离散数学讲义

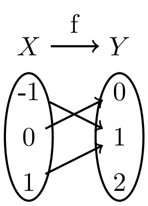
陈建文

March 2, 2022

第 二 章　映射

定义2.1. 设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的**映射**f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$\forall x \in X, f(x) = x^2$，即$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。



定义2.2. 设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的**映射**为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；

2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$f \subseteq X \times Y$，$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

定义2.1和定义2.2是等价的。

练习2.1. 设$X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, f \subseteq X \times Y$，则下列为映射的是（$D$）
A. $f = \{(0, 3), (1, 4)\}$
B. $f = \{(0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 5)\}$
C. $f = \{(0, 3), (0, 4)\}$
D. $f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3)\}$

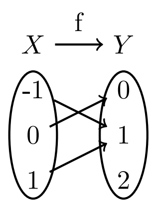
映射定义的符号化表示：
$f : X \to Y$
$f \subseteq X \times Y$

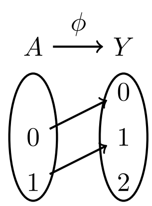
1) $\forall x \in X \exists y (x, y) \in f$
即：$\forall x x \in X \to \exists y (x, y) \in f$
2) $\forall x \in X \forall y \in Y ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y')$
即：$\forall x x \in X \to (\forall y y \in Y \to ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y'))$

定义2.3. 设f为从集合X到集合Y的映射，$f : X \to Y$， 如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的**象**，称x为y的**原象**。X称为f的**定义域**；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的**值域**，记为$Im(f)$。

P(x):x为偶数
$P : Z \to \{T, F\}$
$P \subseteq Z \times \{T, F\}$
$P = \{\ldots, (-2, T), (-1, F), (0, T), (1, F), (2, T), \ldots\}$

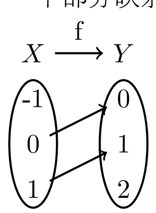
定义2.4. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi : A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。





定义2.5. 设$f : A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

一个部分映射的例子:

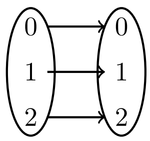


定义2.6. 两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

定义2.7. 设$f : X \to X$，如果$\forall x \in X, f(x) = x$，则称$f$为$X$上的恒等映射。$X$上的恒等映射常记为$I_X$。

一个恒等映射的例子：

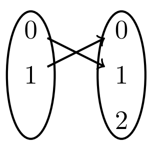
$X \xrightarrow{\text{f}} X$



定义2.8. 设$f:X\to Y$，如果$\forall x_1,x_2\in X$，只要$x_1\neq x_2$，就有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的**单射**。

一个单射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

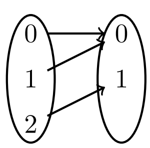


单射的符号化表示：
$f:X\to Y$
$\forall x1\in X\forall x2\in X x1\neq x2\to f(x1)\neq f(x2)$
即：$\forall x1\in X\forall x2\in X f(x1)=f(x2)\to x1=x2$

定义2.9. 设$f:X\to Y$，如果$\forall y\in Y$，$\exists x\in X$使得$f(x)=y$，则称f为从X到Y的**满射**。

一个满射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

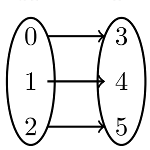


满射的符号化表示：
$f:X\to Y$
$\forall y\in Y\exists x\in X f(x)=y$

定义2.10. 设$f:X\to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的**双射**，或者称f为从X到Y的一一对应。这时也称X与Y**对等**，记为$X\sim Y$。

一个双射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$



定义2.11. 从集合X到集合Y的所有映射之集记为Y^X，即$\{f|f:X\to Y\}$。

$$\{2,3\}^{\{0,1\}}=\{\{(0,2),(1,2)\},\{(0,3),(1,3)\},\{(0,2),(1,3)\},\{(0,3),(1,2)\}\}$$

定理2.1 (抽屉原理)**.** 如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例. 从$1,2,\ldots,2n$中任意选出$n+1$个数，则这$n+1$个数中必有两个数，使得其中之一能除尽另一个。

证明. 每个整数均可写成$2^l\cdot d$的形式，其中l为非负整数，d为奇数。因此，当把选出的$n+1$个整数都写成这种形式时，便得到了$n+1$个奇数$d_1,d_2,\cdots,d_{n+1}$，并且$1\le d_i\le 2n-1$，$i=1,2,\cdots,n+1$。但1到$2n$之间仅有n个奇数，由抽屉原理可知，必有i,j使得$d_i=d_j$，$i\ne j$。于是，d_i与d_j对应的两个整数$2^{l_i}\cdot d_i$与$2^{l_j}\cdot d_j$中必有一个可以整除另外一个。 □

例. 任何 6 个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。

定理2.2 (抽屉原理的强形式)**.** 设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1. 如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

推论2.2. 如果n个正整数$m_1,m_2,\ldots,m_n$的平均值

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}>r-1,$$

则$m_1,m_2,\ldots,m_n$中至少有一个正整数不小于r。

例. n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

对照以下的例子可以帮助我们理解证明过程。

5	9	10	4	7	2	8	3	6	1
3	2	1	3	2	3	1	2	1	1

证明. 从左到右依次用$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个n^2+1项的数列

$$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1} \tag{2.1}$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长（项数）至少为$n+1$的不减子序列，或者有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

假设本题结论不成立，则数列(2.1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(2.1)的最长不减子序列的长度，$i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$，其中每个数m_i满足$1\le m_i\le n$。现在把n^2+1个数放到n个盒子$1,2,\cdots,n$中，数m_i放

到第k个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1$,$k > n$。相应的，我们有(2.1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2.2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2.2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。 □

练习2.2. 在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答. 用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的圆心，这些10个圆心都是圆内650个点中的点，结论得证。 □

定义2.12. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的**象**定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例. 设$f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$，$f(x) = x^2$，则$f(\{-1, 0\}) = \{0, 1\}$

定义2.13. 设$f : X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的**原象**定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例. 设$f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$，$f(x) = x^2$，则$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{-1, 1\}$

定理2.3. 设$f : X \to Y$，$C \subseteq Y$，$D \subseteq Y$，则

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
3. $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$
5. $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$

定理2.4. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，则

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
2. $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$
3. $f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$
4. $f(A\triangle B)\supseteq f(A)\triangle f(B)$

定义2.14. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为映射，映射f与g的**合成**$g\circ f:X\to Z$定义为

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

定理2.5. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$h:Z\to W$ 为映射，则

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

定理2.6. 设$f:X\to Y$，则$f=f\circ I_X=I_Y\circ f$。

定义2.15. 设$f:X\to Y$为双射，f的**逆映射**$f^{-1}:Y\to X$定义为：对任意的$y\in Y$，存在唯一的x使得$f(x)=y$,则$f^{-1}(y)=x$。

定义2.16. 设$f:X\to Y$为一个双射, 则$g:Y\to X, g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$称为$f$的**逆映射**，记为$g=f^{-1}$。

例. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6\}$，$f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$为从X到Y的双射，则$f^{-1}=\{(4,1),(5,2),(6,3)\}$。

定义2.17. 设$f:X\to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g:Y\to X$使得

$$f\circ g=I_Y\text{且}g\circ f=I_X,$$

则称映射f为**可逆**的，而g称为f的**逆映射**。

例. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6\}$，$f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$为从X到Y的双射，$g=\{(4,1),(5,2),(6,3)\}$,由于$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$，$f^{-1}=g$。

定理2.7. 定义*2.16*和定义*2.17*是等价的。

证明. 设f为从集合X到集合Y的映射，g为从集合Y到集合X的映射。

以下先假设g满足定义2.16，往证g满足定义2.17。

假设f为从集合X到集合Y的双射，g为从集合Y到集合X的映射，$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$，易验证$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$。

接下来，假设g满足定义2.17，往证g满足定义2.16。

假设f为从集合X到集合Y的映射，存在一个映射$g:Y\to X$使得$f\circ g=I_Y$且$g\circ f=I_X$,往证f为双射，且$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$。

对任意的$x_1\in X$，$x_2\in X$，如果$f(x_1)=f(x_2)$，则$g(f(x_1)=g(f(x_2))$，再由$g\circ f=I_X$知$x_1=x_2$，从而f为单射。对任意的$y\in Y$，由$f\circ g=I_Y$知$f(g(y))=y$，从而f为满射。这证明了f为双射。

以下证明$g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$，这就是要证明左边的集合等于右边的集合。

对任意的$(y,x)\in g$，则$x=g(y)$，从而$f(x)=f(g(y))$，由$f\circ g=I_Y$知$f(x)=y$，从而$(x,y)\in f$。

对任意的$(x,y)\in f$，则$y=f(x)$，从而$g(y)=g(f(x))$，由$g\circ f=I_X$知$g(y)=x$，从而$(y,x)\in g$。 □

定理2.8. 设$f:X\to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1}=f$。

定理2.9. 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$都为可逆映射，则$g\circ f$也为可逆映射并且$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

定义2.18. 设$f:X\to Y$为一个映射，如果存在一个映射$g:Y\to X$ 使得$g\circ f=I_X$，则称f为左可逆的，g称为f的左逆映射；如果存在一个映射$h:Y\to X$ 使得$f\circ h=I_Y$，则称f为右可逆的，h称为f的右逆映射。

定理2.10. 设$f:X\to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明. 先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g:Y\to X$ 使得$g\circ f=I_X$。对任意的$x_1\in X$，$x_2\in X$，如果$f(x_1)=f(x_2)$，则$g(f(x_1))=g(f(x_2))$，再由$g\circ f=I_X$知$x_1=x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，有$g:Im(f)\to X$使得$g\circ f=I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y\in Y$，若$y\in Y\setminus Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y\in Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，则g为从集合Y到集合X的映射，且$g\circ f=I_X$。所以，f为左可逆的。

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g:Y\to X$ 使得$f\circ g=I_Y$。对任意的$y\in Y$，由$f\circ g=I_Y$知$f(g(y))=y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y\in Y$，$f^{-1}(\{y\})\neq\phi$。令$g:Y\to X$，其定义为，对任意的$y\in Y$，$g(y)=x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y\in Y$，设$g(y)=x$，则$f(x)=y$，从而$(fg)(y)=f(g(y))=f(x)=y=I_y(y)$。所以$fg=I_y$，即$f$为右可逆的。 □

定义2.19. 有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。如果$|S|=n$，则S上的置换就说成是n次置换。

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$，$\sigma:S\to S$为S上的一个置换，$\sigma(1)=k_1$，$\sigma(2)=k_2$，…，$\sigma(n)=k_n$，我们用如下的一个表来表示置换σ:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\k_1&k_2&\ldots&k_n\end{pmatrix}$$

例. 设$S=\{1,2,3,4\}$，$\sigma(1)=3$， $\sigma(2)=2$， $\sigma(3)=4$， $\sigma(4)=1$，则σ可以表示为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$

这里，列的次序无关紧要，例如，σ还可以表示为

$$\sigma=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

定义2.20. 设α与β为集合S上的两个置换，则α与β为两个从S到S的双射，讨论置换时，我们用$\alpha\beta$表示α与β的合成$\beta\circ\alpha$。注意这里α与β的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果$i\in S$，则用$(i)\alpha$表示i在α下的像，简记为$i\alpha$。

例. 设$S=\{1,2,3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

，

若α与β为两个n次置换，当把β的表示式中的上一行按α的下一行的顺序写出时，则$\alpha\beta$的下一行就是β的新表示式中的下一行。

例. 设$S=\{1,2,3\}$，α和β为S上的两个置换，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

，则

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

，

定义2.21. 设σ为S上的一个n次置换，若$i_1\sigma=i_2$，$i_2\sigma=i_3$，$\cdots$，$i_{k-1}\sigma=i_k$，$i_k\sigma=i_1$，而$\forall i\in S\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$，$i\sigma=i$，则称$\sigma$为一个$k$循环置换，记为$(i_1i_2\cdots i_k)$。$2-$循环置换称为对换。

例. 设$S=\{1,2,3,4,5\}$，则

$$(123)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix},(23)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}$$

定理2.11. 每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的$1-$循环置换，这个分解是唯一的。

定理2.12. 当$n\geq 2$时，每个n次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

定理2.13. 如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

证明. 设σ为一个n次置换。σ的符号$sign(\sigma)$定义为$(-1)^{|\{(x,y)|x<y\wedge(x)\sigma>(y)\sigma\}|}$。

设$\alpha=\beta(i,j)$，$i<j$，此时如果$(i)\beta>(j)\beta$,则$(i)\alpha<(j)\alpha$；反之，如果$(i)\beta<(j)\beta$,则$(i)\alpha>(j)\alpha$。

易知，$sign(\alpha)=-sign(\beta)$。

于是，如果置换σ可以分解为m个对换的乘积$\sigma = I(i_1, k_1)(i_2, k_2)\cdots(i_m, k_m)$，其中$I$为恒等置换，由$sign(I) = 1$知$sign(\sigma) = (-1)^m$。而$sign(\sigma)$只能为1和$-1$两者之一，因此如果$\sigma$能分解成偶数个对换的乘积，则只能分解成偶数个对换的乘积；如果σ能分解成奇数个对换的乘积，则只能分解成奇数个对换的乘积。 □

定义2.22. 能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为偶置换；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为奇置换。

定理2.14. 当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明. 设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(1, 2) = \sigma_2(1, 2)$，从而$\sigma_1(1, 2)(1, 2) = \sigma_2(1, 2)(1, 2)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(1, 2)) = \tau(1, 2)(1, 2) = \tau$。从而$f$为双射，这证明了$|A| = |B|$。再由$|A| + |B| = n!$知，$|A| = |B| = \frac{n!}{2}$。 □

定义2.23. 一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

我们熟知的实数集R，与其上的加法运算"$+$"和乘法运算"$*$"一起构成了一个代数系，满足如下性质：

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1(x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

在实数集R上还定义了小于关系$<$，满足如下性质：

1. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$x < y$,$x = y$,$y < x$中有且仅有一个成立。
2. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$并且$y < z$，则$x < z$。

3. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。

4. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。

另外，实数集还具有如下性质：
设A_1，A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

定义2.24. 设X，Y，Z为任意三个非空集合。一个从$X \times Y$到Z的映射ϕ 称为X与Y到Z的一个二元（代数）运算。当$X = Y = Z$时，则称ϕ为X上的二元*(*代数*)*运算。

定义2.25. 从集合X到Y的任一映射称为从X到Y的一元*(*代数*)*运算。如果$X = Y$，则从X到X的映射称为X上的一元*(*代数*)*运算。

定义2.26. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, D$为非空集合。一个从$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$到$D$的映射$\phi$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$到$D$的一个$n$元（代数）运算。如果$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = D = A$，则称$\phi$为$A$上的$n$元代数运算。

定义2.27. 设"$\circ$"为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b \in X$，恒有
$a \circ b = b \circ a$，则称二元代数运算"$\circ$"满足交换律。

定义2.28. 设"$\circ$"为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b, c \in X$，恒有$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，则称二元代数运算"$\circ$"满足结合律。

定义2.29. 设"$+$"与"$\circ$"为集合X上的两个二元代数运算。
如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算"$\circ$"对"$+$"满足左分配律。如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算"$\circ$"对"$+$"满足右分配律。

定义2.30. 设$(X, \circ)$为一个代数系。如果存在一个元素$e \in X$使得对任意的$x \in X$恒有$e \circ x = x \circ e = x$，则称$e$为"$\circ$"的单位元素。

定义2.31. 设$(X, \circ)$为一个代数系，"$\circ$"有单位元素e，$a \in X$，如果$\exists b \in X$使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称b为a的逆元素。

定义2.32. 设$(S, +)$与$(T, \oplus)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi : S \to T$，使得$\forall x, y \in S$，有

$$\phi(x + y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系$(S, +)$与$(T, \oplus)$同构，并记为$S \cong T$，ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

定义2.33. 设$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi:S\to T$，使得$\forall x,y\in S$，有

$$\begin{aligned}\phi(x+y)&=\phi(x)\oplus\phi(y),\\ \phi(x\circ y)&=\phi(x)*\phi(y),\end{aligned}$$

则称代数系$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$同构，并记为$S\cong T$，ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬ p
T	F
F	T

x	y	x ∧ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	x ∨ y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

代数系$(\{T,F\},\wedge,\vee,\neg)$与$(\{1,0\},\wedge,\vee,\bar{\ })$是同构的。

定义2.34. 设X为一个集合，$E\subseteq X$。E的特征函数$\chi_E:X\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}x\in E,\\ 0 & \text{如果}x\notin E.\end{cases}$$

定义2.35. 令$Ch(X)=\{\chi|\chi:X\to\{0,1\}\}$。$\forall\chi,\chi'\in Ch(X)$及$x\in X$，

$$\begin{aligned}(\chi\vee\chi')(x)&=\chi(x)\vee\chi'(x)\\ (\chi\wedge\chi')(x)&=\chi(x)\wedge\chi'(x)\\ \bar{\chi}(x)&=\overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{2.3}$$

定理2.15. 设X为一个集合，则代数系$(2^X,\cup,\cap,^c)$与$(Ch(X),\vee,\wedge,^-)$同构。

$$
\begin{array}{rll}
X = \{1,2,3\} & & \\
2^X = \{ & & \\
\phi, & \chi_1 : X \to \{0,1\} & \chi_1(1)=0, \chi_1(2)=0, \chi_1(3)=0 \\
\{1\}, & \chi_2 : X \to \{0,1\} & \chi_2(1)=1, \chi_2(2)=0, \chi_2(3)=0 \\
\{2\}, & \chi_3 : X \to \{0,1\} & \chi_3(1)=0, \chi_3(2)=1, \chi_3(3)=0 \\
\{3\}, & \chi_4 : X \to \{0,1\} & \chi_4(1)=0, \chi_4(2)=0, \chi_4(3)=1 \\
\{1,2\}, & \chi_5 : X \to \{0,1\} & \chi_5(1)=1, \chi_5(2)=1, \chi_5(3)=0 \\
\{2,3\}, & \chi_6 : X \to \{0,1\} & \chi_6(1)=0, \chi_6(2)=1, \chi_6(3)=1 \\
\{1,3\}, & \chi_7 : X \to \{0,1\} & \chi_7(1)=1, \chi_7(2)=0, \chi_7(3)=1 \\
\{1,2,3\} & \chi_8 : X \to \{0,1\} & \chi_8(1)=1, \chi_8(2)=1, \chi_8(3)=1 \\
\} & &
\end{array}
$$

练习2.3. 设$X = \{a,b,c\}, Y = \{0,1\}, Z = \{2,3\}$。$f : X \to Y, f(a) = f(b) = 0, f(c) = 1$；$g : Y \to Z, g(0) = 2, g(1) = 3$。试求$g \circ f$。

练习2.4. 设$f : X \to Y$，$C \subseteq Y$，$D \subseteq Y$，证明
$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

练习2.5. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，证明
$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

练习2.6. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，则$(f(A))^c \subseteq f(A^c)$成立吗？$f(A^c) \subseteq (f(A))^c$成立吗?

练习2.7. 设$f : X \to Y$，　证明：f为满射当且仅当$\forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$。

练习2.8. 设$f : X \to Y$，　证明：f为单射当且仅当$\forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$。

练习2.9. 设$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$，$A \subseteq Z$，证明：$(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$。

练习2.10. 设$N = \{1,2,\ldots\}$，试构造两个映射$f : N \to N$与$g : N \to N$，使得$fg = I_N$，但$gf \neq I_N$。

练习2.11. 设$f : X \to Y$，

（1）如果存在唯一的一个映射$g : Y \to X$，使得$gf = I_X$，那么f是否可逆呢?

（2）如果存在唯一的一个映射$g : Y \to X$，使得$fg = I_Y$，那么f是否可逆呢?

练习2.12. 是否存在一个从集合X到X的一一对应，使得$f = f^{-1}$，但$f \neq I_X$？

练习2.13. 已知m个整数$a_1, a_2, \ldots, a_m$，试证：存在两个整数k，l，
$0 \le k < l \le m$，使得$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$能被$m$整除。

第 三 章