离散数学讲义

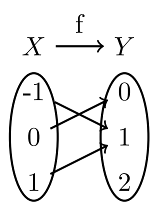
陈建文

March 3, 2022

第 二 章　映射

定义2.1. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的**映射**f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$\forall x \in X, f(x) = x^2$，即$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。



定义2.2. 设X和Y为两个集合。一个从X到Y的**映射**为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；

2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

例. 设集合$X = \{-1, 0, 1\}$，集合$Y = \{0, 1, 2\}$，$f \subseteq X \times Y$，$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$，则$f$为从集合$X$到集合$Y$的映射。

定义2.1和定义2.2是等价的。

练习2.1. 设$X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, f \subseteq X \times Y$，则下列为映射的是（$D$）
A. $f = \{(0, 3), (1, 4)\}$
B. $f = \{(0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 5)\}$
C. $f = \{(0, 3), (0, 4)\}$
D. $f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3)\}$

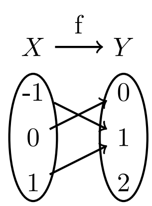
映射定义的符号化表示：
$f : X \to Y$
$f \subseteq X \times Y$

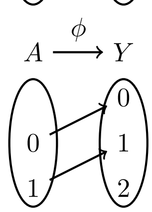
1) $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$
即：$\forall x x \in X \to \exists y y \in Y \wedge (x, y) \in f$
2) $\forall x \in X \forall y \in Y \forall y' \in Y ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y')$
即：$\forall x x \in X \to (\forall y y \in Y \to \forall y' y' \in Y \to ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y'))$

定义2.3. 设f为从集合X到集合Y的映射，$f : X \to Y$， 如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的**象**，称x为y的**原象**。X称为f的**定义域**；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的**值域**，记为$Im(f)$。

P(x):x为偶数
$P : Z \to \{T, F\}$
$P \subseteq Z \times \{T, F\}$
$P = \{\ldots, (-2, T), (-1, F), (0, T), (1, F), (2, T), \ldots\}$

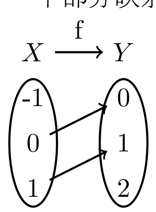
定义2.4. 设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi : A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。





定义2.5. 设$f : A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

一个部分映射的例子：

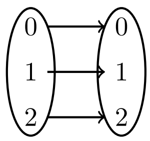


定义2.6. 两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

定义2.7. 设$f : X \to X$，如果$\forall x \in X, f(x) = x$，则称$f$为$X$上的恒等映射。$X$上的恒等映射常记为$I_X$。

一个恒等映射的例子：

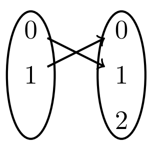
$X \xrightarrow{\text{f}} X$



定义2.8. 设$f : X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的**单射**。

一个单射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

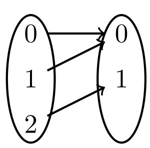


单射的符号化表示：
$f : X \to Y$
$\forall x1 \in X \forall x2 \in X x1 \neq x2 \to f(x1) \neq f(x2)$
即：$\forall x1 \in X \forall x2 \in X f(x1) = f(x2) \to x1 = x2$

定义2.9. 设$f : X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的**满射**。

一个满射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$

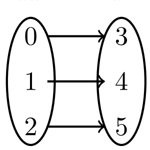


满射的符号化表示：
$f : X \to Y$
$\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$

定义2.10. 设$f : X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的**双射**，或者称f为从X到Y的一一对应。这时也称X与Y**对等**，记为$X \sim Y$。

一个双射的例子：

$X \xrightarrow{\text{f}} Y$



定义2.11. 从集合X到集合Y的所有映射之集记为Y^X，即$\{f|f:X\to Y\}$。

$$\{2,3\}^{\{0,1\}}=\{\{(0,2),(1,2)\},\{(0,3),(1,3)\},\{(0,2),(1,3)\},\{(0,3),(1,2)\}\}$$

定理2.1 (抽屉原理)**.** 如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例. 从$1,2,\ldots,2n$中任意选出$n+1$个数，则这$n+1$个数中必有两个数，使得其中之一能除尽另一个。

证明. 每个整数均可写成$2^l\cdot d$的形式，其中l为非负整数，d为奇数。因此，当把选出的$n+1$个整数都写成这种形式时，便得到了$n+1$个奇数$d_1,d_2,\cdots,d_{n+1}$，并且$1\le d_i\le 2n-1$，$i=1,2,\cdots,n+1$。但1到$2n$之间仅有n个奇数，由抽屉原理可知，必有i,j使得$d_i=d_j$，$i\neq j$。于是，d_i与d_j对应的两个整数$2^{l_i}\cdot d_i$与$2^{l_j}\cdot d_j$中必有一个可以整除另外一个。 □

例. 任何 6 个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。

定理2.2 (抽屉原理的强形式)**.** 设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1. 如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

推论2.2. 如果n个正整数$m_1,m_2,\ldots,m_n$的平均值

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}>r-1,$$

则$m_1,m_2,\ldots,m_n$中至少有一个正整数不小于r。

例. n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

对照以下的例子可以帮助我们理解证明过程。

5	9	10	4	7	2	8	3	6	1
3	2	1	3	2	3	1	2	1	1

证明. 从左到右依次用$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个n^2+1项的数列

$$h_1,h_2,\cdots,h_{n^2+1} \tag{2.1}$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长（项数）至少为$n+1$的不减子序列，或者有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

假设本题结论不成立，则数列(2.1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(2.1)的最长不减子序列的长度，$i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$，其中每个数m_i满足$1\le m_i\le n$。现在把这n^2+1个数放到n个盒子$1,2,\cdots,n$中，数m_i放

到第k个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2+1, k > n$。相应的，我们有(2.1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2.2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2.2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。 □

第 三 章