第九讲同态基本定理

陈建文

October 30, 2022

定义1. 设$(G_1,\circ)$与$(G_2,*)$为两个群，如果存在一个从G_1到G_2的映射ϕ，使得$\forall a,b\in G_1$，

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)*\phi(b)$$

则称G_1与G_2同态，ϕ称为从G_1到G_2的一个同态（*homomorphism*）。如果同态ϕ是满射，则称ϕ为从G_1到G_2的一个满同态，此时称G_1与G_2为满同态，并记为$G_1\sim G_2$。类似的，如果同态ϕ为单射，则称ϕ为单同态。

定理1. 设$(G_1,\circ)$与$(G_2,*)$为两个群，e_1和e_2分别为其单位元，ϕ为从G_1到G_2的同态，则

$$\phi(e_1)=e_2$$
$$\forall a\in G\phi(a^{-1})=(\phi(a))^{-1}$$

证明. 由$\phi(e_1)=\phi(e_1\circ e_1)=\phi(e_1)*\phi(e_1)$知$\phi(e_1)=e_2$。$\forall a\in G,\phi(a^{-1})*\phi(a)=\phi(a^{-1}\circ a)=\phi(e_1)=e_2$知$(\phi(a))^{-1}=\phi(a^{-1})$。 □

定理2. 设$(G_1,\circ)$为一个群，G_2为一个具有二元代数运算$*$的代数系。如果存在一个满射$\phi:G_1\to G_2$使得$\forall a,b\in G_1$

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)*\phi(b)$$

则$(G_2,*)$为一个群。

证明. $\forall x,y,z\in G_2$，由ϕ为满射知$\exists a,b,c\in G_1$使得$\phi(a)=x,\phi(b)=y,\phi(c)=z$，从而$(x*y)*z=(\phi(a)*\phi(b))*\phi(c)=\phi(a\circ b)*\phi(c)=\phi((a\circ b)\circ c)$，$x*(y*z)=\phi(a)*(\phi(b)*\phi(c))=\phi(a)*\phi(b\circ c)=\phi(a\circ(b\circ c))$，$(x*y)*z=x*(y*z)$，这验证了在$G_2$中$*$运算满足结合律。

$\forall x\in G_2$，由ϕ为满射知$\exists a\in G_1$使得$\phi(a)=x$，于是$\phi(e)*x=\phi(e)*\phi(a)=\phi(e\circ a)=\phi(a)=x$。

$\forall x\in G_2$，由ϕ为满射知$\exists a\in G_1$使得$\phi(a)=x$，于是$\phi(a^{-1})*\phi(a)=\phi(a^{-1}\circ a)=\phi(e_1)$。 □

定理3. 设ϕ为从群$(G_1,\circ)$到群$(G_2,*)$的同态，则

（*1*）如果H为G_1的子群，那么$\phi(H)$为G_2的子群；
（*2*）如果H为G_2的子群，那么$\phi^{-1}(H)$为G_1的子群；
（*3*）如果N为G_2的正规子群，那么$\phi^{-1}(N)$为G_1的正规子群。

证明. 以下设G_1的单位元为e_1，G_2的单位元为e_2。

（1）$e_2 = \phi(e_1) \in \phi(H)$，从而$\phi(H)$非空。

$\forall x, y \in \phi(H)$，$\exists a, b \in H$使得$x = \phi(a)$，$y = \phi(b)$，则$x * y^{-1} = \phi(a) * \phi(b)^{-1} = \phi(a) * \phi(b^{-1}) = \phi(a \circ b^{-1}) \in \phi(H)$。

以上验证了$\phi(H)$为G_2的子群。

（2）由$\phi(e_1) = e_2$知$e_1 \in \phi^{-1}(H)$，从而$\phi^{-1}(H)$非空。

$\forall a, b \in \phi^{-1}(H)$，则$\phi(a) \in H$，$\phi(b) \in H$，从而$\phi(ab^{-1}) = \phi(a) * \phi(b^{-1}) = \phi(a) * \phi(b)^{-1} \in H$，于是$ab^{-1} \in \phi^{-1}(H)$。

这验证了$\phi^{-1}(H)$为G_1的子群。

（3）由（2）知$\phi^{-1}(N)$为G_1的子群。

$\forall g \in \phi^{-1}(N), a \in G, \phi(aga^{-1}) = \phi(a)\phi(g)\phi(a^{-1}) = \phi(a)\phi(g)\phi(a)^{-1} \in N$，从而$aga^{-1} \in \phi^{-1}(N)$，于是$a\phi^{-1}(N)a \subseteq \phi^{-1}(N)$，因此$\phi^{-1}(N)$为$G_1$的正规子群。 □

定理4. 设ϕ为从群G_1到群G_2的满同态，N为G_1的正规子群，则$\phi(N)$为G_2的正规子群。

证明. $\phi(N)$显然为G_2的子群。

$\forall g \in \phi(N)$，$\exists b \in G_1$使得$g = \phi(b)$，$\forall h \in G_2, \exists a \in G_1$，使得$h = \phi(a)$。于是，$hgh^{-1} = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1} = \phi(a \circ b) * \phi(a^{-1}) = \phi(a \circ b \circ a^{-1}) \in \phi(N)$，从而$h\phi(N)h^{-1} \subseteq \phi(N)$，因此$\phi(N)$为$G_2$的正规子群。 □

定义2. 设ϕ为群$(G, \circ)$到群$(\bar{G}, \cdot)$的同态，$\bar{e}$为$\bar{G}$的单位元，则G的子群$\phi^{-1}(\bar{e})$称为同态ϕ的核，记为$Ker\phi$。$\phi(G)$称为ϕ在G下的同态像。

定理5. 设ϕ为从群$(G, \circ)$到群$(\bar{G}, \cdot)$的同态，则$Ker\phi$为群G的正规子群。

定理6. 设N为G的一个正规子群，ϕ为从G到G/N的一个映射，$\forall x \in G \phi(x) = xN$，则$\phi$为从$G$到$G/N$的一个满同态，$Ker\phi = N$。

证明. $\forall x, y \in G, \phi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \phi(x)\phi(y)$，这验证了$\phi$为从$G$到$G/N$的一个同态。

$\forall g \in G, g \in Ker\phi \Leftrightarrow \phi(g) = N \Leftrightarrow gN = N \Leftrightarrow g \in N$。 □

定理7 (群的同态基本定理)**.** 设ϕ为从群G到群$\bar{G}$的同态，则$G/KerG \cong \phi(G)$。

记$K = KerG$。令$f : G/K \to \phi(G)$，$\forall gK \in G/K, f(gK) = \phi(g)$。

$\forall g_1, g_2 \in G$，如果$g_1K = g_2K$，则$g_1^{-1}g_2 \in K$，从而$\phi(g_1^{-1}g_2) = \bar{e}$，即$\phi(g_1)^{-1}\phi(g_2) = \bar{e}$，于是$\phi(g_1) = \phi(g_2)$，所以$f(g_1K) = f(g_2K)$，这验证了$f$为映射。

f为单射，这是因为$\forall g_1K, g_2K \in G/K$，如果$f(g_1K) = f(g_2K)$，则$\phi(g_1) = \phi(g_2)$，从而$\phi(g_1^{-1}g_2) = \bar{e}$，于是$g_1^{-1}g_2 \in K$，所以$g_1K = g_2K$。

f为满射，这是因为$\forall \bar{g} \in \phi(G)$，$\exists g \in G$使得$\phi(g) = \bar{g}$，于是$f(gK) = \phi(g) = \bar{g}$。

$\forall g_1K, g_2K \in G/K$，$f((g_1K)(g_2K)) = f(g_1g_2K) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = f(g_1K)f(g_2K)$，因此$f$为从$G/K$到$\phi(G)$的同构。

课后作业题:

练习1. 设G为m阶循环群，$\bar{G}$为n阶循环群，试证：$G \sim \bar{G}$当且仅当$n|m$。

练习2. 设G为一个循环群，H为群G的子群，试证：G/H也为循环群。