离散数学讲义

陈建文

March 8, 2022

第 一 章　集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示"并且"，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为ϕ。

定义1.2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A x \in B$ 即$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B x \notin A$即$A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是$\forall x x \in A \rightarrow x \in B$。对一些特殊的$x$的值分析如下:

- 当$x = 1$时，$1 \in A \rightarrow 1 \in B$，即$T \rightarrow T$，其真值为$T$;
- 当$x = 3$时，$3 \in A \rightarrow 3 \in B$，即$F \rightarrow T$，其真值为$T$;
- 当$x = 0$时，$0 \in A \rightarrow 0 \in B$，即$F \rightarrow F$，其真值为$T$。

定义1.3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1,2,3,4,5\}=\{3,4,2,1,5\}$
- $\{x\in\mathcal{R}|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x\in A$，因此空集为A的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi\subseteq\phi'$并且$\phi'\subseteq\phi$，从而$\phi=\phi'$，矛盾。

□

"空集为任一集合的子集"这一结论初学时，也可以用反证法证明其正确性，以帮助我们理解其中的逻辑。为了用反证法证明该结论，首先让我们分析一下对于任意的集合A和B，A不是B的子集（$A\not\subseteq B$）的含义：

$$\begin{aligned}A\not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg(A\subseteq B)\\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x x\in A\rightarrow x\in B)\\ &\Leftrightarrow \exists x\neg(x\in A\rightarrow x\in B)\\ &\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg(x\in A)\vee(x\in B))\\ &\Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg(x\in A))\wedge\neg(x\in B))\\ &\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)\end{aligned}$$

空集为任一个集合的子集。

证明. 用反证法。设存在一个集合A，$\phi\not\subseteq A$，则存在$x\in\phi$，但$x\notin A$，这显然是不可能的，结论得证。 □

定义1.4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

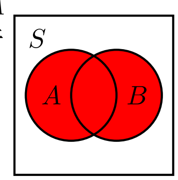
例. $2^\phi=\{\phi\}$
$2^{\{1\}}=\{\phi,\{1\}\}$
$2^{\{1,2\}}=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
$2^{\{1,2,3\}}=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

例. $2^{\{\phi,\{\phi\}\}}=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

例. 对于任意的集合A，$\{\phi,\{\phi\}\}\in 2^{2^{2^A}}$。

证明. 根据幂集的定义，$\phi\in 2^A$，从而$\{\phi\}\subseteq 2^A$，即$\{\phi\}\in 2^{2^A}$。又因为$\phi\in 2^{2^A}$，所以$\{\phi,\{\phi\}\}\subseteq 2^{2^A}$，从而$\{\phi,\{\phi\}\}\in 2^{2^{2^A}}$。 □

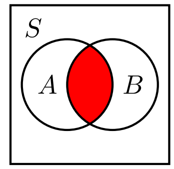
定义1.5. 设A,B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A\cup B$。



$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

（这里$\vee$表示"或者"）

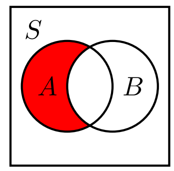
例. $\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$



定义1.6. 设A,B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A\cap B$。

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

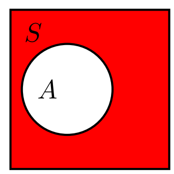
例. $\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$



定义1.7. 设A,B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A\setminus B$。

$$A\setminus B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

例. $\{1,2\}\setminus\{2,3\}=\{1\}$



定义1.8. 在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S\setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

$$A^c=\{x|x\in S\wedge x\notin A\}$$

例. $S=\{0,1\},A=\{0\}$, 则$A^c=\{1\}$。

定理1.2. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. $A\cup\emptyset=A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$.
4. $A\cup S=S$, $A\cap S=A$.
5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
6. $A\cup A^c=S$, $A\cap A^c=\emptyset$.
7. $C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$, $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$.
7'. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$, $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

以下只证明结论5和结论7，其他结论的证明留给读者自己完成。

首先证明结论5的第一条,我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
&\forall x x\in A\cup(B\cap C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\cap C\\
&\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C\\
&\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

对任意的x，如果$x\in A\cup(B\cap C)$，则$x\in A$或者$x\in B\cap C$，从而$x\in A$，或者$x\in B$并且$x\in C$，因此，$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\in A$或者$x\in C$，即，$x\in A\cup B$ 并且$x\in A\cup C$，于是，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

再证$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

对任意的x，如果$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$ 并且$x\in A\cup C$，从而$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\in A$或者$x\in C$，因此，$x\in A$，或者$x\in B$并且$x\in C$，即，$x\in A$或者$x\in(B\cap C)$，于是，$x\in A\cup(B\cap C)$。

□

接下来证明结论7的第一条，我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$
\begin{aligned}
&\forall x x\in C\setminus(A\cap B)\\
\Leftrightarrow& x\in C\wedge x\notin A\cap B\\
\Leftrightarrow& x\in C\wedge\neg(x\in A\cap B)\\
\Leftrightarrow& x\in C\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\
\Leftrightarrow& x\in C\wedge(\neg(x\in A)\vee\neg(x\in B))\\
\Leftrightarrow& x\in C\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\\
\Leftrightarrow&(x\in C\wedge x\notin A)\vee(x\in C\wedge x\notin B)\\
\Leftrightarrow&(x\in C\setminus A)\vee(x\in C\setminus B)\\
\Leftrightarrow& x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$C\setminus(A\cap B)\subseteq(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$。

对任意的x，如果$x\in C\setminus(A\cap B)$，则$x\in C$并且$x\notin A\cap B$，从而$x\in C$并且$x\notin A$或者$x\notin B$，因此，$x\in C\setminus A$或者$x\in C\setminus B$，于是$x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$。

再证$(C\setminus A)\cup(C\setminus B)\subseteq C\setminus(A\cap B)$。

对任意的x，如果$x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$， 则$x\in C\setminus A$或者$x\in C\setminus B$，从而$x\in C$并且$x\notin A$或者$x\notin B$,因此，$x\in C$并且$x\notin A\cap B$，于是$x\in C\setminus(A\cap B)$。 □

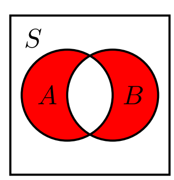
例. 下列等式是否成立?

$(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$

若成立，请给出证明。若不成立，请说明理由。

答. 该等式不成立。设$A=\phi$, $B=\phi$，$C=\{0\}$，则$(A\setminus B)\cup C=\{0\}$，而$A\setminus(B\setminus C)=\phi$，$(A\setminus B)\cup C\neq A\setminus(B\setminus C)$。 □

定义1.9. 设A,B为任意的两个集合，$A\setminus B$与$B\setminus A$的并集称为A与B的对**称差**，记为$A\bigtriangleup B$。



$$A\bigtriangleup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

例.

$$
\begin{aligned}
&\{1,2\} \triangle \{2,3\} = \{1,3\}\\
&\{1,2\} \triangle \{1\} = \{2\}\\
&\{1,2\} \triangle \phi = \{1,2\}\\
&\{1,2\} \triangle \{1,2\} = \phi
\end{aligned}
$$

定理1.3. 设A, B为任意两个集合，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设A, B, C为任意三个集合，则
1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

以下证明结论 2 和结论 5 ，其他结论留给读者思考。先证明结论 2 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$
\begin{aligned}
x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B)\\
&\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&x \in (A \triangle B) \triangle C\\
&\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C)\\
&\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C)\\
&\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)\\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&x \in A \triangle (B \triangle C)\\
&\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A\\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)\\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

再证明结论 5 。

证明.

$$\begin{aligned}
&A \cap (B \triangle C) \\
=&A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\
=&(A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \qquad (1.5)\\
&(A \cap B) \triangle (A \cap C) \\
=&(A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\
=&(A \cap B) \setminus A \cup (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus A \cup (A \cap C) \setminus B \\
=&(A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus B \\
=&(A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

由式(1.5)和式(1.6)知$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$。 □

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义1.11. 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I x \in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I x \in A_\alpha\}$$

例. 如果$I = \{1,2,3\}$，则$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3$；
如果$I = \{1,2,3\}$，则$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3$；
如果$I = \mathbb{N}$，则$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$；
如果$I = \mathbb{N}$，则$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$；
如果$I = \mathbb{Z}^+$，则$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$；
如果$I = \mathbb{Z}^+$，则$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$。

例. 设$I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$，$\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$，则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}, \bigcap_{x \in I} A_x = \phi$$

定理1.5. 设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$为任意一个集族，则

1. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
2. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

证明. 留给读者自己完成。 □

定理1.6. 设C为任意集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$
2. $C \setminus (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$

以下只证明第1条，其他结论的证明留给读者自己完成。
我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
&\forall x x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(\forall \alpha \alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\neg(\alpha \in I) \vee x \in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg\neg(\alpha \in I) \wedge \neg x \in A_\alpha\\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \notin A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \in C \wedge x \notin A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \in C \setminus A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证明$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$，则$x \in C$，且$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$，从而$x \in C$，且存在$\alpha \in I$，$x \notin A_\alpha$。于是，存在$\alpha \in I$，$x \in C \setminus A_\alpha$。因此，$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$，故$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。

其次，对任意的x，如果$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$，则存在$\alpha \in I$，$x \in C \setminus A_\alpha$。因此，存在$\alpha \in I$，$x \in C$且$x \notin A_\alpha$，故$x \in C$且$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$。于是，$x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$。所以，$\bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha) \subseteq C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$。

由集合相等的定义便知，$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。 □

将以上定理中的集合C替换为全集S，我们可以得到如下结论：

定理1.7. 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$
2. $(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为a ，第二个对象为b ，则该有序对记为(a, b)。$(a, b) = (c, d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

定义1.13. 设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的**笛卡尔乘积**，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$$

例. 如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，那么$X \times Y =?$，$Y \times X =?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

定义1.14. n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n**元组**。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，$\ldots$，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，$\ldots$，$a_n = b_n$。

定义1.15. 设A_1, A_2，$\ldots$，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的**笛卡尔乘积**，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$简记为$A^n$，例如$A^2 = A \times A$，$A^3 = A \times A \times A$。我们以前熟知的二维空间$R^2$即为$R \times R$，三维空间$R^3$即为$R \times R \times R$。

例. 如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4\}$，$Z = \{5, 6\}$ 那么$X \times Y \times Z =?$

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z =& \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), \\ & (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\} \end{aligned}$$

定义1.16. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义1.17. 设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义1.18. 设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义1.19. 设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

定义1.20. 设A为一个集合，如果$A=\Phi$，其基数定义为0;如果$A\neq\Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1,2,\ldots,n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为*0*或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

定理1.8. 设A,B为两个不相交的有穷集，则$|A\cup B|=|A|+|B|$。

定理1.9. 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

定理1.10. 设A,B为有穷集，则$|A\times B|=|A|\cdot|B|$。

定理1.11. 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_n|.$$

定理1.12. 设S为有穷集，$A\subseteq S$，则$|A^c|=|S|-|A|$。

定理1.13. 设A,B为有穷集，则$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

定理1.14. 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$为n个有穷集，则

$$\begin{aligned}&|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|\\&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\&-\ldots\\&+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n=1$时，结论显然成立。

假设当$n=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。实际上，

$$\begin{aligned}&|\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i|\\&=|(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\cup A_{k+1}|\\&=|\bigcup_{i=1}^{k}A_i|+|A_{k+1}|-|(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\cap A_{k+1}|\\&=|\bigcup_{i=1}^{k}A_i|+|A_{k+1}|-|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\cdots\cup(A_k\cap A_{k+1})|\end{aligned}\tag{1.7}$$

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{k}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k}|A_i\cap A_j\cap A_t| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\cdots\cup(A_k\cap A_{k+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}| - \sum_{1\le i<j\le k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<t\le k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})\cap(A_t\cap A_{k+1})| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap\cdots\cap(A_k\cap A_{k+1})| \qquad (1.9)\\
=&\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}| - \sum_{1\le i<j\le k}|(A_i\cap A_j\cap A_{k+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<t\le k}|A_i\cap A_j\cap A_t\cap A_{k+1}| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

将(1.8)和(1.9)代入(1.7)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k+1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k+1}|A_i\cap A_j\cap A_t| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

□

例. 在*1000*名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中*804*人掌握了英语，*205*人掌握了日语，*190*人掌握了俄语，*125*人既掌握了英语又掌握了日语，*57*人既掌握了日语又掌握了俄语，*85*人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这*1000*名大学生中，英语、日语、俄语全掌握的有多少人？

解. 设A,B,C分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合，则

$$\begin{aligned}&|A\cup B\cup C|\\=&|A|+|B|+|C|\\-&|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

即

$$1000=804+205+190-125-85-57+|A\cap B\cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数$|A\cap B\cap C|=68$。 □

练习1.1. 设X为一个非空集合，$A_n\subseteq X$, $A_{n+1}\subseteq A_n$，$n=1,2,3,\cdots$。试证对任意的自然数n,

$$A_n=\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$$

证明. 先证$A_n\subseteq\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$:

对任意的$x\in A_n$，如果$x\in\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，则$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$；如果$x\notin\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，则存在$i$，$i\geq n$且$x\notin A_i$，取最小的$j$，使得$j\geq n$且$x\notin A_j$，由$x\in A_n$知$j\neq n$，于是$x\in A_{j-1}$但$x\notin A_j$，这里$j>n$，从而$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x\subseteq\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$。

再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m\subseteq A_n$:

对任意的$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，如果$x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i\geq n$，$x\in A_i\cap A_{i+1}^c$，由已知条件易知$A_i\subseteq A_n$，从而$x\in A_n$；如果$x\in\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，则显然$x\in A_n$。 □

第 二 章