树

定义1. 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

定理1. 设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，下列各命题等价：

1. G为树；
2. G为连通的且$q=p-1$；
3. G中无圈且$q=p-1$。

证明.

$1 \Rightarrow 2$

(证法一)

只需证$q=p-1$，用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$，结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设树G有$k+1$个顶点。G中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为G中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由G中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉G中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图G'连通且无圈，则G'是树。G'有k个顶点，$q-1$条边，由归纳假设，$q-1=k-1$，从而$q=(k+1)-1$，即当$p=k+1$时结论也成立。

（证法二）

只需证$q=p-1$，用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q=0$时，$p=1$,结论显然成立。

（2）假设当$q<k$时结论成立，往证当$q=k$时结论也成立。设树G有k条边。去掉G中的任意一条边，得到两个支G_1和G_2，它们均连通无圈，因此是树。设G_1有p_1个顶点，k_1条边，G_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加1，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q=k$时结论也成立。

$2 \Rightarrow 3$

只需证G中无圈。用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。由从1到2的证明知最后得到的图中有$p-1$条边，这与去掉边之前图G中的边数$q=p-1$矛盾。

$3 \Rightarrow 1$

只需证G连通。设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边。由1到2的证明知在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。于是$k = 1$，从而G为连通的。 □

练习1. 设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于p。

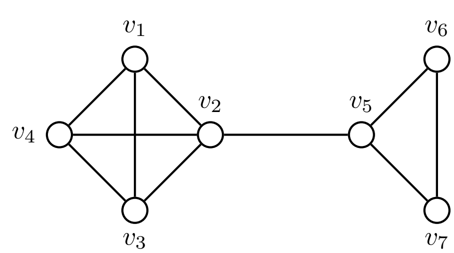
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一个一棵具有$k+1$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}。 □

定义2. 设$G = (V, E)$为一个图，G的一个生成子图$T = (V, F)$如果是树，则称T为G的**生成树**。

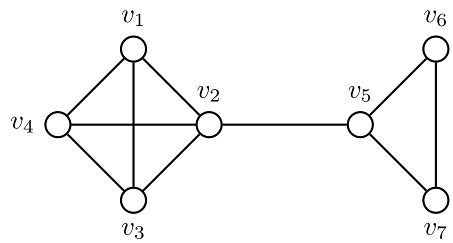
定理2. 图G有生成树的充分必要条件是G为一个连通图。

定义3. 设v为图G的一个顶点，如果$G - v$的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个**割点**。

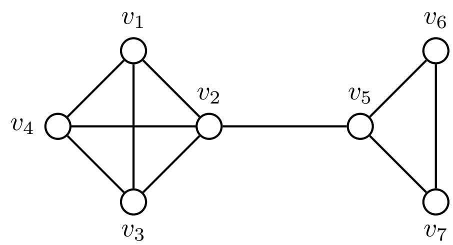


定理3. 设v为连通图$G = (V, E)$的一个割点，则下列命题等价：

1. v为图G的一个割点；
2. 集合$V \setminus \{v\}$有一个二划分$\{U, W\}$，使得对任意的$u \in U$，$w \in W$，v在联结u和w的每条路上；
3. 存在与v不同的两个顶点u和w，使得v在每一条u与w间的路上。

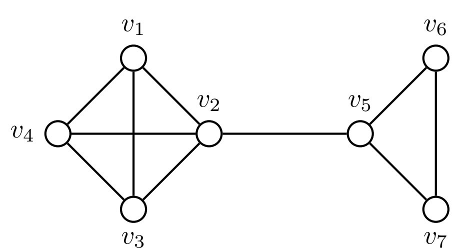


定义4. 图G的一条边x称为G的一座**桥**，如果$G-x$的支数大于G的支数。

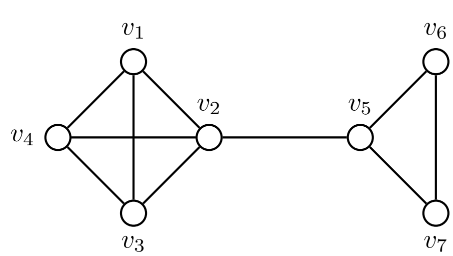


定理4. 设x为连通图$G=(V,E)$的一条边，则下列命题等价：

1. x为G的桥；
2. x不在G的任一圈上；
3. 存在V的一个划分$\{U,W\}$，使得对任意的$u\in U, w\in W$，x在每一条联结u与w的路上；
4. 存在G的不同顶点u和v，使得边x在联结u和v的每条路上。



定义5. 设$G=(V,E)$为图，$S\subseteq E$。如果从G中去掉S中的所有边得到的图$G-S$的支数大于G的支数，而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数，则称S为G的一个**割集**。



练习2. 恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明. 设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路$P: v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，在路$P$中，设$v_i$和$v_j(j > i+1)$之间在$G$中有一条边，则$v_{i+1}$不是$G$的割点，与$G$中只有两个顶点$v_1$和$v_k$不是割点矛盾。 $\square$

第 七 章