第五讲变换群、同构

陈建文

October 7, 2022

定义1. 设$(G_1, \circ)$，$(G_2, *)$为两个群。如果存在一个双射$\phi : G_1 \to G_2$使得$\forall a, b \in G$，

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b),$$

则称群G_1与G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$。ϕ称为从G_1到G_2的一个同构。

定义2. 设S为一个非空集合，从S到S的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群，称为S上的对称群，记为$Sym(S)$。当$S = \{1, 2, \cdots, n\}$时，$Sym(S) = S_n$。

定义3. $Sym(S)$的任意一个子群称为S上的一个变换群。S_n的任意一个子群称为一个置换群。

定理1. 任何一个群都同构于某个变换群。

设$(G, \circ)$为一个n阶群，$G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则$G \cong L(G)$，这里

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_i a_1 & a_i a_2 & \cdots & a_i a_n \end{pmatrix} | a_i \in G \right\}$$

为一个置换群。

推论1. 任意一个n阶有限群同构于n次对称群S_n的一个n阶子群，亦即任意一个有限群同构于某个置换群。

课后作业题:

练习1. 设R为实数集合，G为一切形如$f(x) = ax + b$的从R到R的函数之集，这里$a \in R$，$b \in R$，$a \neq 0$，试证：G为一个变换群。

练习2. 设R为实数集合，H为一切形如$f(x) = x + b$的从R到R的函数之集，这里$b \in R$，试证：H为上题中G的一个子群。

练习3. 设R_+为一切正实数之集，R为一切实数之集。$(R_+, \times)$，$(R, +)$都为群。令$\phi : R_+ \to R, \forall x \in R_+, \phi(x) = log_p(x)$，其中$p$为任意一个正实数。证明$\phi$为同构。