第一章集合及其运算

陈建文

1. 集合的概念

定义1.1

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个**集合**。构成集合的每个东西叫做集合的**元素**。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x | P(x)\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$
   - $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为Φ。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$；如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$；如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,2,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.1
设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$；如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,2,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A x \in B$ 即$\forall x(x \in A \to x \in B)$

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,2,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A x \in B$ 即$\forall x(x \in A \to x \in B)$

$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B x \notin A$即$A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是

$$\forall x x \in A \to x \in B$$

对一些特殊的x的值分析如下：

设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是

$$\forall x x \in A \to x \in B$$

对一些特殊的x的值分析如下：

- 当$x = 1$时，$1 \in A \to 1 \in B$，即$T \to T$，其真值为T；

设$A=\{1,2,4\},B=\{1,2,3,4,5\}$，则$A\subseteq B$，其含义是

$$\forall x x\in A\to x\in B$$

对一些特殊的x的值分析如下：

- 当$x=1$时，$1\in A\to 1\in B$，即$T\to T$，其真值为T;
- 当$x=3$时，$3\in A\to 3\in B$，即$F\to T$，其真值为T;

设$A=\{1,2,4\},B=\{1,2,3,4,5\}$，则$A\subseteq B$，其含义是

$$\forall x x\in A\to x\in B$$

对一些特殊的x的值分析如下：

- 当$x=1$时，$1\in A\to 1\in B$，即$T\to T$，其真值为T；
- 当$x=3$时，$3\in A\to 3\in B$，即$F\to T$，其真值为T；
- 当$x=0$时，$0\in A\to 0\in B$，即$F\to F$，其真值为T。

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B**相等**，并记为$A = B$。

- $\{1,2,3,4,5\} = \{3,4,2,1,5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$

2. 子集、集合的相等

定理2.1
空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

2. 子集、集合的相等

定理2.1
空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明.

2. 子集、集合的相等

定理2.1
空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明.
设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。

2. 子集、集合的相等

定理2.1
空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明.
设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。
以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi \subseteq \phi'$并且$\phi' \subseteq \phi$，从而$\phi = \phi'$，矛盾。 $\square$

$$
\begin{aligned}
A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall x x \in A \to x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \to x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)
\end{aligned}
$$

2. 子集、集合的相等

空集为任一个集合的子集。

2. 子集、集合的相等

空集为任一个集合的子集。

证明.

2. 子集、集合的相等

空集为任一个集合的子集。

证明.

用反证法。设存在一个集合A，$\phi \not\subseteq A$，则存在$x \in \phi$，但$x \notin A$，这显然是不可能的，结论得证。 $\square$

2. 子集、集合的相等

定义2.3

集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

2. 子集、集合的相等

定义2.3

集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例：

$2^{\phi} = \{\phi\}$

$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$

$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

例:

$2^{\{\phi,\{\phi\}\}} =$

例:

$2^{\{\phi,\{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

试证：对于任意的集合A，$\{\phi,\{\phi\}\}\in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。又因为$\phi \in 2^{2^A}$，

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。又因为$\phi \in 2^{2^A}$，所以$\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$，

试证：对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明.

根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。又因为$\phi \in 2^{2^A}$，所以$\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$，从而$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。 □

3. 集合的基本运算

定义3.1
设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

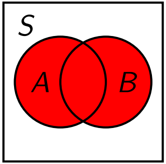
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.1

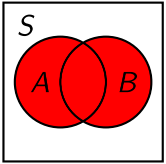
设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



3. 集合的基本运算

定义3.1
设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。



$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

例:
$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

3. 集合的基本运算

定义3.2

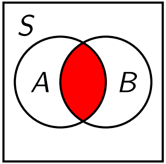
设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.2

设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。

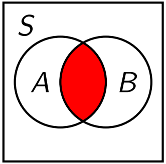


$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.2

设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例:

$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

3. 集合的基本运算

定义3.3

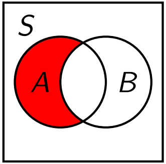
设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.3

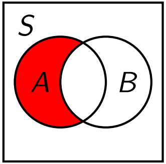
设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.3
设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例:
$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

3. 集合的基本运算

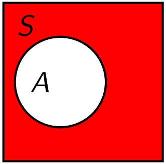
定义3.4
在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

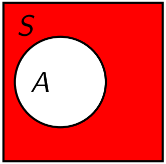


$$A^c = \{x|x \in S \wedge x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。



$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例:

$S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则$A^c = \{1\}$

3. 集合的基本运算

定理3.1

设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5. $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$.

8. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$,
$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

8'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。

对任意的x，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。

对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，因此，$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，因此，$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，即，$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明.

先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。
对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，因此，$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，即，$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，于是，$x \in A \cap (B \cup C)$。 □

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

证明.

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x,

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。
对任意的x，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。
对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。

对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$， 则$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。
再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。
对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$，　则$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$,

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。

对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$， 则$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$, 因此，$x \in C$并且$x \notin A \cup B$,

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

证明.

先证$C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cup B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$。

再证$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$。

对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$，　则$x \in C \setminus A$并且$x \in C \setminus B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$并且$x \notin B$, 因此，$x \in C$并且$x \notin A \cup B$，于是$x \in C \setminus (A \cup B)$。 $\square$

3. 集合的基本运算

定义3.5

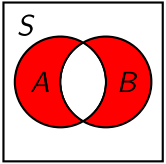
设A, B为两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的**对称差**，记为$A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. 集合的基本运算

定义3.5

设A, B为两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对称差，记为$A \triangle B$。

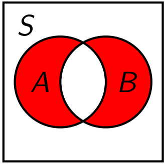


$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. 集合的基本运算

定义3.5

设A, B为两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对称差，记为$A \triangle B$。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例：

$\{1,2\} \triangle \{2,3\} = ?$

$\{1,2\} \triangle \{1\} = ?$

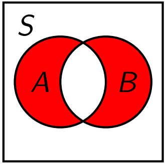
$\{1,2\} \triangle \phi = ?$

$\{1,2\} \triangle \{1,2\} = ?$

3. 集合的基本运算

定义3.5

设A, B为两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对称差，记为$A \triangle B$。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例：

$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = ?$

$\{1, 2\} \triangle \{1\} = ?$

$\{1, 2\} \triangle \phi = ?$

$\{1, 2\} \triangle \{1, 2\} = ?$

定理3.2

设S为全集，$A \in 2^S$，$B \in 2^S$，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

3. 集合的基本运算

定理3.3

设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则

1. $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$.
2. $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$.
3. $\emptyset \bigtriangleup A = A$.
4. $A \bigtriangleup A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$.

3. 集合的基本运算

定义3.6

以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义3.7

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \exists\alpha \in I x \in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \forall\alpha \in I x \in A_\alpha\}$$

3. 集合的基本运算

例：

设$I=\{x\in\mathbb{R}|0<x\leq 1\}$，$\forall x\in\mathbb{R}, A_x=\{y\in\mathbb{R}|0<y<x\}$，则

$$\bigcup_{x\in I}A_x=?,\bigcap_{x\in I}A_x=?$$

3. 集合的基本运算

定理3.4

设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$
2. $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

证明.

设全集为S。如果$x \in (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$，则$x \in S$，且$x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$，从而对任意的$\alpha \in I$，$x \notin A_\alpha$。于是，对任意的$\alpha \in I$都有$x \in A_\alpha^c$。因此，$x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$，故$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$。
其次，如果$x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$，则对任意的$\alpha \in I$都有$x \in A_\alpha^c$。因此，对任意的$\alpha \in I$都有$x \in S$且$x \notin A_\alpha$，故$x \notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$。于是，$x \in (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$。所以，$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c \subseteq (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$。
由集合相等的定义便知，$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$。 □

3. 集合的运算

定义3.8

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。

$(a, b) = (c, d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

3. 集合的运算

定义3.8

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。$(a, b) = (c, d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

定义3.9

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的笛卡尔乘积，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

3. 集合的运算

定义3.8

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a,b)。$(a,b)=(c,d)$当且仅当$a=c$并且$b=d$。

定义3.9

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$为$A$与$B$的笛卡尔乘积，记为$A\times B$。即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$$

例：

如果$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，那么$X\times Y=?$，$Y\times X=?$

3. 集合的运算

定义3.8

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。

$(a, b) = (c, d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

定义3.9

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的笛卡尔乘积，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例：

如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，那么$X \times Y = ?$，$Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

3. 集合的运算

定义3.10

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

3. 集合的运算

定义3.10

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，…，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，…，$a_n = b_n$。

定义3.11

设A_1, A_2，…，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

3. 集合的运算

定义3.10

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，…，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，…，$a_n = b_n$。

定义3.11

设A_1, A_2，…，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

例:

如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4\}$，$Z = \{5, 6\}$ 那么$X \times Y \times Z = ?$

6. 有穷集合的基数

定义6.1

设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义6.2

设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义6.3

设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义6.4

设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

6. 有穷集合的基数

定义6.5

设A为一个集合，如果$A = \Phi$，其基数定义为0;如果$A \neq \Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1, 2, \ldots, n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为0或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

6. 有穷集合的基数

定理6.1
设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.1

设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理6.2

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

定理6.4

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.5
设S为有穷集，$A \subseteq S$，则$|A^c| = |S| - |A|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$
\begin{aligned}
& |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
& = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& - \ldots \\
& + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n=1$时，结论显然成立。
假设当$n=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。实际上，

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\
=&|(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\cup A_{k+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|+|A_{k+1}|-|(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\cap A_{k+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|+|A_{k+1}|-|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\cdots\cup(A_k\cap A_{k+1})|
\end{aligned}
\tag{1}
$$

证明（续上页）.

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
&- \dots \\
&+ (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1\le i<j\le k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| \\
&+ \sum_{1\le i<j<t\le k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap (A_t \cap A_{k+1})|
\end{aligned}
$$

证明（续上一页）.

将(2)和(3)代入(1)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k+1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k+1}|A_i\cap A_j\cap A_t| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

$\square$

6. 有穷集合的基数

定理6.8

设S为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$都是有穷集S的子集，则

$$
\begin{aligned}
& |\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c| \\
=& |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < t \le n} |A_i \cap A_j \cap A_t| + \cdots \\
& + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

6. 有穷集合的基数

例：

在1000名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中804人掌握了英语，205人掌握了日语，190人掌握了俄语，125人既掌握了英语又掌握了日语，57人既掌握了日语又掌握了俄语，85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生，英语、日语、俄语全掌握的有多少人？

习题

设M_1，M_2，$\cdots$和N_1，N_2，$\cdots$是集合S的子集的两个序列，对$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots$有$N_i \cap N_j = \phi$。另$Q_1 = M_1$，$Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$，$n = 2, 3, \cdots$，试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$$

习题

设M_1，M_2，$\cdots$和N_1，N_2，$\cdots$是集合S的子集的两个序列，对$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots$有$N_i \cap N_j = \phi$。另$Q_1 = M_1$，$Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$，$n = 2, 3, \cdots$，试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$$

证明.
对任意的$x \in N_n \triangle Q_n$，$x \in N_n \setminus Q_n$或者$x \in Q_n \setminus N_n$。如果$x \in Q_n \setminus N_n$，则$x \in Q_n$并且$x \notin N_n$。
由$Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$知$x \in M_n$, 从而$x \in M_n$并且$x \notin N_n$，因此$x \in N_n \triangle M_n$，于是$x \in \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$。

□

习题

设M_1，M_2，$\cdots$和N_1，N_2，$\cdots$是集合S的子集的两个序列，对$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots$有$N_i \cap N_j = \phi$。另$Q_1 = M_1$，$Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$，$n = 2, 3, \cdots$，试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$$

证明（续上页）.
如果$x \in N_n \setminus Q_n$，则$x \in N_n$并且$x \notin Q_n$。
由$Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$知$x \notin M_n$或者$x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$。
当$x \notin M_n$时，由$x \in N_n$知$x \in N_n \triangle M_n$，从
而$x \in \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$；当$x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$时，存
在i，$1 \leq i \leq n-1$，$x \in M_i$，由$x_i \in N_n$及
对$i \neq j$，$i, j = 1, 2, \cdots$有$N_i \cap N_j = \phi$知$x \notin N_i$，从
而$x \in N_i \triangle M_i$，因此$x \in \bigcup_{i=1}^{n} (N_i \triangle M_i)$，结论得证。 □

习题

习题1

设集合$S = \{\phi, \{\phi\}\}$，则$2^S =$ ______。

习题2

下列命题中哪个是假的?

A. 对每个集合A，$\phi \in 2^A$。
B. 对每个集合A，$\phi \subseteq 2^A$。
C. 对每个集合A，$A \in 2^A$。
D. 对每个集合A，$A \subseteq 2^A$。

习题3

设集合$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，则$A \cup B =$ ______，$A \cap B =$ ______，$A \setminus B =$ ______，$A \triangle B =$ ______，$A \times B =$ ______。

习题4

设A，B，C为集合，证明：$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

习题

习题5

下列等式是否成立：$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$?

习题6

下列命题中哪个是真的?

A. 对任意集合A，B，$2^{A\cup B} = 2^A \cup 2^B$。

B. 对任意集合A，B，$2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$。

C. 对任意集合A，B，$2^{A\setminus B} = 2^A \setminus 2^B$。

D. 对任意集合A，B，$2^{A\triangle B} = 2^A \triangle 2^B$。

习题7

设A，B，C为集合，并且$A \cup B = A \cup C$，则下列哪个断言成立?

A. $B = C$

B. $A \cap B = A \cap C$

C. $A \cap B^c = A \cap C^c$

D. $A^c \cap B = A^c \cap C$

习题

习题8

设A，B，C，D为任意四个集合，证明

$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

习题9

设A，B，C为集合，化简

$(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$

习题10

证明

1) $A\triangle B=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$

2) $(A\triangle B)^c=(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$

3) $(A\triangle B)^c=(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)$

习题

习题11

设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

习题选讲

习题11

设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

$|2^S| = 2^{|S|}$

$2^\phi = \{\phi\}$

$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$

$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

习题选讲

习题

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

1. 当$n=0$时，$P(0)$成立。

2.假设当$n=k(k\geq 0)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。

$\square$

$P(n)$：对任意的集合A，如果$|A|=n$，则$|2^A|=2^n$。

$P(0)$

$\forall k\geq 0 P(k)\to P(k+1)$

$P(0)\to P(1), P(1)\to P(2), P(2)\to P(3), \cdots$

习题11

设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

321	
000	$\{\phi\}$
001	$\{1\}$
010	$\{2\}$
011	$\{1,2\}$
100	$\{3\}$
101	$\{1,3\}$
110	$\{2,3\}$
111	$\{1,2,3\}$