离散数学讲义

陈建文

February 22, 2022

第 一 章　集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示"并且"，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为ϕ。

定义1.2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in Ax \in B$ 即$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in Bx \notin A$即$A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是$\forall xx \in A \rightarrow x \in B$。对一些特殊的$x$的值分析如下：

- 当$x = 1$时，$1 \in A \rightarrow 1 \in B$，即$T \rightarrow T$，其真值为$T$;
- 当$x = 3$时，$3 \in A \rightarrow 3 \in B$，即$F \rightarrow T$，其真值为$T$;
- 当$x = 0$时，$0 \in A \rightarrow 0 \in B$，即$F \rightarrow F$，其真值为$T$。

定义1.3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1,2,3,4,5\} = \{3,4,2,1,5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi \subseteq \phi'$并且$\phi' \subseteq \phi$，从而$\phi = \phi'$，矛盾。

□

"空集为任一集合的子集"这一结论初学时，也可以用反证法证明其正确性，以帮助我们理解其中的逻辑。为了用反证法证明该结论，首先让我们分析一下对于任意的集合A和B，A不是B的子集（$A \nsubseteq B$）的含义：

$$
\begin{aligned}
A \nsubseteq B &\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall x x \in A \to x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \to x \in B) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)
\end{aligned}
$$

空集为任一个集合的子集。

证明. 用反证法。设存在一个集合A，$\phi \nsubseteq A$，则存在$x \in \phi$，但$x \notin A$，这显然是不可能的，结论得证。 □

定义1.4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例. $2^{\phi} = \{\phi\}$
$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

例. $2^{\{\phi, \{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

例. 对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明. 根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。又因为$\phi \in 2^{2^A}$，所以$\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$，从而$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。 □

第 二 章