

## 第二章映射

陈建文

# 1. 映射

## 定义1.1

设 $X$ 和 $Y$ 为两个集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 为一个法则，根据 $f$ ，对 $X$ 中的每个元素 $x$ 都有 $Y$ 中唯一确定的元素 $y$ 与之对应。从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

# 1. 映射

## 定义1.1

设 $X$ 和 $Y$ 为两个集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 为一个法则，根据 $f$ ，对 $X$ 中的每个元素 $x$ 都有 $Y$ 中唯一确定的元素 $y$ 与之对应。从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

## 定义1.2

设 $X$ 和 $Y$ 为两个集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 $f$ ：

1. 对 $X$ 的每一个元素 $x$ ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f$ ， $(x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

# 1. 映射

## 定义1.1

设 $X$ 和 $Y$ 为两个集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 为一个法则，根据 $f$ ，对 $X$ 中的每个元素 $x$ 都有 $Y$ 中唯一确定的元素 $y$ 与之对应。从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

## 定义1.2

设 $X$ 和 $Y$ 为两个集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射为一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 $f$ ：

1. 对 $X$ 的每一个元素 $x$ ，存在一个 $y \in Y$ ，使得 $(x, y) \in f$ ；
2. 若 $(x, y) \in f$ ， $(x, y') \in f$ ，则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ 。

## 定义1.3

设 $f$ 为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的映射， $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $y = f(x)$ ，则称 $y$ 为 $x$ 在 $f$ 下的象，称 $x$ 为 $y$ 的原象。 $X$ 称为 $f$ 的定义域；集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 $f$ 的值域，记为 $Im(f)$ 。

# 1. 映射

## 定义1.4

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  为  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

# 1. 映射

## 定义1.4

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  为  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.5

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  为  $X$  上的一个**部分映射**。

# 1. 映射

## 定义1.4

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  为  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.5

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  为  $X$  上的一个**部分映射**。

## 定义1.6

两个映射  $f$  与  $g$  称为是**相等**的当且仅当  $f$  和  $g$  都为从  $X$  到  $Y$  的映射, 并且  $\forall x \in X$  总有  $f(x) = g(x)$ 。

# 1. 映射

## 定义1.4

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  为  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.5

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  为  $X$  上的一个**部分映射**。

## 定义1.6

两个映射  $f$  与  $g$  称为是**相等**的当且仅当  $f$  和  $g$  都为从  $X$  到  $Y$  的映射, 并且  $\forall x \in X$  总有  $f(x) = g(x)$ 。

## 定义1.7

设  $f: X \rightarrow X$ , 如果  $\forall x \in X, f(x) = x$ , 则称  $f$  为  $X$  上的恒等映射。  $X$  上的恒等映射常记为  $I_X$ 。



# 1.映射

## 定义1.8

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ ，只要 $x_1 \neq x_2$ ，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**单射**。

## 定义1.9

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall y \in Y$ ， $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**满射**。

## 定义1.10

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $f$ 既是单射又是满射，则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**双射**，或者称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的**一一对应**。这时也称 $X$ 与 $Y$ **对等**，记为 $X \sim Y$ 。

# 1.映射

## 定义1.11

从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的所有映射之集记为 $Y^X$ ，即 $\{f|f : X \rightarrow Y\}$ 。

## 2. 抽屉原理

### 定理2.1 (抽屉原理)

如果把 $n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

## 2. 抽屉原理

例:

从 $1, 2, \dots, 2n$ 中任意选出 $n + 1$ 个数, 则这 $n + 1$ 个数中必有两个数, 使得其中之一能除尽另一个。

## 2. 抽屉原理

例:

从 $1, 2, \dots, 2n$ 中任意选出 $n+1$ 个数, 则这 $n+1$ 个数中必有两个数, 使得其中之一能除尽另一个。

证明.

每个整数均可写成 $2^l \cdot d$ 的形式, 其中 $l$ 为非负整数,  $d$ 为奇数。因此, 当把选出的 $n+1$ 个整数都写成这种形式时, 便得到了 $n+1$ 个奇数 $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ , 并且 $1 \leq d_i \leq 2n-1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ 。但1到 $2n$ 之间仅有 $n$ 个奇数, 由抽屉原理可知, 必有 $i, j$ 使得 $d_i = d_j$ ,  $i \neq j$ 。于是,  $d_i$ 与 $d_j$ 对应的两个整数 $2^{l_i} \cdot d_i$ 与 $2^{l_j} \cdot d_j$ 中必有一个可以整除另外一个。 □

## 2. 抽屉原理

例:

任何 6 个人中，或有3个人互相认识，或有3个人互相不认识。

## 2. 抽屉原理

### 定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设  $q_1, q_2, \dots, q_n$  为  $n$  个正整数。如果把  $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$  个物体放到  $n$  个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有  $q_1$  个物体，或者第二个盒子中至少含有  $q_2$  个物体， $\dots$ ，或者第  $n$  个盒子中至少含有  $q_n$  个物体。

## 2. 抽屉原理

### 定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为 $n$ 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 $q_1$ 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 $q_2$ 个物体,  $\dots$ , 或者第 $n$ 个盒子中至少含有 $q_n$ 个物体。

### 推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 $r$ 个物体。



## 2. 抽屉原理

### 定理2.2 (抽屉原理的强形式)

设 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为 $n$ 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 $q_1$ 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 $q_2$ 个物体,  $\dots$ , 或者第 $n$ 个盒子中至少含有 $q_n$ 个物体。

### 推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 $r$ 个物体。

### 推论2.2

如果 $n$ 个正整数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 的平均值

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1,$$

则 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 中至少有一个正整数不小于 $r$ 。

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高,

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是,

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是, 我们得到了一个 $n^2 + 1$ 项的数列

$$h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1} \quad (1)$$

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是, 我们得到了一个 $n^2 + 1$ 项的数列

$$h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1} \quad (1)$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长 (项数) 至少为 $n + 1$ 的不减子序列,

## 2. 抽屉原理

例:

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排, 则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列, 或站成一个按身高从大到小的队列。

证明.

从左到右依次用 $h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1}$ 表示此队列中各士兵的身高, 于是, 我们得到了一个 $n^2 + 1$ 项的数列

$$h_1, h_2, \dots, h_{n^2+1} \quad (1)$$

我们的问题就是要证明此数列中或者有一个长 (项数) 至少为 $n + 1$ 的不减子序列, 或者有一个长至少为 $n + 1$ 的不增子序列。







假设本题结论不成立,

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ,

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，



假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ,

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的,



假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上,

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上, 如若不然,

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上, 如若不然, 例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ,

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上, 如若不然, 例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ , 则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ,

假设本题结论不成立, 则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ , 每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度,  $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ , 其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中, 数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ , 则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知, 在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数, 它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的, 我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上, 如若不然, 例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ , 则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ , 所以前面加一项 $h_{i_1}$ ,

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，



假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

于是，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为 $n + 1$ 的不增子序列(2)，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为 $n + 1$ 的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为 $n + 1$ 的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，

假设本题结论不成立，则数列(1)中每个不减子序列的长度至多为 $n$ ，每个不增子序列的长度也至多为 $n$ 。令 $m_i$ 为以 $h_i$ 为首项的(1)的最长不减子序列的长度， $i = 1, 2, \dots, n^2 + 1$ 。于是得到 $n^2 + 1$ 个数 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ ，其中每个数 $m_i$ 满足 $1 \leq m_i \leq n$ 。现在把这 $n^2 + 1$ 个数放到 $n$ 个盒子 $1, 2, \dots, n$ 中，数 $m_i$ 放到第 $k$ 个盒子中当且仅当 $m_i = k$ ，则必有某个盒子中至少含有 $n + 1$ 个数。由上述方法可知，在这同一个盒子中的至少 $n + 1$ 个数，它们是相等的。设这些数为 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k}$ ， $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n^2 + 1, k > n$ 。相应的，我们有(1)的子序列

$$h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \quad (2)$$

这是一个不增子序列。实际上，如若不然，例如 $h_{i_1} < h_{i_2}$ ，则由于以 $h_{i_2}$ 为首项的最长不减子序列的长为 $m_{i_2}$ ，所以前面加一项 $h_{i_1}$ ，就得到了一个以 $h_{i_1}$ 为首项长度大于 $m_{i_1}$ 的不减子序列，这是不可能的。

于是，我们得到了一个长度至少为 $n + 1$ 的不增子序列(2)，这又与假设相矛盾。所以，本题结论成立。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一.



## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ,

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ,

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，



## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设， $\bigcup_{i=1}^m G_{b_i} = G$ ，



## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设， $\bigcup_{i=1}^m G_{b_i} = G$ ，即  $G_{b_{i_m}} = G$ ，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设， $\bigcup_{i=1}^m G_{b_i} = G$ ，即  $G_{b_{i_m}} = G$ ，所以  $b_{i_m}$  与所有的姑娘都跳过舞，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法一.

设小伙子的集合为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，姑娘的集合为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ， $G_{b_i}$  为与小伙子  $b_i$  跳过舞的姑娘的集合，则由假设  $G_{b_i} \neq G$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ 。如果存在  $i, j$ ， $i \neq j$ ，使得  $G_{b_i} \not\subseteq G_{b_j}$  且  $G_{b_j} \not\subseteq G_{b_i}$ ，则问题得证。否则，对任意的  $i, j$ ，或者  $G_{b_i} \subseteq G_{b_j}$ ，或者  $G_{b_j} \subseteq G_{b_i}$ ，于是有

$$G_{b_{i_1}} \subseteq G_{b_{i_2}} \subseteq \dots \subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设， $\bigcup_{i=1}^m G_{b_i} = G$ ，即  $G_{b_{i_m}} = G$ ，所以  $b_{i_m}$  与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法二.

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ，



## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

## 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，



## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，但未与 $g_2$ 跳过舞；

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，但未与 $g_2$ 跳过舞； $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，但未与 $g_2$ 跳过舞； $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞，但未与 $g_1$ 跳过舞，

## 习题

毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

### 证法二.

设 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子。由 $b_1$ 未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘 $g_2$ ， $b_1$ 未能与 $g_2$ 跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子 $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞。在与小伙子 $b_1$ 跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘 $g_1$ 未能与小伙子 $b_2$ 跳过舞，否则与 $b_1$ 为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是， $b_1$ 与 $g_1$ 跳过舞，但未与 $g_2$ 跳过舞； $b_2$ 与 $g_2$ 跳过舞，但未与 $g_1$ 跳过舞，结论得证。 □

## 习题

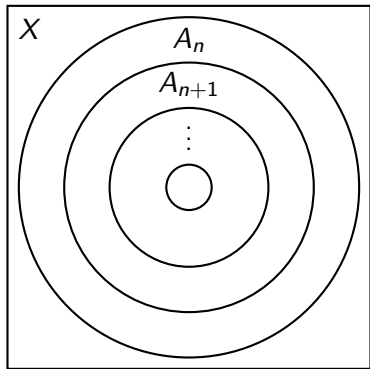
设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$



## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.



## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :  
对任意的 $x \in A_n$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ;

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ ,



## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ ,  $x \in A_i \cap A_{i+1}^c$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ ,  $x \in A_i \cap A_{i+1}^c$ , 由已知条件易知 $A_i \subseteq A_n$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ ,  $x \in A_i \cap A_{i+1}^c$ , 由已知条件易知 $A_i \subseteq A_n$ , 从而 $x \in A_n$ ;



## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

## 证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ ,  $x \in A_i \cap A_{i+1}^c$ , 由已知条件易知 $A_i \subseteq A_n$ , 从而 $x \in A_n$ ; 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ,

## 习题

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明.

先证 $A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ :

对任意的 $x \in A_n$ , 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ; 如果 $x \notin \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ 且 $x \notin A_i$ , 取最小的 $j$ , 使得 $j \geq n$ 且 $x \notin A_j$ , 由 $x \in A_n$ 知 $j \neq n$ , 于是 $x \in A_{j-1}$ 但 $x \notin A_j$ , 这里 $j > n$ , 从而 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 此时亦有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ 。

再证 $\bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n$ :

对任意的 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 如果 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c)$ , 则存在 $i$ ,  $i \geq n$ ,  $x \in A_i \cap A_{i+1}^c$ , 由已知条件易知 $A_i \subseteq A_n$ , 从而 $x \in A_n$ ; 如果 $x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ , 则显然 $x \in A_n$ 。



例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。 试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。



例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j$ ,  $j > 1$ ,  $\varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j$ ,  $a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j$ ,  $j > 1$ ,  $\varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j$ ,  $a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j$ ,



例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ , 这与  $\varphi$  为双射矛盾。

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ , 这与  $\varphi$  为双射矛盾。类似可证,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ , 这与  $\varphi$  为双射矛盾。类似可证,  $\varphi(a_2) = a_2, \dots, \varphi(a_n) = a_n$ ,

例:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数且  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 。  $\varphi$  为从  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  到  $A$  的一一对应。试证: 如果  $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < \dots < a_n + \varphi(a_n)$ , 则  $\varphi = I_A$ 。

证明.

设  $\varphi(a_1) \neq a_1$ , 则由  $\varphi$  为双射知存在  $j, j > 1, \varphi(a_j) = a_1$ 。于是, 对任意的正整数  $i < j, a_i + \varphi(a_i) < a_j + \varphi(a_j) = a_j + a_1$ , 由  $a_i \geq a_1$  知  $\varphi(a_i) < a_j$ , 从而  $\varphi(a_i) = a_k, k < j$ 。于是, 对任意的  $i, i < j, \varphi(a_i) \in \{a_2, \dots, a_{j-1}\}$ , 由鸽笼原理, 必存在  $i_1 < i_2 < j, \varphi(i_1) = \varphi(i_2)$ , 这与  $\varphi$  为双射矛盾。类似可证,  $\varphi(a_2) = a_2, \dots, \varphi(a_n) = a_n$ , 即  $\varphi = I_A$ 。 □



## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，



## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆 $C$ 内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆 $C$ 之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的公共重叠区域中的一点，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的圆心，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，

## 2. 抽屉原理

### 习题

在一个半径为16的圆内任意放入650个点。给你一个形似垫圈的圆环，此圆环的外半径为3，内半径为2。现在要求你用这个垫圈盖住这650个点中的至少10个点，这可能吗？证明你的结论。

答.

用这个垫圈可以盖住650个点中的至少10个点。以圆内的650个点中的每个点为圆心放一个圆环，则所有圆环的面积之和为 $S_1 = 650 * \pi * (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ 。所有圆环所覆盖的区域被包含在一个面积为 $\pi * (16 + 3)^2 = 361\pi$ 的圆C内。此时必存在10个圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 有公共的重叠区域，否则所有圆环的面积之和 $S_1$ 将小于圆C之面积的9倍，即 $3250\pi < 9 * 361\pi = 3249\pi$ ，矛盾。任取圆环 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的公共重叠区域中的一点，在该点上放一个圆环，将覆盖住 $R_1, R_2, \dots, R_{10}$ 的圆心，这10个圆心都是圆内650个点中的点，结论得证。 □

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $A$  在  $f$  下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$



### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $A$  在  $f$  下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例:

设  $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(\{-1, 0\}) = ?$

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $B$  在  $f$  下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $B$  在  $f$  下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例:

设  $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ,  $f(x) = x^2$ , 则  $f^{-1}(\{1, 2\}) = ?$

### 3. 映射的一般性质

#### 定理3.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $C \subseteq Y$ ,  $D \subseteq Y$ , 则

- (1)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- (2)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- (3)  $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
- (4)  $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$
- (5)  $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$

#### 定理3.2

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X$ , 则

- (1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (3)  $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$
- (4)  $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$

## 4. 映射的合成

### 定义4.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  为映射, 映射  $f$  与  $g$  的合成  $g \circ f : X \rightarrow Z$  定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

## 4. 映射的合成

### 定义4.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  为映射, 映射  $f$  与  $g$  的合成  $g \circ f: X \rightarrow Z$  定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 定理4.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  为映射, 则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

## 5. 逆映射

### 定义5.1

设  $f : X \rightarrow Y$  为双射,  $f$  的逆映射  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  定义为: 对任意的  $y \in Y$ , 存在唯一的  $x$  使得  $f(x) = y$ , 则  $f^{-1}(y) = x$ 。

## 5. 逆映射

### 定义5.1

设 $f: X \rightarrow Y$ 为双射,  $f$ 的逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 定义为: 对任意的 $y \in Y$ , 存在唯一的 $x$ 使得 $f(x) = y$ , 则 $f^{-1}(y) = x$ 。

### 定义5.1'

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个双射, 则 $g: Y \rightarrow X, g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ 称为 $f$ 的逆映射, 记为 $g = f^{-1}$ 。

### 定义5.1''

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 $f$ 为可逆的, 而 $g$ 称为 $f$ 的逆映射。

### 定理5.1

定义5.1'与定义5.1''是等价的。



## 5. 逆映射

### 定理5.2

设  $f : X \rightarrow Y$  为可逆映射，则  $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

## 5. 逆映射

### 定理5.2

设  $f : X \rightarrow Y$  为可逆映射，则  $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

### 定理5.3

设  $f : X \rightarrow Y$ ， $g : Y \rightarrow Z$  都为可逆映射，则  $g \circ f$  也为可逆映射并且  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

## 5. 逆映射

### 定义5.2

设  $f : X \rightarrow Y$  为一个映射，如果存在一个映射  $g : Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f = I_X$ ，则称  $f$  为左可逆的， $g$  称为  $f$  的左逆映射；如果存在一个映射  $h : Y \rightarrow X$  使得  $f \circ h = I_Y$ ，则称  $f$  为右可逆的， $h$  称为  $f$  的右逆映射。

## 5. 逆映射

### 定义5.2

设  $f : X \rightarrow Y$  为一个映射，如果存在一个映射  $g : Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f = I_X$ ，则称  $f$  为左可逆的， $g$  称为  $f$  的左逆映射；如果存在一个映射  $h : Y \rightarrow X$  使得  $f \circ h = I_Y$ ，则称  $f$  为右可逆的， $h$  称为  $f$  的右逆映射。

### 定理5.4

设  $f : X \rightarrow Y$  为一个映射，则

1.  $f$  左可逆当且仅当  $f$  为单射；
2.  $f$  右可逆当且仅当  $f$  为满射。

## 6. 置换

### 定义6.1

有穷集合 $S$ 到自身的一一对应称为 $S$ 上的一个置换。如果 $|S| = n$ , 则 $S$ 上的置换就说成是 $n$ 次置换。

设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\sigma : S \rightarrow S$ 为 $S$ 上的一个置换,  $\sigma(1) = k_1, \sigma(2) = k_2, \dots, \sigma(n) = k_n$ , 我们用如下的一个表来表示置换 $\sigma$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

例:

设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 1$ , 则 $\sigma$ 可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

这里, 列的次序无关紧要, 例如,  $\sigma$ 还可以表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. 置换

### 定义6.2

设 $\alpha$ 与 $\beta$ 为集合 $S$ 上的两个置换，则 $\alpha$ 与 $\beta$ 为两个从 $S$ 到 $S$ 的双射，讨论置换时，我们用 $\alpha\beta$ 表示 $\alpha$ 与 $\beta$ 的合成 $\beta \circ \alpha$ 。注意这里 $\alpha$ 与 $\beta$ 的次序，从运算的角度看有一定的便利性，但也有的教材中采用相反的顺序。按照我们的写法，讨论置换时，如果 $i \in S$ ，则用 $(i)\alpha$ 表示 $i$ 在 $\alpha$ 下的像，简记为 $i\alpha$ 。

## 6. 置换

若 $\alpha$ 与 $\beta$ 为两个 $n$ 次置换，当把 $\beta$ 的表示式中的上一行按 $\alpha$ 的下一行的顺序写出时，则 $\alpha\beta$ 的下一行就是 $\beta$ 的新表示式中的下一行。

## 6. 置换

### 定义6.3

设 $\sigma$ 为 $S$ 上的一个 $n$ 次置换, 若 $i_1\sigma = i_2, i_2\sigma = i_3, \dots, i_{k-1}\sigma = i_k, i_k\sigma = i_1$ , 而 $\forall i \in S \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i\sigma = i$ , 则称 $\sigma$ 为一个 $k$ 循环置换, 记为 $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ 。2-循环置换称为对换。



## 6. 置换

### 定理6.1

每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1-循环置换，这个分解是唯一的。

## 6. 置换

### 定理6.2

当 $n \geq 2$ 时，每个 $n$ 次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

### 定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

### 定义6.4

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

### 定理6.4

当 $n \geq 2$ 时， $n$ 次奇置换的个数与 $n$ 次偶置换的个数相等，都等于 $\frac{n!}{2}$ 。

## 7. 代数运算

### 定义7.1

一个集合及其在该集合上定义的若干个代数运算合称为一个代数系。

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

1. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $x < y, x = y, y < x$ 中有且仅有一个成立。
2. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x < y$ 并且 $y < z$ , 则 $x < z$ 。
3. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x < y$ , 则 $x + z < y + z$ 。
4. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果 $x > 0$ ,  $y > 0$ , 则 $xy > 0$ 。

另外，实数集还具有如下性质：

设  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  为实数集  $R$  上的闭区间， $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ ，则  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  非空。



## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.1

设 $X, Y, Z$ 为任意三个非空集合。一个从 $X \times Y$ 到 $Z$ 的映射 $\phi$ 称为 $X$ 与 $Y$ 到 $Z$ 的一个二元(代数)运算。当 $X = Y = Z$ 时, 则称 $\phi$ 为 $X$ 上的二元(代数)运算。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.2

从集合 $X$ 到 $Y$ 的任一映射称为从 $X$ 到 $Y$ 的**一元(代数)运算**。如果 $X = Y$ , 则从 $X$ 到 $X$ 的映射称为 $X$ 上的**一元(代数)运算**。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.3

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, D$ 为非空集合。一个

从 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 $D$ 的映射 $\phi$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 到 $D$ 的一个 $n$ 元（代数）运算。如果 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = D = A$ , 则称 $\phi$ 为 $A$ 上的 $n$ 元代数运算。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.4

设“ $\circ$ ”为集合 $X$ 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b \in X$ , 恒有 $a \circ b = b \circ a$ , 则称二元代数运算“ $\circ$ ”满足**交换律**。



## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.5

设“ $\circ$ ”为集合 $X$ 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ , 则称二元代数运算“ $\circ$ ”满足**结合律**。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.6

设“+”与“ $\circ$ ”为集合 $X$ 上的两个二元代数运算。

如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“ $\circ$ ”对“+”满足左分配律。

如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“ $\circ$ ”对“+”满足右分配律。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.7

设 $(X, \circ)$ 为一个代数系。如果存在一个元素 $e \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 恒有 $e \circ x = x \circ e = x$ , 则称 $e$ 为“ $\circ$ ”的**单位元素**。

## 7. 代数运算

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义8.8

设 $(X, \circ)$ 为一个代数系, “ $\circ$ ”有单位元素 $e$ ,  $a \in X$ , 如果 $\exists b \in X$ 使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称 $b$ 为 $a$ 的逆元素。



## 7. 代数运算

### 定义8.9

设 $(S, +)$ 与 $(T, \oplus)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$ , 使得 $\forall x, y \in S$ , 有

$$\phi(x + y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系 $(S, +)$ 与 $(T, \oplus)$ 同构, 并记为 $S \cong T$ ,  $\phi$ 称为这两个代数系之间的一个同构。

## 7. 代数运算

### 定义8.10

设 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$ , 使得 $\forall x, y \in S$ , 有

$$\begin{aligned}\phi(x + y) &= \phi(x) \oplus \phi(y), \\ \phi(x \circ y) &= \phi(x) * \phi(y),\end{aligned}$$

则称代数系 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ **同构**, 并记为 $S \cong T$ ,  $\phi$ 称为这两个代数系之间的一个同构。

## 7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

## 7. 代数运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

代数系 $(\{T, F\}, \wedge, \vee, \neg)$ 与 $(\{1, 0\}, \wedge, \vee, \neg)$ 是同构的。

## 8. 集合的特征函数

### 定义9.1

设 $X$ 为一个集合,  $E \subseteq X$ 。  $E$ 的**特征函数**  $\chi_E : X \rightarrow \{0, 1\}$  定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in E, \\ 0 & \text{如果 } x \notin E. \end{cases}$$

## 8. 集合的特征函数

### 定义9.2

令  $Ch(X) = \{\chi | \chi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$ 。  $\forall \chi, \chi' \in Ch(X)$  及  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned}(\chi \vee \chi')(x) &= \chi(x) \vee \chi'(x) \\(\chi \wedge \chi')(x) &= \chi(x) \wedge \chi'(x) \\ \bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{3}$$

### 定理9.1

设  $X$  为一个集合, 则代数系  $(2^X, \cup, \cap, ^c)$  与  $(Ch(X), \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}})$  同构。

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$2^X = \{$$

$$\phi,$$

$$\chi_1 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_1(1) = 0, \chi_1(2) = 0, \chi_1(3) = 0$$

$$\{1\},$$

$$\chi_2 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_2(1) = 1, \chi_2(2) = 0, \chi_2(3) = 0$$

$$\{2\},$$

$$\chi_3 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_3(1) = 0, \chi_3(2) = 1, \chi_3(3) = 0$$

$$\{3\},$$

$$\chi_4 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_4(1) = 0, \chi_4(2) = 0, \chi_4(3) = 1$$

$$\{1, 2\},$$

$$\chi_5 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_5(1) = 1, \chi_5(2) = 1, \chi_5(3) = 0$$

$$\{2, 3\},$$

$$\chi_6 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_6(1) = 0, \chi_6(2) = 1, \chi_6(3) = 1$$

$$\{1, 3\},$$

$$\chi_7 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_7(1) = 1, \chi_7(2) = 0, \chi_7(3) = 1$$

$$\{1, 2, 3\}$$

$$\chi_8 : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_8(1) = 1, \chi_8(2) = 1, \chi_8(3) = 1$$

$$\}$$

# 习题

## 习题

设  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{0, 1\}$ ,  $Z = \{2, 3\}$ 。  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(a) = f(b) = 0, f(c) = 1$ ;  $g : Y \rightarrow Z, g(0) = 2, g(1) = 3$ 。试求  $g \circ f$ 。

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $C \subseteq Y$ ,  $D \subseteq Y$ , 证明  
 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X$ , 证明  
 $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则  $(f(A))^c \subseteq f(A^c)$  成立吗?  $f(A^c) \subseteq (f(A))^c$  成立吗?



# 习题

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y$ , 证明:  $f$  为满射当且仅当  $\forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$ 。

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y$ , 证明:  $f$  为单射当且仅当  $\forall F \in 2^X, f^{-1}(f(F)) = F$ 。

## 习题

设  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, A \subseteq Z$ , 证明:  $(gf)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ 。

## 习题

设  $N = \{1, 2, \dots\}$ , 试构造两个映射  $f : N \rightarrow N$  与  $g : N \rightarrow N$ , 使得  $fg = I_N$ , 但  $gf \neq I_N$ 。

# 习题

## 习题

设  $f: X \rightarrow Y$ ,

(1) 如果存在唯一的一个映射  $g: Y \rightarrow X$ , 使得  $gf = I_X$ , 那么  $f$  是否可逆呢?

(2) 如果存在唯一的一个映射  $g: Y \rightarrow X$ , 使得  $fg = I_Y$ , 那么  $f$  是否可逆呢?

## 习题

是否存在一个从集合  $X$  到  $X$  的一一对应, 使得  $f = f^{-1}$ , 但  $f \neq I_X$ ?

# 习题选讲

## 习题11

$n^2 + 1$ 个士兵站成一排，则可以使其中的至少 $n + 1$ 个士兵向前走一步站成一个按身高从小到大的队列，或站成一个按身高从大到小的队列。

4	8	9	3	6	1	7	2	5	0
3	2	1	3	2	3	1	2	1	1