第二章映射

陈建文

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个集合。一个从X到Y的**映射**f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f : X \to Y$。

定义1.2

设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f：

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$；
2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

1. 映射

定义1.1

设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

定义1.2

设X和Y为两个集合。一个从X到Y的映射为一个满足以下两个条件的$X \times Y$的子集f:

1. 对X的每一个元素x，存在一个$y \in Y$，使得$(x, y) \in f$;
2. 若$(x, y) \in f$，$(x, y') \in f$，则$y = y'$。

$(x, y) \in f$记为$y = f(x)$。

定义1.3

设f为从集合X到集合Y的映射，$f: X \to Y$，如果$y = f(x)$，则称y为x在f下的象，称x为y的原象。X称为f的定义域；集合$\{f(x)|x \in X\}$称为f的值域，记为$Im(f)$。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5

设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

1. 映射

定义1.4

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5

设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

定义1.6

两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

1. 映射

定义1.4
设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，当把f的定义域限制在A上时，就得到了一个$\phi: A \to Y$，$\forall x \in A$，$\phi(x) = f(x)$。ϕ称为f在A上的限制，并且常用$f|A$来表示ϕ。反过来，我们也称f为ϕ在X上的扩张。

定义1.5
设$f: A \to Y$，$A \subseteq X$，则称f为X上的一个部分映射。

定义1.6
两个映射f与g称为是相等的当且仅当f和g都为从X到Y的映射，并且$\forall x \in X$总有$f(x) = g(x)$。

定义1.7
设$f: X \to X$，如果$\forall x \in X, f(x) = x$，则称$f$为$X$上的恒等映射。$X$上的恒等映射常记为$I_X$。

1.映射

定义1.8

设$f:X\to Y$，如果$\forall x_1,x_2\in X$，只要$x_1\neq x_2$，就有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义1.9

设$f:X\to Y$，如果$\forall y\in Y$，$\exists x\in X$使得$f(x)=y$，则称f为从X到Y的满射。

定义1.10

设$f:X\to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。这时也称X与Y对等，记为$X\sim Y$。

1.映射

定义1.11

从集合X到集合Y的所有映射之集记为Y^X，即$\{f|f:X\to Y\}$。

2. 抽屉原理

定理2.1 (抽屉原理)

如果把$n+1$个物体放到n个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

2. 抽屉原理

例：

从$1, 2, \ldots, 2n$中任意选出$n+1$个数，则这$n+1$个数中必有两个数，使得其中之一能除尽另一个。

2. 抽屉原理

例：

从$1, 2, \ldots, 2n$中任意选出$n+1$个数，则这$n+1$个数中必有两个数，使得其中之一能除尽另一个。

证明.

每个整数均可写成$2^l \cdot d$的形式，其中l为非负整数，d为奇数。因此，当把选出的$n+1$个整数都写成这种形式时，便得到了$n+1$个奇数$d_1, d_2, \cdots, d_{n+1}$，并且$1 \le d_i \le 2n-1$，$i = 1, 2, \cdots, n+1$。但1到$2n$之间仅有$n$个奇数，由抽屉原理可知，必有$i, j$使得$d_i = d_j$，$i \ne j$。于是，$d_i$与$d_j$对应的两个整数$2^{l_i} \cdot d_i$与$2^{l_j} \cdot d_j$中必有一个可以整除另外一个。 □

2. 抽屉原理

例：

任何 6 个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。

2. 抽屉原理

定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设q_1，q_2，...，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，...，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

2. 抽屉原理

定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设q_1，q_2，…，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，…，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1

如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

2. 抽屉原理

定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设q_1，q_2，...，q_n为n个正整数。如果把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物体放到n个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有q_1个物体，或者第二个盒子中至少含有q_2个物体，...，或者第n个盒子中至少含有q_n个物体。

推论2.1

如果把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里放了不少于r个物体。

推论2.2

如果n个正整数$m_1, m_2, \ldots, m_n$的平均值

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n} > r-1,$$

则$m_1, m_2, \ldots, m_n$中至少有一个正整数不小于r。

2. 抽屉原理

例：

n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

2. 抽屉原理

例：

n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，

2. 抽屉原理

例：

n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，

2. 抽屉原理

例：
n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.
从左到右依次用$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个$n^2+1$项的数列

$$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1} \tag{1}$$

2. 抽屉原理

例：

n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个$n^2+1$项的数列

$$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1} \tag{1}$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长（项数）至少为$n+1$的不减子序列，

2. 抽屉原理

例：

n^2+1个士兵站成一排，则可以使其中的至少$n+1$个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1}$表示此队列中各士兵的身高，于是，我们得到了一个$n^2+1$项的数列

$$h_1, h_2, \cdots, h_{n^2+1} \tag{1}$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长（项数）至少为$n+1$的不减子序列，或者有一个长至少为$n+1$的不增子序列。

□

假设本题结论不成立，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2 + 1, k > n$。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$。相应的，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n + 1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n + 1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为$n + 1$的不增子序列(2)，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2+1$。于是得到n^2+1个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2+1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \leq m_i \leq n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。
于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为n，每个不增子序列的长度也至多为n。令m_i为以h_i为首项的(1)的最长不减子序列的长度，$i = 1, 2, \cdots, n^2 + 1$。于是得到$n^2 + 1$个数$m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$，其中每个数$m_i$满足$1 \le m_i \le n$。现在把这$n^2+1$个数放到$n$个盒子$1, 2, \cdots, n$中，数$m_i$放到第$k$个盒子中当且仅当$m_i = k$，则必有某个盒子中至少含有$n+1$个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少$n+1$个数，它们是相等的。设这些数为$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_k}$，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n^2 + 1, k > n$。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_k} \tag{2}$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如$h_{i_1} < h_{i_2}$，则由于以h_{i_2}为首项的最长不减子序列的长为m_{i_2},所以前面加一项h_{i_1}，就得到了一个以h_{i_1}为首项长度大于m_{i_1}的不减子序列，这是不可能的。
于是，我们得到了一个长度至少为$n+1$的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \nsubseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \nsubseteq G_{b_i}$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^m G_{b_i}=G$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \cdots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^{m} G_{b_i} = G$，即$G_{b_{i_m}} = G$，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$，姑娘的集合为$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，$G_{b_i}$为与小伙子$b_i$跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i} \neq G$，$i = 1, 2, \cdots, m$。如果存在$i, j$，$i \neq j$，使得$G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \cdots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^{m} G_{b_i} = G$，即$G_{b_{i_m}} = G$，所以$b_{i_m}$与所有的姑娘都跳过舞，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.

设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\nsubseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\nsubseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^{m}G_{b_i}=G$，即$G_{b_{i_m}}=G$，所以$b_{i_m}$与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；b_2与g_2跳过舞，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；b_2与g_2跳过舞，但未与g_1跳过舞，

习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；b_2与g_2跳过舞，但未与g_1跳过舞，结论得证。 □

习题

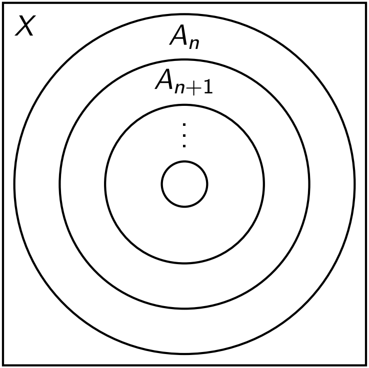
设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$



习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:

对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$:

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：

对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。

再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$：

对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：

对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。

再证$\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$：

对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$:
对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i \geq n$，$x \in A_i \cap A_{i+1}^c$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$:
对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i \geq n$，$x \in A_i \cap A_{i+1}^c$，由已知条件易知$A_i \subseteq A_n$,

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$：
对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i \geq n$，$x \in A_i \cap A_{i+1}^c$，由已知条件易知$A_i \subseteq A_n$，从而$x \in A_n$；

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$，$A_{n+1} \subseteq A_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$：
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$：
对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i \geq n$，$x \in A_i \cap A_{i+1}^c$，由已知条件易知$A_i \subseteq A_n$，从而$x \in A_n$；如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，

习题

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证$A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$:
对任意的$x \in A_n$，如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$；如果$x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则存在$i$，$i \geq n$且$x \notin A_i$，取最小的$j$，使得$j \geq n$且$x \notin A_j$，由$x \in A_n$知$j \neq n$，于是$x \in A_{j-1}$但$x \notin A_j$，这里$j > n$，从而$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，此时亦有$x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。
再证$\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$:
对任意的$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，如果$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1}^c)$，则存在$i$，$i \geq n$，$x \in A_i \cap A_{i+1}^c$，由已知条件易知$A_i \subseteq A_n$，从而$x \in A_n$；如果$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，则显然$x \in A_n$。 $\square$

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，$\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，$\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$，这与$\varphi$为双射矛盾。

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，$\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$，这与$\varphi$为双射矛盾。类似可证，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，$\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$，这与$\varphi$为双射矛盾。类似可证，$\varphi(a_2) = a_2, \ldots, \varphi(a_n) = a_n$，

例:

设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数且$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。φ为从$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$到$A$的一一对应。试证：如果$a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \cdots < a_n + \varphi(a_n)$，则$\varphi = I_A$。

证明.

设$\varphi(a_1) \neq a_1$，则由φ为双射知存在j，$j > 1$，$\varphi(a_j) = a_1$。于是，对任意的正整数$i < j$，$a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$，由$a_i \geq a_1$知$\varphi(a_i) < a_j$，从而$\varphi(a_i) = a_k, k < j$。于是，对任意的$i$，$i < j$，$\varphi(a_i) \in \{a_2, \ldots, a_{j-1}\}$，由鸽笼原理，必存在$i_1 < i_2 < j$，$\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$，这与$\varphi$为双射矛盾。类似可证，$\varphi(a_2) = a_2, \ldots, \varphi(a_n) = a_n$，即$\varphi = I_A$。 $\square$

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，

2. 抽屉原理

习题
在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.
用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的圆心，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16+3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，

2. 抽屉原理

习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为$S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为$\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$的圆$C$内。此时必存在10个圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和$S_1$将小于圆$C$之面积的9倍，即$3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$，矛盾。任取圆环$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住$R_1, R_2, \ldots, R_{10}$的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，结论得证。 $\square$

3. 映射的一般性质

定义3.1

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.1

设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，A在f下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例：

设$f: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$，$f(x) = x^2$，$f(\{-1, 0\})$=?

3. 映射的一般性质

定义3.2

设$f: X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

3. 映射的一般性质

定义3.2

设$f : X \to Y$，$B \subseteq Y$，B在f下的**原象**定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例：

设$f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$，$f(x) = x^2$，则$f^{-1}(\{1, 2\})$=?

3. 映射的一般性质

定理3.1

设$f : X \to Y$，$C \subseteq Y$，$D \subseteq Y$，则

(1) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(2) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(3) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

(4) $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$

(5) $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$

定理3.2

设$f : X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，则

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(3) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

(4) $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

4. 映射的合成

定义4.1

设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$为映射，映射f与g的合成$g \circ f: X \to Z$定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

4. 映射的合成

定义4.1

设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为映射，映射f与g的合成$g\circ f:X\to Z$定义为

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

定理4.1

设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$h:Z\to W$ 为映射，则

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

5. 逆映射

定义5.1

设$f: X \to Y$为双射，f的逆映射$f^{-1}: Y \to X$定义为：对任意的$y \in Y$，存在唯一的x使得$f(x) = y$,则$f^{-1}(y) = x$。

5. 逆映射

定义5.1
设$f: X \to Y$为双射，f的逆映射$f^{-1}: Y \to X$定义为：对任意的$y \in Y$，存在唯一的x使得$f(x) = y$,则$f^{-1}(y) = x$。

定义5.1'
设$f: X \to Y$为一个双射, 则$g: Y \to X, g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$称为$f$的逆映射，记为$g = f^{-1}$。

定义5.1''
设$f: X \to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g: Y \to X$使得

$$f \circ g = I_Y 且 g \circ f = I_X,$$

则称映射f为可逆的，而g称为f的逆映射。

定理5.1
定义5.1'与定义5.1''是等价的。

5. 逆映射

定理5.2
设$f: X \to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1} = f$。

5. 逆映射

定理5.2

设$f: X \to Y$为可逆映射，则$(f^{-1})^{-1} = f$。

定理5.3

设$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$都为可逆映射，则$g \circ f$也为可逆映射并且$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

5. 逆映射

定义5.2

设$f : X \to Y$为一个映射，如果存在一个映射$g : Y \to X$使得$g \circ f = I_X$，则称f为左可逆的，g称为f的左逆映射；如果存在一个映射$h : Y \to X$ 使得$f \circ h = I_Y$，则称f为右可逆的，h称为f的右逆映射。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。
设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为 单 射，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g : Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，

5. 逆映射

定理5.4

设$f:X\to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g:Y\to X$ 使得$g\circ f=I_X$。对任意的$x_1\in X$，$x_2\in X$，如果$f(x_1)=f(x_2)$，则$g(f(x_1))=g(f(x_2))$，再由$g\circ f=I_X$知$x_1=x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g:Im(f)\to X$使得$g\circ f=I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y\in Y$，若$y\in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y\in Y\setminus Im(f)$时，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y \in Y \setminus Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g: Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y \in Y \setminus Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，则g为从集合Y到集合X的映射，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g : Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y \in Y \setminus Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，则g为从集合Y到集合X的映射，且$g \circ f = I_X$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

先证(1)。

设f为左可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$g \circ f = I_X$。对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$f(x_1) = f(x_2)$，则$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，再由$g \circ f = I_X$知$x_1 = x_2$，从而f为单射。

设f为单射，则f为从集合X到$Im(f)$的双射。于是，存在$g : Im(f) \to X$使得$g \circ f = I_X$。扩充g到Y上：对任意的$y \in Y$，若$y \in Im(f)$，则$g(y)$不变，而当$y \in Y \setminus Im(f)$时，规定$g(y)$为X中任意一个固定的元素x_0，则g为从集合Y到集合X的映射，且$g \circ f = I_X$。所以，f为左可逆的。

$\square$

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

5. 逆映射

定理5.4
设$f : X \to Y$为一个映射，则
1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，

5. 逆映射

定理5.4
设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.
再证(2)。
设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，

5. 逆映射

定理5.4
设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.
再证(2)。
设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。
设f为满射，则对任意的$y \in Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g : Y \to X$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g : Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g : Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，设$g(y) = x$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f : X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g : Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g : Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，设$g(y) = x$，则$f(x) = y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，设$g(y) = x$，则$f(x) = y$，从而$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$。

5. 逆映射

定理5.4

设$f: X \to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g: Y \to X$ 使得$f \circ g = I_Y$。对任意的$y \in Y$，由$f \circ g = I_Y$知$f(g(y)) = y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y \in Y$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \phi$。令$g: Y \to X$，其定义为，对任意的$y \in Y$，$g(y) = x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y \in Y$，设$g(y) = x$，则$f(x) = y$，从而$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$。所以$f \circ g = I_Y$，

5. 逆映射

定理5.4

设$f:X\to Y$为一个映射，则

1. f左可逆当且仅当f为单射；
2. f右可逆当且仅当f为满射。

证明.

再证(2)。

设f为右可逆的，则存在一个映射$g:Y\to X$ 使得$f\circ g=I_Y$。对任意的$y\in Y$，由$f\circ g=I_Y$知$f(g(y))=y$，从而f为满射。

设f为满射，则对任意的$y\in Y$，$f^{-1}(\{y\})\neq\phi$。令$g:Y\to X$，其定义为，对任意的$y\in Y$，$g(y)=x$，其中x为$f^{-1}(\{y\})$中一个特定元素。于是，对任意的$y\in Y$，设$g(y)=x$，则$f(x)=y$，从而$(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y=I_Y(y)$。所以$f\circ g=I_Y$，即$f$为右可逆的。 □

6. 置换

定义6.1

有穷集合S到自身的一一对应称为S上的一个置换。如果$|S|=n$，则S上的置换就说成是n次置换。

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$，$\sigma: S\to S$为S上的一个置换，$\sigma(1)=k_1$，$\sigma(2)=k_2$，$\ldots$，$\sigma(n)=k_n$，我们用如下的一个表来表示置换σ:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n\end{pmatrix}$$

S上所有的n次置换构成的集合记为S_n。

例:

设$S=\{1,2,3,4\}$，$\sigma(1)=3$，　$\sigma(2)=2$，　$\sigma(3)=4$，　$\sigma(4)=1$，则σ可以表示为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

这里，列的次序无关紧要，例如，σ还可以表示为

$$\sigma=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

6. 置换

定义6.2
设α与β为集合S上的两个置换，则α与β为两个从S到S的双射，讨论置换时，我们用$\alpha\beta$表示α与β的合成$\beta\circ\alpha$。注意这里α与β的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果$i\in S$，则用$(i)\alpha$表示i在α下的像，简记为$i\alpha$。

6. 置换

若α与β为两个n次置换，当把β的表示式中的上一行按α的下一行的顺序写出时，则$\alpha\beta$的下一行就是β的新表示式中的下一行。

6. 置换

定义6.3

设σ为S上的一个n次置换，若$i_1\sigma = i_2$，$i_2\sigma = i_3$，$\cdots$，$i_{k-1}\sigma = i_k$，$i_k\sigma = i_1$，而$\forall i \in S\setminus\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，$i\sigma = i$，则称$\sigma$为一个$k$循环置换，记为$(i_1 i_2 \cdots i_k)$。2–循环置换称为对换。

6. 置换

定理6.1

每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1–循环置换，这个分解是唯一的。

6. 置换

定理6.2

当$n \geq 2$时，每个n次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

6. 置换

定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为偶置换；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为奇置换。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \rightarrow B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。从而$f$为双射，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。从而$f$为双射，这证明了$|A| = |B|$。

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。从而$f$为双射，这证明了$|A| = |B|$。再由$|A| + |B| = n!$知，

定理6.4

当$n \geq 2$时，n次奇置换的个数与n次偶置换的个数相等，都等于$\frac{n!}{2}$。

证明.

设A为所有的n次奇置换所构成的集合，B为所有的n次偶置换所构成的集合，则$S_n = A \cup B$且$A \cap B = \phi$。所以，$|S_n| = |A| + |B| = n!$。

以下证明$|A| = |B|$。构造映射$f : A \to B$，对任意的$\sigma \in A$，$f(\sigma) = \sigma(12)$。易验证f为单射，这是因为对任意的$\sigma_1 \in A$，$\sigma_2 \in A$，如果$f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$，则$\sigma_1(12) = \sigma_2(12)$，从而$\sigma_1(12)(12) = \sigma_2(12)(12)$，即$\sigma_1 = \sigma_2$。同时，易验证$f$为满射，这是因为对任意的$\tau \in B$，$f(\tau(12)) = \tau(12)(12) = \tau$。从而$f$为双射，这证明了$|A| = |B|$。再由$|A| + |B| = n!$知，$|A| = |B| = \frac{n!}{2}$。 $\square$

7. 代数运算

定义7.1

一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.1

设X，Y，Z为任意三个非空集合。一个从$X \times Y$到Z的映射ϕ称为X与Y到Z的一个二元（代数）运算。当$X = Y = Z$时，则称ϕ为X上的二元(代数)运算。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.2

从集合X到Y的任一映射称为从X到Y的一元(代数)运算。如果$X = Y$，则从X到X的映射称为X上的一元(代数)运算。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, D$为非空集合。一个从$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$到$D$的映射$\phi$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$到$D$的一个$n$元（代数）运算。如果$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = D = A$，则称$\phi$为$A$上的$n$元代数运算。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.4

设"$\circ$"为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b \in X$，恒有$a \circ b = b \circ a$，则称二元代数运算"$\circ$"满足交换律。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.5

设“$\circ$”为集合X上的一个二元代数运算。如果$\forall a, b, c \in X$，恒有$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$，则称二元代数运算“$\circ$”满足**结合律**。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.6

设“$+$”与“$\circ$”为集合X上的两个二元代数运算。

如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“$\circ$”对“$+$”满足左分配律。

如果$\forall a, b, c \in X$，恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“$\circ$”对“$+$”满足右分配律。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.7

设$(X, \circ)$为一个代数系。如果存在一个元素$e \in X$使得对任意的$x \in X$恒有$e \circ x = x \circ e = x$，则称$e$为“$\circ$”的**单位元素**。

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 代数运算

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

定义8.8

设$(X, \circ)$为一个代数系，"$\circ$"有单位元素e，$a \in X$，如果$\exists b \in X$使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称b为a的逆元素。

定义8.9

设$(S,+)$与$(T,\oplus)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi : S \to T$，使得$\forall x, y \in S$，有

$$\phi(x+y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系$(S,+)$与$(T,\oplus)$同构，并记为$S \cong T$, ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

定义8.10

设$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$为两个代数系。如果存在一个一一对应$\phi : S \to T$，使得$\forall x, y \in S$，有

$$\phi(x+y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$
$$\phi(x \circ y) = \phi(x) * \phi(y),$$

则称代数系$(S,+,\circ)$与$(T,\oplus,*)$同构，并记为$S \cong T$, ϕ称为这两个代数系之间的一个同构。

7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

7. 代数运算

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬ p
T	F
F	T

x	y	x ∧ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	x ∨ y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

代数系$(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg)$与$(\{1, 0\}, \wedge, \vee, \bar{\ })$是同构的。

8. 集合的特征函数

定义9.1

设X为一个集合，$E \subseteq X$。E的特征函数$\chi_E : X \to \{0,1\}$定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果} x \in E, \\ 0 & \text{如果} x \notin E. \end{cases}$$

8. 集合的特征函数

定义9.2

令$Ch(X)=\{\chi|\chi:X\to\{0,1\}\}$。$\forall\chi,\chi'\in Ch(X)$及$x\in X$，

$$
\begin{aligned}
(\chi\vee\chi')(x) &= \chi(x)\vee\chi'(x)\\
(\chi\wedge\chi')(x) &= \chi(x)\wedge\chi'(x)\\
\bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

定理9.1

设X为一个集合，则代数系$(2^X,\cup,\cap,^c)$与$(Ch(X),\vee,\wedge,^-)$同构。

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$2^X = \{$$

$$\begin{array}{rll}
\phi, & \chi_1 : X \to \{0,1\} & \chi_1(1) = 0, \chi_1(2) = 0, \chi_1(3) = 0 \\
\{1\}, & \chi_2 : X \to \{0,1\} & \chi_2(1) = 1, \chi_2(2) = 0, \chi_2(3) = 0 \\
\{2\}, & \chi_3 : X \to \{0,1\} & \chi_3(1) = 0, \chi_3(2) = 1, \chi_3(3) = 0 \\
\{3\}, & \chi_4 : X \to \{0,1\} & \chi_4(1) = 0, \chi_4(2) = 0, \chi_4(3) = 1 \\
\{1,2\}, & \chi_5 : X \to \{0,1\} & \chi_5(1) = 1, \chi_5(2) = 1, \chi_5(3) = 0 \\
\{2,3\}, & \chi_6 : X \to \{0,1\} & \chi_6(1) = 0, \chi_6(2) = 1, \chi_6(3) = 1 \\
\{1,3\}, & \chi_7 : X \to \{0,1\} & \chi_7(1) = 1, \chi_7(2) = 0, \chi_7(3) = 1 \\
\{1,2,3\} & \chi_8 : X \to \{0,1\} & \chi_8(1) = 1, \chi_8(2) = 1, \chi_8(3) = 1 \\
\} & &
\end{array}$$