

习题. 设 $p \geq mn + 1$, D 为一个有 p 个顶点的比赛图。对 D 的弧任意涂上红色或黄色, 试证: D 中有一条长至少为 m 的由红色弧组成的有向路, 或有一条长至少为 n 的由黄色弧组成的有向路。

证明. 设 R 为由 D 的所有顶点和着红色的弧构成的 D 的子图, Y 为由 D 的所有顶点和着黄色的弧构成的 D 的子图。与无向图类似的, 定义有向图的色数。有向图 D 的一种 (顶点) 着色是指对 D 中的每个顶点指定一种颜色, 使得没有邻接的顶点着同一种颜色。有向图 D 的一个 n -着色是用 n 种颜色对 D 的着色。有向图 D 的色数是使 D 为 n -着色的最小值, 记为 $\chi(D)$ 。以下证明 $\chi(R) \geq m + 1$ 或者 $\chi(Y) \geq n + 1$ 。用反证法, 假设 $\chi(R) \leq m$ 并且 $\chi(Y) \leq n$ 。则可以用 m 种颜色对 R 的顶点进行着色, 使得相邻的顶点着不同的颜色, 着不同的颜色的顶点所构成的集合 (称为色组) 依次记为 U_1, U_2, \dots, U_m 。同理, 可以用 n 种颜色对 Y 的顶点进行着色, 使得相邻的顶点着不同的颜色, 不同的色组依次记为 W_1, W_2, \dots, W_n 。于是, $U_i \cap W_j (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ 中的顶点在 D 中彼此是不邻接的, 从而 $\chi(D) \leq mn$, 与 D 为比赛图矛盾。

以下证明对于任意的一个有向图 $D = (V, A)$, D 中存在一个长度大于等于 $\chi(D) - 1$ 的有向路, 从而结论得证。设 $A' \subseteq A$ 为使 $D' = D - A'$ 不含有向圈的极小弧集 (即对任意的 $a \in A'$, $D' + a$ 含有向圈), 并设 D' 中有向路的最大长度为 k , 只需证明 $k \geq \chi(D) - 1$ 。对 $i = 0, 1, 2, \dots, k$, 令 $V_i = \{x \in V \mid D' \text{ 中以 } x \text{ 为起点的有向路最大长度为 } i\}$, 则 $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$, 于是只需证明对任意的 i , $0 \leq i \leq k$, V_i 中的任意两个顶点是不邻接的, 从而 $\chi(D) \leq k + 1$, 即 $k \geq \chi(D) - 1$ 。

首先注意到, D' 中不存在起点和终点都在 $V_i (i = 0, 1, 2, \dots, k)$ 中的有向路, 若不然, 设 P 为 D' 中从顶点 x 到顶点 y 的有向路, 则存在一条长度为 i 的且起点为 y 的有向路, 因为 D' 不含有向圈, 所以 P 之后接 Q 为 D' 中起点在 x 且长度 $\geq i + 1$ 的有向路, 与 $x \in V_i$ 矛盾。

以下证明对任意的 i , $0 \leq i \leq k$, V_i 中的任意两个顶点是不邻接的。用反证法, 设 x 和 y 为 V_i 中两个在 D 中邻接的顶点, 并且存在从顶点 x 到顶点 y 的弧。由于 D' 中不存在从顶点 x 到顶点 y 的路, 所以 $xy \in A'$, 从而 $D' + xy$ 中含有向圈, 设为 C , 于是 $C - xy$ 为 D' 中一条从顶点 y 到顶点 x 的有向路且 $x, y \in V_i$, 与前面所得到的结论矛盾。□