习题 1. 设A，B为有穷集合且$|A| = m, |B| = n$。

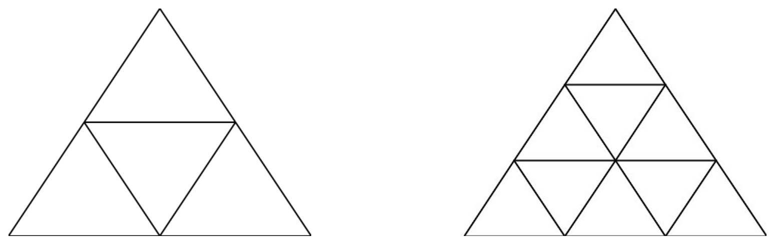
*a)*计算$|A^B| =$?

*b)*从A到A有多少个双射?

解. $|A^B| = m^n$。

从A到A有$m!$个双射。 □

习题 2. 求证：从一个边长为1的等边三角形中任意选5个点，那么这5个点中必有2个点，它们之间的距离至多为$\frac{1}{2}$。而任选10个点中必有2个点，其距离至多为$\frac{1}{3}$。



证明. (1)连接各边的中点，得到4个边长为1/2的小等边三角形。 任给5个点，由鸽笼原理可知必有一个小等边三角形里面至少有两个点，又因为小等边三角形中任意两个点之间的距离至多为1/2，因此5个点中必有2个点，它们之间的距离至多为1/2。

(2)连接各边的三等分点，则可得到9个边长都为1/3的小等边小角形，每个小等边三角形中任意两个点之间的距离至多为1/3。将10个点放入该大等边三角形中，则由鸽笼原理，必有一个小等边三角形中至少有2个点，因此任意10个点中必有2个点其距离至多为1/3。 □

习题 3. 求证：在52个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被100整除。

证明. 设$a_1, a_2, \cdots, a_{52}$为52个整数，令r_i为a_i被100除后所得的余数，即$a_i = 100q_i + r_i, 0 \le r_i \le 99, i = 1, 2, \cdots, 52$(相当于52个物体)。

任意一个整数被100除以后所得到的余数为$0, 1, 2, \cdots, 99$，把它们分成51个类，即$\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\}, \cdots, \{49, 51\}, \{50\}$（相当于51个盒子）。

把51个余数r_i，$i = 1, 2, \ldots, 52$，放入到51个类中，必有两个余数放在一个类里。

设在同一个类中的两个余数分别为r_i与$r_j (i \ne j)$，则有

（1）若$r_i \ne r_j$，则$r_i + r_j = 100$或0，即$a_i + a_j$能被100整除。

（2）若$r_i = r_j$，$r_i - r_j = 0$，即$a_i - a_j$能被100整除。 □

习题 4. 设$f : X \to Y$，$C \subseteq Y$，$D \subseteq Y$，证明：$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

证明. 先证$f^{-1}(C \setminus D) \subseteq f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

对任意的$x \in f^{-1}(C \setminus D)$，则$f(x) \in C \setminus D$，从而$f(x) \in C$并且$f(x) \notin D$，即$x \in f^{-1}(C)$并且$x \notin f^{-1}(D)$，因此$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$。

再证$f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \setminus D)$。

对任意的$x\in f^{-1}(C)\backslash f^{-1}(D))$，则$x\in f^{-1}(C)$并且$x\notin f^{-1}(D)$，从而$f(x)\in C$并且$f(x)\notin D$，即$f(x)\in C\setminus D$，因此$x\in f^{-1}(C\setminus D)$。 □

习题 5. 设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$。证明：$f(A\setminus B)\supseteq f(A)\setminus f(B)$。

证明. 对任意的$y\in f(A)\setminus f(B)$，则$y\in f(A)$并且$y\notin f(B)$，从而存在$x\in A$使得$y=f(x)$。这里必有$x\notin B$，否则，$y=f(x)\in f(B)$，矛盾。因此，存在$x\in A\setminus B$使得$y=f(x)$，即$y\in f(A\setminus B)$。 □

习题 6. 设$f:X\to Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确。请找出正确的哪一个。

（1）*(a)* 若$f(x)\in f(A)$，则x可能属于A，也可能不属于A;
*(b)*若$f(x)\in f(A)$，则$x\in A$;
*(c)*若$f(x)\in f(A)$，则$x\notin A$;
*(d)*若$f(x)\in f(A)$，则$x\in A^c$。
（2）*(a)* $f(f^{-1}(B))=B$;
(b) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$;
(c) $f(f^{-1}(B))\supseteq B$;
(d)$f(f^{-1}(B))=B^c$。
（3）*(a)*$f^{-1}(f(A))=A$;
(b) $f^{-1}(f(A))\subseteq A$;
(c)$f^{-1}(f(A))\supseteq A$;
*(d)*以上三个均不对。
（4）*(a)*$f(A)\neq\phi$;
(b)$f^{-1}(B)\neq\phi$;
*(c)*若$y\in Y$，则$f^{-1}(\{y\})\in X$;
*(d)*若$y\in Y$，则$f^{-1}(\{y\})\subseteq X$。

解. (1)a (2)b (3)c (4)d □

习题 7. 设$X=\{a,b,c\}$，$Y=\{0,1\}$，$Z=\{2,3\}$。$f:X\to Y$，$f(a)=f(b)=0$，$f(c)=1$；$g:Y\to Z$，$g(0)=2,g(1)=3$。试求$g\circ f$。

解. $g\circ f:X\to Z,g\circ f(a)=2,g\circ f(b)=2,g\circ f(c)=3$。 □

习题 8. 设$N=\{1,2,\cdots\}$，试构造两个从集合N到集合N的映射f与g，使得$fg=I_N$，但$gf\neq I_N$。

解. 令$f:N\to N$，

$$f(n)=\begin{cases}1 & \text{当}n=1\text{时}\\ n-1 & \text{当}n>1\text{时}\end{cases}$$

$g:N\to N$，对任意的$n\in N$，$g(n)=n+1$，则$fg=I_N$，但$gf\neq I_N$。 □

习题 9. 设$f:X\to Y$。

（1）如果存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$gf=I_X$，那么f是否可逆呢?

（2）如果存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，使得$fg=I_Y$，那么f是否可逆呢?

解. (1)当$|X|=1$时，f不一定可逆，举例如下：

设集合$X=\{1\}$，$Y=\{1,2\}$，$f:X\to Y$，$f(1)=1$。则存在唯一的一个映射$g:Y\to X$，$g(1)=1, g(2)=1$,使得$gf=I_X$，但f不可逆。

当$|X|>1$时，f一定可逆，证明如下：

由$gf=I_X$知f为单射，以下证明f为满射。用反证法，假设f不为满射，则存在$y_0\in Y$，对任意的$x\in X$，$f(x)\neq y_0$。 由于$|X|>1$，可取$x_0\in X$，使得$g(y_0)\neq x_0$。

令$h:Y\to X$，

$$h(y)=\begin{cases} g(y) & \text{如果} y\neq y_0, \\ x_0 & \text{如果} y=y_0 \end{cases}$$

则$hf=I_X$，且$h\neq g$，与存在唯一的一个映射$g:Y\to X$使得$gf=I_X$矛盾。

(2)f一定可逆，证明如下：

由$fg=I_Y$知f为满射，以下证明f为单射。用反证法，假设f不为单射，则存在$x_1\in X$，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$但$f(x_1)=f(x_2)$。

设$y_0=f(x_1)=f(x_2)$， 令$h:Y\to X$，

$$h(y)=\begin{cases} g(y) & \text{如果} y\neq y_0, \\ x_1 & \text{如果} y=y_0 \text{且} g(y_0)\neq x_1 \\ x_2 & \text{如果} y=y_0 \text{且} g(y_0)=x_1 \end{cases}$$

则$fh=I_Y$，且$h\neq g$，与存在唯一的一个映射$g:Y\to X$使得$fg=I_Y$矛盾。 □

习题 10. 设$f:X\to Y$，X与Y为有穷集合，

（1）如果f是左可逆的，那么f有多少个左逆映射?

（2）如果f是右可逆的，那么f有多少个右逆映射?

解. (1) $|X|^{|Y|-|X|}$

(2) $\prod_{y\in Y}|f^{-1}(\{y\})|$ □

习题 11. 是否有一个从X到X的一一对应f，使得$f=f^{-1}$，但$f\neq I_X$?

解. 存在。设集合$X=\{1,2\}$，$f:X\to X$，$f(1)=2$，$f(2)=1$，则$f=f^{-1}$，但$f\neq I_X$。 □

习题 12. 设$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$。求$\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_2\sigma_1$，$\sigma_1^{-1}$，$\sigma_2^{-1}$。

解.

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

□

习题 13. 将置换$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$分解成对换的乘积。

解.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\ =&(173)(29846) \\ =&(17)(13)(29)(28)(24)(26) \end{aligned}$$

□