

第七讲陪集、拉格朗日定理

陈建文

October 9, 2022

定义1. 设 G 为一个群, G 的任意子集称为群子集。在 2^G 中借助于 G 的乘法引入一个代数运算, 称为群子集的乘法: $\forall A, B \in 2^G$,

$$AB = \{ab | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

$\forall g \in G, A \in 2^G, \{g\}A$ 简写为 gA , 即 $gA = \{ga | a \in A\}$ 。

定义2. 设 H 为群 G 的一个子群, $a \in G$, 则集合 aH 称为子群 H 的一个左陪集, Ha 称为 H 的一个右陪集。

定理1. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a \in G, aH = H$ 的充分必要条件是 $a \in H$ 。

定理2. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, aH = bH$ 的充分必要条件是 $a^{-1}b \in H$ 。

定理3. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, aH = bH$ 或者 $aH \cap bH = \phi$ 。

定理4. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 $\forall a, b \in G, |aH| = |bH|$ 。

定理5. 设 H 为群 G 的一个子群, 则 H 的所有左陪集构成的集合为 G 的一个划分。

定义3. 设 H 为群 G 的一个子群, 如果 H 的所有不同的左陪集的个数为有限数 j , 则称 j 为 H 在 G 中的指数, 记为 $j = [G : H]$, 否则称 H 在 G 中的指数为无穷大。

定理6. 设 G 为一个有限群, H 为 G 的一个子群, 则 $|G| = |H| \cdot [G : H]$ 。

推论1. 有限群中每个元素的阶都能整除该有限群的阶。

推论2. 如果群 G 的阶为素数, 则 G 为一个循环群。

推论3. 设 G 为一个群, 则 $\forall a \in G, a^{|G|} = e$ 。

例. 阶小于等于5的群为交换群。

定理7. 设 H 为群 G 的一个子群, S_l 为 H 的所有左陪集构成的集合, S_r 为 H 的所有右陪集构成的集合, 则 $|S_l| = |S_r|$ 。

课后作业题:

练习1. 证明: 六阶群里必有一个三阶子群。

练习2. 设 p 为一个素数，证明：在阶为 p^m 的群里一定含有一个 p 阶子群，其中 $m \geq 1$ 。

练习3. 在三次对称群 S_3 中，找一个子群 H ，使得 H 的左陪集不等于 H 的右陪集。

练习4. 设 H 为群 G 的一个子群，如果左陪集 aH 等于右陪集 Ha ，即 $aH = Ha$ ，则 $\forall h \in H, ah = ha$ 一定成立吗？