

# $2^n$ 元数神经网络模型: 存贮容量分析<sup>①</sup>

帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖

(物理学系)

**摘要** 在神经网络中引入了量子力学的 Dirac 符号表示, 采用算符形式统一描述了  $2^n$  元数神经网络模型, 从理论和数值模拟比较了各模型的存贮容量, 该模型可应用于灰度图象或彩色图象的识别.

**关键词** 神经网络,  $2^n$  元数, 图象识别

**中国图书分类号** O 411.3

对于人眼来说, 所大量识别的图象是多值灰度或彩色图象, 建立自动识别多值图象的人工神经网络, 无论从应用上还是从理论上, 都具有重要意义. 对于多值图象的识别, 有两大类的工作: 一类是直接利用二值 Hopfield 神经网络模型<sup>[1]</sup>, 如 Taketa 等把  $Q$  值象点用几个二值神经元来表示<sup>[2]</sup>. 由于该模型增加了网络的空间连线密度, Zhang 等在此基础上提出了一个减少连接的方案<sup>[3]</sup>. 但它却导致了突触连接权重的计算的复杂性. Yu 等提出了灰度级离散联想模型<sup>[4]</sup>. 该模型在迭代联想时可能会出现下列错误: 由这些独立的二值 Hopfield 神经网络稳定态构成的  $Q$  值图象并不一定是一个  $Q$  值记忆态图象.  $Q$  值灰度或彩色图象表示每一象点的取值具有  $Q$  种可能, 从物理上可理解为实空间的每一个象点还存在着一个内部空间, 该内部空间具有  $Q$  种状态. 因此与上述思路不同, 另一类工作是用一个多值神经元表示一个  $Q$  值象点的状态, 从而提出一些多值神经网络模型. Rieger 提出了  $Q$  态神经网络模型<sup>[5]</sup>, 每个神经元可取  $Q$  个整数值.  $Q$ -态 Potts 自旋玻璃神经网络模型<sup>[6]</sup> 也被大量的研究, 由于不同定义的哈密顿量, 该模型具有两种表述法: 一是定义神经元的  $Q$  个单位矢量在  $R^{Q-1}$  空间中指向  $Q$  个方向, 构成超四面体结构<sup>[7]</sup>, 一是用复平面单位圆上的等距的  $Q$  个离散点表示  $Q$  值象点<sup>[8]</sup>. 文<sup>[9]</sup> 把四元数<sup>[10]</sup> 引入神经网络中, 建立了四元数神经网络模型, 该模型可应用于 16 色彩色或 16 级灰度图象识别中. 帅建伟等<sup>②</sup> 把八元数引入神经网络中, 建立了八元数神经网络模型, 该模型可应用于高精度的 256 色彩色或灰度图象识别中.

本文进一步在神经网络中引入  $2^n$  元数, 从而建立了  $2^n$  元数神经网络模型, 并在神经网络中引入了量子力学的 Dirac 符号表示, 采用算符形式统一描述了  $2^n$  元数神经网络模型, 运用信噪比理论和数值模拟分析了该模型的存贮容量.

## 1 Hopfield 神经网络的 Dirac 符号表示

对  $N$  个神经元, 存储  $M$  个随机记忆模式  $S^m$  的双极 Hopfield 神经网络<sup>[3]</sup>, 若我们把图象  $S$  当

① 本文 1994-07-14 收到; 国家自然科学基金重点资助项目

② 八元数神经网络模型: 256 色图象的识别. 光学学报, 1995(待发表)

作一个态矢,  $S^\mu$  为基矢, 连接矩阵为  $J$ ,  $JS$  则表示为矩阵作用于态矢上. 这种理解使我们联想到量子力学中的矩阵表示, 它启发我们在神经网络中也引入抽象的 Dirac 符号表示, 即态矢  $S = |s\rangle$ , 基矢  $S^\mu = |\mu\rangle$ , 态矢的模为  $\langle s|s\rangle = N$ . 由于各基矢为随机存储模式, 具有伪正交性, 故对  $v \neq \mu$  有:  $\langle \mu|v\rangle = 0$ , 而其伪正交性的均方误差则表示为投影算符  $|v\rangle\langle v|$  对基矢  $|\mu\rangle$  的平均值:

$$\langle \mu|v\rangle\langle v|\mu\rangle = \langle \mu|v\rangle^2 = \sqrt{N} \quad (1)$$

连接矩阵则为总投影算符, 也即各基矢的外积和

$$J = \sum_{\mu=1}^M |\mu\rangle\langle \mu| \quad (2)$$

当用阶跃算符  $\Theta$  表示阈值函数  $\Theta\{\}$  时, 网络动力学方程的算符表示写为

$$|t+1\rangle = \Theta J |t\rangle \quad (3)$$

为考察存储模式如  $S^1$  的稳定性, 令  $|t\rangle = S^1 = |1\rangle$ , 代入上式得

$$\begin{aligned} J|1\rangle &= \left( \sum_{\mu=1}^M |\mu\rangle\langle \mu| \right) |1\rangle = |1\rangle\langle 1|1\rangle + \sum_{\mu \neq 1}^M |\mu\rangle\langle \mu|1\rangle \\ &= N|1\rangle + \sum_{\mu \neq 1}^M \langle \mu|1\rangle |\mu\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

这里实际求得的是信-噪展开式, 式中右边第一项为信号项,  $N$  表示向态  $|1\rangle$  迭代的可能性大小, 即向  $|1\rangle$  迭代的权重; 第二项为噪声项,  $\langle \mu|1\rangle$  表示向  $|\mu\rangle$  迭代的权重, 由上知该权重平均值为 0, 均方差为  $\sqrt{N}$ . 故总噪声均方差为  $\sqrt{N(M-1)}$ , 信噪比为  $N/\sqrt{N(M-1)} = \sqrt{N/(M-1)}$ .  $N \gg M$  时, 信噪比较大, 当阶跃算符  $\Theta$  作用其上时, 网络向基矢  $|1\rangle$  收敛, 于是有  $|1\rangle = \Theta J |1\rangle$ . 而当输入一个与存储样本  $|1\rangle$  相差不大的图象时, 上述关系仍近似成立, 故经一次或数次迭代, 网络收敛于  $|1\rangle$ , 即存储样本为该动力学系统的稳定吸引子.

通常, 在 Hopfield 网络中, 不考虑神经元的自反馈, 即连接矩阵对角元  $J_{mm} = 0$ . 它对动力学方程的影响表现为信号项的权重是  $N-1$ , 噪声项的均方差为  $\sqrt{(N-1)(M-1)}$ . 于是信噪比为  $\sqrt{(N-1)/(M-1)}$ . 当  $N \rightarrow \infty$  且  $N \gg M$  时, 信噪比与考虑反馈时的情况只相差  $N^{-1} \rightarrow 0$  的量级, 所以结论与上面基本一样.

## 2 $2^n$ 元数神经网络模型

在数学中存在着  $2^n$  元数, 当  $n=0$  时和  $n=1$  时分别得到实数  $R$  和复数  $C$ ; 而当  $n=2, 3, 4$  时分别得四元数(Hamilton 数), 八元数(Cayley 数) 以及 16 元数(Clifford 数)<sup>[10]</sup>. 把  $2^n$  元数引入神经网络中便可建立  $2^n$  元数神经网络模型. 对于  $Q$  值图象的描述, 其态矢  $|s\rangle$  是一个  $2^n$  元数, 具有  $Q=2^n$  个分量, 表示对每个象点的内部空间状态的描述. 这样我们把一维 Hopfield 模型推广为  $Q$  维 Hopfield 模型: 当  $n=0$ , 即为 Hopfield 模型<sup>[1]</sup>; 当  $n=1$ , 为复数型; 当  $n=2$ , 为四元数型<sup>[9]</sup>; 当  $n=3$ , 为八元数型<sup>[5]</sup> 等.

复数神经元具有四种状态:  $(\pm 1 \pm i)$ , 网络存储模式即基矢为  $|\mu\rangle$ , 连接矩阵表示为总投影算符

$$J = \sum_{\mu=1}^M |\mu\rangle\langle \mu| \quad (5)$$

动力学方程为

$$|t+1\rangle = \Theta J |t\rangle \quad (6)$$

从量子力学来看,若左矢  $|\mu\rangle$  为正空间基矢,则右矢  $\langle\mu|$  为共轭空间基矢. 对于实数空间,正空间与共轭空间是同一个空间;而对于复空间来讲,则是两个不同的空间. 由于采用了量子力学的 Dirac 符号表述,我们在连接矩阵算符中自然地引入了复数的共轭空间,具体矩阵表示为

$$J_{mn} = \sum_{\mu=1}^M S_m^{\mu} (S_n^{\mu})^* \quad (7)$$

由于基矢分为实部和虚部,模  $\langle\mu|\mu\rangle = 2N$ , 对随机存储基矢,其伪正交性的均方误差  $\langle\mu|v\rangle\langle v|\mu\rangle = \sqrt{2N}$ . 故由信-噪展开式知:对内部空间的每一个态中的信号项的权重为  $2N$ ,总噪声项权重的平均值为 0. 均方差为  $\sqrt{4N(M-1)} = 2\sqrt{N(M-1)}$ ,信噪比为  $\sqrt{N/(M-1)}$ . 若不考虑神经元的自反馈,信噪比为  $\sqrt{(N-1)/(M-1)}$ .

令四元数系  $Q(R) = \{\alpha: \alpha = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in R\}$ , 其中  $i, j, k$  表示三个虚基矢,四元数不满足乘法交换律,但满足结合律:  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ . 对任一四元数  $\alpha = a + bi + cj + dk$ , 定义其共轭  $\alpha^* = a - bi - cj - dk$ , 有  $\alpha\alpha^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . 把四元数引入神经网络中,设每个神经元的状态为  $(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$ , 也即对于四元神经网络,网络基矢  $|\mu\rangle$  中的每个分量具有一个实部和三个虚部. 连接矩阵和动力学方程仍具有(5)(6)形式,基矢模  $\langle\mu|\mu\rangle = 4N$ ,伪正交性的均方误差等于  $\sqrt{4N}$ , 由  $(|\mu\rangle\langle\mu|)|v\rangle = |\mu\rangle(\langle\mu|v\rangle)$ , 则得对基矢  $|\mu\rangle$  中每个分量的实部或虚部信噪比为  $\sqrt{N/(M-1)}$ . 不考虑自反馈时的信噪比为  $\sqrt{(N-1)/(M-1)}$ .

将复数的域从实数  $R$  推广到四元数  $H$ , 可得四元复数,也称为八元数  $A$

$$A = \{\Pi: \Pi = \alpha + \beta e, \alpha, \beta \in H\}$$

$$= \{\Pi: \Pi = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k + a_4e + a_5ie + a_6je + a_7ke, a_i \in R\}$$

其中超复数虚部单元  $e$  与四元数有关系  $e\alpha = \alpha^*e$ . 对任一八元数  $\Pi = \alpha + \beta e$ , 定义其共轭  $\Pi^* = \alpha^* - \beta e$ , 有  $\Pi\Pi^* = \alpha^2 + \beta^2$ . 由此可同样建立八元数神经网络,神经元的状态为

$$(\pm 1 \pm i \pm j \pm k \pm e \pm ie \pm je \pm ke)$$

连接矩阵和动力学方程仍具有(5)(6)形式,基矢模  $\langle\mu|\mu\rangle = 8N$ . 由于八元数的乘法既不可换也不能结合,所以  $(|\mu\rangle\langle\mu|)|v\rangle \neq |\mu\rangle(\langle\mu|v\rangle)$ , 上述由 Dirac 算符表示的信噪比分析已不适用,但经矩阵运算分析可知对基矢  $|\mu\rangle$  中每个分量的实虚部信噪比同样为  $\sqrt{N/(M-1)}$ . 若不考虑神经元的自反馈,信噪比为  $\sqrt{(N-1)/(M-1)}$ .

### 3 $2^n$ 元神经网络模型存贮容量分析

信噪比的大小基本决定了网络的存贮容量和联想能力,上述四个模型的信噪比都相等,所以  $2^n$  元神经网络模型的存贮容量和联想能力与 Hopfield 模型基本相同. 当  $N, M$  远大于 1 时,  $SNR \approx \sqrt{1/\alpha}$ , 这里  $\alpha = M/N$  为存贮容量. 下面我们应用信噪比理论具体计算该模型的存贮容量  $\alpha$ .

由于存贮模式的独立随机性,得噪声项具有正态分布. 不失一般性,令  $S_m^{vRe} = 1$ . 要  $S_m^{vRe}$  也为 1, 也要求信号项与噪声项的和不小于零,其几率  $P$  为

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{1/\alpha}}^{\infty} \exp[-x^2/2] dx \quad (8)$$

所以  $S'$  与  $S''$  相比, 迭代错误的分量平均数为

$$E(\alpha) = 2^n N (1 - P(\alpha)) = \frac{2^n N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{1/\alpha}}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx \quad (9)$$

若  $S'$  中的错误分量具有泊松分布, 则迭代正确的几率, 也即  $S''$  为稳定吸引子的几率为

$$\rho = \exp(-E(\alpha))$$

设  $\rho$  为很趋近于 1 的一个常数, 对  $0 < \alpha \ll 1$  时求上式的逆, 可得

$$\alpha \propto \frac{1}{2 \ln 2^n N} \approx \frac{1}{2 \ln N} \quad (10)$$

该结论与  $n$  无关, 也即对不同的  $n$  值, 其存贮容量与 Bruce 和 McEliece 对 Hopfield 模型的分析结果相同<sup>[11,12]</sup>.

以下用计算机数值模拟说明上述离散  $2^n$  元数神经网络模型的存贮容量. 设网络中有  $N$  个神经元, 多次随机产生  $M$  个存贮图象  $|\mu\rangle$ , 把存贮图象作为输入, 统计出对不同的  $N$ , 其正确回忆率大于某一临界值  $\beta$  时的最大  $M$ , 则得临界值  $\beta$  下的  $M_{max} - N$  统计曲线. 本文取  $\beta = 90\%$ , 图一画出了当  $N \leq 220$  时的  $2^n$  元数 ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) 神经网络  $M_{max} - N$  统计曲线. 由图知上述四模型的最大存贮容量曲线具有相似的形状, 所以四种网络的存贮容量比与  $n$  的取值无关, 但存贮容量随  $n$  增大略有降低.

#### 4 $2^n$ 元数神经网络模型的应用

我们认为复数神经网络模型可应用于具有矢量点特征所组成的图象, 如二维运动图像或具有方向性图象的识别中, 也可应用于四值灰度或彩色图象的识别中.

四元数神经网络模型可应用于 16 色彩色或十六值灰度图象的识别中, 将四元数的三个虚部和彩色显示屏上的三基色: 红, 兰, 绿对应起来, 而四元数中的实数部分则表示亮度的两个级别. 这样它可以存贮由这三色复合成的十六种色彩. 由三色构成十六种色彩来近似表示一幅彩色图象, 这在计算机的 EGA/VGA 等 16 色图形显示中已得到了大量的应用. 在计算机中, 16 色由四位 0.1 码表示, 把这四位 0, 1 码与四元数的负正单元对应起来, 可得它的彩色表示. 如在我们的计算机模拟中, 该网络稳定存贮五种不同颜色的  $7 \times 10$  的点阵字母 A, 若输入一些稍有变形的字母 A, 包括色彩改变或出现多余色彩斑点等, 该模型均能正确识别.

八元数神经网络模型可应用于 256 色彩色或 256 值灰度图象的高分辨率识别中. 对于 256 色彩色图象的识别, 其编码方式可与计算机中的 8 位 256 色编码方式相同.

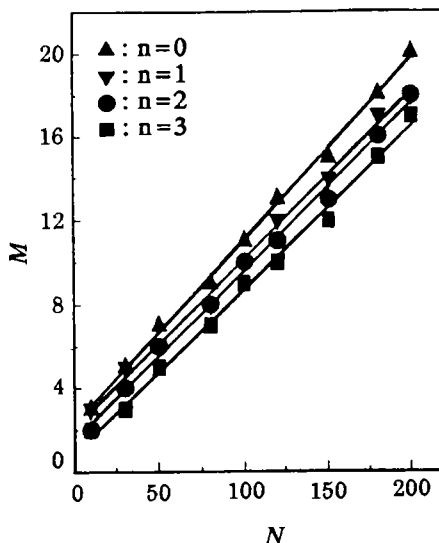


图 1 临界值  $\beta = 90\%$ ,  $N = 10, 20, \dots, 60$  时的  $M_{max} - N$  存贮容量统计曲线  
其中  $\blacktriangle$ : Hopfield 模型  $\blacktriangledown$ : 复数模型  
 $\bullet$ : 四元数模型  $\blacksquare$ : 八元数模型  
Fig. 1 The statistical curves  $M-N$  under the correct retrieval ratios  $CRR = 90\%$

## 5 结果与讨论

建立自动识别多值图象的人工神经网络,无论是应用还是理论,都具有重要意义.  $2^n$  元数引入神经网络中,用一个高维数表示一个象点的状态,并在神经网络中引入了量子力学的 Dirac 符号表示,这样自然地在模型中引入了  $2^n$  元数的共轭空间的概念,运用算符形式统一描述了  $2^n$  元数神经网络模型,并计算机数值模拟比较了各模型的存贮容量. 神经网络模型从数的推广上,由实数复数的四元数,八元数等,复数神经网络模型能识别 4 值图象,四元数神经网络模型能识别 16 值图象,八元数神经网络模型可识别 256 值高分辨率图象.

应该指出,在  $2^n$  元数神经网络的多值图象识别应用中,对  $2^n$  元数的利用仅是把神经元和每一个状态与多值象点的不同状态对应起来,而多元数间的运算关系与象素间的变换关系并不存在着物理意义上的一一对应特征.

从几何上来看,二值 Hopfield 模型把一维输入空间分为正负两半映射到输出空间的两个点上;  $2^n$  元数引入到神经网络中,建立了  $2^n$  元数离散神经网络模型,也即表示在  $Q = 2^n$  维空间中,在每一轴上取双极离散值:正负单位元,这样把输入空间扩展为  $2^n$  维. 其映射实质是:以坐标轴及各 0 值平面为界,把  $Q$  维输入空间均分为  $2^Q$  个象限,则各象限对应于输出空间的一个点. 这样网络对噪声的敏感性与二值 Hopfield 模型相当,因此该类模型的存贮容量和容错能力与 Hopfield 模型基本相同. 由此我们可知,该类模型同样具有 Hofield 模型的各种不足,如存贮容量较低,对图象是按象点记忆,丢掉了图形的一个重要特征参数:拓扑结构,对相似图象的不可区分等.

在引入高维数系时,实数的一些良好性质会逐渐丧失. 如实数是有序的,而扩张到复数  $C$  时,复数已不可能比较大小了;四元数间乘法是不可交换的,八元数乘法既不可换也不能结合. 所以一个值得研究的问题是:Hopfield 模型的各种理论分析,改进方案中,有哪些是能在  $2^n$  元数神经网络模型中推广适用的?它们能推广到哪一阶的高维数模型中?如可进一步建立高阶连接复数神经网络模型,以提高网络的存贮容量;而如能量概念将如何推广定义,以使记忆态为网络的能量极小点,也是值得考虑的.

## 参 考 文 献

- 1 Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl Acad. Sci. U. S. A.*, 1982, 79: 2 554~2 558
- 2 Taketa M et al. Neural networks for computation: number representations and programming complexity. *Appl. Opt.*, 1986, 25: 3 033~3 046
- 3 Zhang W et al. Hopfield model with multistate neurons and its optoelectronic implementation. *Appl. Opt.*, 1991, 30: 195~200
- 4 Yu F T S et al. Gray-level discrete associative memory. *Appl. Opt.*, 1993, 32: 1 322~1 329
- 5 Rieger H. Storing an extensive number of grey-toned patterns in a neural network using multistate neurons. *J. Phys. A*, 1990, 23: L 1 273~L1 279
- 6 Enter A C D V et al. Mean-field theory of random-site q-state Potts models. *J. Phys. A*, 1988, 21: 791~801
- 7 Kanter I. Potts-glass models of neural networks. *Phys. Rev. A*, 1988, 37: 2 739~2 742
- 8 Noest A J. Discrete-state phasor neural networks. *Phys. Rev. A*, 1988, 38: 2 196~2 199

- 9 Shuai J W et al. The Hamilton neural network model; to recognize color patterns. *The Second International Conference on Opto-Electronics Science and Engineering'94*. Beijing; SPIE, 2321( Ⅱ ): 26~28
- 10 Condon E U et al. *Handbook of Physics*. (Second Edition), New York: McGraw-Hill, 1967: 1-22
- 11 Bruce A D et al. Dynamics and statistical mechanics of the Hopfield model. *J. Phys. A*, 1987, 20: 2 909~2 934
- 12 Mceliece R J et al. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Tran. Info. Theory*, 1987, IT-33(4): 461~482

## The $2^n$ -element Number Neural Network Model: the Analysis of the Storage Capacity

Shuai Jianwei   Chen Zhenxiang   Liu Ruitang   Wu Boxi

(Dept. of Phys. )

**Abstract**   The Dirac symbol is introduced to express the Hopfield neural network model and the  $2^n$ -element number neural network model is expressed unifiedly. The storage capacity of the model is analyzed by signal-to-noise theory and the numerical simulation. The present model can be applied to recognize the multi-state grey or color patterns.

**Key words**   Neural network,  $2^n$ -element number, Pattern recognition