第九讲同态基本定理

陈建文

October 27, 2022

定义1. 设$(G,\circ)$与$(\bar{G},\cdot)$为两个群，如果存在一个从G到$\bar{G}$的映射ϕ，使得$\forall a,b\in G$，

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)\circ\phi(b)$$

则称ϕ为从G到$\bar{G}$的一个同态（*homomorphism*），而称G与$\bar{G}$同态。如果同态ϕ是满射，则称ϕ为从G到$\bar{G}$的一个满同态，此时称G与$\bar{G}$为满同态，并记为$G\sim\bar{G}$。类似的，如果同态ϕ为单射，则称ϕ为单同态。

定理1. 设$(G,\circ)$与$(\bar{G},\cdot)$为两个群，e和$\bar{e}$分别为其单位元，ϕ为从G到$\bar{G}$的同态，则，

$$\begin{aligned}&\phi(e)=\bar{e}\\&\forall a\in G\phi(a^{-1})=(\phi(a))^{-1}\end{aligned}$$

定理2. 设$(G,\circ)$为一个群，$\bar{G}$为一个具有二元代数运算$\cdot$的代数系。如果存在一个满射$\phi:G\to\bar{G}$使得$\forall a,b\in G$

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)\cdot\phi(b)$$

则$(\bar{G},\cdot)$为一个群。

定理3. 设ϕ为从群G到群$\bar{G}$的同态，则

（*1*）如果H为G的子群，那么$\phi(H)$为$\bar{G}$的子群；

（*2*）如果$\bar{H}$为$\bar{G}$的子群，那么$\phi^{-1}(\bar{H})$为G的子群；

（*3*）如果$\bar{N}$为$\bar{G}$的正规子群，那么$\phi^{-1}(\bar{N})$为G的正规子群。

定理4. 设ϕ为从群G到群$\bar{G}$的满同态，N为G的正规子群，则$\phi(N)$为$\bar{G}$的正规子群。

定义2. 设ϕ为群$(G,\circ)$到群$(\bar{G},\cdot)$的同态，$\bar{e}$为$\bar{G}$的单位元，则G的子群$\phi^{-1}(\bar{e})$称为同态ϕ的核，记为$Ker\phi$。$\phi(G)$称为ϕ在G下的同态像。

定理5. 设ϕ为从群$(G,\circ)$到群$(\bar{G},\cdot)$的同态，则$Ker\phi$为群G的正规子群。

定理6. 设N为G的一个正规子群，ϕ为从G到G/N的一个映射，$\forall x\in G\phi(x)=xN$，则ϕ为从G到G/N的一个满同态，$Ker\phi=N$。

证明. $\forall x,y \in G, \phi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \phi(x)\phi(y)$，这验证了$\phi$为从$G$到$G/N$的一个同态。

$\forall g \in G, g \in Ker\phi \Leftrightarrow \phi(g) = N \Leftrightarrow gN = N \Leftrightarrow g \in N$。 □

定理7 (群的同态基本定理)**.** 设ϕ为从群G到群$\bar{G}$的同态，则$G/KerG \cong \phi(G)$。

记$K = KerG$。令$f: G/K \to \phi(G)$，$\forall gK \in G/K, f(gK) = \phi(g)$。

$\forall g_1, g_2 \in G$，如果$g_1K = g_2K$，则$g_1^{-1}g_2 \in K$，从而$\phi(g_1^{-1}g_2) = \bar{e}$，即$\phi(g_1)^{-1}\phi(g_2) = \bar{e}$，于是$\phi(g_1) = \phi(g_2)$，所以$f(g_1K) = f(g_2K)$，这验证了$f$为映射。

f为单射，这是因为$\forall g_1K, g_2K \in G/K$，如果$f(g_1K) = f(g_2K)$，则$\phi(g_1) = \phi(g_2)$，从而$\phi(g_1^{-1}g_2) = \bar{e}$，于是$g_1^{-1}g_2 \in K$，所以$g_1K = g_2K$。

f为满射，这是因为$\forall \bar{g} \in \phi(G)$，$\exists g \in G$使得$\phi(g) = \bar{g}$，于是$f(gK) = \phi(g) = \bar{g}$。

$\forall g_1K, g_2K \in G/K$，$f((g_1K)(g_2K)) = f(g_1g_2K) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = f(g_1K)f(g_2K)$，因此$f$为从$G/K$到$\phi(G)$的同构。

课后作业题:

练习1. 设G为m阶循环群，$\bar{G}$为n阶循环群，试证：$G \sim \bar{G}$当且仅当$n|m$。

练习2. 设G为一个循环群，H为群G的子群，试证：G/H也为循环群。