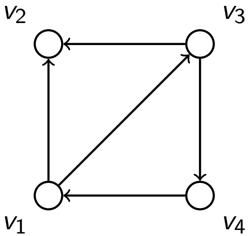
第十章有向图

陈建文

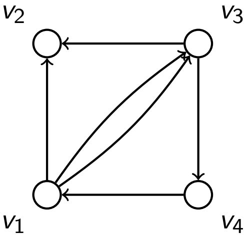
1. 有向图的概念

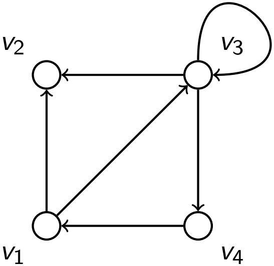
定义1.1

设V为一个有穷非空集合，$A \subseteq V \times V \setminus \{(v,v)|v \in V\}$，二元组$D=(V,A)$称为一个有向图。$V$称为有向图$D$的顶点集，$V$中的元素称为$D$的顶点。$A$称为$D$的弧集或有向边集，$A$中的元素称为$D$的弧或有向边。如果$x=(u,v)\in A$，则$u$称为弧$x$的起点，$v$称为弧$x$的终点。



1. 有向图的概念

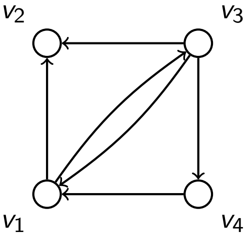


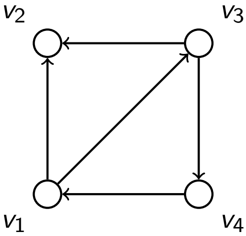


1. 有向图的概念

定义1.2

如果(u, v)和(v, u)都是有向图D的弧，则称(u, v)与(v, u)为D的对称弧。如果D中不含对称弧，则称D为定向图。



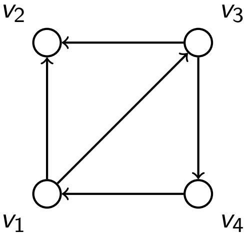


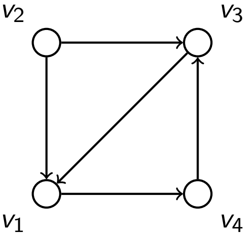
1. 有向图的概念

定义1.3

设$D=(V,A)$为一个有向图，D的反向图为有向图$D^T=(V,A^T)$，其中

$$A^T=\{(u,v)|(v,u)\in A\}$$

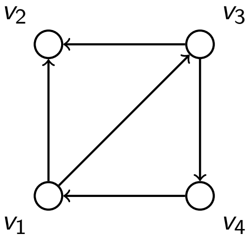




1. 有向图的概念

定义1.4

设$D=(V,A)$为一个有向图，v为D的任一顶点，以v为终点的弧称为v的入弧；以v为始点的弧称为v的出弧。顶点v的入弧的条数称为v的入度，记为$id(v)$；顶点v的出弧的条数称为v的出度，记为$od(v)$。



1. 有向图的概念

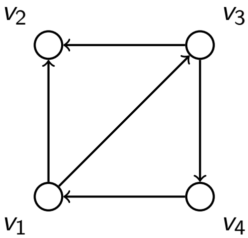
定理1.1

设$D=(V,A)$为一个有向图，$|A|=q$，则

$$\sum_{v\in V} id(v)=\sum_{v\in V} od(v)=q$$

从而

$$\sum_{v\in V}(id(v)+od(v))=2q$$

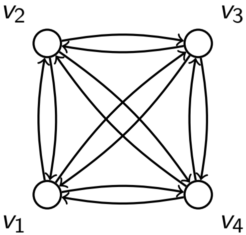


1. 有向图的概念

定义1.5

有向图$D=(V,A)$称为完全有向图，如果

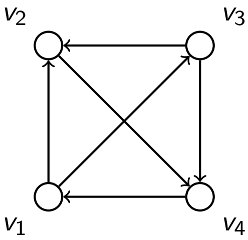
$$A = V \times V \setminus \{(v,v) | v \in V\}$$



1. 有向图的概念

定义1.6

一个比赛图为一个定向完全图，即任两个不同顶点间有且仅有一条弧。

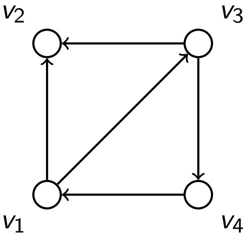


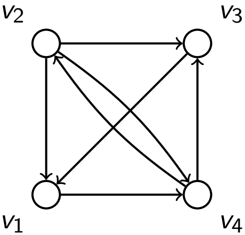
1. 有向图的概念

定义1.7

有向图$D=(V,A)$的补图定义为$D^c=(V,A^c)$，其中

$$A^c=(V\times V\setminus\{(v,v)|v\in V\})\setminus A$$

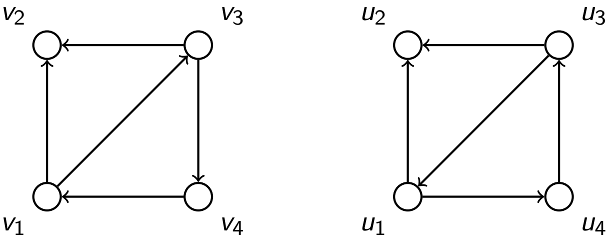


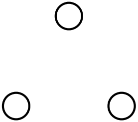


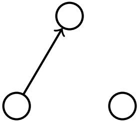
1. 有向图的概念

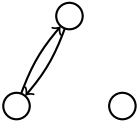
定义1.8

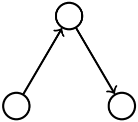
设$D_1 = (V_1, A_1)$，$D_2 = (V_2, A_2)$都为有向图，如果存在一个一一对应$\varphi : V_1 \to V_2$，使得$\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$当且仅当$(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$，则称$D_1$与$D_2$同构。

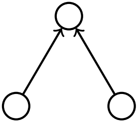


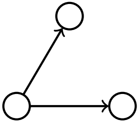

A

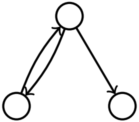

B

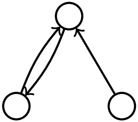

C

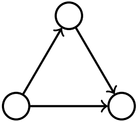

D

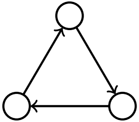

E

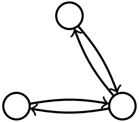

F

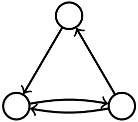

G

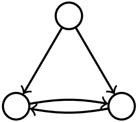

H

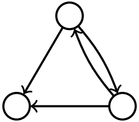

I

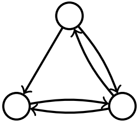

J

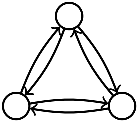

K


L


M


N

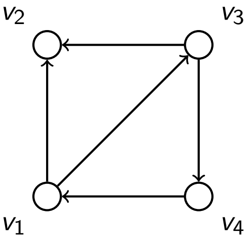

O

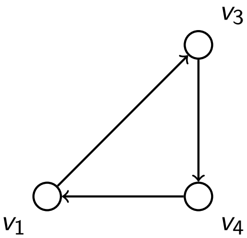

P

1. 有向图的概念

定义1.9

设$D = (V, A)$为一个有向图，有向图$H = (V_1, A_1)$称为D的一个子图，如果V_1为V的非空子集，A_1为A的子集。如果$H \neq D$，则称H为D的真子图。

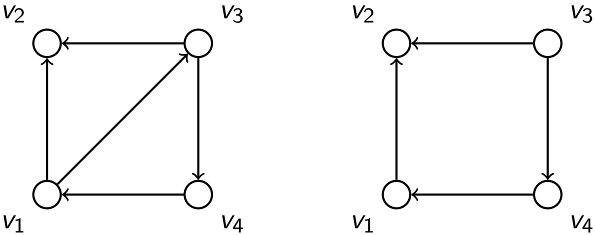




1. 有向图的概念

定义1.10

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果$F\subseteq A$，则称D的子图$H=(V,F)$为D的一个生成子图。

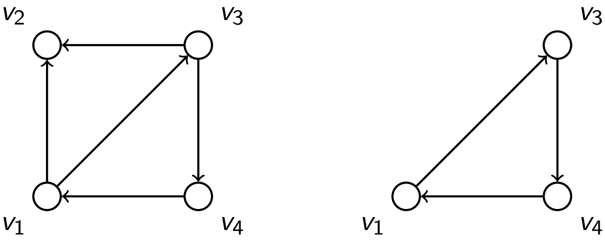


1. 有向图的概念

定义1.11

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果$S\subseteq V$，则S的导出子图定义为$H=(S,F)$，其中

$$F=\{(u,v)\in A|u\in S,v\in S\}$$

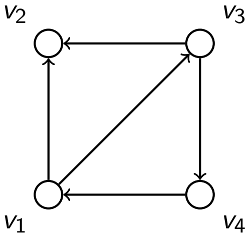


2. 有向路和有向圈

定义2.1
设$D=(V,A)$为一个有向图。D的一条有向通道为D的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0,x_1,v_1,x_2,v_2,\cdots,v_{n-1},x_n,v_n$$

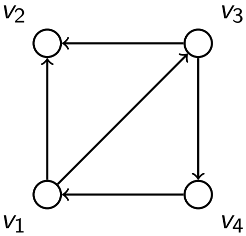
其中$x_i=(v_{i-1},v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$。n称为该有向通道的长。这样的有向通道常称为v_0-v_n有向通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。当$v_0=v_n$时,则称此有向通道为闭有向通道。



2. 有向路和有向圈

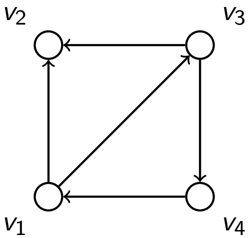
定义2.2

如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同，则称此有向通道为有向图的有向迹。如果一条闭有向通道上的各弧互不相同，则称此闭有向通道为闭有向迹。



2. 有向路和有向圈

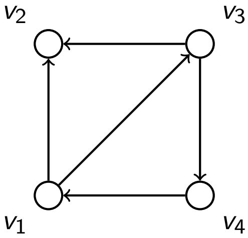
定义2.3
如果一条有向通道上的各顶点互不相同，则称此有向通道为有向路。如果一条长度大于0的闭有向迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭有向迹为有向圈，或有向回路。

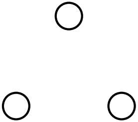


2. 有向路和有向圈

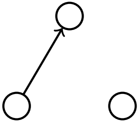
定义2.4

含有向图D的所有顶点的有向圈称为D的生成有向圈，或有向哈密顿圈。有生成有向圈的有向图称为有向哈密顿图。含有向图D的所有顶点的有向路称为D的生成有向路，或有向哈密顿路。

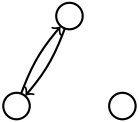




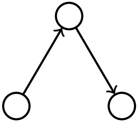
A



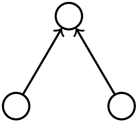
B



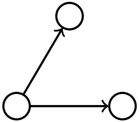
C



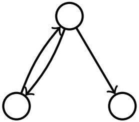
D



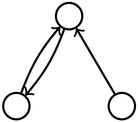
E



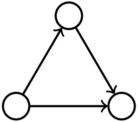
F



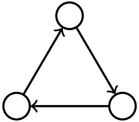
G



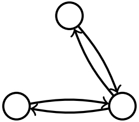
H



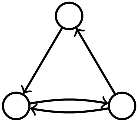
I



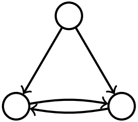
J



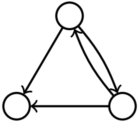
K



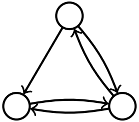
L



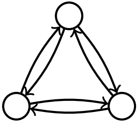
M



N



O

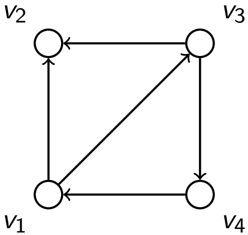


P

2. 有向路和有向圈

定义2.5

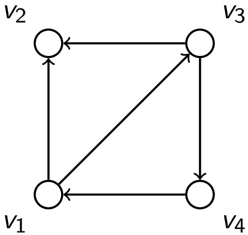
设$D=(V,A)$为一个有向图，u和v为D的顶点。如果在D中有一条从u到v的有向路，则称从u能达到v，或者v是从u可达的。

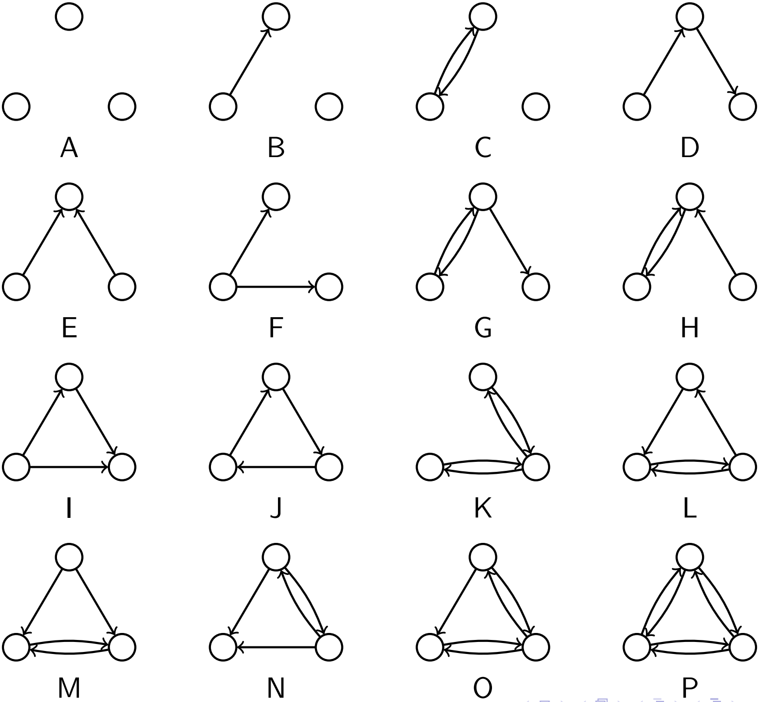


2. 有向路和有向圈

定义2.6

有向图D称为是强连通的，如果对D的任两个不同的顶点u和v，u和v是互达的。



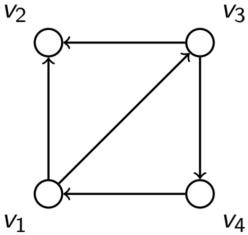

A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P

定理2.1
有向图$D=(V,A)$为强连通的，当且仅当D有一条闭生成通道。

2. 有向路和有向圈

定义2.7

有向图D的极大强连通子图称为D的一个强支。



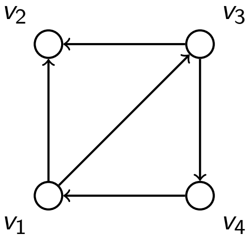
2. 有向路和有向圈

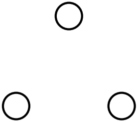
定理2.2

设$D = (V, A)$为一个有向图。在V上定义二元关系$\simeq$如下：

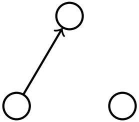
$$\forall u, v \in V, u \simeq v \text{当且仅当} u \text{与} v \text{互达}$$

则$\simeq$是V上的等价关系，D的强支就是顶点集V关于$\simeq$的每个等价类的导出子图。

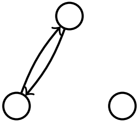




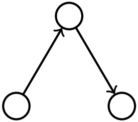
A



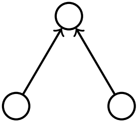
B



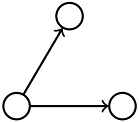
C



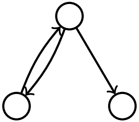
D



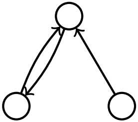
E



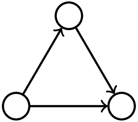
F



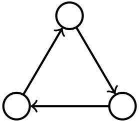
G



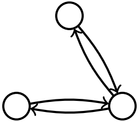
H



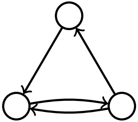
I



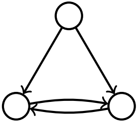
J



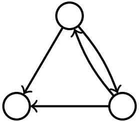
K



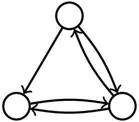
L



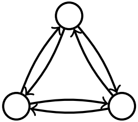
M



N



O

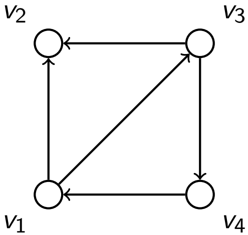


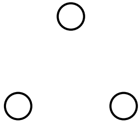
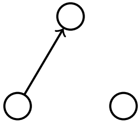
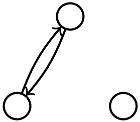
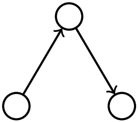
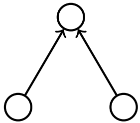
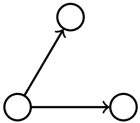
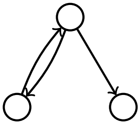
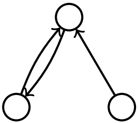
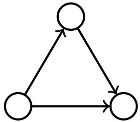
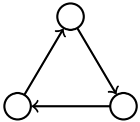
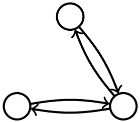
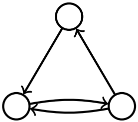
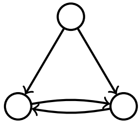
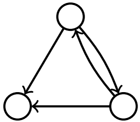
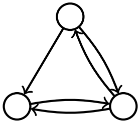
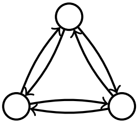
P

2. 有向路和有向圈

定义2.8

有向图$D=(V,A)$称为单向连通的，如果对D的任两个不同顶点u和v，或从u可达到v，或从v可达到u。

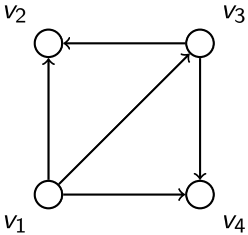


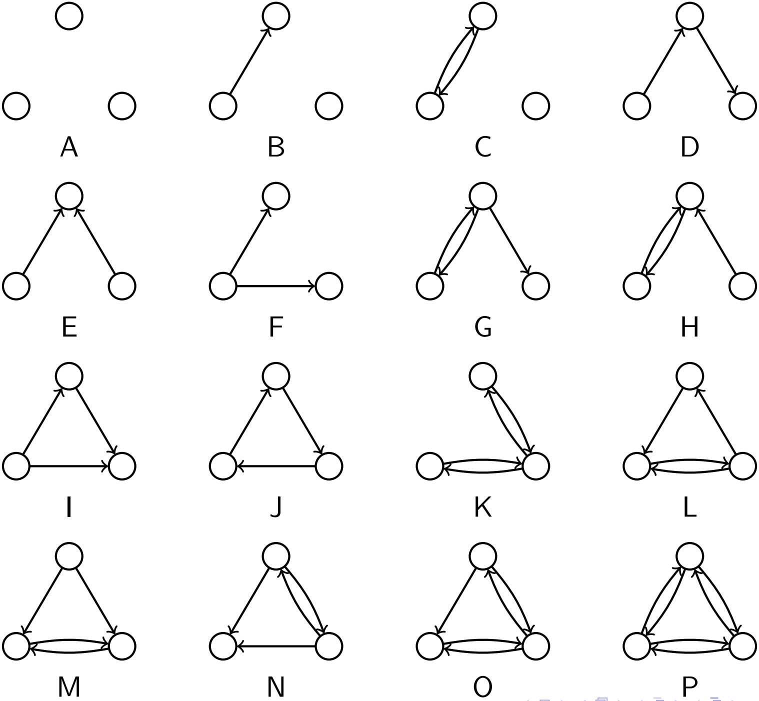

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

2. 有向路和有向圈

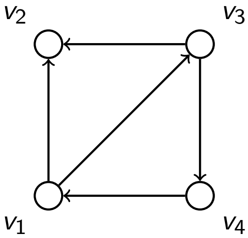
定义2.9

设$D=(V,A)$为一个有向图，如果抹去D中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称D为弱连通的，简称连通的。

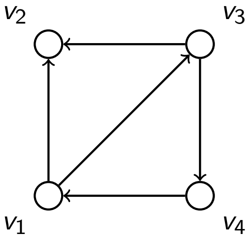



A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P

4. 有向图的邻接矩阵



4. 有向图的邻接矩阵

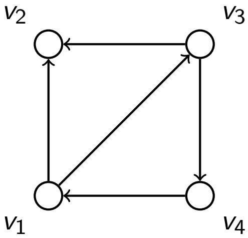


定义4.1

设$D=(V,A)$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$，$p\times p$矩阵$B=(b_{ij})$称为D的邻接矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果}(v_i,v_j)\in A\\ 0, \text{如果}(v_i,v_j)\notin A\end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵

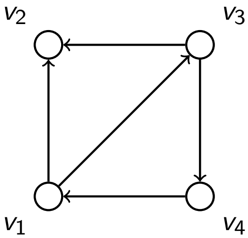


定义4.2

设$D=(V,A)$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$，$p\times p$矩阵$R=(r_{ij})$称为D的可达矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果从}v_i\text{可以达到}v_j\\0,\text{如果从}v_i\text{不能达到}v_j\end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵



定义4.3

设$D = (V, A)$为一个有p个顶点q条弧的有向图，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$，$p \times q$矩阵$H = (h_{ij})$称为$D$的关联矩阵，其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, \text{如果} v_i \text{为弧} x_j \text{的起点} \\ -1, \text{如果} v_i \text{为弧} x_j \text{的终点} \\ 0, \text{如果} v_i \text{既不是弧} x_j \text{的起点也不是弧} x_j \text{的终点} \end{cases}$$

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.1

设B为有向图$D=(V,A)$的邻接矩阵，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，则从顶点v_i到顶点v_j的长为l的有向通道的条数等于B^l的第i行第j列元素$(B^l)_{ij}$的值。

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.2

设$p \times p$矩阵B是有向图$D=(V,A)$的邻接矩阵，则D的可达矩阵

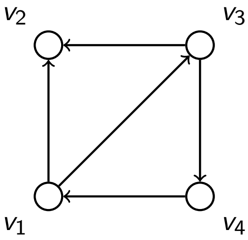
$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(p-1)}$$

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.3
设$p \times p$矩阵R为有向图$D = (V, A)$的可达矩阵，

$$C = R \wedge R^T,$$

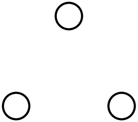
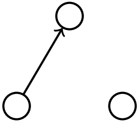
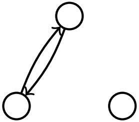
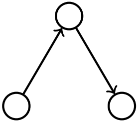
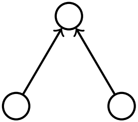
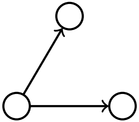
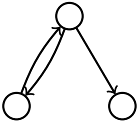
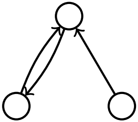
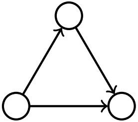
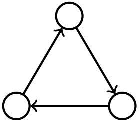
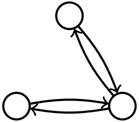
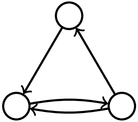
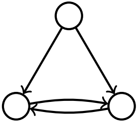
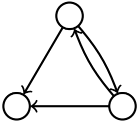
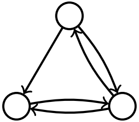
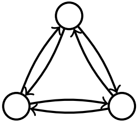
C的第i行上为1的元素$c_{ij_1}, c_{ij_2}, \ldots, c_{ij_k}$，则$v_i$在由$V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}\}$诱导出的$D$的子图-$D$的强支中。



5. 有向树与有序树

定义5.1

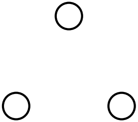
一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。


A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

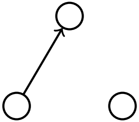
5. 有向树与有序树

定义5.2

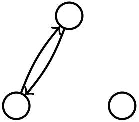
有向树D称为有根树，如果D中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根，出度为0的顶点称为叶子，非叶顶点称为分支点或内顶点。



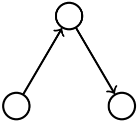
A



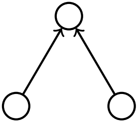
B



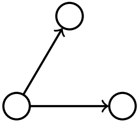
C



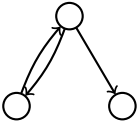
D



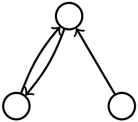
E



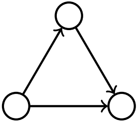
F



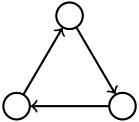
G



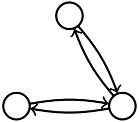
H



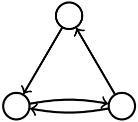
I



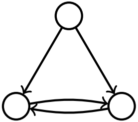
J



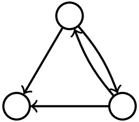
K



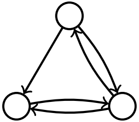
L



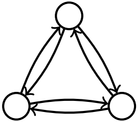
M



N



O



P

5. 有向树与有序树

定义5.3
设$T = (V, A)$为一棵有根树。如果$(u, v) \in A$，则称v为u的儿子，u为v的父亲。如果从顶点u能达到顶点v，则称v为u的子孙，u为v的祖先。如果u是v的祖先且$u \neq v$，则称u为v的真祖先，v为u的真子孙。

5. 有向树与有序树

定义5.4

设$T = (V, A)$为一棵以v_0为根的有根树。从v_0到顶点v的有向路的长度称为T的顶点v的深度。从顶点v到T的叶子的最长的有向路的长度称为顶点v在T中的高度。根顶点v_0的高度称为树T的高度。

5. 有向树与有序树

定义5.5
设$T=(V,A)$为一棵有根树，v是T的一个顶点，由v及其子孙所导出的T的子图称为T的以v为根的**子树**。

5. 有向树与有序树

定义5.6
设$T=(V,A)$为一棵有根树。如果T的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称T为一棵**有序树**。

5. 有向树与有序树

定义5.7

有序树T称为m元有序树，如果T的每个顶点的出度$\leq m$。一棵m元有序树T称为正则m元有序树，如果T的每个顶点的出度不是0就是m。二元有序树简称二元树。

习题1

设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

习题1

设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

证明.

习题1

设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

证明.

设出度为1的顶点数为n_1,

习题1

设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

证明.

设出度为1的顶点数为n_1，则$2n_2 + n_1 = n_2 + n_1 + n_0 - 1$，

习题1

设T为一棵有n_0个叶子的二元树，出度为2的顶点数为n_2，试证$n_0 = n_2 + 1$。

证明.

设出度为1的顶点数为n_1，则$2n_2 + n_1 = n_2 + n_1 + n_0 - 1$，从而$n_0 = n_2 + 1$。 $\square$

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

习题2
证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.
设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$,

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D = (V, A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P : v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1) \notin A, (v_k, v) \notin A$。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P:v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v,v_1)\notin A,(v_k,v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1,v)\in A,(v,v_k)\in A$。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v,v_1)\notin A, (v_k,v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1,v)\in A, (v,v_k)\in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v,v_i)\in A$的顶点，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D = (V, A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P : v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1) \notin A, (v_k, v) \notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1, v) \in A, (v, v_k) \in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v, v_i) \in A$的顶点，易见$1 < i \leq k$。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1)\notin A, (v_k, v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1, v)\in A, (v, v_k)\in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v, v_i)\in A$的顶点，易见$1<i\leq k$。于是，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1) \notin A, (v_k, v) \notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1, v) \in A, (v, v_k) \in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v, v_i) \in A$的顶点，易见$1 < i \le k$。于是，$(v_{i-1}, v) \in A$，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v,v_1)\notin A,(v_k,v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1,v)\in A,(v,v_k)\in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v,v_i)\in A$的顶点，易见$1<i\leq k$。于是，$(v_{i-1},v)\in A$，因此$v_1v_2\cdots v_{i-1}vv_i\cdots v_k$为$D$的一条比$P$更长的有向路，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1) \notin A, (v_k, v) \notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1, v) \in A, (v, v_k) \in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v, v_i) \in A$的顶点，易见$1 < i \leq k$。于是，$(v_{i-1}, v) \in A$，因此$v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v v_i \cdots v_k$为$D$的一条比$P$更长的有向路，这与$P$为$D$的最长路矛盾。

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v,v_1)\notin A,(v_k,v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1,v)\in A,(v,v_k)\in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v,v_i)\in A$的顶点，易见$1<i\leq k$。于是，$(v_{i-1},v)\in A$，因此$v_1v_2\cdots v_{i-1}vv_i\cdots v_k$为$D$的一条比$P$更长的有向路，这与$P$为$D$的最长路矛盾。因此，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D = (V, A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1 v_2 \cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k < p$，则存在$v \in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v, v_1) \notin A, (v_k, v) \notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1, v) \in A, (v, v_k) \in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v, v_i) \in A$的顶点，易见$1 < i \leq k$。于是，$(v_{i-1}, v) \in A$，因此$v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v v_i \cdots v_k$为$D$的一条比$P$更长的有向路，这与$P$为$D$的最长路矛盾。因此，$k = p$，

习题2

证明：每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明.

设$D=(V,A)$为一个有p个顶点的比赛图。令$P: v_1v_2\cdots v_k$为D的一条最长的有向路。如果$k<p$，则存在$v\in V$，v不在路P上。由P为最长路知$(v,v_1)\notin A,(v_k,v)\notin A$。再由$D$为比赛图知$(v_1,v)\in A,(v,v_k)\in A$。令$v_i$为路$P$上从$v_1$到$v_k$的第一个使得$(v,v_i)\in A$的顶点，易见$1<i\leq k$。于是，$(v_{i-1},v)\in A$，因此$v_1v_2\cdots v_{i-1}vv_i\cdots v_k$为$D$的一条比$P$更长的有向路，这与$P$为$D$的最长路矛盾。因此，$k=p$，即$D$中的最长路$P$为$D$的有向哈密顿路。 $\square$

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

习题3
用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，$Ch(A)$与所有的0,1序列构成的集合对等，

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，$Ch(A)$与所有的0,1序列构成的集合对等，对任意的$f \in Ch(A)$，

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，$Ch(A)$与所有的0,1序列构成的集合对等，对任意的$f \in Ch(A)$，f对应0, 1序列$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots$。

习题3

用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明.

由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，$Ch(A)$与所有的0,1序列构成的集合对等，对任意的$f \in Ch(A)$，f对应0, 1序列$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots$。

以下用对角线法证明所有的0, 1序列构成的集合不可数。 □

用反证法,

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{aligned} & b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\ & b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\ & b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\ & \cdots \\ & b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\ & \cdots \end{aligned}$$

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{array}{c} b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\ b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\ b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\ \cdots \\ b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\ \cdots \end{array}$$

其中$b_{ij}=0$或1。

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$
\begin{array}{r}
b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\
b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\
b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\
\cdots \\
b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\
\cdots
\end{array}
$$

其中$b_{ij}=0$或1。
构造0,1序列

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$
\begin{aligned}
b_{11}\, b_{12}\, b_{13} \cdots \\
b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \cdots \\
b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \cdots \\
\cdots \\
b_{n1}\, b_{n2}\, b_{n3} \cdots \\
\cdots
\end{aligned}
$$

其中$b_{ij} = 0$或1。
构造0,1序列

$$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{array}{r} b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\ b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\ b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\ \cdots \\ b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\ \cdots \end{array}$$

其中$b_{ij}=0$或1。
构造0,1序列

$$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

其中

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} b_{nn}=1 \\ 1 & \text{如果} b_{nn}=0 \end{cases}$$

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{aligned} &b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\ &b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\ &b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\ &\cdots \\ &b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

其中$b_{ij}=0$或1。
构造0,1序列

$$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

其中

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} b_{nn}=1 \\ 1 & \text{如果} b_{nn}=0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列$d_1, d_2, d_3, \cdots$与前述序列中的任意一个0,1序列都不相同，

用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集，则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$
\begin{array}{c}
b_{11}b_{12}b_{13}\cdots \\
b_{21}b_{22}b_{23}\cdots \\
b_{31}b_{32}b_{33}\cdots \\
\cdots \\
b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots \\
\cdots
\end{array}
$$

其中$b_{ij}=0$或1。
构造0,1序列

$$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

其中

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} b_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果} b_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列$d_1, d_2, d_3, \cdots$与前述序列中的任意一个$0,1$序列都不相同，矛盾。

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明.

用 反 证 法 ，

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。

习题4
证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则$\chi(G) \leq 5$。

证明.
用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \le 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \ge 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$，$n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，

习题4

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。

证明.

用反证法，假设$\chi(G) = n$, $n \geq 6$。对图G的顶点用n种颜色进行着色，使得任意两个相邻的顶点着不同的颜色。设V_1，V_2，V_3为其中着3种不同颜色的顶点集合，V_4，V_5，V_6为其中着另外3种不同颜色的顶点集合。则由$V_1 \cup V_2 \cup V_3$导出的子图G_1不是2-可着色的，从而G_1中存在一个奇数长的圈C_1;同理，由$V_3 \cup V_4 \cup V_6$导出的子图G_2中存在一个奇数长的圈C_2。C_1和C_2没有公共顶点，矛盾。 □

定义

针对$\cup$，$\cap$，^{c}运算，递归的定义集合表达式如下：
1)单独的集合符号为集合表达式
2)如果A为集合表达式，则A^c为集合表达式；如果A与B为集合表达式，则$A \cup B$，$A \cap B$都为集合表达式。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；
如果$E \supseteq F$，则$E^c \subseteq F^c$，即$E' \subseteq F'$；

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

如果$E \subseteq F$，则$E^c \supseteq F^c$，即$E' \supseteq F'$；
如果$E \supseteq F$，则$E^c \subseteq F^c$，即$E' \subseteq F'$；
如果$E = F$，则$E^c = F^c$，即$E' = F'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用 数 学 归 纳 法 证 明 ，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1） 当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k-1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$，

定理

对于任意的集合表达式E，将式中的每个单独的集合符号X替换成X^c，将式中出现的$\cup$和$\cap$分别替换成$\cap$和$\cup$，得到的集合表达式记为E'，则$E^c = E'$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于集合表达式E中出现符号$\cup$，$\cap$和^{c}的次数n。

（1）当$n = 0$时，E中只出现了一个单独的集合，设为A，则$E^c = A^c$，即$E^c = A'$。

（2）假设当$n < k$时结论成立，往证当$n = k$时结论也成立。设集合表达式E中出现了k个符号。如果$E = A^c$，则A中出现了$k - 1$个符号，由归纳假设，$A^c = A'$。此时，$(A^c)^c = (A')^c$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cup B$，则A中和B中出现的符号数小于k，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A' \cap B'$，即$E^c = E'$。如果$E = A \cap B$，则$A$和$B$中出现的符号数小于$k$，由归纳假设，$A^c = A'$，$B^c = B'$。此时，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = A' \cup B'$，即$E^c = E'$。 □

习题

习题5

设无向图$G=(V,E)$，其中$V=\{1,2,3,4,5,6\}, E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{4,5\}\}$，则无向图$G$有______个连通分量。

习题6

设有向图$D=(V,A)$，其中$V=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5)\}$，则有向图$D$有______个强连通分量。