

第十讲环的定义及简单性质

陈建文

November 16, 2022

定义1. 设 R 为一个非空集合, R 中有两个代数运算, 一个叫做加法并用“ $+$ ”表示, 另一个叫做乘法并用“ \circ ”表示, 如果

(1) $(R, +)$ 为一个Abel群:

$$I. \forall a, b, c \in R (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c);$$

$$II. \exists 0 \in R \forall a \in R 0 + a = a + 0 = a;$$

$$III. \forall a \in R \exists b \in R b + a = a + b = 0, \text{ } a \text{ 的逆元记为 } -a;$$

$$IV. \forall a, b \in R a + b = b + a.$$

(2) (R, \circ) 为一个半群; $\forall a, b, c \in R (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(3) 乘法对加法满足左、右分配律: $\forall a, b, c \in R$

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$$

$$(b + c) \circ a = (b \circ a) + (c \circ a)$$

则称代数系 $(R, +, \circ)$ 为一个环 (ring)。

在环 R 中, $a \circ b$ 简写为 ab 。

例. 整数集合 Z 对通常数的加法和乘法构成一个环 $(R, +, \cdot)$, 称为整数环。

例. 文字 x 的整系数多项式之集 $Z[x]$ 对多项式的加法和乘法构成一个环。

定义2. 环 $(R, +, \circ)$ 称为交换环或可换环, 如果其中的乘法满足交换律, 即 $\forall a, b \in R, ab = ba$ 。

例. 设 M_n 为一切 $n \times n$ 实矩阵之集, 则 M_n 对矩阵的加法和乘法构成一个非交换环 $(M_n, +, \cdot)$, 称为 n 阶矩阵环。

定义3. 如果环 R 的乘法有单位元, 则环 R 对于乘法运算的单位元简称为环 R 的单位元。

例. 整数环 $(Z, +, \cdot)$ 有单位元1。偶数集合对于通常数的乘法和加法构成一个没有单位元的环。

定义4. 环 $(R, +, \circ)$ 称为有限环, 如果 R 为有限非空的集合。

例. 令 $S = \{0\}$, 则 S 对数的通常加法和乘法构成一个环, 称为零环, 它仅有一个元素。

例. 全体整数集 Z 对模 n 同余类之集 $Z_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ (n 为正整数), 对其上定义的同余类加法和同余类乘法构成一个环。同余类加法定义为

$$[i] + [j] = [i + j]$$

同余类乘法定义为

$$[i] \cdot [j] = [i \cdot j]$$

$\forall i, j, i', j' \in Z$, 如果 $[i] = [i']$, $[j] = [j']$, 则 $[ij] = [i'j']$, 这验证了“ \cdot ”为一个运算。

$\forall i, j, k \in Z$, 验证 $([i] \cdot [j]) \cdot [k] = [i] \cdot ([j] \cdot [k])$: $([i] \cdot [j]) \cdot [k] = [ij] \cdot [k] = [(ij)k]$, $[i] \cdot ([j] \cdot [k]) = [i] \cdot [jk] = [i(jk)]$ 。

$\forall i, j, k \in Z$, 验证 $[i] \cdot ([j] + [k]) = [i] \cdot [j] + [i] \cdot [k]$: $[i] \cdot ([j] + [k]) = [i] \cdot [j+k] = [i(j+k)]$, $[i] \cdot [j] + [i] \cdot [k] = [ij] + [ik] = [ij+ik]$ 。

$\forall i, j, k \in Z$, 验证 $([j] + [k]) \cdot [i] = [j] \cdot [i] + [k] \cdot [i]$: $([j] + [k]) \cdot [i] = [j+k] \cdot [i] = [(j+k)i]$, $[j] \cdot [i] + [k] \cdot [i] = [ji] + [ki] = [ji+ki]$ 。

定义5. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $\forall a, b \in R$, $a - b$ 定义为 $a + (-b)$ 。

定理1. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $\forall a, b, c \in R$,

$$1. -(a+b) = -a - b$$

这是因为 $(-a-b) + (a+b) = ((-a) + (-b)) + (a+b) = ((-a)+a) + ((-b)+b) = 0 + 0 = 0$ 。

$$2. 0 \circ a = a \circ 0 = 0$$

这是因为 $0 \circ a = (0+0) \circ a = 0 \circ a + 0 \circ a$, 两边同时加上 $0 \circ a$ 的逆元得 $0 = 0 \circ a$; 同理, $a \circ 0 = a \circ (0+0) = a \circ 0 + a \circ 0$, 两边同时加上 $a \circ 0$ 的逆元得 $a \circ 0 = 0$ 。

$$3. (-a)b = -(ab), a(-b) = -(ab)$$

这是因为 $(-a)b + ab = ((-a) + a)b = 0b = 0$, $a(-b) + ab = a((-b) + b) = a0 = a$ 。

$$4. (-a)(-b) = ab$$

这是因为 $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$ 。

$$5. a(b-c) = ab - ac$$

这是因为 $a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$ 。

定义6. 在环 $(R, +, \circ)$ 中, $\forall a \in R$, 定义 $0a = 0$, $(n+1)a = na + a$ ($n \geq 0$), $(-n)a = n(-a)$ ($n \geq 1$)。

定理2. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $\forall a, b \in R$, $m, n \in Z$,

$$1. n(-a) = -(na)$$

$$2. (m+n)a = ma + na$$

$$3. m(na) = (mn)a$$

$$4. m(a+b) = ma + mb$$

$$5. n(a-b) = na - nb$$

这是因为 $n(a-b) = n(a+(-b)) = na + n(-b) = na + (-(nb)) = na - nb$ 。

$$6. (na)b = a(nb) = n(ab)$$

定义7. 在环 $(R, +, \circ)$ 中, $\forall a \in R$, 定义 $a^1 = a$, $a^{m+1} = a^m \circ a$ ($m \geq 1$)。

定理3. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $\forall a, b \in R, m, n \in \mathbb{Z}^+$,

1. $a^{m+n} = a^m \circ a^n$

2. $(a^m)^n = a^{mn}$

3. 如果 $ab = ba$, 则二项式定理成立, 即当 $n > 0$ 时

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

例. 在环 $(M_2, +, \cdot)$ 中, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 M_2 中的两个非零元素, 但是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定义8. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $a \in R$, 如果存在一个元素 $b \in R, b \neq 0$, 使得 $ab = 0$, 则称 a 为 R 的一个左零因子; 如果存在一个元素 $c \in R, c \neq 0$, 使得 $ca = 0$, 则称 a 为 R 的一个右零因子; 如果 a 既是 R 的左零因子, 又是 R 的右零因子, 则称 a 为 R 的零因子。

定义9. 没有非零的左零因子, 也没有非零的右零因子的环称为无零因子环。可换的无零因子环称为整环。

定理4. 环 R 为无零因子环的充分必要条件是 $\forall a, b \in R$, 如果 $a \neq 0$ 并且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ 。

证明. 环 R 不是无零因子环等价于 $\exists a, b \in R, a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge ab = 0$, 等价于 $\neg(\forall a, b \in R, a \neq 0 \wedge b \neq 0 \rightarrow ab \neq 0)$ 。 \square

定理5. 环 R 为无零因子环的充分必要条件是 $\forall a, b \in R$, 如果 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或者 $b = 0$ 。

定理6. 环 R 为无零因子环的充分必要条件是在 R 中乘法满足左消去律或右消去律, 即

$\forall a, b, c \in R$, 如果 $a \neq 0, ab = ac$, 则 $b = c$;

或者

$\forall a, b, c \in R$, 如果 $a \neq 0, ba = ca$, 则 $b = c$ 。

证明. 由 R 为无零因子环, 往证在 R 中乘法满足左消去律。

$\forall a, b, c \in R$, 如果 $a \neq 0, ab = ac$, 则 $a(b - c) = 0$ (这是因为 $ab + (-ac) = 0$, 从而 $ab + a(-c) = 0$, 于是 $a(b + (-c)) = 0$), 由 R 为无零因子环知 $b - c = 0$, 因此 $b = c$ 。

由在环 R 中乘法满足左消去律, 往证 R 为无零因子环。

$\forall a, b \in R$, 如果 $a \neq 0$ 并且 $b \neq 0$, 用反证法证明 $ab \neq 0$ 。如果 $ab = 0$, 则 $ab = a0$, 于是 $b = 0$, 与 $b \neq 0$ 矛盾。

同理可证 R 为无零因子环的充分必要条件是在 R 中满足右消去律。 \square

定义10. 一个环称为一个体, 如果它满足以下两个条件:

- (1) 它至少含有一个非零元素;
- (2) 非零元素的全体对乘法构成一个群。

定义11. 如果一个体中的乘法满足交换律，则称之为域。

定义12. 有理数集 Q 、实数集 R 、复数集 C 对通常的乘法和加法都构成域。

定理7. 至少有一个非零元素的无零因子有限环是体。

定义13. 仅有有限个元素的体（域）称为有限体（域）。

例. 设 p 为一个素数，则模 p 同余类环 $(Z_p, +, \circ)$ 为一个有限域。

证明. 只需证 Z_p 为无零因子环: $\forall [a], [b] \in Z_p$, 如果 $[a][b] = [0]$, 则 $[ab] = [0]$, 从而 $p|ab$, 由 p 为素数知 $p|a$ 或者 $p|b$, 所以 $[a] = [0]$ 或者 $[b] = [0]$. \square

定义14. 设 $(F, +, \circ)$ 为一个域, $\forall a, b \in F$, b 除以 a 的商 $\frac{b}{a}$ 定义为 ba^{-1} 。

定理8. 在域 F 中, 商有以下性质:

- (1) $\forall a, b, c, d \in F, b \neq 0, d \neq 0, ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
- (2) $\forall a, b, c, d \in F, b \neq 0, d \neq 0, \frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$;
- (3) $\forall a, b, c, d \in F, b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ 。

定义15. 设 $(R, +, \circ)$ 为一个环, $S \subseteq R$, 如果 S 对 R 的加法和乘法也构成一个环, 则称 S 为 R 的一个子环。

定义16. 设 $(F, +, \circ)$ 为一个体（域）, $E \subseteq F$, 如果 E 对 F 的加法和乘法也构成一个体（域）, 则称 E 为 F 的一个子体（子域）。

定理9. 环 R 的非空子集 S 为 R 的一个子环的充分必要条件是:

- (1) $\forall a, b \in S, a - b \in S$;
- (2) $\forall a, b \in S, ab \in S$ 。

体（域） F 的非空子集 E 为 F 的一个子体（子域）的充分必要条件是:

- (1) $|E| \geq 2$;
- (2) $\forall a, b \in E, a - b \in E$;
- (3) $\forall a, b \in E, a \neq 0, b \neq 0, ab^{-1} \in E$ 。

课后作业题:

练习1. 设 $Z(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in Z\}$, 其中 Z 为全体整数之集合。试证: $Z(\sqrt{2})$ 对数的通常加法和乘法构成一个环。

证明. $\forall m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z, (m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2}) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}, (m_1 + n_1\sqrt{2})(m_2 + n_2\sqrt{2}) = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{2}$, 这验证了加法和乘法满足封闭性。

加法的结合律显然成立。

加法的单位元为 $0 + 0\sqrt{2} = 0$ 。

$\forall m, n \in Z, m + n\sqrt{2}$ 对加法的逆元为 $(-m) + (-n)\sqrt{2}$ 。

乘法的结合律, 乘法对加法的分配律显然成立。 \square

练习2. 设 $Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in Q\}$, 其中 Q 为全体有理数之集合。试证: $Q(\sqrt[3]{2})$ 对数的通常加法和乘法不构成一个环。

证明. $Q(\sqrt[3]{2})$ 对乘法不满足封闭性。否则如果 $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt[3]{2}$, 则 $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$, 从而 $2 = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}(a + b\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = a\sqrt[3]{2} + b(a + b\sqrt[3]{2}) = ab + (a + b^2)\sqrt[3]{2}$, 于是 $2 - ab = (a + b^2)\sqrt[3]{2}$ 。此时如果 $a + b^2 = 0$, 则 $2 - ab = 0$, 可得 $b^3 = -2$, 与 b 为有理数矛盾。如果 $a + b^2 \neq 0$, 则 $\sqrt[3]{2} = \frac{2-ab}{a+b^2}$, 等式的左边是一个无理数, 右边是一个有理数, 也矛盾。 \square

练习3. 环 R 如果对于乘法有左单位元, 则环 R 对于乘法的左单位元称为它的左单位元; 环 R 如果对于乘法有单位元, 则环 R 对于乘法的单位元称为它的单位元。设 e 为环 R 的唯一左单位元, 试证 e 为 R 的单位元。

证明. $\forall a, b \in R$,

$$(ae - a + e)b = (ae)b - ab + eb = ab - ab + b = b$$

从而 $ae - a + e$ 也为 R 的左单位元。又由于 e 为环 R 的唯一左单位元, 从而 $ae - a + e = e$, 于是 $ae = a$, 这说明 e 也为 R 的右单位元, 从而为 R 的单位元。 \square

练习4. 环 R 如果对于乘法有单位元, 则环 R 对于乘法的单位元称为它的单位元。设 $(R, +, \circ)$ 为一个有单位元1的环, 如果 R 中的元素 a, b 及 $ab - 1$ 均有逆元素, 试证 $a - b^{-1}$ 及 $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 也有逆元素, 并且

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$$

证明. 由 $ab - 1$ 可逆及 a 可逆知 $(ab - 1)a = aba - a$ 可逆。
欲证

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$$

只需证

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})(aba - a) = 1$$

只需证

$$(a - b^{-1})^{-1}(aba - a) - ba + 1 = 1$$

只需证

$$(a - b^{-1})^{-1}(aba - a) = ba$$

只需证

$$(a - b^{-1})(ba) = aba - a$$

如果 $a - b^{-1}$ 可逆, 该等式显然成立。

以上证明了 $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 为 $aba - a$ 的左逆元, 又由于 $aba - a$ 可逆, 因此 $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 为 $aba - a$ 的逆元。

我们还需要证明 $a - b^{-1}$ 可逆。

由

$$(a - b^{-1})(ba) = aba - a$$

可得

$$(a - b^{-1}) = (ab - 1)b^{-1}$$

这里 $ab - 1$ 和 b^{-1} 均可逆, 从而 $a - b^{-1}$ 可逆。 \square

练习5. 环 R 如果对于乘法有单位元, 则环 R 对于乘法的单位元称为它的单位元。试证: 有单位元素的环 R 中零因子没有逆元素。

证明. 设 a 为 R 的左零因子, 则存在一个 $b \in R, b \neq 0$, 使得 $ab = 0$ 。以下用反证法证明 a 没有逆元素。假设 a 有逆元素, 则 $a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$, 即 $(a^{-1}a)b = b = 0$, 与 $b \neq 0$ 矛盾。同理可证 a 的右零因子也没有逆元素。 \square

练习6. 在交换环中二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

成立。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n 。

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

$$\begin{aligned} & (a+b)^{k+1} \\ &= (a+b)^k(a+b) \\ &= (a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + b^k)(a+b) \\ &= a^{(k+1)} + (\binom{k}{0} + \binom{k}{1})a^{(k+1)-1}b + (\binom{k}{1} + \binom{k}{2})a^{(k+1)-2}b^2 + \cdots + (\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k})ab^{(k+1)-1} + b^{(k+1)} \\ &= a^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1}b + \binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1} + b^{(k+1)} \end{aligned}$$

\square

练习7. 给出一个环 R 的例子, 环 R 中有单位元, 但 R 的某个子环的单位元与 R 的单位元不同。

证明. 在环 $Z_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ 中, $S = \{[0], [2], [4]\}$ 对于 Z_6 中的加法和乘法构成 Z_6 的子环, Z_6 的单位元为 $[1]$, S 的单位元为 $[4]$ 。 \square

练习8. 证明: 对于一个有单位元的环, 加法的交换律是环的定义里其他条件的结果。

证明. 设 1 为环 R 的单位元。 $\forall a, b \in R, (a+b) - (b+a) = (a+b) - 1 \cdot (b+a) = (a+b) + (-1)(b+a) = (1a+1b) + ((-1)b + (-1)a) = 1a + (1+(-1))b + (-1)a = 1a + 0 + (-1)a = 1a + (-1)a = (1+(-1))a = 0a = 0$, 故 $a+b = b+a$, 即 R 中的加法满足交换律。 \square

练习9. 设 $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in Q\}$, 其中 Q 为全体有理数之集合。试证: $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 对数的通常加法和乘法构成一个域。

$\forall a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in Q$, $(a_1 + b_1 \sqrt[3]{2} + c_1 \sqrt[3]{4}) + (a_2 + b_2 \sqrt[3]{2} + c_2 \sqrt[3]{4}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt[3]{2} + (c_1 + c_2) \sqrt[3]{4}$, $(a_1 + b_1 \sqrt[3]{2} + c_1 \sqrt[3]{4})(a_2 + b_2 \sqrt[3]{2} + c_2 \sqrt[3]{4}) = (a_1 a_2 + 2b_1 c_2 + 2c_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2c_1 c_2) \sqrt[3]{2} + (a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2) \sqrt[3]{4}$, 这验证了加法和乘法满足封闭性。

加法和乘法的结合律显然成立。

加法的单位元为 $0 + 0\sqrt[3]{2} = 0$; 乘法的单位元为 $1 + 0\sqrt[3]{2} + 0\sqrt[3]{4} = 1$ 。

$\forall m, n \in Q$, $m + n\sqrt[3]{2}$ 对加法的逆元为 $(-m) + (-n)\sqrt[3]{2}$ 。

$\forall a, b, c \in Z$, a, b, c 不全为 0, 以下计算 $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ 对乘法的逆元。

设 $x^3 - 1 = (cx^2 + bx + a)(px + q) + r$, 这里 p, q, r 为有理数, 则 $(\sqrt[3]{2})^3 - 1 = (c(\sqrt[3]{2})^2 + b\sqrt[3]{2} + a)(p\sqrt[3]{2} + q) + r$, 于是 $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \frac{p\sqrt[3]{2} + q}{1-r} = 1$, $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ 的逆元为 $\frac{p\sqrt[3]{2} + q}{1-r}$ 。

乘法对加法的分配律显然成立。

练习10. 环 R 称为布尔环, 如果 R 中任一非零元都是幂等的, 即 $\forall a \in R, a^2 = a$ 。试证:

- (1) $\forall a \in R, a + a = 0$;
- (2) 布尔环是交换环;
- (3) 给出一个布尔环的例子。

(1) 证明. $\forall a, b \in R$, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a + b$, 即 $a^2 + ab + ba + b^2 = a + b$, 由 $a^2 = a$ 和 $b^2 = b$ 可得 $a + ab + ba + b = a + b$, 于是 $ab + ba = 0$ 。

当 $b = a$ 时, $a^2 + a^2 = 0$, 即 $a + a = 0$ 。□

(2) 证明. 由 (1) 的证明过程知 $\forall a, b \in R, ab + ba = 0$ 。因为 $a + a = 0$, 所以 $a = -a$ 。于是, $ab = -ba = b(-a) = ba$ 。□

(3) . 设 S 为全集, 则 $(2^S, \Delta, \cap)$ 为一个布尔环。

$(\{T, F\}, \oplus, \wedge)$ 为一个布尔环, 同时也为一个域。这里, $T \oplus T = F, T \oplus F = T, F \oplus T = T, F \oplus F = F$ 。□