

习题 1. 写出方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的根所构成的集合。

解.

□

习题 2. 设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n , 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, 试证

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n$$

证明.

□

习题 3. 设集合 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 则 $2^S =$ _____。

习题 4. 设集合 S 有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

证明.

□

习题 5. 设 A, B 为集合, 试证

$$(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \phi$$

证明.

□

习题 6. 设 A, B 为集合, 试证 $A = \phi \Leftrightarrow B = A \triangle B$ 。

证明.

□

习题 7. 设 A, B 为集合, 证明 $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \setminus C$ 。

证明.

□

习题 8. 设 A, B, C 为集合, 证明 $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

证明.

□

习题 9. 设 A, B, C 为集合, 证明 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ 。

证明.

□

习题 10. 设 A, B, C 都是集合, 若 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = A \cap C$, 试证 $B = C$ 。

证明.

□

习题 11. 下列等式是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请说明理由。

a) $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C);$

b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C;$

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \cup B) \setminus C。$

解.

□

习题 12. 下列命题中哪个是真的? ()

A. 对任意集合 $A, B, 2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B。$

B. 对任意集合 $A, B, 2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B。$

C. 对任意集合 $A, B, 2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B。$

D. 对任意集合 $A, B, 2^{A \triangle B} = 2^A \triangle 2^B。$

习题 13. 填空: 设 A, B 为两个集合。

a) $x \notin A \cup B \Leftrightarrow$ _____

b) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow$ _____

c) $x \notin A \setminus B \Leftrightarrow$ _____

d) $x \notin A \triangle B \Leftrightarrow$ _____

习题 14. 设 A, B, C 为任意三个集合, 下列集合表达式中哪一个等于 $A \setminus (B \cap C)$? ()

A. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

B. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

C. $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

D. $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$

习题 15. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列哪个等式成立? ()

A. $B = C$

B. $A \cap B = A \cap C$

C. $A \cap B^c = A \cap C^c$

D. $A^c \cap B = A^c \cap C$

习题 16. 设 A, B, C 为集合, 化简:

$$\begin{aligned} & (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup \\ & (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup \\ & (A^c \cap B \cap C^c) \end{aligned}$$

解.

□

习题 17. 设 V 为一个集合, 证明: $\forall S, T, W \in 2^V$ 有 $S \subseteq T \subseteq W$ 当且仅当 $S \triangle T \subseteq S \triangle W$ 且 $S \subseteq W$ 。

证明.

□

习题 18. 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{e, f, g, h\}, C = \{x, y, z\}$ 。求 $A \times B, B \times A, A \times C, A \times B \times C, A^2 \times B$ 。

解.

□

习题 19. 设 A, B 为集合, 试证: $A \times B = B \times A$ 的充分必要条件是下列三个条件至少一个成立:

(1) $A = \phi; (2) B = \phi; (3) A = B$ 。

证明.

□

习题 20. 设 A, B, C, D 为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

证明.

□

习题 21. 设 A, B, C 为集合, 证明: $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$ 。

证明.

□

习题 22. 设 A 有 m 个元素, B 有 n 个元素, 则 $A \times B$ 是多少个序对组成的? $A \times B$ 有多少个不同的元素?

解.

□

习题 23. 设 A, B 为集合, $B \neq \phi$ 。试证: 如果 $A \times B = B \times B$, 则 $A = B$ 。

证明.

□

习题 24. 某班学生中有 45% 正在学德文, 65% 正在学法文, 问此班中至少有百分之几的学生正在同时学德文和法文?

解.

□

习题 25. 设 A, B 为两个有穷集合, 则 $|2^{A \times B}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

习题 26. 毕业舞会上, 小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞, 但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的, 每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞, 但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明: 在所有参加舞会的小伙子与姑娘中, 必可找到两个小伙子与两个姑娘, 这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞, 而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证明.

□