习题 1. 设A为由序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的所有项组成的集合，则$A$是否是可数的？为什么？

解：A不一定可数，例如当$a_1 = a_2 = \cdots = 1$时，$A = \{1\}$为有穷集合。

习题 2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多是可数集。

证明. 设A为直线上某个互不相交的开区间构成的集合，在每个开区间中取一个有理数，则A与有理数集合的一个子集之间存在一一对应的关系，于是A为至多可数集。 □

习题 3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多是可数集。

实数集合可以用如下公理系统刻画：
设$x, y, z \in R$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. 对任意的$x \in R$，$x \leq x$。
12. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq x$，则$x = y$。
13. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq z$，则$x \leq z$。
14. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$x \leq y$和$y \leq x$两者中必有其一成立。

    我们用$x < y$表示$x \leq y$并且$x \neq y$，$x \geq y$表示$y \leq x$，$x > y$表示$x \geq y$并且$x \neq y$。
15. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。
16. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。
17. 设A_1，A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

我们在以上公理系统的基础上证明：

设A为R的任意一个非空子集，如果A有上界，则A有上确界。

证明. 设b为A的一个上届，由A非空知，存在$a \in A$。

将闭区间$[a,b]$二等分，得到两个小的闭区间$I_1=[a,\frac{a+b}{2}]$和$I_2=[\frac{a+b}{2},b]$。 如果I_2中存在A中的点，则记$A_1=I_2$；否则，I_1中必存在A中的点，记$A_1=I_1$。这样得到的闭区间A_1中必存在A中的点，并且其右边界为A的上界。

按照同样的方法将A_1二等分，这样依次可以得到闭区间$A_2,A_3,\cdots$，每个闭区间中存在A中的点， 并且其右边界为A的上界。

$\cap_{i=0}^{\infty}A_i$非空，取$x\in\cap_{i=0}^{\infty}A_i$，以下证明$x$为$A$的上确界。

首先证明x为A的上界。用反证法，假设x不是A的上界，则存在$y\in A$，$y>x$。 由于当$i\to\infty$时，A_i的长度$\to 0$，所以存在正整数N，A_N的右边界$-x<A_N$的长度$<y-x$，从而A_N的右边界$<y$，这与A_N的右边界为A的上界矛盾。

其次证明x为A的最小上界。用反证法，假设x不是A的最小上界，则存在上界x'，$x'<x$。 由于当$i\to\infty$时，A_i的长度$\to 0$，所以存在整数M，$x-A_M$的左边界$<A_M$的长度$<x-x'$，从而A_M的左边界$>x'$，而A_M中存在A中的点z，$z>x'$，与x'为A的上界矛盾。 □

接下来，我们来看结论中涉及的一些基本概念。

设$f:R\to R$为一个函数。如果对任意的$x_1\in R$，$x_2\in R$，$x_1<x_2$，那么$f(x_1)\leq f(x_2)$，则称f为单调函数。

设$x_0\in R$，$L\in R$，如果对任意的$\varepsilon\in R$， $\varepsilon>0$，存在$\delta\in R$， $\delta>0$，只要$|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-L|<\varepsilon$，则称函数f在x_0处的极限为L，记为$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$。

如果$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f$在$x_0$处连续，$x_0$为函数$f$的连续点；如果函数$f$在$x_0$处不连续，则称$x_0$为函数$f$的不连续点。

证明. 对任意的$x_0\in R$，由单调函数的定义知，集合$\{f(x)|x<x_0\}$有上界$f(x_0)$，从而有上确界，定义$L(x_0)=sup\{f(x)|x<x_0\}$；集合$\{f(x)|x>x_0\}$有下界$f(x_0)$，从而有下确界，定义$U(x_0)=inf\{f(x)|x>x_0\}$。如果$x_1<x_2$，那么$U(x_1)\leq f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq L(x_2)$。另外，如果$x_0$为$f$的不连续点，可以证明$L(x_0)<U(x_0)$。因此，集合$S=\{(L(x),U(x))|x\text{为函数f的不连续点}\}$中的开区间两两不相交。在$S$中的每个开区间中取一个有理数，则所有这些有理数的集合与函数f的所有不连续点构成的集合是对等的，从而f的所有不连续点所构成的集合为至多可数的。

设x_0为f的不连续点，以下证明$L(x_0)<U(x_0)$。由$L(x_0)\leq f(x_0)\leq U(x_0)$知$L(x_0)\leq U(x_0)$，因此只需证$L(x_0)\neq U(x_0)$。用反证法，假设$L(x_0)=U(x_0)$，则$L(x_0)=U(x_0)=f(x_0)$。对任意的$\varepsilon>0$，由$L(x_0)$的定义知存在$x'<x_0$使得$f(x')>L(x_0)-\varepsilon=f(x_0)-\varepsilon$；由$U(x_0)$的定义知存在$x''>x_0$使得$f(x'')<U(x_0)+\varepsilon=f(x_0)+\varepsilon$。设$\delta=\min(|x'-x_0|,|x''-x_0|)$，那么当$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，从而$\lim_{x\to x_0}=f(x_0)$，函数$f$在$x_0$处连续，这与$x_0$为$f$的不连续点矛盾。 □

习题 4. 任一可数集A的所有有限子集构成的集族是可数集族。

证明. 因为A为可数集合，所以A中元素可以排成无重复项的序列：

$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$

令$S=\{B|B\subseteq A, B$为有穷集$\}$，Q为有理数集， 定义映射$\phi: S\to Q$，对任意的$B\in S$,$\phi(B)=0.b_1b_2\ldots b_n\ldots$， 这里

$$b_i=\begin{cases}1 & \text{如果}\mathrm{a}_i\in B\\ 0 & \text{如果}\mathrm{a}_i\notin B\end{cases}$$

则对任意的$B_1\in S, B_2\in S$,如果$B_1\neq B_2$,则$\phi(B_1)\neq\phi(B_2)$，即ϕ为从S到Q的单射。$\phi(S)$为可数集Q的无限子集，从而也为可数集。ϕ为从S到$\phi(S)$的双射,因此S为可数集。 □

习题 5. 判断下列命题之真伪：

a) 若$f: X\to Y$且f是满射，则只要X是可数集，那么Y是至多可数的；

b) 若$f: X\to Y$且f是单射，则只要Y是可数集，则X也是可数集；

c) 可数集在任一映射下的像也是可数集。

解. a)真，b)c)伪。 □

习题 6. 设$\sum$为一个有限字母表，$\sum$上所有字（包括空字ϵ)之集记为$\sum^*$。证明$\sum^*$是可数集。 （n元组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$称为$\sum$上的一个字，这里$c_i\in\sum, 1\leq i\leq n$，$\epsilon=()$称为$\sum$上的一个空字）。

证明. $\sum^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\sum^n$，其中$\sum^0=\{\epsilon\}$。对任意的自然数$i$,$\sum^i$为有穷集合。于是$\sum^*$可以排成无重复项的序列： 先排$\sum^0$中的元素，再排$\sum^1$中的元素，再排$\sum^2$中的元素，$\cdots$。 □

习题 7. 利用康托的对角线法证明所有*0*，*1*的无穷序列是不可数集。

证明. 用反证法。设所有0,1的无穷序列构成的集合A为可数集， 则A中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{array}{r} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots\\ a_{21}a_{22}a_{23}\cdots\\ a_{31}a_{32}a_{33}\cdots\\ \cdots\\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots\\ \cdots\end{array}$$

其中$a_{ij}=0$或1。

构造0,1序列

$$b_1,b_2,b_3,\cdots$$

其中

$$b_n=\begin{cases}0 & \text{如果}a_{nn}=1\\ 1 & \text{如果}a_{nn}=0\end{cases}$$

则所构造的0,1序列$b_1,b_2,b_3,\cdots$与前述序列中的任意一个$0,1$序列都不相同，矛盾。 □

习题 8. 证明：如果A是可数集，则2^A不是可数集。

证明. 由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

构造从2^A到所有的0,1序列构成的集合之间的映射f:

对任意的$B \in 2^A$，f(B)为如下的0,1序列：

$$b_1, b_2, b_3, \cdots$$

其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果} a_i \in B \\ 0 & \text{如果} a_i \notin B \end{cases}$$

则f为从2^A到所有的0,1序列构成的集合之间的双射， 而所有的0,1序列构成的集合为不可数集，从而2^A为不可数集。 □