第三章关系

陈建文

1. 关系的概念

定义1.1

设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$；如果(a,b)在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a \not R b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

1. 关系的概念

定义1.1

设A与B为两个集合。一个从$A \times B$到$\{T, F\}$的映射R，称为从A到B的一个二元关系。$\forall (a, b) \in A \times B$，如果$(a, b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$；如果(a,b)在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a \not R b$。如果$A = B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例1.1

设集合$X = \{1, 2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X \times 2^X$到$\{T, F\}$的映射，

$\subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T,$
$\subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T$

1. 关系的概念

定义1.2

设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not{R}b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

1. 关系的概念

定义1.2

设A与B为两个集合。$A \times B$的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。如果$(a,b) \in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b) \notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A = B$，则称R为A上的二元关系。

例1.2

设集合$X = \{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X \times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq = \{&(\phi,\phi),(\phi,\{1\}),(\phi,\{2\}),(\phi,\{1,2\}),\\ &(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\ &(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

1. 关系的概念

例1.3

自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"是$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

1. 关系的概念

例1.3
自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"是$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例1.4
设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m \equiv k \pmod{n}$。显然，$m \equiv k \pmod{n}$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余是$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

1. 关系的概念

定义1.3

设$R \subseteq A \times B$，集合

$$\{x \in A | \exists y \in B \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

1. 关系的概念

定义1.4

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets $S_1, S_2, \cdots, S_n$ (not necessarily distinct), R is a relation on these n sets if it is a set of n-tuples each of which has its first element from S_1, its second element from S_2, and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

E. F. Codd.
A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks.
Information Retrieval, 13(6): 1970.

2. 关系的性质

定义2.1

集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

2. 关系的性质

定义2.1

集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

判断下列二元关系是否是自反的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2. 关系的性质

定义2.2
集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

2. 关系的性质

定义2.2

集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

判断下列二元关系是否是反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

2. 关系的性质

定义2.3

集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

2. 关系的性质

定义2.3
集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

判断下列二元关系是否是对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

2. 关系的性质

定义2.4

集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

2. 关系的性质

定义2.4

集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

判断下列二元关系是否是反对称的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

2. 关系的性质

定义2.5

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

2. 关系的性质

定义2.5

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

判断下列二元关系是否是传递的。设集合$X=\{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
2. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
3. 集合X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
4. 集合X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
5. 集合X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

习题

以下两个结论哪个正确?

1. 如果R与S都为集合X上传递的二元关系，则$R \cap S$为集合X上传递的二元关系。
2. 如果R与S都为集合X上传递的二元关系，则$R \cup S$为集合X上传递的二元关系。

习题

设R为集合X上反自反的和传递的二元关系，证明：R为X上反对称的二元关系。

3. 关系的运算

定义3.1

设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

3. 关系的运算

定义3.1

设R为从集合A到集合B的二元关系，R的**逆**R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

例3.1

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$，
则$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$。

3. 关系的运算

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

3. 关系的运算

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

3. 关系的运算

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

3. 关系的运算

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.
由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，

3. 关系的运算

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，

3. 关系的运算

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，由R为对称的知，

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，由R为对称的知，$(x, y) \in R$。

3. 关系的运算

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.
由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，由R为对称的知，$(x, y) \in R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。

3. 关系的运算

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.
由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由R为对称的知，$(x,y) \in R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，

定理3.1
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.
由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，由R为对称的知，$(x, y) \in R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，

3. 关系的运算

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R^{-1}$，则$(y, x) \in R$，由R为对称的知，$(x, y) \in R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$，

3. 关系的运算

定理3.1

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明.

由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由R为对称的知，$(x,y) \in R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$。

□

3. 关系的运算

定理3.2

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

3. 关系的运算

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.

3. 关系的运算

定理3.2

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.

只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，

3. 关系的运算

定理3.2

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.

只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。

如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。

3. 关系的运算

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，

3. 关系的运算

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对 任 意 的$x \in X$，

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，

3. 关系的运算

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$，

3. 关系的运算

定理3.2

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.

只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y, x) \in R$，

定理3.2

设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.

只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y, x) \in R$，从而$(x, y) \in R^{-1}$。 $\square$

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R=R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1}\subseteq R$当且仅当$R=R^{-1}$。
如果$R=R^{-1}$，则显然$R^{-1}\subseteq R$。
由$R^{-1}\subseteq R$往证$R=R^{-1}$，此时只需证$R\subseteq R^{-1}$。
对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in R$，则$(y,x)\in R^{-1}$，由$R^{-1}\subseteq R$知$(y,x)\in R$，从而$(x,y)\in R^{-1}$。 □

定理3.3
设R和S为集合X上的二元关系，$R\subseteq S$，则$R^{-1}\subseteq S^{-1}$。

3. 关系的运算

定理3.2
设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明.
只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。
如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。
由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x, y) \in R$，则$(y, x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y, x) \in R$，从而$(x, y) \in R^{-1}$。 $\square$

定理3.3
设R和S为集合X上的二元关系，$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

定理3.4
设R和S为集合X上的二元关系，则$(R^{-1})^{-1} = R$。

3. 关系的运算

定义3.2

设R为 从 集 合A到 集 合B，S为 从 集 合B到 集 合C的 二 元 关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R = ?$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R =?$

$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R =?$

$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R =?$

$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中，$R^0 =?$，$R^3 =?$

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R = ?$
$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$
设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中，$R^0 = ?$，$R^3 = ?$
$R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$，

3. 关系的运算

定义3.2

设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.2

设$X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，则$R \circ R = ?$

$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下：

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中，$R^0 = ?$，$R^3 = ?$

$R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$，$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$。

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$\forall a \in A \forall d \in D$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$\forall a \in A \forall d \in D$

$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\forall a \in A \forall d \in D \\
&(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow\ &\exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)
\end{aligned}$$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)
\end{aligned}
$$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3))
\end{aligned}
$$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3)
\end{aligned}
$$

定理3.5

设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$
\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3) \\
\Leftrightarrow\ & (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}
$$

□

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a,c) \in R \circ R$，

定理3.6
设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.
由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，

定理3.6
设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.
由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。

定理3.6
设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.
由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。
由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。

由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。

对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，

定理3.6
设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.
由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。
由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。
对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。
由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。
对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，

定理3.6
设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.
由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。
对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。
由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。
对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，则$(a, c) \in R \circ R$，

定理3.6

设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明.

由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。

由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。

对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，则$(a, c) \in R \circ R$，由$R \circ R \subseteq R$知$(a, c) \in R$。 $\square$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.1

设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合，$R$为从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not{R} y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系$R = \{(1, 3), (2, 5)\}$，则关系R的矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系$R = \{(1, 3), (2, 5)\}$，则关系R的矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，从X到Y的关系$R=\{(1,3),(2,5)\}$，则关系R的矩阵为?

关系R的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.2

设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$R$为$X$上的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times m$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times X$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

4. 关系矩阵和关系图

例4.2

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下:

$$
\begin{aligned}
R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则关系R的矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.2

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则关系R的矩阵为？

关系R的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

4. 关系矩阵和关系图

定理4.1

设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

(1) R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*1*;

(2) R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为*0*;

(3) R为对称的，当且仅当B是对称矩阵;

(4) R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为*1;*

(5) R为传递的，当且仅当如果$b_{ij}=1$且$b_{jk}=1$，则$b_{ik}=1$。

4. 关系矩阵和关系图

定理4.2

设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

4. 关系矩阵和关系图

定义4.3

设B，C为两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理4.3

设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R \cup S$ 与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R\cup S}$，$B_{R\cap S}$，则

$$B_{R\cup S} = B_R \vee B_S, B_{R\cap S} = B_R \wedge B_S$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.4
设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.4

设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\
i &= 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

设布尔矩阵

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.4

设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.4
设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\
i &= 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

设布尔矩阵

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

则

$$
B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，关系$R$的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，关系$R$的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系$R \circ R$的矩阵为

$$B_{R\circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

定理4.4
设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4
设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R\circ S}$，则$B_{R\circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.
设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R\circ S} = (c_{ij})$，

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4
设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.
设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$c_{ij} = 1$

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.

设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$$c_{ij} = 1$$
$$\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S$$

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4
设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.
设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$$
\begin{aligned}
& c_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (x_i, z_j) \in R \circ S \\
\Leftrightarrow\ & \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S
\end{aligned}
$$

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.

设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$$
\begin{aligned}
& c_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (x_i, z_j) \in R \circ S \\
\Leftrightarrow\ & \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\
\Leftrightarrow\ & (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge a_{pj} = 1)
\end{aligned}
$$

4. 关系矩阵和关系图

定理4.4

设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

证明.

设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$$
\begin{aligned}
& c_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (x_i, z_j) \in R \circ S \\
\Leftrightarrow\ & \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\
\Leftrightarrow\ & (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge a_{pj} = 1) \\
\Leftrightarrow\ & (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge a_{pj}) = 1
\end{aligned}
$$

□

4. 关系矩阵和关系图

定义4.5

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设X和Y为有穷集合，R为从X到Y的二元关系。当用图表示R时，先把X与Y的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x, y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的"有向图"，称为关系R的图。

4. 关系矩阵和关系图

例4.3

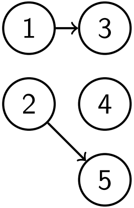
设$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，从X到Y的关系$R=\{(1,3),(2,5)\}$，则关系R的图为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.3

设$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系$R = \{(1, 3), (2, 5)\}$，则关系R的图为?

关系R的图为



4. 关系矩阵和关系图

定义4.6

设X为有穷集合，R为集合X上的二元关系。当用图表示R时，先把X的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x, y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系R的图。注意，如果$(x, x) \in R$，则在代表x的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

4. 关系矩阵和关系图

例4.4

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则关系R的图为?

4. 关系矩阵和关系图

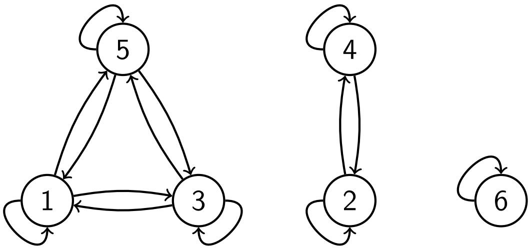
例4.4

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=\{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则关系R的图为?

关系R的图为



4. 关系矩阵和关系图

定理4.5

设R为集合X上的二元关系，则

(1) R为自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环；

(2) R为反自反的，当且仅当R的图中没有环；

(3) R为对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；

(4) R为反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线;

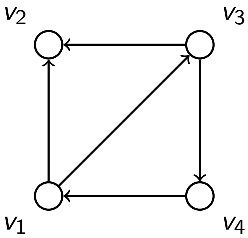
(5) R为传递的，当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

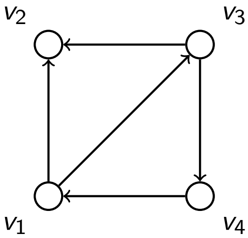
集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。
设集合$X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，要使得R变成传递的二元关系，至少需要添加（　）个有序对?

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。
设集合$X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，要使得R变成传递的二元关系，至少需要添加（　）个有序对?
$R^2=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。
设集合$X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，要使得R变成传递的二元关系，至少需要添加（　）个有序对?
$R^2=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$
$R^3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。
设集合$X=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，要使得R变成传递的二元关系，至少需要添加（ ）个有序对?
$R^2=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$
$R^3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
$R^4=...$
$(x,y)\in R^4$当且仅当存在$x_1,x_2,x_3\in X$，$(x,x_1)\in R$，$(x_1,x_2)\in R$，$(x_2,x_3)\in R$，$(x_3,y)\in R$


v2
v3
v1
v4



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 关系的闭包

定义5.1

设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

5. 关系的闭包

定理5.1
设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.
由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' 且 R' 是传递的} R'$，

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

由定义$R^+ = \bigcap_{R\subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。

5. 关系的闭包

定理5.1
设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.
由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x, y) \in R^+$并且$(y, z) \in R^+$，

5. 关系的闭包

定理5.1
设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.
由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' 且 R' 是传递的} R'$，显然$R \subseteq R^+$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x,y) \in R^+$并且$(y,z) \in R^+$，则对任意的R'，$R \subseteq R'$且R'是传递的，

5. 关系的闭包

定理5.1
设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.
由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' 且 R' 是传递的} R'$，显然$R \subseteq R^+$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x,y) \in R^+$并且$(y,z) \in R^+$，则对任意的R'，$R \subseteq R'$且R'是传递的，$(x,y) \in R'$并且$(y,z) \in R'$，

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' 且 R' 是传递的} R'$，显然$R \subseteq R^+$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x,y) \in R^+$并且$(y,z) \in R^+$，则对任意的R'，$R \subseteq R'$且R'是传递的，$(x,y) \in R'$并且$(y,z) \in R'$，由R'为传递的知$(x,z) \in R'$，

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x, y) \in R^+$并且$(y, z) \in R^+$，则对任意的R'，$R \subseteq R'$且R'是传递的，$(x, y) \in R'$并且$(y, z) \in R'$，由R'为传递的知$(x, z) \in R'$，从而$(x, z) \in R^+$，

5. 关系的闭包

定理5.1

设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明.

由定义$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$，显然$R \subseteq R^+$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，$(x, y) \in R^+$并且$(y, z) \in R^+$，则对任意的R'，$R \subseteq R'$且R'是传递的，$(x, y) \in R'$并且$(y, z) \in R'$，由R'为传递的知$(x, z) \in R'$，从而$(x, z) \in R^+$，这证明了R^+为传递的。 $\square$

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。

5. 关系的闭包

定理5.2
设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。
假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a, x) \in R^k$且$(x, b) \in R$。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n=2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n=k$时定理的结论成立，往证当$n=k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a,x) \in R^k$且$(x,b) \in R$。由归纳假设，$(a,x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1},x) \in R$。

5. 关系的闭包

定理5.2

设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a, b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1}, b) \in R$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a, x_1) \in R$且$(x_1, b) \in R$，结论成立。
假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k + 1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a, x) \in R^k$且$(x, b) \in R$。由归纳假设，$(a, x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a, x_1) \in R$，$(x_1, x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1}, x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a, b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$。 □

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的 定 义，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的 定 义 ， 只 需 证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为 包 含$R$的 传 递 关 系 即 可 。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。
由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。
由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。
其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。
由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。
其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a, b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a, b) \in R \subseteq R^+$；

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。
由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。
其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a, b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a, b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，…，$(b_{m-1},b) \in R$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。
由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。
其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$，$(b_1, b_2) \in R$，...，$(b_{m-1}, b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a, b_1) \in R^+$，$(b_1, b_2) \in R^+$，...，$(b_{m-1}, b) \in R^+$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，…，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，…，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，...，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，...，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

因此，

5. 关系的闭包

定理5.3

设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明.

首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a, b) \in R^m$且$(b, c) \in R^n$。于是$(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a, b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a, b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$，$(b_1, b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1}, b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a, b_1) \in R^+$，$(b_1, b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1}, b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a, b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

因此，$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。 □

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X|=n$，则

$$R^+=\bigcup_{i=1}^{n}R^i=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k>n$，有$R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。为此，设$(a,b)\in R^k$，则存在$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1}\in X$使得$(a,b_1)\in R$, $(b_1,b_2)\in R,\cdots,(b_{k-2},b_{k-1})\in R,(b_{k-1},b)\in R$。记$b_0=a,b_k=b$。$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n<k$，所以$b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b$中必有两个相等的元素。设$b_i=b_j$，$1\le i<j\le k$。于是，我们有$(a,b_1)\in R,\cdots,(b_{i-1},b_i)\in R,(b_j,b_{j+1})\in R,\cdots,(b_{k-1},b)\in R$,故$(a,b)\in R^{k-(j-i)}$，$p_1=k-(j-i)<k$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。于是，我们有$(a, b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a, b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k - (j - i) < k$。若$p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a, b) \in R^{p_2}$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \leq i < j \leq k$。于是，我们有$(a, b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a, b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k - (j - i) < k$。若$p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a, b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \leq n$使得$(a, b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

5. 关系的闭包

定理5.4

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a, b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \le i < j \le k$。于是，我们有$(a, b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1}, b) \in R$,故$(a, b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k - (j - i) < k$。若$p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a, b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \le n$使得$(a, b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。 □

5. 关系的闭包

定理5.5

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

5. 关系的闭包

定理5.5

设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

```
TRANSITIVE-CLOSURE(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    M = B
    A = M
    for i = 2 to n
        M = M ∘ B
        A = A ∨ M
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

$A = B$

for $k = 1$ **to** n

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

return A // A is the zero-one matrix for R^+

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R⁺
```

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

$A = B$

for $k = 1$ **to** n

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

return A // A is the zero-one matrix for R^+

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)})(k \geq 1)$

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

$A = B$

for $k = 1$ **to** n

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

return A // A is the zero-one matrix for R^+

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)})(k \geq 1)$

其中$a_{ij}^{(k)} = 1$当且仅当存在$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$使得$(x_i, x_{i_1}) \in R$，$(x_{i_1}, x_{i_2}) \in R$，$\cdots$，$(x_{i_m}, x_j) \in R$。

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R⁺
```

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

$A = B$

for $k = 1$ **to** n

    for $i = 1$ **to** n

        for $j = 1$ **to** n

            $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

return A // A is the zero-one matrix for R^+

$$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$$

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            for j = 1 to n
                a_ij = a_ij ∨ (a_ik ∧ a_kj)
    return A // A is the zero-one matrix for R^+
```

$$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$$
$$a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$$

5. 关系的闭包

```
WARSHALL(B)
    // B is the zero-one n × n matrix for relation R
    A = B
    for k = 1 to n
        for i = 1 to n
            if a_ik == 1
                for j = 1 to n
                    a_ij = a_ij ∨ a_kj
    return A // A is the zero-one matrix for R+
```

6. 等价关系与集合的划分

定义6.1
集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx;

(2) R是对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx;

(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$,

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$,

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod n$。(注：我们用$m \equiv k \pmod n$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod n$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$并且$k \equiv l \pmod{n}$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$并且$k \equiv l \pmod{n}$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod n$。(注：我们用$m \equiv k \pmod n$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod n$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod n$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod n$并且$k \equiv l \pmod n$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1
整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.
只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。
(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)
(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。
(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$并且$k \equiv l \pmod{n}$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，即$n|(m-l)$，

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系是$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明.

只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$m \equiv m \pmod{n}$。(注：我们用$m \equiv k \pmod{n}$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k \equiv m \pmod{n}$。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m \in \mathbb{Z}$，$k \in \mathbb{Z}$，$l \in \mathbb{Z}$，如果$m \equiv k \pmod{n}$并且$k \equiv l \pmod{n}$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，即$n|(m-l)$，因此$m \equiv l \pmod{n}$。 □

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的,

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y) | x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y) | x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y) | x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y) | x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y) | x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y) | x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x+y$为偶数，$y+z$为偶数，则$(x+y)+(y+z) = x+2y+z$为偶数，从而$x+z$为偶数。

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1=\{(x,y)|x+y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2=\{(x,y)|x+y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x\in Z$，$y\in Z$，$z\in Z$，如果$x+y$为偶数，$y+z$为偶数，则$(x+y)+(y+z)=x+2y+z$为偶数，从而$x+z$为偶数。
关系R_2不是传递的，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y) | x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y) | x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，从而$x + z$为偶数。
关系R_2不是传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x+y$为偶数，$y+z$为偶数，则$(x+y)+(y+z) = x+2y+z$为偶数，从而$x+z$为偶数。
关系R_2不是传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为奇数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，从而$x + z$为偶数。
关系R_2不是传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为奇数，$y + z$为奇数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y)|x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y)|x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，从而$x + z$为偶数。
关系R_2不是传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为奇数，$y + z$为奇数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，

下列关系是否为整数集Z上的等价关系?
整数集Z上的二元关系$R1 = \{(x, y) | x + y$为偶数$\}$
整数集Z上的二元关系$R2 = \{(x, y) | x + y$为奇数$\}$
关系R_1为传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为偶数，$y + z$为偶数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，从而$x + z$为偶数。
关系R_2不是传递的，这是因为对任意的$x \in Z$，$y \in Z$，$z \in Z$，如果$x + y$为奇数，$y + z$为奇数，则$(x + y) + (y + z) = x + 2y + z$为偶数，此时$x + z$为偶数。

6. 等价关系与集合的划分

例6.2

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

例6.2

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下:

$$
\begin{aligned}
R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则R为X上的等价关系。

方法一. 直接根据定义进行验证。

6. 等价关系与集合的划分

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},$$

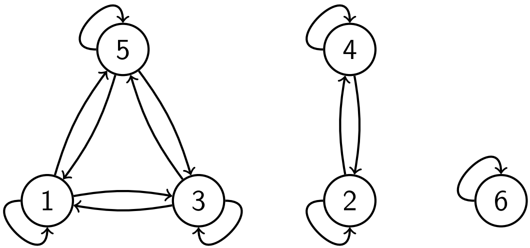
则R为X上的等价关系。
方法二. 画出R的关系图进行判断。

6. 等价关系与集合的划分

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。
方法二. 画出R的关系图进行判断。



6. 等价关系与集合的划分

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$
\begin{aligned}
R =& \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则R为X上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下：

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},$$

则R为X上的等价关系。
方法三. 写出R的矩阵进行判断。
关系R的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关系R的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关系R的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

传递性的验证:

关系R的矩阵表示为

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

传递性的验证：

$$B\circ B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由$B\circ B$中的每个元素小于等于B中的每个元素知R为传递的。

6. 等价关系与集合的划分

定义6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

6. 等价关系与集合的划分

定义6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例6.3

我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

6. 等价关系与集合的划分

定义6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例6.3

我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解.

模4同余关系所有等价类所构成的集合为$\{[0],[1],[2],[3]\}$,其中

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\} \\
[1] &= \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\} \\
[2] &= \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\} \\
[3] &= \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}
\end{aligned}$$

定义6.3

设$\cong$为X上的等价关系，$\cong$的所有等价类之集称为X对$\cong$的商集，记为$X/\cong$。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x]\text{为}x\text{关于}\cong\text{的等价类}\}$$

定义6.3

设$\cong$为X上的等价关系，$\cong$的所有等价类之集称为X对$\cong$的商集，记为$X/\cong$。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x]\text{为}x\text{关于}\cong\text{的等价类}\}$$

整数集Z关于模4同余关系的商集为$\{[1], [2], [3], [4]\}$，其中

$$[0] = \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$$
$$[1] = \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$$
$$[2] = \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}$$
$$[3] = \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}$$

6. 等价关系与集合的划分

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

6. 等价关系与集合的划分

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

解.

首先验证$\cong$为S上的等价关系：

6. 等价关系与集合的划分

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\rightarrow Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

解.

首先验证$\cong$为S上的等价关系：

$\cong$为自反的，这是因为对任意的映射$f:X\rightarrow Y$，$I_m(f)=I_m(f)$；

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\rightarrow Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

解.

首先验证$\cong$为S上的等价关系：

$\cong$为自反的，这是因为对任意的映射$f:X\rightarrow Y$，$I_m(f)=I_m(f)$；

$\cong$为对称的，这是因为对任意的映射$f:X\rightarrow Y$，$g:X\rightarrow Y$，如果$I_m(f)=I_m(g)$，则$I_m(g)=I_m(f)$；

6. 等价关系与集合的划分

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

解.

首先验证$\cong$为S上的等价关系：

$\cong$为自反的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$I_m(f)=I_m(f)$；

$\cong$为对称的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，如果$I_m(f)=I_m(g)$，则$I_m(g)=I_m(f)$；

$\cong$为传递的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，$h:X\to Y$，如果$I_m(f)=I_m(g)$并且$I_m(g)=I_m(h)$，则$I_m(f)=I_m(h)$ $\square$

6. 等价关系与集合的划分

解(续).

$S=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$，其中

$$
\begin{aligned}
&f_1: X\to Y, f_1(1)=1, f_1(2)=1, f_1(3)=1, Im(f_1)=\{1\}\\
&f_2: X\to Y, f_2(1)=1, f_2(2)=1, f_2(3)=2, Im(f_2)=\{1,2\}\\
&f_3: X\to Y, f_3(1)=1, f_3(2)=2, f_3(3)=1, Im(f_3)=\{1,2\}\\
&f_4: X\to Y, f_4(1)=1, f_4(2)=2, f_4(3)=2, Im(f_4)=\{1,2\}\\
&f_5: X\to Y, f_5(1)=2, f_5(2)=1, f_5(3)=1, Im(f_5)=\{1,2\}\\
&f_6: X\to Y, f_6(1)=2, f_6(2)=1, f_6(3)=2, Im(f_6)=\{1,2\}\\
&f_7: X\to Y, f_7(1)=2, f_7(2)=2, f_7(3)=1, Im(f_7)=\{1,2\}\\
&f_8: X\to Y, f_8(1)=2, f_8(2)=2, f_8(3)=2, Im(f_8)=\{2\}
\end{aligned}
$$

则$S/\cong=\{\{f_1\},\{f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\},\{f_8\}\}$ □

例6.4

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$上的关系R定义如下:

$$\begin{aligned} R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

例6.4

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$
\begin{aligned}
R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解.

集合X上每个元素关于关系R的等价类：

$$
\begin{aligned}
[1]&=\{1,3,5\}\\
[2]&=\{2,4\}\\
[3]&=\{1,3,5\}\\
[4]&=\{2,4\}\\
[5]&=\{1,3,5\}\\
[6]&=\{6\}
\end{aligned}
$$

于是关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，
即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，再由$[x] = [y]$知$x \in [y]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，再由$[x] = [y]$知$x \in [y]$，从而$y \cong x$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明.
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。
对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，再由$[x] = [y]$知$x \in [y]$，从而$y \cong x$，由$\cong$的对称性得$x \cong y$。 $\square$

6. 等价关系与集合的划分

定义6.4

设X为集合, X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个划分，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

6. 等价关系与集合的划分

定义6.4

设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个划分，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

例6.5

集合

$$\begin{aligned}
\{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\},\\
\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\},\\
\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\},\\
\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\}
\end{aligned}$$

构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定义6.4

设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个划分，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

例6.5

集合

$$\begin{aligned}\{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\},\\ \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\},\\ \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\},\\ \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\}\end{aligned}$$

构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。

例6.6

集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ 构成了集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R =& \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

R为X上的等价关系，集合X上每个元素关于关系R的等价类为：

$$\begin{aligned} [1] &= \{1,3,5\} \\ [2] &= \{2,4\} \\ [3] &= \{1,3,5\} \\ [4] &= \{2,4\} \\ [5] &= \{1,3,5\} \\ [6] &= \{6\} \end{aligned}$$

关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X$,

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x \in X, y \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X$,$y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X$,$y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。
由对任意的$x \in X$，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X, y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。
由对任意的$x \in X$，$x \in [x]$易知$\bigcup_{x \in X}[x] = X$。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2

设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.

这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x \in X$,$y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。

由对任意的$x \in X$，$x \in [x]$易知$\bigcup_{x \in X}[x] = X$。

综上，

6. 等价关系与集合的划分

定理6.2
设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成X的一个划分。

证明.
这就是要证明$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。
对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。
对任意的$x \in X,y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x]\cap[y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。
由对任意的$x \in X$，$x \in [x]$易知$\bigcup_{x\in X}[x] = X$。
综上，我们证明了$\{[x]|x \in X\}$构成了集合X的一个划分。 $\square$

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$\mathscr{A} = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$，则

$$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

$$= (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\}) \cup (\{6\} \times \{6\})$$

$$= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4),$$

为集合X上的一个等价关系。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$,

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A\times A$,

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。
（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A \times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x, x) \in A \times A$,于是，$(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足自反性。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x, x) \in A \times A$,于是，$(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A\times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A\times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A \times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，从而$(y,x) \in A \times A$，于是$(y,x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A \times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，从而$(y,x) \in A \times A$，于是$(y,x) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足对称性。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$,

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong=\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong=\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x \in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$，从而$(x,x) \in A \times A$,于是，$(x,x) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，从而$(y,x) \in A \times A$，于是$(y,x) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，如果$(x,y) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，并且$(y,z) \in \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$，那么存在$A \in \mathscr{A}$使得$(x,y) \in A \times A$，并且存在$B \in \mathscr{A}$使得$(y,z) \in B \times B$。于是，$x \in A$，$y \in A$，$y \in B$，$z \in B$。此时，必有$A = B$，否则$A \cap B = \phi$，这与$y \in A$并且$y \in B$矛盾。从而，$x \in A$，$z \in A$，因此，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,于是$(x,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，

定理6.3

设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$$

则$\cong$是X上的一个等价关系。

证明.

这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,于是$(x,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足传递性。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.4
设X为一个集合，

$$\mathbb{R}=\{\cong\subseteq X\times X|\cong\text{为集合}X\text{上的一个等价关系}\},$$

$$\mathbb{A}=\{\mathscr{A}\subseteq 2^X|\mathscr{A}\text{为集合}X\text{的一个划分}\},$$

$$f=\{(\cong,\{[x]_\cong|x\in X\})|\cong\in\mathbb{R},[x]_\cong=\{y\in X|x\cong y\}\}$$

$$g=\{(\mathscr{A},\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\times A)|\mathscr{A}\in\mathbb{A}\}$$

则f为从$\mathbb{R}$到$\mathbb{A}$的双射，且$f^{-1}=g$。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，试写出集合X上的所有等价关系构成的集合。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，试写出集合X上的所有等价关系构成的集合。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} = \{&\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},\\
&\{\{1, 2\}, \{3\}\},\\
&\{\{1, 3\}, \{2\}\},\\
&\{\{2, 3\}, \{1\}\},\\
&\{\{1, 2, 3\}\}\}
\end{aligned}
$$

设集合$X=\{1,2,3\}$，试写出集合X上的所有等价关系构成的集合。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} = \{&\{\{1\},\{2\},\{3\}\}, & \mathbb{R} = \{&\{(1,1),(2,2),(3,3)\},\\
&\{\{1,2\},\{3\}\}, & &\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\},\\
&\{\{1,3\},\{2\}\}, & &\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)\},\\
&\{\{2,3\},\{1\}\}, & &\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(1,1)\},\\
&\{\{1,2,3\}\}\} & &\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),\\
& & &(3,1),(3,2),(3,3)\}\}
\end{aligned}
$$

6. 等价关系与集合的划分

证明.

1. 证明f为映射。这就是要证明对于集合X上的任意一个等价关系$\cong$，$\{[x]_{\cong} | x \in X\}$为集合$X$的一个划分。
2. 证明g为映射。这就是要证明对于集合X的任意一个划分$\mathscr{A}$，$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$为集合$X$上的一个等价关系。
3. 证明$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\bigcup_{x\in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$。
4. 证明$f \circ g = I_{\mathbb{A}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个划分$\mathscr{A}$，等价关系$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \times A$所对应的等价类的集合就是$\mathscr{A}$。

$\square$

6. 等价关系与集合的划分

习题

设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$\cong$为集合X的等价关系，$X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$，试求$\cong$。

6. 等价关系与集合的划分

习题

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\cong$为集合X的等价关系，$X/\cong=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}$，试求$\cong$。

解.

$$
\begin{aligned}
&\cong\\
=&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\
&(3,3),(3,5),(5,3),(5,5),\\
&(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

$\square$

例6.7

设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下:

$$\begin{aligned} R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解.

集合X上每个元素关于关系R的等价类:

$$\begin{aligned} [1] &= \{1,3,5\}\\ [2] &= \{2,4\}\\ [3] &= \{1,3,5\}\\ [4] &= \{2,4\}\\ [5] &= \{1,3,5\}\\ [6] &= \{6\} \end{aligned}$$

于是关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，
即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

1. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$x < y, x = y, y < x$中有且仅有一个成立。
2. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$并且$y < z$，则$x < z$。
3. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。
4. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。

另外，实数集还具有如下性质：
设A_1，A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1

集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx；

(2) R是反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$；

(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1
集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

(1) R是自反的，即对X中的任意元素x，xRx；
(2) R是反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$；
(3) R是传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义7.2
设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为偏序集。

7. 偏序关系与偏序集

例7.1

实数集$\mathbb{R}$上通常的“小于等于”关系$\le$是偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \le)$为偏序集。

例7.2

设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$是2^S上的偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为偏序集。

7. 偏序关系与偏序集

例7.3

设集合$X=\{a,b,c,d\}$上的关系R定义如下：

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

则R为X上的偏序关系。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.3
设$\leq$为集合X上的偏序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立，则称$\leq$为X上的**全序关系**。相应的，二元组$(X, \leq)$称为**全序集**。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.4

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$x \leq s$，则称s为A的最大元素；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的最小元素。

定义7.5

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在A中没有元素x使得$s < x$，则称s为A的极大元素；如果存在一个元素$t \in A$，在A中没有元素x使得$x < t$，则称t为A的极小元素。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.6

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果存在一个元素$s\in X$使得$\forall x\in A$有$x\leq s$，则称s为A的一个上界；如果存在一个元素$t\in X$使得$\forall x\in A$有$t\leq x$，则称t为A的一个下界。

定义7.7

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的上确界，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的下确界，记为$\inf A$。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.8

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$A\subseteq X$。如果对任意的$a,b\in A$，$a\leq b$与$b\leq a$必有一个成立，则称A为X中的链；如果对A中任两个不同的元素a与b，$a\leq b$与$b\leq a$均不成立，则称A为X中的反链。$|A|$称为链（反链）的长度。

7. 偏序关系与偏序集

定理7.1

设$(X,\leq)$为一个偏序集，如果X中所有链长度的最大值为n，则X的全部元素可以被分成n个非空不相交反链的并集。

7. 偏序关系与偏序集

定理7.1

设$(X, \leq)$为一个偏序集，如果X中所有链长度的最大值为n，则X的全部元素可以被分成n个非空不相交反链的并集。

推论7.1

设$(X, \leq)$为一个偏序集，$|X| = mn + 1$，则X中或存在一个长至少为$n + 1$的链，或存在一个长至少为$m + 1$的反链。

7. 偏序关系与偏序集

定理7.1

设$(X,\leq)$为一个偏序集，如果X中所有链长度的最大值为n，则X的全部元素可以被分成n个非空不相交反链的并集。

推论7.1

设$(X,\leq)$为一个偏序集，$|X| = mn+1$，则X中或存在一个长至少为$n+1$的链，或存在一个长至少为$m+1$的反链。

例7.4

证明：每个由n^2+1个实数组成的序列$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$中必有长至少为$n+1$的不减子序列，或有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

习题

习题

是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系?

习题

实数集上的“小于”关系$<$是否是反自反的? 集合X的幂集2^X上的“真包含”关系$\subset$是否是反自反的? 为什么?

习题

下列说法是否正确? 若正确，请给出证明; 若不正确，请说明理由。

*1)*设R为集合X上的反自反的和传递的二元关系，则R为反对称的二元关系。

*2)*设R为集合X上的对称的和传递的二元关系，则R为自反的二元关系。

习题

习题

设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题

设X,Y,S同习题4。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题

习题

设X, Y, S同习题4。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f, g \in S$，$f \cong g$当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\})|y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\})|y \in Y\}$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题

是否存在一个偏序关系$\leq$，使$(X, \leq)$中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果有，请给出一个具体例子；如果没有，请证明之。

习题

令$X = \{a, b, c, d\}$，画出偏序集$(2^X, \subseteq)$的*Hasse*图。

习题

习题

令$S = \{1, 2, \cdots, 12\}$，画出偏序集$(S, |)$的*Hasse*图，其中$|$为整除关系。它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素。

习题

偏序集$(X, \leq)$称为有序完备的，当且仅当X的每个有上届的非空子集有上确界。证明：偏序集$(X, \leq)$为有序完备的当且仅当对X的每个有下界的非空子集有下确界。