

设集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $f : M \rightarrow 2^M$, $\forall m \in M, f(m) = \{m\}$, 则

$$\{m \in M \mid m \notin f(m)\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- A. ϕ
- B. $\{1, 2\}$
- C. $\{2, 3\}$
- D. $\{1, 3\}$

设集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $f : M \rightarrow 2^M$, $f(1) = \phi$, $f(2) = \{1\}$, $f(3) = \{3\}$, 则

$$\{m \in M \mid m \notin f(m)\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- A. ϕ
- B. $\{1, 2\}$
- C. $\{2, 3\}$
- D. $\{1, 3\}$

练习

设 X 为一个有穷集合，证明：从 X 到 X 的部分映射共有 $(|X| + 1)^{|X|}$ 个。

练习

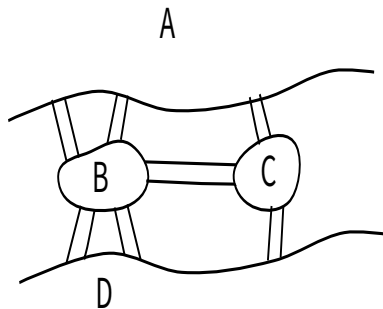
设 X 为一个集合, $|X| = n$, 试求:

- a) 集合 X 上自反二元关系的个数;
- b) 集合 X 上反自反二元关系的个数;
- c) 集合 X 上对称二元关系的个数;
- d) 集合 X 上反对称二元关系的个数。

第六章图的基本概念

陈建文

6.1 图论的产生与发展史概述





Sergey Brin and Lawrence Page

The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine.

WWW1997.

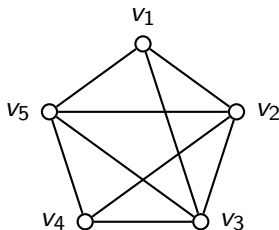
6.2 基本定义

设 V 为一个集合， V 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}。$$

定义2.1

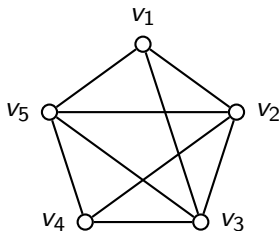
设 V 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 V 中的元素称为无向图 G 的**顶点**， V 为**顶点集**； E 中的元素称为无向图 G 的**边**， E 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 G 为一个 (p, q) 图，即 G 为一个具有 p 个顶点 q 条边的图。



6.2 基本定义

定义2.2

在图 $G = (V, E)$ 中, 如果 $\{u, v\} \in E$, 则称顶点 u 与 v 邻接; 若 x 与 y 为图 G 的两条边, 并且仅有一个公共顶点, 即 $|x \cap y| = 1$, 则称边 x 与 y 邻接; 如果 $x = \{u, v\}$ 为图 G 的一条边, 则称 u 与 x 互相关联, 同样的, 称 v 与 x 互相关联。



6.2 基本定义

定义2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为**多重图**，这些边称为**多重边**；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为**带环图**，这些边称为**环**；允许有环或多重边存在的图，称之为**伪图**。

6.2 基本定义

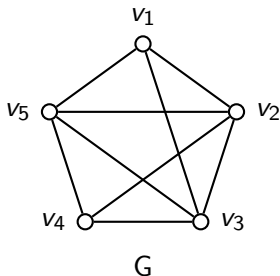
定义2.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $E = \Phi$, 则称 G 为**零图**; $(1, 0)$ 图称为**平凡图**。

6.2 基本定义

定义2.5

设 v 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， G 中与 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度，记为 $\deg v$ 。

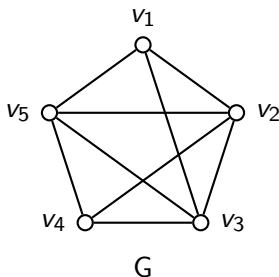


6.2 基本定义

定理2.1

设 $G = (V, E)$ 为一个具有 p 个顶点 q 条边的图, 则 G 中各顶点度的和等于边的条数 q 的两倍, 即

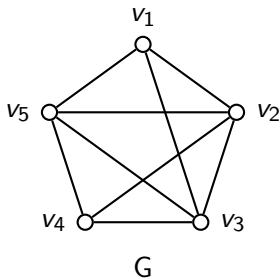
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$



6.2 基本定义

定理2.2

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

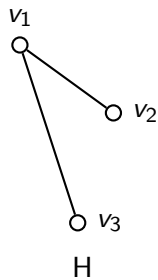
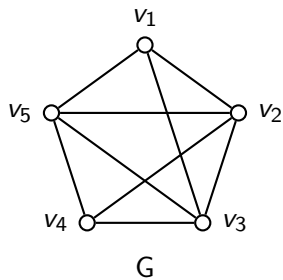


6.2 基本定义

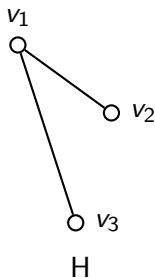
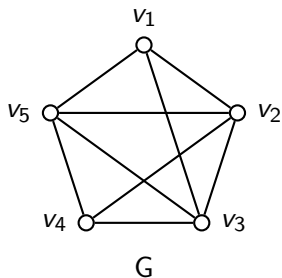
定义2.6

图 G 称为 r 度正则图，如果 G 的每个顶点的度都等于 r 。3度正则图也称为三次图。一个具有 p 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 p 个顶点的完全图，记为 K_p 。

6.2 基本定义



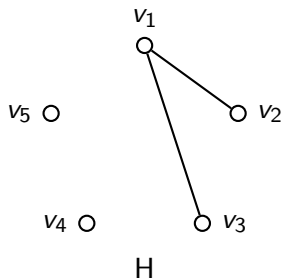
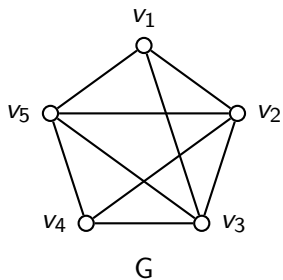
6.2 基本定义



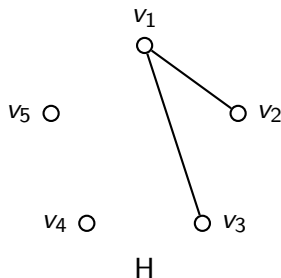
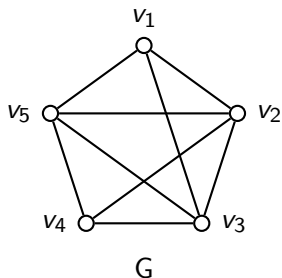
定义2.7

设 $G = (V, E)$ 为一个图，图 $H = (V_1, E_1)$ 称为 G 的一个子图，当且仅当 V_1 为 V 的非空子集且 E_1 为 E 的子集。如果 $H \neq G$ ，则称 H 为 G 的**真子图**。

6.2 基本定义



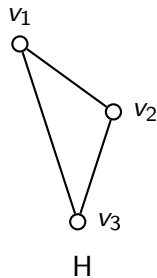
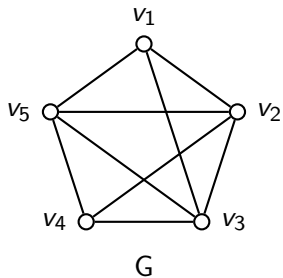
6.2 基本定义



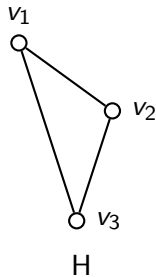
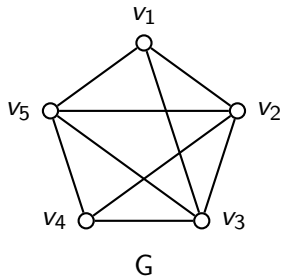
定义2.8

设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $F \subseteq E$ ，则称 G 的子图 $H = (V, F)$ 为 G 的一个生成子图。

6.2 基本定义



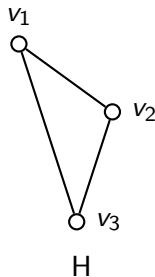
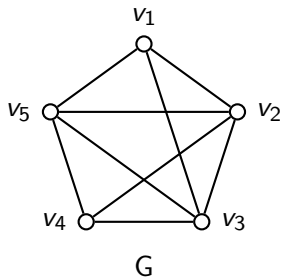
6.2 基本定义



定义2.9

设图 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图，则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

6.2 基本定义



定义2.9

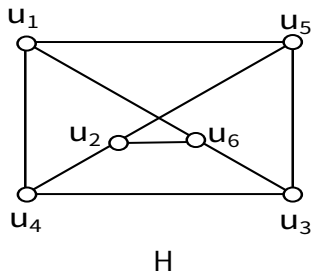
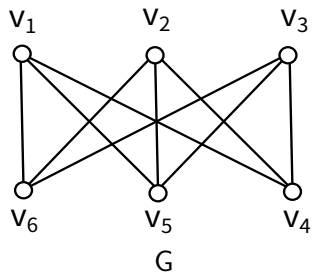
设图 G 的子图 H 具有某种性质, 若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图, 则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

定义2.10

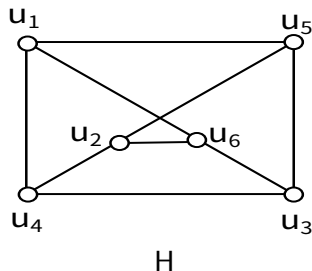
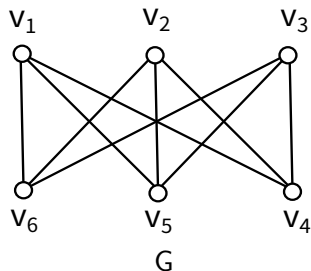
设 S 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 的非空子集, 则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图, 记为 $\langle S \rangle$ 。形式的,

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

6.2 基本定义



6.2 基本定义



定义2.11

设 $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ 为两个图, 如果存在一个一一对应 $\phi: V \rightarrow U$, 使得 $\{u, v\} \in E$ 当且仅当 $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$, 则称 G 与 H 同构。

练习

判断：设具有6个顶点的图 G 和图 G' 各顶点的度都是依次为3,3,3,3,3,3，则 G 和 G' 同构。

练习

画出具有4个顶点的所有无向图（同构的只算一个）。

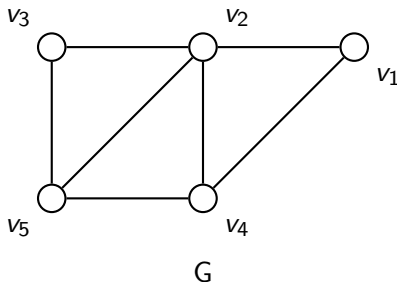
6.3 路、圈、连通图

定义3.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图。 G 的一条通道是 G 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

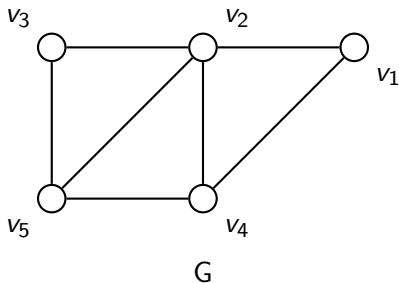
其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。



6.3 路、圈、连通图

定义3.2

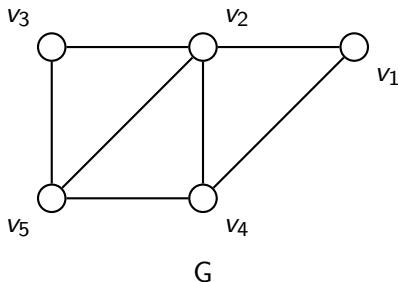
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称此闭通道为闭迹。



6.3 路、圈、连通图

定义3.3

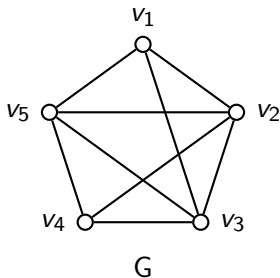
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果一条长度大于0的闭迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭迹为**圈**，或**回路**。



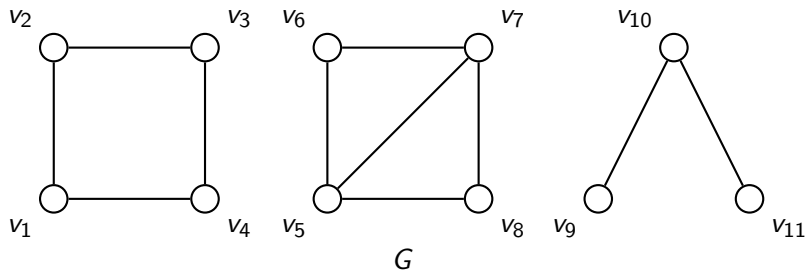
6.3 路、圈、连通图

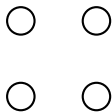
定义3.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 G 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 G 为一个**连通图**。

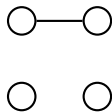


6.3 路、圈、连通图

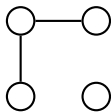




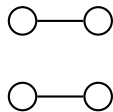
A



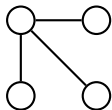
B



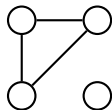
C



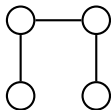
D



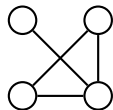
E



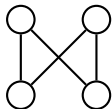
F



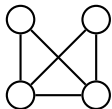
G



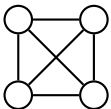
H



I



J

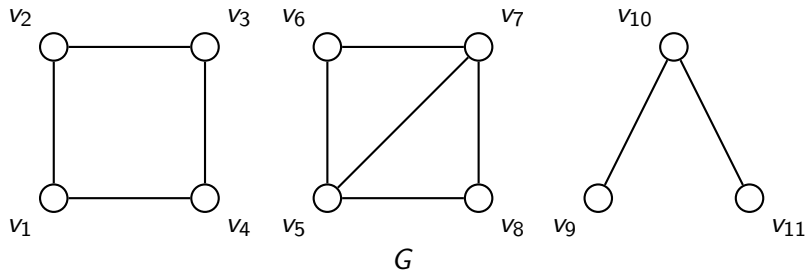


K

6.3 路、圈、连通图

定义3.5

图 G 的极大连通子图称为 G 的一个支。



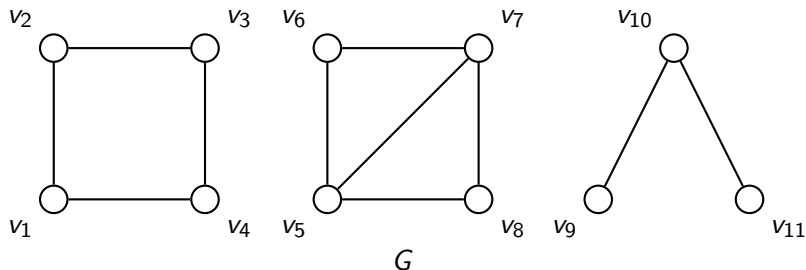
6.3 路、圈、连通图

定理3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

$\forall u, v \in V, u \cong v$ 当且仅当 u 与 v 间有一条路，

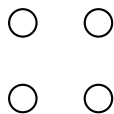
则 \cong 为 V 上的等价关系， G 的支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。



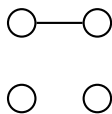
6.4 补图、偶图

定义4.1

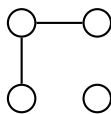
设 $G = (V, E)$ 是一个图, 图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。



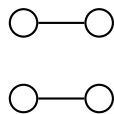
A



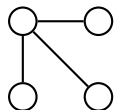
B



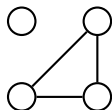
C



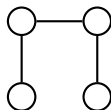
D



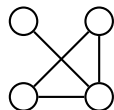
E



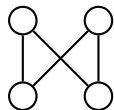
F



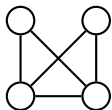
G



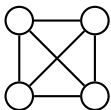
H



I



J



K

6.4 补图、偶图

定义4.2

如果 G 与 G^c 同构，则称 G 为自补图。

6.4 补图、偶图

定理4.1

对任一有6个顶点的图 G ， G 中或 G^c 中有一个三角形。

证明.

设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, 考虑顶点 v_1 。

- ▶ 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点 v_1 相邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中，存在两个顶点相邻接，此时 G 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中，任意两个顶点都不邻接，此时 G^c 中存在三角形。
- ▶ 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点 v_1 不邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中，存在两个顶点不邻接，此时 G^c 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中，任意两个顶点互相邻接，此时 G 中存在三角形。

6.4 补图、偶图

定义4.3

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 G 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中, 另一个在 V_2 中, 则称 G 为**偶图**。如果 $\forall u \in V_1, v \in V_2$ 均有 $uv \in E$, 则称 G 为**完全偶图**, 记为 $K_{m,n}$, 其中 $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

6.4 补图、偶图

定义4.4

设 $G = (V, E)$ 是一个图, u 和 v 是 G 的顶点。联结 u 和 v 的最短路的长称为 u 与 v 之间的**距离**, 并记为 $d(u, v)$ 。如果 u 与 v 间在 G 中没有路, 则定义 $d(u, v) = \infty$ 。

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) ,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G .

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$. Since $v_0 \in X$,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$. Since $v_0 \in X$, $v_k \in Y$.

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$. Since $v_0 \in X$, $v_k \in Y$. Thus $k = 2i + 1$, for some i ,

6.4 补图、偶图

定理4.2

图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

A graph is bipartite if and only if it contains no cycles with odd lengths.

Proof.

Suppose that G is bipartite with bipartition (X, Y) , and let $C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$ be a cycle of G . Without loss of generality we may assume that $v_0 \in X$. Then, since $v_0 v_1 \in E$ and G is bipartite, $v_1 \in Y$. In general, $v_{2i} \in X$ and $v_{2i+1} \in Y$. Since $v_0 \in X$, $v_k \in Y$. Thus $k = 2i + 1$, for some i , and it follows that C is even.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G .

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X .

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q .

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w ,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge vw would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis.

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis. Therefore no two vertices in X are adjacent;

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

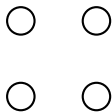
We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis. Therefore no two vertices in X are adjacent; similarly,

It clearly suffices to prove the converse for connected graphs. Let G be a connected graph that contains no odd cycles. We choose an arbitrary vertex u and define a partition (X, Y) of V by setting

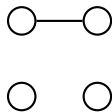
$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ is even}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ is odd}\}$$

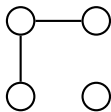
We shall show that (X, Y) is a bipartition of G . Suppose that v and w are two vertices of X . Let P be a shortest (u, v) -path and Q be a shortest (u, w) -path. Denote by u_1 the last vertex common to P and Q . Since P and Q are shortest paths, the (u, u_1) -sections of both P and Q are shortest (u, u_1) -paths and, therefore, have the same length. Now, since the lengths of both P and Q are even, the lengths of the (u_1, v) -section P_1 of P and the (u_1, w) -section Q_1 of Q must have the same parity. It follows that the (v, w) -path from v to u_1 along P_1 reversely and then from u_1 to w along Q_1 is of even length. If v were joined to w , the path from v to u_1 along P_1 reversely, from u_1 to w along Q_1 and then from w to v along the edge wv would be a cycle of odd length, contrary to the hypothesis. Therefore no two vertices in X are adjacent; similarly, no two vertices in Y are adjacent.



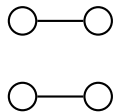
A



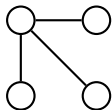
B



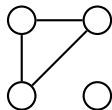
C



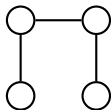
D



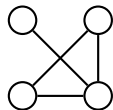
E



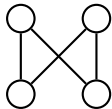
F



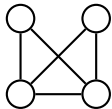
G



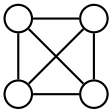
H



I



J



K

6.4 补图、偶图

定理4.3

所有具有 p 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。由 v_0 为 G 中度最大的顶点知对任意的 $v \in V$ ，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。由 v_0 为 G 中度最大的顶点知对任意的 $v \in V$ ， v 在 G 中的度 $d(v)$ 小于等于 v 在 G' 中的度 $d'(v)$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。由 v_0 为 G 中度最大的顶点知对任意的 $v \in V$ ， v 在 G 中的度 $d(v)$ 小于等于 v 在 G' 中的度 $d'(v)$ 。而一个图中所有顶点的度数之和为边数的两倍，

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：我们证明如下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。设 G 为一个没有三角形，包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图。设 V 为 G 的顶点集合， v_0 为 G 中度最大的顶点， V_1 为所有与 v_0 邻接的顶点构成的集合， $V_2 = V \setminus V_1$ 。以下证明 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 最多相差1，从而完成定理的证明。

首先，由 V_1 中的每个顶点都与 v_0 邻接， G 中没有三角形知 V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接。

构造一个完全偶图 G' ， G' 的顶点集为 $V_1 \cup V_2$ ， V_1 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_2 中任意两个不同的顶点互相不邻接， V_1 和 V_2 中的任意两个顶点互相邻接。由 v_0 为 G 中度最大的顶点知对任意的 $v \in V$ ， v 在 G 中的度 $d(v)$ 小于等于 v 在 G' 中的度 $d'(v)$ 。而一个图中所有顶点的度数之和为边数的两倍，从而 G 中的边数 q 小于等于 G' 中的边数 q' ，即

$$q \leq |V_1||V_2| \quad (1)$$

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil \quad (2)$$

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil \quad (2)$$

由 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 知(1)式和(2)式中的等号成立。

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil \quad (2)$$

由 $q \geq \lceil \frac{p^2}{4} \rceil$ 知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在 G 中 V_1 中的每个顶点必与 V_2 中的每个顶点邻接,

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \left\lceil \frac{p^2}{4} \right\rceil \quad (2)$$

由 $q \geq \left\lceil \frac{p^2}{4} \right\rceil$ 知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在 G 中 V_1 中的每个顶点必与 V_2 中的每个顶点邻接，再由 G 中没有三角形知， V_2 中任意两个不同的顶点在 G 中不邻接。

易验证

$$|V_1||V_2| \leq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor \quad (2)$$

由 $q \geq \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor$ 知(1)式和(2)式中的等号成立。由(1)式中的等号成立知在 G 中 V_1 中的每个顶点必与 V_2 中的每个顶点邻接，再由 G 中没有三角形知， V_2 中任意两个不同的顶点在 G 中不邻接。由 $|V_1| + |V_2| = p$ 知(2)中的等式成立当且仅当 $|V_1|$ 与 $|V_2|$ 最多相差1。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。施归纳于顶点数 p ,

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。施归纳于顶点数 p ，只证 p 为奇数的情况， p 为偶数的情况是类似的。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor)$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。施归纳于顶点数 p ，只证 p 为奇数的情况， p 为偶数的情况是类似的。

1) 当 $p = 1$ 时，唯一没有三角形的包含一个顶点且边数 $q \geq 0$ 的图一定为 $K(0, 1)$ ，结论显然成立。

练习

证明：唯一没有三角形的 $(p, [\frac{p^2}{4}])$ 图为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。

证明：用数学归纳法证明以下结论：唯一没有三角形的包含 p 个顶点且边数 $q \geq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ 的图一定为 $K(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil)$ 。施归纳于顶点数 p ，只证 p 为奇数的情况， p 为偶数的情况是类似的。

1) 当 $p = 1$ 时，唯一没有三角形的包含一个顶点且边数 $q \geq 0$ 的图一定为 $K(0, 1)$ ，结论显然成立。（注：我们把 $(1, 0)$ 图也称为偶图，并记为 $K(0, 1)$ 或 $K(1, 0)$ ）。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。图 $G' = G - \{u\} - \{v\}$ 中没有三角形, 有 $2k - 1$ 个顶点。

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。图 $G' = G - \{u\} - \{v\}$ 中没有三角形, 有 $2k - 1$ 个顶点。因为 G 中没有三角形, 如果 u 与 G' 的 x 个顶点邻接, 则 v 至多能与 G' 中剩余的 $2k - 1 - x$ 个顶点邻接,

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。图 $G' = G - \{u\} - \{v\}$ 中没有三角形, 有 $2k - 1$ 个顶点。因为 G 中没有三角形, 如果 u 与 G' 的 x 个顶点邻接, 则 v 至多能与 G' 中剩余的 $2k - 1 - x$ 个顶点邻接, 于是 G' 中的边数

$$\begin{aligned} q' &\geq q - x - (2k - 1 - x) - 1 \\ &\geq [\frac{(2k + 1)^2}{4}] - 2k \\ &= k^2 - k \\ &= [\frac{(2k - 1)^2}{4}] \end{aligned}$$

2) 假设当 $p = 2k - 1 (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $p = 2k + 1$ 时结论也成立。设 G 为一个没有三角形, 顶点数 $p = 2k + 1$, 边数 $q \geq [\frac{p^2}{4}]$ 的图。显然, G 中至少有两个邻接的顶点 u 和 v 。图 $G' = G - \{u\} - \{v\}$ 中没有三角形, 有 $2k - 1$ 个顶点。因为 G 中没有三角形, 如果 u 与 G' 的 x 个顶点邻接, 则 v 至多能与 G' 中剩余的 $2k - 1 - x$ 个顶点邻接, 于是 G' 中的边数

$$\begin{aligned} q' &\geq q - x - (2k - 1 - x) - 1 \\ &\geq [\frac{(2k + 1)^2}{4}] - 2k \\ &= k^2 - k \\ &= [\frac{(2k - 1)^2}{4}] \end{aligned}$$

由归纳假设, G' 为 $K(\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{2k-1}{2} \rceil)$, 即 $K(k - 1, k)$ 。以下证明 G 必为 $K(k, k + 1)$ 。

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中, $|V_1| = k - 1$, $|V_2| = k$ 。

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中, $|V_1| = k - 1$, $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中, $|V_1| = k - 1$, $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外, V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接, 否则, G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$, 矛盾。

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中, 一个在 V_2 中, $|V_1| = k - 1$, $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外, V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接, 否则, G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$, 矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接,

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$ ，使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中，一个在 V_2 中， $|V_1| = k - 1$ ， $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外， V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接，否则， G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$ ，矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接，由 G 中没有三角形知 v 不能与 V_1 中的顶点相邻接，

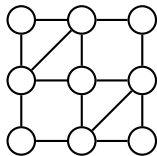
假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$ ，使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中，一个在 V_2 中， $|V_1| = k - 1$ ， $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外， V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接，否则， G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$ ，矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接，由 G 中没有三角形知 v 不能与 V_1 中的顶点相邻接，从而 u 与 V_1 中每个顶点相邻接，

假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$ ，使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中，一个在 V_2 中， $|V_1| = k - 1$ ， $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外， V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接，否则， G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$ ，矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接，由 G 中没有三角形知 v 不能与 V_1 中的顶点相邻接，从而 u 与 V_1 中每个顶点相邻接， v 与 V_2 中的每个顶点相邻接。

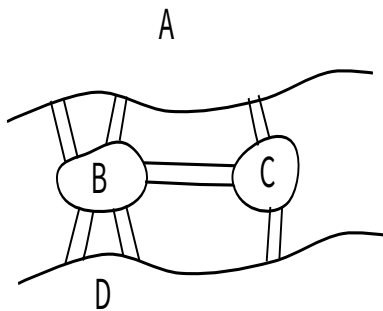
假设偶图 G' 的顶点集有一个二划分为 $\{V_1, V_2\}$ ，使得 G' 的任意一条边的两个端点一个在 V_1 中，一个在 V_2 中， $|V_1| = k - 1$ ， $|V_2| = k$ 。由 G 中没有三角形知 V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中至多与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接。另外， V_1 和 V_2 中的每个顶点在 G 中必与顶点 u 和顶点 v 中的一个邻接，否则， G 中的边数 $q < (k - 1)k + (2k - 1) + 1 = k^2 + k = \lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \rceil$ ，矛盾。不妨设在 G 中 V_2 中的某个顶点与 v 相邻接，由 G 中没有三角形知 v 不能与 V_1 中的顶点相邻接，从而 u 与 V_1 中每个顶点相邻接， v 与 V_2 中的每个顶点相邻接。这证明了 G 为 $K(k, k + 1)$ 。

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

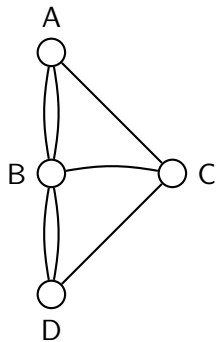
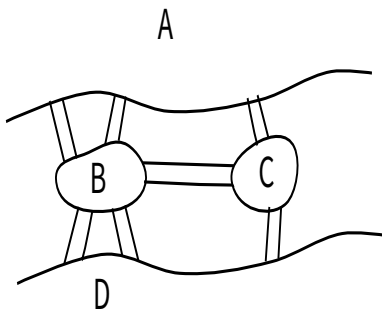
判断题：下列图为欧拉图。



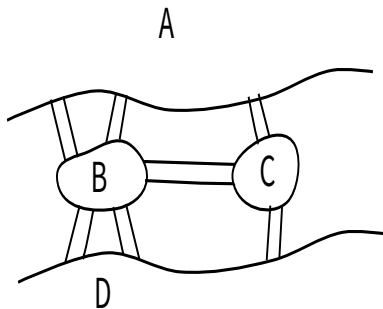
6.5 欧拉图



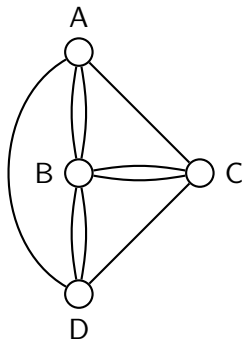
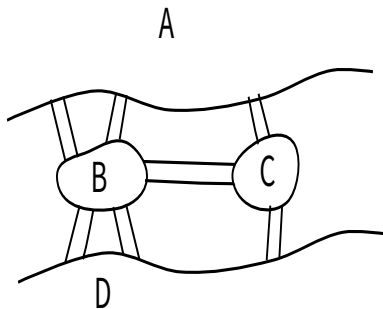
6.5 欧拉图



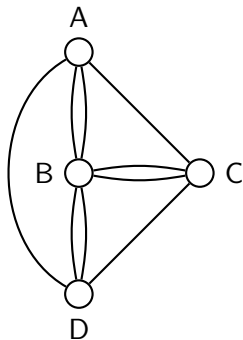
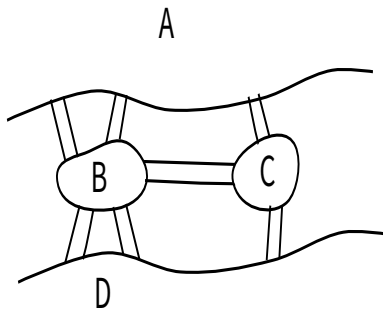
6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



定义5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

6.5 欧拉图

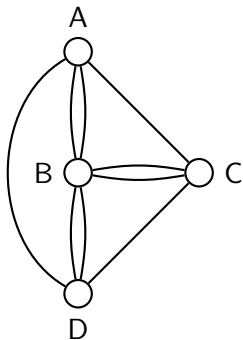
定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。



6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先，假设图 G 为欧拉图，往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先，假设图 G 为欧拉图，往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ ，其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联，最后一次出现与一条边相关联，其余的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先，假设图 G 为欧拉图，往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ ，其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联，最后一次出现与一条边相关联，其余的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。除 v_0 之外的其他顶点在 T 中的每次出现均与两条边相关联，

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明.

首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。除 v_0 之外的其他顶点在 T 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度也为偶数。



6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

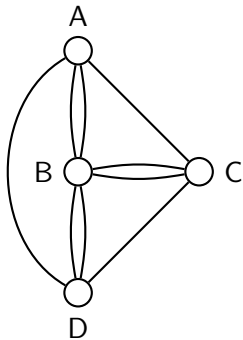
证明(续上页).

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).



6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z ,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有出现在 Z 中,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有边。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' ,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹 (与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹 (与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。于是 Z 和 Z' 可以联结成一条更长的迹,

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明(续上页).

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有的边。若不然, 则图 G 中存在一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹(与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。于是 Z 和 Z' 可以联结成一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。

6.5 欧拉图

定义5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为**欧拉迹**。一条欧拉迹如果不是欧拉闭迹，则称其为**欧拉开迹**。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n,$

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外,

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数;

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理,

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联,

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 有一条欧拉开迹 $Z : v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 G 恰有两个奇度顶点。



6.5 欧拉图

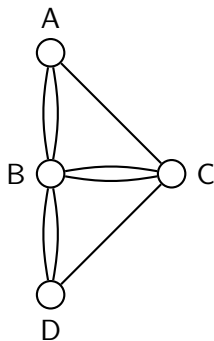
定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。



6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的,

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，得到图 G' 。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数，

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 u 与顶点 v 之间的边，

6.5 欧拉图

定理5.2

图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明.

设图 G 是连通的，且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边，得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 u 与顶点 v 之间的边，便得到了图 G 的一条欧拉开迹。 \square

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

6.5 欧拉图

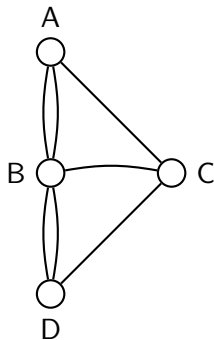
定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。



6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$,

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹， $m < n$ 。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹， $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹， $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图 G 至多有 $2m$ 个奇度顶点，

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 为连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

证明.

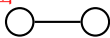
设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，得到图 G' 。则 G' 是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ ，则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹， $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图 G 至多有 $2m$ 个奇度顶点，这与图 G 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。 \square

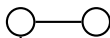
包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。



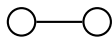
A



B



C



D



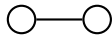
E



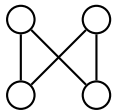
F



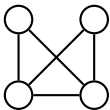
G



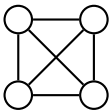
H



I

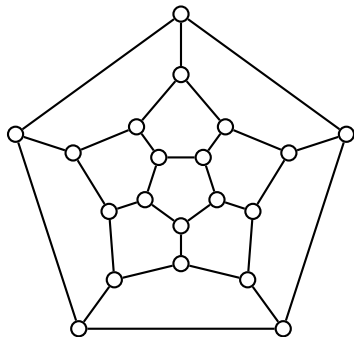


J



K

6.6 哈密顿图

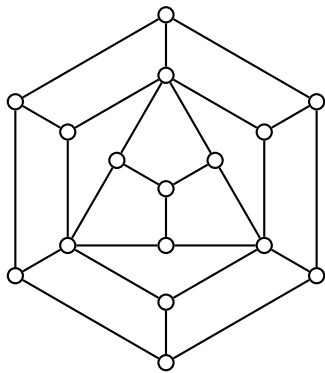


6.6 哈密顿图

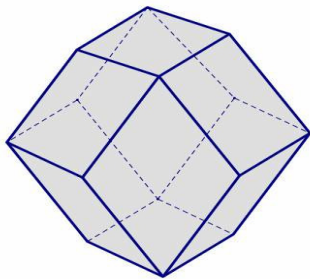
定义6.1

图 G 的一条包含所有顶点的路称为 G 的一条哈密顿路;图 G 的一个包含所有顶点的圈称为 G 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

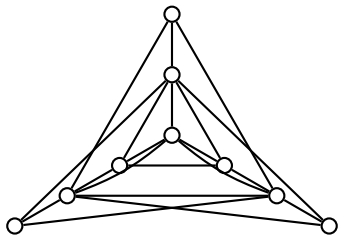
定理6.1

设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 V 的每个非空子集 S ，均有

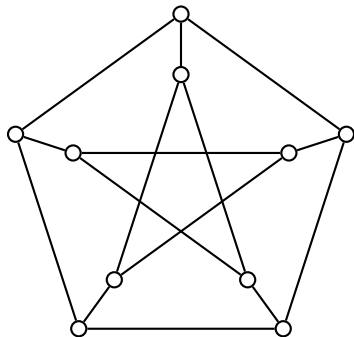
$$\omega(G - S) \leq |S|$$

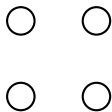
其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

6.6 哈密顿图

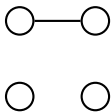


6.6 哈密顿图

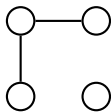




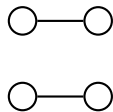
A



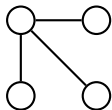
B



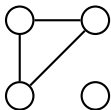
C



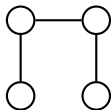
D



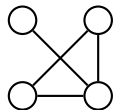
E



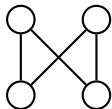
F



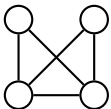
G



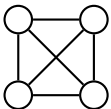
H



I



J



K

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支，

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 V_1 中的任意一个顶点 u 和 V_2 中的任意一个顶点 v ，

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 V_1 中的任意一个顶点 u 和 V_2 中的任意一个顶点 v ，则顶点 u 和顶点 v 不邻接并且

$$\deg u + \deg v \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = p - 2$$

6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明.

用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支，其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 V_1 中的任意一个顶点 u 和 V_2 中的任意一个顶点 v ，则顶点 u 和顶点 v 不邻接并且

$$\deg u + \deg v \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = p - 2$$

矛盾。



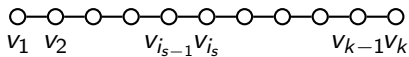
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



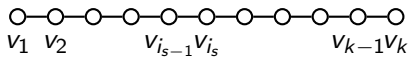
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

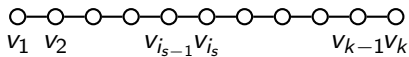
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。

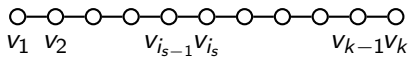
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。

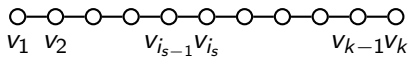
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。
设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$,

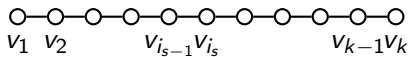
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

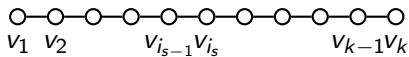
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。
设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。
用反证法，假设 $k < p$ 。

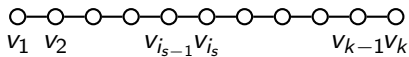
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。
设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。
用反证法，假设 $k < p$ 。易验证此时 $k \geq 3$ 。

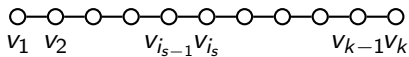
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。易验证此时 $k \geq 3$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在一个圈上。

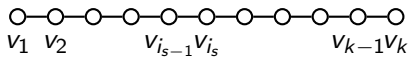
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。易验证此时 $k \geq 3$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ 中的顶点邻接，

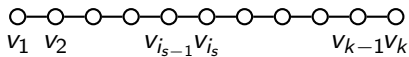
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

当 $p = 1, 2, 3$ 时，易验证结论成立。以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立。

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。易验证此时 $k \geq 3$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ 中的顶点邻接， v_k 只能与 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。

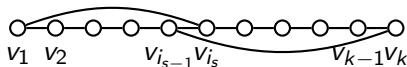
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）。

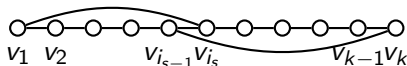
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接，

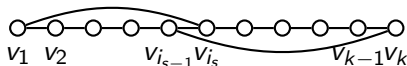
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$,

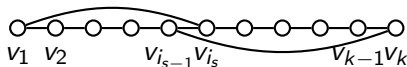
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。

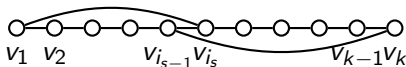
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）。

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接， $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$ ，则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则，

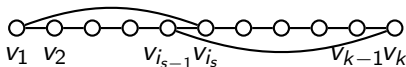
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接,

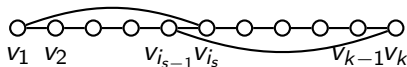
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）。

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接， $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$ ，则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则， v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

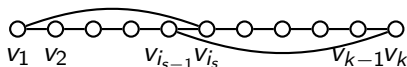
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。

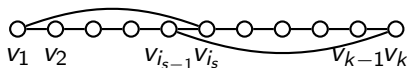
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接， $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$ ，则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则， v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是，

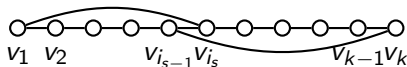
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 为 G 中的一个圈。

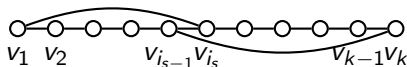
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

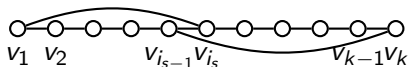
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的，

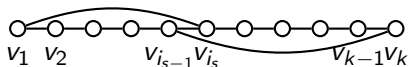
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$,

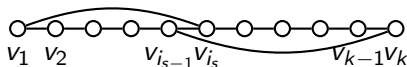
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$ ，所以 G 必有某个顶点 v ，

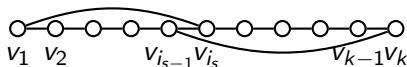
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$ ，所以 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，

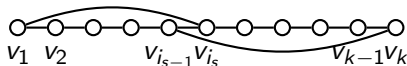
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$ ，所以 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。

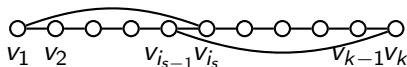
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$ ，所以 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一条更长的路，

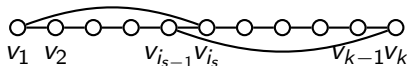
6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明（续上页）.

由于 G 为连通的， $k < p$ ，所以 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一条更长的路，这就出现了矛盾。



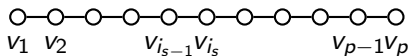
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



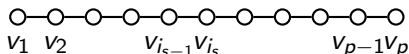
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明.

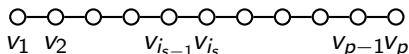
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明.

由定理6.3知, G 有哈密顿路, 记为 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 。

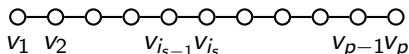
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明.

由定理6.3知， G 有哈密顿路，记为 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 。

以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 必在同一个圈上，

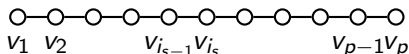
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明.

由定理6.3知， G 有哈密顿路，记为 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 。

以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 必在同一个圈上，从而 G 中有哈密顿圈。

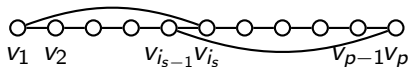
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明 (续上页).

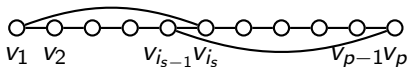
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接,

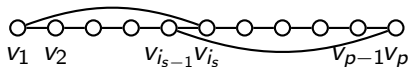
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。

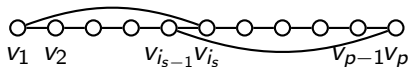
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 p ($p \geq 3$)个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则,

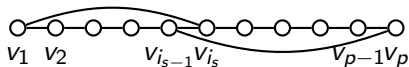
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接,

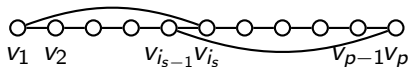
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 p ($p \geq 3$)个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_p \leq r + ((p-1) - r) = p-1$$

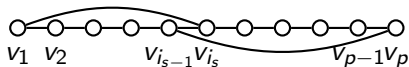
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_p \leq r + ((p-1) - r) = p-1$$

与已知条件矛盾。

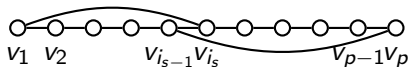
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。



证明（续上页）.

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_p \leq r + ((p-1) - r) = p-1$$

与已知条件矛盾。于是,

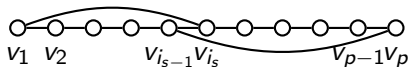
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为有 p ($p \geq 3$)个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。

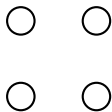


证明 (续上页) .

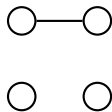
设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_p \leq r + ((p-1) - r) = p-1$$

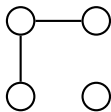
与已知条件矛盾。于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_{s-1}} v_p v_{p-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 为 G 中的一个圈。



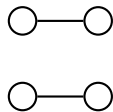
A



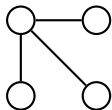
B



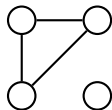
C



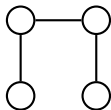
D



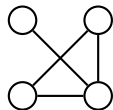
E



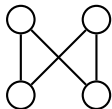
F



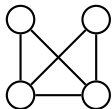
G



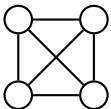
H



I



J



K

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立,

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设,

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和

6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和知 $(A^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数。 □

习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明.

当 $q > p + 4$ 时, 可以在 G 中任意去掉一些边, 使得剩余的边数恰好比顶点数多 4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈, 则原来的图 G 中也一定有两个边不重的圈。因此, 以下只需证

当 $q = p + 4$ 时, 图 G 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时, 图 G 最多有 $p(p-1)/2$ 条边, 易验证此

时 $q = p + 4$ 不可能成立。当 $p = 5$ 时, $q = 9$ 。设此时图 G 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 除了 v_1 和 v_5 之间没有边关联之外, 其余的任意两个顶点之间均有边关联, 则此时 $v_1 v_2 v_3 v_1$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_3$ 就是图 G 中两个边不重的圈。



习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 G 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证:

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为0的顶点和任意一条边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。



习题

设 G 是一个 (p, q) 图，证明：若 $q \geq p + 4$ ，则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时，设 u 为图 G 中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为 v 和 w 。分两种情况讨论。在第一种情况下， v 和 w 之间没有边关联，去掉顶点 u 及其与之关联的两条边 uv 和 uw ，添加一条边 vw ，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 G' 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 vw 不在这两个圈上，则这两个圈就是图 G 中两个边不重的圈；如果新添加的边 vw 在其中的一个圈上，将其替换为图 G 中的两条边 vu 和 uw ，则所得到的圈与另一个圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。在第二种情况下， v 和 w 之间有边关联，此时 $uvwu$ 构成图 G 中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边。此时 $q' = p' + 1$ ，因此图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中的圈 $uvwu$ 构成图 G 中两个边不重的圈。 □

习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iv) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时, $2q \geq 3p$, 即 $2(p + 4) \geq 3p$, 可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 G 中有长度小于等于4的圈, 将其上的4条边去掉, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边。则 $q' \geq p'$, 图 G' 中必定有一个圈, 与原来图 G 中去掉的边所构成的圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。若图 G 中所有圈的长度至少为5, 设 C 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 C 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接, 而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接, 否则将产生一个长度更小的圈。由圈 C 上至少有5个顶点知图 G 中至少有10个顶点, 与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 G 中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。 □

习题

练习

在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友
($2 \leq m \leq n$)。试证：有不少于 $m+1$ 个人，使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

练习

设 G 是图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 包含长至少是 $\delta(G) + 1$ 的圈。

练习

若 G 是一个 (p, q) 图， $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ ，试证 G 是连通图。