第九章 平面图和图的着色

陈建文

第九章 平面图和图的着色

第九章 平面图和图的着色

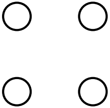
1. 平面图

第九章 平面图和图的着色

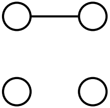
1. 平面图
   在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。

第九章 平面图和图的着色

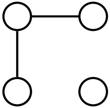
1. 平面图
   在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。
2. 图的着色



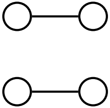
A



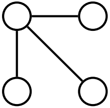
B



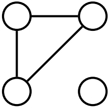
C



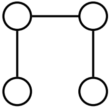
D



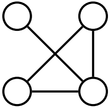
E



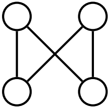
F



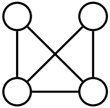
G



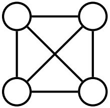
H



I



J



K

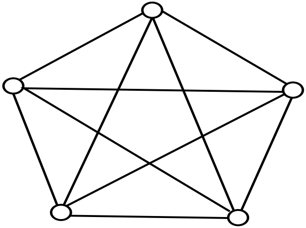
9.1 平面图及其欧拉公式

9.1 平面图及其欧拉公式

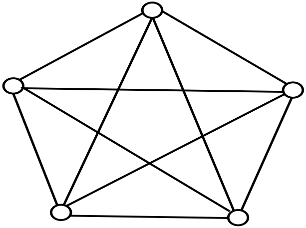
定义 1.1

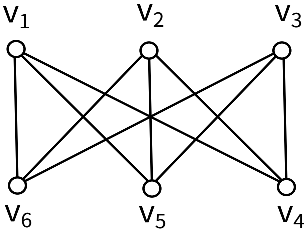
图G称为被嵌入平（曲）面S内，如果G的图解已画在S上，而且任意两条边均不相交（除可能在端点相交外）。 已嵌入平面内的图称为平面图。如果一个图可以嵌入平面，则称此图为可平面的。

9.1 平面图及其欧拉公式

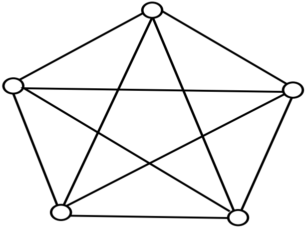


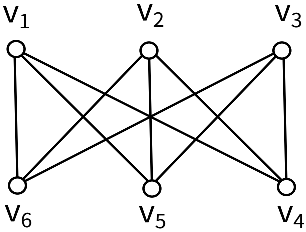
9.1 平面图及其欧拉公式





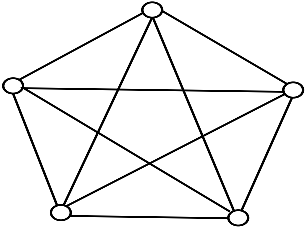
9.1 平面图及其欧拉公式

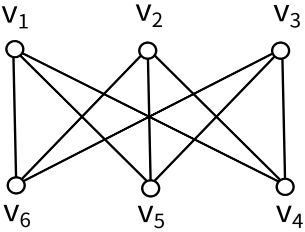




J. Hopcroft and R. Tarjan.
Efficient planarity testing.
Journal of the Association for Computing Machinery, 21(4):549–568, 1974.

9.1 平面图及其欧拉公式





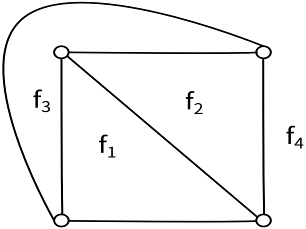
J. Hopcroft and R. Tarjan.
Efficient planarity testing.
Journal of the Association for Computing Machinery, 21(4):549-568, 1974.

J. Boyer and W. Myrvold.
On the Cutting Edge: Simplified O(n) Planarity by Edge Addition.
Journal of Grah algorithms and Applications, 8(3):241-273, 2004.

9.1 平面图及其欧拉公式

定义 1.2

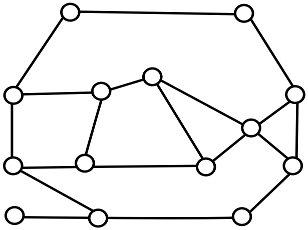
平面图G把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为G的面，其中无界的那个连通区域称为G的外部面，其余的连通区域称为G的内部面。



9.1 平面图及其欧拉公式

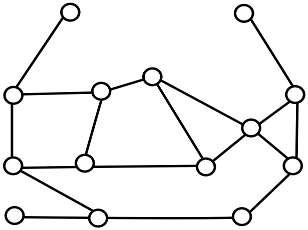
定理 1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

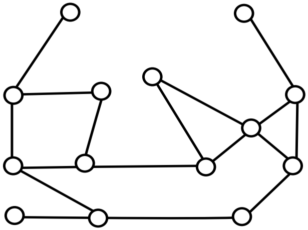
定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

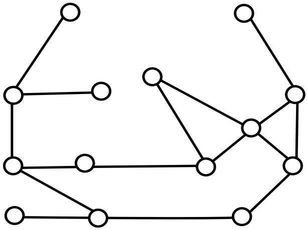
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

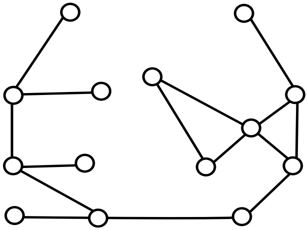
定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



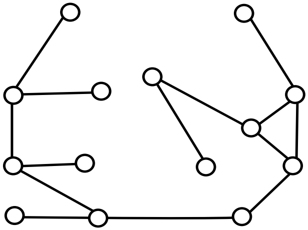
9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

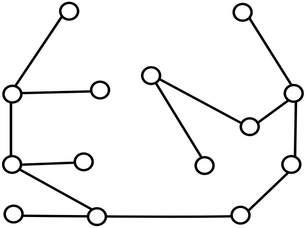
定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

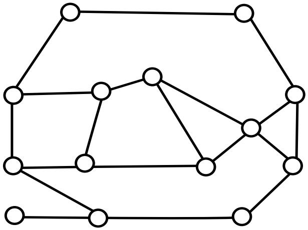
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$

证明.

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$

证明.

用数学归纳法证明，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f = 1$时，G中无圈，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f = 1$时，G中无圈，又因为G是连通的，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于面数f。
（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。
（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于面数f。
（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。
（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。
（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。
（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G-x$结论成立，

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

因此，

$$p-q+(k+1)=2$$

9.1 平面图及其欧拉公式

定理1.1

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$，$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面，此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

因此，

$$p-q+(k+1)=2$$

即当$f=k+1$时结论也成立。 □

9.1 平面图及其欧拉公式

推论 1

若平面图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$$q = n(p-2)/(n-2)$$

9.1 平面图及其欧拉公式

一个最大可平面图是一个可平面图，对此可平面图中不能再加入边而不破坏其可平面性。

推论 2

设G为一个有p个顶点q条边的最大可平面图，$p \geq 3$，则G的每个面都为三角形，而且$q = 3p - 6$。

推论 3

设G为一个(p, q)可平面连通图，而且G的每个面都是由一个长为4的圈围成的，则$q = 2p - 4$。

9.1 平面图及其欧拉公式

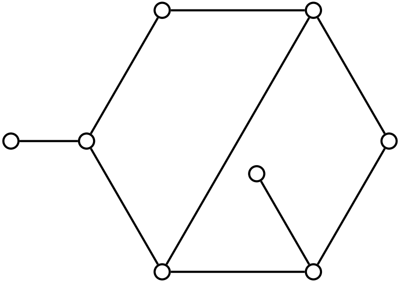
推论 4

若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p-6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p-4$。

9.1 平面图及其欧拉公式

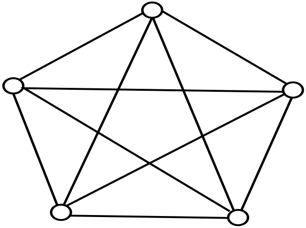
推论 4

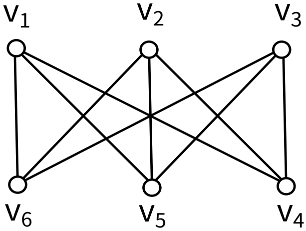
若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p - 6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p - 4$。



推论 5

K_5和$K_{3,3}$都不是可平面图。





推论 6

每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \le 5$。

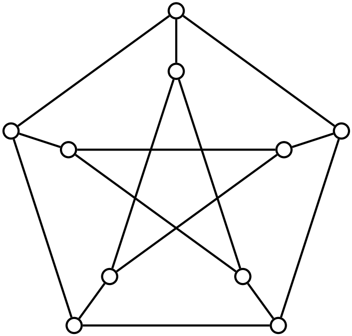
习题

图G的最短圈的长度称为G的围长。如果G中无圈，则定义G的围长为无穷大。

(1)证明：围长为r的平面连通图G中有

$$q \leq r(p-2)/(r-2), r \geq 3$$

(2)利用(1)证明Petersen图不是平面图。



9.2 非哈密顿平面图

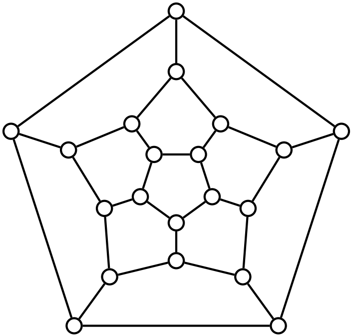
定理 2.1

设$G=(V,E)$为一个(p,q)平面哈密顿图， C为G的哈密顿圈。令f_i为C的内部由i条边围成的面的个数， g_i为C的外部i条边围成的面的个数，则

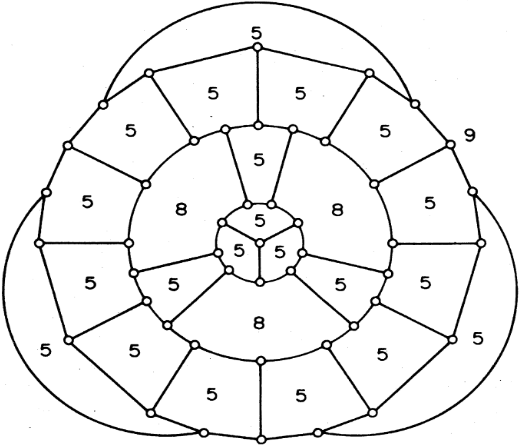
$$1\cdot f_3+2\cdot f_4+3\cdot f_5+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)f_i=p-2; \tag{1}$$

$$1\cdot g_3+2\cdot g_4+3\cdot g_5+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)g_i=p-2; \tag{2}$$

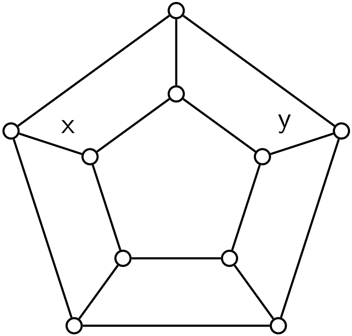
$$1\cdot(f_3-g_3)+2\cdot(f_4-g_4)+3\cdot(f_5-g_5)+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)(f_i-g_i)=0 \tag{3}$$



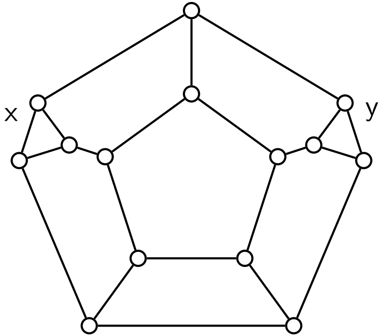
9.2 非哈密顿平面图



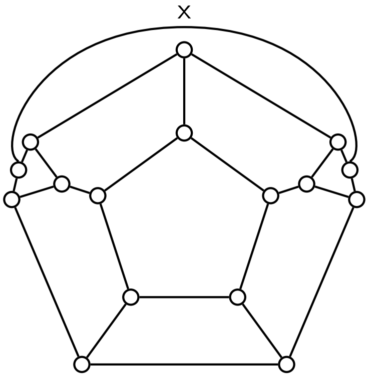
9.2 非哈密顿平面图



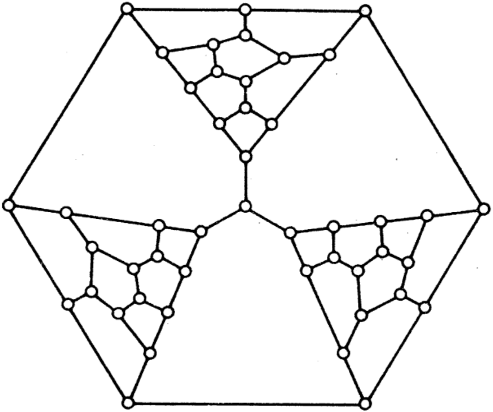
9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义 3.1
设$x = uv$为图$G = (V, E)$的一条边，又w不是G的顶点，则当用边uw和wv代替边x时，就称x被细分。如果G的某些条边被细分，产生的图称为G的细分图。

定义 3.2
两个图称为同胚的，如果它们都可以从同一个图通过一系列的边细分得到。

定理 3.1
一个图为可平面的充分必要条件是它没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义 3.3

一个图G的一个初等收缩由等同两个临接的顶点u和v得到，即从G中去掉u和v，然后再加上一个新顶点w，使得w临接于所有临接于u或v的顶点。一个图G可以收缩到图H，如果H可以从G经过一系列的初等收缩得到。

定理 3.2

一个图为可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义 3.4

设$G=(V,E)$为一个平面图，由G按照如下方法构造一个图G^*，G^*称为G的对偶图：对G的每个面f对应地有G^*的一个顶点f^*;对G的每条边e对应地有G^*的一条边e^*：G^*的两个顶点f^*与g^*由边e^*联结，当且仅当G中与顶点f^*与g^*对应的面f与g有公共边e，如果某条边x仅在一个面中出现而不是两个面的公共边，则在G^*中这个面对应的顶点有一个环。

9.4 图的顶点着色

定义 4.1

图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点着同一种颜色。

9.4 图的顶点着色

定义 4.1

图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点着同一种颜色。图G的一个n–着色是用n种颜色对G的着色。

9.4 图的顶点着色

定义 4.1

图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点着同一种颜色。图G的一个$n-$着色是用n种颜色对G的着色。

定义 4.2

图G的色数是使G为$n-$着色的数n的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$。

9.4 图的顶点着色

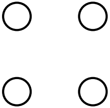
定义 4.1
图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点着同一种颜色。图G的一个$n-$着色是用n种颜色对G的着色。

定义 4.2
图G的色 数是 使G为$n-$着 色 的 数n的 最 小 值， 图G的 色 数 记为$\chi(G)$。若$\chi(G) \leq n$，则称G为$n-$可着色的。

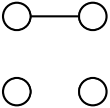
9.4 图的顶点着色

定义 4.1
图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点着同一种颜色。图G的一个$n-$着色是用n种颜色对G的着色。

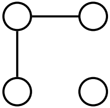
定义 4.2
图G的色数是使G为$n-$着色的数n的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$。若$\chi(G) \leq n$，则称G为$n-$可着色的。若$\chi(G) = n$，则称G为n色的。



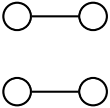
A



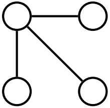
B



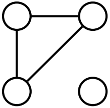
C



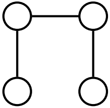
D



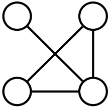
E



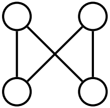
F



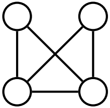
G



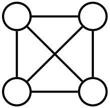
H



I



J



K

9.4 图的顶点着色

定理 4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1） 当$p = 1$时，结论显然成立。

（2） 假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G-v$是$\Delta(G-v)+1$可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。假设已经用至多$\Delta + 1$种颜色对$G - v$进行了顶点着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。假设已经用至多$\Delta + 1$种颜色对$G - v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G-v$是$\Delta(G-v)+1$可着色的。又由于$\Delta(G-v)\leq\Delta$，从而$G-v$为$\Delta+1$可着色的。假设已经用至多$\Delta+1$种颜色对$G-v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta=\Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G-v$是$\Delta(G-v)+1$可着色的。又由于$\Delta(G-v)\leq\Delta$，从而$G-v$为$\Delta+1$可着色的。假设已经用至多$\Delta+1$种颜色对$G-v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta + 1)-$可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k (k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G - v$是$\Delta(G - v) + 1$可着色的。又由于$\Delta(G - v) \leq \Delta$，从而$G - v$为$\Delta + 1$可着色的。假设已经用至多$\Delta + 1$种颜色对$G - v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，从而用至多$\Delta + 1$种颜色就可以对G的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.2
设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G为$(\Delta+1)-$可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设v为G中的任意一个顶点，由归纳假设，$G-v$是$\Delta(G-v)+1$可着色的。又由于$\Delta(G-v)\leq\Delta$，从而$G-v$为$\Delta+1$可着色的。假设已经用至多$\Delta+1$种颜色对$G-v$进行了顶点着色，使得任意相邻的顶点着不同的颜色，那么此时在G中与v邻接的顶点用了至多Δ种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，从而用至多$\Delta+1$种颜色就可以对G的顶点进行着色使得相邻的顶点着不同的颜色，即G为$\Delta+1$可着色的。 $\square$

定理 4.3

如果G是一个连通图且不是完全图也不是奇数长的圈，则G为$\Delta(G)-$可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6–可着色的。

证明.

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明,

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k (k \geq 1)$时结论成立，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k (k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是6−可着色的。

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。由于$\deg v \leq 5$，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。由于$\deg v \leq 5$，在$G - v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G-v$进行了着色。由于$\deg v\leq 5$，在$G-v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G-v$进行了着色。由于$\deg v\leq 5$，在$G-v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G-v$进行了着色。由于$\deg v\leq 5$，在$G-v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4
每个平面图为6−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设平面图G有$k + 1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G - v$进行了着色。由于$\deg v \leq 5$，在$G - v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多6种颜色就可以对G的顶点进行着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.4

每个平面图为6−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设平面图G有$k+1$个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有k个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是6−可着色的。假设用至多6种颜色对$G-v$进行了着色。由于$\deg v\leq 5$，在$G-v$中用至多6种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了5种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多6种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为6−可着色的。 □

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明,

9.4 图的顶点着色

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p<k$时结论成立，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \le 5$。于是，

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\le 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是5−可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v\leq 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G-v$进行了着色。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。如果$\deg v \leq 4$，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色。

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p=1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \le 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G-v$进行了着色。如果$\deg v \le 4$，则在$G-v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色。此时，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5

每个平面图为5−可着色的。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p=1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p<k$时结论成立，往证当$p=k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \le 5$。于是，$G-v$是一个有$k-1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G-v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G-v$进行了着色。如果$\deg v \le 4$，则在$G-v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，

9.4 图的顶点着色

定理 4.5
每个平面图为5−可着色的。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。
（1）当$p = 1$时，结论显然成立。
（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多5种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接的顶点至多用了4种颜色。此时，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为5−可着色的。

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如 果$\deg v = 5$,

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。

9.4 图的顶点着色

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v着色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，

证明(续上页).

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G - v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然为平面图。由归纳假设，G'为5−可着色的。设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G为5−可着色的。 □

9.4 图的顶点着色

定理 4.6
每个平面图为4−可着色的。

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

习题

若G是一个(p, q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法一.

用反证法。

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支的顶点数为p_1，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支的顶点数为p_1，边数为q_1，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支的顶点数为p_1，边数为q_1，所有其他支的顶点数为p_2，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支的顶点数为p_1，边数为q_1，所有其他支的顶点数为p_2，边数为q_2。

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法一.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支的顶点数为p_1，边数为q_1，所有其他支的顶点数为p_2，边数为q_2。则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)(p_1+p_2-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)((p_1-1)+(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_1(p_2-1)+p_2(p_1-1)+p_2(p_2-1)-(p_1-1)-(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1-1)(p_2-1))\\
=&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}+(p_1-1)(p_2-1)\\
\geq&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}\geq q \quad \text{矛盾。}
\end{aligned}
$$

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

习题

若G是一个(p, q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。

习题

若G是一个(p, q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1=(V_1,E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，取K_{p_1}中的一个顶点u和K_{p_2}中的一个顶点v，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，取K_{p_1}中的一个顶点u和K_{p_2}中的一个顶点v，将K_{p_1}中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的子图为G'，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。 则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，取K_{p_1}中的一个顶点u和K_{p_2}中的一个顶点v，将K_{p_1}中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的子图为G'，则K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和等于G'中的边数。

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1 = (V_1, E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，取K_{p_1}中的一个顶点u和K_{p_2}中的一个顶点v，将K_{p_1}中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的子图为G'，则K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法二.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个支。设其中一个支为$G_1=(V_1,E_1)$，包含p_1个顶点，q_1条边，其余的支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$，包含p_2个顶点，q_2条边。则G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和。将K_{p_1}和K_{p_2}视为一个图，取K_{p_1}中的一个顶点u和K_{p_2}中的一个顶点v，将K_{p_1}中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的子图为G'，则K_{p_1}和K_{p_2}中的边数之和等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，从而G_1中的边数与G_2中的边数之和小于等于K_{p-1}中的边数，即

$$q\leq\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

矛盾。 □

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，则uw和wv都不是G中的边，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，则uw和wv都不是G中的边，从而为G^c中的边，

习题

证明：如果图G不是连通图，则G^c是连通图。

证明.

设u和v为G^c中的任意两个不同的顶点。如果u和v不在G的同一个连通分量中，则uv不是G的一条边，于是uv为G^c的一条边，从而在G^c中u和v之间存在一条路；如果u和v在G的同一个连通分量中，取G的另外一个连通分量中的一个顶点w，则uw和wv都不是G中的边，从而为G^c中的边，于是uwv构成了G^c中u和v之间的一条路。 □

习题

证明：一个连通的(p,q)图中$q \geq p-1$。

证明.

设G为一个连通图，有p个顶点，q条边。如果G中有圈，去掉该圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果所得到的图中还有圈，再去掉该圈上的一条边，得到的图还是连通的。如此进行下去，最后可以得到一个连通无圈的图。假设该连通无圈的图中有q'条边，如果能够证明$q'=p-1$，则结论得证。

因此，只需证明一个连通无圈的(p,q)图中$q=p-1$即可。

设T为一个连通无圈的(p,q)图，以下用数学归纳法证明$q=p-1$。 □

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长 路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉T中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈。T'有k个顶点，$q-1$条边，由归纳假设，$q-1=k-1$，从而$q=(k+1)-1$，即当$p=k+1$时结论也成立。 □

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$,结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉 T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。 $\square$

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法三.

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法三.

用反证法。

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法三.

用反证法。假设G不连通，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法三.

用反证法。假设G不连通，则G^c连通，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法三.

用反证法。假设G不连通，则G^c连通，从而G^c中的边数$q' \geq p-1$，

习题

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证法三.

用反证法。假设G不连通，则G^c连通，从而G^c中的边数$q' \geq p-1$，于是G中的边数$q \leq \frac{1}{2}p(p-1)-(p-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，

习题

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证法三.

用反证法。假设G不连通，则G^c连通，从而G^c中的边数$q'\geq p-1$，于是G中的边数$q\leq\frac{1}{2}p(p-1)-(p-1)=\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，矛盾。 $\square$

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

习题
恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.
设 连 通 图G有p个 顶 点，

习题
恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.
设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ：$v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，

习题
恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.
设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ：$v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3)=2p-1>2(p-1)$，矛盾。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ：$v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P : $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3)=2p-1>2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ：$v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3)=2p-1>2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P : $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，在路$P$中，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1v_2\cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3)=2p-1>2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，在路$P$中，设$v_i$和$v_j(j>i+1)$之间在$G$中有一条边，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路P ： $v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3)=2p-1>2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，在路$P$中，设$v_i$和$v_j(j>i+1)$之间在$G$中有一条边，则$v_{i+1}$不是$G$的割点，

习题

恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明.

设连通图G有p个顶点，恰有两个顶点不是割点，往证G为一条路。由G连通知，G有一棵生成树T。取树T的一条最长路$P : v_1 v_2 \cdots v_k$，则v_1和v_k在T中的度必为1，它们都不是T的割点，从而也不是图G的割点。由G中恰有两个顶点不是割点知，T中除了v_1和v_k之外没有其他度为1的顶点，由此可得出T中所有顶点的度小于等于2。否则，假设T中存在一个度大于等于3的顶点，则T中所有顶点的度数之和$\geq 3+2+2(p-3) = 2p-1 > 2(p-1)$，矛盾。由$T$中所有顶点的度小于等于2知，路$P$中包含了$T$中所有的顶点，即路$P$中包含了$G$中所有的顶点。事实上，$G$就是路$P$。否则，在路$P$中，设$v_i$和$v_j (j > i+1)$之间在$G$中有一条边，则$v_{i+1}$不是$G$的割点，与$G$中只有两个顶点$v_1$和$v_k$不是割点矛盾。 $\square$

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用 反 证 法 ，

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \ge 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \ge 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \ge 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，矛盾。 □

定义

针对$\cup$，$\cap$，^{c}运算，递归的定义集合表达式如下：

1)单独的集合符号为集合表达式

2)如果A为集合表达式，则A^c为集合表达式；如果A与B为集合表达式，则$A \cup B$，$A \cap B$都为集合表达式。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；
如果$E \supseteq F$，则$E^c \subseteq F^c$，即$E' \subseteq F'$；

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；
如果$E \supseteq F$，则$E^c \subseteq F^c$，即$E' \subseteq F'$；
如果$E = F$，则$E^c = F^c$，即$E' = F'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用 数 学 归 纳 法 证 明 ，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A,

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的∪和∩分别替换成∩和∪，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号∪，∩和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$，即$E^c = E'$。 $\square$