第七讲正规子群、商群

陈建文

November 11, 2022

定义1. 设G为一个群，G的任意子集称为群子集。在2^G中借助于G的乘法引入一个代数运算，称为群子集的乘法：$\forall A, B \in 2^G$，

$$AB = \{ab | a \in A\text{且}b \in B\}$$

对任意的$A \in 2^G$，定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

定理1. 设G为一个群，则$\forall A, B, C \in 2^G$，$(AB)C = A(BC)$。

定理2. 设G为一个群，则$\forall A, B \in 2^G$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

定理3. 设G为一个群，H为G的一个子群，则$HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$。

定理4. 设A，B为群G的子群，则AB为G的子群的充分必要条件为$AB = BA$。

证明. $\Rightarrow$设AB为G的子群，则$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$。

$\Leftarrow$设$AB = BA$，往证AB为G的子群。

由$(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$知$G$中的运算在$AB$中封闭。其次，$\forall a \in A, b \in B$，$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$。所以$AB$为$G$的子群。 □

例. 设H为G的一个子群且$H \neq \{e\}$。如果存在一个元素$x_0 \in G$使得$H(x_0^{-1}Hx_0) = G$，则$H \cap (x_0^{-1}Hx_0) \neq \{e\}$。

证明. 因为$x_0 \in G = H(x_0^{-1}Hx_0)$，所以$\exists h_1, h_2 \in H$使得$x_0 = h_1x_0^{-1}h_2x_0$，从而$e = h_1x_0^{-1}h_2$。于是，$x_0 = (h_1^{-1}h_2^{-1})^{-1} = h_2h_1 \in H$，从而$x_0^{-1}Hx_0 = H$。因此，$H \cap (x_0^{-1}Hx_0) = H \neq \{e\}$。 □

定义2. 设H为群G的子群，如果$\forall a \in G$，$aH = Ha$，则称H为G的正规子群。

定理5. 设H为群G的一个子群，则下列四个命题等价：

（1）H为群G的正规子群；

（2）$\forall a \in G, aHa^{-1} = H$；

（3）$\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$；

（4）$\forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H$。

证明. 先证（1）$\Leftrightarrow$（2）：

$\forall a \in G$，$aH = Ha \Leftrightarrow aHa^{-1} = H$。

再证（2）$\Leftrightarrow$（3）：

（2）$\Rightarrow$（3）显然成立。

以下证明（3）$\Rightarrow$（2）。

只需证$\forall a \in G, H \subseteq aHa^{-1}$。

$\forall h \in H$，$h = a(a^{-1}ha)a^{-1}$=a(a$^{-1}h(a^{-1})^{-1})a^{-1} \in aHa^{-1}$，这里$a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$是因为$a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subseteq H$。

□

定理6. 设H为群G的正规子群，则H的所有左陪集构成的集族S_l对群子集乘法形成一个群。

证明. $\forall aH, bH \in S_l$，$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H \in S_l$，这验证了群子集乘法在$S_l$上封闭：。

群子集乘法显然满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$，所以$H$为$S_l$中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l$，$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$，所以，$a^{-1}H$为$aH$的左逆元。因此，$S_l$对群子集乘法构成一个群。 □

定理7. 设H为群G的正规子群，H的所有左陪集构成的集族为S_l，在S_l上定义乘法运算如下：$\forall aH, bH \in S_l, (aH)(bH) = (ab)H$，则$S_l$对于在其上定义的乘法构成一个群。

证明. 首先证明：如果$aH = a'H$，$bH = b'H$，则$(ab)H = (a'b')H$。由$(ab)^{-1}(a'b') = b^{-1}a^{-1}a'b' = (b^{-1}b')b'^{-1}a^{-1}a'b' \in H$知$(ab)H = (a'b')H$。这验证了$S_l$上乘法运算的合理性。

$\forall aH, bH, cH \in S_l, ((aH)(bH))(cH) = (abH)(cH) = ((ab)c)H, (aH)((bH)(cH)) = (aH)(bcH) = (a(bc))H$，从而$((aH)(bH))(cH) = (aH)((bH)(cH))$，这验证了乘法运算满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$，所以$H$为$S_l$中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l$，$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$，所以，$a^{-1}H$为$aH$的左逆元。因此，$S_l$对乘法运算构成一个群。 □

定义3. 群G的正规子群H的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为G对H的商群，记为G/H。

课后作业题:

练习1. 设A和B为群G的两个有限子群，证明:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

证明. 因为$A \cap B$为A的子群，因此存在$a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$，使得

$$A = a_1(A \cap B) \cup a_2(A \cap B) \cup \cdots \cup a_n(A \cap B)$$

这里$n = \frac{|A|}{|A \cap B|}$。以下验证$AB = a_1B \cup a_2B \cup \cdots \cup a_nB$，并且对任意的$i, j$，$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，$a_iB \cap a_jB = \phi$，于是$|AB| = n|B| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$。

$\forall g \in AB$，存在$a \in A$，$b \in B$使得$g = ab$。进一步，存在i，$1 \leq i \leq n$，$x \in A \cap B$使得$a = a_ix$，于是$g = a_ixb \in a_iB$（因为$x \in A \cap B \subseteq B$，$b \in B$，从而$xb \in B$）。

以下用反正法证明对任意的i, j，$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，$a_iB \cap a_jB = \phi$。假设存在i, j,$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，使得$a_iB \cap a_jB \neq \phi$，则存在x，$x \in a_iB \cap a_jB$。设$x = a_ib_1 = a_jb_2$，这里$b_1 \in B$，$b_2 \in B$，则$a_i^{-1}a_j = b_1b_2^{-1} \in A \cap B$，从而$a_i(A \cap B) = a_j(A \cap B)$，与$a_i(A \cap B) \cap a_j(A \cap B) = \phi$矛盾。 □

练习2. 利用上题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

证明. 设A和B为六阶群G的两个三阶子群，由练习1结论可得:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

由于$A \cap B$为A的子群，所以必有$|A \cap B|||A|$，从而$|A \cap B| = 1$或3。如果$|A \cap B| = 1$，则$|AB| = 9$，这与G为一个六阶群，AB为G的群子集矛盾，从而$|A \cap B| = 3$，此时必有$A = B$,结论得证。 □

练习3. 设G为一个n^2阶的群，H为G的一个n阶子群。证明：$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。

证明. 用反证法，假设存在$x \in G$，$x^{-1}Hx \cap H = \{e\}$。由练习1结论可得，

$$|H(x^{-1}Hx)| = \frac{|H||x^{-1}Hx|}{|H \cap (x^{-1}Hx)|} = n^2$$

又由于G为一个n^2阶的群，所以$H(x^{-1}Hx) = G$，由教材例题结论可得$x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$，矛盾。 □

练习4. 证明：指数为*2*的子群为正规子群。

证明. 设H为群G的指数为2的子群，则存在$a \in G$使得$G = H \cup aH$。

$\forall g \in G$，如果$g \in H$，则显然$gHg^{-1} \subseteq H$；如果$g \in aH$，则存在$h \in H$使得$g = ah$，以下证明$gHg^{-1} \subseteq H$，从而可得H为G的正规子群。

$\forall x \in gHg^{-1}$，存在$h_1 \in H$使得$x = gh_1g^{-1}$，再由$g = ah$得$x = ahh_1(ah)^{-1} = ahh_1h^{-1}a^{-1}$。此时必有$x \in H$，否则$x \in aH$，从而存在$h_2 \in H$使得$x = ah_2$，于是$ahh_1h^{-1}a^{-1} = ah_2$，由此可得$a = h_2^{-1}hh_1h^{-1} \in H$，与$a \in aH$矛盾。 □

练习5. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明. 设N_1和N_2为群G的两个正规子群，显然$N_1 \cap N_2$为G的子群。$\forall a \in G$，易得$a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_1a^{-1} \subseteq N_1$,$a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_2a^{-1} \subseteq N_2$，由此可得$a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq N_1 \cap N_2$，这证明了$N_1 \cap N_2$为$G$的正规子群。 □

练习6. 设H为群G的子群，N为群G的正规子群，试证：NH为群G的子群。

证明. 设群G的单位元为e，则$e = ee \in NH$，从而NH非空。

$\forall x, y \in NH, \exists n_1 \in N, h_1 \in H, n_2 \in N, h_2 \in H$，使得$x = n_1h_1$，$y = n_2h_2$，从而$xy^{-1} = (n_1h_1)(n_2h_2)^{-1} = n_1h_1h_2^{-1}n_2^{-1} = n_1(h_1h_2^{-1}n_2^{-1}(h_1h_2^{-1})^{-1})h_1h_2^{-1} \in NH$，这里$h_1h_2^{-1}n_2^{-1}(h_1h_2^{-1})^{-1} \in N$是因为$N$为$G$的正规子群。 □

练习7. 设G为一个阶为$2n$的交换群，试证：G必有一个n阶商群。

证明. 由以前作业题知G中存在一个阶为2的元素a，则$G/(a)$为G的一个n阶商群。 □

练习8. 设H为群G的子群，证明：H为群G的正规子群的充分必要条件是$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$。

证明. 由教材定理知如果H为群G的正规子群，则$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$。

以下假设$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$，往证$H$为群$G$的正规子群。

$\forall a \in G$，$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$，从而$\forall h \in H$，$aha^{-1}h \in H$，于是$\exists h_1 \in H, aha^{-1}h = h_1$，由此可得$aha^{-1} = h_1h^{-1} \in H$，这证明了$aHa^{-1} \subseteq H$，即$H$为群$G$的正规子群。 □

练习9. 设H为群G的子群。证明：H为G的正规子群的充分必要条件是H的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是H的一个左陪集。

证明. 由教材定理知如果H为群G的正规子群，则H的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是H的一个左陪集。

以下假设H的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是H的一个左陪集，往证H为群G的正规子群。

$\forall a \in G$，设$(aH)(a^{-1}H) = bH$，则$e = (ae)(a^{-1}e) \in (aH)(a^{-1}H) = bH$，从而$\exists h \in H$使得$e = bh$，所以$H = eH = (bh)H = b(hH) = bH$，于是$(aH)(a^{-1}H) = H$。

$\forall h \in H, aha^{-1} = (ah)(a^{-1}e) \in (aH)(a^{-1}H) = H$，这证明了$H$为$G$的正规子群。 □