习题. 设集合S有n个元素,证明 2^S 有 2^n 个元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于n:

- 1.当n=0时, $S=\phi$, $2^{\phi}=\{\phi\}$ 有1个元素,结论成立。
- 2.假设当 $n=k(k\geq 0)$ 时结论成立,往证当n=k+1时结论也成立。设集合S中有k+1个元 素 $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k,\ s_{k+1},\ 记$

$$S_1 = 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}}$$

$$S_2 = \{X \cup \{s_{k+1}\} | X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\}$$

則 $2^S = S_1 \cup S_2$ 。

考虑映射 $f: S_1 \to S_2$,对任意的 $X \in S_1$, $f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$ 。易验证f为从 S_1 到 S_2 的双射,从而 $|S_1| = |S_2|$ 。

显然 $S_1 \cap S_2 = \phi$,再由归纳假设, $|S_1| = 2^k$,从而 $|2^S| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。