第七讲正规子群、商群

陈建文

October 3, 2022

课后作业题:

练习1. 设A和B为群G的两个有限子群，证明:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

证明. 因为$A \cap B$为A的子群，因此存在$a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$，使得

$$A = a_1(A \cap B) \cup a_2(A \cap B) \cup \cdots \cup a_n(A \cap B)$$

这里$n = \frac{|A|}{|A \cap B|}$。以下验证$AB = a_1B \cup a_2B \cup \cdots \cup a_nB$，并且对任意的$i, j$，$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，$a_iB \cap a_jB = \phi$，于是$|AB| = n|B| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$。

$\forall g \in AB$，存在$a \in A$，$b \in B$使得$g = ab$。进一步，存在i，$1 \leq i \leq n$，$x \in A \cap B$使得$a = a_ix$，于是$g = a_ixb \in a_iB$（因为$x \in A \cap B \subseteq B$，$b \in B$，从而$xb \in B$）。

以下用反正法证明对任意的i, j，$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，$a_iB \cap a_jB = \phi$。假设存在i, j,$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$，使得$a_iB \cap a_jB \neq \phi$，则存在x，$x \in a_iB \cap a_jB$。设$x = a_ib_1 = a_jb_2$，这里$b_1 \in B$，$b_2 \in B$，则$a_i^{-1}b_j = b_1b_2^{-1} \in A \cap B$，从而$a_i(A \cap B) = a_j(A \cap B)$，与$a_i(A \cap B) \cap a_j(A \cap B) = \phi$矛盾。

□

练习2. 利用上题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

证明. 设A和B为六阶群G的两个三阶子群，由练习1结论可得:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

由于$A \cap B$为A的子群，所以必有$|A \cap B|||A|$，从而$|A \cap B| = 1$或3。如果$|A \cap B| = 1$，则$|AB| = 9$，这与G为一个六阶群，AB为G的群子集矛盾，从而$|A \cap B| = 3$，此时必有$A = B$,结论得证。 □

练习3. 设G为一个n^2阶的群，H为G的一个n阶子群。证明：$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。

证明. 用反证法，假设存在$x \in G$，$x^{-1}Hx \cap H = \{e\}$。由练习1结论可得，

$$|H(x^{-1}Hx)| = \frac{|H||x^{-1}Hx|}{|H \cap (x^{-1}Hx)|} = n^2$$

又由于G为一个n^2阶的群，所以$H(x^{-1}Hx) = G$，由教材例题结论可得$x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$，矛盾。 □

练习4. 证明：指数为*2*的子群为正规子群。

证明. 设H为群G的指数为2的子群，则存在$a \in G$使得$G = H \cup aH$。

$\forall g \in G$，如果$g \in H$，则显然$gHg^{-1} \subseteq H$；如果$g \in aH$，则存在$h \in H$使得$g = ah$，以下证明$gHg^1 \subseteq H$，从而可得H为G的正规子群。

$\forall x \in gHg^{-1}$，存在$h_1 \in H$使得$x = gh_1g^{-1}$，再由$g = ah$得$x = ahh_1(ah)^{-1} = ahh_1h^{-1}a^{-1}$。此时必有$x \in H$，否则$x \in aH$，从而存在$h_2 \in H$使得$x = ah_2$，于是$ahh_1h^{-1}a^{-1} = ah_2$，由此可得$a = h_2^{-1}hh_1h^{-1} \in H$，与$a \in aH$矛盾。 □

练习5. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明. 设N_1和N_2为群G的两个正规子群，显然$N_1 \cap N_2$为G的子群。$\forall a \in G$，易得$a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_1a^{-1} \subseteq N_1, a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_2a^{-1} \subseteq N_2$，由此可得$a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq N_1 \cap N_2$，这证明了$N_1 \cap N_2$为$G$的正规子群。 □

练习6. 设H为群G的子群，N为群G的正规子群，试证：NH为群G的子群。

证明. 只需证$NH = HN$。

$\forall g \in NH$，$\exists n \in N, h \in H$使得$g = nh$，由N为正规子群知$hN = Nh$，从而$\exists n_1 \in N$使得$nh = hn_1$，于是$g = nh = hn_1 \in HN$。

$\forall g \in HN$，$\exists h \in H, n \in N$使得$g = hn$，由N为正规子群知$hN = Nh$，从而$\exists n_1 \in N$使得$hn = n_1h$，于是$g = hn = n_1h \in NH$。 □

练习7. 设G为一个阶为$2n$的交换群，试证：G必有一个n阶商群。

证明. 由以前作业题知G中存在一个阶为2的元素a，则$G/(a)$为G的一个n阶商群。 □

练习8. 设H为群G的子群，证明：H为群G的正规子群的充分必要条件是$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$。

证明. 由教材定理知如果H为群G的正规子群，则$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$。

以下假设$\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$，往证$H$为群$G$的正规子群。

$\forall a \in G$，$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$，从而$\forall h \in H$，$aha^{-1}h \in H$，于是$\exists h_1 \in H, aha^{-1}h = h_1$，由此可得$aha^{-1} = h_1h^{-1} \in H$，这证明了$aHa^{-1} \subseteq H$，即$H$为群$G$的正规子群。 □