# 离散数学讲义

陈建文

March 22, 2022

# 第 三 章　关系

**定义3.1.** 设$A$与$B$为两个集合。一个从$A\times B$到$\{T,F\}$的映射$R$，称为从$A$到$B$的一个二元关系。$\forall(a,b)\in A\times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

**例3.1.** 设集合$X=\{1,2\}$，则$2^X$上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X\times 2^X$到$\{T,F\}$的映射，

$\subseteq(\phi,\phi)=T,\subseteq(\phi,\{1\})=T,\subseteq(\phi,\{2\})=T,\subseteq(\phi,\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1\},\phi)=F,\subseteq(\{1\},\{1\})=T,\subseteq(\{1\},\{2\})=F,\subseteq(\{1\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{2\},\phi)=F,\subseteq(\{2\},\{1\})=F,\subseteq(\{2\},\{2\})=T,\subseteq(\{2\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1,2\},\phi)=F,\subseteq(\{1,2\},\{1\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{2\})=F,\subseteq(\{1,2\},\{1,2\})=T$

**定义3.2.** 设$A$与$B$为两个集合。$A\times B$的任一子集$R$称为从$A$到$B$的一个二元关系。如果$(a,b)\in R$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$；如果$(a,b)\notin R$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，并记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

**例3.2.** 设集合$X=\{1,2\}$，则$2^X$上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X\times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq=&\{(\phi,\phi),(\phi,\{1\}),(\phi,\{2\}),(\phi,\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\&(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

**例3.3.** 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"为$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

**例3.4.** 设$n$为任一给定的自然数。对任意的两个整数$m$，$k$，如果$m-k$能被$n$整除，则称$m$与$k$为模$n$同余，并记为$m\equiv k\pmod n$。显然，$m\equiv k\pmod n$当且仅当$m$被$n$除所得到的余数与$k$被$n$除所得到的余数相等。模$n$同余为$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

**定义3.3.** 设$R\subseteq A\times B$，集合

$$\{x\in A|\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$$

称为$R$的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A使得(x,y) \in R\}$$

称为$R$的值域，记为$ran(R)$。

**定义3.4.** 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为$n$个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets $S_1, S_2, \cdots, S_n$ (not necessarily distinct)，$R$ is a relation on these $n$ sets if it is a set of $n$-tuples each of which has its first element from $S_1$, its second element from $S_2$, and so on. More concisely, $R$ is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 5 | 2 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 6 | 3 |
| 4 | 7 | 1 |
| 6 | 7 | 1 |

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

**定义3.5.** 集合$X$上的二元关系$R$称为自反的，如果对$X$的任意元素$x$都有$xRx$。

**例3.5.** 判断下列二元关系是否为自反的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ *(不是)*
2. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （是）
3. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ （不是）
4. 集合$X$上的二元关系$R = \{(2,3)\}$ （不是）
5. 集合$X$上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ （是）

**定义3.6.** 集合$X$上的二元关系$R$称为反自反的，如果对$X$的任意元素$x$都有$(x,x) \notin R$。

**例3.6.** 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(是)*
2. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （不是）
3. 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合$X$上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

*5.* 集合$X$上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（不是）

**定义3.7.** 集合$X$上的二元关系$R$称为对称的，如果对$X$的任意元素$x$，$y$，只要$xRy$就有$yRx$。

**例3.7.** 判断下列二元关系是否为对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

*1.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(不是)*

*2.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

*3.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（是）

*4.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（不是）

*5.* 集合$X$上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

**定义3.8.** 集合$X$上的二元关系$R$称为反对称的，如果对$X$的任意元素$x$，$y$，$xRy$且$yRx$，则$x = y$。

**例3.8.** 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

*1.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

*2.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（是）

*3.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

*4.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

*5.* 集合$X$上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

**定义3.9.** 集合$X$上的二元关系$R$称为传递的，如果对$X$的任意元素$x$，$y$，$z$，只要$xRy$且$yRz$，就有$xRz$。

**例3.9.** 判断下列二元关系是否为传递的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

*1.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

*2.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

*3.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

*4.* 集合$X$上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

*5.* 集合$X$上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

**练习3.1.** 设$R$为集合$X$上的反自反的和传递的二元关系，证明：$R$为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的$x \in X$，$y \in Y$，如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则由$R$为传递的知$(x,x) \in R$，这与$R$为反自反的矛盾，从而$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$不可能成立。即如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则$x = y$成立，这证明了$R$为反对称的。

□

证法二. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$并且$x \neq y$，以下证明$(y,x) \notin R$。用反证法，假设$(y,x) \in R$，则由$R$为传递的知$(x,x) \in R$，这与$R$为反自反的矛盾 □

证法三. 用反证法。假设$R$不是反对称的二元关系，则存在$x \in X$，$y \in X$，$(x,y) \in R$，$(y,x) \in R$并且$x \neq y$，由$R$为传递的知，$(x,x) \in R$，这与$R$为反自反的矛盾。 □

**定义3.10.** 设$R$为从集合$A$到集合$B$的二元关系，$R$的逆$R^{-1}$定义为从集合$B$到集合$A$的二元关系

$$R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$$

**定理3.1.** 设$R$为集合$X$上的二元关系，则$R$为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明. 由$R$为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由$R$为对称的知，$(x,y) \in R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证$R$为对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$。

□

**定理3.2.** 设$R$为集合$X$上的二元关系，则$R$为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明. 只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。

如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$，从而$(x,y) \in R^{-1}$。 □

**定理3.3.** 设$R$和$S$为集合$X$上的二元关系，$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

**定理3.4.** 设$R$和$S$为集合$X$上的二元关系，则$(R^{-1})^{-1} = R$。

**定义3.11.** 设$R$为从集合$A$到集合$B$，$S$为从集合$B$到集合$C$的二元关系。$R$与$S$的合成$R \circ S$定义为从集合$A$到集合$C$的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x,z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

设$R$为集合$X$上的一个二元关系，$R$的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

**定理3.5.** 设$R_1$，$R_2$，$R_3$分别为从集合$A$到集合$B$，从集合$B$到集合$C$，从集合$C$到集合$D$的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

**定理3.6.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系，则$R$为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明. 由$R$为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a,c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a,b) \in R$并且$(b,c) \in R$，由$R$为传递的知$(a,c) \in R$。

由$R \circ R \subseteq R$往证$R$为传递的。

对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in R$，$(b,c) \in R$，则$(a,c) \in R \circ R$，由$R \circ R \subseteq R$知$(a,c) \in R$。 □

**定义3.12.** 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合，$R$为从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵$B$称为关系$R$的矩阵。

**例3.10.** 设集合$X = \{1,2\}$，$Y = \{3,4,5\}$，从$X$到$Y$的关系

$$S = \{(1,3),(2,5)\}$$

，则$S$的关系矩阵为？

**例3.11.** 设集合$X = \{1,2,3,4\}$，$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$，则$R$的关系矩阵为？

**定理3.7.** 设$B$为集合$X$上二元关系$R$的矩阵，则

1. $R$为自反的，当且仅当$B$的对角线上的全部元素都为*1*；
2. $R$为反自反的，当且仅当$B$的对角线上的全部元素都为*0*；
3. $R$为对称的，当且仅当$B$为对称矩阵；
4. $R$为反对称的，当且仅当$i \neq j$时$b_{ij}$与$b_{ji}$不同时为*1;*
5. $R$为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。

**定理3.8.** 设$B$为集合$X$上二元关系$R$的矩阵，则$R^{-1}$的矩阵为$B^T$。

**定义3.13.** 设$B$，$C$为两个布尔矩阵，$B$与$C$的逻辑乘为$B$与$C$的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$与$C$的逻辑加为$B$与$C$的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

**定理3.9.** 设$R$，$S$为从集合$X$到集合$Y$的二元关系，其矩阵分别为$B_R$和$B_S$。$R \cup S$与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R \cup S}$，$B_{R \cap S}$，则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

**定义3.14.** 设$A$为$m\times p$布尔矩阵，$B$为$p\times n$布尔矩阵，$A$与$B$的布尔乘积$A\circ B$定义为矩阵$C$，其元素计算如下

$$\begin{aligned}&c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\cdots\vee(a_{ip}\wedge b_{pj}),\\&\quad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

设布尔矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

则

$$B\circ B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

**定理3.10.** 设$X,Y,Z$为有穷集合，$|X|=m$，$|Y|=p$，$|Z|=n$。$R$为从$X$到$Y$的二元关系，$S$为从$Y$到$Z$的二元关系，$R$，$S$，$R\circ S$的矩阵分别为$B_R$，$B_S$，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S}=B_R\circ B_S$。

设集合$X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，关系$R$的矩阵为

$$B_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

则关系$R\circ R$的矩阵为

$$B_{R\circ R}=B_R\circ B_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

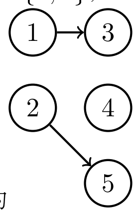
证明. 设$B_R=(a_{ij})$，$B_S=(b_{ij})$，$B_{R\circ S}=(c_{ij})$，

$$\begin{aligned}&c_{ij}=1\\\Leftrightarrow&(x_i,z_j)\in R\circ S\\\Leftrightarrow&\exists y_k\in Y(x_i,y_k)\in R\wedge(y_k,z_j)\in S\\\Leftrightarrow&(a_{i1}=1\wedge b_{1j}=1)\vee(a_{i2}=1\wedge b_{2j}=1)\vee\cdots\vee(a_{ip}=1\wedge b_{pj}=1)\\\Leftrightarrow&(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\cdots\vee(a_{ip}\wedge b_{pj})=1\end{aligned}$$

□

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设$X$和$Y$为有穷集合，$R$为从$X$到$Y$的二元关系。当用图表示$R$时，先把$X$与$Y$的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把$R$的任一序对$(x,y)$用从代表$x$的点画一条指向代表$y$的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系$R$的图。

设$X = \{1,2\}$，$Y = \{3,4,5\}$，从$X$到$Y$的关系$R = \{(1,3),(2,5)\}$，则关系$R$的图为

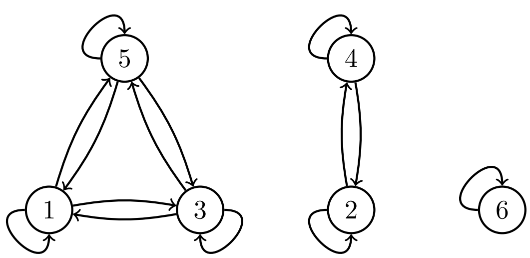



设$X$为有穷集合，$R$为集合$X$上的二元关系。当用图表示$R$时，先把$X$的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把$R$的任一序对$(x,y)$用从代表$x$的点画一条指向代表$y$的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系$R$的图。注意，如果$(x,x) \in R$，则在代表$x$的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系$R$定义如下：

$$
\begin{aligned}
R = &\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则关系$R$的图为




**定理3.11.** 设$R$为集合$X$上的二元关系，则

1. $R$为自反的，当且仅当$R$的图的每个顶点均有一个环；
2. $R$为反自反的，当且仅当$R$的图中没有环；
3. $R$为对称的，当且仅当$R$的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4. $R$为反对称的，当且仅当$R$的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线；
5. $R$为传递的，当且仅当在$R$的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

**定义3.15.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系。$X$上的一切包含$R$的传递关系的交称为$R$的传递闭包，用$R^+$表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

**定理3.12.** 设$R$为集合X上的一个二元关系，则关系$R$的传递闭包$R^+$为包含$R$的传递关系。

证明. 由定义$R^+ = \bigcap_{R\subseteq R' \text{且} R'\text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x,y) \in R^+$并且$(y,z) \in R^+$，则对任意的$R'$，$R \subseteq R'$且$R'$是传递的，$(x,y) \in R'$并且$(y,z) \in R'$，由$R'$为传递的知$(x,z) \in R'$，从而$(x,z) \in R^+$，这证明了$R^+$为传递的。 □

**定理3.13.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于$n$:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a,x) \in R^k$且$(x,b) \in R$。由归纳假设，$(a,x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1},x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a,x_1) \in R, (x_1,x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1},x_k) \in R, (x_k,b) \in R$。 □

**定理3.14.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明. 首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由$R^+$的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

因此，$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。 □

**定理3.15.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \leq i < j \leq k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。若$p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a,b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \leq n$使得$(a,b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。 □

**定理3.16.** 设$R$为集合$X$上的一个二元关系，$|X| = n$，$B$为$R$的关系矩阵，$B_{R^+}$为$R^+$的关系矩阵，简记为$B^+$，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合$X$上关系$R$的传递闭包的算法。

```
TRANSITIVE-CLOSURE(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    M = B
    A = M
    for i = 2 to n
        M = M ∘ B
        A = A ∨ M
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)})(k \geq 1)$

其中$a_{ij}^{(k)} = 1$当且仅当存在$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$使得$(x_i, x_{i_1}) \in R$，$(x_{i_1}, x_{i_2}) \in R$，$\cdots$，$(x_{i_m}, x_j) \in R$。

$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$

$a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            if a_ik == 1
                for j = 1 to n
                    a_ij = a_ij ∨ a_kj
    return A // A is the zero-one matrix for R^+
```

**定义3.16.** 集合$X$上的二元关系$R$称为**等价关系**，如果$R$同时满足以下三个性质：

1. $R$为自反的，即对$X$中的任意元素$x$，$xRx$;

2. $R$为对称的，即对$X$中的任意元素$x$，$y$，如果$xRy$，则$yRx$;

3. $R$为传递的，即对$X$中的任意元素$x$，$y$，$z$，如果$xRy$且$yRz$，则$xRz$。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于“$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$”的等式？这里的等价关系就是从“=”抽象出来的。（1）$x=x$; （2）如果$x=y$，那么$y=x$;（3）如果$x=y$并且$y=z$，那么$x=z$。是不是显然成立呀?我们可以借助熟知的”=”来理解等价关系的定义。

**例3.12.** 整数集$\mathbb{Z}$上的模$n$同余关系为$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明. 只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模$n$同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示$m$与$k$模$n$同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$并且$k \equiv l \pmod{n}$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，即$n|(m-l)$，因此$m \equiv l \pmod{n}$。 □

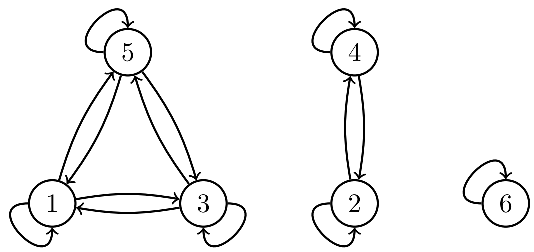
**例3.13.** 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系$R$定义如下：

$$\begin{aligned} R = \{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

则$R$为$X$上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。 □

证法二. 画出$R$的关系图进行判断。



（1）在$R$的图中，每个顶点均有一个环，这说明$R$为自反的；

（2）在$R$的图中,如果任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线,这说明$R$为对称的；

（3）在$R$的图中，如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线，这说明$R$为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三．关系$R$的矩阵表示为

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1)$B$的对角线上的元素全为1说明$R$为自反的；

(2)$B$为对称矩阵说明$R$为对称的；

(3)

$$B\circ B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由$B\circ B$中的每个元素小于等于$B$中的每个元素知$R$为传递的。 □

**定义3.17.** 设$\cong$为集合$X$上的一个等价关系，$x\in X$，$X$的子集

$$E_x=\{y\in X|x\cong y\}$$

称为$x$关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x]=\{y\in X|x\cong y\}$$

**例3.14.** 在例*3.12*中我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为$\{[0],[1],[2],[3]\}$,其中

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\} \\
[1] &= \{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\} \\
[2] &= \{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\} \\
[3] &= \{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}
\end{aligned}
$$

□

**例3.15.** 设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系$R$定义如下：

$$
\begin{aligned}
R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

在例*3.13*中，我们知道$R$为$X$上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合$X$上每个元素关于关系$R$的等价类：

$$
\begin{aligned}
[1] &= \{1,3,5\} \\
[2] &= \{2,4\} \\
[3] &= \{1,3,5\} \\
[4] &= \{2,4\} \\
[5] &= \{1,3,5\} \\
[6] &= \{6\}
\end{aligned}
$$

你发现了什么？有重复！于是关系$R$的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。 □

通过以上的例子，我们发现了以下的结论：

**定理3.17.** 设$\cong$为集合$X$上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，再由$[x] = [y]$知$x \in [y]$，从而$y \cong x$，由$\cong$的对称性得$x \cong y$。 □

**定义3.18.** 设$X$为集合, $X$的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为$X$的一个**划分**，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;

2. $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} = X$

**例3.16.** 集合

$$\begin{aligned}\{&\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\},\\ &\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\},\\ &\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\},\\ &\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}\}\end{aligned}$$

构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。

**例3.17.** 集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ 构成了集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

**定理3.18.** 设$\cong$为集合$X$上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成了集合$X$的一个划分。

证明. 这就是要证明$\{[x]|x\in X\}$构成了集合$X$的一个划分。

对任意的$x\in X$，由$\cong$的自反性知$x\cong x$，从而$x\in[x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x\in X$,$y\in X$，如果$[x]\neq[y]$，以下证明$[x]\cap[y]=\phi$。用反证法，假设$[x]\cap[y]\neq\phi$，则存在$z\in[x]\cap[y]$，于是$z\in[x]$并且$z\in[y]$。由$z\in[x]$知$x\cong z$，由$z\in[y]$知$y\cong z$。由$\cong$的对称性可得$z\cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x\cong y$，从而$[x]=[y]$，矛盾。

由对任意的$x\in X$，$x\in[x]$易知$\bigcup_{x\in X}[x]=X$。

综上，我们证明了$\{[x]|x\in X\}$构成了集合$X$的一个划分。 □

**定理3.19.** 设$\mathscr{A}$为集合$X$的一个划分，令

$$\cong=\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$为集合$X$上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{A}=\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$为集合$X$的一个划分，则

$$\begin{aligned}&\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A\\ =&(\{1,3,5\}\times\{1,3,5\})\cup(\{2,4\}\times\{2,4\})\cup(\{6\}\times\{6\})\\ =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(6,6)\}\end{aligned}$$

为集合$X$上的一个等价关系。

证明. 这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合$X$的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，从而$(y,x) \in A \times A$，于是$(y,x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，并且$(y,z) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，并且存在$B \in \mathscr{A}$使得$(y,z) \in B \times B$。于是，$x \in A$，$y \in A$，$y \in B$，$z \in B$。此时，必有$A = B$，否则$A \cap B = \phi$，这与$y \in A$并且$y \in B$矛盾。从而，$x \in A$，$z \in A$，因此，$(x,z) \in A \times A$,于是$(x,z) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足传递性。

□

本门课一个很重要的结论为"集合$X$上的所有等价关系之集与集合$X$的所有划分之集之间存在着一一对应的关系"。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合$X$上的所有等价关系之集到集合$X$的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合$X$上的所有等价关系之集到集合$X$的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗?

设$f : X \to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g : Y \to X$使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射$f$为可逆的，而$g$称为$f$的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理:

**定理3.20.** 设$X$为一个集合，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R} = \{\cong \subseteq X \times X | \cong \text{为集合}X\text{上的一个等价关系}\},\\
&\mathbb{A} = \{\mathscr{A} \subseteq 2^X | \mathscr{A}\text{为集合}X\text{的一个划分}\},\\
&f = \{(\cong, \{[x]_\cong | x \in X\}) | \cong \in \mathbb{R}, [x]_\cong = \{y \in X | x \cong y\}\}\\
&g = \{(\mathscr{A}, \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A) | \mathscr{A} \in \mathbb{A}\}
\end{aligned}$$

则$f$为从$\mathbb{R}$到$\mathbb{A}$的双射，且$f^{-1} = g$。

如果我们能够完全理解该定理，并能够从"0"开始给出该定理的证明过程，即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明，那么，整个前三章的内容，我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程，顺藤摸瓜，这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明，直到可以从头开始说起，这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗？答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合:$X = \{1, 2, 3\}$。那么$\mathbb{R}$表示集合$X$上所有的等价关系构成的集合，这个集合是怎样的？这个问题不好回答吧?

让我们先看$\mathbb{A}$吧。$\mathbb{A}$表示集合$X$的所有划分构成的集合。这个集合比较好写，你能写出答案吗？我的答案是这样的:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \{&\{\{1\},\{2\},\{3\}\},\\ &\{\{1,2\},\{3\}\},\\ &\{\{1,3\},\{2\}\},\\ &\{\{2,3\},\{1\}\},\\ &\{\{1,2,3\}\}\}\end{aligned}$$

对任意的$\mathscr{A} \in \mathbb{A}$，我们计算$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$,就可以得到$X$上的一个等价关系。该定理是在说，在$\mathbb{R}$和$\mathbb{A}$之间存在一个一一对应的关系，于是，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = \{&\{(1,1),(2,2),(3,3)\},\\ &\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\},\\ &\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)\},\\ &\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(1,1)\},\\ &\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}\}\end{aligned}$$

证明.

1. 证明$f$为映射。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\{[x]_\cong | x \in X\}$为集合$X$的一个划分。这就是定理3.18。

2. 证明$g$为映射。这就是要证明对于集合$X$的任意一个划分$\mathscr{A}$，$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$为集合$X$上的一个等价关系。这就是定理3.19。

3. 证明$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\bigcup_{x\in X}[x]_\cong \times [x]_\cong = \cong$。

   这里是要证明两个集合相等。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1,x_2) \in \bigcup_{x\in X}[x]_\cong \times [x]_\cong$，那么存在$x \in X$，$(x_1,x_2) \in [x]_\cong \times [x]_\cong$，于是$x_1 \in [x]_\cong$并且$x_2 \in [x]_\cong$，从而$x \cong x_1$并且$x \cong x_2$，由$\cong$的对称性知$x_1 \cong x$，再由$\cong$的传递性知$x_1 \cong x_2$，即$(x_1,x_2) \in \cong$。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1,x_2) \in \cong$，则$x_1 \cong x_2$，从而$x_2 \in [x_1]_\cong$，由$\cong$的自反性知$x_1 \cong x_1$，从而$x_1 \in [x_1]_\cong$。于是，$(x_1,x_2) \in [x_1]_\cong \times [x_1]_\cong \subseteq \bigcup_{x\in X}[x]_\cong \times [x]_\cong$。

4. 证明$f \circ g = I_{\mathbb{A}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个划分$\mathscr{A}$，关于等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$的等价类的集合就是$\mathscr{A}$。

   这里还是要证明两个集合相等。

   对任意的$x \in X$，设$[x]$为关于等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$的一个等价类，以下证明$[x] \in \mathscr{A}$。由$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$。如果我们能够证明$[x] = A$,则$[x] \in \mathscr{A}$得证。对任意的$y \in [x]$，则$(x,y) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$。于是，存在$B \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in B \times B$，如果$B \neq A$，那么$x \in A$且$x \in B$，这与$A \cap B = \phi$矛盾，从而$B = A$，因此$y \in A$。反之，对任意的$y \in A$，则$(x,y) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。这证明了$[x] = A$，从而$[x] \in \mathscr{A}$。

对任意的$A \in \mathscr{A}$，以下证明$A$为等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$的一个等价类。由$A$非空知，存在$x$,$x \in A$，以下证明$A = [x]$，这里$[x]$表示$x$关于等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$的一个等价类。对任意的$y \in A$，则$(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。反之，如果$y \in [x]$,则由与前面相类似的，可以证明$y \in A$。这证明了$A = [x]$。

□

**定义3.19.** 设≅为$X$上的等价关系，≅的所有等价类之集称为$X$对≅的商集，记为$X/\cong$。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x]\text{为}x\text{关于}\cong\text{的等价类}\}$$

**例3.18.** 设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，≅为集合$X$的等价关系，$X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$，试求≅。

**定义3.20.** 集合$X$上的二元关系$R$称为**偏序关系**，如果$R$同时满足以下三个性质：

1. $R$为自反的，即对$X$中的任意元素$x$，$xRx$；
2. $R$为反对称的，即对$X$中的任意元素$x$，$y$，如果$xRy$且$yRx$，则$x = y$；
3. $R$为传递的，即对$X$中的任意元素$x$，$y$，$z$，如果$xRy$且$yRz$，则$xRz$。

**定义3.21.** 设≤为集合$X$上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为一个**偏序集**。

**例3.19.** 实数集$\mathbb{R}$上通常的“小于等于”关系≤为一个偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \leq)$为一个偏序集。

**例3.20.** 设$S$为一个集合，$S$的子集间的包含关系⊆为$2^S$上的一个偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为一个偏序集。

**例3.21.** 设集合$X = \{a, b, c, d\}$上的关系$R$定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则$R$为$X$上的偏序关系。

**定义3.22.** 设≤为集合$X$上的偏序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立，则称≤为$X$上的全序关系。相应的，二元组$(X, \leq)$称为全序集。

**定义3.23.** 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称$s$为$A$的**最大元素**；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称$t$为$A$的**最小元素**。

我们用$x < y$表示$x \leq y$且$x \neq y$。

**定义3.24.** 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在$A$中没有元素$x$使得$s < x$，则称$s$为$A$的**极大元素**；如果存在一个元素$t \in A$，在$A$中没有元素$x$使得$x < t$，则称$t$为$A$的**极小元素**。

**定义3.25.** 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in X$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称$s$为$A$的一个**上界**；如果存在一个元素$t \in X$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称$t$为$A$的一个**下界**。

**定义3.26.** 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果$A$有上界且$A$的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为$A$的**上确界**，记为$\sup A$；如果$A$有下界且$A$的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为$A$的**下确界**，记为$\inf A$。

# 第 四 章