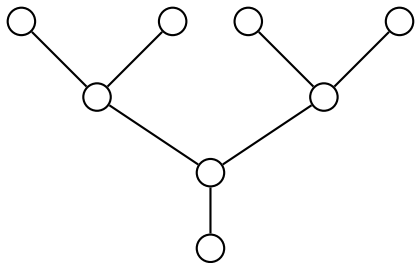


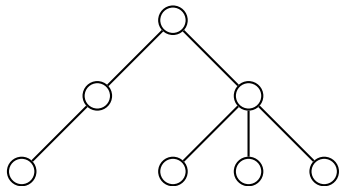
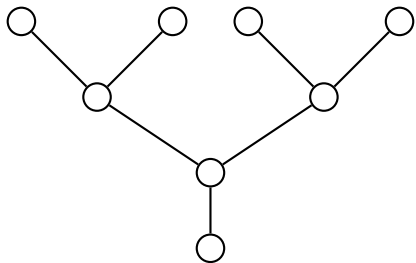
# 第七章树和割集

陈建文

# 1. 树及其性质



# 1. 树及其性质



# 1. 树及其性质

## 定义1.1

连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。

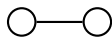
# 1. 树及其性质

## 定义1.1

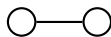
连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。



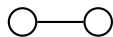
A



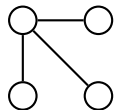
B



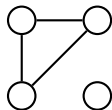
C



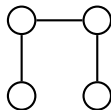
D



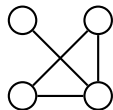
E



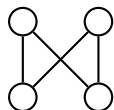
F



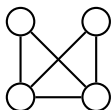
G



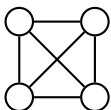
H



I



J



K

## 定义1.2

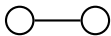
一个没有圈的无向图称为无向森林，简称森林。

## 定义1.2

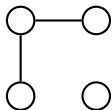
一个没有圈的无向图称为无向森林，简称森林。



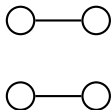
A



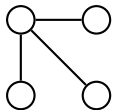
B



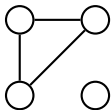
C



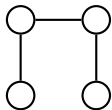
D



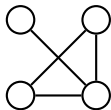
E



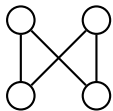
F



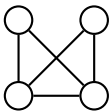
G



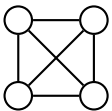
H



I



J



K

# 1. 树及其性质

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。



# 1. 树及其性质

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

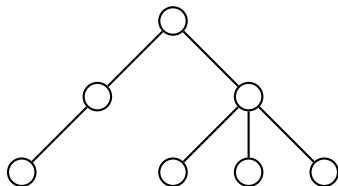
# 1. 树及其性质

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$



# 数学归纳法I

定理

$$\forall n P(n)$$

# 数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

# 数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

# 数学归纳法I

## 定理

$\forall n P(n)$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

(1)  $P(0)$

# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

(1)  $P(0)$

(2)  $P(k) \rightarrow P(k + 1)$



# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。  $\square$

$$(1) P(0)$$

$$(2) P(k) \rightarrow P(k + 1)$$

$$P(0)$$

# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

$$(1) P(0)$$

$$(2) P(k) \rightarrow P(k + 1)$$

$$P(0) \quad P(1)$$

# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

$$(1) P(0)$$

$$(2) P(k) \rightarrow P(k + 1)$$

$$P(0) \quad P(1) \quad P(2)$$

# 数学归纳法I

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 0)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k + 1$ 时 $P(n)$ 也成立。 □

$$(1) P(0)$$

$$(2) P(k) \rightarrow P(k + 1)$$

$$P(0) \ P(1) \ P(2) \ \dots$$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

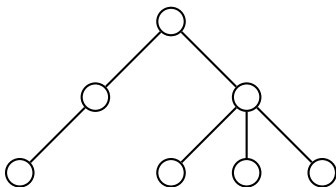
$1 \Rightarrow 2$

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

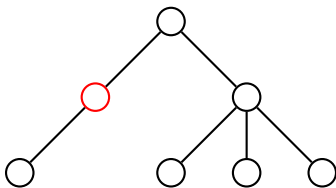


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

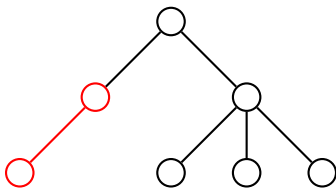


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$



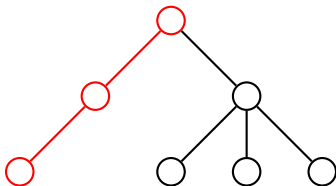


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

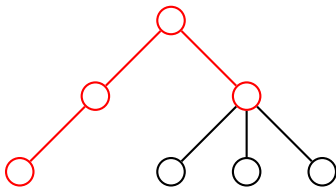


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

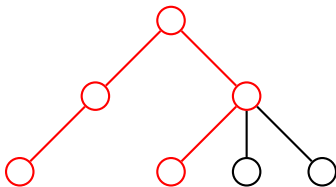


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

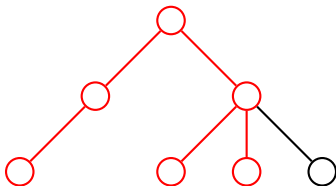


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

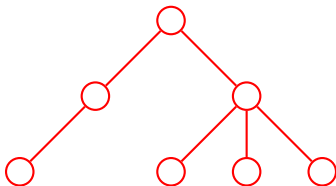


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

- (1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。
- (2) 假设当 $p = k$ 时结论成立,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点,



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边, 因此 $v$ 的度必为1。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时， $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路， $v$ 为 $P$ 的一个端点，则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外，由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边，同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边，因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边, 因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 $G'$ 连通且无圈,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边, 因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 $G'$ 连通且无圈, 则 $G'$ 是树。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边, 因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 $G'$ 连通且无圈, 则 $G'$ 是树。 $G'$ 有 $k$ 个顶点,  $q - 1$ 条边,



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时， $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k+1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路， $v$ 为 $P$ 的一个端点，则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外，由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边，同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边，因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图 $G'$ 连通且无圈，则 $G'$ 是树。 $G'$ 有 $k$ 个顶点， $q - 1$ 条边，由归纳假设， $q - 1 = k - 1$ ,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时， $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路， $v$ 为 $P$ 的一个端点，则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外，由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边，同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边，因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图 $G'$ 连通且无圈，则 $G'$ 是树。 $G'$ 有 $k$ 个顶点， $q - 1$ 条边，由归纳假设， $q - 1 = k - 1$ ，从而 $q = (k + 1) - 1$ ，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时， $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设 $P$ 为 $G$ 中的一条最长路， $v$ 为 $P$ 的一个端点，则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外，由 $G$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边，同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边，因此 $v$ 的度必为1。去掉 $G$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图 $G'$ 连通且无圈，则 $G'$ 是树。 $G'$ 有 $k$ 个顶点， $q - 1$ 条边，由归纳假设， $q - 1 = k - 1$ ，从而 $q = (k + 1) - 1$ ，即当 $p = k + 1$ 时结论也成立。□

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

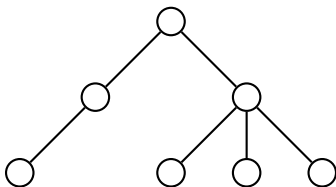
$1 \Rightarrow 2$

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$



# 数学归纳法II

定理

$$\forall n P(n)$$

# 数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

# 数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。



# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



(1)  $P(0)$

# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



(1)  $P(0)$

(2)  $(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



(1)  $P(0)$

(2)  $(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

$P(0)$

# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



$$(1) P(0)$$

$$(2) (\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$$

$$P(0) \quad P(1)$$

# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



(1)  $P(0)$

(2)  $(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

$P(0) \ P(1) \ P(2)$

# 数学归纳法II

## 定理

$$\forall n P(n)$$

## 证明.

用数学归纳法证明，施归纳于 $n$ 。

(1) 当 $n = 0$ 时 $P(n)$ 成立。

(2) 假设当 $n < k (k \geq 1)$ 时 $P(n)$ 成立，往证当 $n = k$ 时结论也成立。



(1)  $P(0)$

(2)  $(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

$P(0) P(1) P(2) \dots$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

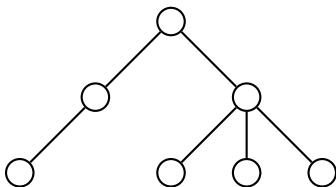


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

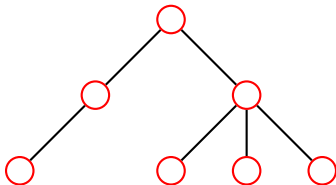


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

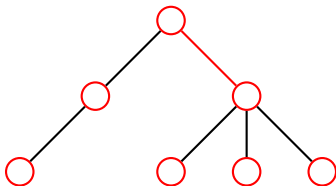


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

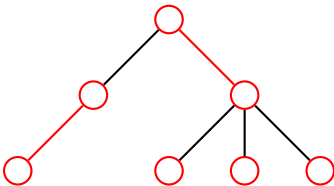


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

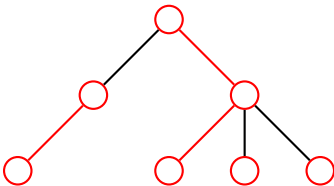


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

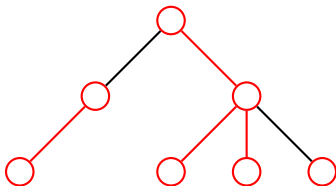


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

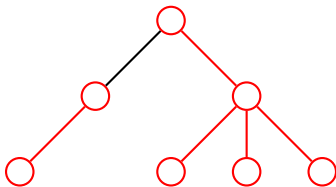


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

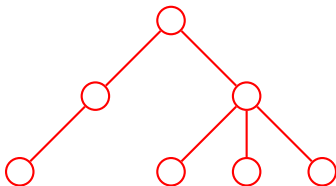


### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$





## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

- (1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。
- (2) 假设当 $q < k$ 时结论成立,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

- (1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。
- (2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

- (1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。
- (2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边,



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数 $q$ 。

- (1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。
- (2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边，得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ ，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边，得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ ，它们均连通无圈，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边，得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ ，它们均连通无圈，因此为树。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边，得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ ，它们均连通无圈，因此为树。设 $G_1$ 有 $p_1$ 个顶点， $k_1$ 条边，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立，往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边，得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ ，它们均连通无圈，因此为树。设 $G_1$ 有 $p_1$ 个顶点， $k_1$ 条边， $G_2$ 有 $p_2$ 个顶点， $k_2$ 条边，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边, 得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ , 它们均连通无圈, 因此为树。设 $G_1$ 有 $p_1$ 个顶点,  $k_1$ 条边,  $G_2$ 有 $p_2$ 个顶点,  $k_2$ 条边, 由归纳假设,

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

## 定理1.1

设  $G = (V, E)$  为一个  $(p, q)$  图，下列各命题等价：

1.  $G$  为树；
2.  $G$  为连通的且  $q = p - 1$ ；
3.  $G$  中无圈且  $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数  $q$ 。

(1) 当  $q = 0$  时， $p = 1$ ，结论显然成立。

(2) 假设当  $q < k$  时结论成立，往证当  $q = k$  时结论也成立。设  $G$  有  $k$  条边。去掉  $G$  中的任意一条边，得到两个支  $G_1$  和  $G_2$ ，它们均连通无圈，因此为树。设  $G_1$  有  $p_1$  个顶点， $k_1$  条边， $G_2$  有  $p_2$  个顶点， $k_2$  条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加 1，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$1 \Rightarrow 2$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $G$ 有 $k$ 条边。去掉 $G$ 中的任意一条边, 得到两个支 $G_1$ 和 $G_2$ , 它们均连通无圈, 因此为树。设 $G_1$ 有 $p_1$ 个顶点,  $k_1$ 条边,  $G_2$ 有 $p_2$ 个顶点,  $k_2$ 条边, 由归纳假设,

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加, 两边再同时加 1, 得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$



### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈, 则去掉圈上的一条边,

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈, 则去掉圈上的一条边, 得到的图仍然为连通的。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈, 则去掉圈上的一条边, 得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈,



## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。从而最后得到的图中有 $p - 1$ 条边，

## 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$2 \Rightarrow 3$

证明.

只需证 $G$ 中无圈。用反证法。假设图 $G$ 中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。从而最后得到的图中有 $p - 1$ 条边，这与去掉边之前图 $G$ 中的边数 $q = p - 1$ 矛盾。  $\square$

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.



### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支,

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点,

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支，则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点， $q_i$ 条边，

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支，则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点， $q_i$ 条边，则在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图，下列各命题等价：

1.  $G$ 为树；
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ；
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支，则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点， $q_i$ 条边，则在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加，

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点,  $q_i$ 条边, 则在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。



### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点,  $q_i$ 条边, 则在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。于是 $k = 1$ ,

### 定理1.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图, 下列各命题等价:

1.  $G$ 为树;
2.  $G$ 为连通的且 $q = p - 1$ ;
3.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ 。

$3 \Rightarrow 1$

证明.

只需证 $G$ 连通。设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点,  $q_i$ 条边, 则在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。于是 $k = 1$ , 从而 $G$ 为连通的。



## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1) 当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1) 当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立,



## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1) 当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1) 当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1) 当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2) 假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ ,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ ,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ ,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。



## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ ,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ ,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k (k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。



## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

## 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知,  $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则,  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设, 存在一棵具有 $k$ 个顶点的树,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设, 存在一棵具有 $k$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 。

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设, 存在一棵具有 $k$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 。在其度为 $a_k - 1$ 的顶点上联结一条边和一个顶点,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设, 存在一棵具有 $k$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 。在其度为 $a_k - 1$ 的顶点上联结一条边和一个顶点, 便得到了一棵具有 $k+1$ 个顶点的树,

## 习题1

设 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 为 $p$ 个正整数,  $p \geq 2$ , 并且 $\sum_{i=1}^p a_i = 2(p-1)$ 。证明: 存在一棵具有 $p$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $p$ 。

(1)当 $p = 2$ 时,  $a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$ 。由 $a_1, a_2$ 为正整数知, $a_1 = 1, a_2 = 1$ 。两个顶点之间联结一条边, 就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当 $p = k(k \geq 2)$ 时结论成立, 往证当 $p = k+1$ 时结论也成立。设 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 为 $k+1$ 个正整数, 并且 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$ 。此时必存在 $s, 1 \leq s \leq k+1$ , 使得 $a_s = 1$ 。否则, 如果对任意的 $i, 1 \leq i \leq k+1$ , 有 $a_i \geq 2$ , 那么 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$ , 与 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$ 矛盾。不妨设 $a_{k+1} = 1$ 。此时必存在 $t, 1 \leq t \leq k, a_t > 1$ 。否则, $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$ , 于是 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$ , 矛盾。不妨设 $a_k > 1$ 。于是 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 为正整数, 并且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$ 。由归纳假设, 存在一棵具有 $k$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1$ 。在其度为 $a_k - 1$ 的顶点上联结一条边和一个顶点, 便得到了一棵具有 $k+1$ 个顶点的树, 它的各个顶点的度分别为 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ 。□

241131211

241131211

24113111



241131211

24113111

2411211

241131211

24113111

2411211

241111

241131211

24113111

2411211

241111

23111

241131211

24113111

2411211

241111

23111

2211

241131211

24113111

2411211

241111

23111

2211

211

241131211

24113111

2411211

241111

23111

2211

211

11

241131211

24113111

2411211

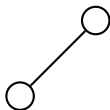
241111

23111

2211

211

11



241131211

24113111

2411211

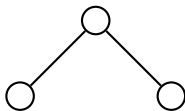
241111

23111

2211

211

11





241131211

24113111

2411211

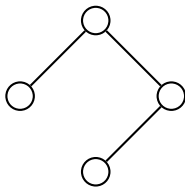
241111

23111

2211

211

11



241131211

24113111

2411211

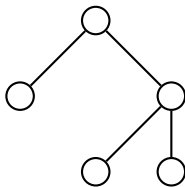
241111

23111

2211

211

11



241131211

24113111

2411211

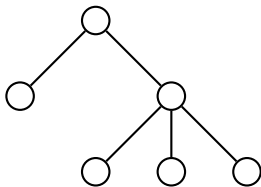
241111

23111

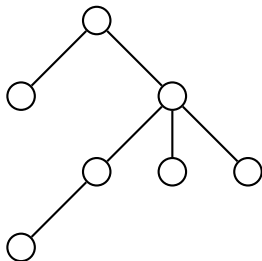
2211

211

11



241131211  
24113111  
2411211  
241111  
23111  
2211  
211  
11



241131211

24113111

2411211

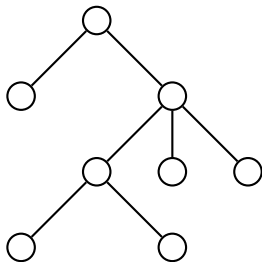
241111

23111

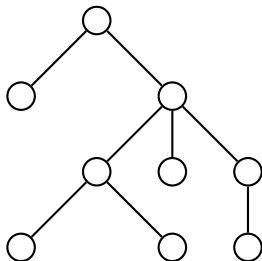
2211

211

11



241131211  
24113111  
2411211  
241111  
23111  
2211  
211  
11



## 2. 生成树

### 定义2.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图， $G$ 的一个生成子图 $T = (V, F)$ 如果是树，则称 $T$ 为 $G$ 的生成树。

## 2. 生成树

### 定义2.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图， $G$ 的一个生成子图 $T = (V, F)$ 如果是树，则称 $T$ 为 $G$ 的生成树。

### 定理2.1

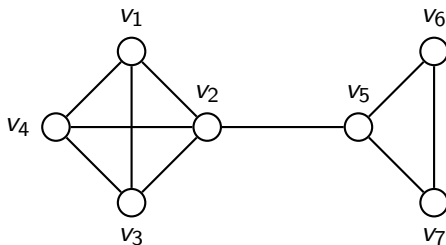
图 $G$ 有生成树的充分必要条件是 $G$ 为一个连通图。



### 3. 割点、桥和割集

#### 定义3.1

设 $v$ 为图 $G$ 的一个顶点，如果 $G - v$ 的支数大于 $G$ 的支数，则称顶点 $v$ 为图 $G$ 的一个割点。

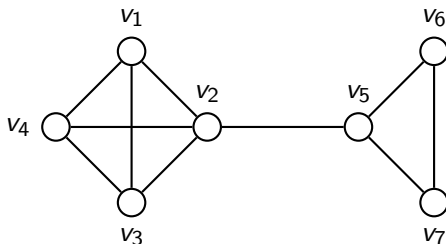


### 3. 割点、桥和割集

#### 定理3.1

设 $v$ 为连通图 $G = (V, E)$ 的一个割点，则下列命题等价：

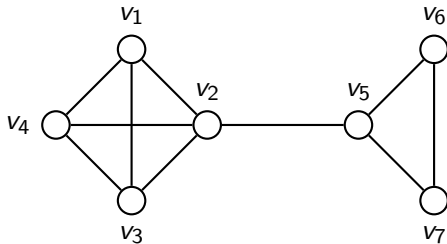
- (1)  $v$ 为图 $G$ 的一个割点；
- (2) 集合 $V \setminus \{v\}$ 有一个二划分 $\{U, W\}$ ，使得对任意的 $u \in U$ ， $w \in W$ ， $v$ 在联结 $u$ 和 $w$ 的每条路上；
- (3) 存在与 $v$ 不同的两个顶点 $u$ 和 $w$ ，使得 $v$ 在每一条 $u$ 与 $w$ 间的路上。



### 3. 割点、桥和割集

#### 定义3.2

图 $G$ 的一条边 $x$ 称为 $G$ 的一座桥，如果 $G - x$ 的支数大于 $G$ 的支数。

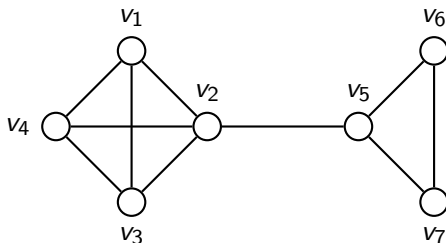


### 3. 割点、桥和割集

#### 定理3.2

设 $x$ 为连通图 $G = (V, E)$ 的一条边，则下列命题等价：

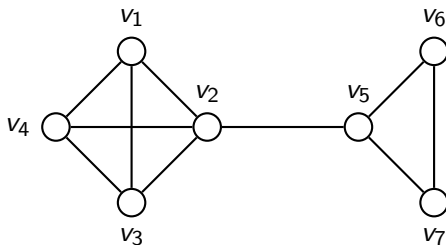
- (1)  $x$ 为 $G$ 的桥；
- (2)  $x$ 不在 $G$ 的任一圈上；
- (3) 存在 $V$ 的一个划分 $\{U, W\}$ ，使得对任意的 $u \in U, w \in W$ ， $x$ 在每一条联结 $u$ 与 $w$ 的路上；
- (4) 存在 $G$ 的不同顶点 $u$ 和 $v$ ，使得边 $x$ 在联结 $u$ 和 $v$ 的每条路上。



### 3. 割点、桥和割集

#### 定义3.3

设  $G = (V, E)$  为图,  $S \subseteq E$ 。如果从  $G$  中去掉  $S$  中的所有边得到的图  $G - S$  的支数大于  $G$  的支数, 而去掉  $S$  的任一真子集中的边得到的图的支数不大于  $G$  的支数, 则称  $S$  为  $G$  的一个**割集**。



# 习题

## 习题2

分别画出具有 4 、 5 、 6 、 7 个顶点的所有树（同构的只算一个）。