

# 第九讲同态基本定理

陈建文

October 27, 2022

**定义1.** 设 $(G, \circ)$ 与 $(\bar{G}, \cdot)$ 为两个群, 如果存在一个从 $G$ 到 $\bar{G}$ 的映射 $\phi$ , 使得 $\forall a, b \in G$ ,

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

则称 $\phi$ 为从 $G$ 到 $\bar{G}$ 的一个同态 (*homomorphism*), 而称 $G$ 与 $\bar{G}$ 同态。如果同态 $\phi$ 是满射, 则称 $\phi$ 为从 $G$ 到 $\bar{G}$ 的一个满同态, 此时称 $G$ 与 $\bar{G}$ 为满同态, 并记为 $G \sim \bar{G}$ 。类似的, 如果同态 $\phi$ 为单射, 则称 $\phi$ 为单同态。

**定理1.** 设 $(G, \circ)$ 与 $(\bar{G}, \cdot)$ 为两个群,  $e$ 和 $\bar{e}$ 分别为其单位元,  $\phi$ 为从 $G$ 到 $\bar{G}$ 的同态, 则,

$$\begin{aligned}\phi(e) &= \bar{e} \\ \forall a \in G \phi(a^{-1}) &= (\phi(a))^{-1}\end{aligned}$$

**定理2.** 设 $(G, \circ)$ 为一个群,  $\bar{G}$ 为一个具有二元代数运算 $\cdot$ 的代数系。如果存在一个满射 $\phi: G \rightarrow \bar{G}$ 使得 $\forall a, b \in G$

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

则 $(\bar{G}, \cdot)$ 为一个群。

**定理3.** 设 $\phi$ 为从群 $G$ 到群 $\bar{G}$ 的同态, 则

- (1) 如果 $H$ 为 $G$ 的子群, 那么 $\phi(H)$ 为 $\bar{G}$ 的子群;
- (2) 如果 $\bar{H}$ 为 $\bar{G}$ 的子群, 那么 $\phi^{-1}(\bar{H})$ 为 $G$ 的子群;
- (3) 如果 $\bar{N}$ 为 $\bar{G}$ 的正规子群, 那么 $\phi^{-1}(\bar{N})$ 为 $G$ 的正规子群。

**定理4.** 设 $\phi$ 为从群 $G$ 到群 $\bar{G}$ 的满同态,  $N$ 为 $G$ 的正规子群, 则 $\phi(N)$ 为 $\bar{G}$ 的正规子群。

**定义2.** 设 $\phi$ 为群 $(G, \circ)$ 到群 $(\bar{G}, \cdot)$ 的同态,  $\bar{e}$ 为 $\bar{G}$ 的单位元, 则 $G$ 的子群 $\phi^{-1}(\bar{e})$ 称为同态 $\phi$ 的核, 记为 $\text{Ker}\phi$ 。 $\phi(G)$ 称为 $\phi$ 在 $G$ 下的同态像。

**定理5.** 设 $\phi$ 为从群 $(G, \circ)$ 到群 $(\bar{G}, \cdot)$ 的同态, 则 $\text{Ker}\phi$ 为群 $G$ 的正规子群。

**定理6.** 设 $N$ 为 $G$ 的一个正规子群,  $\phi$ 为从 $G$ 到 $G/N$ 的一个映射,  $\forall x \in G \phi(x) = xN$ , 则 $\phi$ 为从 $G$ 到 $G/N$ 的一个同态,  $\text{Ker}\phi = N$ 。

**定理7** (群的同态基本定理). 设 $\phi$ 为从群 $G$ 到群 $\bar{G}$ 的同态, 则 $G/\text{Ker}\phi \cong \phi(G)$ 。

课后作业题:

**练习1.** 设 $G$ 为 $m$ 阶循环群,  $\bar{G}$ 为 $n$ 阶循环群, 试证:  $G \sim \bar{G}$ 当且仅当 $n|m$ 。

**练习2.** 设 $G$ 为一个循环群,  $H$ 为群 $G$ 的子群, 试证:  $G/H$ 也为循环群。