

第四讲子群、生成子群

陈建文

October 6, 2022

定义1. 设 S 为群 G 的非空子集, 如果 G 的乘法在 S 中封闭且 S 对此乘法也构成一个群, 则称 S 为 G 的一个子群。如果 $S \neq G$, 则称 S 为 G 的真子群。

定理1. 设 G_1 为 G 的子群, 则 G_1 的单位元必为 G 的单位元; G_1 的元素 a 在 G_1 中的逆元素也是 a 在 G 中的逆元素。

定理2. 群 G 的任意多个子群的交还是 G 的子群。

定理3. 任一群不能是其两个真子群的并。

定理4. 群 G 的非空子集 S 为 G 的子群的充分必要条件是

- (1) $\forall a, b \in S, ab \in S$ 且
- (2) $\forall a \in S, a^{-1} \in S$ 。

定理5. 群 G 的非空子集 S 为 G 的子群的充分必要条件是 $\forall a, b \in S, ab^{-1} \in S$ 。

定理6. 群 G 的有限非空子集 F 为 G 的子群的充分必要条件是 $\forall a, b \in F, ab \in F$ 。

定义2. 群 G 的元素 a 称为 G 的中心元素, 如果 a 与 G 的每个元素可交换, 即 $\forall x \in G, ax = xa$ 。 G 的所有中心元素构成的集合 C 称为 G 的中心。

定理7. 群 G 的中心 C 是 G 的可交换子群。

例. 设 G 为一个群, $a \in G$, $\{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots\}$ 为 G 的一个子群。

例. 设 G 为一个有限群, $a \in G$, $\{e, a, a^2, \dots\}$ 为 G 的一个子群。

例. 设 G 为一个交换群, $a, b \in G$, 则 $\{a^m b^n | m, n \in \mathbb{Z}\}$ 为 G 的一个子群。

定义3. 设 M 为 G 的一个子集, G 的包含 M 的所有子群的交称为由 M 生成的子群, 记为 $\langle M \rangle$ 。

课后作业题:

练习1. 举例说明两个子群的并可以不是子群。

练习2. 设 G_1 和 G_2 为群 G 的两个真子群, 证明: $G_1 \cup G_2$ 为 G 的子群的充分必要条件是 $G_1 \subseteq G_2$ 并且 $G_2 \subseteq G_1$ 。

练习3. 设 (G_1, \circ) 和 $(G_2, *)$ 都是群, $\phi: G_1 \rightarrow G_2, \forall a, b \in G_1, \phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)$, 证明: $\phi^{-1}(e_2)$ 为 G_1 的子群, 其中 e_2 为 G_2 的单位元素。

练习4. 找出3次对称群的所有子群。