第五讲变换群、同构

陈建文

October 7, 2022

课后作业题:

练习1. **设**R为实数集合，G为一切形如$f(x)=ax+b$的从R到R的函数之集，这里$a\in R$，$b\in R$，$a\neq 0$，试证：G为一个变换群。

证明. 设$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，$a,b,c,d\in R$，$a\neq 0$，$c\neq 0$，则$(f\circ g)(x)=a(cx+d)+b=acx+(ad+b)$，这里$ac\neq 0$，因此$f\circ g\in G$。这验证了$G$中的函数关于函数的合成满足封闭性。

设$h:R\rightarrow R,h(x)=x$,则$h\in G$，h为G的函数关于函数合成运算的单位元。

对任意的$f\in G$，设$f=ax+b$，$a,b\in R$，$a\neq 0$。

寻找$g\in G$，使得$g\circ f=h$。设$g(x)=cx+d$，$c,d\in R$，$c\neq 0$,

则$(g\circ f)(x)=c(ax+b)+d=cax+(cb+d)=x$，解方程组$\begin{cases} ca=1 \\ cb+d=0 \end{cases}$

得$c=\frac{1}{a},d=-\frac{b}{a}$，易验证$g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$满足$(g\circ f)(x)=x$。

□

练习2. 设R为实数集合，H为一切形如$f(x)=x+b$的从R到R的函数之集，这里$b\in R$，试证：H为上题中G的一个子群。

证明. 显然H非空，例如$h:R\rightarrow R$,$h(x)=x$，则$h\in H$。

$\forall f,g\in H$，$f(x)=x+b$，$g(x)=x+c$，$b,c\in R$，则$(f\circ g^{-1})(x)=(x-c)+b=x+(b-c)\in H$，因此$H$为上题中$G$的一个子群。 □

练习3. 设R_+为一切正实数之集，R为一切实数之集。$(R_+,\times)$，$(R,+)$都为群。令$\phi:R_+\rightarrow R,\forall x\in R_+,\phi(x)=log_p(x)$，其中$p$为任意一个正实数。证明$\phi$为同构。

证明. 显然ϕ为从R_+到R的双射。

其次，$\phi(x\times y)=log_p(x\times y)=\log_p(x)+\log_p(y)=\phi(x)+\phi(y)$。

因此，ϕ为从$(R_+,\times)$到$(R,+)$的同构。 □