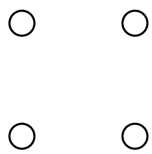
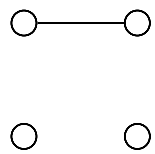
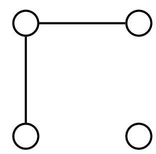
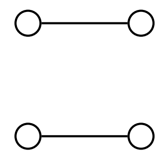
第六章作业题

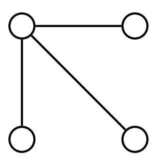
习题 1. 画出具有4个顶点的所有无向图（同构的只算一个）。

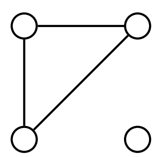

A

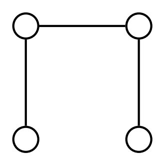

B

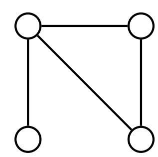

C

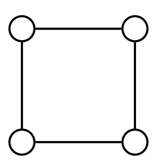

D

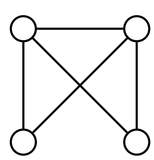

E

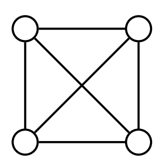

F


G


H

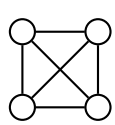

I

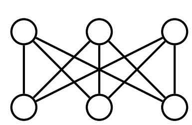

J

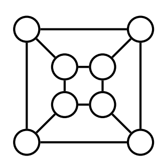

K

习题 2. 画出具有4个、6个、8个顶点的三次图。

解.







□

习题 3. 某次宴会上，许多人互相握手，证明：握过奇数次手的人数为偶数（注意，0为偶数）。

证明. 每个人用一个顶点表示。如果两个人之间握过手，则在他们之间连一条边。在所得到的图中，度为奇数的顶点的数目为偶数，这说明握过奇数次手的人数为偶数。 □

习题 4. 设u与v为图G的两个不同的顶点，若u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答. 设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u,v\},\{\{u,v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2\dots v_nv$不是路，设$v_j = v_i(i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1}\dots v_j$构成G中的一个圈；同理，如果T_2不是路，G中有圈。

□

习题 5. 若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一. 用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量为$G_1 = (V_1, E_1)$，其余的连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，则G中的边数等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，从而G中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，即

$$q \le \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

矛盾。 □

证法二. 用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量的顶点数为 p_1，边数为q_1，所有其他连通分量的顶点数为p_2，边数为q_2。则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)(p_1+p_2-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)((p_1-1)+(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_1(p_2-1)+p_2(p_1-1)+p_2(p_2-1)-(p_1-1)-(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1-1)(p_2-1))\\
=&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}+(p_1-1)(p_2-1))\\
\ge&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}\\
\ge& q
\end{aligned}$$

矛盾。 □

习题 6. 设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明. 设$P = v_0v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$uv_0v_1 \ldots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C = v_0v_1 \ldots v_sv_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，这是因为v_0至少与$\delta(G)$个顶点相邻接，而所有这些与v_0邻接的顶点均在圈C中。 □

习题 7. 证明：如果G不是连通图，则G^c是连通图。

证明. 设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，则uw和wv都不是G中的边，从而为G^c中的边，于是uwv构成了G^c中u和v之间的一条路。 □

习题 8. 每一个自补图有$4n$或$4n+1$个顶点。

证明. 设G为自补图，有p个顶点，则G和G^c共有$p(p-1)/2$条边。由G为自补图知，G和G^c有相同的边数，从而$p(p-1)/2$能被2整除。只有当$p = 4n$或$p = 4n+1$时，$p(p-1)/2$能被2整除，结论得证。 □

习题 9. 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点的u和v，均有:$\deg u + \deg v \geq 9$。

解. K_9外再连接一个顶点。 □

习题 10. 试求K_p中不同的哈密顿圈的个数。

解. $\frac{(p-1)!}{2}$ □

习题 11. 完全偶图$K_{m,n}$为哈密顿图的充分必要条件是什么?

解. $m = n$。 □

习题 12. 证明：具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

证明. 设G为偶图，其顶点可以划分为两个集合V_1和V_2，使得任意一条边一个顶点在V_1中，另外一个顶点在V_2中。如果G有奇数个顶点，则$|V_1| \neq |V_2|$。不妨设$|V_1| < |V_2|$，则$\omega(G - V_1) > |V_1|$，从而G不是哈密顿图。 □