

## 第三章关系

陈建文

March 30, 2023

**定义1.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例1.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} & \subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T \end{aligned}$$

**定义2.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例2.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = & \{(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}), \\ & (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

**例3.** 自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系“ $\leq$ ”为 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

**例4.** 设 $n$ 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 $m, k$ ，如果 $m - k$ 能被 $n$ 整除，则称 $m$ 与 $k$ 为模 $n$ 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 $m$ 被 $n$ 除所得到的余数与 $k$ 被 $n$ 除所得到的余数相等。模 $n$ 同余为 $\mathbb{Z}$ 上的一个二元关系。

**定义3.** 设 $R \subseteq A \times B$ ，集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的定义域，记为 $\text{dom}(R)$ ；集合

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的值域，记为 $\text{ran}(R)$ 。

**定义4.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 $R$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 $n$ 元关系, 每个 $A_i$ 称为 $R$ 的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (not necessarily distinct),  $R$  is a relation on these  $n$  sets if it is a set of  $n$ -tuples each of which has its first element from  $S_1$ , its second element from  $S_2$ , and so on. More concisely,  $R$  is a subset of the Cartesian product  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

**定义5.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。

**例5.** 判断下列二元关系是否为自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义6.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

**例6.** 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)

**定义7.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ , 只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

**例7.** 判断下列二元关系是否为对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义8.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ,  $xRy$ 且 $yRx$ , 则 $x = y$ 。

**例8.** 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义9.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ , 只要 $xRy$ 且 $yRz$ , 就有 $xRz$ 。

**例9.** 判断下列二元关系是否为传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**练习1.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的反自反的和传递的二元关系, 证明:  $R$ 为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的 $x \in X, y \in Y$ , 如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ , 则由 $R$ 为传递的知 $(x, x) \in R$ , 这与 $R$ 为反自反的矛盾, 从而 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ 不可能成立。即如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ , 则 $x = y$ 成立, 这证明了 $R$ 为反对称的。

□

证法二. 对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ 并且 $x \neq y$ , 以下证明 $(y, x) \notin R$ 。用反证法, 假设 $(y, x) \in R$ , 则由 $R$ 为传递的知 $(x, x) \in R$ , 这与 $R$ 为反自反的矛盾

□

证法三. 用反证法。假设 $R$ 不是反对称的二元关系, 则存在 $x \in X, y \in X, (x, y) \in R, (y, x) \in R$ 并且 $x \neq y$ , 由 $R$ 为传递的知,  $(x, x) \in R$ , 这与 $R$ 为反自反的矛盾。 $\square$

**定义10.** 设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系,  $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

**例10.** 设 $X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ , 则 $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$ 。

**定理1.** 设 $R$ 和 $S$ 为集合 $X$ 上的二元关系,  $R \subseteq S$ , 则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

**定理2.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$ 。

**定理3.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明. 由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ , 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ 。 $\square$

**定理4.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明. 只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ , 则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ , 此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ , 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ , 从而 $(x, y) \in R^{-1}$ 。 $\square$

**定义11.** 设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

**例11.** 设 $X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ 。

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中,  $R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ,  $R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ 。

**定理5.** 设 $R_1, R_2, R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
& \Leftrightarrow \exists c \in C ((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
& \Leftrightarrow \exists c \in C (\exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
& \Leftrightarrow \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C ((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
& \Leftrightarrow \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3) \\
& \Leftrightarrow (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}$$

□

**定理6.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明. 由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ , 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ , 由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ , 如果 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ , 则 $(a, c) \in R \circ R$ , 由 $R \circ R \subseteq R$ 知 $(a, c) \in R$ 。□

**定义12.** 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 $m$ 个元素的集合,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为一个包含 $n$ 个元素的集合,  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的一个二元关系。由 $R$ 定义一个 $m \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 $B$ 称为关系 $R$ 的矩阵。

**例12.** 设集合 $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

, 则 $S$ 的关系矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**定义13.** 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 $m$ 个元素的集合,  $R$ 为 $X$ 上的一个二元关系。由 $R$ 定义一个 $m \times m$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times X$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 $B$ 称为关系 $R$ 的矩阵。

**例13.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系  $R$  的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**定理7.** 设  $B$  为集合  $X$  上二元关系  $R$  的矩阵, 则

1.  $R$  为自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 1;
2.  $R$  为反自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 0;
3.  $R$  为对称的, 当且仅当  $B$  为对称矩阵;
4.  $R$  为反对称的, 当且仅当  $i \neq j$  时  $b_{ij}$  与  $b_{ji}$  不同时为 1;
5.  $R$  为传递的, 当且仅当如果  $b_{ij} = 1$  且  $b_{jk} = 1$ , 则  $b_{ik} = 1$ 。

**定理8.** 设  $B$  为集合  $X$  上二元关系  $R$  的矩阵, 则  $R^{-1}$  的矩阵为  $B^T$ 。

**定义14.** 设  $B, C$  为两个布尔矩阵,  $B$  与  $C$  的逻辑乘为  $B$  与  $C$  的对应元素进行逻辑乘所得到的布尔矩阵, 记为  $B \wedge C$ , 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$  与  $C$  的逻辑加为  $B$  与  $C$  的对应元素进行逻辑加所得到的布尔矩阵, 记为  $B \vee C$ , 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

**定理9.** 设  $R, S$  为从集合  $X$  到集合  $Y$  的二元关系, 其矩阵分别为  $B_R$  和  $B_S$ 。  $R \cup S$  与  $R \cap S$  的矩阵分别为  $B_{R \cup S}$ ,  $B_{R \cap S}$ , 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

**定义15.** 设  $A$  为  $m \times p$  布尔矩阵,  $B$  为  $p \times n$  布尔矩阵,  $A$  与  $B$  的布尔乘积  $A \circ B$  定义为矩阵  $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$

$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**定理10.** 设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ .  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ .

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 关系 $R$ 的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系 $R \circ R$ 的矩阵为

$$B_{R \circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

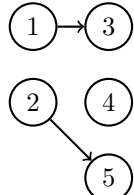
证明. 设 $B_R = (a_{ij})$ ,  $B_S = (b_{ij})$ ,  $B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 1 \\ &\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S \\ &\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\ &\Leftrightarrow (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1) \\ &\Leftrightarrow (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1 \end{aligned}$$

□

关系除了用矩阵表示外, 还可以用图来表示。设 $X$ 和 $Y$ 为有穷集合,  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系。当用图表示 $R$ 时, 先把 $X$ 与 $Y$ 的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 $R$ 的任一序对 $(x, y)$ 用从代表 $x$ 的点画一条指向代表 $y$ 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系 $R$ 的图。

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的图为



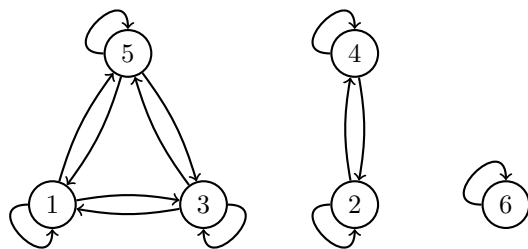
设 $X$ 为有穷集合,  $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系。当用图表示 $R$ 时, 先把 $X$ 的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 $R$ 的任一序

对 $(x, y)$ 用从代表 $x$ 的点画一条指向代表 $y$ 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系 $R$ 的图。注意，如果 $(x, x) \in R$ ，则在代表 $x$ 的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下：

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系 $R$ 的图为



**定理11.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则

1.  $R$ 为自反的，当且仅当 $R$ 的图的每个顶点均有一个环；
2.  $R$ 为反自反的，当且仅当 $R$ 的图中没有环；
3.  $R$ 为对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4.  $R$ 为反对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线；
5.  $R$ 为传递的，当且仅当在 $R$ 的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

**定义16.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。 $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包，用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

**定理12.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明。由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $z \in X$ ， $(x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R'$ ， $R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的， $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，由 $R'$ 为传递的知 $(x, z) \in R'$ ，从而 $(x, z) \in R^+$ ，这证明了 $R^+$ 为传递的。□



**定理13.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X, b \in X, n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$ , 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X, x_k \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$ 。□

**定理14.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明. 首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义, 只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X, b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+, (b_1, b_2) \in R^+, \dots, (b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

因此,  $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。□

**定理15.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此,  $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。□

**定理16.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ ,  $B$ 为 $R$ 的关系矩阵,  $B_{R^+}$ 为 $R^+$ 的关系矩阵, 简记为 $B^+$ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合 $X$ 上关系 $R$ 的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE( $B$ )

```

    // B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $M = B$ 
2   $A = M$ 
3  for  $i = 2$  to  $n$ 
4       $M = M \circ B$ 
5       $A = A \vee M$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 

```

WARSHALL( $B$ )

```

    // B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          for  $j = 1$  to  $n$ 
5               $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 

```

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   
 $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$   
 $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)}) (k \geq 1)$   
 其中 $a_{ij}^{(k)} = 1$ 当且仅当存在 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 使得 $(x_i, x_{i_1}) \in R, (x_{i_1}, x_{i_2}) \in R, \dots, (x_{i_m}, x_j) \in R$ 。  
 $a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$   
 $a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$

WARSHALL( $B$ )

```

    // B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          if  $a_{ik} == 1$ 
5              for  $j = 1$  to  $n$ 
6                   $a_{ij} = a_{ij} \vee a_{kj}$ 
7  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 

```

**定义17.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**等价关系**, 如果 $R$ 同时满足以下三个性质:

1.  $R$ 为自反的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ,  $xRx$ ;
2.  $R$ 为对称的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ , 如果 $xRy$ , 则 $yRx$ ;
3.  $R$ 为传递的, 即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ , 如果 $xRy$ 且 $yRz$ , 则 $xRz$ 。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一, 是不是有点抽象? 我们可以借助一个具体的例子, 帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在, 我们是不是学了许多类似于“ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ”的等式? 这里的等价关系就是从“=”抽象出来的。(1)  $x = x$ ; (2) 如果 $x = y$ , 那么 $y = x$ ; (3) 如果 $x = y$ 并且 $y = z$ , 那么 $x = z$ 。是不是显然成立呀? 我们可以借助熟知的“=”来理解等价关系的定义。

**定义18.** 设 $a, b \in Z$ , 如果存在 $q \in Z$ 使得 $a = qb$ , 则称 $b$ 整除 $a$ , 记为 $b|a$ 。

**定义19.** 设 $a, b \in Z$ ,  $b > 0$ ,  $a = qb + r$ ,  $q \in Z$ ,  $0 \leq r < b$ , 则称 $r$ 为 $a$ 除以 $b$ 所得到的余数, 记为 $a \bmod b$ 。

**定义20.** 设 $a, b, n \in Z$ ,  $n > 0$ , 如果 $a \bmod n = b \bmod n$ , 则称 $a$ 与 $b$ 模 $n$ 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{n}$ 。

**定理17.**  $\forall a, b, n \in Z, n > 0, a \equiv b \pmod{n}$ 等价于 $n|(a - b)$ 。

**例14.** 整数集 $Z$ 上的模 $n$ 同余关系为 $Z$ 上的等价关系。

**例15.** 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

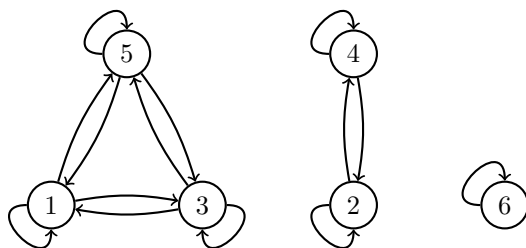
$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则 $R$ 为 $X$ 上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。

□

证法二. 画出 $R$ 的关系图进行判断。



- (1) 在 $R$ 的图中, 每个顶点均有一个环, 这说明 $R$ 为自反的;
- (2) 在 $R$ 的图中, 如果任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线, 这说明 $R$ 为对称的;
- (3) 在 $R$ 的图中, 如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线, 这说明 $R$ 为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系 $R$ 的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1)  $B$ 的对角线上的元素全为1说明 $R$ 为自反的;
- (2)  $B$ 为对称矩阵说明 $R$ 为对称的;
- (3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $B \circ B$ 中的每个元素小于等于 $B$ 中的每个元素知 $R$ 为传递的。  $\square$

**定义21.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系,  $x \in X$ ,  $X$ 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 $x$ 关于 $\cong$ 的等价类, 记为 $[x]$ , 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

**例16.** 在例14中我们已经知道模4同余关系为等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为 $\{[0], [1], [2], [3]\}$ , 其中

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{aligned}$$

$\square$

**例17.** 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

在例15中, 我们知道 $R$ 为 $X$ 上的等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合 $X$ 上每个元素关于关系 $R$ 的等价类:

$$\begin{aligned}[1] &= \{1, 3, 5\} \\ [2] &= \{2, 4\} \\ [3] &= \{1, 3, 5\} \\ [4] &= \{2, 4\} \\ [5] &= \{1, 3, 5\} \\ [6] &= \{6\}\end{aligned}$$

你发现了什么? 有重复! 于是关系 $R$ 的所有等价类所构成的集合为 $\{[1], [2], [6]\}$ , 即 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ .  $\square$

通过以上的例子, 我们发现了以下的结论:

**定理18.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系, 对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ ,  $x \cong y$ 当且仅当 $[x] = [y]$ .

证明. 对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ , 由 $x \cong y$ 往证 $[x] = [y]$ . 这里是要证明两个集合相等. 对任意的 $z \in [x]$ , 则 $x \cong z$ , 由 $x \cong y$ 及 $\cong$ 的对称性知 $y \cong x$ , 再由 $\cong$ 的传递性知 $y \cong z$ , 从而 $z \in [y]$ . 对任意的 $z \in [y]$ , 则 $y \cong z$ , 由 $x \cong y$ 及 $\cong$ 的传递性知 $x \cong z$ , 从而 $z \in [x]$ . 这证明了 $[x] = [y]$ .

对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ , 由 $[x] = [y]$ 往证 $x \cong y$ . 由 $\cong$ 的自反性知 $x \cong x$ , 从而 $x \in [x]$ , 再由 $[x] = [y]$ 知 $x \in [y]$ , 从而 $y \cong x$ , 由 $\cong$ 的对称性得 $x \cong y$ .  $\square$

**定义22.** 设 $X$ 为集合,  $X$ 的一些非空子集形成的集族 $\mathcal{A}$ 称为 $X$ 的一个划分, 如果 $\mathcal{A}$ 具有性质

1.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ , 如果 $A \neq B$ , 则 $A \cap B = \phi$ ;

2.  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

**例18.** 集合

$$\begin{aligned}&\{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\end{aligned}$$

构成了整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个划分。

**例19.** 集合 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$  构成了集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个划分。

**定理19.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系, 则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成了集合 $X$ 的一个划分。

证明. 这就是要证明 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 $X$ 的一个划分。

对任意的 $x \in X$ , 由 $\cong$ 的自反性知 $x \cong x$ , 从而 $x \in [x]$ , 这证明了 $[x]$ 非空。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $[x] \neq [y]$ , 以下证明 $[x] \cap [y] = \phi$ . 用反证法, 假设 $[x] \cap [y] \neq \phi$ , 则存在 $z \in [x] \cap [y]$ , 于是 $z \in [x]$ 并且 $z \in [y]$ . 由 $z \in [x]$ 知 $x \cong z$ ,

由 $z \in [y]$ 知 $y \cong z$ 。由 $\cong$ 的对称性可得 $z \cong y$ ，再由 $\cong$ 的传递性可得 $x \cong y$ ，从而 $[x] = [y]$ ，矛盾。

由对任意的 $x \in X$ ， $x \in [x]$ 易知 $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ 。

综上，我们证明了 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 $X$ 的一个划分。  $\square$

**定理20.** 设 $\mathcal{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$$

则 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 为集合 $X$ 的一个划分，则

$$\begin{aligned} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A \\ &= (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\}) \cup (\{6\} \times \{6\}) \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6)\} \end{aligned}$$

为集合 $X$ 上的一个等价关系。

证明。这就是要验证 $\cong$ 满足自反性、对称性和传递性。

(1) 对任意的 $x \in X$ ，由 $\mathcal{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ ，从而 $(x, x) \in A \times A$ ，于是， $(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 $\cong$ 满足自反性。

(2) 对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，从而 $(y, x) \in A \times A$ ，于是 $(y, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 $\cong$ 满足对称性。

(3) 对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $z \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，并且 $(y, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，并且存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $(y, z) \in B \times B$ 。于是， $x \in A$ ， $y \in A$ ， $y \in B$ ， $z \in B$ 。此时，必有 $A = B$ ，否则 $A \cap B = \emptyset$ ，这与 $y \in A$ 并且 $y \in B$ 矛盾。从而， $x \in A$ ， $z \in A$ ，因此， $(x, z) \in A \times A$ ，于是 $(x, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 $\cong$ 满足传递性。  $\square$

本门课一个很重要的结论为“集合 $X$ 上的所有等价关系之集与集合 $X$ 的所有划分之集之间存在着一一对应的关系”。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合 $X$ 上的所有等价关系之集到集合 $X$ 的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合 $X$ 上的所有等价关系之集到集合 $X$ 的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗？

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 $f$ 为可逆的，而 $g$ 称为 $f$ 的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理：

**定理21.** 设 $X$ 为一个集合,

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\}, \\ \mathbb{A} &= \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{为集合 } X \text{ 的一个划分}\}, \\ f &= \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\} \\ g &= \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\}\end{aligned}$$

则 $f$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{A}$ 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

如果我们能够完全理解该定理, 并能够从“0”开始给出该定理的证明过程, 即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明, 那么, 整个前三章的内容, 我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程, 顺藤摸瓜, 这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明, 直到可以从头开始说起, 这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗? 答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合: $X = \{1, 2, 3\}$ 。那么 $\mathbb{R}$ 表示集合 $X$ 上所有的等价关系构成的集合, 这个集合是怎样的? 这个问题不好回答吧?

让我们先看 $\mathbb{A}$ 吧。 $\mathbb{A}$ 表示集合 $X$ 的所有划分构成的集合。这个集合比较好写, 你能写出答案吗? 我的答案是这样的:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \{ & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ & \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

对任意的 $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ , 我们计算 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 就可以得到 $X$ 上的一个等价关系。该定理是在说, 在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{A}$ 之间存在一个一一对应的关系, 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = \{ & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}, \\ & \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\end{aligned}$$

证明. 1. 证明 $f$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个等价关系 $\cong$ ,  $\{[x]_{\cong} \mid x \in X\}$ 为集合 $X$ 的一个划分。这就是定理19。

2. 证明 $g$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 的任意一个划分 $\mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系。这就是定理20。

3. 证明  $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个等价关系  $\cong$ ,  $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。

这里是要证明两个集合相等。

对任意的  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ , 如果  $(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ , 那么存在  $x \in X$ ,  $(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ , 于是  $x_1 \in [x]_{\cong}$  并且  $x_2 \in [x]_{\cong}$ , 从而  $x \cong x_1$  并且  $x \cong x_2$ , 由  $\cong$  的对称性知  $x_1 \cong x$ , 再由  $\cong$  的传递性知  $x_1 \cong x_2$ , 即  $(x_1, x_2) \in \cong$ 。

对任意的  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ , 如果  $(x_1, x_2) \in \cong$ , 则  $x_1 \cong x_2$ , 从而  $x_2 \in [x_1]_{\cong}$ , 由  $\cong$  的自反性知  $x_1 \in [x_1]_{\cong}$ , 从而  $x_1 \in [x_1]_{\cong}$ 。于是,  $(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ 。

4. 证明  $f \circ g = I_A$ 。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个划分  $\mathcal{A}$ , 关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的等价类的集合就是  $\mathcal{A}$ 。

这里还是要证明两个集合相等。

对任意的  $x \in X$ , 设  $[x]$  为关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类, 以下证明  $[x] \in \mathcal{A}$ 。由  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$  知存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $x \in A$ 。如果我们能够证明  $[x] = A$ , 则  $[x] \in \mathcal{A}$  得证。对任意的  $y \in [x]$ , 则  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 。于是, 存在  $B \in \mathcal{A}$  使得  $(x, y) \in B \times B$ , 如果  $B \neq A$ , 那么  $x \in A$  且  $x \in B$ , 这与  $A \cap B = \emptyset$  矛盾, 从而  $B = A$ , 因此  $y \in A$ 。反之, 对任意的  $y \in A$ , 则  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 从而  $y \in [x]$ 。这证明了  $[x] = A$ , 从而  $[x] \in \mathcal{A}$ 。

对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 以下证明  $A$  为等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类。由  $A$  非空知, 存在  $x, x \in A$ , 以下证明  $A = [x]$ , 这里  $[x]$  表示  $x$  关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类。对任意的  $y \in A$ , 则  $(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 从而  $y \in [x]$ 。反之, 如果  $y \in [x]$ , 则由与前面相类似的, 可以证明  $y \in A$ 。这证明了  $A = [x]$ 。

□

**定义23.** 设  $\cong$  为  $X$  上的等价关系,  $\cong$  的所有等价类之集称为  $X$  对  $\cong$  的商集, 记为  $X/\cong$ 。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x] \text{ 为 } x \text{ 关于 } \cong \text{ 的等价类}\}$$

**例20.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\cong$  为集合  $X$  的等价关系,  $X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ , 试求  $\cong$ 。

**练习2.** 设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

解. 首先验证  $\cong$  为  $S$  上的等价关系:

$\cong$  为自反的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $I_m(f) = I_m(f)$ ;

$\cong$  为对称的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$ , 如果  $I_m(f) = I_m(g)$ , 则  $I_m(g) = I_m(f)$ ;



$\cong$ 为传递的，这是因为对任意的映射  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$ ,  $h: X \rightarrow Y$ , 如果  $I_m(f) = I_m(g)$  并且  $I_m(g) = I_m(h)$ , 则  $I_m(f) = I_m(h)$ 。

$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ , 其中

$$\begin{aligned} f_1: X &\rightarrow Y, f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1, Im(f_1) = \{1\} \\ f_2: X &\rightarrow Y, f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2, Im(f_2) = \{1, 2\} \\ f_3: X &\rightarrow Y, f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1, Im(f_3) = \{1, 2\} \\ f_4: X &\rightarrow Y, f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2, Im(f_4) = \{1, 2\} \\ f_5: X &\rightarrow Y, f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1, Im(f_5) = \{1, 2\} \\ f_6: X &\rightarrow Y, f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2, Im(f_6) = \{1, 2\} \\ f_7: X &\rightarrow Y, f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1, Im(f_7) = \{1, 2\} \\ f_8: X &\rightarrow Y, f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2, Im(f_8) = \{2\} \end{aligned}$$

则  $S/\cong = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}, \{f_8\}\}$  □

**定义24.** 集合  $X$  上的二元关系  $R$  称为**偏序关系**，如果  $R$  同时满足以下三个性质：

1.  $R$  为自反的，即对  $X$  中的任意元素  $x$ ,  $xRx$ ;
2.  $R$  为反对称的，即对  $X$  中的任意元素  $x, y$ , 如果  $xRy$  且  $yRx$ , 则  $x = y$ ;
3.  $R$  为传递的，即对  $X$  中的任意元素  $x, y, z$ , 如果  $xRy$  且  $yRz$ , 则  $xRz$ 。

**定义25.** 设  $\leq$  为集合  $X$  上的一个偏序关系，则称二元组  $(X, \leq)$  为一个**偏序集**。

**例21.** 实数集  $\mathbb{R}$  上通常的“小于等于”关系  $\leq$  为一个偏序关系，所以  $(\mathbb{R}, \leq)$  为一个偏序集。

**例22.** 设  $S$  为一个集合， $S$  的子集间的包含关系  $\subseteq$  为  $2^S$  上的一个偏序关系，所以  $(2^S, \subseteq)$  为一个偏序集。

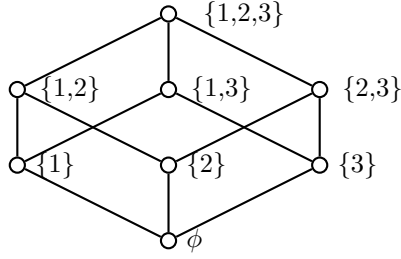
**例23.** 设集合  $X = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则  $R$  为  $X$  上的偏序关系。

设  $\leq$  为集合  $X$  上的一个偏序关系。由于  $\leq$  为自反的，所以  $\leq$  的关系图中每个顶点都有一个环，略去每个顶点的环；由于  $\leq$  为传递的，如果  $x \leq y$ , 且  $y \leq z$ , 略去从顶点  $x$  到顶点  $z$  的矢线；由于  $\leq$  为反对称的，如果从顶点  $x$  到顶点  $y$  有矢线，则将顶点  $y$  画在顶点  $x$  的上方，并略去矢线的箭头。按这种方法画出的图称为  $(X, \leq)$  的哈斯图（Hasse图）。

**例24.** 设  $X = \{1, 2, 3\}$ , 画出偏序集  $(2^X, \subseteq)$  的哈斯图。



**定义26.** 设 $\leq$ 为集合 $X$ 上的偏序关系, 如果 $\forall x, y \in X$ ,  $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立, 则称 $\leq$ 为 $X$ 上的全序关系。相应的, 二元组 $(X, \leq)$ 称为全序集。

我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$ ,  $x \geq y$ 表示 $y \leq x$ ,  $x > y$ 表示 $x \geq y$ 并且 $x \neq y$ 。

**定义27.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $s \geq x$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**最小元素**。

**定义28.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $x > s$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**极大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $x < t$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**极小元素**。

**定义29.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $s \geq x$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的一个**上界**; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的一个**下界**。

**定义30.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果 $A$ 有上界且 $A$ 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 $A$ 的**上确界**, 记为 $\sup A$ ; 如果 $A$ 有下界且 $A$ 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 $A$ 的**下确界**, 记为 $\inf A$ 。

**定义31.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果 $\forall a, b \in A$ ,  $a \leq b$ 与 $b \leq a$ 必有一个成立, 则称 $A$ 为 $X$ 中的**链**; 如果对 $A$ 中任意两个不同的元素 $a$ 和 $b$ ,  $a \leq b$ 与 $b \leq a$ 均不成立, 则称 $A$ 为 $X$ 中的一个**反链**。 $|A|$ 称为链(反链)的长度。

**定理22.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集, 如果 $X$ 中所有链长度的最大值为 $n$ , 则 $X$ 的全部元素可以被分成 $n$ 个非空不相交反链的并集。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ 。

当 $n = 1$ 时,  $X$ 中最长链的长度为1, 所以 $X$ 中任意两个不同的元素不能比较, 从而,  $X$ 就是反链, 故定理的结论成立。

假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设 $(X, \leq)$ 中最长链的长度为 $k + 1$ , 则 $X$ 中有极大元。令 $M$ 为 $X$ 的所有极大元之集, 则 $M \neq \emptyset$ 且 $M \neq X$ 。易证 $X \setminus M$ 中最长链的长度为 $k$ 。由归纳假设,  $X \setminus M$ 可分解成 $k$ 个非空不相交反链之并。 $M$ 也是一个非空反链, 所以 $X$ 可以被分解成 $k + 1$ 个非空不相交反链之并。□

**推论1.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $|X| = mn + 1$ , 则 $X$ 中或存在一个长至少为 $n + 1$ 的链, 或存在一个长至少为 $m + 1$ 的反链。

证明. 用反证法。假设结论不成立, 则 $X$ 中每个链的长度 $\leq n$ , 并且每个反链的长度 $\leq m$ 。设 $X$ 中最长链的长度为 $k$ , 则 $X$ 能被分成 $k$ 个不相交反链之并。这里 $k \leq n$ , 再由每个反链的长度 $\leq m$ , 可以得到

$$|X| \leq km \leq mn$$

这与假设 $|X| = mn + 1$ 矛盾。  $\square$

**例25.** 证明: 每个由 $n^2 + 1$ 个实数组成的序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 中必有长至少为 $n + 1$ 的不减子序列, 或有一个长至少为 $n + 1$ 的不增子序列。

证明. 记 $A = \{(a_i, i) | 1 \leq i \leq n^2 + 1\}$ , 在 $A$ 上定义二元关系 $\leq'$ 为:  $(a_i, i) \leq' (a_j, j)$ 当且仅当 $a_i \leq a_j$ 并且 $i \leq j$ , 这里 $\leq$ 为实数间通常的小于等于关系。

易验证 $\leq'$ 为自反的, 反对称的和传递的, 从而为集合 $A$ 上的偏序关系。

$A$ 中或有长为 $n + 1$ 的链, 或有长为 $n + 1$ 的反链。如果 $A$ 中有长为 $n + 1$ 的链 $\{(a_{i_1}, i_1), (a_{i_2}, i_2), \dots, (a_{i_{n+1}}, i_{n+1})\}$ , 这里 $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$ , 则 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}}$ 为序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 的不减子序列。如果 $A$ 中有长为 $n + 1$ 的反链 $\{(a_{j_1}, j_1), (a_{j_2}, j_2), \dots, (a_{j_{n+1}}, j_{n+1})\}$ , 这里 $j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}$ , 则 $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$ 为序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 的不增子序列。

这是因为 $(a_{j_k}, j_k) \leq' (a_{j_{k+1}}, j_{k+1})$ 不成立, 而 $j_k < j_{k+1}$ , 所以 $a_{j_k} \leq a_{j_{k+1}}$ 不成立, 从而 $a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$ , 于是

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$$

$\square$

**练习3.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的自反且传递的二元关系。

a) 给出 $R$ 的一个实例。

b) 在 $X$ 上定义二元关系 $\sim$ 如下:  $x \sim y$ 当且仅当 $xRy$ 且 $yRx$ 。证明 $\sim$ 为 $X$ 上的等价关系。

c) 在商集 $X/\sim$ 上定义二元关系 $\leq$ :  $[a] \leq [b]$ 当且仅当 $aRb$ 。证明 $\leq$ 为 $X/\sim$ 上的偏序关系。

a) 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ,  $R \subseteq 2^X \times 2^X$ , 对任意的 $A \in 2^X, B \in 2^X$ ,  $(A, B) \in R$ 当且仅当在 $A$ 与 $B$ 之间存在一个单射, 则 $R$ 为集合 $X$ 上的自反且传递的二元关系。

$R$ 为自反的, 这是因为对任意的 $A \in 2^X$ , 从 $A$ 到 $A$ 存在一个单射, 例如从 $A$ 到 $A$ 的恒等映射就是一个单射。

$R$ 为传递的, 这是因为对任意的 $A \in 2^X, B \in 2^X, C \in 2^X$ , 如果从 $A$ 到 $B$ 存在一个单射 $f$ , 从 $B$ 到 $C$ 存在一个单射 $g$ , 则从 $A$ 到 $C$ 存在一个单射 $g \circ f$ 。 $g \circ f$ 为单射, 这是因为对任意的 $x_1 \in A, x_2 \in A$ , 如果 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ , 则由 $g$ 为单射知 $f(x_1) = f(x_2)$ , 由 $f$ 为单射知 $x_1 = x_2$ 。

b) 证明: 只需证明 $\sim$ 为自反的, 对称的, 传递的二元关系。

对任意的 $x \in X$ , 由 $R$ 为自反的知 $xRx$ , 从而 $x \sim x$ , 这说明 $\sim$ 为自反的。

对任意的 $x \in X$ , 对任意的 $y \in X$ , 如果 $x \sim y$ , 则 $xRy$ 且 $yRx$ , 即 $yRx$ 且 $xRy$ , 从而 $y \sim x$ , 这说明 $\sim$ 为对称的。

对任意的 $x \in X$ , 对任意的 $y \in X$ , 对任意的 $z \in X$ , 如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ , 则 $xRy$ 且 $yRx$ ,  $yRz$ 且 $zRy$ , 由 $R$ 为传递的知 $xRz$ 且 $zRx$ , 从而 $x \sim z$ , 这说明 $\sim$ 为传递的。

综上验证了 $\sim$ 为 $X$ 上的等价关系。

c) 证明:

首先验证关于 $\leq$ 的定义的合理性: 对任意的 $a_1, a_2, b_1, b_2$ , 如果 $[a_1] \leq [b_1]$ ,  $a_1 \sim a_2$ ,  $b_1 \sim b_2$ , 则 $a_2 R a_1, a_1 R b_1, b_1 R b_2$ , 由 $R$ 的传递性知 $a_2 R b_2$ , 从而 $[a_2] \leq [b_2]$ 。

以下证明 $\leq$ 为自反的, 反对称的, 传递的二元关系。

对任意的 $x \in X$ , 由 $R$ 为自反的知 $x R x$ , 从而 $[x] \leq [x]$ , 这说明 $\leq$ 为自反的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $[x] \leq [y]$ 并且 $[y] \leq [x]$ , 则 $x R y$ 并且 $y R x$ , 从而 $x \sim y$ , 于是 $[x] = [y]$ , 这说明 $\leq$ 为反对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X$ , 如果 $[x] \leq [y]$ 并且 $[y] \leq [z]$ , 则 $x R y$ 并且 $y R z$ , 于是 $x R z$ , 即 $[x] \leq [z]$ , 这说明 $\leq$ 为传递的。

综上验证了 $\leq$ 为 $X/\sim$ 上的偏序关系。

**练习4.** 设有穷偏序集 $(X, \leq)$ 中有唯一极大元素 $x$ , 则 $x$ 为 $X$ 的最大元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $X$ 中元素的个数 $n$ 。

(1) 当 $n = 1$ 时,  $X = \{x\}$ , 则显然 $x$ 为 $X$ 的最大元素。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

设 $|X| = k + 1$ ,  $x$ 为 $X$ 的唯一极大元素, 以下证明 $x$ 为 $X$ 的最大元素。对任意的 $y \in X$ , 如果 $y = x$ , 则显然 $y \leq x$ 。当 $y \neq x$ 时, 由 $x$ 为 $X$ 的唯一极大元素知 $y$ 不是 $X$ 的极大元素, 从而存在 $z \in X, z > y$ 。关系 $\{(x, y) | x \in X \setminus \{y\}, y \in X \setminus \{y\}, x \leq y\}$ 构成集合 $X \setminus \{y\}$ 上的一个偏序关系。 $|X \setminus \{y\}| = k$ 。

此时,  $x$ 必为 $X \setminus \{y\}$ 的唯一极大元。否则, 如果存在元素 $a$ 为 $X \setminus \{y\}$ 的极大元,  $a \neq x$ , 由 $a$ 不是 $X$ 的极大元知 $a \leq y$ , 再由 $z > y$ 知 $z > a$ , 矛盾。由归纳假设,  $x$ 为 $X \setminus \{y\}$ 的最大元。由 $z \leq x$ 及 $z > y$ 知,  $y \leq x$ 。□

**练习5.** 设 $R, S$ 为集合 $X$ 上的等价关系。如果 $R \circ S$ 为等价关系, 则 $R \circ S = (R \cup S)^+$ 。

证法一. 首先证明 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

设 $T$ 为任意一个包含 $R \cup S$ 的传递关系。对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ S$ , 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$ 。从而 $(a, b) \in R \cup S \subseteq T, (b, c) \in R \cup S \subseteq T$ , 再由 $T$ 为传递关系知 $(a, c) \in T$ 。因此,  $R \circ S \subseteq T$ 。这证明了 $R \circ S \subseteq \bigcap_{R \cup S \subseteq T' \text{ 且 } T' \text{ 是传递的}} T' = (R \cup S)^+$ 。

其次证明 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

只需证明 $R \circ S$ 为包含 $R \cup S$ 的传递关系。对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \cup S$ , 则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$ , 此时由 $S$ 为等价关系知 $(c, c) \in S$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ ; 如果 $(a, c) \in S$ , 此时由 $R$ 为等价关系知 $(a, a) \in R$ , 从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。这证明了 $R \cup S \subseteq R \circ S$ 。由 $R \circ S$ 为等价关系知 $R \circ S$ 为传递的。□

证法二. 先证 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ S$ , 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$ , 从而 $(a, b) \in R \cup S$ 并且 $(b, c) \in R \cup S$ , 于是 $(a, c) \in (R \cup S)^2 \subseteq (R \cup S)^+$ 。

再证 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ , 由 $(a, c) \in (R \cup S)^+$ , 往证 $(a, c) \in R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in (R \cup S)^+$ ，则存在自然数 $n, n \geq 1$ ， $(a, c) \in (R \cup S)^n$ 。

以下用数学归纳法证明，对任意的自然数 $n, n \geq 1, (R \cup S)^n \subseteq R \circ S$ 。

(1)当 $n = 1$ 时，对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \cup S$ ，则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$ ，此时由 $S$ 为等价关系知 $(c, c) \in S$ ，从而 $(a, c) \in R \circ S$ ；如果 $(a, c) \in S$ ，此时由 $R$ 为等价关系知 $(a, a) \in R$ ，从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。

(2)假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立，往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

由 $R, S, R \circ S$ 都为 $X$ 上的等价关系知， $S \circ R = S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in (R \cup S)^{k+1} = (R \cup S)^k \circ (R \cup S)$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in (R \cup S)^k$ 并且 $(b, c) \in (R \cup S)$ 。由归纳假设， $(a, b) \in R \circ S$ 。如果 $(b, c) \in R$ ，那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ S = R^2 \circ S \subseteq R \circ S$ ；如果 $(b, c) \in S$ ，那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ S = R \circ (S \circ S) = R \circ S^2 \subseteq R \circ S$ 。

□