

第九讲同态基本定理

陈建文

October 7, 2022

定义1. 设 (G, \circ) 与 (\bar{G}, \cdot) 为两个群, 如果存在一个从 G 到 \bar{G} 的映射 ϕ , 使得 $\forall a, b \in G$,

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

则称 ϕ 为从 G 到 \bar{G} 的一个同态 (*homomorphism*), 而称 G 与 \bar{G} 同态。如果同态 ϕ 是满射, 则称 ϕ 为从 G 到 \bar{G} 的一个满同态, 此时称 G 与 \bar{G} 为满同态, 并记为 $G \sim \bar{G}$ 。类似的, 如果同态 ϕ 为单射, 则称 ϕ 为单同态。

定理1. 设 (G, \circ) 与 (\bar{G}, \cdot) 为两个群, e 和 \bar{e} 分别为其单位元, ϕ 为从 G 到 \bar{G} 的同态, 则,

$$\begin{aligned}\phi(e) &= \bar{e} \\ \forall a \in G \phi(a^{-1}) &= (\phi(a))^{-1}\end{aligned}$$

定理2. 设 (G, \circ) 为一个群, \bar{G} 为一个具有二元代数运算 \cdot 的代数系。如果存在一个满射 $\phi: G \rightarrow \bar{G}$ 使得 $\forall a, b \in G$

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

则 (\bar{G}, \cdot) 为一个群。

定理3. 设 ϕ 为从群 G 到群 \bar{G} 的同态, 则

- (1) 如果 H 为 G 的子群, 那么 $\phi(H)$ 为 \bar{G} 的子群;
- (2) 如果 \bar{H} 为 \bar{G} 的子群, 那么 $\phi^{-1}(\bar{H})$ 为 G 的子群;
- (3) 如果 \bar{N} 为 \bar{G} 的正规子群, 那么 $\phi^{-1}(\bar{N})$ 为 G 的正规子群。

定理4. 设 ϕ 为从群 G 到群 \bar{G} 的满同态, N 为 G 的正规子群, 则 $\phi(N)$ 为 \bar{G} 的正规子群。

定义2. 设 ϕ 为群 (G, \circ) 到群 (\bar{G}, \cdot) 的同态, \bar{e} 为 \bar{G} 的单位元, 则 G 的子群 $\phi^{-1}(\bar{e})$ 称为同态 ϕ 的核, 记为 $\text{Ker}\phi$ 。 $\phi(G)$ 称为 ϕ 在 G 下的同态像。

定理5. 设 ϕ 为从群 (G, \circ) 到群 (\bar{G}, \cdot) 的同态, 则 $\text{Ker}\phi$ 为群 G 的正规子群。

定理6. 设 N 为 G 的一个正规子群, ϕ 为从 G 到 G/N 的一个映射, $\forall x \in G \phi(x) = xN$, 则 ϕ 为从 G 到 G/N 的一个同态, $\text{Ker}\phi = N$ 。

定理7 (群的同态基本定理). 设 ϕ 为从群 G 到群 \bar{G} 的同态, 则 $G/\text{Ker}\phi \cong \phi(G)$ 。

课后作业题:

练习1. 设 G 为 m 阶循环群, \bar{G} 为 n 阶循环群, 试证: $G \sim \bar{G}$ 当且仅当 $n|m$ 。

练习2. 设 G 为一个循环群, H 为群 G 的子群, 试证: G/H 也为循环群。