

第十讲无零因子环的特征数

陈建文

October 11, 2022

课后作业题:

练习1. 设 F 为一个域, $|F| = 4$, 证明:

- (1) F 的特征数为2;
- (2) F 的任意一个非零元并且非单位元1的元素 x 均满足方程 $x^2 = x + 1$;
- (3) 列出 F 的加法表和乘法表。

证明. (1) F 中任一非零元关于加法的阶必整除4, 因此可能为1,2或4, 又因为 F 的特征数必为素数, 因此 F 的特征数为2。

(2) 设 x 为 F 的任意一个非零元并且非单位元1的元素,

则 $x + 1 \neq 0$ (否则 $x + 1 = 1 + 1$, 可得 $x = 1$, 与 x 非单位元1矛盾), $x + 1 \neq 1$ (否则 $x = 0$, 与 x 非零元矛盾), $x + 1 \neq x$ (否则 $1 = 0$, 与 $1 \neq 0$ 矛盾), 于是 x 和 $x + 1$ 为 F 中与0和1不同的其他两个元素, 此时必有 $x(x + 1) = 1$, 这是因为 $x(x + 1) \neq x$ (否则 $x + 1 = 1$, 与 $x + 1 \neq 1$ 矛盾), $x(x + 1) \neq x + 1$ (否则 $x = 1$, 与 x 非单位元1矛盾)。

于是 $x^2 + x = 1$, 两边同时加 x 得 $x^2 = x + 1$ (由于 x 得阶为2, 这里 $x + x = 0$)。

(3) 设 $F = \{0, 1, a, b\}$, 加法表如下:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

乘法表如下:

o	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

□