

命题：可以判断真假的陈述句。通常，我们用 $T$ 表示真，用 $F$ 表示假。

例.

1. 对任意的自然数 $a, b, c$ ,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。(真命题)
2.  $\sqrt{2}$ 是无理数。(真命题)
3.  $\sqrt{2}$ 是有理数。(假命题)
4. 设 $f : [a, b] \rightarrow R$ 为一个Riemann可积函数,  $F : [a, b] \rightarrow R$ 在 $[a, b]$ 上满足 $F'(x) = f(x)$ , 那么 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 。(真命题)
5. 任何一幅地图都可以用四种颜色进行着色, 使得相邻的区域着以不同的颜色。

谓词：命题的谓语部分。

例.

$P(x) : x \text{ 是偶数}$  这里 $P$ 为一元谓词, 表示“是偶数”。当 $x$ 为某个确定的数字时,  $P(x)$ 则对应一个命题。例如 $P(2)$ 为真命题,  $P(1)$ 为假命题。这里, $P$ 之所以被称为一元谓词, 是因为 $P(x)$ 只包含一个变量 $x$ 。

$P(x, y) : x > y$  这里 $P$ 为二元谓词, 表示 $>$ 。当 $x$ 和 $y$ 为确定的数字时,  $P(x, y)$ 则对应一个命题。例如 $1 > 0$ 为真命题,  $0 > 1$ 为假命题。这里,  $P$ 之所以被称为二元谓词, 是因为 $P(x, y)$ 包含两个变量 $x$ 和 $y$ 。

相应的, 有三元谓词, 四元谓词, .....

我们还可以用如下方式由谓词得到命题:

$\forall x P(x)$ : 对任意的 $x$ ,  $P(x)$ 。For All中的 $A$ 上下颠倒可以得到 $\forall$ 。

$\exists x P(x)$ : 存在 $x$ ,  $P(x)$ 。There Exists中的 $E$ 左右颠倒可以得到 $\exists$ 。

命题可以由联结词 $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ 联结而构成复合命题。

设 $p$ 为命题, 则 $\neg p$ 表示“ $p$ 不成立”。

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题, 则 $p \wedge q$ 表示“ $p$ 成立, 并且 $q$ 成立”。

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题, 则 $p \vee q$ 表示“ $p$ 成立, 或者 $q$ 成立”。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \rightarrow q$ 表示“如果 $p$ 成立，那么 $q$ 成立”。

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这里需要注意的是，当 $p$ 为假时，则 $p \rightarrow q$ 一定为真，这是所有数学家共同的约定。下面的例子可以帮助大家更好的理解其实我们已经用到了这个约定。

对任意的实数 $x$ ，当 $x > 1$ 时， $x^2 > 1$ 。该命题显然是真命题，可以符号化为 $\forall x x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 。那么，既然对于任意的 $x$ ， $x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 成立，则

- 1) 当 $x = 2$ 时， $2 > 1 \rightarrow 2^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第一行；
- 2) 当 $x = 0$ 时， $0 > 1 \rightarrow 0^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第四行；
- 3) 当 $x = -2$ 时， $-2 > 1 \rightarrow (-2)^2 > 1$ 成立，这对应于以上真值表的第三行。

设 $p$ 和 $q$ 为两个命题，则 $p \leftrightarrow q$ 表示“ $p$ 等价于 $q$ ”。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

请大家思考，设 $p$ ， $q$ ， $r$ 为命题，则 $(p \vee q) \wedge r$ 所代表的命题的含义是什么？ $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 所代表的命题的含义是什么？这两个命题是等价的吗？我们可以通过枚举 $p, q, r$ 依次取值为 $T$ 和 $F$ 时， $(p \vee q) \wedge r$ 和 $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 同时取值为 $T$ 或 $F$ ，从而验证这两个命题是等价的，如下所示：

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

用同样的方法我们可以验证：

$(p \wedge q) \vee r$ 与 $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ 是等价的。

$p$	$q$	$r$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	F	F

$\neg(p \wedge q)$ 与 $\neg p \vee \neg q$ 是等价的。

$p$	$q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

$\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$ 是等价的。

$p$	$q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

$p \rightarrow q$ 与 $\neg p \vee q$ 是等价的。

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

我们还可以利用真值表检验 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ 是永真的。

$p$	$q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

假设我约定“ $\rightarrow$ ”的真值表如下：

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

我们会发现复合命题 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ 不是永真的，这将与我们关于“蕴含”的思维不相符。

同时我们还会发现 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 在逻辑上是等价的。

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

这也与我们的思维习惯不相符。

有些逻辑术语从外文翻译成中文时产生了不同的称谓，在本门课程中关于逻辑术语我们做如下的约定：

The negation of a proposition  $P$ :  $\neg P$

命题 $P$ 的否定:  $\neg P$

The converse of  $P \rightarrow Q$ :  $Q \rightarrow P$

命题 $P \rightarrow Q$ 的逆命题:  $Q \rightarrow P$

The inverse of  $P \rightarrow Q$ :  $\neg P \rightarrow \neg Q$

在较深入的探讨数理逻辑的教材中，该概念用的很少，因此我们不给出具体的翻译称谓，在需要表达该概念时明确说明为 $\neg P \rightarrow \neg Q$ 即可。

The contrapositive of  $P \rightarrow Q$ :  $\neg Q \rightarrow \neg P$

命题 $P \rightarrow Q$ 的逆否命题:  $\neg Q \rightarrow \neg P$

需要特别说明的是，命题 $P \rightarrow Q$ 的否定为 $\neg(P \rightarrow Q)$ ，而不是 $P \rightarrow \neg Q$ 。