离散数学讲义

陈建文

March 18, 2022

第 三 章　关系

定义3.1. 设A与B为两个集合。一个从$A\times B$到$\{T,F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a,b)\in A\times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例3.1. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X\times 2^X$到$\{T,F\}$的映射，

$\subseteq(\phi,\phi)=T,\subseteq(\phi,\{1\})=T,\subseteq(\phi,\{2\})=T,\subseteq(\phi,\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1\},\phi)=F,\subseteq(\{1\},\{1\})=T,\subseteq(\{1\},\{2\})=F,\subseteq(\{1\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{2\},\phi)=F,\subseteq(\{2\},\{1\})=F,\subseteq(\{2\},\{2\})=T,\subseteq(\{2\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1,2\},\phi)=F,\subseteq(\{1,2\},\{1\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{2\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1,2\})=T$

定义3.2. 设A与B为两个集合。$A\times B$的任一子集R称为从A到B的一个**二元关系**。如果$(a,b)\in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b)\notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称R为A上的二元关系。

例3.2. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X\times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq=\{&(\phi,\phi),(\phi,\{1\}),(\phi,\{2\}),(\phi,\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\&(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

例3.3. 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系”$\leq$”为$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例3.4. 设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m\equiv k\pmod n$。显然，$m\equiv k\pmod n$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余为$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

定义3.3. 设$R\subseteq A\times B$，集合

$$\{x\in A|\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A 使得 (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

定义3.4. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets $S_1, S_2, \cdots, S_n$ (not necessarily distinct)，R is a relation on these n sets if it is a set of n-tuples each of which has its first element from S_1, its second element from S_2, and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

定义3.5. 集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

例3.5. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ *(不是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ （是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ （不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$ （不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ （是）

定义3.6. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

例3.6. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$*(是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ （不是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（不是）

定义3.7. 集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

例3.7. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(不是)*

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（不是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.8. 集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

例3.8. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.9. 集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

例3.9. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

练习3.1. 设R为集合X上的反自反的和传递的二元关系，证明：R为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则由R为传递的知$(x,x) \in R$，这与R为反自反的矛盾，从而$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$不可能成立。即如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则$x = y$成立，这证明了R为反对称的。

$\square$

证法二. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$并且$x \neq y$，以下证明$(y, x) \notin R$。用反证法，假设$(y, x) \in R$，则由R为传递的知$(x, x) \in R$，这与R为反自反的矛盾 □

证法三. 用反证法。假设R不是反对称的二元关系，则存在$x \in X$，$y \in X$，$(x, y) \in R$，$(y, x) \in R$并且$x \neq y$，由R为传递的知，$(x, x) \in R$，这与R为反自反的矛盾。 □

定义3.10. 设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

定理3.1. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

定义3.11. 设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

定理3.2. 设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.3. 设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

定义3.12. 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合。令$R$为从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例3.10. 设集合$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

，则S的关系矩阵为?

例3.11. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$，则$R$的关系矩阵为?

定理3.4. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

1. R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为1;
2. R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为0;
3. R为对称的，当且仅当B为对称矩阵;

4. R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为1;

5. R为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设X和Y为有穷集合，R为从X到Y的二元关系。当用图表示R时，先把X与Y的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x, y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的"有向图"，称为关系R的图。注意，如果$(x, x) \in R$，则在代表x的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

定理3.5. 设R为集合X上的二元关系，则

1. R为自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环;

2. R为反自反的，当且仅当R的图中没有环;

3. R为对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线;

4. R为反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线;

5. R为传递的，当且仅当在R的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定理3.6. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

定义3.13. 设B，C是两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理3.7. 设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R \cup S$与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R \cup S}$，$B_{R \cap S}$，则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义3.14. 设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i &= 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

定理3.8. 设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

定义3.15. 设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

定理3.9. 设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理3.10. 设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a,x) \in R^k$且$(x,b) \in R$。由归纳假设，$(a,x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1},x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a,x_1) \in R, (x_1,x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1},x_k) \in R, (x_k,b) \in R$。 □

定理3.11. 设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

定理3.12. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2},b_{k-1}) \in R, (b_{k-1},b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \leq i < j \leq k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1},b_i) \in R, (b_j,b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1},b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。若$p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a,b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \leq n$使得$(a,b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$。 □

定理3.13. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合X上关系R的传递闭包的算法。

```
TRANSITIVE-CLOSURE(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    M = B
    A = M
    for i = 2 to n
        M = M ∘ B
        A = A ∨ M
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            if a_ik == 1
                for j = 1 to n
                    a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

第 四 章