第八讲同态基本定理

陈建文

October 1, 2022

课后作业题:

练习1. 设$(G,\circ)$**为**m**阶循环群，**$(\bar{G},\cdot)$**为**n**阶循环群，试证：**$G\sim\bar{G}$**当且仅当**$n|m$**。**

证明. 由$G\sim\bar{G}$往证$n|m$:

设ϕ为从G到$\bar{G}$的一个满同态，由群同态基本定理，$G/Ker\phi\cong\bar{G}$，于是$|G/Ker\phi|=|\bar{G}|$。由拉格朗日定理，$|G|=|G/Ker\phi||Ker\phi|$，这说明$|G/Ker\phi|||G|$，从而$|\bar{G}|||G|$，即$n|m$。

设$n|m$，往证$G\sim\bar{G}$:

设$G=\{a^0,a,a^2,\cdots,a^{m-1}\}$，$\bar{G}=\{b^0,b,b^2,\cdots,b^{n-1}\}$。

令$\phi:G\rightarrow\bar{G}$，$\phi(a^i)=b^{i \mod n}$，则$\forall i,j,0\leq i\leq m-1,0\leq j\leq m-1$,$\phi(a^i\circ a^j)=\phi(a^{i+j})=b^{(i+j)\mod n}=b^{((i \mod n)+(j \mod n))\mod n}=b^{i\mod n}\cdot b^{j\mod n}=\phi(a^i)\cdot\phi(a^j)$。这证明了$\phi$为从$G$到$\bar{G}$的同态，$\phi$显然为满同态，于是$G\sim\bar{G}$。 $\square$

练习2. 设G为一个循环群，H为群G的子群，试证：G/H也为循环群。

证明. 设$G=(a)$，$\forall x\in G/H$，存在自然数i使得$x=a^iH=(aH)^i$，于是$G/H=(aH)$，即G/H为循环群。 $\square$