第四章无穷集合

陈建文

April 5, 2023

定义1. 如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义2. 如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理1. 集合A为可数集的充分必要条件为A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

定理2. 可数集的任一无限子集也是可数集。

定理3. 设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

定理4. 设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

定理5. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理6. 设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

定理7. 全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

定理8. 区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义3. 凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有"连续统的势"的集合，简称连续统。

定理9. 无穷集合必包含有可数子集。

定理10. 设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明. 先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。

再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理11. 设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M\setminus A$为无穷集合，则$M\sim M\setminus A$。

定理12. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$为连续统。

定理13. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论1. 全体实数之集是一个连续统。

推论2. 全体无理数之集是一个连续统。

定义4. 集合A的基数为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义5. 所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义6. 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A\sim B$。

定义7. 设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果从A到B存在一个单射，则称基数α小于等于基数β，记为$\alpha \leq \beta$。

$\alpha < \beta$当且仅当$\alpha \leq \beta$并且$\alpha \neq \beta$,即存在从A到B的单射但不存在A到B的双射。

定理14 (康托)**.** 对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明. 令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m\in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f: M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x\in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0\in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0\notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，从而

$$|M| < |2^M|$$

□

定理15 (康托-伯恩斯坦)**.** 设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A\to B$与单射$g: B \to A$，则A与B的基数相等。

证法一. 设$f: A \to B$和$g: B\to A$都为单射。令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以A与B的基数相等。 □

证法二. We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2. We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \cdots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1, in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B.

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \cdots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A, then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1. Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h. On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B, then $g(y)$ belongs to A_2. In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h, as was to be shown.

□

定义8. 设α,β为两个基数，A与B为两个不相交集合，$|A| = \alpha$,$|B| = \beta$，则集合$A \cup B$的基数称为基数α与β的和，记为$\alpha + \beta$。

定义9. 设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha$,$|B| = \beta$，则集合$A \times B$的基数称为基数α与β的积，记为$\alpha \cdot \beta$ 或者$\alpha\beta$。

定义10. 设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha$,$|B| = \beta$，则集合$B^A = \{f|f : A \to B\}$的基数称为β的α次幂，记为β^α。

定理16. 设a为可数集的基数，c为连续统的基数，则

1. $\forall n \in N \cup \{0\}, n + a = a.$
2. $\forall n \in N, n \cdot a = a.$
3. $\forall n \in N, n \cdot c = c.$
4. $a \cdot c = c.$
5. $c \cdot c = c.$
6. $2^a = c.$
7. $(2^a)^a = c.$
8. $a^a = 2^a.$

定理17. 设α，β，γ为任意基数，则

（*1*）基数的加法和乘法分别满足交换律，即

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha.$$

（*2*）基数的加法和乘法分别满足结合律，即

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

（*3*）基数的乘法对加法满足分配律，即

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

（*4*）幂运算的指数性质成立，即
$a)\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$ $b)(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ $c)(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$

刻画集合的ZFC公理系统（Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory）：

公理1 (外延公理)**.**

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理2 (空集公理)**.**

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理3 (对公理)**.**

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4 (并集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

公理5 (幂集公理).

$$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理6 (子集公理).

$$\forall c \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理7 (无穷公理).

$$\exists A(\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$
$$\text{其中} a^+ = a \cup \{a\}$$

公理8 (代换公理).

$$\begin{aligned} \forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x,y))) \end{aligned}$$

公理9 (正则公理).

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A) m \cap A = \phi$$

公理10 (选择公理).

$$(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \wedge dom F = dom R)$$