FND谓词演算系统

陈建文

December 15, 2022

谓词演算自然推理系统FND(First order Natural Deduction)在命题演算自然推理系统的基础上添加了下列规则:

1.$\forall$引入规则

$\frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash\forall vA}$，$v$在$\Gamma$中无自由出现。

2.$\forall$消除规则

$\frac{\Gamma\vdash\forall vA}{\Gamma\vdash A_t^v}$，项$t$对变元$v$可代入。

3.$\exists$引入规则

$\frac{\Gamma\vdash A_t^v}{\Gamma\vdash\exists vA}$，项$t$对变元$v$可代入。

4.$\exists$消除规则

$\frac{\Gamma\vdash\exists vA,\Gamma;A_c^v\vdash B}{\Gamma\vdash B}$，其中常元$c$在$\Gamma$及公式$A$，$B$中均无出现。

例. $\vdash \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$

证明. □

例. $\vdash \exists vA \to \neg\forall v\neg A$

证明. □

例. $\forall v(A \wedge B) \vdash\dashv \forall vA \wedge \forall vB$

证明. □

例. $\exists v(A \vee B) \vdash\dashv \exists vA \vee \exists vB$

证明. □

课后作业题

练习1. 在FND中，对任意的公式A，证明:

1.$\vdash \neg\forall v\neg A \to \exists vA$

证明.

(1)$\neg\forall v\neg A, A \vdash A$　　公理

(2)$\neg\forall v\neg A, A \vdash \exists vA$　　(1)$\exists$引入

(3)$\neg\forall v\neg A, \neg A \vdash \neg A$　　公理

(4)$\neg\forall v\neg A, \neg A \vdash \forall v\neg A$　　(3)$\forall$引入

(5)$\neg\forall v\neg A, \neg A \vdash \neg\forall\neg A$　　公理

(6)$\neg\forall v\neg A, \neg A \vdash \exists vA$　　(4)(5)$\neg$消除

(7)$\neg\forall v\neg A \vdash \exists vA$　　(2)(6)假设消除 □

(2)$\exists v \forall u A \vdash \forall u \exists v A$

证明.

(1)$\exists v \forall u A \vdash \exists v \forall u A$ 公理

(2)$\exists v \forall u A, \forall u A_c^v \vdash \forall u A_c^v$ 公理

(3)$\exists v \forall u A, \forall u A_c^v \vdash A_c^v$ (2)$\forall$消除

(4)$\exists v \forall u A, \forall u A_c^v \vdash \exists v A$ (3)$\exists$引入

(5)$\exists v \forall u A, \forall u A_c^v \vdash \forall u \exists v A$ (4)$\forall$引入

(6)$\exists v \forall u A \vdash \forall u \exists v A$ (1)(5)$\exists$消除 □