积分

$$\int_N^\infty \arccos \frac{r_0}{N} f(r) dr \approx \int_N^\infty \arccos \frac{r_0}{r} f(r) dr$$

且当 r 从 r_0 变化到无穷大时, $\arccos(r_0/r)$ 从 0 变化到 $\pi/2$, ρ_1 的变化主要取决于 $f(r)$ 的变化, 因此我们把 $\arccos(r_0/r)$ 用一个常系数 A ($0 < A < \pi/2$) 代替, 把它提到积分号外. 则上式(2)可简化为

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 - \frac{2A}{\pi} \int_{r_0}^\infty f(r) dr \approx 1 - \frac{2A}{\pi} [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{r_0^2}{2\sigma_0^2})}] \\ &= 1 - \frac{2A}{\pi} [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{1}{2\gamma} \sin^2 \frac{\pi}{q_0})}] \end{aligned} \quad (3)$$

2 方向角正确迭代几率

求方向角正确迭代的几率, 类似于对旋转角的处理. 不失一般性, 可设神经元 i 的转轴为 \vec{k} 轴, 即 $\vec{m}_i = \vec{k}$, 则文[1]式(20)可写为

$$\vec{H}_i = \eta N \vec{k} + \vec{\Delta}_i \quad (4)$$

从三维几何图形上来理解, 如图 3, $\eta N \vec{k}$ 表示在 \vec{k} 轴上的一个三维矢量 \vec{OE} , 而 $\vec{\Delta}_i$ 为图 3 的 \vec{EF} 矢量, \vec{EF} 矢量具有球对称性质, 且长度按文[1]式(18)分布. \vec{H}_i 即是矢量 $\vec{OF} = \vec{OE} + \vec{EF}$. 要使旋转角能够正确迭代, 即 $\theta(\vec{H}_i) = \vec{m}_i = \vec{k}$, 也即是要求点 B 落在包含 \vec{k} 轴的一特定划分的 $2\pi/q_1$ 立体角的锥形空间内. 为处理方便, 假设该立体空间是以 \vec{k} 轴为中心线, 且立体角为 $2\pi/q_1$ 的圆锥形空间, 如图 3 的 OGH 圆锥形空间. 则旋转角能正确迭代的几率 ρ_2 为点 B 落在 OGH 圆锥形空间内的几率, 也即对加权的径向正态分布函数 $f(r)$ 求积分, 而其中加权系数则表示了相应距离处 OGH 圆锥形空间体积元所占比例, 故具有与式(2)相似的表达式

$$\rho_2 = \int_0^{R_0} f(r) dr + \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\eta N} (2 - \cos \Phi - \cos \varphi) f(r) dr + \frac{1}{2} \int_{\eta N}^\infty (1 - \cos \varphi) f(r) dr \quad (5)$$

其中 R_0 是如图 4 所示的以 E 为球心内切于圆锥 OGH 的画有横虚线的小圆球 I 的半径, 由简单的几何推导可得 R_0 与立体角 $2\pi/q_1$ 的关系为

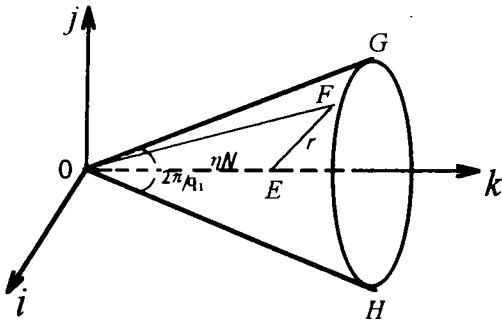


图 3 方向角正确迭代的三维几何理解

Fig. 3 The geometric meaning of direct angle mapped correctly

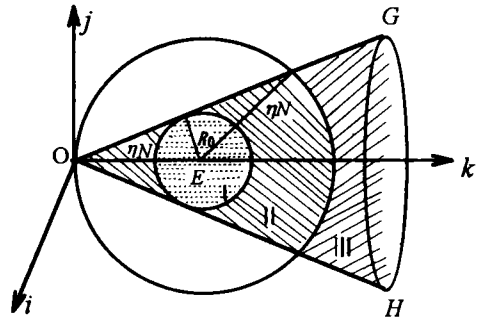


图 4 积分式(5)的几何示意图

Fig. 4 The geometric meaning of the equation (5)

$$R_0 = (\eta N / q_1) \sqrt{2q_1 - 1}$$

而其中角度分别表示为

$$\varphi = \omega + \arcsin(R_0/r), \quad \varphi = \arcsin(R_0/r) - \omega, \quad \omega = \arccos(1 - 1/q_1)$$

式(5)中三项积分的意义分别为:第一项积分表示点 F 落在图 4 所示的内切球 I 内的几率,第二项表示点 F 落在内切球 I 与圆锥 OGH 相交的用右斜线所表示的立体区域 II 内的几率,第三项表示点 F 落在位于大球外部的圆锥空间内的几率,即点 F 落在图 4 中左斜线所表示的立体区域 III 内的几率.表达式中 $f(r)$ 前面的加权系数表示了该距离 r 处落在圆锥 OGH 内(即阴影部分)体积元所占比例.类似于对式(2)的化简,可得

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1 - \int_{R_0}^{\eta N} \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2} \cos \omega} f(r) dr - \frac{1}{2} \int_{\eta N}^{\infty} (1 + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2} \cos \omega} - \frac{R_0}{r} \sin \omega) f(r) dr \\ &\approx 1 - B [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{R_0^2}{2\sigma_1^2})}] \\ &\approx 1 - B [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{\eta^2(2q_1 - 1)}{3\gamma q_1^2})}] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{其中 } B = (1 - \frac{1}{q_1}) \sqrt{1 - (\frac{R_0}{\eta N})^2} = (1 - \frac{1}{q_1})^2.$$

3 三维转动神经网络的存储容量分析

由上两节结果可得有效局域场能正确迭代的几率为 $\rho = \rho_0 \rho_1$, 则出错几率为

$$\begin{aligned} P &= 1 - \rho \approx \frac{2A}{\pi} [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{1}{2\gamma} \sin^2 \frac{\pi}{q_0})}] + B [1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{\eta^2(2q_1 - 1)}{3\gamma q_1^2})}] \\ &\approx \frac{A}{\pi} \exp(-\frac{1}{2\gamma} \sin^2 \frac{\pi}{q_0}) + \frac{B}{2} \exp(-\frac{\eta^2(2q_1 - 1)}{3\gamma q_1^2}) \end{aligned} \quad (7)$$

单个神经元能够正确迭代的条件为几率 $\rho \rightarrow 1$, 即出错几率 $P \rightarrow 0$. 通常假设输入图象 S^1 中的错误分量具有泊松分布^[2], 则输入图象 S^1 能够稳定存储的条件为

$$\exp(-NP) = \xi \rightarrow 1$$

设 $C = -\ln \xi$, 则 $P = C/N$, 其中 C, ξ 是常数, 即

$$\frac{C}{N} = \frac{A}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\gamma} \sin^2 \frac{\pi}{q_0}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)^2 \exp\left(\frac{\gamma^2(2q_1-1)}{3\gamma q_1^2}\right) \quad (8)$$

上式是关于存贮容量 $\gamma = M/N$ 的超越方程, 直接求解较难. 但由上式知, 存贮容量 γ 随神经元状态的增加而变小. 在三维转动神经网络中, 随神经元状态的增加, 图 2 中扇形 COD 的面积和图 4 中圆锥 OGH 的体积减小, 即能够收敛到对应正确迭代的区域的几率 ρ_0 和 ρ_1 减小, 因此有效局域场能正确迭代的几率 $P = \rho_0 \rho_1$ 减小, 导致网络的存储容量减小.

通过计算机模拟可以得出, 当神经元的旋转角态数 q_0 和方向角态数 q_1 都很大时, $B \approx 1$, 存贮容量 γ 与 N, q_0 和 q_1 在一阶近似下有下列比例关系

$$\gamma \propto \frac{1}{\ln N} \sin^2 \frac{\pi}{q_0} \frac{2q_1-1}{q_1^2} \quad (9)$$

由上式知, 随神经元个数 N 的增加, 虽然其最大存贮图象数 M 也随之增加, 但其增加速度随 N 的增大而变慢, 其具体关系式为

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1 \ln N_2}{N_2 \ln N_1} \quad (10)$$

也即表明存贮容量 γ 随 N 的增大而变小. 神经元的旋转角态数 q_0 和方向角态数 q_1 都很大, $\sin \pi/q_0 \approx \pi/q_0$, 存贮容量可进一步写为

$$\gamma \propto \frac{1}{\ln N} \frac{1}{q_0^2 q_1} = \frac{1}{\ln N} \frac{1}{Q q_0} \quad (11)$$

它说明当 q_0 和 q_1 很大时, 存储容量与神经元的旋转角态数的平方成反比, 和方向角态数成正比. 上式也表明该网络存在着一种较为奇特的性质: 网络对于同样的神经元态数 Q , 但由不同的旋转角态数 q_0 方向角态数 q_1 构成时, 网络的存储容量却是不一样的. 当 q_0 和 q_1 都很大时, 旋转角态数 q_0 小的网络的存储容量较大.

当神经元的方向角态数 $q_1 = 1$, 即时 $Q = q_0$, 网络实际上变为复相角神经网络模型^[3], 这时式(8)中 $B = 0$, 由式(8)可直接得存贮容量为

$$\gamma \propto \frac{1}{\ln N} \sin^2 \frac{\pi}{q_0} \quad (12)$$

该结果与文[4]中的结果相同.

当神经元态数较小, 即 $Q \rightarrow 2$ 时, 神经元的旋转角态数 q_0 和方向角态数 q_1 对存贮容量的影响由式(9)可知趋于 1, 得 $\gamma \propto 1/\ln N$, 这一结果与小 Q 态的 Hopfield 神经网络^[2,5]和四元数神经网络^[6]的存储容量结果接近.

4 结果与讨论

我们在文[1]中通过对能量函数的研究, 证明了三维转动神经网络模型当神经元个数远大于存贮图象数时, 存贮图象为能量空间中的极小值. 为分析存贮容量, 引入了绝热近似, 不考虑方向角与旋转角之间的相互影响, 在处理一类角度值时, 另一类角度值当作常数, 由其统计平均值代替. 本文在绝热近似基础上, 应用信噪比理论分析了网络的存贮容量. 当神经元的旋转角态数 q_0 和方向角态数 q_1 都很大时, 存储容量与神经元的旋转角态数的平方成反比, 和方向角态数成正比. 当神经元态数较小时, 结果趋于 Hopfield 神经网络的存储容量结果.

对神经网络存贮容量的分析, 通常是应用统计力学方法或信噪比理论分析. 相对于统计力

学分析结果,信噪比理论分析所得的结果比较小,通常认为这是因为信噪比理论的要求更苛刻.能否应用统计力学方法分析三维转动神经网络模型也是值得研究的一个问题.

参 考 文 献

- 1 陈振湘,帅建伟,郑金城等. 三维转动神经网络的研究(1)能量函数. 厦门大学学报(自然科学版),1996, 35 (3):343~347
- 2 Mceliece R J, Posner E C, Rodemich E R et al. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Tran Info Theory*, 1987, IT33: 461~482
- 3 Noest A J. Discrete-state phasor neural networks. *Phys. Rev. A*, 1988, 38: 2 196~2 199
- 4 郑金城,帅建伟,陈振湘等. 应用信噪比理论分析复相角神经网络的存贮容量. 量子电子学, 1996, 13 (4):372~377
- 5 Bruce A D, Gardner E J, Wallace D J, Dynamics and statistical mechanics of the Hofield model. *J. Phys A*, 1987, 20: 2 909~2 934
- 6 帅建伟,陈振湘,刘瑞堂等. 四元数神经网络模型: 彩色图象的识别. 计算机学报, 1995, 18: 372~379

A Study of the Three-dimensional Rotation Neural Network(2) Storage Capacity

Chen Zhenxiang Shuai Jianwei Zheng Jincheng Liu Ruitang
(Dept. of Phys.)

Abstract By using the theory of adiabatic approximation, the storage capacity of the three-dimensional rotation neural network is estimated by the signal-to-noise theory. The storage capacity is proportional inversely to the square of the rotation angles states and to the direction angles states of neurons when the neuron states is very big, and approaches to that of the Hopfield model when the neuron states is small.

Key words Neural network, Three-dimension rotation, Pattern recognition, Storage capacity