

三维转动神经网络的研究^①

(1) 能量函数

陈振湘 帅建伟 郑金城 刘瑞堂

(物理学系)

摘要 简述了三维转动神经网络模型,通过对能量函数的研究,证明了网络当神经元个数远大于存贮图象数时,存贮图象为能量空间中的极小值.引入了绝热近似,有效局域场能正确迭代的几率,等于方向角和旋转角分别能正确迭代的几率的乘积.

关键词 神经网络, 三维转动, 存贮容量

中国图书分类号 O 411.3

关于图象识别的神经网络模型的研究是较活跃的并很有意义的领域,对于多值图象识别的研究,国内外学者做了大量的工作^[1~8].从转动的角度来看,双极型 Hopfield 模型^[1]是一维转动模型,复相角模型^[2]是二维转动模型.本文讨论了三维转动神经网络模型^[6]的能量函数和存贮容量,三维转动模型是双极 Hopfield 模型^[1]、四态复数神经网络^[7]、复相角神经网络^[2]、十六态四元数神经网络^[8]等模型的推广.该模型适合于三基彩色图象的编码识别:其转动轴的三个方向角分别对应于三基色,而绕轴的转动角对应于色饱和度.这样三维转动角神经元的四个角度与三基彩色图象的编码具有直接而又简单的——对应关系.

1 三维转动神经网络模型

在三维空间中刚体绕方向余弦为 $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$ 的转动轴 \vec{n} ,旋转角为 θ_0 的转动 $R(\vec{n}, \theta_0)$,可以用

$$R(\vec{n}, \theta_0) = R(\vec{i}\cos\theta_1 + \vec{j}\cos\theta_2 + \vec{k}\cos\theta_3, \theta_0) = \cos\theta_0 + \sin\theta_0(\vec{i}\cos\theta_1 + \vec{j}\cos\theta_2 + \vec{k}\cos\theta_3) \quad (1)$$

表示,这里 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示三坐标轴基矢,令旋转角 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$,转动轴 \vec{n} 在 \vec{k} 轴的正半空间,即方向角 $0 \leq \theta_1, \theta_2 < \pi, -\pi/2 \leq \theta_3 < \pi/2$.这里要注意的是两个不同顺序的分转动所得到的合成转动是不同的.对于转动 $R(\vec{n}, \theta_0)$,其共轭转动为 $R^*(\vec{n}, \theta_0) = R(\vec{n}, 2\pi - \theta_0)$.

把三维转动引进神经网络^[6],每个神经元表示一个转动操作,令神经元为

$$S = R(\vec{m}_i, \alpha_j) = R(\vec{i}\cos\beta_{i1} + \vec{j}\cos\beta_{i2} + \vec{k}\cos\beta_{i3}, \alpha_j) \quad (2)$$

其中 $i=1, 2, \dots, q_1; j=1, 2, \dots, q_0$.即神经元的取值在转动轴上为特定的 q_1 个离散的轴 \vec{m}_i (方向角为 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$);在旋转角平面上为特定的 q_0 个离散的角度 α_j .因此,三维转动神经元的取值空间为 $Q=q_1q_0$ 个三维空间离散转动态.通常可令这些特定的 q_1 个离散的轴 \vec{m}_i 和 q_0 个离散的

① 本文 1995-12-29 收到; 国家自然科学基金资助项目和高技术探索资助项目

角度 α_j 彼此间均匀分布.

设网络有 N 个三维转动神经元, 存储 M 个记忆模式 $S^\mu = (S_1^\mu, S_2^\mu, \dots, S_N^\mu)$, 其中 $\mu = 1, 2, \dots, M$, 由于各记忆态矢为随机存储模式, 具有伪正交性, 也即

$$\sum_{i=1}^N S_i^\mu S_j^{\nu*} = N \delta_{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

连接矩阵 J 表示为由记忆态矢的外积和构成

$$J_{ij} = \sum_{\mu=1}^M S_i^\mu S_j^{\mu*} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$S_i^{\mu*}$ 表示取 S_i^μ 的共轭反转, 易得关系式 $J_{ij} = J_{ji}^*$. 任一态矢 $S(t)$ 在连接矩阵 J 的相互作用下, 其有效局域场 H 为

$$H_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t) \quad (5)$$

有效局域场实际上也是一合成转动, 但它一般不是归一化的转动算符, 即

$$H_i(t) = |H_i(t)| R[\vec{n}_i(t), \theta_{0i}(t)]$$

由有效局域场可定义关于态矢 $S(t)$ 在相互作用 J 下的能量函数 $E(S)$

$$E(S) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N S_i^* H_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N S_i^* J_{ij} S_j \quad (6)$$

上式是 Hopfield 模型^[1], 16 态四元数模型^[8]及复相角模型^[2]中能量函数的推广.

对任一输入态, 网络的迭代动力学方程为

$$S_i(t+1) = R_i(\vec{m}_k, \alpha_j) = \Theta(H_i) = \Theta[R(\vec{n}_i, \theta_{0i})] \quad (7)$$

输入输出函数 Θ 的取值规则一般设为, 把某一转动操作范围内的所有操作映射到某一神经元的转动操作上. 如对旋转角而言, 由于神经元在旋转角 2π 圆面上的取值为均匀分布的特定的 q_0 个离散的角度 α_j , 旋转角 θ_{0j} 经输出算符 Θ 的作用后, 映射到其最近邻的神经元旋转角 α_j 上. 也即如图 1 所示, 旋转角单位圆上均匀分布的 q_0 个离散点的角平分线构成了 q_0 个扇形, 任一个扇形内的旋转角 θ_{0j} 经输出算符 Θ 的作用后, 映射到其中心点所表示的神经元旋转角 α_j 上, 如图中扇形 OAB 内的所有旋转角都被 Θ 映射到中心点 α_j 上. 对方向角而言, q_1 个神经元旋转轴的每一轴周围的 $2\pi/q_1$ 立体角范围的旋转轴都被映射到该神经元旋转轴上.

实际上, 立体角迭代范围的划分较复杂, 且随 q_1 的不同而变化, 对不同的 q_1 要具体划分.

2 能量函数分析

下面我们证明对于三维转动神经网络模型, 存贮图象在能量函数空间中对应一能量极小点. 设一输入图象 S 与存贮图象 S^ν 只有第 k 个神经元中的一位不同, 即

$$S_k \neq S_k^\nu, S_i = S_i^\nu \quad (i \neq k) \quad (8)$$

则能量差为

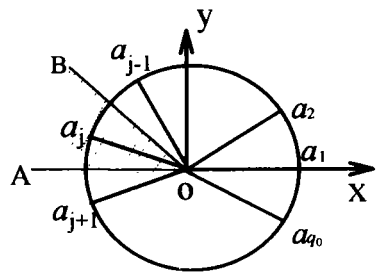


图 1 旋转角取值及其映射范围示意图
Fig. 1 Sketch map of the values of rotation angle and its mapping area

$$E(S) - E(S^v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (S_i^v S_j^v S_j^* S_j^* - S_i^* S_i^* S_j^* S_j^*) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq v} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (S_i^v S_j^v S_j^* S_j^* - S_i^* S_i^* S_j^* S_j^*)$$

当 $N \gg M$ 时,右式第二项中的两个对 $\mu \neq v$ 求和式,可分别看作为 $E(S)$ 和 $E(S^v)$ 的微扰项,具体展开时,为 $4^4 N$ 项和,其中有 $3/4$ 项为虚部而相互抵消,仅剩 $4^3 N$ 项实数和. 当 $N \gg M$ 时,由(3)式,这两微扰项具有同样的正态分布规律,相互抵消. 因此

$$E(S) - E(S^v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (S_i^v S_j^v S_j^* S_j^* - S_i^* S_i^* S_j^* S_j^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 - S_i^* S_i^* S_j^* S_j^*)$$

对上式具体展开,运用条件式(8)抵消相同项,最后可得下式

$$E(S) - E(S^v) = (N-1)(1-A) \quad (9)$$

式中表达式 A 为

$$A = \frac{1}{2} (S_k^v S_k + S_k^v S_k^*) = \sum_{l=0}^3 S_{kl}^v S_{kl} \quad (10)$$

由于每个神经元取值为如式(1)所示的4维量, l 表示取该4维量的第 l 维.若令 S_k^v 和 S_k 具体角度取值为

$$S_k^v = R(\vec{i} \cos \beta_{k1}^v + \vec{j} \cos \beta_{k2}^v + \vec{k} \cos \beta_{k3}^v, \alpha_k^v), S_k = R(\vec{i} \cos \beta_{k1} + \vec{j} \cos \beta_{k2} + \vec{k} \cos \beta_{k3}, \alpha_k)$$

$$\text{则 } A = \cos \alpha_k^v \cos \alpha_k + \sin \alpha_k^v \sin \alpha_k \sum_{i=1}^3 (\cos \beta_{ki}^v \cos \beta_{ki}) = \cos \alpha_k^v \cos \alpha_k + (\vec{m}_k^v \cdot \vec{m}_k) \sin \alpha_k^v \sin \alpha_k \quad (11)$$

输入图象 S 与存贮图象 S^v 只有第 k 个神经元中的一位不同.若是旋转角不等,即 $\alpha_k^v \neq \alpha_k$,则得 $A = \cos \alpha_k^v \cos \alpha_k + \sin \alpha_k^v \sin \alpha_k = \cos(\alpha_k^v - \alpha_k) \leq 1$;若是方向角不等,不失一般性,设 $\beta_{k1}^v \neq \beta_{k1}$,则得 $A = \cos^2 \alpha_k^v + \sin^2 \alpha_k^v (\cos \beta_{k1}^v \cos \beta_{k1} + \cos^2 \beta_{k2}^v + \cos^2 \beta_{k3}^v)$,括号中表示为两方向角矢量的内积,显然只有当 $\cos \beta_{k1}^v = \cos \beta_{k1}$ 时,内积为最大值1,从而同样得 $A \leq 1$. 综上所述,可得

$$E(S) > E(S^v) \quad (12)$$

所以,对于随机存贮的图象,当 $N \gg M$ 时,存贮图象在能量函数空间取极小值.

3 绝热近似处理

假设神经元数 N 和存贮的图象数 M 都很大,为分析三维转动神经网络模型的存储容量 $\gamma = M/N$,这里先引入绝热近似.令 $S(0) = S^1$,即把存贮图象 $\mu=1$ 代入(5)式,并展开为各角度部分,第 i 个神经元的有效局域场为

$$H_{i0} = N \cos \alpha_i^1 + \Delta_{i0} \quad (13a)$$

$$H_{i1} = N \sin \alpha_i^1 \cos \beta_{i1}^1 + \Delta_{i1} \quad (13b)$$

$$H_{i2} = N \sin \alpha_i^1 \cos \beta_{i2}^1 + \Delta_{i2} \quad (13c)$$

$$H_{i3} = N \sin \alpha_i^1 \cos \beta_{i3}^1 + \Delta_{i3} \quad (13d)$$

其中 α_i^1 表示第1个存储图象在第 i 个神经元中的旋转角取值, $\beta_{i1}^1, \beta_{i2}^1, \beta_{i3}^1$ 表示第1个存储图象在第 i 个神经元中的方向角取值.这里实际求得的是信噪展开式,式中右边第一项为信号项, N 表示向态 $S^{\mu=1}$ 迭代的可能性大小,即向 $S^{\mu=1}$ 迭代的权重;第二项为噪声项,表示由 $\mu \neq 1$ 的存储图象的影响,其具体表达式易由式(5)展开求得,如

$$\begin{aligned} \Delta_{i0} = & \sum_{\mu=2}^N \sum_{j=1}^N [\cos \alpha_i^{\mu} (\cos \alpha_j^{\mu} \cos \alpha_j^1 + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j1}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j1}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j2}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j2}^1 + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j3}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j3}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j1}^{\mu} (\sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j1}^{\mu} \cos \alpha_j^1 - \cos \alpha_j^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j1}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j2}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j3}^1 - \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j3}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j2}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j2}^{\mu} (\sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j2}^{\mu} \cos \alpha_j^1 - \cos \alpha_j^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j2}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j3}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j1}^1 - \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j1}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j3}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j3}^{\mu} (\sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j3}^{\mu} \cos \alpha_j^1 - \cos \alpha_j^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j3}^1) \\ & + \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j1}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j2}^1 - \sin \alpha_j^{\mu} \cos \beta_{j2}^{\mu} \sin \alpha_j^1 \cos \beta_{j1}^1)] \end{aligned}$$

$\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \Delta_{i3}$ 同样易得. 由于存贮图象的随机性, 这些噪声项的平均值为 $\langle \Delta_{ij} \rangle = 0$, 均方差为

$$\sigma_{ij} = \langle \Delta_{ij}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{N(M-1)/2} \quad j=0, 1, 2, 3$$

其中 $\langle \rangle$ 表示对存贮图象取平均. 且这些噪声项具有正态分布:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14)$$

应用信噪比理论求存储容量, 关键是求有效局域场在动力学方程(7)迭代下能正确映射的几率, 也即求下式成立的几率 ρ ,

$$\Theta(H_i) = R(\vec{m}_i^1, \alpha_i^1) = R(\vec{i} \cos \beta_{i1}^1 + \vec{j} \cos \beta_{i2}^1 + \vec{k} \cos \beta_{i3}^1, \alpha_i^1) \quad (15)$$

由于方向角与旋转角的交叉影响, 要对式(13)直接分析比较困难. 我们在处理电子运动的问题时, 通常引入绝热近似, 把原子核和电子的运动分开处理. 这里类似地引入绝热近似, 不考虑方向角与旋转角之间的相互影响, 即在处理一类角度值时, 另一类角度值当作常数, 由其统计平均值代入, 从而可得两组等式

(A) 对旋转角有

$$H_{i0}^R = N \cos \alpha_i^1 + \Delta_{i0}^R \quad (16a)$$

$$H_{i0}^I = N \sin \alpha_i^1 + \Delta_{i0}^I \quad (16b)$$

式(16a)即是式(13a); 因求旋转角时由绝热近似假设, 可认为方向角为常数, 故对式(13b-13c)可分别除以对应的方向角余弦项, 再三式相加合并可得式(16b). 在旋转角平面上(16)式可写为复数形式, 即

$$\tilde{H}_{i0} = N \exp(i\alpha_i^1) + \Delta_{i0} \exp(i\omega) \quad (17)$$

其中 N 表示旋转角 α_i^1 正确迭代的权重, $\Delta_{i0} = \sqrt{\Delta_{i0}^R{}^2 + \Delta_{i0}^I{}^2}$ 为噪声项 $\Delta_{i0}^R, \Delta_{i0}^I$ 合成后的模, 它的平均值为 0, 均方差

$$\sigma_0 = \langle \Delta_{i0}^R{}^2 \rangle^{1/2} + \langle \Delta_{i0}^I{}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{N(M-1)}$$

该模项只取正值, 故其正态分布函数为

$$f(x) = 2g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (18)$$

对随机存贮图象, 噪声项 $\Delta_{i0}^R, \Delta_{i0}^I$ 具有对称性, 故幅角 ω 在 $(0, 2\pi)$ 范围内均匀分布.

(B) 对方向角, 由绝热近似可认为旋转角 α_i^1 为常数, 用 $\sin \alpha_i^1$ 的均方差 η 表示该常数, 即

$$\eta = \langle \sin^2 \alpha_i^1 \rangle^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则得}$$

$$H_{i1} = \eta N \cos \beta_{i1}^1 + \Delta_{i1}, H_{i2} = \eta N \cos \beta_{i2}^1 + \Delta_{i2}, H_{i3} = \eta N \cos \beta_{i3}^1 + \Delta_{i3} \quad (19)$$

它实际上是一个三维矢量,可简写为

$$\vec{H}_i = \eta N (\vec{i} \cos \beta_{i1}^1, \vec{j} \cos \beta_{i2}^1, \vec{k} \cos \beta_{i3}^1) + \vec{\Delta}_i = \eta N \vec{m}_i^1 + \vec{\Delta}_i \quad (20)$$

其中 ηN 表示旋转轴 $\vec{m}_i^1 = \vec{i} \cos \beta_{i1}^1 + \vec{j} \cos \beta_{i2}^1 + \vec{k} \cos \beta_{i3}^1$ 能正确迭代的权重,而噪声项 $\vec{\Delta}_i = \Delta_{i1} \vec{i} + \Delta_{i2} \vec{j} + \Delta_{i3} \vec{k}$. 噪声项的模 $|\vec{\Delta}_i|$ 的平均值为 0, 均方差为

$$\sigma_1 = \langle \Delta_{i1}^2 \rangle^{1/2} + \langle \Delta_{i2}^2 \rangle^{1/2} + \langle \Delta_{i3}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{3N(M-1)/2}$$

同样具有式(18)的正态分布函数形式;噪声项的方向矢量在 4π 立体角上均匀分布.

由于引入了绝热近似,有效局域场能正确迭代的几率 ρ , 等于方向角和旋转角分别能正确迭代的几率的乘积. 实际上,当网络能正确迭代时,绝热近似在严格意义上是成立的.

参 考 文 献

- 1 Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl Acad. Sci. U. S. A.*, 1982, 79: 2 554~2558
- 2 Noest A J. Discrete-state phasor neural networks. *Phys. Rev. A*, 1988, 38: 2 196~2 199
- 3 Rieger H. Storing an extensive number of gray-toned patterns in a neural network using multistate neurons. *J. Phys. A.*, 1988, 21: 791~801
- 4 Yu F T S et al. Gray-level discrete associative memory. *Appl. Opt.*, 1993, 32: 1 322~1 329
- 5 帅建伟,陈振湘,刘瑞堂等. 2^n 元数神经网络模型: 存贮容量分析. 厦门大学学报(自然科学版), 1995, 34: 353~358
- 6 Shuai J W, Chen Z X, Liu R T, Wu B X. The Q-state 3-dimension rotation angle neural network model. *The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics Programme & Abstracts*, (China, Xiamen), 1995 (August): 200
- 7 Changhe Zhou, Liren Liu. The complex Hopfield model. *Optics Communications*, 1993, 103: 29~32.
- 8 帅建伟,陈振湘,刘瑞堂等. 四元数神经网络模型: 彩色图象的识别. 计算机学报, 1995, 18: 372~379

A Study of the Three-dimensional-rotational Neural Networks (1)Energy Function

Chen Zhenxiang Shuai Jianwei Zheng Jincheng Liu Ruitang

(Dept. of Phys.)

Abstract After simply introducing the three-dimensional-rotational neural networks model, the energy function is studied. The energies of the stored patterns are minima in the case the neurons number is much more larger than that of the stored patterns. With the adiabatic approximation, the probability of correct retrieval of the local field is equal to the multiplication of the probabilities of correct retrieval of the direction angle and the rotation angles.

Key words Neural network, Three-dimensional rotation, Storage capacity