

Hopfield 神经网络的存贮容量<sup>①②</sup>

郑金成(硕士) 帅建伟 王仁智 陈振湘

(厦门大学, 厦门 361005)

**摘 要:** 我们把理论推导与数值模拟相结合, 得出了一个较好的误差函数近似解析式。应用该解析式分析了 Hopfield 神经网络的绝对存贮容量, 得到了一更严格的结果。

**关键词:** 神经网络 存贮容量 误差函数

**中图法分类号:** TP387

## Storage capacity of the Hopfield neural network

ZHENG Jincheng SHUAI Jianwei

WANG Renzhi CHEN Zhenxiang

(Xiamen University, Xiamen 361005, CHN)

**Abstract:** Combining theoretical analysis with the computer numerical simulation, we deduced an approximate formula of error function. The absolute storage capacity of the Hopfield neural network is analysed by means of this approximate formula and the more strict results are obtained.

**Keywords:** Neural Network, Storage Capacity, Error Function

## 1 引言

神经网络能够正确记忆的样本矢量数与其神经元数目的比称为网络的存贮容量, 它是神经网络的一个重要参数。对 Hopfield 神经网络<sup>[1]</sup>的存贮容量的研究, 统计物理方法分析<sup>[2]</sup>的结果约为 0.138。研究表明, 当网络的存贮容量为 0.138 时, 各存贮样本位于

或临近于网络的稳定平衡点上, 但该存贮样本并非一定为稳定吸引子。在某些场合, 往往需要网络对存贮样本进行完全精确的回忆, 即要求网络的存贮样本一定为系统的稳定吸引子, 对此通常应用信噪比理论分析方法求解网络的绝对存贮容量<sup>[3-5]</sup>。在计算中常要用正态分布函数的近似解析式, 而采用不同的近似解析式往往会导致存贮容量的

①1996-04-22 收稿; 1996-06-28 定稿

②国家自然科学基金和福建省科学基金资助课题

计算结果的不同。文献[3、4]得到离散 Hopfield 神经网络绝对存储容量为  $1/(2\ln N)$ , 其中  $N$  为神经元个数。文献[5]的结果为  $1/(2\ln N - \ln \ln N)$ 。本文进一步对正态分布函数的近似解析式进行了分析, 得出了一个较好的误差函数近似解析式。应用该解析式分析了 Hopfield 神经网络的存储容量, 得到了一个更严格的结果。

## 2 误差函数的近似解析式

正态分布是比较基本和重要的概率分布。在实际中遇到的许多随机变量都服从或近似服从正态分布。它还是许多概率分布的极限分布。正态分布函数的积分值一般通过查表可得, 也可通过级数逼近进行数值求解。但在许多场合, 简单的近似解析式往往有利于问题的分析求解。本章我们把理论推导与数值模拟相结合, 得出了误差函数的一个较好的近似解析式。标准正态分布函数为

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad (-\infty < r < +\infty) \quad (1)$$

令

$$I(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^r \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (2)$$

则  $\Phi(z) = 0.5 + I(z)$ , 把积分式(2)变为二元积分式

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \int_0^r \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^r \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

积分区域为图1所示的边长为  $r$  的正方形(OACB), 式(3)用平面极坐标表示为

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{r'(Q,r)} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\theta \quad (4)$$

从图1可知, 当积分区域为图中以  $r$  为半径

的扇形(OAB)时, 积分上限固定取为  $r' \cong r$ , 积分值为

$$\begin{aligned} I_{\min}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} [1 - \exp(-\frac{r^2}{2})] \end{aligned} \quad (5)$$

当积分区域为图中  $R$  为半径的扇形(ODE)时, 积分上限:  $r' \cong R = \sqrt{2}r$ , 积分为

$$\begin{aligned} I_{\max}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}r} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} [1 - \exp(-r^2)] \end{aligned} \quad (6)$$

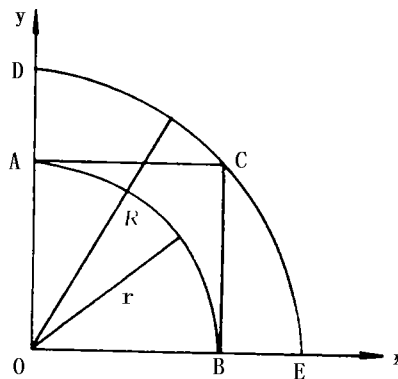


图1 积分式(4)、(5)、(6)的几何示意图

Fig.1 Sketch of equations (4), (5) and (6)

而式(5)中  $x, y$  取值范围为 OACB 正方形, 积分上限在关系式  $r \leq r' \leq R$ 。其面积值介于上述两个扇形面积之间, 即  $I_{\min} < I < I_{\max}$ , 故可令

$$I = \frac{1}{2} [1 - \exp(-\frac{\lambda(r)r^2}{2})]^{1/2} \quad (7)$$

即

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [1 - \exp(-\frac{\lambda(r)r^2}{2})]^{1/2} \quad (8)$$

其中,  $1 \leq \lambda(r) \leq 2$ 。通过计算机数值模拟, 我们求得其一阶近似:  $\lambda(r) \approx 1.3$ , 则标准正态分布函数的近似表达式为

$$\Phi_{zm}(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [1 - \exp(-0.65r^2)]^{1/2} \quad (9)$$

我们把正态分布函数的不同<sup>[3,5]</sup>与本文的结果进行比较,在文[3]中,

$$\Phi_{[3]}(r) = 1 - \exp(-0.5r^2) \quad (10)$$

而文[5]中则采用如下近似

$$\Phi_{[5]}(r) = 1 - \frac{1}{r} \exp(-0.5r^2) \quad (11)$$

三种近似解析式( $\Phi_{zm}$ ,  $\Phi_{[3]}$ ,  $\Phi_{[5]}$ )的曲线与函数精确值( $\Phi$ )的比较如图 2 所示。由图 2 可知,近似式(10)或(11)与函数精确值的误差较大,而本文所得的解析式曲线与误差函数精确值曲线基本重合,说明  $\Phi_{zm}(r)$  的近似程度较好,是一个较好的近似表达式。从计算数值模拟可知,该解析式与精确值的相对误差最大值为 0.05%。

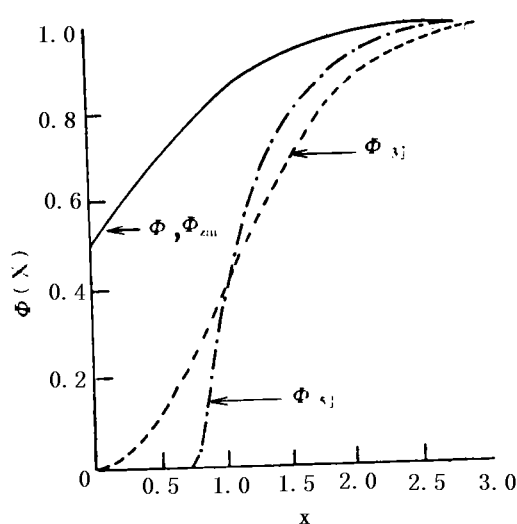


图 2 三种近似解析式( $\Phi_{zm}$ ,  $\Phi_{[3]}$ ,  $\Phi_{[5]}$ )与精确值( $\Phi$ )的曲线图比较

Fig.2 Comparison of the curves of three approximate formulas ( $\Phi_{zm}$ ,  $\Phi_{[3]}$ ,  $\Phi_{[5]}$ ) with that of accurate formula ( $\Phi$ )

### 3 神经网络的存贮容量

本节我们应用近似表达式(9),分析离散 Hopfield 神经网络的<sup>[1]</sup>的绝对存贮容量。对  $N$  个神经元,存储  $M$  个随机记忆模式( $S^{\mu}$ )的双极型的 Hopfield 神经网络,它的连接矩

阵为:  $J_{ij} = \sum_{\mu} S_i^{\mu} S_j^{\mu}$ , 其中  $i, j = 1, 2, \dots, N$ 。对于任一输入态,网络的动力学方程为:  $S_i(t+1) = \Theta(\sum_j J_{ij} S_j(t))$ , 其中,  $\Theta$  为符号函数。当  $N$  和  $M$  都很大时,可应用信噪比理论求得每个神经元能正确迭代存贮图像的几率为<sup>[3]</sup>

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{1/\alpha}}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt \quad (12)$$

由近似解析式(9),式(12)则为

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [1 - \exp(-0.65\lambda^2)]^{1/2} \quad (13)$$

其中,  $\lambda = \sqrt{1/\alpha}$ 。

则出错的几率为

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - P \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [1 - \exp(-0.65\lambda^2)]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

单个神经元能够迭代的条件为  $\rho \rightarrow 0$ , 假定神经元的错误迭代满足泊松分布<sup>[3]</sup>, 则  $M$  个存贮图像能稳定存贮的条件为:  $\exp(-N\rho) = \beta \rightarrow 1$ , 设  $C = -\ln\beta$ , 则

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [1 - \exp(-0.65\lambda^2)]^{1/2} \\ &= C/N \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $C, \beta$  是常数, 式(15)可简化为

$$0.65\lambda^2 = -\ln\left(\frac{4C}{N} - \frac{4C^2}{N^2}\right) \quad (16)$$

得

$$\alpha = \frac{0.65}{\ln N - \ln[4C(1 - C/N)]} \quad (17)$$

对于一定的正确率,  $C$  是小于 1 的常数, 而且  $N$  比较大,  $C$  和  $4C^2/N^2$  可以忽略, 故可得存贮容量的近似值为

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{0.65}{\ln N} \\ &= \frac{1.3}{2\ln N} \end{aligned} \quad (18)$$

该结果较文献[3、5]的结果  $[1/(2\ln N)]$  偏大一些。可以看出, 不同的正态分布函数近似解析式, 导致了存贮容量计算的结果不同。文献[3、4]得到离散 Hopfield 神经网络存贮

