

离散数学讲义

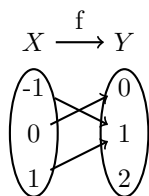
陈建文

March 8, 2022

第二章 映射

定义2.1. 设 X 和 Y 为两个集合。一个从 X 到 Y 的**映射** f 为一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

例. 设集合 $X = \{-1, 0, 1\}$ ，集合 $Y = \{0, 1, 2\}$ ， $\forall x \in X, f(x) = x^2$ ，即 $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ ，则 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射。



定义2.2. 设 X 和 Y 为两个集合。一个从 X 到 Y 的**映射**为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 f ：

1. 对 X 的每一个元素 x ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f, (x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

例. 设集合 $X = \{-1, 0, 1\}$ ，集合 $Y = \{0, 1, 2\}$ ， $f \subseteq X \times Y$ ， $f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ ，则 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射。

定义2.1和定义2.2是等价的。

练习2.1. 设 $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}, f \subseteq X \times Y$ ，则下列为映射的是 (D)

- A. $f = \{(0, 3), (1, 4)\}$
- B. $f = \{(0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 5)\}$
- C. $f = \{(0, 3), (0, 4)\}$
- D. $f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3)\}$

映射定义的符号化表示：

$$f: X \rightarrow Y$$

$$f \subseteq X \times Y$$

- 1) $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$
 即: $\forall x \in X \rightarrow \exists y \in Y \wedge (x, y) \in f$
 2) $\forall x \in X \forall y \in Y \forall y' \in Y ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y')$
 即: $\forall x \in X \rightarrow (\forall y \in Y \rightarrow \forall y' \in Y \rightarrow ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \rightarrow y = y'))$

定义2.3. 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的映射, $f: X \rightarrow Y$, 如果 $y = f(x)$, 则称 y 为 x 在 f 下的**象**, 称 x 为 y 的**原象**。 X 称为 f 的**定义域**; 集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 f 的**值域**, 记为 $Im(f)$ 。

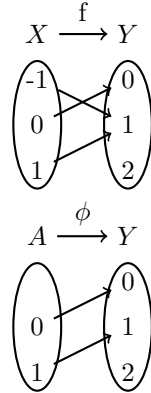
$P(x): x$ 为偶数

$P: Z \rightarrow \{T, F\}$

$P \subseteq Z \times \{T, F\}$

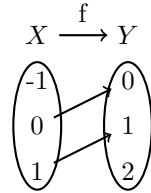
$P = \{\dots, (-2, T), (-1, F), (0, T), (1, F), (2, T), \dots\}$

定义2.4. 设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 当把 f 的定义域限制在 A 上时, 就得到了一个 $\phi: A \rightarrow Y$, $\forall x \in A$, $\phi(x) = f(x)$ 。 ϕ 称为 f 在 A 上的**限制**, 并且常用 $f|A$ 来表示 ϕ 。反过来, 我们也称 f 为 ϕ 在 X 上的**扩张**。



定义2.5. 设 $f: A \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, 则称 f 为 X 上的一个**部分映射**。

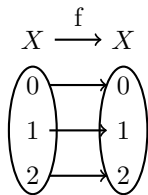
一个部分映射的例子:



定义2.6. 两个映射 f 与 g 称为是相等的当且仅当 f 和 g 都为从 X 到 Y 的映射, 并且 $\forall x \in X$ 总有 $f(x) = g(x)$ 。

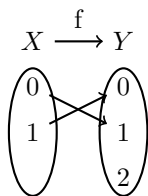
定义2.7. 设 $f: X \rightarrow X$, 如果 $\forall x \in X, f(x) = x$, 则称 f 为 X 上的**恒等映射**。 X 上的恒等映射常记为 I_X 。

一个恒等映射的例子:



定义2.8. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**。

一个单射的例子:



单射的符号化表示:

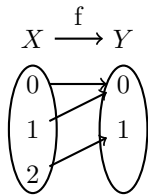
$$f: X \rightarrow Y$$

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{即: } \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

定义2.9. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**。

一个满射的例子:



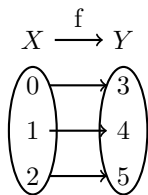
满射的符号化表示:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$$

定义2.10. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 X 到 Y 的**双射**, 或者称 f 为从 X 到 Y 的一一对应。这时也称 X 与 Y **对等**, 记为 $X \sim Y$ 。

一个双射的例子:



定义2.11. 从集合 X 到集合 Y 的所有映射之集记为 Y^X , 即 $\{f|f: X \rightarrow Y\}$ 。

$$\{2, 3\}^{\{0,1\}} = \{(0, 2), (1, 2)\}, \{(0, 3), (1, 3)\}, \{(0, 2), (1, 3)\}, \{(0, 3), (1, 2)\}\}$$

定理2.1 (抽屉原理). 如果把 $n+1$ 个物体放到 n 个盒子里, 则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例. 从 $1, 2, \dots, 2n$ 中任意选出 $n+1$ 个数, 则这 $n+1$ 个数中必有两个数, 使得其中之一能除尽另一个。

证明. 每个整数均可写成 $2^l \cdot d$ 的形式, 其中 l 为非负整数, d 为奇数。因此, 当把选出的 $n+1$ 个整数都写成这种形式时, 便得到了 $n+1$ 个奇数 d_1, d_2, \dots, d_{n+1} , 并且 $1 \leq d_i \leq 2n-1, i=1, 2, \dots, n+1$ 。但1到 $2n$ 之间仅有 n 个奇数, 由抽屉原理可知, 必有 i, j 使得 $d_i = d_j, i \neq j$ 。于是, d_i 与 d_j 对应的两个整数 $2^{l_i} \cdot d_i$ 与 $2^{l_j} \cdot d_j$ 中必有一个可以整除另外一个。□

例. 任何6个人中, 或有3个人互相认识, 或有3个人互相不认识。

定理2.2 (抽屉原理的强形式). 设 q_1, q_2, \dots, q_n 为 n 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 n 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 q_1 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 q_2 个物体, ..., 或者第 n 个盒子中至少含有 q_n 个物体。

推论2.1. 如果把 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 r 个物体。

推论2.2. 如果 n 个正整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均值

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1,$$

则 m_1, m_2, \dots, m_n 中至少有一个正整数不小于 r 。

例. n^2+1 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n+1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

对照以下的例子可以帮助我们理解证明过程。

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 9 & 10 & 4 & 7 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

证明. 从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是, 我们得到了一个 n^2+1 项的数列

$$h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1} \quad (2.1)$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长(项数)至少为 $n+1$ 的不减子序列, 或者有一个长至少为 $n+1$ 的不增子序列。

假设本题结论不成立, 则数列(2.1)中每个不减子序列的长度至多为 n , 每个不增子序列的长度也至多为 n 。令 m_i 为以 h_i 为首项的(2.1)的最长不减子序列的长度, $i=1, 2, \dots, n^2+1$ 。于是得到 n^2+1 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$, 其中每个数 m_i 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 n^2+1 个数放到 n 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 m_i 放

到第 k 个盒子中当且仅当 $m_i = k$, 则必有某个盒子中至少含有 $n+1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n+1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2+1, k > n$ 。相应的, 我们有(2.1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2.2)$$

这是一个不增子序列。实际上, 如若不然, 例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$, 则由于以 h_{i_2} 为首项的最长不减子序列的长为 m_{i_2} , 所以前面加一项 h_{i_1} , 就得到了一个以 h_{i_1} 为首项长度大于 m_{i_1} 的不减子序列, 这是不可能的。

于是, 我们得到了一个长度至少为 $n+1$ 的不增子序列(2.2), 这又与假设相矛盾。所以, 本题结论成立。 \square

练习2.2. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数且 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。 φ 为从 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 到 A 的一一对应。试证: 如果 $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$, 则 $\varphi = I_A$ 。

证明. 设 $\varphi(a_1) \neq a_1$, 则由 φ 为双射知存在 $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数 $i < j$, $a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$, 由 $a_i \geq a_1$ 知 $\varphi(a_i) < a_j$, 从而 $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的 $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$, 由鸽笼原理, 必存在 $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$, 这与 φ 为双射矛盾。类似可证, $\varphi(a_2) = a_2, \dots, \varphi(a_n) = a_n$, 即 $\varphi = I_A$ 。 \square

练习2.3. 在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环, 此圆环的外半径为3, 内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点, 这可能吗? 证明你的结论。

答. 用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环, 则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16+3)^2 = 361\pi$ 的圆 C 内。此时必存在10个圆环 R_1, R_2, \dots, R_{10} 有公共的重叠区域, 否则所有圆环的面积之和 S_1 将小于圆 C 之面积的9倍, 即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$, 矛盾。任取圆环 R_1, R_2, \dots, R_{10} 的公共重叠区域中的一点, 在该点上放一个圆环, 将覆盖住 R_1, R_2, \dots, R_{10} 的圆心, 这10个圆心都是圆内650个点中的点, 结论得证。 \square

第三章