

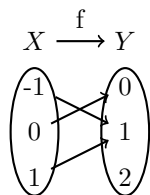
第二章映射

陈建文

March 16, 2023

定义1. 设 X 和 Y 为两个集合。一个从 X 到 Y 的**映射** f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

例. 设集合 $X = \{-1, 0, 1\}$ ，集合 $Y = \{0, 1, 2\}$ ， $\forall x \in X, f(x) = x^2$ ，即 $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ ，则 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射。



定义2. 设 X 和 Y 为两个集合。一个从 X 到 Y 的**映射**为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 f ：

1. 对 X 的每一个元素 x ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f, (x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

例. 设集合 $X = \{-1, 0, 1\}$ ，集合 $Y = \{0, 1, 2\}$ ， $f \subseteq X \times Y$ ， $f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ ，则 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射。

定义2.1和定义2.2是等价的。

练习1. 设 $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, f \subseteq X \times Y$ ，则下列为映射的是 (D)

- A. $f = \{(0, 3), (1, 4)\}$
- B. $f = \{(0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 5)\}$
- C. $f = \{(0, 3), (0, 4)\}$
- D. $f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3)\}$

映射定义的符号化表示：

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f \subseteq X \times Y$$

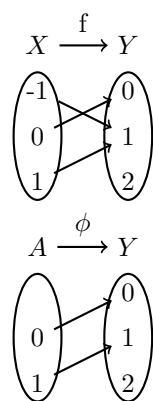
$$1) \forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$$

即: $\forall x x \in X \rightarrow \exists y y \in Y \wedge (x, y) \in f$
 2) $\forall x \in X \forall y \in Y \forall y' \in Y ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y')$
 即: $\forall x x \in X \rightarrow (\forall y y \in Y \rightarrow \forall y' y' \in Y \rightarrow ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y'))$

定义3. 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射, $f: X \rightarrow Y$, 如果 $y = f(x)$, 则称 y 为 x 在 f 下的象, 称 x 为 y 的原象。 X 称为 f 的定义域; 集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 f 的值域, 记为 $Im(f)$ 。

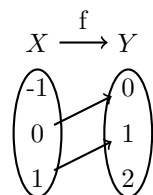
$P(x): x$ 为偶数
 $P: Z \rightarrow \{T, F\}$
 $P \subseteq Z \times \{T, F\}$
 $P = \{\dots, (-2, T), (-1, F), (0, T), (1, F), (2, T), \dots\}$

定义4. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的限制, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的扩张。



定义5. 设 $f: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则称 f 为 X 上的一个部分映射。

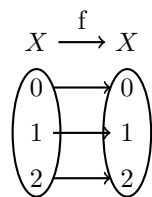
一个部分映射的例子:



定义6. 两个映射 f 与 g 称为是相等的当且仅当 f 和 g 都为从 X 到 Y 的映射, 并且 $\forall x \in X$ 总有 $f(x) = g(x)$ 。

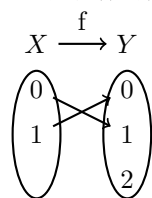
定义7. 设 $f: X \rightarrow X$, 如果 $\forall x \in X, f(x) = x$, 则称 f 为 X 上的恒等映射。 X 上的恒等映射常记为 I_X 。

一个恒等映射的例子:



定义8. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**。

一个单射的例子:



单射的符号化表示:

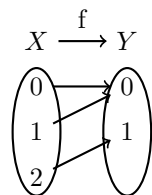
$$f: X \rightarrow Y$$

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{即: } \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

定义9. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**。

一个满射的例子:



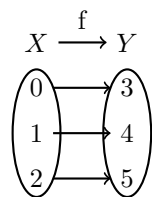
满射的符号化表示:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$$

定义10. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 X 到 Y 的**双射**, 或者称 f 为从 X 到 Y 的**一一对应**。这时也称 X 与 Y **对等**, 记为 $X \sim Y$ 。

一个双射的例子:



定义11. 从集合 X 到集合 Y 的所有映射之集记为 Y^X , 即 $\{f|f: X \rightarrow Y\}$ 。

$$\{2, 3\}^{\{0,1\}} = \{\{(0, 2), (1, 2)\}, \{(0, 3), (1, 3)\}, \{(0, 2), (1, 3)\}, \{(0, 3), (1, 2)\}\}$$

定理1 (抽屉原理). 如果把 $n+1$ 个物体放到 n 个盒子里, 则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例. 从 $1, 2, \dots, 2n$ 中任意选出 $n+1$ 个数, 则这 $n+1$ 个数中必有两个数, 使得其中之一能除尽另一个。

证明. 每个整数均可写成 $2^l \cdot d$ 的形式, 其中 l 为非负整数, d 为奇数。因此, 当把选出的 $n+1$ 个整数都写成这种形式时, 便得到了 $n+1$ 个奇数 d_1, d_2, \dots, d_{n+1} , 并且 $1 \leq d_i \leq 2n-1, i = 1, 2, \dots, n+1$ 。但1到 $2n$ 之间仅有 n 个奇数, 由抽屉原理可知, 必有 i, j 使得 $d_i = d_j, i \neq j$ 。于是, d_i 与 d_j 对应的两个整数 $2^{l_i} \cdot d_i$ 与 $2^{l_j} \cdot d_j$ 中必有一个可以整除另外一个。□

例. 任何6个人中, 或有3个人互相认识, 或有3个人互相不认识。

定理2 (抽屉原理的强形式). 设 q_1, q_2, \dots, q_n 为 n 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 n 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体, ..., 或者第 n 个盒子中至少含有 q_n 个物体。

推论1. 如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 n 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 r 个物体。

推论2. 如果 n 个正整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均值

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1,$$

则 m_1, m_2, \dots, m_n 中至少有一个正整数不小于 r 。

例. $n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n+1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

对照以下的例子可以帮助我们理解证明过程。

$$\begin{array}{cccccccccc} 5 & 9 & 10 & 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

证明. 从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是, 我们得到了一个 $n^2 + 1$ 项的数列

$$h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1} \quad (1)$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长(项数)至少为 $n+1$ 的不减子序列, 或者有一个长至少为 $n+1$ 的不增子序列。

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 n , 每个不增子序列的长度也至多为 n 。令 m_i 为以 h_i 为首项的(1)的最长不减子序列的长度, $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$, 其中每个数 m_i 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 n 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 m_i 放

到第 k 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n+1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n+1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 h_{i_2} 为首项的最长不减子序列的长为 m_{i_2} ，所以前面加一项 h_{i_1} ，就得到了一个以 h_{i_1} 为首项长度大于 m_{i_1} 的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为 $n+1$ 的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。 \square

练习2. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数且 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。 φ 为从 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 到 A 的一一对应。试证：如果 $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ ，则 $\varphi = I_A$ 。

证明。设 $\varphi(a_1) \neq a_1$ ，则由 φ 为双射知存在 $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是，对任意的正整数 $i < j$ ， $a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ ，由 $a_i \geq a_1$ 知 $\varphi(a_i) < a_j$ ，从而 $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是，对任意的 $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ ，由鸽笼原理，必存在 $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ ，这与 φ 为双射矛盾。类似可证， $\varphi(a_2) = a_2, \dots, \varphi(a_n) = a_n$ ，即 $\varphi = I_A$ 。 \square

练习3. 在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答。用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆 C 内。此时必存在10个圆环 R_1, R_2, \dots, R_{10} 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 S_1 将小于圆 C 之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 R_1, R_2, \dots, R_{10} 的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住 R_1, R_2, \dots, R_{10} 的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，结论得证。 \square

定义12. 设 $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X$ ， A 在 f 下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例。设 $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = x^2$ ，则 $f(\{-1, 0\}) = \{0, 1\}$

定义13. 设 $f: X \rightarrow Y, B \subseteq Y$ ， B 在 f 下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例。设 $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = x^2$ ，则 $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{-1, 1\}$

定理3. 设 $f: X \rightarrow Y, C \subseteq Y, D \subseteq Y$ ，则

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
3. $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
4. $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$
5. $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$

定理4. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, 则

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$
4. $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

定义14. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为映射, 映射 f 与 g 的**合成** $g \circ f: X \rightarrow Z$ 定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

定理5. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ 为映射, 则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

定理6. 设 $f: X \rightarrow Y$, 则 $f = f \circ I_X = I_Y \circ f$ 。

定义15. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为双射, f 的**逆映射** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 定义为: 对任意的 $y \in Y$, 存在唯一的 x 使得 $f(x) = y$, 则 $f^{-1}(y) = x$ 。

定义16. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个双射, 则 $g: Y \rightarrow X$, $g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ 称为 f 的**逆映射**, 记为 $g = f^{-1}$ 。

例. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ 为从 X 到 Y 的双射, 则 $f^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$ 。

定义17. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 f 为**可逆的**, 而 g 称为 f 的**逆映射**。

例. 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ 为从 X 到 Y 的双射, $g = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$, 由于 $f \circ g = I_Y$ 且 $g \circ f = I_X$, $f^{-1} = g$ 。

定理7. 定义16和定义17是等价的。

证明. 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射, g 为从集合 Y 到集合 X 的映射。

以下先假设 g 满足定义16, 往证 g 满足定义17。

假设 f 为从集合 X 到集合 Y 的双射, g 为从集合 Y 到集合 X 的映射, $g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$, 则 $(y, x) \in g$ 等价于 $(x, y) \in f$, 即 $x = g(y)$ 等价于 $y = f(x)$, 易验证 $f \circ g = I_Y$ 且 $g \circ f = I_X$ 。

接下来, 假设 g 满足定义17, 往证 g 满足定义16。

假设 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射, 存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ g = I_Y$ 且 $g \circ f = I_X$, 往证 f 为双射, 且 $g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ 。

对任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X$, 如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 再由 $g \circ f = I_X$ 知 $x_1 = x_2$, 从而 f 为单射。对任意的 $y \in Y$, 由 $f \circ g = I_Y$ 知 $f(g(y)) = y$, 从而 f 为满射。这证明了 f 为双射。

以下证明 $g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$, 这就是要证 $(y, x) \in g$ 等价于 $(x, y) \in f$, 即要证 $x = g(y)$ 等价于 $y = f(x)$ 。如果 $x = g(y)$, 则 $f(x) = f(g(y))$, 由 $f \circ g = I_Y$ 知 $y = f(x)$; 如果 $y = f(x)$, 则 $g(y) = g(f(x))$, 由 $g \circ f = I_X$ 知 $x = g(y)$ 。□

定理8. 设 $f : X \rightarrow Y$ 为可逆映射, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

定理9. 设 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ 都为可逆映射, 则 $g \circ f$ 也为可逆映射并且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

定义18. 设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射, 如果存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = I_X$, 则称 f 为左可逆的, g 称为 f 的左逆映射; 如果存在一个映射 $h : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ h = I_Y$, 则称 f 为右可逆的, h 称为 f 的右逆映射。

定理10. 设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射, 则

1. f 左可逆当且仅当 f 为单射;
2. f 右可逆当且仅当 f 为满射。

证明. 先证(1)。

设 f 为左可逆的, 则存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = I_X$ 。对任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X$, 如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 再由 $g \circ f = I_X$ 知 $x_1 = x_2$, 从而 f 为单射。

设 f 为单射, 则 f 为从集合 X 到 $Im(f)$ 的双射。于是, 存在 $g : Im(f) \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = I_X$ 。扩充 g 到 Y 上: 对任意的 $y \in Y$, 若 $y \in Im(f)$, 则 $g(y)$ 不变, 而当 $y \in Y \setminus Im(f)$ 时, 规定 $g(y)$ 为 X 中任意一个固定的元素 x_0 , 则 g 为从集合 Y 到集合 X 的映射, 且 $g \circ f = I_X$ 。所以, f 为左可逆的。

再证(2)。

设 f 为右可逆的, 则存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $f \circ g = I_Y$ 。对任意的 $y \in Y$, 由 $f \circ g = I_Y$ 知 $f(g(y)) = y$, 从而 f 为满射。

设 f 为满射, 则对任意的 $y \in Y, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ 。令 $g : Y \rightarrow X$, 其定义为, 对任意的 $y \in Y, g(y) = x$, 其中 x 为 $f^{-1}(\{y\})$ 中一个特定元素。于是, 对任意的 $y \in Y$, 设 $g(y) = x$, 则 $f(x) = y$, 从而 $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$ 。所以 $f \circ g = I_Y$, 即 f 为右可逆的。□

定义19. 有穷集合 S 到自身的一一对应称为 S 上的一个置换。如果 $|S| = n$, 则 S 上的置换就说成是 n 次置换。

设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma : S \rightarrow S$ 为 S 上的一个置换, $\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \dots, \sigma(n) = k_n$, 我们用如下的一个表来表示置换 σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

S 上所有的 n 次置换构成的集合记为 S_n 。

例. 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\sigma : S \rightarrow S$, $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$, 则 σ 可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里, 列的次序无关紧要, 例如, σ 还可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

定义20. 设 α 与 β 为集合 S 上的两个置换, 则 α 与 β 为两个从 S 到 S 的双射, 讨论置换时, 我们用 $\alpha\beta$ 表示 α 与 β 的合成 $\beta \circ \alpha$ 。注意这里 α 与 β 的次序, 从运算的角度看有一定的便利性, 但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法, 讨论置换时, 如果 $i \in S$, 则用 $(i)\alpha$ 表示 i 在 α 下的像, 简记为 $i\alpha$ 。

例. 设 $S = \{1, 2, 3\}$, α 和 β 为 S 上的两个置换,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

, 则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

若 α 与 β 为两个 n 次置换, 当把 β 的表示式中的上一行按 α 的下一行的顺序写出时, 则 $\alpha\beta$ 的下一行就是 β 的新表示式中的下一行。

例. 设 $S = \{1, 2, 3\}$, α 和 β 为 S 上的两个置换,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

, 则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

定义21. 设 σ 为 S 上的一个 n 次置换, 若 $i_1\sigma = i_2, i_2\sigma = i_3, \dots, i_{k-1}\sigma = i_k, i_k\sigma = i_1$, 而 $\forall i \in S \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i\sigma = i$, 则称 σ 为一个 k 循环置换, 记为 $(i_1 i_2 \dots i_k)$ 。2-循环置换称为对换。

例. 设 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, (23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

定理11. 每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1-循环置换, 这个分解是唯一的。

定理12. 当 $n \geq 2$ 时, 每个 n 次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

定理13. 如果把置换分解成若干个对换的乘积, 则对换个数的奇偶性是不变的。

证明. 设 σ 为一个 n 次置换。 σ 的符号 $sign(\sigma)$ 定义为 $(-1)^{|\{(x,y)|x < y \wedge (x)\sigma^{-1} > (y)\sigma^{-1}\}|}$ 。

设 $\alpha = \beta(i, j)$, 则 $sign(\alpha) = -sign(\beta)$ 。

于是, 如果置换 σ 可以分解为 m 个对换的乘积 $\sigma = I(i_1 k_1)(i_2 k_2) \cdots (i_m k_m)$, 其中 I 为恒等置换, 由 $sign(I) = 1$ 知 $sign(\sigma) = (-1)^m$ 。而 $sign(\sigma)$ 只能为1和-1两者之一, 因此如果 σ 能分解成偶数个对换的乘积, 则只能分解成偶数个对换的乘积; 如果 σ 能分解成奇数个对换的乘积, 则只能分解成奇数个对换的乘积。 \square

定义22. 能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为偶置换; 能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为奇置换。

定理14. 当 $n \geq 2$ 时, n 次奇置换的个数与 n 次偶置换的个数相等, 都等于 $\frac{n!}{2}$ 。

证明. 设 A 为所有的 n 次奇置换所构成的集合, B 为所有的 n 次偶置换所构成的集合, 则 $S_n = A \cup B$ 且 $A \cap B = \phi$ 。所以, $|S_n| = |A| + |B| = n!$ 。

以下证明 $|A| = |B|$ 。构造映射 $f: A \rightarrow B$, 对任意的 $\sigma \in A$, $f(\sigma) = \sigma(12)$ 。易验证 f 为单射, 这是因为对任意的 $\sigma_1 \in A$, $\sigma_2 \in A$, 如果 $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$, 则 $\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$, 从而 $\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$, 即 $\sigma_1 = \sigma_2$ 。同时, 易验证 f 为满射, 这是因为对任意的 $\tau \in B$, $f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$ 。从而 f 为双射, 这证明了 $|A| = |B|$ 。再由 $|A| + |B| = n!$ 知, $|A| = |B| = \frac{n!}{2}$ 。 \square

定义23. 一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

我们熟知的实数集 \mathbb{R} , 与其上的加法运算“+”和乘法运算“*”一起构成了一个代数系, 满足如下性质:

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$

$$7. 1 * x = x * 1 = x$$

$$8. x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$$

$$9. x * (y + z) = x * y + x * z$$

$$10. (y + z) * x = y * x + z * x$$

定义24. 设 X, Y, Z 为任意三个非空集合。一个从 $X \times Y$ 到 Z 的映射 ϕ 称为 X 与 Y 到 Z 的一个二元(代数)运算。当 $X = Y = Z$ 时, 则称 ϕ 为 X 上的二元(代数)运算。

定义25. 从集合 X 到 Y 的任一映射称为从 X 到 Y 的一元(代数)运算。如果 $X = Y$, 则从 X 到 X 的映射称为 X 上的一元(代数)运算。

定义26. 设 A_1, A_2, \dots, A_n, D 为非空集合。一个从 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 D 的映射 ϕ 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 到 D 的一个 n 元(代数)运算。如果 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = D = A$, 则称 ϕ 为 A 上的 n 元代数运算。

定义27. 设“ \circ ”为集合 X 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b \in X$, 恒有 $a \circ b = b \circ a$, 则称二元代数运算“ \circ ”满足交换律。

定义28. 设“ \circ ”为集合 X 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, 则称二元代数运算“ \circ ”满足结合律。

定义29. 设“ $+$ ”与“ \circ ”为集合 X 上的两个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“ \circ ”对“ $+$ ”满足左分配律。如果 $\forall a, b, c \in X$, 恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“ \circ ”对“ $+$ ”满足右分配律。

定义30. 设 (X, \circ) 为一个代数系。如果存在一个元素 $e \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 恒有 $e \circ x = x \circ e = x$, 则称 e 为“ \circ ”的单位元素。

定义31. 设 (X, \circ) 为一个代数系, “ \circ ”有单位元素 e , $a \in X$, 如果 $\exists b \in X$ 使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称 b 为 a 的逆元素。

定义32. 设 $(S, +)$ 与 (T, \oplus) 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$, 使得 $\forall x, y \in S$, 有

$$\phi(x + y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系 $(S, +)$ 与 (T, \oplus) 同构, 并记为 $S \cong T$, ϕ 称为这两个代数系之间的一个同构。

定义33. 设 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$, 使得 $\forall x, y \in S$, 有

$$\begin{aligned}\phi(x + y) &= \phi(x) \oplus \phi(y), \\ \phi(x \circ y) &= \phi(x) * \phi(y),\end{aligned}$$

则称代数系 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ 同构, 并记为 $S \cong T$, ϕ 称为这两个代数系之间的一个同构。

p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T		
F	F	F	F	F	F		

x	y	$x \wedge y$	x	y	$x \vee y$	x	\bar{x}
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1		
0	0	0	0	0	0		

代数系 $(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg)$ 与 $(\{1, 0\}, \wedge, \vee, \neg)$ 是同构的。

定义34. 设 X 为一个集合, $E \subseteq X$ 。 E 的特征函数 $\chi_E: X \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in E, \\ 0 & \text{如果 } x \notin E. \end{cases}$$

定义35. 令 $Ch(X) = \{\chi | \chi: X \rightarrow \{0, 1\}\}$ 。 $\forall \chi, \chi' \in Ch(X)$ 及 $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\chi \vee \chi')(x) &= \chi(x) \vee \chi'(x) \\ (\chi \wedge \chi')(x) &= \chi(x) \wedge \chi'(x) \\ \bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{3}$$

定理15. 设 X 为一个集合, 则代数系 $(2^X, \cup, \cap, ^c)$ 与 $(Ch(X), \vee, \wedge, \neg)$ 同构。

$X = \{1, 2, 3\}$		
$2^X = \{$		
$\phi,$	$\chi_1 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_1(1) = 0, \chi_1(2) = 0, \chi_1(3) = 0$
$\{1\},$	$\chi_2 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_2(1) = 1, \chi_2(2) = 0, \chi_2(3) = 0$
$\{2\},$	$\chi_3 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_3(1) = 0, \chi_3(2) = 1, \chi_3(3) = 0$
$\{3\},$	$\chi_4 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_4(1) = 0, \chi_4(2) = 0, \chi_4(3) = 1$
$\{1, 2\},$	$\chi_5 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_5(1) = 1, \chi_5(2) = 1, \chi_5(3) = 0$
$\{2, 3\},$	$\chi_6 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_6(1) = 0, \chi_6(2) = 1, \chi_6(3) = 1$
$\{1, 3\},$	$\chi_7 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_7(1) = 1, \chi_7(2) = 0, \chi_7(3) = 1$
$\{1, 2, 3\}$	$\chi_8 : X \rightarrow \{0, 1\}$	$\chi_8(1) = 1, \chi_8(2) = 1, \chi_8(3) = 1$
$\}$		

练习4. 设 $f : X \rightarrow Y$ 。试证: f 为满射当且仅当对任意的 $E \in 2^Y$, $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

证明. 设 f 为满射, 对任意的 $E \in 2^Y$ 往证 $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

对任意的 $y, y \in f(f^{-1}(E))$, 则存在 $x, x \in f^{-1}(E)$ 并且 $y = f(x)$, 于是存在 $x, f(x) \in E$ 并且 $y = f(x)$, 从而 $y \in E$ 。

对任意的 $y, y \in E$, 由 f 为满射知存在 $x \in X, y = f(x)$, 从而 $f(x) \in E$, 即 $x \in f^{-1}(E)$, 由 $y = f(x)$ 知 $y \in f(f^{-1}(E))$ 。

设对任意的 $E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$, 往证 f 为满射。

对任意的 $y \in Y$, 则 $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$, 于是 $f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$, 从而存在 $x \in X, x \in f^{-1}(\{y\})$, 即 $f(x) \in \{y\}$, 等价的, $f(x) = y$, 故 f 为满射。□

练习5. 设 $f : X \rightarrow Y$ 。试证: f 为单射当且仅当对任意的 $F \in 2^Y, f^{-1}(f(F)) = F$ 。

证明. 设 f 为单射, 对任意的 $F \in 2^Y$, 往证 $f^{-1}(f(F)) = F$ 。

对任意的 $x, x \in f^{-1}(f(F))$, 则 $f(x) \in f(F)$, 于是存在 $x' \in F, f(x) = f(x')$, 由 f 为单射知 $x = x'$, 从而 $x \in F$ 。

对任意的 $x, x \in F$, 则 $f(x) \in f(F)$, 从而 $x \in f^{-1}(f(F))$ 。

设对任意的 $F \in 2^Y, f^{-1}(f(F)) = F$, 以下证明 f 为单射。

对任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X$, 如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(\{x_1\}) = f(\{x_2\})$, 于是 $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\}))$, 从而 $\{x_1\} = \{x_2\}$, 于是 $x_1 = x_2$ 。

□

练习6. 试证：每个 n 次置换均可被分解成这样的一些置换的乘积：每个置换或为 (12) ，或为 $(23 \cdots n)$ 。

证明.

$$(23 \cdots n)^{-1}(12)(23 \cdots n) = (13)$$

$$(23 \cdots n)^{-1}(13)(23 \cdots n) = (14)$$

...

$$(23 \cdots n)^{-1}(1n-1)(23 \cdots n) = (1n)$$

每个置换均可被分解成 (12) ， (13) ， \dots ， $(1n)$ 的乘积，故结论成立。 \square

练习7. 任一偶置换均可被分解成 \mathcal{S} -循环置换 (123) ， (124) ， \dots ， $12n$ 中若干个之乘积。

证明.

$$(12i)(12j) = (2i)(1j)$$

$$(12s)(12t) = (2s)(1t)$$

$$(12i)(12j)(12s)(12t)(12i)(12j) = (2i)(1j)(2s)(1t)(2i)(1j) = (2i)(2s)(2i)(1j)(1t)(1j) = (is)(jt)$$

\square