

第八讲正规子群、商群

陈建文

February 15, 2023

定义1. 设 G 为一个群, G 的任意子集称为群子集。在 2^G 中借助于 G 的乘法引入一个代数运算, 称为群子集的乘法: $\forall A, B \in 2^G$,

$$AB = \{ab | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

对任意的 $A \in 2^G$, 定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

定理1. 设 G 为一个群, 则 $\forall A, B, C \in 2^G$, $(AB)C = A(BC)$ 。

定理2. 设 G 为一个群, 则 $\forall A, B \in 2^G$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

定理3. 设 G 为一个群, H 为 G 的一个子群, 则 $HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$ 。

定理4. 设 A, B 为群 G 的子群, 则 AB 为 G 的子群的充分必要条件为 $AB = BA$ 。

证明. \Rightarrow 设 AB 为 G 的子群, 则 $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ 。

\Leftarrow 设 $AB = BA$, 往证 AB 为 G 的子群。

由 $(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$ 知 G 中的运算在 AB 中封闭。其次, $\forall a \in A, b \in B$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$ 。所以 AB 为 G 的子群。□

例. 设 H 为 G 的一个子群且 $H \neq \{e\}$ 。如果存在一个元素 $x_0 \in G$ 使得 $H(x_0^{-1}Hx_0) = G$, 则 $H \cap (x_0^{-1}Hx_0) \neq \{e\}$ 。

证明. 因为 $x_0 \in G = H(x_0^{-1}Hx_0)$, 所以 $\exists h_1, h_2 \in H$ 使得 $x_0 = h_1x_0^{-1}h_2x_0$, 从而 $e = h_1x_0^{-1}h_2$ 。于是, $x_0 = (h_1^{-1}h_2^{-1})^{-1} = h_2h_1 \in H$, 从而 $x_0^{-1}Hx_0 = H$ 。因此, $H \cap (x_0^{-1}Hx_0) = H \neq \{e\}$ 。□

定义2. 设 H 为群 G 的子群, 如果 $\forall a \in G$, $aH = Ha$, 则称 H 为 G 的正规子群。

定理5. 设 H 为群 G 的一个子群, 则下列四个命题等价:

- (1) H 为群 G 的正规子群;
- (2) $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$;
- (3) $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$;
- (4) $\forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H$ 。

证明. 先证 (1) \Leftrightarrow (2) :

$$\forall a \in G, aH = Ha \Leftrightarrow aHa^{-1} = H.$$

再证 (2) \Leftrightarrow (3) :

(2) \Rightarrow (3) 显然成立。

以下证明 (3) \Rightarrow (2) 。

只需证 $\forall a \in G, H \subseteq aHa^{-1}$ 。

$\forall h \in H, h = a(a^{-1}ha)a^{-1} = a(a^{-1}h(a^{-1})^{-1})a^{-1} \in aHa^{-1}$, 这里 $a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$ 是因为 $a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subseteq H$ 。

□

定理6. 设 H 为群 G 的正规子群, 则 H 的所有左陪集构成的集族 S_l 对群子集乘法构成一个群。

证明. $\forall aH, bH \in S_l, (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H \in S_l$, 这验证了群子集乘法在 S_l 上封闭: 。

群子集乘法显然满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$, 所以 H 为 S_l 中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l, (a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$, 所以, $a^{-1}H$ 为 aH 的左逆元。因此, S_l 对群子集乘法构成一个群。 □

定理7. 设 H 为群 G 的正规子群, H 的所有左陪集构成的集族为 S_l , 在 S_l 上定义乘法运算如下: $\forall aH, bH \in S_l, (aH)(bH) = (ab)H$, 则 S_l 对于在其上定义的乘法构成一个群。

证明. 首先证明: 如果 $aH = a'H, bH = b'H$, 则 $(ab)H = (a'b')H$ 。由 $(ab)^{-1}(a'b') = b^{-1}a^{-1}a'b' = (b^{-1}b')b'^{-1}a^{-1}a'b' \in H$ 知 $(ab)H = (a'b')H$ 。这验证了 S_l 上乘法运算的合理性。

$\forall aH, bH, cH \in S_l, ((aH)(bH))(cH) = (abH)(cH) = ((ab)c)H, (aH)((bH)(cH)) = (aH)(bcH) = (a(bc))H$, 从而 $((aH)(bH))(cH) = (aH)((bH)(cH))$, 这验证了乘法运算满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$, 所以 H 为 S_l 中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l, (a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$, 所以, $a^{-1}H$ 为 aH 的左逆元。因此, S_l 对乘法运算构成一个群。 □

定义3. 群 G 的正规子群 H 的所有左陪集构成的集族, 对群子集乘法构成的群称为 G 对 H 的商群, 记为 G/H 。

课后作业题:

练习1. 设 A 和 B 为群 G 的两个有限子群, 证明:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

证明. 因为 $A \cap B$ 为 A 的子群, 因此存在 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, 使得

$$A = a_1(A \cap B) \cup a_2(A \cap B) \cup \dots \cup a_n(A \cap B)$$

这里 $n = \frac{|A|}{|A \cap B|}$ 。以下验证 $AB = a_1B \cup a_2B \cup \dots \cup a_nB$, 并且对任意的 $i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, a_iB \cap a_jB = \phi$, 于是 $|AB| = n|B| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$ 。

$\forall g \in AB$, 存在 $a \in A, b \in B$ 使得 $g = ab$ 。进一步, 存在 $i, 1 \leq i \leq n, x \in A \cap B$ 使得 $a = a_i x$, 于是 $g = a_i x b \in a_i B$ (因为 $x \in A \cap B \subseteq B, b \in B$, 从而 $xb \in B$)。

以下用反证法证明对任意的 $i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, a_i B \cap a_j B = \phi$ 。假设存在 $i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, 使得 $a_i B \cap a_j B \neq \phi$, 则存在 $x, x \in a_i B \cap a_j B$ 。设 $x = a_i b_1 = a_j b_2$, 这里 $b_1 \in B, b_2 \in B$, 则 $a_i^{-1} a_j = b_1 b_2^{-1} \in A \cap B$, 从而 $a_i(A \cap B) = a_j(A \cap B)$, 与 $a_i(A \cap B) \cap a_j(A \cap B) = \phi$ 矛盾。

□

练习2. 利用上题的结论证明: 六阶群中有唯一的一个三阶子群。

证明. 设 A 和 B 为六阶群 G 的两个三阶子群, 由练习1结论可得:

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

由于 $A \cap B$ 为 A 的子群, 所以必有 $|A \cap B| \mid |A|$, 从而 $|A \cap B| = 1$ 或 3 。如果 $|A \cap B| = 1$, 则 $|AB| = 9$, 这与 G 为一个六阶群, AB 为 G 的群子集矛盾, 从而 $|A \cap B| = 3$, 此时必有 $A = B$, 结论得证。

□

练习3. 设 G 为一个 n^2 阶的群, H 为 G 的一个 n 阶子群。证明: $\forall x \in G, x^{-1} H x \cap H \neq \{e\}$ 。

证明. 用反证法, 假设存在 $x \in G, x^{-1} H x \cap H = \{e\}$ 。由练习1结论可得,

$$|H(x^{-1} H x)| = \frac{|H||x^{-1} H x|}{|H \cap (x^{-1} H x)|} = n^2$$

又由于 G 为一个 n^2 阶的群, 所以 $H(x^{-1} H x) = G$, 由教材例题结论可得 $x^{-1} H x \cap H \neq \{e\}$, 矛盾。

□

练习4. 证明: 指数为2的子群为正规子群。

证明. 设 H 为群 G 的指数为2的子群, 则存在 $a \in G$ 使得 $G = H \cup aH$ 。

$\forall g \in G$, 如果 $g \in H$, 则显然 $gHg^{-1} \subseteq H$; 如果 $g \in aH$, 则存在 $h \in H$ 使得 $g = ah$, 以下证明 $gHg^{-1} \subseteq H$, 从而可得 H 为 G 的正规子群。

$\forall x \in gHg^{-1}$, 存在 $h_1 \in H$ 使得 $x = gh_1g^{-1}$, 再由 $g = ah$ 得 $x = ah h_1 (ah)^{-1} = ah h_1 h^{-1} a^{-1}$ 。此时必有 $x \in H$, 否则 $x \in aH$, 从而存在 $h_2 \in H$ 使得 $x = ah_2$, 于是 $ah h_1 h^{-1} a^{-1} = ah_2$, 由此可得 $a = h_2^{-1} h h_1 h^{-1} \in H$, 与 $a \in aH$ 矛盾。

□

练习5. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

证明. 设 N_1 和 N_2 为群 G 的两个正规子群, 显然 $N_1 \cap N_2$ 为 G 的子群。 $\forall a \in G$, 易得 $a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_1a^{-1} \subseteq N_1, a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq aN_2a^{-1} \subseteq N_2$, 由此可得 $a(N_1 \cap N_2)a^{-1} \subseteq N_1 \cap N_2$, 这证明了 $N_1 \cap N_2$ 为 G 的正规子群。 \square

练习6. 设 H 为群 G 的子群, N 为群 G 的正规子群, 试证: NH 为群 G 的子群。

证明. 设群 G 的单位元为 e , 则 $e = ee \in NH$, 从而 NH 非空。

$\forall x, y \in NH, \exists n_1 \in N, h_1 \in H, n_2 \in N, h_2 \in H$, 使得 $x = n_1h_1, y = n_2h_2$, 从而 $xy^{-1} = (n_1h_1)(n_2h_2)^{-1} = n_1h_1h_2^{-1}n_2^{-1} = n_1(h_1h_2^{-1}n_2^{-1}(h_1h_2^{-1})^{-1})h_1h_2^{-1} \in NH$, 这里 $h_1h_2^{-1}n_2^{-1}(h_1h_2^{-1})^{-1} \in N$ 是因为 N 为 G 的正规子群。 \square

练习7. 设 G 为一个阶为 $2n$ 的交换群, 试证: G 必有一个 n 阶商群。

证明. 由以前作业题知 G 中存在一个阶为2的元素 a , 则 $G/(a)$ 为 G 的一个 n 阶商群。 \square

练习8. 设 H 为群 G 的子群, 证明: H 为群 G 的正规子群的充分必要条件是 $\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$ 。

证明. 由教材定理知如果 H 为群 G 的正规子群, 则 $\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$ 。

以下假设 $\forall a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$, 往证 H 为群 G 的正规子群。

$\forall a \in G, (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$, 从而 $\forall h \in H, aha^{-1}h \in H$, 于是 $\exists h_1 \in H, aha^{-1}h = h_1$, 由此可得 $aha^{-1} = h_1h^{-1} \in H$, 这证明了 $aHa^{-1} \subseteq H$, 即 H 为群 G 的正规子群。 \square

练习9. 设 H 为群 G 的子群. 证明: H 为 G 的正规子群的充分必要条件是 H 的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是 H 的一个左陪集。

证明. 由教材定理知如果 H 为群 G 的正规子群, 则 H 的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是 H 的一个左陪集。

以下假设 H 的任意两个左陪集关于群子集的乘法所得到的乘积还是 H 的一个左陪集, 往证 H 为群 G 的正规子群。

$\forall a \in G$, 设 $(aH)(a^{-1}H) = bH$, 则 $e = (ae)(a^{-1}e) \in (aH)(a^{-1}H) = bH$, 从而 $\exists h \in H$ 使得 $e = bh$, 所以 $H = eH = (bh)H = b(hH) = bH$, 于是 $(aH)(a^{-1}H) = H$ 。

$\forall h \in H, aha^{-1} = (ah)(a^{-1}e) \in (aH)(a^{-1}H) = H$, 这证明了 H 为 G 的正规子群。 \square