第四讲子群、生成子群

陈建文

October 14, 2022

定义1. 设S为群G的非空子集，如果G的乘法在S中封闭且S对此乘法也构成一个群，则称S为G的一个子群。如果$S \neq G$，则称S为G的真子群。

定理1. 设G为一个群，则$\{e\}$为G的子群，G为G的子群。

例. $(Z,+)$为$(Q,+)$的子群，$(Q,+)$为$(R,+)$的子群，$(R,+)$为$(C,+)$的子群；$(Q^*,\times)$为$(R^*,\times)$的子群，$(R^*,\times)$为$(C^*,\times)$的子群。集合$\{1,-1\}$对通常的乘法构成一个群，但它不是$(Q,+)$的子群，因为它们的运算不一样。

定理2. 设G_1为G的子群，则G_1的单位元必为G的单位元；G_1的元素a在G_1中的逆元素也是a在G中的逆元素。

证明. 设G_1的单位元为e_1，G的单位元为e，则$e_1e_1 = e_1e$，由消去律得$e_1 = e$。

设b为a在G_1的逆元，则$ba = e$，该式在G中也成立，于是b也是a在G中的逆元。 □

定理3. 群G的任意多个子群的交还是G的子群。

证明. 设H为G的一些子群的交，则$e \in H$，从而$H \neq \phi$。其次，$\forall a,b \in H$，ab在每个参加交运算的子群中，从而$ab \in H$。所以，G的乘法在H中封闭。最后，$\forall a \in H$，由a在每个参加交运算的子群中知a^{-1}在每个参加交运算的子群中，故$a^{-1} \in H$。因此，H为G的子群。 □

定理4. 任一群不能是其两个真子群的并。

证明. 用反证法。设G_1和G_2为G的两个真子群，且$G_1 \cup G_2 = G$。由于G_1和G_2为G的真子群，所以$\exists a,b \in G$，$a \notin G_1$，$b \notin G_2$。于是$a \in G_2$，$b \in G_1$，从而$ab \in G$，但$ab \notin G_1$且$ab \notin G_2$，这与$G = G_1 \cup G_2$矛盾。 □

定理5. 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是

（*1*）$\forall a,b \in S, ab \in S$且

（*2*）$\forall a \in S, a^{-1} \in S$。

证明. $\Leftarrow$ 显然。

$\Rightarrow$ 运算的封闭性显然成立；运算的结合律显然成立；由G非空知$\exists a \in G$，从而$a^{-1} \in G$，于是$e = a^{-1}a \in G$。 □

定理6. 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是$\forall a,b \in S, ab^{-1} \in S$。

证明. $\Leftarrow$ 显然。

$\Rightarrow$ 由G非空知$\exists a \in G$，从而$e = aa^{-1} \in S$；

$\forall g \in G$，$g^{-1} = eg^{-1} \in S$；

$\forall a, b \in G$，$b^{-1} \in S$，从而$ab = a(b^{-1})^{-1} \in S$。 □

定理7. 群G的有限非空子集F为G的子群的充分必要条件是$\forall a, b \in F, ab \in F$。

$\forall A, B \in 2^G$，定义$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$，则以上定理可以写成

定理8. 群G的有限非空子集F为G的子群的充分必要条件是$FF \subseteq F$。

定义2. 群G的元素a称为G的中心元素，如果a与G的每个元素可交换，即$\forall x \in G, ax = xa$。G的所有中心元素构成的集合C称为G的中心。

定理9. 群G的中心C是G的可交换子群。

证明. $\forall x \in G, ex = ex = x$，所以$e \in C$，故$C \neq \phi$。

$\forall a, b \in C$，$\forall x \in G$，$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$，从而$ab \in C$。

$\forall a \in C$，$\forall x \in G$，由$ax = xa$可得$xa^{-1} = a^{-1}x$，从而$a^{-1} \in G$。

故C为G的子群。C显然是可交换的。 □

例. 设G为一个群，$a \in G$，$\{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\}$为$G$的一个子群。

例. 设G为一个有限群，$a \in G$，$\{e, a, a^2, \cdots\}$为G的一个子群。

例. 设G为一个交换群，$a, b \in G$，则$\{a^m b^n | m, n \in Z\}$为G的一个子群。

定义3. 设M为G的一个子集，G的包含M的所有子群的交称为由M生成的子群，记为(M)。

课后作业题:

练习1. 举例说明两个子群的并可以不是子群。

练习2. 设G_1和G_2为群G的两个真子群，证明：$G_1 \cup G_2$为G的子群的充分必要条件是$G_1 \subseteq G_2$并且$G_2 \subseteq G_1$。

练习3. 设$(G_1, \circ)$和$(G_2, *)$都是群，$\phi : G_1 \to G_2$，$\forall a, b \in G_1$，$\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)$，证明：$\phi^{-1}(e_2)$为$G_1$的子群，其中$e_2$为$G_2$的单位元素。

练习4. 找出3次对称群的所有子群。

练习5. 令$P = \{(12), (123)\} \subseteq S_3$。写出由$P$生成的$S_3$的子群$(P)$。