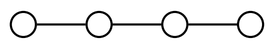
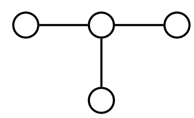
第七章作业题

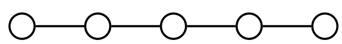
习题. 分别画出具有4个，5个，6个，7个顶点的所有树（同构的只算一个）。

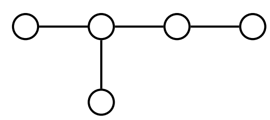
解. 具有4个顶点的所有互不同构的树:

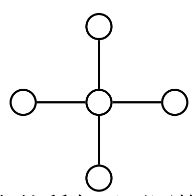




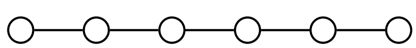
具有5个顶点的所有互不同构的树:

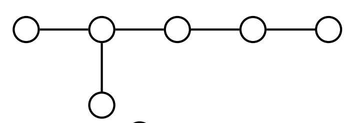


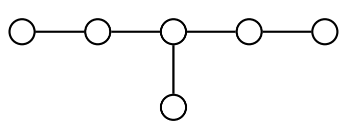


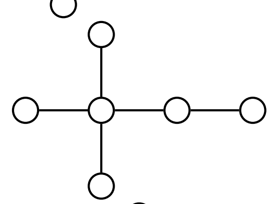


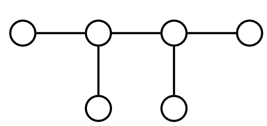
具有6个顶点的所有互不同构的树:

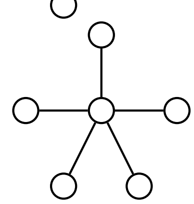




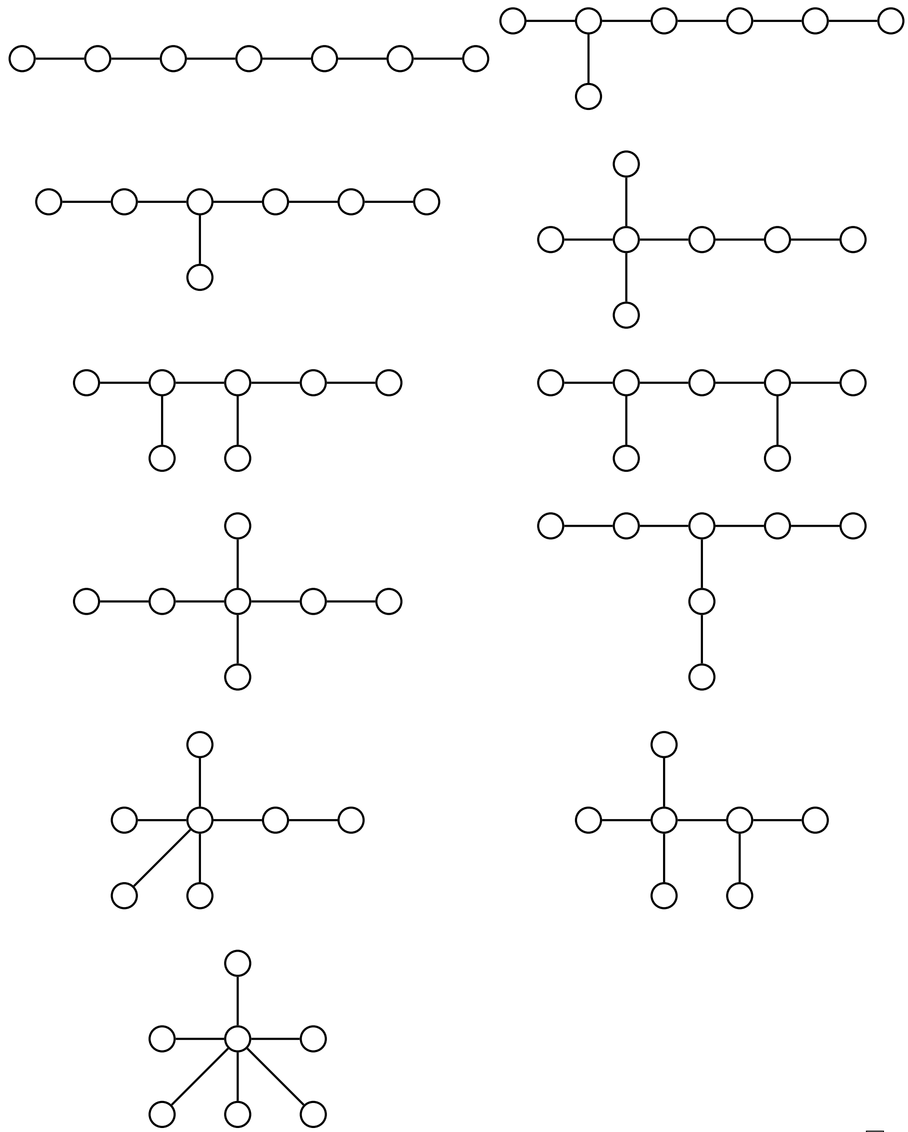








具有7个顶点的所有互不同构的树:



□

习题. 每个非平凡树是偶图。

证明. 非平凡树中无圈，因此为偶图。 □

习题. 设G为一棵树且$\Delta(G) \geq k$，证明G中至少有k个度为1的顶点。

证明. 用反证法。假设G中有x个度为1的顶点，$x < k$。进一步，设G中有p个顶

点，它们的度依次为d_1，d_2，...，d_p。则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} d_i &\geq k + x + 2(p-1-x)\\ &= 2(p-1) + k - x\\ &> 2(p-1)\end{aligned}$$

矛盾。 □

习题. 令G是一个有p个顶点，k个支的森林，证明G有$p-k$条边。

证明. 设G的k个支的顶点数依次为p_1，p_2，...，p_k，边数依次为q_1，q_2，...，q_k，则$q_1+q_2+\ldots+q_k=(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_k-1)$，即$q=p-k$。 □

习题. 设树T中有$2n$个度为1的顶点，$3n$个度为2的顶点，n个度为3的顶点，那么这棵树有多少个顶点，多少条边呢?

证明. 在树T中，边数＝顶点数－１，从而$(2n\times 1+3n\times 2+n\times 3)/2=2n+3n+n-1$，解得$n=2$，顶点数=12，边数=11。 □

习题. 一棵非平凡树T有n_2个度为2的顶点，n_3个度为3的顶点，...，n_k个度为k的顶点，则T有多少个度为1的顶点?

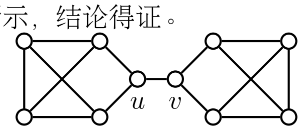
证明. 设非平凡树T有n_1个度为1的顶点，则由边数＝顶点数－１知，$(n_1+2n_2+\ldots+kn_k)/2=n_1+n_2+\ldots+n_k-1$，从而$n_1=n_3+2n_4+\ldots+(k-2)n_k+2$。 □

习题. p个顶点的图中，最多有多少个割点?

解. p-2。 □

习题. 证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证明. 设uv为三次图G的一座桥，则$G-uv$包含两个支，其中一个支包含顶点u，另一个顶点包含顶点v。 在包含顶点u的支中，至少含有一个顶点度为3，因此至少包含4个顶点。此时，如果该支中只包含4个顶点，则它们的度依次为$2,3,3,3$，这是不可能的（任意一个图中度为奇数的顶点的个数必为偶数）。因此，该支中至少包含5个顶点。同理，包含v的支至少包含5个顶点，如下图所示，结论得证。



□

习题. 有割点的连通图是否一定不是欧拉图? 是否一定不是哈密顿图? 有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图?

解. 有割点的连通图可能为欧拉图；有割点的连通的图一定不是哈密顿图。有桥的连通图一定不是欧拉图；有桥的连通图一定不是哈密顿图。 □