第九讲环的定义及简单性质

陈建文

October 5, 2022

课后作业题:

练习1. **设**$Z(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in Z\}$，其中$Z$为全体整数之集合。试证：$Z(\sqrt{2})$对数的通常加法和乘法构成一个环。

证明. $\forall m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z$，$(m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2}) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}$，$(m_1 + n_1\sqrt{2})(m_2 + n_2\sqrt{2}) = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{2}$，这验证了加法和乘法满足封闭性。

加法的结合律显然成立。

加法的单位元为$0 + 0\sqrt{2} = 0$。

$\forall m, n \in Z$，$m + n\sqrt{2}$对加法的逆元为$(-m) + (-n)\sqrt{2}$。

乘法的结合律，乘法对加法的分配律显然成立。 □

练习2. 设$Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in Q\}$，其中$Q$为全体有理数之集合。试证：$Q(\sqrt[3]{2})$对数的通常加法和乘法不构成一个环。

证明. $Q(\sqrt[3]{2})$对乘法不满足封闭性。否则如果$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt[3]{2}$,则$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$，从而$2 = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}(a + b\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = a\sqrt[3]{2} + b(a + b\sqrt[3]{2}) = ab + (a + b^2)\sqrt[3]{2}$，于是$\sqrt[3]{2} = \frac{2-ab}{a+b^2}$。等式的右边是一个有理数，左边是一个无理数，矛盾。 □

练习3. 设e为环R的唯一左单位元，试证e为R的单位元。

证明. $\forall a, b \in R$,

$$(ae - a + e)b = (ae)b - ab + eb = ab - ab + b = b$$

从而$ae - a + e$也为R的左单位元，又由于e为环R的唯一左单位元，从而$ae - a + e = e$，于是$ae = a$，这说明e也为R的右单位元，从而为R的单位元。 □

练习4. 设$(R, +, \circ)$为一个有单位元1的环，如果R中的元素a，b及$ab - 1$均有逆元素，试证$a - b^{-1}$及$(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$也有逆元素，并且

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$$

证明. 欲证

$$((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} = aba - a$$

只需证
$$((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})(aba-a)=1$$
只需证
$$(a-b^{-1})^{-1}(aba-a)-ba+1=1$$
只需证
$$(a-b^{-1})^{-1}(aba-a)=ba$$
只需证
$$(a-b^{-1})(ba)=aba-a$$
该等式显然成立。

我们还需要证明$a-b^{-1}$可逆。

在
$$(a-b^{-1})(ba)=aba-a$$
的启发下，计算
$$(a-b^{-1})(b(ab-1)^{-1})=1$$
得$a-b^{-1}$可逆。

□

练习5. 有单位元素的环R中零因子没有逆元素。

证明. 设a为R的零因子，则存在一个$b\in R$，$b\neq 0$，使得$ab=0$。以下用反证法证明a没有逆元素。假设a有逆元素，则$a^{-1}(ab)=a^{-1}0=0$,即$(a^{-1}a)b=b=0$，与$b\neq 0$矛盾。 □

练习6. 在交换环中二项式定理
$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$
成立。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n。

当$n=1$时，结论显然成立。

假设当$n=k$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{k+1}\\
=&(a+b)^k(a+b)\\
=&(a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\cdots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+b^k)(a+b)\\
=&a^{(k+1)}+(\binom{k}{0}+\binom{k}{1})a^{(k+1)-1}b+(\binom{k}{1}+\binom{k}{2})a^{(k+1)-2}b^2+\cdots+(\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k})ab^{(k+1)-1}+b^{(k+1)}\\
=&a^{(k+1)}+\binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1}b+\binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2}b^2+\cdots+\binom{k+1}{(k+1)-1}ab^{(k+1)-1}+b^{(k+1)}
\end{aligned}$$

□