

命题逻辑演算形式系统

陈建文

December 3, 2022

课后作业题

练习1. 在PC中证明下列事实:

$$1. \vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

证明.

- (1) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ 公理2
- (2) $((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)))$
- (3) $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (1)(2) r_{mp}
- (4) $A \rightarrow A$
- (5) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (3)(4) r_{mp}

□

$$9. ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

证明.

- (1) $(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A))$
- (2) $((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A))) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)))$
- (3) $(A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A))$ (1)(2) r_{mp}
- (4) $A \rightarrow A$
- (5) $(\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ (3)(4) r_{mp}
- (6) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (7) $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$
- (8) $((\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ (5)(7) r_{mp}

□

$$10. ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)$$

证明.

- (1) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A))$
- (2) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (3) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (4) $((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)$ (2)(3) r_{mp}

$$\begin{aligned}
& (5)((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow (((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (((C \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)) \\
& (6)((C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (((C \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A)) (1)(5)r_{mp} \\
& (7)((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow A) (4)(6)r_{mp} \quad \square \\
& 11.((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)
\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
& (1)(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) \\
& (2)((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))) \\
& (3)(C \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) (1)(2)r_{mp} \\
& (4)C \rightarrow C \\
& (5)(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C) (3)(4)r_{mp} \\
& (6)(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)) \\
& (7)\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \\
& (8)((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C) (6)(7)r_{mp} \\
& (9)((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C) \rightarrow (((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))) \\
& (10)((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)) (8)(9)r_{mp} \\
& (11)((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C) (5)(10)r_{mp} \quad \square
\end{aligned}$$

练习2. 利用演绎定理在PC中证明:

$$1. \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

证明. 只需证 $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$.

$$\begin{aligned}
& (1)(A \rightarrow B) \rightarrow A \text{ 前提} \\
& (2)\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \\
& (3)((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \\
& (4)(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) (1)(3)r_{mp} \\
& (5)\neg A \rightarrow A (2)(4)r_{mp} \\
& (6)(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \\
& (7)A (5)(6)r_{mp} \quad \square
\end{aligned}$$