

离散数学讲义

陈建文

February 24, 2022

第一章 集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 A 和一个元素 a ，用 $a \in A$ 表示 a 是 A 的一个元素，用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$, 这里 \wedge 表示“并且”， E 还可以等价的表示为 $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 ϕ 。

定义1.2. 设 A, B 为两个集合，如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A, x \in B$ 即 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B, x \notin A$ 即 $A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

设 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则 $A \subseteq B$ ，其含义是 $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$ 。对一些特殊的 x 的值分析如下：

- 当 $x = 1$ 时， $1 \in A \rightarrow 1 \in B$ ，即 $T \rightarrow T$ ，其真值为 T ；
- 当 $x = 3$ 时， $3 \in A \rightarrow 3 \in B$ ，即 $F \rightarrow T$ ，其真值为 T ；
- 当 $x = 0$ 时， $0 \in A \rightarrow 0 \in B$ ，即 $F \rightarrow F$ ，其真值为 T 。

定义1.3. 设 A, B 为两个集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，并记为 $A = B$ 。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定理1.1. 空集为任一集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设 A 为任意一个集合, 显然对任意的 x 属于空集, 则 $x \in A$, 因此空集为 A 的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集 ϕ 和 ϕ' , 则 $\phi \subseteq \phi'$ 并且 $\phi' \subseteq \phi$, 从而 $\phi = \phi'$, 矛盾。

□

“空集为任一集合的子集”这一结论初学时, 也可以用反证法证明其正确性, 以帮助我们理解其中的逻辑。为了用反证法证明该结论, 首先让我们分析一下对于任意的集合 A 和 B , A 不是 B 的子集 ($A \not\subseteq B$) 的含义:

$$\begin{aligned}
 A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)
 \end{aligned}$$

空集为任一集合的子集。

证明. 用反证法。设存在一个集合 A , $\phi \not\subseteq A$, 则存在 $x \in \phi$, 但 $x \notin A$, 这显然是不可能的, 结论得证。

□

定义1.4. 集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集, 记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

例. $2^\phi = \{\phi\}$
 $2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
 $2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
 $2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

例. $2^{\{\phi, \{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

例. 对于任意的集合 A , $\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^A}$ 。

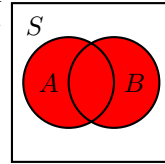
证明. 根据幂集的定义, $\phi \in 2^A$, 从而 $\{\phi\} \subseteq 2^A$, 即 $\{\phi\} \in 2^{2^A}$ 。又因为 $\phi \in 2^{2^A}$, 所以 $\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$, 从而 $\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$ 。

□

定义1.5. 设 A, B 为任意的两个集合, 至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

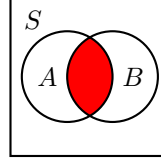
(这里 \vee 表示“或者”)



例. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

定义1.6. 设 A, B 为任意的两个集合, 由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

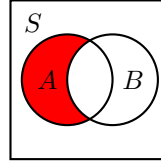
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



例. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

定义1.7. 设 A, B 为任意的两个集合, 由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$ 。

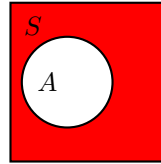
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



例. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中, 常以某个集合 S 为出发点, 而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S , 称为该问题的全集。如果 A 为 S 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的余集, 记为 A^c 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$



例. $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则 $A^c = \{1\}$ 。

定理1.2. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cup S = S, A \cap S = A$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$.
7. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B), C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
- 7'. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

以下只证明结论5和结论7, 其他结论的证明留给读者自己完成。
首先证明结论5的第一条, 我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & \forall x x \in A \cup (B \cap C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\
 & \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
 & \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\
 & \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in A \cup (B \cap C)$, 则 $x \in A$ 或者 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in A$, 或者 $x \in B$ 并且 $x \in C$, 因此, $x \in A$ 或者 $x \in B$, 并且 $x \in A$ 或者 $x \in C$, 即, $x \in A \cup B$ 并且 $x \in A \cup C$, 于是, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

再证 $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 则 $x \in A \cup B$ 并且 $x \in A \cup C$, 从而 $x \in A$ 或者 $x \in B$, 并且 $x \in A$ 或者 $x \in C$, 因此, $x \in A$, 或者 $x \in B$ 并且 $x \in C$, 即, $x \in A$ 或者 $x \in (B \cap C)$, 于是, $x \in A \cup (B \cap C)$ 。

□

接下来证明结论7的第一条, 我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & \forall x x \in C \setminus (A \cap B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cap B \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
 & \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \\
 & \Leftrightarrow (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B) \\
 & \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in C \setminus (A \cap B)$, 则 $x \in C$ 并且 $x \notin A \cap B$, 从而 $x \in C$ 并且 $x \notin A$ 或者 $x \notin B$, 因此, $x \in C \setminus A$ 或者 $x \in C \setminus B$, 于是 $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 。

再证 $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cap B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, 则 $x \in C \setminus A$ 或者 $x \in C \setminus B$, 从而 $x \in C$ 并且 $x \notin A$ 或者 $x \notin B$, 因此, $x \in C$ 并且 $x \notin A \cap B$, 于是 $x \in C \setminus (A \cap B)$ 。

□

例. 下列等式是否成立?

$$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$$

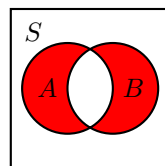
若成立, 请给出证明。若不成立, 请说明理由。

答. 该等式不成立。设 $A = \phi$, $B = \phi$, $C = \{0\}$, 则 $(A \setminus B) \cup C = \{0\}$, 而 $A \setminus (B \setminus C) = \phi$, $(A \setminus B) \cup C \neq A \setminus (B \setminus C)$ 。

□

定义1.9. 设 A, B 为任意的两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例.

$$\begin{aligned}\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} &= \{1, 3\} \\ \{1, 2\} \triangle \{1\} &= \{2\} \\ \{1, 2\} \triangle \phi &= \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \triangle \{1, 2\} &= \phi\end{aligned}$$

定理1.3. 设 A, B 为任意两个集合, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设 A, B, C 为任意三个集合, 则

1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

以下证明结论 2 和结论 5, 其他结论留给读者思考。先证明结论 2。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned}x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned}x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)\end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \in A \wedge x \in B \triangle C)\end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(??)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (??)式的第三行由与(??)式的对称性得到。

由(??)式和(??)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

□

再证明结论 5。

证明.

$$\begin{aligned}
 & A \cap (B \triangle C) \\
 &= A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{1.5} \\
 &= (A \cap B) \triangle (A \cap C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\
 &= (A \cap B) \setminus A \cup (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus A \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

由式(??)和式(??)知 $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ 。 \square

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果 I 为任意一个集合, 对 I 中每个元素 α 都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为 A_α , 那么所有这些 A_α 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示, 其中 I 称为标号集。

定义1.11. 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 如果 $I = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

如果 $I = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

如果 $I = \mathbb{N}$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$;

如果 $I = \mathbb{N}$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$;

如果 $I = \mathbb{Z}^+$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$;

如果 $I = \mathbb{Z}^+$, 则 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} A_\alpha$ 。

例. 设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$, 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}, \bigcap_{x \in I} A_x = \phi$$

定理1.5. 设 A 为任意集合, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

$$1. A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$$2. A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

证明. 留给读者自己完成。 \square

定理1.6. 设 C 为任意集合, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

$$1. C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$$

$$2. C \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$$

以下只证明第1条, 其他结论的证明留给读者自己完成。
我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned} \forall x, x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(\forall \alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\neg(\alpha \in I) \vee x \in A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg\neg(\alpha \in I) \wedge \neg x \in A_\alpha \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \notin A_\alpha) \\ \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \in C \wedge x \notin A_\alpha) \\ \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \in C \setminus A_\alpha) \\ \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha) \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证明 $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$, 则 $x \in C$, 且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, 从而 $x \in C$, 且存在 $\alpha \in I$, $x \notin A_\alpha$ 。于是, 存在 $\alpha \in I$, $x \in C \setminus A_\alpha$ 。因此, $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$, 故 $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。

其次, 对任意的 x , 如果 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$, 则存在 $\alpha \in I$, $x \in C \setminus A_\alpha$ 。因此, 存在 $\alpha \in I$, $x \in C$ 且 $x \notin A_\alpha$, 故 $x \in C$ 且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。于是, $x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 。所以, $\bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha) \subseteq C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 。

由集合相等的定义便知, $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$ 。 \square

将以上定理中的集合 C 替换为全集 S , 我们可以得到如下结论:

定理1.7. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

$$1. (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$$2. (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义1.13. 设 A 与 B 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 A 与 B 的**笛卡尔乘积**，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

例. 如果 $X = \{1, 2\}$ ， $Y = \{3, 4, 5\}$ ，那么 $X \times Y = ?$ ， $Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

定义1.14. n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 **n 元组**。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ， \dots ，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义1.15. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的**笛卡尔乘积**，记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时， $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 简记为 A^n ，例如 $A^2 = A \times A$ ， $A^3 = A \times A \times A$ 。我们以前熟知的二维空间 R^2 即为 $R \times R$ ，三维空间 R^3 即为 $R \times R \times R$ 。

例. 如果 $X = \{1, 2\}$ ， $Y = \{3, 4\}$ ， $Z = \{5, 6\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), \\ (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\}$$

定义1.16. 设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

定义1.17. 设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ ，只要 $x_1 \neq x_2$ ，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**。

定义1.18. 设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall y \in Y$ ， $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**。

定义1.19. 设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为从 X 到 Y 的**双射**，或者称 f 为从 X 到 Y 的**一一对应**。

定义1.20. 设 A 为一个集合, 如果 $A = \Phi$, 其基数定义为0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 n 使得 A 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 A 的基数为 n 。 A 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 n , 则称 A 为有穷集; 如果 A 不是有穷集, 则称 A 为无穷集。

定理1.8. 设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

定理1.9. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

定理1.10. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

定理1.11. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

定理1.12. 设 S 为有穷集, $A \subseteq S$, 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

定理1.13. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

定理1.14. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^n A_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\ &= |(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}| \\ &= |\bigcup_{i=1}^k A_i| + |A_{k+1}| - |(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1}| \\ &= |\bigcup_{i=1}^k A_i| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \end{aligned} \tag{1.7}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
 & |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| \\
 & \quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap (A_t \cap A_{k+1})| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \dots \cap (A_k \cap A_{k+1})| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_j \cap A_{k+1})| \\
 & \quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_{k+1}| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}|
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

将(??)和(??)代入(??)得

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}|
 \end{aligned}$$

□

例. 在1000名大学毕业生的调查中, 每个人至少掌握了一门外语, 其中804人掌握了英语, 205人掌握了日语, 190人掌握了俄语, 125人既掌握了英语又掌握了日语, 57人既掌握了日语又掌握了俄语, 85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这1000名大学生中, 英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

解. 设 A, B, C 分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合, 则

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

即

$$1000 = 804 + 205 + 190 - 125 - 85 - 57 + |A \cap B \cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数 $|A \cap B \cap C| = 68$ 。

□

练习1.1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ _____, $A \cap B =$ _____, $A \setminus B =$ _____, $A \triangle B =$ _____, $A \times B =$ _____。

练习1.2. 下列命题中哪个是假的?

- A. 对每个集合 A , $\phi \in 2^A$ 。
- B. 对每个集合 A , $\phi \subseteq 2^A$ 。
- C. 对每个集合 A , $A \in 2^A$ 。
- D. 对每个集合 A , $A \subseteq 2^A$ 。

练习1.3. 设集合 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 则 $2^S =$ _____。

练习1.4. 设 A, B, C 为集合, 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

练习1.5. 下列等式是否成立: $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$?

练习1.6. 下列命题中哪个是真的?

- A. 对任意集合 A, B , $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。
- B. 对任意集合 A, B , $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
- C. 对任意集合 A, B , $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。
- D. 对任意集合 A, B , $2^{A \triangle B} = 2^A \triangle 2^B$ 。

练习1.7. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列哪个断言成立?

- A. $B = C$
- B. $A \cap B = A \cap C$
- C. $A \cap B^c = A \cap C^c$
- D. $A^c \cap B = A^c \cap C$

练习1.8. 设 A, B, C, D 为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

练习1.9. 设 A, B, C 为集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

练习1.10. 证明

- 1) $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
- 2) $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
- 3) $(A \triangle B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

练习1.11. 设集合 S 有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

练习1.12. 设 M_1, M_2, \dots 和 N_1, N_2, \dots 是集合 S 的子集的两个序列, 对 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 。另 $Q_1 = M_1, Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c, n = 2, 3, \dots$, 试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$$

练习1.13. 求证: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned} \forall x x \in A \cap (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in A \cap (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$, 从而 $x \in A$, 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$, 因此, $x \in A$ 并且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$, 即, $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 于是, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

再证 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 从而 $x \in A$ 并且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$, 因此, $x \in A$, 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$, 即, $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$, 于是, $x \in A \cap (B \cup C)$ 。

□

练习1.14. 求证: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned} \forall x x \in C \setminus (A \cup B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cup B \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \cup B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge (\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\ \Leftrightarrow (x \in C \setminus A) \wedge (x \in C \setminus B) \\ \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in C \setminus (A \cup B)$, 则 $x \in C$ 并且 $x \notin A \cup B$, 从而 $x \in C$ 并且 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$, 因此, $x \in C \setminus A$ 并且 $x \in C \setminus B$, 于是 $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

再证 $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, 则 $x \in C \setminus A$ 并且 $x \in C \setminus B$, 从而 $x \in C$ 并且 $x \notin A$ 并且 $x \notin B$, 因此, $x \in C$ 并且 $x \notin A \cup B$, 于是 $x \in C \setminus (A \cup B)$ 。□

练习1.15. 求证: $C \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & x \in C \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(\exists \alpha \alpha \in I \wedge x \in A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha \neg(\alpha \in I \wedge x \in A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\neg(\alpha \in I) \vee \neg(x \in A_\alpha)) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow \neg(x \in A_\alpha)) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \notin A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \in S \wedge x \notin A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha^c) \\
 \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 设全集为 S 。如果 $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$, 则 $x \in S$, 且 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, 从而对任意的 $\alpha \in I$, $x \notin A_\alpha$ 。于是, 对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in A_\alpha^c$ 。因此, $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 故 $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。

其次, 如果 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$, 则对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in A_\alpha^c$ 。因此, 对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in S$ 且 $x \notin A_\alpha$, 故 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。于是, $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。所以, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。

由集合相等的定义便知, $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。□

习题11. 设集合 S 有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

1. 当 $n = 0$ 时, $S = \phi$, $2^\phi = \{\phi\}$ 有1个元素, 结论成立。

2. 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设集合 S 中有 $k + 1$ 个元素 $s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}$, 记

$$\begin{aligned} S_1 &= 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}} \\ S_2 &= \{X \cup \{s_{k+1}\} | X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\} \end{aligned}$$

则 $2^S = S_1 \cup S_2$ 。

考虑映射 $f: S_1 \rightarrow S_2$, 对任意的 $X \in S_1$, $f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$ 。易验证 f 为从 S_1 到 S_2 的双射, 从而 $|S_1| = |S_2|$ 。

显然 $S_1 \cap S_2 = \phi$, 再由归纳假设, $|S_1| = 2^k$, 从而 $|2^S| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。

□

习题12. 设 M_1, M_2, \dots 和 N_1, N_2, \dots 是集合 S 的子集的两个序列, 对 $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 。另 $Q_1 = M_1$, $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$, $n = 2, 3, \dots$, 试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$$

证明. 对任意的 $x \in N_n \triangle Q_n$, $x \in N_n \setminus Q_n$ 或者 $x \in Q_n \setminus N_n$ 。如果 $x \in Q_n \setminus N_n$, 则 $x \in Q_n$ 并且 $x \notin N_n$ 。由 $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$ 知 $x \in M_n$, 从而 $x \in M_n$ 并且 $x \notin N_n$, 因此 $x \in N_n \triangle M_n$, 于是 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$ 。

如果 $x \in N_n \setminus Q_n$, 则 $x \in N_n$ 并且 $x \notin Q_n$ 。由 $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$ 知 $x \notin M_n$ 或者 $x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$ 。当 $x \notin M_n$ 时, 由 $x \in N_n$ 知 $x \in N_n \triangle M_n$, 从而 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$; 当 $x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$ 时, 存在 i , $1 \leq i \leq n-1$, $x \in M_i$, 由 $x_i \in N_n$ 及对 $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 知 $x \notin N_i$, 从而 $x \in N_i \triangle M_i$, 因此 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$, 结论得证。□

第 二 章