离散数学讲义

陈建文

March 9, 2022

第 八 章　连通度和匹配

定义8.1. 图G的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。

定义8.2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

定理8.1. 对任一图G，有$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明. 先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从G中去掉与v关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中v为孤立顶点，所以$\lambda(G) \le \delta(G)$。因此，对任意的图G，$\lambda(G) \le \delta(G)$。

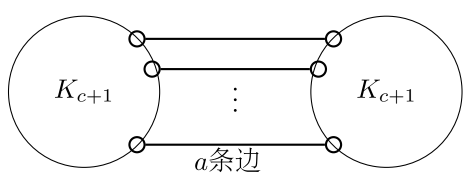
接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果G不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，$\kappa(G) \le \lambda(G)$。 □

定理8.2. 对任何整数a, b, c，　$0 < a \le b \le c$，　存在一个图G使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

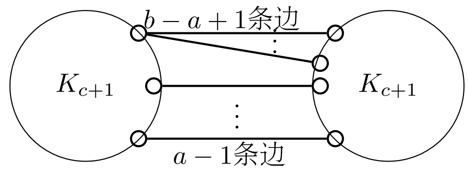
证明. 如果$a = b = c$，则图$G = K_{a+1}$就是所要求的图。

如果$a = b < c$，则所要求的图解如下图所示:



如果$a < b = c$，则$G = 2K_{b-a+1} + K_a$就是所要求的图。其中G的图解是这样画出的：把完全图K_{b-a+1}的图解在平面上画两次，再画出K_a的图解，然后在K_a的每个顶点与每个K_{b-a+1}的每个顶点间连一条边。

如果$a < b < c$，则所要求的图解如下图所示：



□

定理8.3. 设$G = (V, E)$有p个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明. $\lambda(G) \leq \delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G) \geq \delta(G)$。

因为$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，　则$\lambda(G) = \delta(G) = 0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G) > 0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V \setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。

由$|A| + |V \setminus A| = p$知必有$|A| \leq [\frac{p}{2}]$或者$|V \setminus A| \leq [\frac{p}{2}]$。不妨设$|A| \leq [\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u \leq |A| - 1 \leq [\frac{p}{2}] - 1 < \delta(G)$，矛盾。设$v$为$A$中的任一顶点，$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v = x + y$。$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1 \subseteq F$；$v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，则$F_2 \subseteq F$ 并且$F_1 \cap F_2 = \phi$，从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| = x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

□

定义8.3. 设G为一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G为**n-顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G为**n-边连通**的。

定理8.4. 设$G = (V, E)$为有p个顶点的图，$p \geq 3$，则G为*2*-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在G的同一个圈上。

定义8.4. 设u与v为图G中的两个不同的顶点。两条联结u与v的路，如果除了u与v外没有公共顶点，则称这两条路为联结u与v的**不相交路**；如果联结u与v的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结u与v的**边不相交路**。

定理8.5. 分离图G的两个不邻接的顶点s和t的顶点最少数目等于联结s和t的不相交路的最多数目。

证明. 设s和t为图G的任意两个不邻接的顶点，分离顶点s和t的顶点最少数目记为$k(s, t)$，联结s和t的不相交路的最多数目记为$p(s, t)$, 显然$k(s, t) \geq p(s, t)$，否则，去掉$k(s, t)$个顶点，顶点s和顶点t之间至少还存在$p(s, t) - k(s, t)$条路，这与去掉$k(s, t)$个顶点之后可以分离顶点s和t矛盾。

以下用数学归纳法证明$k(s, t) \leq p(s, t)$，施归纳于图G的边数q。

不妨设存在边$e = uv$，e不与顶点s关联，也不与顶点t关联。否则，从顶点s到顶点t的路长度都为2，结论显然成立。

设$H = G - e$。因为H为G的子图，所以$p_G(s,t) \geq p_H(s,t)$。由归纳假设，$k_H(s,t) = p_H(s,t)$。由图H的任意分离顶点s和t的顶点割集与边e的任意一个顶点一起构成了图G中分离顶点s和顶点t的顶点割集知$k_H(s,t)+1 \geq k_G(s,t)$。因此，

$$p_G(s,t) \geq p_H(s,t) = k_H(s,t) \geq K_G(s,t) - 1$$

如果$p_G(s,t) > K_G(s,t) - 1$，即$p_G(s,t) \geq k_G(s,t)$，则结论得证。以下假设$p_G(s,t) = K_G(s,t) - 1$，从而$k_H(s,t) = k_G(s,t) - 1$。

以下将$k_G(s,t)$减记为k。设$S := \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\}$为$H$的分离顶点$s$和$t$的最小的顶点割集，$X$为$H - S$中从顶点$x$可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合，$Y$为$H - S$中从顶点$y$可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合。因为$|S| = k-1$，集合$S$不是图$G$中分离顶点$s$和顶点$t$的顶点割集，因此在$G-S$中有一条从顶点$s$到顶点$t$的路。显然这条路中包含边$e = uv$。不失一般性，设$u \in X$，$v \in Y$。

设将X中的顶点收缩至顶点s所得到的图为G/X。G/X中分离顶点s和顶点t的顶点割集T也为G中分离顶点s和顶点t的顶点割集，这是因为如果P为G中从顶点s到顶点t的路，并且P中不包含T中的顶点，那么G/X的子图P/X为G/X的一条不包含T中顶点的路。因此$k_{G/X}(s,t) \geq k_G(s,t)$。另一方面，$k_{G/X}(s,t) \leq k_G(s,t)$，这是因为$S \cup \{v\}$为$G/X$的一个顶点割集。因此，$S \cup \{u\}$为$G/X$的一个分离顶点$s$和$t$的最小顶点割集。由归纳假设，在$G/X$中有$k$条互不相交的从顶点$s$到顶点$t$的路$P_1, P_2, \cdots, P_k$。$S \cup \{v\}$中的每个顶点恰好位于$P_1, P_2, \cdots, P_k$中的一条路上，不失一般性，假设$v_i$位于$P_i$之上（$1 \leq i \leq k-1$），$v \in P_k$。设将$Y$中的顶点收缩至顶点$t$所得到的图为$G/Y$。同理，在$G/Y$中有$k$条互不相交的从顶点$s$到顶点$t$的路$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$。$S \cup \{u\}$中的每个顶点恰好位于$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$中的一条路上，不失一般性，假设$v_i$位于$Q_i$之上（$1 \leq i \leq k-1$），$u \in Q_k$。因此，在$G$中存在$k$条联结顶点$s$与$t$的不相交路$sP_iv_iQ_it$，$1 \leq i \leq k-1$，$sP_kuvQ_kt$，与前述假设假设$p_G(s,t) = K - 1$矛盾。 □

定理8.6. 图G为$n-$连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有n条不相交路。

定理8.7. 分离图G的两个不同的顶点s和t的边的最少数目等于边不相交$s-t$路的最多数目。

定理8.8. 图G为$n-$边连通的当且仅当G的任一对不同的顶点间至少有n条边不相交路。

定义8.5. 设$G = (V, E)$为一个图，G的任意两条不邻接的边x与y称为**互相独立**的。G的边集E的子集Y称为G的一个**匹配**，如果Y中任意两条边都是互相独立的。

定义8.6. 设Y为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果$2|Y| = |V|$，则称Y为G的一个**完美匹配**。

定义8.7. 设Y为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果对于G的任一匹配Y'，恒有$|Y'| \leq |Y|$, 则称Y为G的一个**最大匹配**。

定义8.8. 设$G=(V,E)$为一个偶图且$V=V_1\cup V_2, \forall x\in E$，$x$为联结$V_1$的一个顶点与$V_2$的一个顶点的边。如果存在$G$的一个匹配$Y$使得$|Y|=min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称$Y$是偶图$G$的一个**完全匹配**。

定义8.9. 设M为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果一条路P上的边在M与$E\setminus M$中交错出现，则称路P为图G中的一条***M*-交错路**。进一步，如果P的两个端点都不与M中的边相关联，则称P为一条***M*-增广路**。

定理8.9. 设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

证法一. 设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$，则显然对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u\in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*-交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R=V_1\cap Z$，$B=V_2\cap Z$。显然$f=\{(x,y)\in R\setminus\{u\}\times B|\{x,y\}\in M^*\}$为从集合$R\setminus\{u\}$到$B$的双射，因此$|B|=|R|-1$。以下证明$N(R)=B$。显然$B\subseteq N(R)$。由$N(R)$中的每个顶点都在从$u$出发的一条$M^*$交错路上知$N(R)\subseteq B$。由$|B|=|R|-1$及$B=N(R)$知$|N(R)|=|R|-1$，与已知条件矛盾。 □

证法二. 设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$，则显然对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，以下用数学归纳法证明存在G的一个完全匹配Y使得$|Y|=|V_1|$，施归纳于$|V_1|$。

(1)当$|V_1|=1$时，设V_1中唯一的一个元素为u，由$|N(V_1)|\geq|V_1|$知$N(V_1)$中至少含有一个元素v，则$\{\{u,v\}\}$构成了G的一个满足条件的完全匹配。

(2)假设当$|V_1|<k$时结论成立，往证当$|V_1|=k$时结论也成立。设$|V_1|=k$，分以下两种情况讨论:

（i）对V_1的任意真子集A，$|N(A)|>|A|+1$。取V_1中的任意一个元素u，由于$|N(\{u\})|\geq1$， 可取$N(\{u\})$中的一个元素v使得$uv\in E$。 考虑偶图$G-\{u,v\}$，对任意的$V_1\setminus\{u\}$的子集B， $|N(B)|\geq|B|$。由归纳假设，偶图$G-\{u,v\}$ 有一个完全匹配Y'且$|Y'|=|V_1\setminus\{u\}|$。$Y'\cup\{\{u,v\}\}$即为G的一个完全匹配，且$|Y'\cup\{\{u,v\}\}|=|V_1|$。

（ii）存在V_1的真子集A，$|N(A)|=|A|$。

考虑图G中由$A\cup N(A)$导出的子图G_1以及由$(V_1\setminus A)\cup(N(V_1\setminus A)\setminus N(A))$导出的子图$G_2$。 G_1为偶图，且在G_1中对A的任意子集B，$|N(B)|\geq|B|$。G_2为偶图，且在G_2中对集合$V_1\setminus A$的任意子集C， $|N(C)|\geq|C|$， 这是因为如果$|N(C)|<|C|$, 则在G中$|N(C\cup A)|<|C\cup A|$， 与前提条件矛盾。由归纳假设，G_1有完全匹配M_1，$|M_1|=|A|$，G_2有完全匹配M_2，$|M_2|=|V_1\setminus A|$。于是$M_1\cup M_2$构成了G的完全匹配，且$|M_1\cup M_2|=|V_1|$。 □

定义8.10. 设X为一个有穷集合，$A_1, A_2, \ldots, A_n$为X的子集的一个序列，由X的互不相同的元素构成的集合$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$称为系统

$$T : A_1, A_2, \ldots, A_n$$

的**相异代表系**，如果$s_i \in A_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$。

定理8.10. 设X为一个有限集，系统$T : A_1, A_2, \cdots, A_n$为$X$的一些子集组成的，则$T$有相异代表系的充分必要条件是$\forall I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$有

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

第 九 章