第三讲群

陈建文

October 7, 2022

定义1. 设G为一个非空集合，“$\circ$”为G上的一个二元代数运算。如果下列各个条件成立，则称G对“$\circ$”运算构成一个群（*group*）：

I. “$\circ$”运算满足结合律，即$\forall a, b, c \in G\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

II. 对“$\circ$”运算，G中有一个左单位元e，即$\forall a \in G\ e \circ a = a$;

III. 对G中的每个元素，关于$\circ$运算有一个左逆元，即对G的每个元素a有一个相应元素b，使得$b \circ a = e$，其中e为II中的同一个左单位元素。即$\forall a \in G \exists b \in G b \circ a = e$。

定理1. 设G为一个群，则$\forall a \in G$，a的左逆元也是a的右逆元。

定理2. 设G为一个群，则G的左单位元e也是右单位元。

定理3. 设a与b为群G的任意两个元素，则$(a^{-1})^{-1} = a$，$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$。

定理4. 在群G中，$\forall a, b \in G$，方程

$$ax = b$$
$$ya = b$$

关于未知量x与y都有唯一解。

定理5. 非空集合G对其二元代数运算$\circ$构成一个群的充分必要条件是下列两个条件同时成立：

1. “$\circ$”运算满足结合律，即$\forall a, b, c \in G (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$。

2. $\forall a, b \in G$，方程

$$ax = b$$
$$ya = b$$

关于未知量x与y有解。

定理6. 设$(G, \circ)$为一个群，则“$\circ$”运算满足消去律，即$\forall x, y, a \in G$，

如果$ax = ay$，则$x = y$（左消去律）

如果$xa = ya$，则$x = y$（右消去律）

定理7. 非空有限集合G对其二元代数运算$\circ$构成一个群的充分必要条件是下列两个条件同时成立：

1. “$\circ$”运算满足结合律。

2. “$\circ$”运算满足左、右消去律。

例. 3阶群是交换群。

定义2. 设G为一个群，$\forall a \in G$，定义$a^0 = e$，$a^{n+1} = a^n \circ a (n \geq 0)$，$a^{-n} = (a^{-1})^n (n \geq 1)$。

定理8. 设G为一个群，$a \in G$，m，n为任意整数，则$a^m a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$。

设$(G, +)$为一个阿贝尔群，$\forall a \in G$，定义$0a = 0$，$(n+1)a = na + a (n \geq 0)$，$(-n)a = n(-a)(n \geq 1)$。对任意整数$m$，$n$，$ma + na = (m+n)a$，$(mn)a = m(na)$，$n(a+b) = na + nb$。

定义3. 设$(G, \circ)$为一个群，$a \in G$，使$a^n = e$的最小正整数n称为a的阶。如果不存在这样的正整数n，则称a的阶为无穷大。

定理9. 有限群的每个元素的阶不超过该有限群的阶。

课后作业题：

练习1. 设a和b为群G的两个元素。如果$(ab)^2 = a^2 b^2$，试证：$ab = ba$。

练习2. 设G为群。如果$\forall a \in G$，$a^2 = e$，试证：G为交换群。

练习3. 证明：四阶群是交换群。

练习4. 证明：在任一阶大于2的非交换群里必有两个非单位元a和b，使得$ab = ba$。

练习5. 有限阶群里阶大于2的元素的个数必为偶数。

练习6. 证明：偶数阶群里，阶为2的元素的个数必为奇数。

练习7. 设a为群G的一个元素，a的阶为n且$a^m = e$，试证n能整除m。

练习8. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n阶群中的n个元素（它们不一定各不相同）。证明：存在整数p和q（$1 \leq p \leq q \leq n$），使得

$$a_p a_{p+1} \cdots a_q = e$$