

第七讲子群的陪集、拉格朗日定理

陈建文

November 5, 2022

定义1. 设 G 为一个群, G 的任意子集称为群子集。在 2^G 中借助于 G 的乘法引入一个代数运算, 称为群子集的乘法: $\forall A, B \in 2^G$,

$$AB = \{ab | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

$\forall g \in G, A \in 2^G, \{g\}A$ 简写为 gA , 即 $gA = \{ga | a \in A\}$ 。 $A\{g\}$ 简写为 Ag , 即 $Ag = \{ag | a \in A\}$ 。

定理1. 设 G 为一个群, 则 $\forall A, B, C \in 2^G, (AB)C = A(BC)$ 。

定义2. 设 H 为群 G 的一个子群, $a \in G$, 则集合 aH 称为子群 H 的一个左陪集, Ha 称为 H 的一个右陪集。

定理2. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a \in G, aH = H$ 的充分必要条件是 $a \in H$ 。

证明. \Rightarrow 设 $aH = H$, 则 $a = ae \in aH = H$ 。

\Leftarrow 设 $a \in H$, 则 $\forall g \in aH, \exists h \in H, g = ah \in H; \forall h \in H, h = a(a^{-1}h) \in aH$ 。 \square

定理3. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, aH = bH$ 的充分必要条件是 $a^{-1}b \in H$ 。

证明. \Rightarrow 设 $aH = bH$, 则 $b = be \in bH = aH$, 从而 $\exists h \in H$ 使得 $b = ah$, 于是, $a^{-1}b = h \in H$ 。

\Leftarrow 设 $a^{-1}b \in H$, 则 $\forall g \in bH, \exists h \in H$, 使得 $g = bh = a((a^{-1}b)h) \in aH$, 从而 $bH \subseteq aH$; 由 $a^{-1}b \in H$ 可得 $b^{-1}a \in H$, 从而 $aH \subseteq bH$ 。 \square

定理4. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, aH = bH$ 或者 $aH \cap bH = \phi$ 。

证明. 如果 $aH \cap bH \neq \phi$, 设 $f \in aH \cap bH$, 则 $\exists h, h'$ 使得 $f = ah = bh'$, 于是 $a^{-1}b = hh'^{-1} \in H$, 从而 $aH = bH$ 。 \square

定理5. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, |aH| = |bH|$ 。

证明. 只需证 $\forall a \in G, |H| = |aH|$ 。 令 $\phi: H \rightarrow aH, \forall h \in H, \phi(h) = ah$, 则易验证 ϕ 为双射, 所以 $|H| = |aH|$ 。 \square

定理6. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 H 的所有左陪集构成的集合为 G 的一个划分。

证明. 首先, 不同的左陪集互不相交。其次, $\forall a \in G, a \in aH$, 所以 $G = \bigcup_{a \in G} aH$ 。因此, H 的所有左陪集构成的集合为 G 的一个划分。□

定义3. 设 H 为群 G 的一个子群, 如果 H 的所有不同的左陪集的个数为有限数 j , 则称 j 为 H 在 G 中的指数, 记为 $j = [G : H]$, 否则称 H 在 G 中的指数为无穷大。

定理7. 设 G 为一个有限群, H 为 G 的一个子群, 则 $|G| = |H| \cdot [G : H]$ 。

证明. H 在 G 中的所有不同的左陪集构成的集合为 G 的一个划分, 每个左陪集元素的个数都相等。因此, $|G| = |H| [G : H]$ 。□

推论1. 有限群中每个元素的阶都能整除该有限群的阶。

证明. 设 G 为一个 N 阶群, a 为 G 的一个阶为 n 的元素, 则由 a 生成的 G 的子群 $\langle a \rangle$ 的阶也为 n , 由 Lagrange 定理, $n | N$ 。□

推论2. 如果群 G 的阶 p 为素数, 则 G 为一个循环群。

因为 p 为素数, 所以 $p \geq 2$ 。于是, G 中至少有一个非单位元素 a 。 a 的阶整除 p , 但 p 为素数, 所以 a 的阶为 p 。因此, $G = \langle a \rangle$ 。

推论3. 设 G 为一个群, 则 $\forall a \in G, a^{|G|} = e$ 。

证明. 设 G 的阶为 N , a 的阶为 n , 则 $n | N$, 于是 $a^N = (a^n)^{(N/n)} = e^{(N/n)} = e$ 。□

例. 证明: 阶小于等于 5 的群为交换群。

证明. 设 G 为一个 p 阶群, $p \leq 5$ 。如果 $p = 1$, 则 $G = \{e\}$ 为一个交换群。当 $p = 2, 3, 5$ 时, p 为素数, G 为循环群, 从而为交换群。以下证明当 $p = 4$ 时, G 也为一个交换群。此时, G 中每个元的阶整除 4, 所以 G 中每个元素的阶为 1, 2 或 4。如果 G 中有一个阶为 4 的元素 a , 则 $G = \langle a \rangle$, 从而为交换群。如果 G 中每个元素的阶都不为 4, 则 G 中每个非单位元素的阶都为 2。于是, $\forall x, y \in G, x^2 = e, y^2 = e, (xy)^2 = e$ 。由 $(xy)^2 = e$ 得 $xyxy = e$, 两边同时左乘 x , 右乘 y , 可得 $yx = xy$, 故 G 为交换群。□

定理8. 设 H 为群 G 的一个子群, S_l 为 H 的所有左陪集构成的集合, S_r 为 H 的所有右陪集构成的集合, 则 $|S_l| = |S_r|$ 。

定理9. 设 p 为素数, 整数 a 与 p 互素, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

证明. 以下证明 $Z_p \setminus \{[0]\} = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$ 对于乘法运算 “ \cdot ” 构成一个群。

其中的乘法运算 “ \cdot ” 定义为: $\forall i, j \in Z, [i] \cdot [j] = [ij]$ 。

$\forall i, j, i', j' \in Z$, 如果 $[i] = [i']$, $[j] = [j']$, 则 $[ij] = [i'j']$, 这验证了 “ \cdot ” 为一个运算。

$\forall i, j \in Z$, 如果 $[i] \neq [0]$, $[j] \neq [0]$, 则 $p \nmid i$, $p \nmid j$, 从而 $p \nmid ij$, 于是 $[i] \cdot [j] = [ij] \neq [0]$, 这验证了运算 “ \cdot ” 在 $Z_p \setminus \{[0]\}$ 中封闭。

$\forall i, j, k \in Z$, $([i] \cdot [j]) \cdot [k] = [ij] \cdot [k] = [(ij)k]$, $[i] \cdot ([j] \cdot [k]) = [i] \cdot [jk] = [i(jk)]$, $([i] \cdot [j]) \cdot [k] = [i] \cdot ([j] \cdot [k])$, 这验证了乘法运算 “ \cdot ” 满足结合律。

$\forall i \in Z, [1] \cdot [i] = [i]$, 这验证了 $[1]$ 为左单位元。

$\forall i \in Z, [i] \neq [0]$, 则 $(i, p) = 1$, 从而 $\exists s, t \in Z, si + tp = 1$, 于是 $p | (si - 1)$, 所以 $[si] = [1]$, 即 $[s][i] = [1]$, 这说明 $[i]$ 有左逆元。

以上验证了 $Z_p \setminus \{[0]\}$ 对于乘法运算“ \cdot ”构成一个群。

$\forall a \in Z$, 如果 a 与 p 互素, 则 $[a] \in Z_p \setminus \{[0]\}$, 从而 $[a]^{p-1} = [1]$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。 \square

RSA算法:

- (1) 随机选择两个大的素数 p 和 q ;
- (2) 计算 $n = pq$;
- (3) 选择正整数 e , 使得 e 与 $(p-1)(q-1)$ 互素;
- (4) 计算正整数 d , 使得对于某个整数 k , $ed = 1 + k(p-1)(q-1)$;
- (5) 将 (e, n) 作为公钥发布, 保留私钥 (d, n) 。

设待加密的明文为 M , $M < n$ 。

加密过程: $C = M^e \pmod{n}$;

解密过程: $M = C^d \pmod{n}$ 。

定理10. 在以上描述的RSA算法中, $(M^e \pmod{n})^d \pmod{n} = M$ 。

证明. 由于 $(M^e \pmod{n})^d \pmod{n} = (M^e)^d \pmod{n} = M^{ed} \pmod{n}$, 因此只需证 $M^{ed} \pmod{n} = M$ 。当 M 与 p 互素时,

$$\begin{aligned} & M^{ed} \pmod{p} \\ &= M^{1+k(p-1)(q-1)} \pmod{p} \\ &= M(M^{p-1})^{k(q-1)} \pmod{p} \\ &= M(1)^{k(q-1)} \pmod{p} \\ &= M \pmod{p} \end{aligned}$$

于是 $M^{ed} \equiv M \pmod{p}$ 。当 $p|M$ 时, 该式显然也成立。

同理可证 $M^{ed} \equiv M \pmod{q}$, 进一步可得 $M^{ed} \equiv M \pmod{pq}$, 即 $M^{ed} \equiv M \pmod{n}$, 从而 $M^{ed} \pmod{n} = M \pmod{n} = M$ 。 \square

课后作业题:

练习1. 证明: 六阶群里必有一个三阶子群。

练习2. 设 p 为一个素数, 证明: 在阶为 p^m 的群里一定含有一个 p 阶子群, 其中 $m \geq 1$ 。

练习3. 在三次对称群 S_3 中, 找一个子群 H , 使得 H 的左陪集不等于 H 的右陪集。

练习4. 设 H 为群 G 的一个子群, 如果左陪集 aH 等于右陪集 Ha , 即 $aH = Ha$, 则 $\forall h \in H, ah = ha$ 一定成立吗?