第一章集合及其基本概念

陈建文

February 22, 2023

定义1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示“并且”，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为ϕ。

定义2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A x \in B$ 即$\forall x(x \in A \to x \in B)$
$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B x \notin A$即$A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是$\forall x x \in A \to x \in B$。对一些特殊的$x$的值分析如下：

- 当$x = 1$时，$1 \in A \to 1 \in B$，即$T \to T$，其真值为T;
- 当$x = 3$时，$3 \in A \to 3 \in B$，即$F \to T$，其真值为T;
- 当$x = 0$时，$0 \in A \to 0 \in B$，即$F \to F$，其真值为T。

定义3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1,2,3,4,5\} = \{3,4,2,1,5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$

定理1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi \subseteq \phi'$并且$\phi' \subseteq \phi$，从而$\phi = \phi'$，矛盾。

□

"空集为任一集合的子集"这一结论初学时，也可以用反证法证明其正确性。

空集为任一个集合的子集。

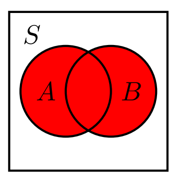
证明. 用反证法。设存在一个集合A，$\phi \nsubseteq A$，则存在$x \in \phi$，但$x \notin A$，这显然是不可能的，结论得证。 □

定义4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例. $2^{\phi} = \{\phi\}$
$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

例. $2^{\{\phi, \{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

定义5. 设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

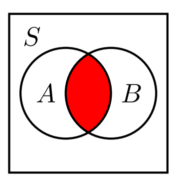


$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

（这里$\vee$表示"或者"）

例. $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

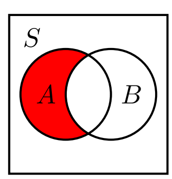
定义6. 设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例. $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$

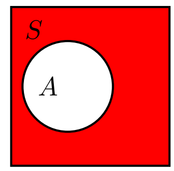
定义7. 设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1,2\}\setminus\{2,3\}=\{1\}$

定义8. 在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S\setminus A$称为集合A对集合S的补集，记为A^c。



$$A^c=\{x|x\in S\wedge x\notin A\}$$

例. $S=\{0,1\},A=\{0\}$, 则$A^c=\{1\}$。

定理2. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. $A\cup\emptyset=A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$.
4. $A\cup S=S$, $A\cap S=A$.
5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
6. $A\cup A^c=S$, $A\cap A^c=\emptyset$.
7. $C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$, $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$.
7'. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$, $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

以下只证明结论5和结论7的第一条，其他结论的证明留给读者自己完成。
首先证明结论5的第一条,我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
&\forall x x\in A\cup(B\cap C)\\
\Leftrightarrow& x\in A\vee x\in B\cap C\\
\Leftrightarrow& x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\\
\Leftrightarrow&(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow& x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C\\
\Leftrightarrow& x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。
对任意的x，如果$x\in A\cup(B\cap C)$，则$x\in A$或者$x\in B\cap C$，从而$x\in A$，或者$x\in B$并且$x\in C$，因此，$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\in A$或者$x\in C$，即，$x\in A\cup B$ 并且$x\in A\cup C$，于是，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。
再证$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。
对任意的x，如果$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$ 并且$x\in A\cup C$，从而$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\in A$或者$x\in C$，因此，$x\in A$，或者$x\in B$并且$x\in C$，即，$x\in A$或者$x\in B\cap C$，于是，$x\in A\cup(B\cap C)$。
$\square$

接下来证明结论7的第一条，我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
&\forall x x \in C \setminus (A \cap B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge x \notin A \cap B\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\\
\Leftrightarrow& (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B)\\
\Leftrightarrow& (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B)\\
\Leftrightarrow& x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cap B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cap B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$或者$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$或者$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$。

再证$(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cap B)$。

对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$， 则$x \in C \setminus A$或者$x \in C \setminus B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$或者$x \notin B$,因此，$x \in C$并且$x \notin A \cap B$，于是$x \in C \setminus (A \cap B)$。 □

例. 下列等式是否成立？

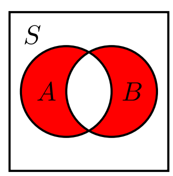
$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$

若成立，请给出证明。若不成立，请说明理由。

答. 该等式不成立。设$A = \phi$，$B = \phi$，$C = \{0\}$，则$(A \setminus B) \cup C = \{0\}$，而$A \setminus (B \setminus C) = \phi$，$(A \setminus B) \cup C \neq A \setminus (B \setminus C)$。 □

定义9. 设A, B为任意的两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对**称差**，记为$A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例.

$$\begin{aligned}
&\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}\\
&\{1, 2\} \triangle \{1\} = \{2\}\\
&\{1, 2\} \triangle \phi = \{1, 2\}\\
&\{1, 2\} \triangle \{1, 2\} = \phi
\end{aligned}$$

定理3. 设A, B为任意两个集合，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理4. 设A, B, C为任意三个集合，则
1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

以下证明结论 2 和结论 5，其他结论留给读者思考。先证明结论 2 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1}$$

所以

$$\begin{aligned}
x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow \neg(x \in A \triangle B) \\
&\Leftrightarrow \neg((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \\
&\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\
&\Leftrightarrow ((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in A) \vee ((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \\
&\Leftrightarrow ((x \notin A \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \\
&\vee ((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)
\end{aligned} \tag{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
&x \in (A \triangle B) \triangle C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\
&\vee (((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)) \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&x \in A \triangle (B \triangle C) \\
&\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{4}$$

其中(4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(4)式的第三行由与(3)式的对称性得到。

由(3)式和(4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 $\square$

再证明结论 5 。

证明.

$$
\begin{aligned}
&A\cap(B\bigtriangleup C)\\
=&A\cap(B\setminus C\cup C\setminus B)\\
=&(A\cap B\setminus C)\cup(A\cap C\setminus B) \qquad (5)\\
&(A\cap B)\bigtriangleup(A\cap C)\\
=&(A\cap B)\setminus(A\cap C)\cup(A\cap C)\setminus(A\cap B)\\
=&(A\cap B)\setminus A\cup(A\cap B)\setminus C\cup(A\cap C)\setminus A\cup(A\cap C)\setminus B\\
=&(A\cap B)\setminus C\cup(A\cap C)\setminus B\\
=&(A\cap B\setminus C)\cup(A\cap C\setminus B) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

由式(5)和式(6)知$A\cap(B\bigtriangleup C)=(A\cap B)\bigtriangleup(A\cap C)$。 □

定义10. 以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义11. 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

例. 如果$I=\{1,2,3\}$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3$；
如果$I=\{1,2,3\}$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cap A_2\cap A_3$；
如果$I=\mathbb{N}$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{N}$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_0\cap A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{Z}^+$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots=\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{Z}^+$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots=\bigcap_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha$。

例. 设$I=\{x\in\mathbb{R}|0<x\leq 1\}$，$\forall x\in\mathbb{R},A_x=\{y\in\mathbb{R}|0<y<x\}$，则

$$\bigcup_{x\in I}A_x=\{x\in\mathbb{R}|0<x<1\},\bigcap_{x\in I}A_x=\phi$$

定理5. 设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$
2. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$

证明. 留给读者自己完成。 □

定理6. 设C为任意集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$

2. $C \setminus (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$

以下只证明第1条，其他结论的证明留给读者自己完成。
我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$
\begin{aligned}
&\forall x x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(\forall \alpha \alpha \in I \to x \in A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\alpha \in I \to x \in A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\neg(\alpha \in I) \vee x \in A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha \neg\neg(\alpha \in I) \wedge \neg x \in A_\alpha \\
\Leftrightarrow & x \in C \wedge \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \notin A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \in C \wedge x \notin A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & \exists \alpha(\alpha \in I \wedge x \in C \setminus A_\alpha) \\
\Leftrightarrow & x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证明$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$，则$x \in C$，且$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$，从而$x \in C$，且存在$\alpha \in I$，$x \notin A_\alpha$。于是，存在$\alpha \in I$，$x \in C \setminus A_\alpha$。因此，$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$，故$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。

其次，对任意的x，如果$x \in \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$，则存在$\alpha \in I$，$x \in C \setminus A_\alpha$。因此，存在$\alpha \in I$，$x \in C$且$x \notin A_\alpha$，故$x \in C$且$x \notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$。于是，$x \in C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$。所以，$\bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha) \subseteq C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)$。

由集合相等的定义便知，$C \setminus (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(C \setminus A_\alpha)$。 □

将以上定理中的集合C替换为全集S，我们可以得到如下结论：

定理7. 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

2. $(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

定义12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a,b)。$(a,b) = (c,d)$当且仅当$a = c$并且$b = d$。

定义13. 设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a,b)|a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的**笛卡尔乘积**，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A \wedge b \in B\}$$

例. 如果$X = \{1,2\}$，$Y = \{3,4,5\}$，那么$X \times Y = ?$，$Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$
$$Y \times X = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$$

定义14. n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n**元组**。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

定义15. 设A_1, A_2，...，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}$$

为$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的**笛卡尔乘积**，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i \in A_i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$简记为$A^n$，例如$A^2 = A \times A$，$A^3 = A \times A \times A$。我们以前熟知的二维空间$R^2$即为$R \times R$，三维空间$R^3$即为$R \times R \times R$。

例. 如果$X = \{1,2\}$，$Y = \{3,4\}$，$Z = \{5,6\}$ 那么$X \times Y \times Z = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z = &\{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),\\ &(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\} \end{aligned}$$

定义16. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义17. 设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义18. 设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义19. 设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

定义20. 设A为一个集合，如果$A = \Phi$，其基数定义为0;如果$A \neq \Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1,2,\ldots,n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为0或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

定理8. 设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理9. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

定理10. 设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

定理11. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

定理12. 设A为有穷集，$B \subseteq A$，则$|A \setminus B| = |A| - |B|$。

定理13. 设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

定理14. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
-&\ldots \\
+&(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 1$时，结论显然成立。

假设当$n = k (k \ge 1)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。实际上，

$$\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\
=&|(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| + |A_{k+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})|
\end{aligned} \tag{7}$$

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{k}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k}|A_i\cap A_j\cap A_t| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k|
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup\dots\cup(A_k\cap A_{k+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}| - \sum_{1\le i<j\le k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<t\le k}|(A_i\cap A_{k+1})\cap(A_j\cap A_{k+1})\cap(A_t\cap A_{k+1})| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|(A_1\cap A_{k+1})\cap(A_2\cap A_{k+1})\cap\dots\cap(A_k\cap A_{k+1})| \qquad (9)\\
=&\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}| - \sum_{1\le i<j\le k}|(A_i\cap A_j\cap A_{k+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<t\le k}|A_i\cap A_j\cap A_t\cap A_{k+1}| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k\cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

将(8)和(9)代入(7)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\
=&\sum_{i=1}^{k+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k+1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<t\le k+1}|A_i\cap A_j\cap A_t| \\
-&\dots \\
+&(-1)^{k+1+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

□

例. 在*1000*名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中*804*人掌握了英语，*205*人掌握了日语，*190*人掌握了俄语，*125*人既掌握了英语又掌握了日语，*57*人既掌握了日语又掌握了俄语，*85*人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这*1000*名大学生中，英语、日语、俄语全掌握的有多少人？

解. 设A,B,C分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合，则

$$\begin{aligned}&|A\cup B\cup C|\\=&|A|+|B|+|C|\\-&|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

即

$$1000=804+205+190-125-85-57+|A\cap B\cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数$|A\cap B\cap C|=68$。 □

练习1. 对于任意的集合A，$\{\phi,\{\phi\}\}\in 2^{2^{2^A}}$。

证明. 根据幂集的定义，$\phi\in 2^A$，从而$\{\phi\}\subseteq 2^A$，即$\{\phi\}\in 2^{2^A}$。又因为$\phi\in 2^{2^A}$，所以$\{\phi,\{\phi\}\}\subseteq 2^{2^A}$，从而$\{\phi,\{\phi\}\}\in 2^{2^{2^A}}$。 □