

离散数学讲义

陈建文

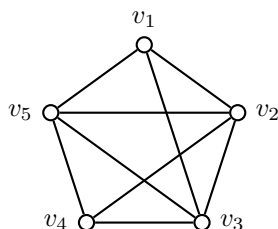
March 9, 2022

第 六 章 图的基本概念

设 V 为一个集合， V 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}.$$

定义6.1. 设 V 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个无向图。 V 中的元素称为无向图 G 的顶点， V 为顶点集； E 中的元素称为无向图 G 的边， E 为边集。无向图简称图。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 G 为一个 (p, q) 图，即 G 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图。



定义6.2. 在图 $G = (V, E)$ 中，如果 $\{u, v\} \in E$ ，则称顶点 u 与 v 邻接；若 x 与 y 是图 G 的两条边，并且仅有一个公共端点，即 $|x \cap y| = 1$ ，则称边 x 与 y 邻接；如果 $x = \{u, v\}$ 是图 G 的一条边，则称 u 与 x 互相关联，同样的，称 v 与 x 互相关联。

定义6.3. 如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环；允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

定义6.4. 设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $E = \Phi$ ，则称 G 为零图； $(1, 0)$ 图称为平凡图。

定义6.5. 设 v 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， G 中与 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度，记为 $\deg v$ 。

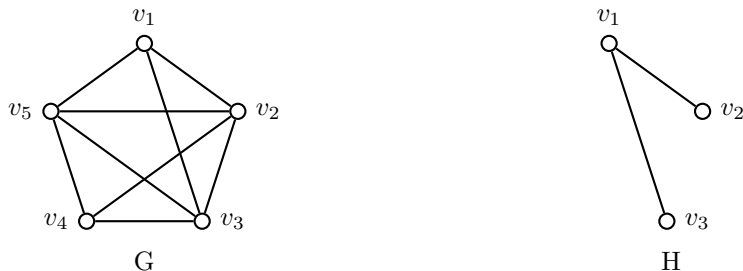
定理6.1. 设 $G = (V, E)$ 为一个具有 p 个顶点 q 条边的图，则 G 中各顶点度的和等于边的条数 q 的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

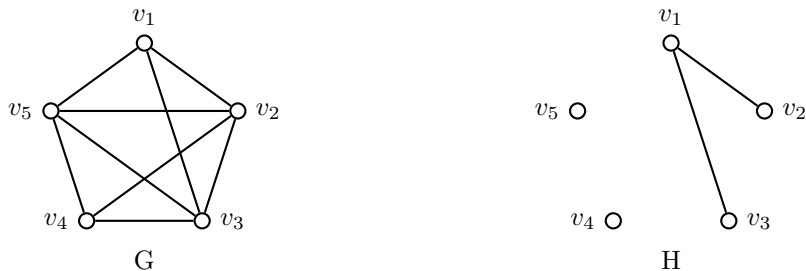
定理6.2. 在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

定义6.6. 图 G 称为 r 度正则图, 如果 G 的每个顶点的度都等于 r 。3度正则图也叫三次图。一个具有 p 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 p 个顶点的完全图, 记为 K_p 。

定义6.7. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 图 $H = (V_1, E_1)$ 称为 G 的一个子图, 当且仅当 V_1 为 V 的非空子集且 E_1 为 E 的子集。如果 $H \neq G$, 则称 H 为 G 的真子图。



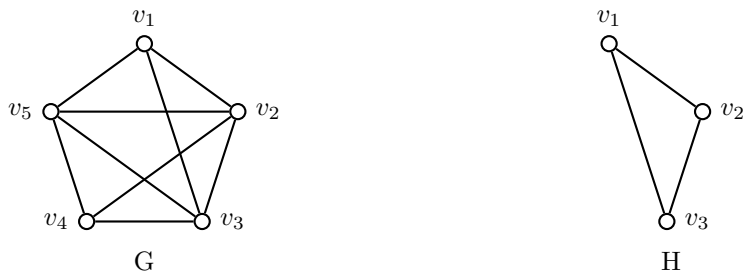
定义6.8. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $F \subseteq E$, 则称 G 的子图 $H = (V, F)$ 为 G 的一个生成子图。



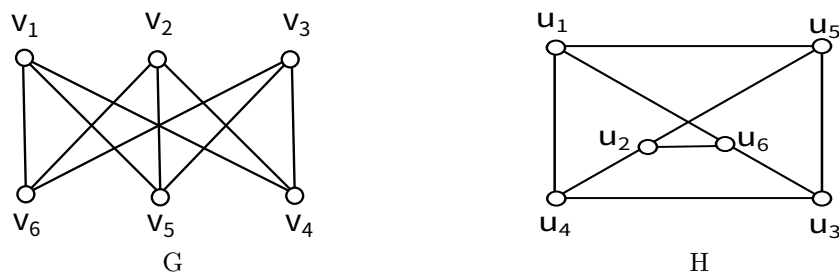
定义6.9. 设图 G 的子图 H 具有某种性质, 若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图, 则称 H 是具有此性质的极大子图。

定义6.10. 设 S 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 的非空子集, 则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图, 记为 $\langle S \rangle$ 。形式的,

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$



定义6.11. 设 $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ 为两个图, 如果存在一个一一对应 $\phi : V \rightarrow U$, 使得 $\{u, v\} \in E$ 当且仅当 $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$, 则称 G 与 H 同构。



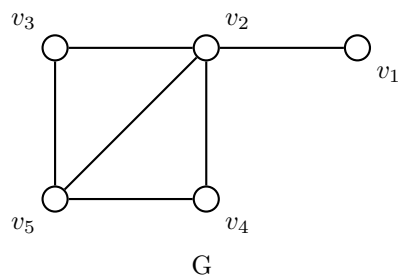
定义6.12. 设 $G = (V, E)$ 为一个图。 G 的一条**通道**为 G 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中 $x_i = \{v_{i-1}, v_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为该通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。

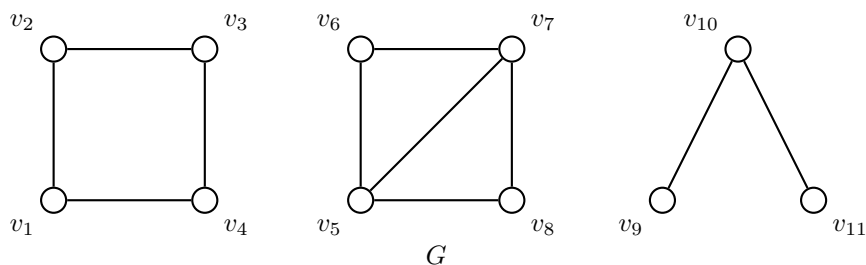
定义6.13. 如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的**迹**。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称此闭通道为**闭迹**。

定义6.14. 如果一条迹上的各顶点互不相同，则称此迹为**路**。如果一条长度大于0的闭迹上除终点外各顶点互不相同，则称此闭迹为**圈**，或**回路**。



定义6.15. 设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 G 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 G 为一个**连通图**。

定义6.16. 图 G 的极大连通子图称为 G 的一个**支**。

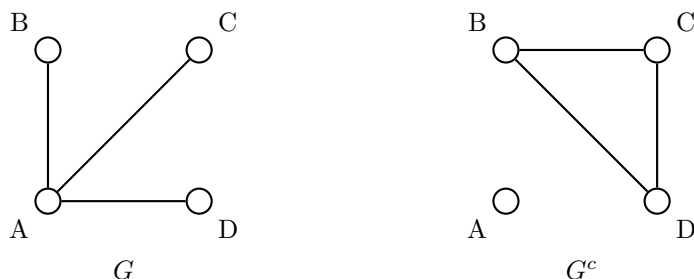


定理6.3. 设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 \cong 为 V 上的等价关系, G 的支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。

定义6.17. 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构, 则称 G 是自补图。



定理6.4. 对任一有6个顶点的图 G , G 中或 G^c 中有一个三角形。

证明. 设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, 考虑顶点 v_1 。

- 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 相邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点相邻接, 此时 G 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点都不邻接, 此时 G^c 中存在三角形。
- 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 不邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点不邻接, 此时 G^c 中存在三角形。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点互相邻接, 此时 G 中存在三角形。

□

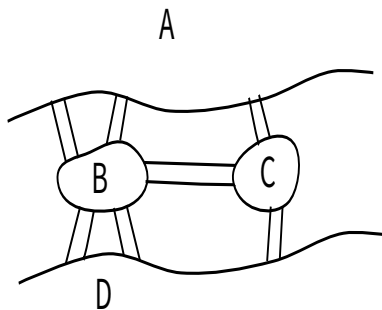
定义6.18. 对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$, 求一个最小的正整数 $r(m, n)$, 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 G 中一定含有一个 K_m 或者图 G^c 中一定含有一个 K_n , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

定义6.19. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 G 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中, 另一个在 V_2 中, 则称 G 为偶图。如果 $\forall u \in V_1, v \in V_2$ 均有 $uv \in E$, 则称 G 为完全偶图, 记为 $K_{m, n}$, 其中 $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

定义6.20. 设 $G = (V, E)$ 是一个图, u 和 v 是 G 的顶点。联结 u 和 v 的最短路的长称为 u 与 v 之间的距离, 并记为 $d(u, v)$ 。如果 u 与 v 间在 G 中没有路, 则定义 $d(u, v) = \infty$ 。

定理6.5. 图 G 为偶图的充分必要条件为它的所有圈都是偶数长。

定理6.6. 所有具有 p 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。



定义6.21. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理6.7. 图 G 为欧拉图当且仅当 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

证明. 首先, 假设图 G 为欧拉图, 往证 G 为连通的且每个顶点的度为偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。除 v_0 之外的其他顶点在 T 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度也为偶数。

其次, 假设 G 为连通的且每个顶点的度为偶数, 往证 G 为欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有边。若不然, 则图 G 中有一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹 (与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。于是 Z 和 Z' 可以联结成一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。□

定义6.22. 包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。一条欧拉迹如果不是欧拉闭迹, 则称其为欧拉开迹。

定理6.8. 图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 为连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图 G 有一条欧拉开迹 $Z: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1} v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 G 恰有两个奇度顶点。

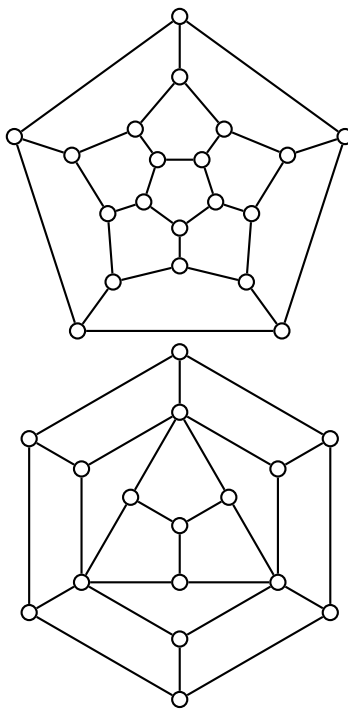
设图 G 是连通的, 且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边, 得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数, 因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 u 与顶点 v 之间的边, 便得到了图 G 的一条欧拉开迹。 \square

定理6.9. 设 G 为连通图, G 恰有 $2n$ 个奇度顶点, $n \geq 1$, 则 G 的全部边可以排成 n 条开迹, 且不能排成少于 n 条开迹。

证明. 设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 得到图 G' 。则 G' 是连通的, 且每个顶点的度为偶数, 因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹, $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点, 因此图 G 至多有 $2m$ 个奇度顶点, 这与图 G 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。 \square

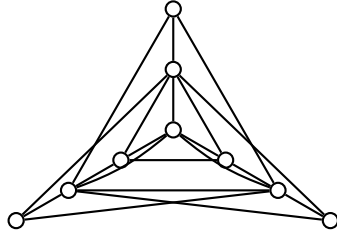
定义6.23. 图 G 的一条包含所有顶点的路称为 G 的一条哈密顿路; 图 G 的一个包含所有顶点的圈称为 G 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。



定理6.10. 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图, 则对 V 的每个非空子集 S , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图, $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。



定理6.11. 设 G 为一个有 p 个顶点的图, 如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 为连通的。

证明. 用反证法. 假设 G 不连通, 则 G 至少有两个支. 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 为其中的一个支, 其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$. 取 V_1 中的任意一个顶点 u 和 V_2 中的任意一个顶点 v , 则顶点 u 和顶点 v 不邻接并且

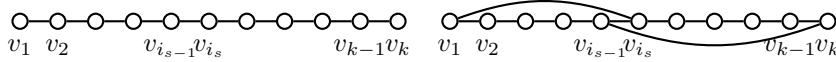
$$\deg u + \deg v \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = p - 2$$

矛盾。 □

定理6.12. 设 G 为一个有 p 个顶点的图, 如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明. 当 $p = 1, 2, 3$ 时, 易验证结论成立. 以下证明当 $p \geq 4$ 时结论成立. 设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$, 只需证明 $k = p$.

用反证法, 假设 $k < p$, 易验证此时 $k \geq 3$. 以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上. 由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ 中的顶点邻接, v_k 只能与 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接. 设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接. 否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

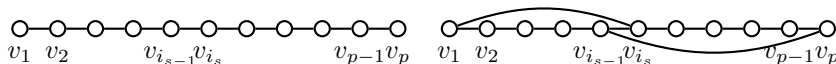
矛盾. 于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 为 G 中的一个圈。

由于 G 为连通的, $k < p$, 所以 G 必有某个顶点 v , v 不在 C 上, 但与 C 上某个顶点 v_i 邻接. 于是得到 G 的一条更长的路, 这就出现了矛盾。 □

定理6.13. 设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 为一个哈密顿图。



证明. 由定理6.12知, G 有哈密顿路, 记为 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 。

以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_p$ 必在同一个圈上, 从而 G 中有哈密顿圈。

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq p$, 则 v_p 必与某个 v_{i_s-1} 邻接。否则, v_p 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_p \leq r + ((p-1) - r) = p-1$$

与已知条件矛盾。于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_p v_{p-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 为 G 中的一个圈。 \square

定义6.24. 设 $G = (V, E)$ 为一个图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ 。 $p \times p$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为 G 的邻接矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{如果 } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

定理6.14. 设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和知 $(A^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k+1$ 的通道的条数。 \square

练习6.1. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

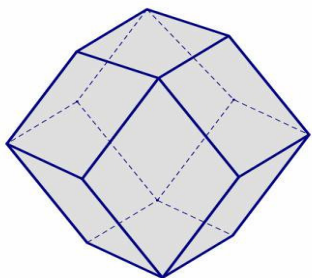
练习6.2. 画出具有4个顶点的所有无向图 (同构的只算一个)。

练习6.3. 在一个有 n 个人的宴会上, 每个人至少有 m 个朋友 ($2 \leq m \leq n$)。试证: 有不少于 $m+1$ 个人, 使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左右均是他的朋友。

练习6.4. 设 G 是图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 包含长至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈。

练习6.5. 若 G 是一个 (p, q) 图， $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ ，试证 G 为连通图。

练习6.6. 菱形12面体的表面上有无哈密顿圈？



练习6.1. 设 G 是一个 (p, q) 图，证明：若 $q \geq p + 4$ ，则 G 中有两个边不重的圈。

证明. 当 $q > p + 4$ 时，可以在 G 中任意去掉一些边，使得剩余的边数恰好比顶点数多4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈，则原来的图 G 中也一定有两个边不重的圈。因此，以下只需证当 $q = p + 4$ 时，图 G 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时，图 G 最多有 $p(p-1)/2$ 条边，易验证此时 $q = p + 4$ 不可能成立。

当 $p = 5$ 时， $q = 9$ 。设此时图 G 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ，除了 v_1 和 v_5 之间没有边关联之外，其余的任意两个顶点之间均有边关联，则此时 $v_1v_2v_3v_1$ 和 $v_3v_4v_5v_3$ 就是图 G 中两个边不重的圈。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 G 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证：

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时，去掉图 G 中任意一个度为0的顶点和任意一条边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 G' 中有两个边不重的圈，它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时，去掉图 G 中任意一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 G' 中有两个边不重的圈，它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时，设 u 为图 G 中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为 v 和 w 。分两种情况讨论。在第一种情况下， v 和 w 之间没有边关联，去掉顶点 u 及其与之关联的两条边 uv 和 uw ，添加一条边 vw ，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 G' 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 vw 不在这两个圈上，则这两个圈就是图 G 中两个边不重的圈；如果新添加的边 vw 在其中的一个圈上，将其替换为图 G 中的两条边 vu 和 uw ，则所得到的圈与另一个圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。在第二种情况下， v 和 w 之间有边关联，此时 $uvwu$ 构成图 G 中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边。此时 $q' = p' + 1$ ，因此图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中的圈 $uvwu$ 构成图 G 中两个边不重的圈。

(iv) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时， $2q \geq 3p$ ，即 $2(p+4) \geq 3p$ ，可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 G 中有长度小于等于4的圈，将其上的4条边去掉，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' \geq p'$ ，图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中去掉的边所构成的圈一

起构成图 G 中两个边不重的圈。若图 G 中所有圈的长度至少为5，设 C 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 C 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈 C 上至少有5个顶点知图 G 中至少有10个顶点，与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 G 中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。

□

[?] [?] [?] [?]

Bibliography

第七章