

习题 1. 设 A 为由序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 的所有项组成的集合, 则 A 是否是可数的? 为什么?

解: A 不一定可数, 例如当 $a_1 = a_2 = \dots = 1$ 时, $A = \{1\}$ 为有穷集合。

习题 2. 证明: 直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多是可数集。

证明. 设 A 为直线上某个互不相交的开区间构成的集合, 在每个开区间中取一个有理数, 则 A 与有理数集合的一个子集之间存在一一对应的关系, 于是 A 为至多可数集。□

习题 3. 证明: 单调函数的不连续点的集合至多是可数集。

首先来看结论中涉及的一些基本概念。

设 $f: R \rightarrow R$ 为一个函数。如果对任意的 $x_1 \in R, x_2 \in R, x_1 < x_2$, 那么 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为单调函数。

设 $x_0 \in R, L \in R$, 如果对任意的 $\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in R, \delta > 0$, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 就有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 则称函数 f 在 x_0 处的极限为 L , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 。

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 f 在 x_0 处连续, x_0 为函数 f 的连续点; 如果函数 f 在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为函数 f 的不连续点。

证明. 对任意的 $x_0 \in R$, 由单调函数的定义知, 集合 $\{f(x) | x < x_0\}$ 有上界 $f(x_0)$, 从而有上确界, 定义 $L(x_0) = \sup\{f(x) | x < x_0\}$; 集合 $\{f(x) | x > x_0\}$ 有下界 $f(x_0)$, 从而有下确界, 定义 $U(x_0) = \inf\{f(x) | x > x_0\}$ 。如果 $x_1 < x_2$, 那么 $U(x_1) \leq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq L(x_2)$ 。另外, 如果 x_0 为 f 的不连续点, 可以证明 $L(x_0) < U(x_0)$ 。因此, 集合 $S = \{(L(x), U(x)) | x \text{ 为函数 } f \text{ 的不连续点}\}$ 中的开区间两两不相交。在 S 中的每个开区间中取一个有理数, 则所有这些有理数的集合与函数 f 的所有不连续点构成的集合是对等的, 从而 f 的所有不连续点所构成的集合为至多可数的。

设 x_0 为 f 的不连续点, 以下证明 $L(x_0) < U(x_0)$ 。由 $L(x_0) \leq f(x_0) \leq U(x_0)$ 知 $L(x_0) \leq U(x_0)$, 因此只需证 $L(x_0) \neq U(x_0)$ 。用反证法, 假设 $L(x_0) = U(x_0)$, 则 $L(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$ 。对任意的 $\varepsilon > 0$, 由 $L(x_0)$ 的定义知存在 $x' < x_0$ 使得 $f(x') > L(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$; 由 $U(x_0)$ 的定义知存在 $x'' > x_0$ 使得 $f(x'') < U(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$ 。设 $\delta = \min(|x' - x_0|, |x'' - x_0|)$, 那么当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 函数 f 在 x_0 处连续, 这与 x_0 为 f 的不连续点矛盾。□

习题 4. 任一可数集 A 的所有有限子集构成的集族是可数集族。

证明. 因为 A 为可数集合, 所以 A 中元素可以排成无重复项的序列:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

令 $S = \{B | B \subseteq A, B \text{ 为有穷集}\}$, Q 为有理数集, 定义映射 $\phi: S \rightarrow Q$, 对任意的 $B \in S, \phi(B) = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$, 这里

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_i \in B \\ 0 & \text{如果 } a_i \notin B \end{cases}$$

则对任意的 $B_1 \in S, B_2 \in S$, 如果 $B_1 \neq B_2$, 则 $\phi(B_1) \neq \phi(B_2)$, 即 ϕ 为从 S 到 Q 的单射。 $\phi(S)$ 为可数集 Q 的无限子集, 从而也为可数集。 ϕ 为从 S 到 $\phi(S)$ 的双射, 因此 S 为可数集。 \square

习题 5. 判断下列命题之真伪:

- a) 若 $f: X \rightarrow Y$ 且 f 是满射, 则只要 X 是可数集, 那么 Y 是至多可数的;
- b) 若 $f: X \rightarrow Y$ 且 f 是单射, 则只要 Y 是可数集, 则 X 也是可数集;
- c) 可数集在任一映射下的像也是可数集。

解. a) 真, b) c) 伪。 \square

习题 6. 设 Σ 为一个有限字母表, Σ 上所有字 (包括空字 ϵ) 之集记为 Σ^* 。证明 Σ^* 是可数集。 (n 元组 (c_1, c_2, \dots, c_n) 称为 Σ 上的一个字, 这里 $c_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n, \epsilon = ()$ 称为 Σ 上的一个空字)。

证明. $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$, 其中 $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$ 。对任意的自然数 i, Σ^i 为有穷集合。于是 Σ^* 可以排成无重复项的序列: 先排 Σ^0 中的元素, 再排 Σ^1 中的元素, 再排 Σ^2 中的元素, \dots 。 \square

习题 7. 利用康托的对角线法证明所有 $0, 1$ 的无穷序列是不可数集。

证明. 用反证法。设所有 $0, 1$ 的无穷序列构成的集合 A 为可数集, 则 A 中元素可以排成无重复项的序列:

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\ \dots \end{array}$$

其中 $a_{ij} = 0$ 或 1 。

构造 $0, 1$ 序列

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

其中

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{如果 } a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果 } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列 b_1, b_2, b_3, \dots 与前述序列中的任意一个0,1序列都不相同，矛盾。 \square

习题 8. 证明：如果 A 是可数集，则 2^A 是不可数集。

证明. 由 A 为可数集知 A 中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

构造从 2^A 到所有的0,1序列构成的集合之间的映射 f :

对任意的 $B \in 2^A$ ， $f(B)$ 为如下的0,1序列:

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_i \in B \\ 0 & \text{如果 } a_i \notin B \end{cases}$$

则 f 为从 2^A 到所有的0,1序列构成的集合之间的双射，而所有的0,1序列构成的集合为不可数集，从而 2^A 为不可数集。 \square