第33卷 第6期
1994年11月

厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)

Vol. 33 No. 6
Nov. 1994

·研究简报·

对二次函数切割的分形研究①

帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖

(物 理 学 系)

近十年来,分形[1]已成为一个世界性的研究热点.正如我们对简单的函数 $y=\mu x(1-x)$ 进行分析,可得出复杂的混沌现象来一样;通过对某一区间$[a,b]$上的任一曲线进行一系列的分割也可以得出复杂的分形图象,如对二次函数 $y=x^2$ 的分析可以得出典型的Cantor分形图象[2].本文在文献[2]的基础上,进一步深入详细地分析了对二次函数 $y=Ax^2+Bx+C$ 切割所蕴含的分形规律.

1 数学准备

我们把文献[2]的定理(2)推广得如下定理:

定理 假定 f 是在$[a,b]$上的连续函数,则存在一系列的 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots(t_n\in[a,b]$,$n$ 为大于1的实数),使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(t_n+(b-a)/n)-f(t_n)}{(b-a)/n} \tag{1}$$

对上述定理的几何理解如图1,$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$实际上是过点$(a,f,(a))$、$(b,f(b))$的直线 L 和斜率,作直线 L 的平行线 L_n,与 $f(x)$ 有两个交点,两交点在 x 轴上有:$t_n'-t_n=(b-a)/n$,$n>1$,表示在 x 轴上两点的长度为原长$(b-a)$的 n 分之一倍.当平行线与 $f(x)$ 相切时,则得微分中值定理所求得的过$(x_0,f(x_0))$的切线 L_∞.

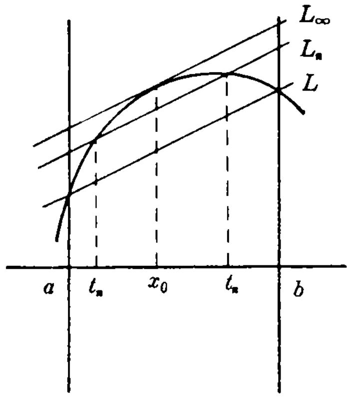

图1 推广的中值定理的几何理解

Fig. 1 The geomatric representation of the generaliced differential mean value theorem

这样对在$[a,b]$上连续,且在(a,b)上只有一个极值的函数 f,可进行如下的自相似操作过程:对某一固定的 n,直线 L_n 把曲线切为三段,去掉中间一段曲线$(t_n,t_n+(b-a)/n)$;对余下的两段曲线再进行同样的切割,这样无穷分割下去,则得函数 f 在 x、y 轴上的投影分形集合.下面我们对二次函数的这一自相似切割以及在 x 轴上的投影进行分析.

2 二次曲线切割的分形研究

对任意的二次函数:$y=Ax^2+Bx+C$,利用公式(1),经过简单的计算可得

① 本文1994-03-08收到

$$t_n=\frac{1}{2}\left[(b+a)-\frac{(b-a)}{n}\right] \tag{2}$$

由前面分析知：$(b-a)/n$ 表示在 x 轴上所切割的长度，$1/n$ 即是所切割的倍数，而所切割的区间为$\{(\frac{1}{2}[(b+a)-\frac{b-a}{n}],\frac{1}{2}[(b+a)+\frac{b-a}{n}]\}$，恰好是区间$(a,b)$的中间段. 因此这一自相似操作过程为：对 x 轴的初始棒移去中间 $1/n$ 部分，剩余下两侧对称较短的棒，长度为原棒的$(1-1/n)/2$，再对每根短棒实施同样的分割直至无穷. 这一自相似操作过程所得到的正好是 Cantor 棒，该结构的分维值为

$$D=\frac{\ln 2}{\ln\left[\frac{2}{1-1/n}\right]} \tag{3}$$

当 $n=3$ 时则得熟悉的三等分的 Cantor 棒，其分维值 $D=\ln 2/\ln 3$；考虑极端情况 $n=1$ 时，第一次就截去了(a,b)区间，只剩 a，b 两点，自然其分维值为 0；当 $n\to\infty$时，平行线无限靠近切线 $f(x_0)$，仅切去 x_0 点处的 $\mathrm{d}x\to 0$ 长的微开区间，这种无限小分割所得到的集合为一条处处有点而又处处不连续的‘直线’，其分维值 $D\to 1$.

若我们对二次函数轮流用 n_1、n_2(n_1、$n_2>1$)进行循环切割，对 x 轴上的投影，在 n_1 分割中截去了原棒的 $1/n_1$，在 n_2 分割中截去原棒的 $1/n_2$. 这种循环分割得到了一种推广的 Cantor 棒，该结构的分维值为

$$D=\frac{\ln 2}{\ln\left\{\frac{2}{\left[(1-\frac{1}{n_1})(1-\frac{1}{n_2})\right]^{1/2}}\right\}} \tag{4}$$

同理可进行 m 次循环分割 $n_1,n_2,\cdots,n_m$，这样推广所得的 Cantor 棒的分维值为

$$D=\frac{\ln 2}{\ln\left\{\frac{2}{\left[\prod_{i=1}^{m}(1-1/n_i)\right]^{1/m}}\right\}}\qquad(\text{其中 } n_i>1) \tag{5}$$

由式(2)知，t_n 与二次函数的系数 A、B、C 无关，从而得到对二次函数切割的另一性质：在同一区内用固定 n 切割任意二次曲线，在 x 轴上 投影都一样，且位于该区间的中央. 这一性质也是很让人惊讶的，因为在我们直觉中会认为存在无数条二次曲线过固定的两点(a,y_a)，(b,y_b)，作该两点边线的平行线，切这些二次曲线为三截，当中间一段在 x 轴的投影长度为$(b-a)/n$ 时，该投影在 x 轴上应具有一定的分布，而实际上投影总是重合在同一区间$(\frac{1}{2}[(b+a)-\frac{b-a}{n}],\frac{1}{2}[(b+a)+\frac{b-a}{n}])$. 所以在同一区间用固定 n 对所有二次曲线切割，得到一个带状 Cantor 分形图. 不难看出，这一结果是由下述事实造成的：过两固定点虽有无数条二次曲线，但实际上只有一个可调参数，所以对二次曲线的几何形式具有很强的约束. 对高次函数，由于可调参数增加了，曲线变得更加复杂，导致切割线在 x 轴的投影随系数而变的结果. 图 2 和图 3 画出了 $n=3$ 时在[0,1]区间的一些二次和高次曲线的切割情况.

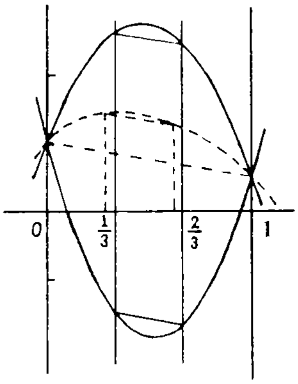

图 2　当 n＝3 时在[0,1]区间过相同两点的曲线的切割情况
实线表示二次函数,虚线为高次函数
Fig. 2　The cutting analysis of the curves that pass the same two spots on interval [0,1], where n＝3

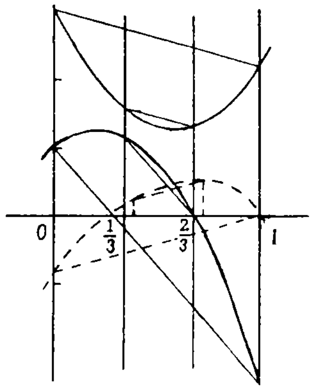

图 3　当 n＝3 时在[0,1]区间过不同两点曲线的切割情况
实线表示二次函数,虚线为高次函数
Fig. 3　The cutting analysis of the curves that pass the different two spots on interval [0,1], where n＝3

参 考 文 献

1　Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman, 1982
2　DeVito C L et al. Fractal sets associated with functions: The spectral lines of hydrogen. *Physical Review A*, 1988, 38: 6 363～6 364

A Fractal Investigation of the Quadratic Function Cutting

Shuai Jianwei　Chen Zhenxiang
Liu Ruitang　Wu Boxi
(*Dept. of Phys.*)

Abstract　Basing on the generalized differential mean value theorem, the author discuss in detail the properties of the Cantor set that is projected on the x-axis about the quadratic curve $f(x)=Ax^2+Bx+C$.

Key words　The quadratic function, Fractal, Cantor set