第六讲循环群

陈建文

October 8, 2022

定义1. 群G称为循环群，如果G是由其中的某个元素a生成的，即$G=(a)=\{\cdots,a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$。

例. 整数加法群$(Z,+)$为循环群，其生成元为1。

例. 模n同余类加群$Z_n=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$为一个阶为$n$的有限循环群，其生成元为[1]。

定理1. （1）循环群$G=(a)$为无穷循环群的充分必要条件是a的阶为无穷大，此时$G=\{\cdots,a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$;

（2）循环群$G=(a)$为n阶循环群的充分必要条件是a的阶为n，此时$G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$。

定理2. （1）无穷循环群同构于整数加群$(Z,+)$，即如果不计同构，无穷循环群只有一个，就是整数加群;

（2）阶为n的有限循环群同构于模n同余类加群$(Z_n,+)$，即如果不计同构，n阶循环群只有一个，就是模n同余类加群。

定理3. 设$G=(a)$为由a生成的循环群，则

（1）循环群的子群仍为循环群;

（2）如果G为无限循环群，则$H_0=\{e\},H_m=(a^m),m=1,2,\cdots$为$G$的所有子群，这里$H_m,m=1,2,\cdots$都同构于$G$;

（3）如果G为阶为n的循环群，则$H_0=\{e\},H_m=(a^m),m|n$为G的所有子群。每个子群$H_m,m=1,2,\cdots$的阶为n/m。

课后作业题:

练习1. 证明：n次单位根之集对数的通常乘法构成一个循环群。

练习2. 找出模12的同余类加群的所有子群。

练习3. 设$G=(a)$为一个n阶循环群。证明：如果$(r,n)=1$，则$(a^r)=G$。

练习4. 设群G中元素a的阶为n，$(r,n)=d$。证明：a^r的阶为n/d。