第十讲无零因子环的特征数

陈建文

October 5, 2022

课后作业题：

练习1. 设F为一个域，$|F|=4$，证明：

（*1*）F的特征数为2；

（*2*）F的任意一个非零元并且非单位元1的元素x均满足方程$x^2=x+1$；

（*3*）列出F的加法表和乘法表。

证明. （1）考虑F中乘法的单位元1，如果$1+1=0$，即1的阶为2，则F的特征数为2。

以下用反证法证明1的阶为2。假设1的阶不是2，由于1的阶整除4，因此1的阶必为4。此时$1+1\neq 0$，但$1+1+1+1=0$，即$1+1$的阶为2。由于F的所有非零元素的阶都相等，因此1的阶为2，矛盾。

（2）设x为F的任意一个非零元并且非单位元1的元素，

则$x+1\neq 0$（否则$x+1=1+1$，可得$x=1$，与x非单位元1矛盾），$x+1\neq 1$（否则$x=0$,与x非零元矛盾），$x+1\neq x$（否则$1=0$，与$1\neq 0$矛盾），于是x和$x+1$为F中与0和1不同的其他两个元素，此时必有$x(x+1)=1$，这是因为$x(x+1)\neq x$（否则$x+1=1$，与$x+1\neq 1$矛盾），$x(x+1)\neq x+1$（否则$x=1$，与x非单位元1矛盾）。

于是$x^2+x=1$，两边同时加x得$x^2=x+1$（由于x得阶为2，这里$x+x=0$）。

（3）设$F=\{0,1,a,b\}$，加法表如下：

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

乘法表如下：

∘	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

□