

# 离散数学讲义

陈建文

February 19, 2022



# 第一章 集合及其运算

**定义1.1.** 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 $A$ 和一个元素 $a$ , 用 $a \in A$ 表示 $a$ 是 $A$ 的一个元素, 用 $a \notin A$ 表示 $a$ 不是 $A$ 的一个元素。

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$ , 这里 $\wedge$ 表示“并且”,  $E$ 还可以等价的表示为 $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合, 该集合中不包含任何元素, 称为空集, 记为 $\phi$ 。

**定义1.2.** 设 $A, B$ 为两个集合, 如果 $A$ 中的每个元素都是 $B$ 中的元素, 则称 $A$ 为 $B$ 的子集, 记为 $A \subseteq B$ ; 如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ , 则称 $A$ 为 $B$ 的真子集, 记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in A, x \in B$  即 $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$

$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in B, x \notin A$  即 $A \subseteq B \wedge \exists x, x \in B \wedge x \notin A$

设 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则 $A \subseteq B$ , 其含义是 $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$ 。对一些特殊的 $x$ 的值分析如下:

- 当 $x = 1$ 时,  $1 \in A \rightarrow 1 \in B$ , 即 $T \rightarrow T$ , 其真值为 $T$ ;
- 当 $x = 3$ 时,  $3 \in A \rightarrow 3 \in B$ , 即 $F \rightarrow T$ , 其真值为 $T$ ;
- 当 $x = 0$ 时,  $0 \in A \rightarrow 0 \in B$ , 即 $F \rightarrow F$ , 其真值为 $T$ 。

**定义1.3.** 设 $A, B$ 为两个集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ , 则称 $A$ 与 $B$ 相等, 并记为 $A = B$ 。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

**定理1.1.** 空集为任一集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设 $A$ 为任意一个集合, 显然对任意的 $x$ 属于空集, 则 $x \in A$ , 因此空集为 $A$ 的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集 $\phi$ 和 $\phi'$ , 则 $\phi \subseteq \phi'$ 并且 $\phi' \subseteq \phi$ , 从而 $\phi = \phi'$ , 矛盾。

□

“空集为任一集合的子集”这一结论初学时, 也可以用反证法证明其正确性, 以帮助我们理解其中的逻辑。为了用反证法证明该结论, 首先让我们分析一下对于任意的集合 $A$ 和 $B$ ,  $A$ 不是 $B$ 的子集 ( $A \not\subseteq B$ ) 的含义:

$$\begin{aligned}
 A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \\
 &\Leftrightarrow \neg(\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B) \\
 &\Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)
 \end{aligned}$$

空集为任一集合的子集。

证明. 用反证法。设存在一个集合 $A$ ,  $\phi \not\subseteq A$ , 则存在 $x \in \phi$ , 但 $x \notin A$ , 这显然是不可能的, 结论得证。

□

**定义1.4.** 集合 $S$ 的所有子集构成的集合称为 $S$ 的幂集, 记为 $2^S$ 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

- 例.  $2^\phi = \{\phi\}$   
 $2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$   
 $2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$   
 $2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

例.  $2^{\{\phi, \{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

例. 对于任意的集合 $A$ ,  $\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^A}$ 。

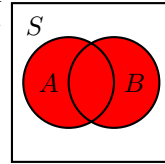
证明. 根据幂集的定义,  $\phi \in 2^A$ , 从而 $\{\phi\} \subseteq 2^A$ , 即 $\{\phi\} \in 2^{2^A}$ 。又因为 $\phi \in 2^{2^A}$ , 所以 $\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$ , 从而 $\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$ 。

□

**定义1.5.** 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 至少属于集合 $A$ 与集合 $B$ 之一的那些元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

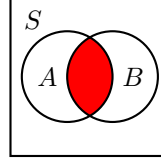
(这里 $\vee$ 表示“或者”)



例.  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

定义1.6. 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 由既属于集合 $A$ 又属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

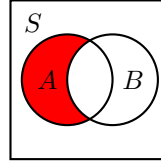
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



例.  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

定义1.7. 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 由属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差集, 记为 $A \setminus B$ 。

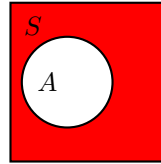
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



例.  $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中, 常以某个集合 $S$ 为出发点, 而所涉及的集合都是 $S$ 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 $S$ , 称为该问题的全集。如果 $A$ 为 $S$ 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 $A$ 对集合 $S$ 的余集, 记为 $A^c$ 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$



例.  $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$ , 则 $A^c = \{1\}$ 。

定理1.2. 设 $S$ 为全集,  $\emptyset$ 为空集,  $A, B, C$ 为 $S$ 的子集, 则

1.  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ .
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
4.  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ .
5.  $A \cup S = S, A \cap S = A$ .
6.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
7.  $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$ .
8.  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B), C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ .
- 8'.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

以下只证明结论6和结论8, 其他结论的证明留给读者自己完成。  
首先证明结论6的第一条, 我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & \forall x x \in A \cup (B \cap C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
 & \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
 & \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\
 & \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in A \cup (B \cap C)$ , 则  $x \in A$  或者  $x \in (B \cap C)$ , 从而  $x \in A$ , 或者  $x \in B$  并且  $x \in C$ , 因此,  $x \in A$  或者  $x \in B$ , 并且  $x \in A$  或者  $x \in C$ , 即,  $x \in A \cup B$  并且  $x \in A \cup C$ , 于是,  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

再证  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , 则  $x \in A \cup B$  并且  $x \in A \cup C$ , 从而  $x \in A$  或者  $x \in B$ , 并且  $x \in A$  或者  $x \in C$ , 因此,  $x \in A$ , 或者  $x \in B$  并且  $x \in C$ , 即,  $x \in A$  或者  $x \in (B \cap C)$ , 于是,  $x \in A \cup (B \cap C)$ 。

□

接下来证明结论8的第一条, 我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & \forall x x \in C \setminus (A \cap B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cap B \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
 & \Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
 & \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \\
 & \Leftrightarrow (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B) \\
 & \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证  $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in C \setminus (A \cap B)$ , 则  $x \in C$  并且  $x \notin A \cap B$ , 从而  $x \in C$  并且  $x \notin A$  或者  $x \notin B$ , 因此,  $x \in C \setminus A$  或者  $x \in C \setminus B$ , 于是  $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ 。

再证  $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cap B)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ , 则  $x \in C \setminus A$  或者  $x \in C \setminus B$ , 从而  $x \in C$  并且  $x \notin A$  或者  $x \notin B$ , 因此,  $x \in C$  并且  $x \notin A \cap B$ , 于是  $x \in C \setminus (A \cap B)$ 。

□

例. (P16-10) 下列等式是否成立?

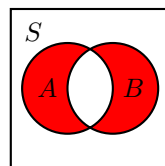
$$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$$

答. 该等式不成立。设  $A = \phi$ ,  $B = \phi$ ,  $C = \{0\}$ , 则  $(A \setminus B) \cup C = \{0\}$ , 而  $A \setminus (B \setminus C) = \phi$ ,  $(A \setminus B) \cup C \neq A \setminus (B \setminus C)$ 。

□

定义1.9. 设  $A, B$  为任意的两个集合,  $A \setminus B$  与  $B \setminus A$  的并集称为  $A$  与  $B$  的对称差, 记为  $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例.

$$\begin{aligned}\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} &= \{1, 3\} \\ \{1, 2\} \triangle \{1\} &= \{2\} \\ \{1, 2\} \triangle \phi &= \{1, 2\} \\ \{1, 2\} \triangle \{1, 2\} &= \phi\end{aligned}$$

**定理1.3.** 设 $A, B$ 为任意两个集合, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

**定理1.4.** 设 $A, B, C$ 为任意三个集合, 则

1.  $A \triangle B = B \triangle A$ .
2.  $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ .
3.  $\emptyset \triangle A = A$ .
4.  $A \triangle A = \emptyset$ .
5.  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ .

以下证明结论 2 和结论 5, 其他结论留给读者思考。先证明结论 2。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned}x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)\end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned}x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)\end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C) \\ &\quad \vee (x \notin A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \in A \wedge x \in B \triangle C)\end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

□

再证明结论 5。

证明.

$$\begin{aligned}
 & A \cap (B \triangle C) \\
 &= A \cap (B \setminus C \cup C \setminus B) \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{1.5} \\
 &= (A \cap B) \triangle (A \cap C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\
 &= (A \cap B) \setminus A \cup (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus A \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B) \setminus C \cup (A \cap C) \setminus B \\
 &= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

由式(1.5)和式(1.6)知  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ 。  $\square$

**定义1.10.** 以集合为元素的集合称为集族。如果  $I$  为任意一个集合, 对  $I$  中每个元素  $\alpha$  都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为  $A_\alpha$ , 那么所有这些  $A_\alpha$  形成的集族可以用  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  表示, 其中  $I$  称为标号集。

**定义1.11.** 集族  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  中所有集合的并集  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

集族  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  中所有集合的交集  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

**例.** 设  $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$ , 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}, \bigcap_{x \in I} A_x = \emptyset$$

**定理1.5.** 设  $A$  为任意集合,  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  为任意一个集族, 则

1.  $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
2.  $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

证明. 留给读者自己完成。  $\square$

**定理1.6.** 设  $C$  为任意集合,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  为任意一个集族, 则

1.  $C \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$
2.  $C \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$



以下只证明第1条，其他结论的证明留给读者自己完成。  
我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
& x \in C \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(\forall \alpha \alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg(\neg(\alpha \in I) \vee x \in A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha \neg\neg(\alpha \in I) \wedge \neg x \in A_\alpha \\
& \Leftrightarrow x \in C \wedge \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \notin A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \in C \wedge x \notin A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in I \wedge x \in C \setminus A_\alpha) \\
& \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 设全集为 $S$ 。如果 $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ ，则 $x \in S$ ，且 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ，从而对任意的 $\alpha \in I$ ， $x \notin A_\alpha$ 。于是，对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in A_\alpha^c$ 。因此， $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ ，故 $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。

其次，如果 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ ，则对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in A_\alpha^c$ 。因此，对任意的 $\alpha \in I$ 都有 $x \in S$ 且 $x \notin A_\alpha$ ，故 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。于是， $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。所以， $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。

由集合相等的定义便知， $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。  $\square$

将以上定理中的集合 $C$ 替换为全集 $S$ ，我们可以得到如下结论：

**定理1.7.** 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族，则

1.  $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
2.  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

**定义1.12.** 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一个对象为 $a$ ，第二个对象为 $b$ ，则该有序对记为 $(a, b)$ 。 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

**定义1.13.** 设 $A$ 与 $B$ 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡尔乘积**，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

**例.** 如果  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 那么  $X \times Y = ?$ ,  $Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

**定义1.14.**  $n$ 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 **$n$ 元组**。如果第一个对象为 $a_1$ , 第二个对象为 $a_2$ , ..., 第 $n$ 个对象为 $a_n$ , 则该 $n$ 元组记为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

**定义1.15.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 $n$ 个集合, 则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**笛卡尔乘积**, 记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , 简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时,  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 简记为 $A^n$ , 例如 $A^2 = A \times A$ ,  $A^3 = A \times A \times A$ 。我们以前熟知的二维空间 $R^2$ 即为 $R \times R$ , 三维空间 $R^3$ 即为 $R \times R \times R$ 。

**例.** 如果 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4\}$ ,  $Z = \{5, 6\}$  那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$X \times Y \times Z = \{(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6), \\ (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6)\}$$

**定义1.16.** 设 $X$ 和 $Y$ 为两个非空集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 为一个法则, 根据 $f$ , 对 $X$ 中的每个元素 $x$ 都有 $Y$ 中唯一确定的元素 $y$ 与之对应。从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

**定义1.17.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ , 只要 $x_1 \neq x_2$ , 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**单射**。

**定义1.18.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ , 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**满射**。

**定义1.19.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**双射**, 或者称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**一一对应**。

**定义1.20.** 设 $A$ 为一个集合, 如果 $A = \Phi$ , 其基数定义为0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 $n$ 使得 $A$ 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 $A$ 的基数为 $n$ 。 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 $n$ , 则称 $A$ 为**有穷集**; 如果 $A$ 不是有穷集, 则称 $A$ 为**无穷集**。

**定理1.8.** 设 $A, B$ 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

**定理1.9.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

**定理1.10.** 设 $A, B$ 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

**定理1.11.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

**定理1.12.** 设 $S$ 为有穷集,  $A \subseteq S$ , 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

**定理1.13.** 设 $A, B$ 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

**定理1.14.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^n A_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned} & |\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i| \\ &= |(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}| \\ &= |\bigcup_{i=1}^k A_i| + |A_{k+1}| - |(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1}| \\ &= |\bigcup_{i=1}^k A_i| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \end{aligned} \tag{1.7}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
 & |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| \\
 & \quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap (A_t \cap A_{k+1})| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \dots \cap (A_k \cap A_{k+1})| \\
 &= \sum_{i=1}^k |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_j \cap A_{k+1})| \\
 & \quad + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_{k+1}| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}|
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

将(1.8)和(1.9)代入(1.7)得

$$\begin{aligned}
 & \left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < t \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_t| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + (-1)^{k+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1}|
 \end{aligned}$$

□

**例.** 在1000名大学毕业生的调查中, 每个人至少掌握了一门外语, 其中804人掌握了英语, 205人掌握了日语, 190人掌握了俄语, 125人既掌握了英语又掌握了日语, 57人既掌握了日语又掌握了俄语, 85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求在这1000名大学生中, 英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

解. 设  $A, B, C$  分别为掌握了英语、日语、俄语的大学生的集合, 则

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

即

$$1000 = 804 + 205 + 190 - 125 - 85 - 57 + |A \cap B \cap C|$$

解得英语、日语、俄语全掌握的人数  $|A \cap B \cap C| = 68$ 。

□

**练习1.1.** 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_,  $A \setminus B =$  \_\_\_\_\_,  $A \triangle B =$  \_\_\_\_\_,  $A \times B =$  \_\_\_\_\_。

**练习1.2.** 下列命题中哪个是假的?

- A. 对每个集合  $A$ ,  $\phi \in 2^A$ 。
- B. 对每个集合  $A$ ,  $\phi \subseteq 2^A$ 。
- C. 对每个集合  $A$ ,  $A \in 2^A$ 。
- D. 对每个集合  $A$ ,  $A \subseteq 2^A$ 。

**练习1.3.** 设集合  $S = \{\phi, \{\phi\}\}$ , 则  $2^S =$  \_\_\_\_\_。

**练习1.4.** 设  $A, B, C$  为集合, 证明:  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

**练习1.5.** 下列等式是否成立:  $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ ?

**练习1.6.** 下列命题中哪个是真的?

- A. 对任意集合  $A, B$ ,  $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。
- B. 对任意集合  $A, B$ ,  $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
- C. 对任意集合  $A, B$ ,  $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。
- D. 对任意集合  $A, B$ ,  $2^{A \triangle B} = 2^A \triangle 2^B$ 。

**练习1.7.** 设  $A, B, C$  为集合, 并且  $A \cup B = A \cup C$ , 则下列哪个断言成立?

- A.  $B = C$
- B.  $A \cap B = A \cap C$
- C.  $A \cap B^c = A \cap C^c$
- D.  $A^c \cap B = A^c \cap C$

**练习1.8.** 设  $A, B, C, D$  为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

**练习1.9.** 设  $A, B, C$  为集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

**练习1.10.** 证明

- 1)  $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
- 2)  $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
- 3)  $(A \triangle B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

**练习1.11.** 设集合 $S$ 有 $n$ 个元素, 证明 $2^S$ 有 $2^n$ 个元素。

**练习1.12.** 设 $M_1, M_2, \dots$ 和 $N_1, N_2, \dots$ 是集合 $S$ 的子集的两个序列, 对 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 。另 $Q_1 = M_1, Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c, n = 2, 3, \dots$ , 试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$$

**练习1.13.** 求证:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned} \forall x x \in A \cap (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

对任意的 $x$ , 如果 $x \in A \cap (B \cup C)$ , 则 $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$ , 从而 $x \in A$ , 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$ , 因此,  $x \in A$ 并且 $x \in B$ , 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$ , 即,  $x \in A \cap B$  或者  $x \in A \cap C$ , 于是,  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

再证 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ 。

对任意的 $x$ , 如果 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , 则 $x \in A \cap B$  或者  $x \in A \cap C$ , 从而 $x \in A$ 并且 $x \in B$ , 或者 $x \in A$ 并且 $x \in C$ , 因此,  $x \in A$ , 并且 $x \in B$ 或者 $x \in C$ , 即,  $x \in A$ 并且 $x \in (B \cup C)$ , 于是,  $x \in A \cap (B \cup C)$ 。

□

**练习1.14.** 求证:  $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned} \forall x x \in C \setminus (A \cup B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cup B \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \cup B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge (\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \\ \Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\ \Leftrightarrow (x \in C \setminus A) \wedge (x \in C \setminus B) \\ \Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 先证  $C \setminus (A \cup B) \subseteq (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in C \setminus (A \cup B)$ , 则  $x \in C$  并且  $x \notin A \cup B$ , 从而  $x \in C$  并且  $x \notin A$  并且  $x \notin B$ , 因此,  $x \in C \setminus A$  并且  $x \in C \setminus B$ , 于是  $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ 。

再证  $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cup B)$ 。

对任意的  $x$ , 如果  $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ , 则  $x \in C \setminus A$  并且  $x \in C \setminus B$ , 从而  $x \in C$  并且  $x \notin A$  并且  $x \notin B$ , 因此,  $x \in C$  并且  $x \notin A \cup B$ , 于是  $x \in C \setminus (A \cup B)$ 。□

**练习1.15.** 求证:  $C \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (C \setminus A_\alpha)$

我们先在草稿纸上做如下的分析:

$$\begin{aligned}
 & x \in C \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \neg(\exists \alpha \alpha \in I \wedge x \in A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha \neg(\alpha \in I \wedge x \in A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\neg(\alpha \in I) \vee \neg(x \in A_\alpha)) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow \neg(x \in A_\alpha)) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \notin A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \in S \wedge x \notin A_\alpha) \\
 \Leftrightarrow & x \in C \wedge \forall \alpha (\alpha \in I \rightarrow x \in A_\alpha^c) \\
 \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c
 \end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下:

证明. 设全集为  $S$ 。如果  $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ , 则  $x \in S$ , 且  $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 从而对任意的  $\alpha \in I$ ,  $x \notin A_\alpha$ 。于是, 对任意的  $\alpha \in I$  都有  $x \in A_\alpha^c$ 。因此,  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ , 故  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。

其次, 如果  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ , 则对任意的  $\alpha \in I$  都有  $x \in A_\alpha^c$ 。因此, 对任意的  $\alpha \in I$  都有  $x \in S$  且  $x \notin A_\alpha$ , 故  $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。于是,  $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。所以,  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c$ 。

由集合相等的定义便知,  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$ 。□

**习题11.** 设集合 $S$ 有 $n$ 个元素, 证明 $2^S$ 有 $2^n$ 个元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

1. 当 $n = 0$ 时,  $S = \phi$ ,  $2^\phi = \{\phi\}$ 有1个元素, 结论成立。

2. 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设集合 $S$ 中有 $k + 1$ 个元素 $s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}$ , 记

$$\begin{aligned} S_1 &= 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}} \\ S_2 &= \{X \cup \{s_{k+1}\} | X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\} \end{aligned}$$

则 $2^S = S_1 \cup S_2$ 。

考虑映射 $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 对任意的 $X \in S_1$ ,  $f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$ 。易验证 $f$ 为从 $S_1$ 到 $S_2$ 的双射, 从而 $|S_1| = |S_2|$ 。

显然 $S_1 \cap S_2 = \phi$ , 再由归纳假设,  $|S_1| = 2^k$ , 从而 $|2^S| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ 。

□

**习题12.** 设 $M_1, M_2, \dots$ 和 $N_1, N_2, \dots$ 是集合 $S$ 的子集的两个序列, 对 $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 。另 $Q_1 = M_1$ ,  $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , 试证

$$N_n \triangle Q_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$$

证明. 对任意的 $x \in N_n \triangle Q_n$ ,  $x \in N_n \setminus Q_n$ 或者 $x \in Q_n \setminus N_n$ 。如果 $x \in Q_n \setminus N_n$ , 则 $x \in Q_n$  并且 $x \notin N_n$ 。由 $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$ 知 $x \in M_n$ , 从而 $x \in M_n$ 并且 $x \notin N_n$ , 因此 $x \in N_n \triangle M_n$ , 于是 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$ 。

如果 $x \in N_n \setminus Q_n$ , 则 $x \in N_n$ 并且 $x \notin Q_n$ 。由 $Q_n = M_n \cap (\bigcup_{k=1}^{n-1} M_k)^c$ 知 $x \notin M_n$ 或者 $x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$ 。当 $x \notin M_n$ 时, 由 $x \in N_n$ 知 $x \in N_n \triangle M_n$ , 从而 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$ ; 当 $x \in \bigcup_{k=1}^{n-1} M_k$ 时, 存在 $i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $x \in M_i$ , 由 $x_i \in N_n$ 及对 $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ 有 $N_i \cap N_j = \phi$ 知 $x \notin N_i$ , 从而 $x \in N_i \triangle M_i$ , 因此 $x \in \bigcup_{i=1}^n (N_i \triangle M_i)$ , 结论得证。□



## 第 二 章