

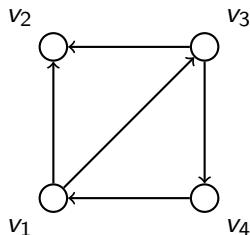
第十章有向图

陈建文

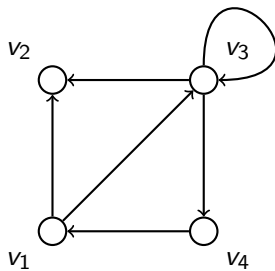
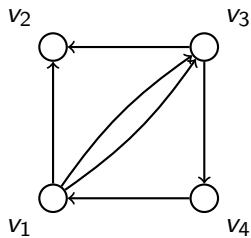
1. 有向图的概念

定义1.1

设 V 为一个有穷非空集合, $A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$, 二元组 $D = (V, A)$ 称为一个有向图。 V 称为有向图 D 的顶点集, V 中的元素称为 D 的顶点。 A 称为 D 的弧集或有向边集, A 中的元素称为 D 的弧或有向边。如果 $x = (u, v) \in A$, 则 u 称为弧 x 的起点, v 称为弧 x 的终点。



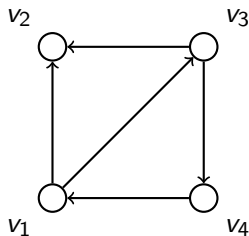
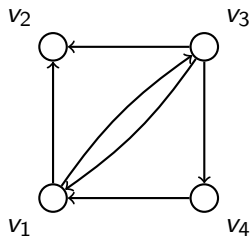
1. 有向图的概念



1. 有向图的概念

定义1.2

如果 (u, v) 和 (v, u) 都是有向图 D 的弧，则称 (u, v) 与 (v, u) 为 D 的**对称弧**。如果 D 中不含对称弧，则称 D 为**定向图**。

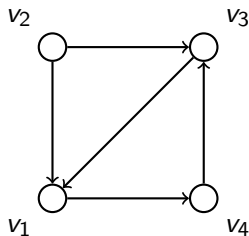
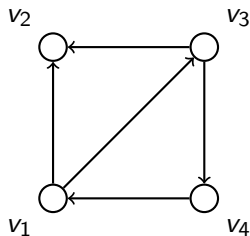


1. 有向图的概念

定义1.3

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, D 的**反向图**为有向图 $D^T = (V, A^T)$, 其中

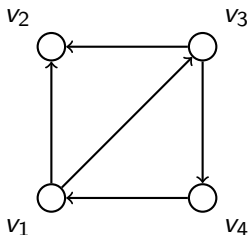
$$A^T = \{(u, v) | (v, u) \in A\}$$



1. 有向图的概念

定义1.4

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图， v 为 D 的任一顶点，以 v 为终点的弧称为 v 的入弧；以 v 为始点的弧称为 v 的出弧。顶点 v 的入弧的条数称为 v 的入度，记为 $id(v)$ ；顶点 v 的出弧的条数称为 v 的出度，记为 $od(v)$ 。



1. 有向图的概念

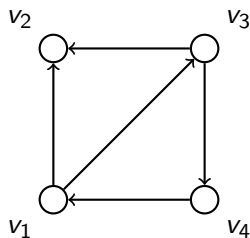
定理1.1

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $|A| = q$, 则

$$\sum_{v \in V} id(v) = \sum_{v \in V} od(v) = q$$

从而

$$\sum_{v \in V} (id(v) + od(v)) = 2q$$

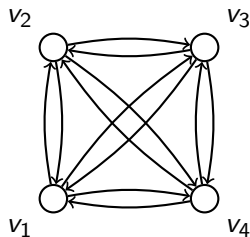


1. 有向图的概念

定义1.5

有向图 $D = (V, A)$ 称为**完全有向图**，如果

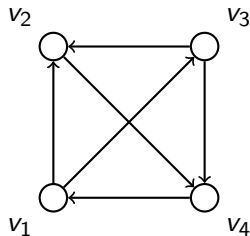
$$A = V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$$



1. 有向图的概念

定义1.6

一个**比赛图**为一个定向完全图，即任两个不同顶点间有且仅有一条弧。

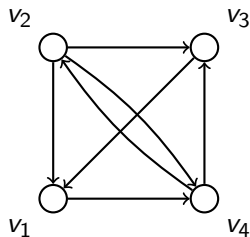
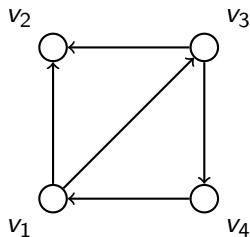


1. 有向图的概念

定义1.7

有向图 $D = (V, A)$ 的补图定义为 $D^c = (V, A^c)$, 其中

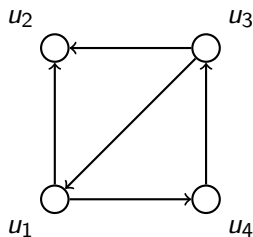
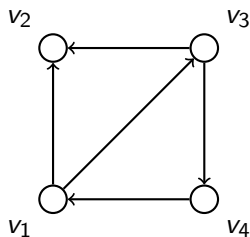
$$A^c = (V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}) \setminus A$$

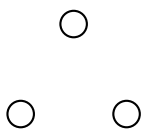


1. 有向图的概念

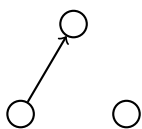
定义1.8

设 $D_1 = (V_1, A_1)$, $D_2 = (V_2, A_2)$ 都为有向图, 如果存在一个一一对应 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, 使得 $\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$ 当且仅当 $(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$, 则称 D_1 与 D_2 同构。

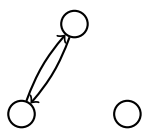




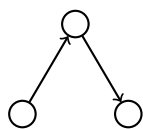
A



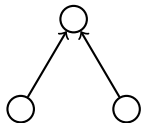
B



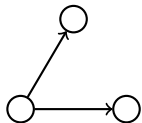
C



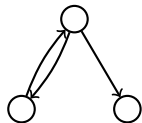
D



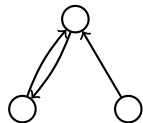
E



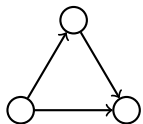
F



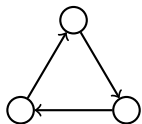
G



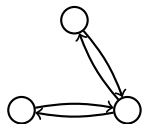
H



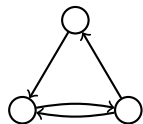
I



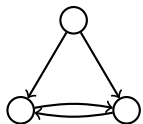
J



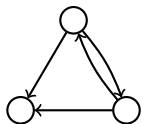
K



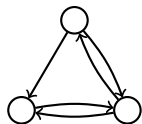
L



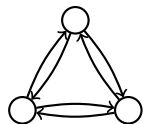
M



N



O

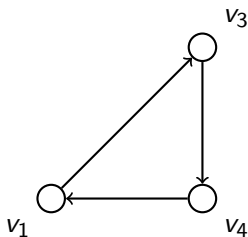
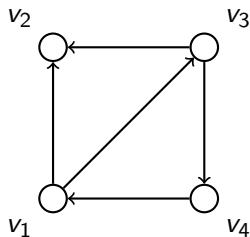


P

1. 有向图的概念

定义1.9

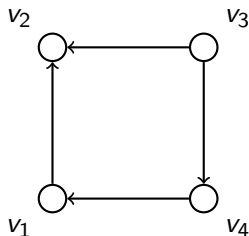
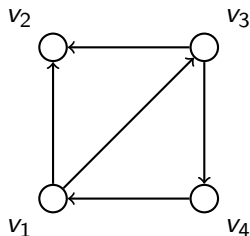
设 $D = (V, A)$ 为一个有向图，有向图 $H = (V_1, A_1)$ 称为 D 的一个子图，如果 V_1 为 V 的非空子集， A_1 为 A 的子集。如果 $H \neq D$ ，则称 H 为 D 的真子图。



1. 有向图的概念

定义1.10

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图，如果 $F \subseteq A$ ，则称 D 的子图 $H = (V, F)$ 为 D 的一个生成子图。

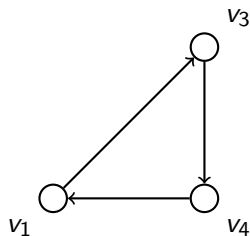
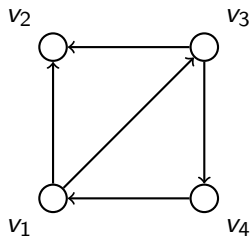


1. 有向图的概念

定义1.11

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, 如果 $S \subseteq V$, 则 S 的导出子图定义为 $H = (S, F)$, 其中

$$F = \{(u, v) \in A \mid u \in S, v \in S\}$$



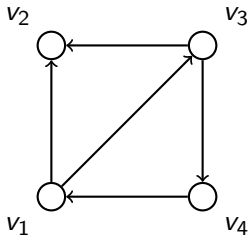
2. 有向路和有向圈

定义2.1

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图。 D 的一条有向通道为 D 的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

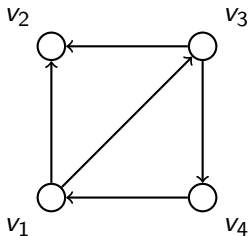
其中 $x_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。 n 称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为 $v_0 - v_n$ 有向通道, 并简记为 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时, 则称此有向通道为闭有向通道。



2. 有向路和有向圈

定义2.2

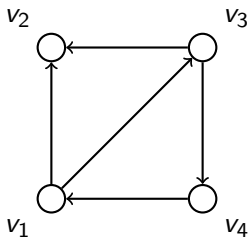
如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的有向迹。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为闭有向迹。



2. 有向路和有向圈

定义2.3

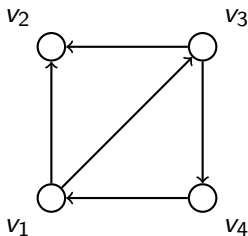
如果一条有向通道上的各顶点互不相同，则称此有向通道为**有向路**。如果一条长度大于0的闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为**有向圈**，或**有向回路**。

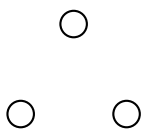


2. 有向路和有向圈

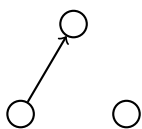
定义2.4

含有向图 D 的所有顶点的有向圈称为 D 的生成有向圈，或有向哈密顿圈。有生成有向圈的有向图称为有向哈密顿图。含有向图 D 的所有顶点的有向路称为 D 的生成有向路，或有向哈密顿路。

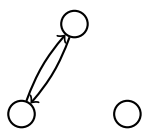




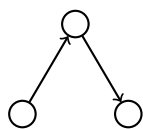
A



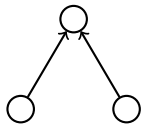
B



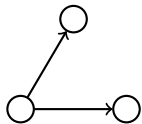
C



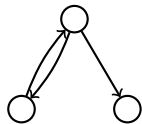
D



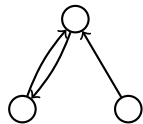
E



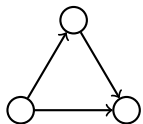
F



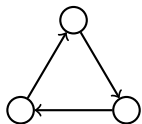
G



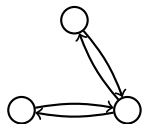
H



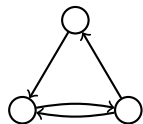
I



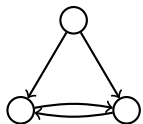
J



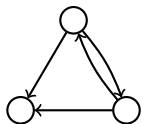
K



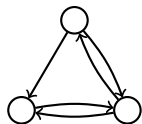
L



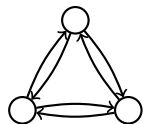
M



N



O

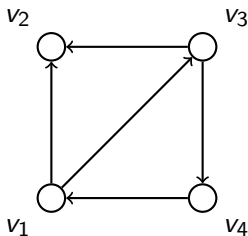


P

2. 有向路和有向圈

定义2.5

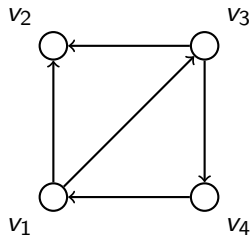
设 $D = (V, A)$ 为一个有向图， u 和 v 为 D 的顶点。如果在 D 中有一条从 u 到 v 的有向路，则称从 u 能达到 v ，或者 v 是从 u 可达的。

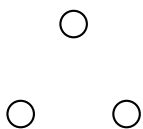


2. 有向路和有向圈

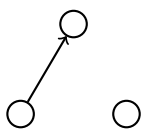
定义2.6

有向图 D 称为是**强连通**的，如果对 D 的任两个不同的顶点 u 和 v ， u 和 v 是互达的。

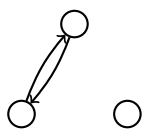




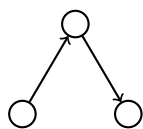
A



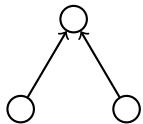
B



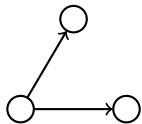
C



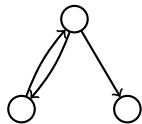
D



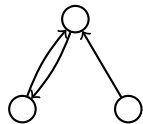
E



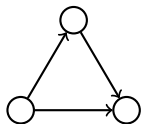
F



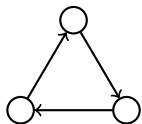
G



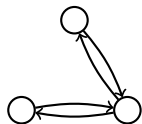
H



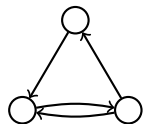
I



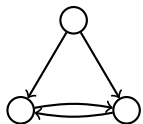
J



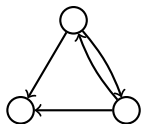
K



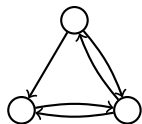
L



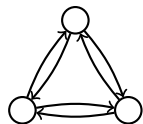
M



N



O



P

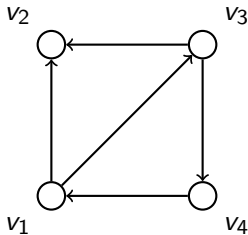
定理2.1

有向图 $D = (V, A)$ 为强连通的，当且仅当 D 有一条闭生成通道。

2. 有向路和有向圈

定义2.7

有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个**强支**。



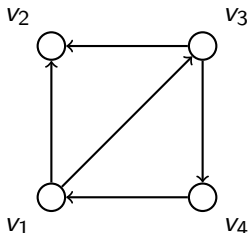
2. 有向路和有向圈

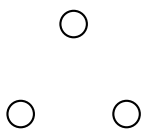
定理2.2

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

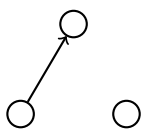
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 互达}$$

则 \cong 是 V 上的等价关系， D 的强支就是顶点集 V 关于 \cong 的每个等价类的导出子图。

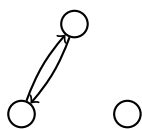




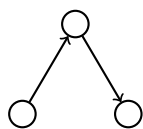
A



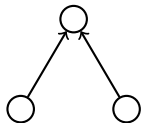
B



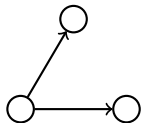
C



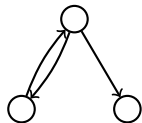
D



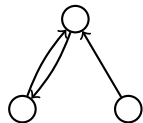
E



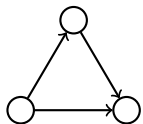
F



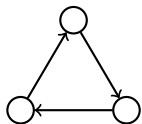
G



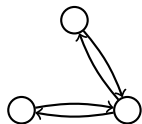
H



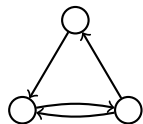
I



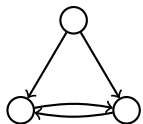
J



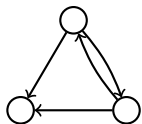
K



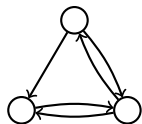
L



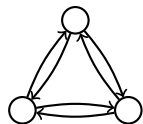
M



N



O

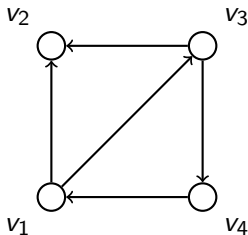


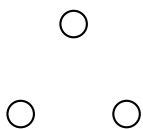
P

2. 有向路和有向圈

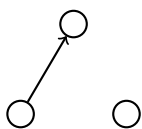
定义2.8

有向图 $D = (V, A)$ 称为**单向连通**的，如果对 D 的任两个不同顶点 u 和 v ，或从 u 可达到 v ，或从 v 可达到 u 。

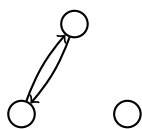




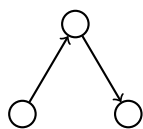
A



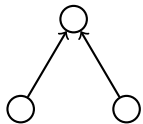
B



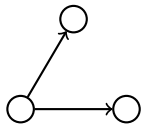
C



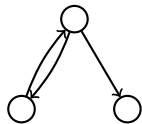
D



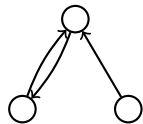
E



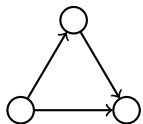
F



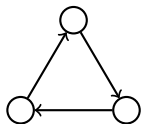
G



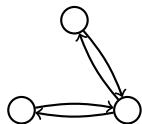
H



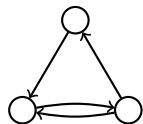
I



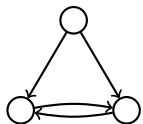
J



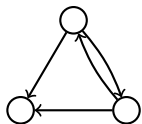
K



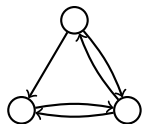
L



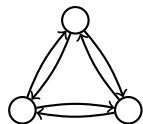
M



N



O

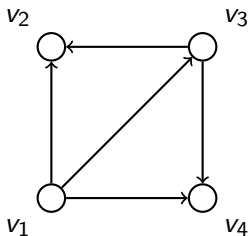


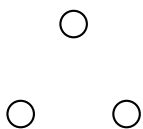
P

2. 有向路和有向圈

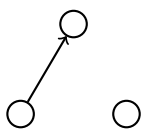
定义2.9

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图，如果抹去 D 中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称 D 为弱连通的，简称连通的。

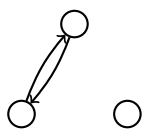




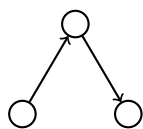
A



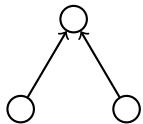
B



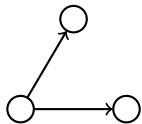
C



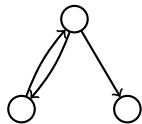
D



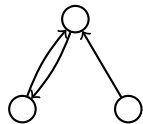
E



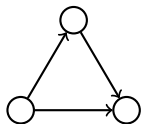
F



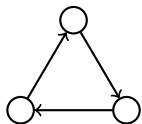
G



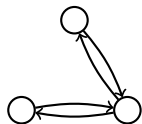
H



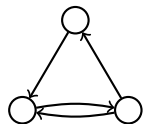
I



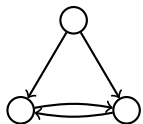
J



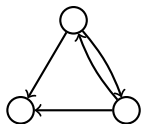
K



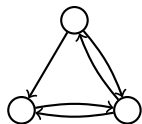
L



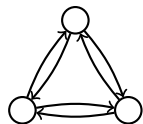
M



N

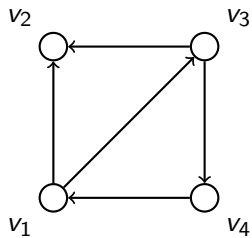


O

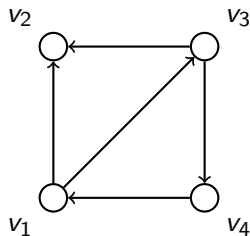


P

4. 有向图的邻接矩阵



4. 有向图的邻接矩阵

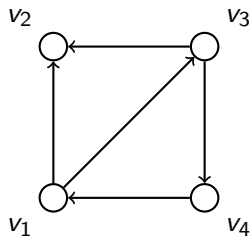


定义4.1

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \times p$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 称为 D 的邻接矩阵, 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (v_i, v_j) \in A \\ 0, & \text{如果 } (v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵

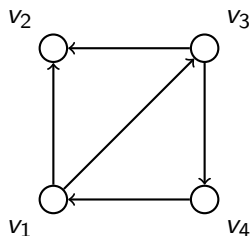


定义4.2

设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \times p$ 矩阵 $R = (r_{ij})$ 称为 D 的可达矩阵, 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果从 } v_i \text{ 可以达到 } v_j \\ 0, & \text{如果从 } v_i \text{ 不能达到 } v_j \end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵



定义4.3

设 $D = (V, A)$ 为一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, $p \times q$ 矩阵 $H = (h_{ij})$ 称为 D 的关联矩阵, 其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } v_i \text{ 为弧 } x_j \text{ 的起点} \\ -1, & \text{如果 } v_i \text{ 为弧 } x_j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{如果 } v_i \text{ 既不是弧 } x_j \text{ 的起点也不是弧 } x_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.1

设 B 为有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, 则从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长为 l 的有向通道的条数等于 B^l 的第 i 行第 j 列元素 $(B^l)_{ij}$ 的值。

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.2

设 $p \times p$ 矩阵 B 是有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, 则 D 的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$$

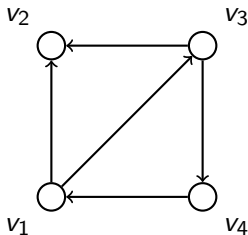
4. 有向图的邻接矩阵

定理4.3

设 $p \times p$ 矩阵 R 为有向图 $D = (V, A)$ 的可达矩阵,

$$C = R \wedge R^T,$$

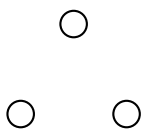
C 的 第 i 行 上 为1的 元 素 $c_{ij_1}, c_{ij_2}, \dots, c_{ij_k}$, 则 v_i 在 由 $V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$ 诱导出的 D 的子图- D 的强支中。



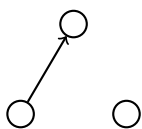
5. 有向树与有序树

定义5.1

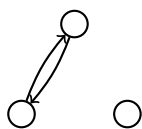
一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。



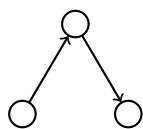
A



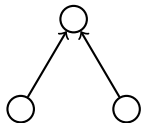
B



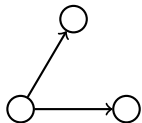
C



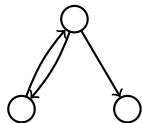
D



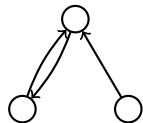
E



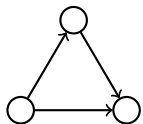
F



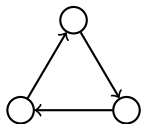
G



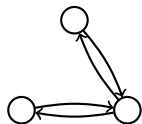
H



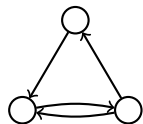
I



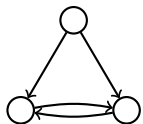
J



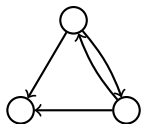
K



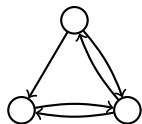
L



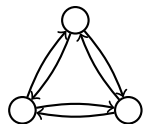
M



N



O

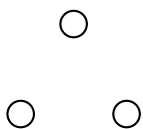


P

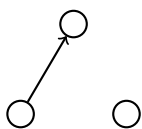
5. 有向树与有序树

定义5.2

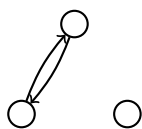
有向树 D 称为**有根树**，如果 D 中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根，出度为0的顶点称为**叶子**，非叶顶点称为**分支点**或**内顶点**。



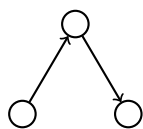
A



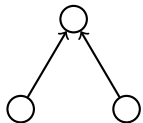
B



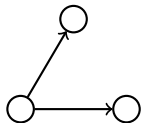
C



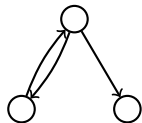
D



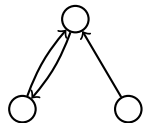
E



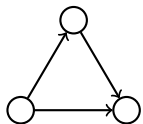
F



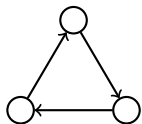
G



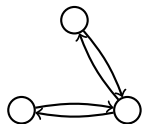
H



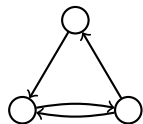
I



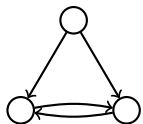
J



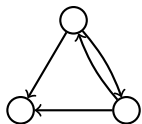
K



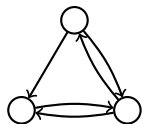
L



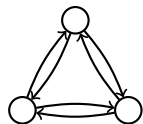
M



N



O



P

5. 有向树与有序树

定义5.3

设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树。如果 $(u, v) \in A$ ，则称 v 为 u 的**儿子**， u 为 v 的**父亲**。如果从顶点 u 能达到顶点 v ，则称 v 为 u 的**子孙**， u 为 v 的**祖先**。如果 u 是 v 的祖先且 $u \neq v$ ，则称 u 为 v 的**真祖先**， v 为 u 的**真子孙**。

5. 有向树与有序树

定义5.4

设 $T = (V, A)$ 为一棵以 v_0 为根的有根树。从 v_0 到顶点 v 的有向路的长度称为 T 的顶点 v 的**深度**。从顶点 v 到 T 的叶子的最长的有向路的长度称为顶点 v 在 T 中的**高度**。根顶点 v_0 的高度称为树 T 的**高度**。

5. 有向树与有序树

定义5.5

设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树， v 是 T 的一个顶点，由 v 及其子孙所导出的 T 的子图称为 T 的以 v 为根的子树。

5. 有向树与有序树

定义5.6

设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树。如果 T 的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称 T 为一棵**有序树**。

5. 有向树与有序树

定义5.7

有序树 T 称为 **m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度 $\leq m$ 。一棵 m 元有序树 T 称为 **正则 m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度不是0就是 m 。二元有序树简称 **二元树**。

习题

习题1

设无向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}\}$, 则无向图 G 有_____个连通分量。

习题2

设有向图 $D = (V, A)$, 其中 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5)\}$, 则有向图 D 有_____个强连通分量。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n$, $n \geq 6$ 。对图 G 的顶点
用 n 种颜色进行着色，

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合，

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 导出的子图 G_1 不是2-可着色的，

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 导出的子图 G_1 不是2-可着色的，从而 G_1 中存在一个奇数长的圈 C_1 ；

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 导出的子图 G_1 不是2-可着色的，从而 G_1 中存在一个奇数长的圈 C_1 ；同理，由 $V_3 \cup V_4 \cup V_6$ 导出的子图 G_2 中存在一个奇数长的圈 C_2 。

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 导出的子图 G_1 不是2-可着色的，从而 G_1 中存在一个奇数长的圈 C_1 ；同理，由 $V_3 \cup V_4 \cup V_6$ 导出的子图 G_2 中存在一个奇数长的圈 C_2 。 C_1 和 C_2 没有公共顶点，

习题3

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。

证明.

用反证法，假设 $\chi(G) = n, n \geq 6$ 。对图 G 的顶点用 n 种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设 V_1, V_2, V_3 为其中着3种不同颜色的顶点集合， V_4, V_5, V_6 为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 导出的子图 G_1 不是2-可着色的，从而 G_1 中存在一个奇数长的圈 C_1 ；同理，由 $V_3 \cup V_4 \cup V_6$ 导出的子图 G_2 中存在一个奇数长的圈 C_2 。 C_1 和 C_2 没有公共顶点，矛盾。 \square

定义

针对 \cup , \cap , c 运算, 递归的定义集合表达式如下:

- 1) 单独的集合符号为集合表达式
- 2) 如果 A 为集合表达式, 则 A^c 为集合表达式; 如果 A 与 B 为集合表达式, 则 $A \cup B$, $A \cap B$ 都为集合表达式。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

如果 $E \subseteq F$ ，则 $E^c \supseteq F^c$ ，即 $E' \supseteq F'$ ；

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

如果 $E \subseteq F$ ，则 $E^c \supseteq F^c$ ，即 $E' \supseteq F'$ ；

如果 $E \supseteq F$ ，则 $E^c \subseteq F^c$ ，即 $E' \subseteq F'$ ；

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

如果 $E \subseteq F$ ，则 $E^c \supseteq F^c$ ，即 $E' \supseteq F'$ ；

如果 $E \supseteq F$ ，则 $E^c \subseteq F^c$ ，即 $E' \subseteq F'$ ；

如果 $E = F$ ，则 $E^c = F^c$ ，即 $E' = F'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ,

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$ ，

定理

对于任意的集合表达式 E ，将式中的每个单独的集合符号 X 替换成 X^c ，将式中出现的 \cup 和 \cap 分别替换成 \cap 和 \cup ，得到的集合表达式记为 E' ，则 $E^c = E'$ 。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式 E 中出现符号 \cup ， \cap 和 c 的次数 n 。

(1) 当 $n = 0$ 时， E 中只出现了一个单独的集合，设为 A ，则 $E^c = A^c$ ，即 $E^c = A'$ 。

(2) 假设当 $n < k$ 时结论成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。设集合表达式 E 中出现了 k 个符号。如果 $E = A^c$ ，则 A 中出现了 $k - 1$ 个符号，由归纳假设， $A^c = A'$ 。此时， $(A^c)^c = (A')^c$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cup B$ ，则 A 中和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$ ，即 $E^c = E'$ 。如果 $E = A \cap B$ ，则 A 和 B 中出现的符号数小于 k ，由归纳假设， $A^c = A'$ ， $B^c = B'$ 。此时， $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$ ，即 $E^c = E'$ 。□