

离散数学讲义

陈建文

March 9, 2022

第三章 关系

定义3.1. 设 A 与 B 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 R ，称为从 A 到 B 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 (a, b) 在 R 下的象为 T ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 (a, b) 在 R 下的象为 F ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

例3.1. 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 2^X 上的二元关系 \subseteq 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} & \subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T \end{aligned}$$

定义3.2. 设 A 与 B 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 R 称为从 A 到 B 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

例3.2. 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 2^X 上的二元关系 \subseteq 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = & \{(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}), \\ & (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

例3.3. 自然数集 \mathbb{N} 上的小于等于关系“ \leq ”为 \mathbb{N} 上的一个二元关系。

例3.4. 设 n 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 m, k ，如果 $m - k$ 能被 n 整除，则称 m 与 k 为模 n 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 m 被 n 除所得到的余数与 k 被 n 除所得到的余数相等。模 n 同余为 \mathbb{Z} 上的一个二元关系。

定义3.3. 设 $R \subseteq A \times B$ ，集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的定义域, 记为 $\text{dom}(R)$; 集合

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的值域, 记为 $\text{ran}(R)$ 。

定义3.4. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 R 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 间的一个 n 元关系, 每个 A_i 称为 R 的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets S_1, S_2, \dots, S_n (not necessarily distinct), R is a relation on these n sets if it is a set of n -tuples each of which has its first element from S_1 , its second element from S_2 , and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Hopcroft, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

定义3.5. 集合 X 上的二元关系 R 称为自反的, 如果对 X 的任意元素 x 都有 xRx 。

例3.5. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (不是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (不是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义3.6. 集合 X 上的二元关系 R 称为反自反的, 如果对 X 的任意元素 x 都有 $(x, x) \notin R$ 。

例3.6. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)

5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)

定义3.7. 集合 X 上的二元关系 R 称为对称的, 如果对 X 的任意元素 x, y , 只要 xRy 就有 yRx 。

例3.7. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (不是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (不是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义3.8. 集合 X 上的二元关系 R 称为反对称的, 如果对 X 的任意元素 x, y , xRy 且 yRx , 则 $x = y$ 。

例3.8. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义3.9. 集合 X 上的二元关系 R 称为传递的, 如果对 X 的任意元素 x, y, z , 只要 xRy 且 yRz , 就有 xRz 。

例3.9. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义3.10. 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系, R 的逆 R^{-1} 定义为从集合 B 到集合 A 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

定理3.1. 设 R 为集合 X 上的二元关系, 则 R 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

定义3.11. 设 R 为从集合 A 到集合 B , S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

定理3.2. 设 R_1, R_2, R_3 分别为从集合 A 到集合 B , 从集合 B 到集合 C , 从集合 C 到集合 D 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.3. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 则 R 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

定义3.12. 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 m 个元素的集合, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为一个包含 n 个元素的集合。令 R 为从 X 到 Y 的一个二元关系。由 R 定义一个 $m \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下: $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 B 称为关系 R 的矩阵。

例3.10. 设集合 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, 从 X 到 Y 的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

, 则 S 的关系矩阵为?

例3.11. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$, 则 R 的关系矩阵为?

定理3.4. 设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则

1. R 为自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为1;
2. R 为反自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为0;
3. R 为对称的, 当且仅当 B 为对称矩阵;
4. R 为反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 b_{ij} 与 b_{ji} 不同时为1;
5. R 为传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$, 则 $b_{ik} = 1$ 。

关系除了用矩阵表示外, 还可以用图来表示。设 X 和 Y 为有穷集合, R 为从 X 到 Y 的二元关系。当用图表示 R 时, 先把 X 与 Y 的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 R 的任一序对 (x, y) 用从代表 x 的点画一条指向代表 y 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系 R 的图。注意, 如果 $(x, x) \in R$, 则在代表 x 的点画一条又指向此点的矢线, 称为环。

定理3.5. 设 R 为集合 X 上的二元关系, 则

1. R 为自反的, 当且仅当 R 的图的每个顶点均有一个环;
2. R 为反自反的, 当且仅当 R 的图中没有环;
3. R 为对称的, 当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线;
4. R 为反对称的, 当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则不能有两条方向相反的矢线;
5. R 为传递的, 当且仅当在 R 的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定理3.6. 设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则 R^{-1} 的矩阵为 B^T 。

定义3.13. 设 B, C 是两个布尔矩阵, B 与 C 的逻辑乘为 B 与 C 的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为 $B \wedge C$, 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B 与 C 的逻辑加为 B 与 C 的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为 $B \vee C$, 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理3.7. 设 R, S 为从集合 X 到集合 Y 的二元关系, 其矩阵分别为 B_R 和 B_S 。 $R \cup S$ 与 $R \cap S$ 的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$, $B_{R \cap S}$, 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义3.14. 设 A 为 $m \times p$ 布尔矩阵, B 为 $p \times n$ 布尔矩阵, A 与 B 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 C , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

定理3.8. 设 X, Y, Z 为有穷集合, $|X| = m$, $|Y| = p$, $|Z| = n$ 。 R 为从 X 到 Y 的二元关系, S 为从 Y 到 Z 的二元关系, $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$, 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

定义3.15. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系。 X 上的一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包, 用 R^+ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

定理3.9. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 则关系 R 的传递闭包 R^+ 为包含 R 的传递关系。

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, R 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理3.10. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X, b \in X, n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设, $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$, 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X, x_k \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$ 。□

定理3.11. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

定理3.12. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$, 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以, $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此, $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。□

定理3.13. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n, B$ 为 R 的关系矩阵, B_{R^+} 为 R^+ 的关系矩阵, 简记为 B^+ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合 X 上关系 R 的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

1 $M = B$

2 $A = M$

3 **for** $i = 2$ **to** n

4 $M = M \circ B$

5 $A = A \vee M$

6 **return** A // A is the zero-one matrix for R^+

WARSHALL(B)

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          for  $j = 1$  to  $n$ 
5               $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

WARSHALL(B)

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          if  $a_{ik} = 1$ 
5              for  $j = 1$  to  $n$ 
6                   $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
7  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

定义3.16. 集合 X 上的二元关系 R 称为**等价关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

1. R 为自反的，即对 X 中的任意元素 x ， xRx ；
2. R 为对称的，即对 X 中的任意元素 x, y ，如果 xRy ，则 yRx ；
3. R 为传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z ，如果 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于“ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ”的等式？这里的等价关系就是从“=”抽象出来的。（1） $x = x$ ；（2）如果 $x = y$ ，那么 $y = x$ ；（3）如果 $x = y$ 并且 $y = z$ ，那么 $x = z$ 。是不是显然成立呀？我们可以借助熟知的“=”来理解等价关系的定义。

例3.12. 整数集 \mathbb{Z} 上的模 n 同余关系为 \mathbb{Z} 上的等价关系。

证明. 只需验证整数集 \mathbb{Z} 上的模 n 同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $m \equiv m \pmod{n}$ 。（注：我们用 $m \equiv k \pmod{n}$ 表示 m 与 k 模 n 同余，即 $n|(m-k)$ ）

(2) 对称性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，如果 $m \equiv k \pmod{n}$ ，则 $n|(m-k)$ ，于是 $n|(k-m)$ ，即 $k \equiv m \pmod{n}$ 。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， $l \in \mathbb{Z}$ ，如果 $m \equiv k \pmod{n}$ 并且 $k \equiv l \pmod{n}$ ，则 $n|(m-k)$ 并且 $n|(k-l)$ ，从而 $n|((m-k) + (k-l))$ ，即 $n|(m-l)$ ，因此 $m \equiv l \pmod{n}$ 。□

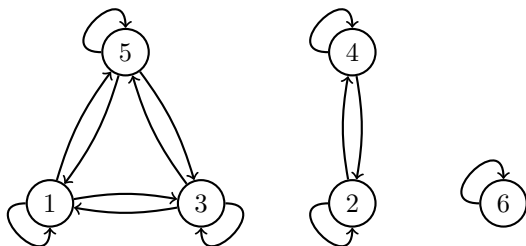
例3.13. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则 R 为 X 上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。 □

证法二. 画出 R 的关系图进行判断。



(1) 在 R 的图中, 每个顶点均有一个环, 这说明 R 为自反的;

(2) 在 R 的图中, 如果任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线, 这说明 R 为对称的;

(3) 在 R 的图中, 如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线, 这说明 R 为传递的。 □

如果我们写个程序进行判断, 首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系 R 的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) B 的对角线上的元素全为 1 说明 R 为自反的;

(2) B 为对称矩阵说明 R 为对称的;

(3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $B \circ B$ 中的每个元素小于等于 B 中的每个元素知 R 为传递的。 \square

定义3.17. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, $x \in X$, X 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 x 关于 \cong 的等价类, 记为 $[x]$, 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例3.14. 在例3.12中我们已经知道模4同余关系为等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为 $\{[0], [1], [2], [3]\}$, 其中

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{aligned}$$

\square

例3.15. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$\begin{aligned} R = \{ &(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), \\ &(4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\}, \end{aligned}$$

在例3.13中, 我们知道 R 为 X 上的等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合 X 上每个元素关于关系 R 的等价类:

$$\begin{aligned} [1] &= \{1, 3, 5\} \\ [2] &= \{2, 4\} \\ [3] &= \{1, 3, 5\} \\ [4] &= \{2, 4\} \\ [5] &= \{1, 3, 5\} \\ [6] &= \{6\} \end{aligned}$$

你发现了什么? 有重复! 于是关系 R 的所有等价类所构成的集合为 $\{[1], [2], [6]\}$, 即 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 。 \square

通过以上的例子, 我们发现了以下的结论:

定理3.14. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, 对任意的 $x \in X$, $y \in X$, $x \cong y$ 当且仅当 $[x] = [y]$ 。

证明. 对任意的 $x \in X, y \in X$, 由 $x \cong y$ 往证 $[x] = [y]$ 。这里是要证明两个集合相等。对任意的 $z \in [x]$, 则 $x \cong z$, 由 \cong 的对称性知 $z \cong x$, 再由 \cong 的传递性及 $x \cong y$ 知 $z \cong y$, 由 \cong 的对称性知 $y \cong z$, 从而 $z \in [y]$ 。对任意的 $z \in [y]$, 则 $y \cong z$, 由 \cong 的传递性及 $x \cong y$ 知 $x \cong z$, 从而 $z \in [x]$ 。这证明了 $[x] = [y]$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 由 $[x] = [y]$ 往证 $x \cong y$ 。由 \cong 的自反性知 $x \cong x$, 从而 $x \in [x]$, 再由 $[x] = [y]$ 知 $x \in [y]$, 从而 $y \cong x$, 由 \cong 的对称性得 $x \cong y$ 。□

定义3.18. 设 X 为集合, X 的一些非空子集形成的集族 \mathcal{A} 称为 X 的一个划分, 如果 \mathcal{A} 具有性质

1. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 如果 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \phi$;

2. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

例3.16. 集合

$$\begin{aligned} & \{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\} \end{aligned}$$

构成了整数集 \mathbb{Z} 的一个划分。

例3.17. 集合 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 构成了集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个划分。

定理3.15. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, 则 \cong 的所有等价类的集合构成了集合 X 的一个划分。

证明. 这就是要证明 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 X 的一个划分。

对任意的 $x \in X$, 由 \cong 的自反性知 $x \cong x$, 从而 $x \in [x]$, 这证明了 $[x]$ 非空。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $[x] \neq [y]$, 以下证明 $[x] \cap [y] = \phi$ 。用反证法, 假设 $[x] \cap [y] \neq \phi$, 则存在 $z \in [x] \cap [y]$, 于是 $z \in [x]$ 并且 $z \in [y]$ 。由 $z \in [x]$ 知 $x \cong z$, 由 $z \in [y]$ 知 $y \cong z$ 。由 \cong 的对称性可得 $z \cong y$, 再由 \cong 的传递性可得 $x \cong y$, 从而 $[x] = [y]$, 矛盾。

由对任意的 $x \in X, x \in [x]$ 易知 $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ 。

综上, 我们证明了 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 X 的一个划分。□

定理3.16. 设 \mathcal{A} 为集合 X 的一个划分, 令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$$

则 \cong 为集合 X 上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧? 在以后学习的过程中, 遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办? 具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符

号。例如，设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 为集合 X 的一个划分，则

$$\begin{aligned} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A \\ &= (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\}) \cup (\{6\} \times \{6\}) \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6)\} \end{aligned}$$

为集合 X 上的一个等价关系。

证明。这就是要验证 \cong 满足自反性、对称性和传递性。

(1) 对任意的 $x \in X$ ，由 \mathcal{A} 为集合 X 的一个划分知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ ，从而 $(x, x) \in A \times A$ ，于是， $(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足自反性。

(2) 对任意的 $x \in X$, $y \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，从而 $(y, x) \in A \times A$ ，于是 $(y, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足对称性。

(3) 对任意的 $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，并且 $(y, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，并且存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $(y, z) \in B \times B$ 。于是， $x \in A$, $y \in A$, $y \in B$, $z \in B$ 。此时，必有 $A = B$ ，否则 $A \cap B = \emptyset$ ，这与 $y \in A$ 并且 $y \in B$ 矛盾。从而， $x \in A$, $z \in A$ ，因此， $(x, z) \in A \times A$ ，于是 $(x, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足传递性。

□

本门课一个很重要的结论为“集合 X 上的所有等价关系之集与集合 X 的所有划分之集之间存在着——对应的关系”。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合 X 上的所有等价关系之集到集合 X 的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合 X 上的所有等价关系之集到集合 X 的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗？

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 f 为可逆的，而 g 称为 f 的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理：

定理3.17. 设 X 为一个集合，

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{ 为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\}, \\ \mathbb{A} &= \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{ 为集合 } X \text{ 的一个划分}\}, \\ f &= \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\} \\ g &= \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\} \end{aligned}$$

则 f 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{A} 的双射，且 $f^{-1} = g$ 。

如果我们能够完全理解该定理，并能够从“0”开始给出该定理的证明过程，即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明，那么，整个前三章的内容，我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程，顺藤摸瓜，这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明，直到可以从头开始说起，这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗？答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合： $X = \{1, 2, 3\}$ 。那么 \mathbb{R} 表示集合 X 上所有的等价关系构成的集合，这个集合是怎样的？这个问题不好回答吧？

让我们先看 \mathbb{A} 吧。 \mathbb{A} 表示集合 X 的所有划分构成的集合。这个集合比较好写，你能写出答案吗？我的答案是这样的：

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = & \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ & \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

对任意的 $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ ，我们计算 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，就可以得到 X 上的一个等价关系。该定理是在说，在 \mathbb{R} 和 \mathbb{A} 之间存在一个一一对应的关系，于是，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}, \\ & \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\end{aligned}$$

证明. 1. 证明 f 为映射。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong ， $\{[x]_{\cong} | x \in X\}$ 为集合 X 的一个划分。这就是定理3.15。

2. 证明 g 为映射。这就是要证明对于集合 X 的任意一个划分 \mathcal{A} ， $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 X 上的一个等价关系。这就是定理3.16。

3. 证明 $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong ， $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。

这里是要证明两个集合相等。

对任意的 $x_1 \in X$ ， $x_2 \in X$ ，如果 $(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ ，那么存在 $x \in X$ ， $(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ ，于是 $x_1 \in [x]_{\cong}$ 并且 $x_2 \in [x]_{\cong}$ ，从而 $x \cong x_1$ 并且 $x \cong x_2$ ，由 \cong 的对称性知 $x_1 \cong x$ ，再由 \cong 的传递性知 $x_1 \cong x_2$ ，即 $(x_1, x_2) \in \cong$ 。

对任意的 $x_1 \in X$ ， $x_2 \in X$ ，如果 $(x_1, x_2) \in \cong$ ，则 $x_1 \cong x_2$ ，从而 $x_2 \in [x_1]_{\cong}$ ，由 \cong 的自反性知 $x_1 \cong x_1$ ，从而 $x_1 \in [x_1]_{\cong}$ 。于是， $(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ 。

4. 证明 $f \circ g = I_A$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个划分 \mathcal{A} ，关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的等价类的集合就是 \mathcal{A} 。

这里还是要证明两个集合相等。

对任意的 $x \in X$ ，设 $[x]$ 为关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类，以下证明 $[x] \in \mathcal{A}$ 。由 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ 知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ 。如果我们能够证明 $[x] = A$ ，则 $[x] \in \mathcal{A}$ 得证。对任意的 $y \in [x]$ ，则 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 。于是，存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in B \times B$ ，如果 $B \neq A$ ，那么 $x \in A$ 且 $x \in B$ ，这与 $A \cap B = \emptyset$ 矛盾，从而 $B = A$ ，因此 $y \in A$ 。反之，对任意的 $y \in A$ ，则 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，从而 $y \in [x]$ 。这证明了 $[x] = A$ ，从而 $[x] \in \mathcal{A}$ 。

对任意的 $A \in \mathcal{A}$ ，以下证明 A 为等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类。由 A 非空知，存在 $x, x \in A$ ，以下证明 $A = [x]$ ，这里 $[x]$ 表示 x 关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类。对任意的 $y \in A$ ，则 $(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，从而 $y \in [x]$ 。反之，如果 $y \in [x]$ ，则由与前面相类似的，可以证明 $y \in A$ 。这证明了 $A = [x]$ 。

□

定义3.19. 设 \cong 为 X 上的等价关系， \cong 的所有等价类之集称为 X 对 \cong 的商集，记为 X/\cong 。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x] \text{ 为 } x \text{ 关于 } \cong \text{ 的等价类}\}$$

例3.18. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， \cong 为集合 X 的等价关系， $X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ ，试求 \cong 。

定义3.20. 集合 X 上的二元关系 R 称为**偏序关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

1. R 为自反的，即对 X 中的任意元素 x ， xRx ；
2. R 为反对称的，即对 X 中的任意元素 x, y ，如果 xRy 且 yRx ，则 $x = y$ ；
3. R 为传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z ，如果 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

定义3.21. 设 \leq 为集合 X 上的一个偏序关系，则称二元组 (X, \leq) 为一个**偏序集**。

例3.19. 实数集 \mathbb{R} 上通常的“小于等于”关系 \leq 为一个偏序关系，所以 (\mathbb{R}, \leq) 为一个偏序集。

例3.20. 设 S 为一个集合， S 的子集间的包含关系 \subseteq 为 2^S 上的一个偏序关系，所以 $(2^S, \subseteq)$ 为一个偏序集。

例3.21. 设集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则 R 为 X 上的偏序关系。

定义3.22. 设 \leq 为集合 X 上的偏序关系，如果 $\forall x, y \in X$ ， $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立，则称 \leq 为 X 上的全序关系。相应的，二元组 (X, \leq) 称为全序集。

定义3.23. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$, 则称 s 为 A 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的**最小元素**。

我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 且 $x \neq y$ 。

定义3.24. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$, 在 A 中没有元素 x 使得 $s < x$, 则称 s 为 A 的**极大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$, 在 A 中没有元素 x 使得 $x < t$, 则称 t 为 A 的**极小元素**。

定义3.25. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$, 则称 s 为 A 的一个**上界**; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的一个**下界**。

定义3.26. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果 A 有上界且 A 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 A 的**上确界**, 记为 $\sup A$; 如果 A 有下界且 A 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 A 的**下确界**, 记为 $\inf A$ 。

练习3.1. 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系?

练习3.2. 实数集上的“小于”关系 $<$ 是否为反自反的? 集合 X 的幂集 2^X 上的“真包含”关系 \subset 是否为反自反的? 为什么?

练习3.3. 下列说法是否正确? 若正确, 请给出证明; 若不正确, 请说明理由。

1) 设 R 为集合 X 上的反自反的和传递的二元关系, 则 R 为反对称的二元关系。

2) 设 R 为集合 X 上的对称的和传递的二元关系, 则 R 为自反的二元关系。

练习3.4. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 \cong 为 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

练习3.5. 设 X, Y, S 同习题3.4。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 \cong 为 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

练习3.6. 设 X, Y, S 同习题3.4。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 \cong 为 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

练习3.7. 是否存在一个偏序关系 \leq , 使 (X, \leq) 中有唯一极大元素, 但没有最大元素? 如果有, 请给出一个具体例子; 如果没有, 请证明之。

练习3.8. 令 $X = \{a, b, c, d\}$, 画出偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 的 *Hasse* 图。

练习3.9. 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$, 画出偏序集 $(S, |)$ 的 *Hasse* 图, 其中 $|$ 为整除关系。它有几个极大 (小) 元素? 列出这些极大 (小) 元素。

练习3.10. 偏序集 (X, \leq) 称为有序完备的, 当且仅当 X 的每个有上界的非空子集有上确界。证明: 偏序集 (X, \leq) 为有序完备的当且仅当对 X 的每个有下界的非空子集有下确界。

第 四 章