习题. 设$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$，$A \subseteq Z$，证明：$(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$。

证明. 先证$(gf)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(A))$。

对任意的x,如果$x \in (gf)^{-1}(A)$，则$(gf)(x) \in A$，即$g(f(x)) \in A$，从而$f(x) \in g^{-1}(A)$，因此$x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$。

再证$f^{-1}(g^{-1}(A)) \subseteq (gf)^{-1}(A)$。

对任意的x,如果$x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$，则$f(x) \in g^{-1}(A)$，从而$g(f(x)) \in A$，即$(gf)(x) \in A$，因此$x \in (gf)^{-1}(A)$。 □