定理 0.1
设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

定理 0.1

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

用反证法。

定理 0.1

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

用反证法。假设G不连通，

定理 0.1
设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.
用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。

定理 0.1

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，

定理 0.1
设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.
用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。

定理 0.1
设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有
$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$
则G为连通的。

证明.
用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取V_1中的任意一个顶点u和V_2中的任意一个顶点v，

定理 0.1

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取V_1中的任意一个顶点u和V_2中的任意一个顶点v，则顶点u和顶点v不邻接并且

$$\deg u + \deg v \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = p - 2$$

定理 0.1

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G为连通的。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取V_1中的任意一个顶点u和V_2中的任意一个顶点v，则顶点u和顶点v不邻接并且

$$\deg u + \deg v \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = p - 2$$

矛盾。 □

练习:

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证明.

练习：

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。

练习：

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，

练习:

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。

练习:

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，

练习:

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。

练习：

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，

练习：

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1=(V_1,E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，

练习：

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1=(V_1,E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，则G中的边数等于G'中的边数。

练习:

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，则G中的边数等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，

练习:

若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明.

用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1 = (V_1, E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，则G中的边数等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，从而G中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，

练习：

若G是一个(p,q)图，$q>\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证G是连通图。

证明.

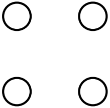
用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设$G_1=(V_1,E_1)$为其中的一个连通分量，其他各连通分量构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$。取G_1中的一个顶点u和G_2中的一个顶点v，将G_1中与u相关联的边替换为与v相关联的边（边的另一个顶点保持不变）所得到的图为G'，则G中的边数等于G'中的边数。显然G'中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，从而G中的边数小于等于K_{p-1}中的边数，即

$$q\leq\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

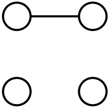
矛盾。 □

第八章 连通度和匹配

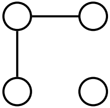
陈建文



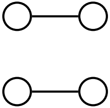
A



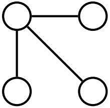
B



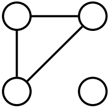
C



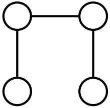
D



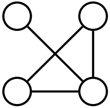
E



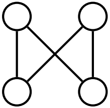
F



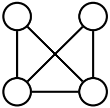
G



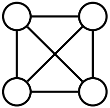
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

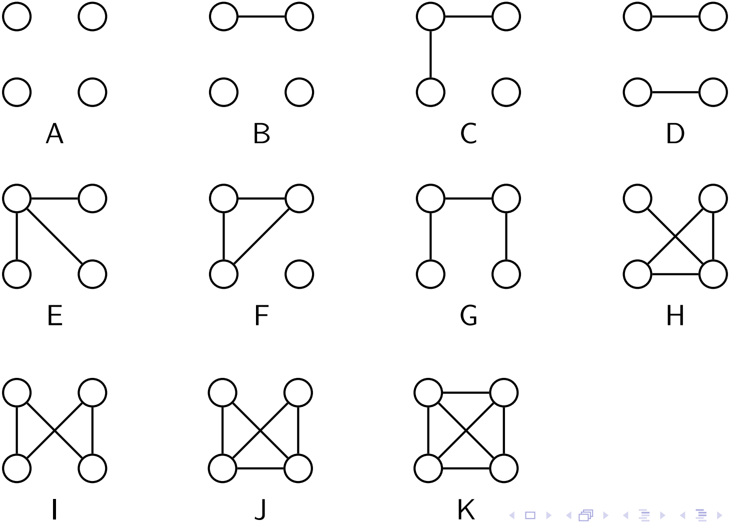
定义 1.1

图G的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

图G的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。



1. 顶点连通度和边连通度

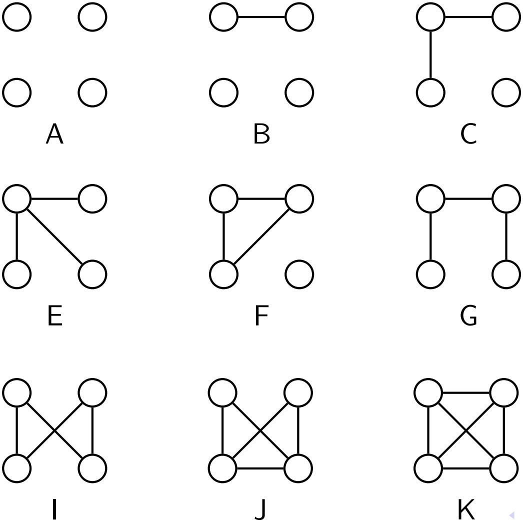
定义 1.2

图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。



1. 顶点连通度和边连通度

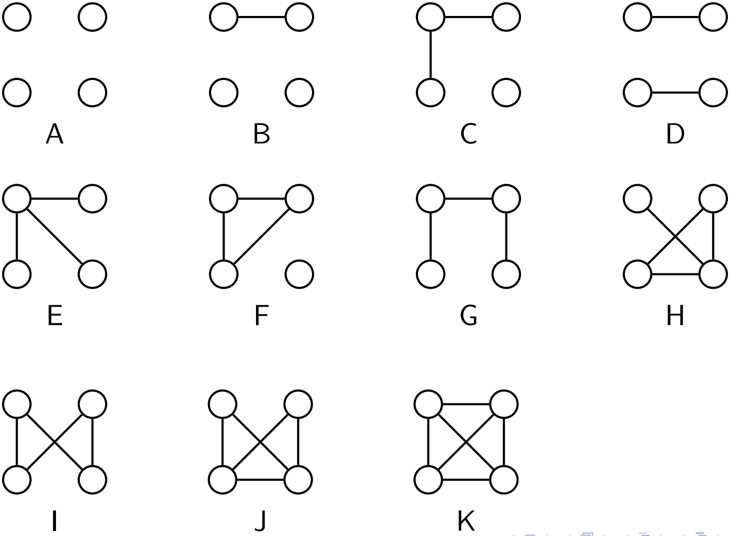
定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。



1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.
先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中$v$为孤立顶点，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中$v$为孤立顶点，所以$\lambda(G) \leq \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.
先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从G中去掉与v关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中v为孤立顶点，所以$\lambda(G) \le \delta(G)$。因此，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

先证$\lambda(G) \le \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则G不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \le \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从G中去掉与v关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中v为孤立顶点，所以$\lambda(G) \le \delta(G)$。因此，对任意的图G，$\lambda(G) \le \delta(G)$。 □

1. 顶点连通度和边连通度

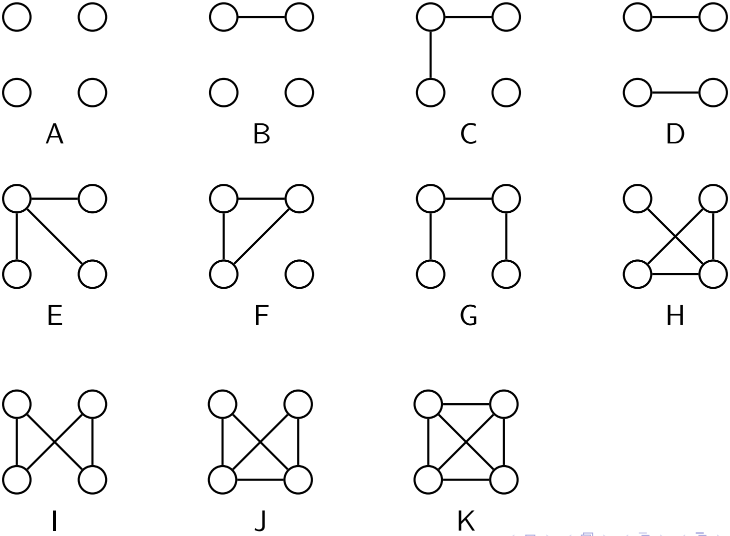
定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。



1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接 下 来 证 明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果G不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果G不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果G不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$。如果G不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \ge 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G)-1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G)-1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G)-1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。所以，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.
接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与u和v都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，x是这样产生的图的一条桥，从而移去u或v就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。 □

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

对任何整数a, b, c，　$0 < a \leq b \leq c$，　存在一个图G使得

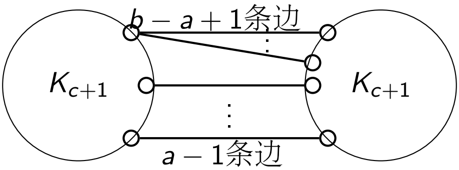
$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

对任何整数a, b, c， $0 < a \le b \le c$， 存在一个图G使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$



1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G = (V, E)$有p个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G) \geq \delta(G)$。
因为$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G) = \delta(G) = 0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G) > 0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V \setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A| + |V \setminus A| = p$知必有$|A| \leq [\frac{p}{2}]$或者$|V \setminus A| \leq [\frac{p}{2}]$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。
由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。
由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任意一个顶点，v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任意一个顶点，v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_1，则$F_1\subseteq F$；

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。
由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任意一个顶点，v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_1，则$F_1\subseteq F$；v与A中的y个顶点邻接，而这y个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_2，则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[\frac{p}{2}]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任意一个顶点，v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_1，则$F_1\subseteq F$；v与A中的y个顶点邻接，而这y个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_2，则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，从而

$$\lambda(G)\geq|F_1|+|F_2|=x+y=\deg v\geq\delta(G)$$

1. 顶点连通度和边连通度

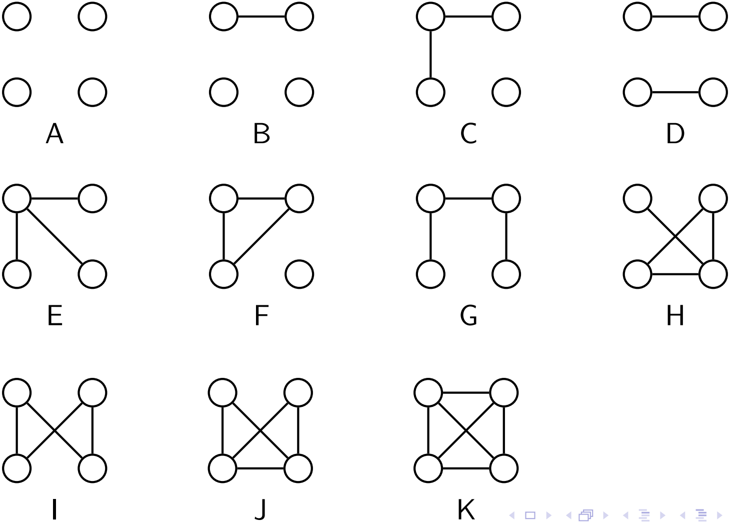
定义 1.3

设G为一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G为n-顶点连通的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G为n-边连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.3

设G为一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G为n-顶点连通的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G为n-边连通的。



1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G的任意两个不同的顶点在同一个圈上，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G的任意两个不同的顶点在同一个圈上，则G为没有割点的连通图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G的任意两个不同的顶点在同一个圈上，则G为没有割点的连通图，所以G为2-连通的。 $\square$

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4
设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连 通 的 ，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。当$d(u,v)=1$时，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。当$d(u,v)=1$时，由于$\kappa(G)\geq 2$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。当$d(u,v)=1$时，由于$\kappa(G)\geq 2$，所以uv不是桥，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。当$d(u,v)=1$时，由于$\kappa(G)\geq 2$，所以uv不是桥，于是uv必在某个圈上，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设G为2-连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v在同一个圈上。当$d(u,v)=1$时，由于$\kappa(G)\geq 2$，所以uv不是桥，于是uv必在某个圈上，所以u与v在同一个圈上。

$\square$

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G = (V, E)$为有p个顶点的图，$p \geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u, v) = k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。

定理1.4

设$G = (V, E)$为有p个顶点的图，$p \geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u, v) = k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u, v) = k + 1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u, v) = k + 1$知u与v之间有一条长为$k + 1$的路$P : uv_1v_2 \cdots v_kv$。显然$d(u, v_k) = k$。由归纳假设，

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P:uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。于是，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。于是，$G-v_k$中存在从u到v的路S。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P:uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。于是，$G-v_k$中存在从u到v的路S。u为Q,W,S的公共顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。于是，$G-v_k$中存在从u到v的路S。u为Q,W,S的公共顶点。设w为S上从u到v且在Q或W上的最后一个顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G = (V, E)$为有p个顶点的图，$p \geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u, v) = k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u, v) = k + 1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u, v) = k + 1$知u与v之间有一条长为$k + 1$的路$P : uv_1v_2 \cdots v_kv$。显然$d(u, v_k) = k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q, W。由于$\kappa(G) \geq 2$，所以G没有割点，从而$G - v_k$为连通图。于是，$G - v_k$中存在从u到v的路S。u为Q, W, S的公共顶点。设w为S上从u到v且在Q或W上的最后一个顶点。不妨设w在Q上，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设$G=(V,E)$为有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G为2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v必在同一个圈上。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v必在同一个圈上。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k在同一个圈上，于是，u与v_k间有两条没有内部公共顶点（即除u与v_k外）的两条路Q,W。由于$\kappa(G)\geq 2$，所以G没有割点，从而$G-v_k$为连通图。于是，$G-v_k$中存在从u到v的路S。u为Q,W,S的公共顶点。设w为S上从u到v且在Q或W上的最后一个顶点。不妨设w在Q上，则在G中存在包含u和v的圈：Q上的u与w间一段后接S上w与v间的那一段，然后是边vv_k，最后是W。 □

2. 门格尔定理

定义 2.1

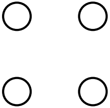
设u与v为图G中的两个不同的顶点。两条联结u与v的路，如果除了u与v外没有公共顶点，则称这两条路为联结u与v的不相交路；如果联结u与v的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结u与v的边不相交路。

定理 2.1

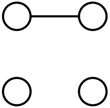
图G为n–连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有n条不相交路。

定理 2.2

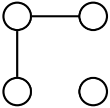
图G为n–边连通的当且仅当G的任一对不同的顶点间至少有n条边不相交路。



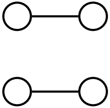
A



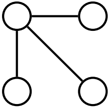
B



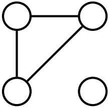
C



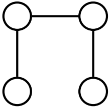
D



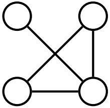
E



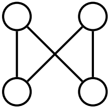
F



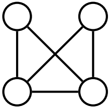
G



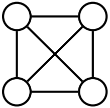
H



I



J



K

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0 v_1 \dots v_n$为G中的一条最长路，

练习：
设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.
设$P = v_0 v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，

练习:
设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.
设$P = v_0 v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G)\geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0v_1\ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$uv_0v_1\ldots v_n$构成了G中一条更长的路，

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0 v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$u v_0 v_1 \ldots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0 v_1 \dots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$u v_0 v_1 \dots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0v_1\dots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$uv_0v_1\dots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C = v_0v_1\dots v_sv_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0 v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$u v_0 v_1 \ldots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C = v_0 v_1 \ldots v_s v_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，这是因为$v_0$至少与$\delta(G)$个顶点相邻接，

练习：

设G为图。证明：若$\delta(G)\geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明.

设$P = v_0 v_1 \dots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$u v_0 v_1 \dots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C = v_0 v_1 \dots v_s v_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，这是因为$v_0$至少与$\delta(G)$个顶点相邻接，而所有这些与$v_0$邻接的顶点均在圈$C$中。 □

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

练习:
设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明:如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$,则G有一个同构于T的子图。

证明.
用数学归纳法证明,施归纳于k。
(1)当$k=0$时,

练习:

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，

练习：
设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于k。
（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

练习：
设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于k。
（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。
（2）假设当$k=n$时结论成立，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。

练习:

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明:如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$,则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明,施归纳于k。

(1)当$k=0$时,T是一棵包含1个顶点的树,在G中取任意一个顶点u,该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

(2)假设当$k=n$时结论成立,往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树,

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G)\geq n+1\geq n$，由归纳假设，G中存在一个同构于T'的子图G'。设在T中与其叶子顶点v邻接的顶点为u，在T'与G'的同构中，与u对应的顶点为u'。

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，由于$G'$中有$n+1$个顶点，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，由于$G'$中有$n+1$个顶点，$u'$在$G'$中至多有$n$条与之关联的边，

练习:

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，由于$G'$中有$n+1$个顶点，$u'$在$G'$中至多有$n$条与之关联的边，因此$u'$与$G$中除去$G'$中的顶点之外的其他某个顶点$v'$邻接，

练习：

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，由于$G'$中有$n+1$个顶点，$u'$在$G'$中至多有$n$条与之关联的边，因此$u'$与$G$中除去$G'$中的顶点之外的其他某个顶点$v'$邻接，在$G'$中添加顶点$v'$和边$u'v'$，

练习:

设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明.

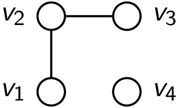
用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G) \geq n+1 \geq n$，由归纳假设，$G$中存在一个同构于$T'$的子图$G'$。设在$T$中与其叶子顶点$v$邻接的顶点为$u$，在$T'$与$G'$的同构中，与$u$对应的顶点为$u'$。在$G$中，$\deg u' \geq n+1$，由于$G'$中有$n+1$个顶点，$u'$在$G'$中至多有$n$条与之关联的边，因此$u'$与$G$中除去$G'$中的顶点之外的其他某个顶点$v'$邻接，在$G'$中添加顶点$v'$和边$u'v'$，则得到一个与$T$同构的子图。 $\square$

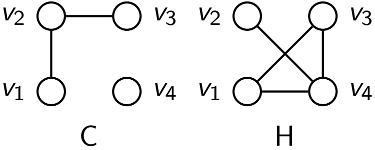
3. 匹配

3. 匹配

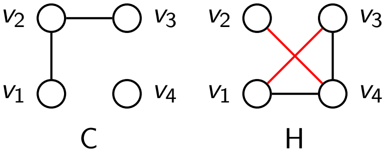


C

3. 匹配



3. 匹配



3. 匹配

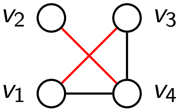
定义 3.1

设$G = (V, E)$为一个图，G的任意两条不邻接的边x与y称为互相独立的边。

3. 匹配

定义 3.1

设$G = (V, E)$为一个图，G的任意两条不邻接的边x与y称为互相独立的边。

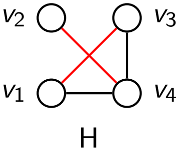


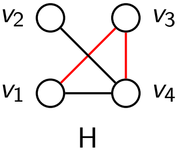
H

3. 匹配

定义 3.1

设$G=(V,E)$为一个图，G的任意两条不邻接的边x与y称为互相独立的边。





3. 匹配

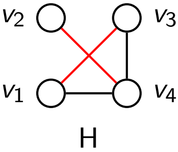
定义 3.2

图G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条不同的边都是互相独立的。

3. 匹配

定义 3.2

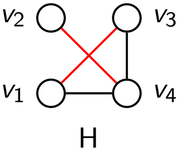
图G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条不同的边都是互相独立的。

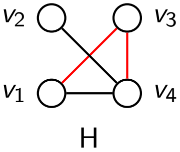


3. 匹配

定义 3.2

图G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条不同的边都是互相独立的。

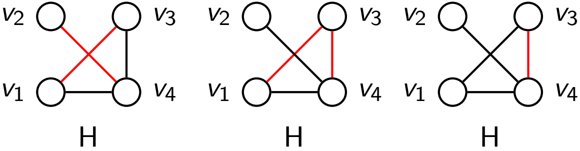




3. 匹配

定义 3.2

图G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条不同的边都是互相独立的。



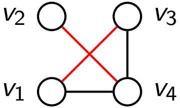
3. 匹配

定义 3.3

设Y为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。

3. 匹配

定义 3.3
设Y为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。



H

3. 匹配

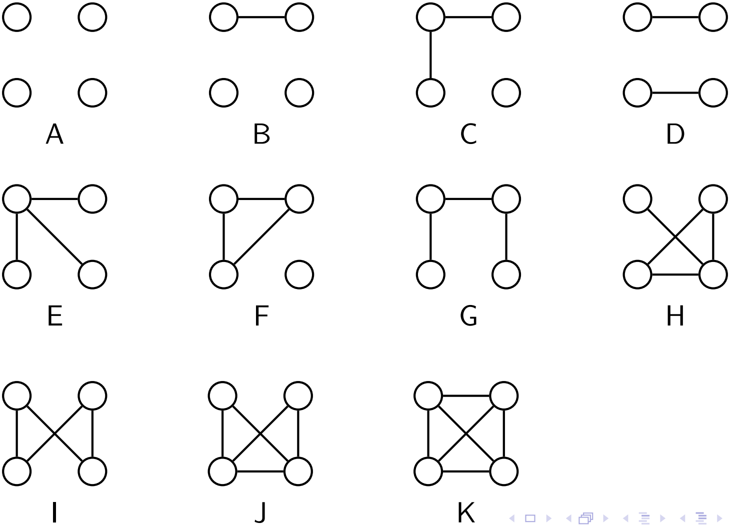
定义 3.4

设Y为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。

3. 匹配

定义 3.4

设Y为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。



3. 匹配

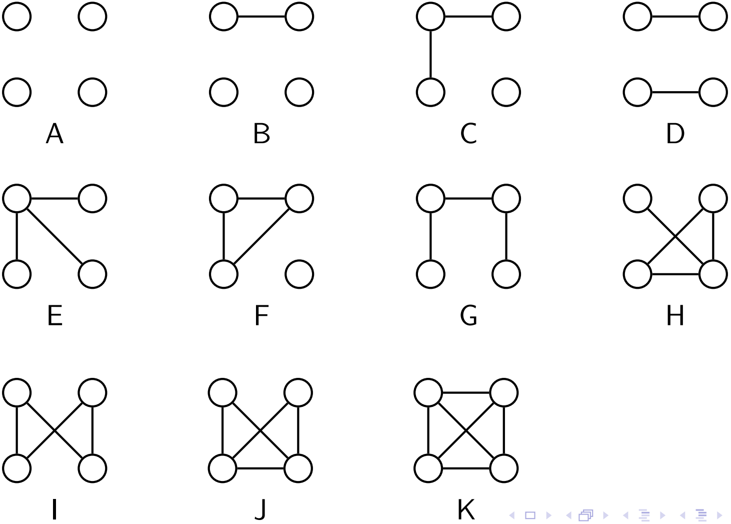
定义 3.5

设Y为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果对于G的任一匹配Y'，恒有$|Y'| \leq |Y|$, 则称Y为G的一个最大匹配。

3. 匹配

定义 3.5

设Y为图$G = (V, E)$的一个匹配，如果对于G的任一匹配Y'，恒有$|Y'| \leq |Y|$, 则称Y为G的一个最大匹配。



3. 匹配

定义 3.6

设$G=(V,E)$为一个偶图且$V=V_1\cup V_2$, $\forall x\in E$，x为联结V_1的一个顶点与V_2的一个顶点的边。如果存在G的一个匹配Y使得$|Y|=min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称Y是偶图G的一个完全匹配。

匹配

定理 3.1

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

匹配

定义 3.7

设M为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果一条路P上的边在M与$E \setminus M$中交错出现，则称路P为图G中的一条M-交错路。

匹配

定义 3.7

设M为图$G=(V,E)$的一个匹配，如果一条路P上的边在M与$E\setminus M$中交错出现，则称路P为图G中的一条M-交错路。进一步，如果P的两个端点都不与M中的边相关联，则称P为一条M-增广路。

匹配

定理3.1
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

匹配

定理3.1

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

证明.

匹配

定理3.1
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

证明.
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，

匹配

定理3.1
设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.
设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$，

匹配

定理3.1

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A\{x, y\} \in E\}$$

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$，则显然对V_1的任意子集A，

匹配

定理3.1
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配M且$|M|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

证明.
设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$，则显然对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。

证明.

证明.
设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A,

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*-交错路到达的顶点构成的集合。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*−交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，$B = V_2 \cap Z$。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，$B = V_2 \cap Z$。显然$f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B | \{x, y\} \in M^*\}$为从集合$R \setminus \{u\}$到$B$的双射，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，$B = V_2 \cap Z$。显然$f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B | \{x, y\} \in M^*\}$为从集合$R \setminus \{u\}$到$B$的双射，因此$|B| = |R| - 1$。

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*−交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，$B = V_2 \cap Z$。显然$f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B | \{x, y\} \in M^*\}$为从集合$R \setminus \{u\}$到$B$的双射，因此$|B| = |R| - 1$。以下证明$N(R) = B$。

证明.

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u\in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R=V_1\cap Z$，$B=V_2\cap Z$。显然$f=\{(x,y)\in R\setminus\{u\}\times B|\{x,y\}\in M^*\}$为从集合$R\setminus\{u\}$到$B$的双射，因此$|B|=|R|-1$。以下证明$N(R)=B$。显然$B\subseteq N(R)$。

证明.

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u\in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*-交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R=V_1\cap Z$，$B=V_2\cap Z$。显然$f=\{(x,y)\in R\setminus\{u\}\times B|\{x,y\}\in M^*\}$为从集合$R\setminus\{u\}$到$B$的双射，因此$|B|=|R|-1$。以下证明$N(R)=B$。显然$B\subseteq N(R)$。由$N(R)$中的每个顶点都在从$u$出发的一条$M^*$交错路上知$N(R)\subseteq B$。

证明.

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u\in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*-交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R=V_1\cap Z$，$B=V_2\cap Z$。显然$f=\{(x,y)\in R\setminus\{u\}\times B|\{x,y\}\in M^*\}$为从集合$R\setminus\{u\}$到$B$的双射，因此$|B|=|R|-1$。以下证明$N(R)=B$。显然$B\subseteq N(R)$。由$N(R)$中的每个顶点都在从$u$出发的一条$M^*$交错路上知$N(R)\subseteq B$。由$|B|=|R|-1$及$B=N(R)$知$|N(R)|=|R|-1$，

证明.

设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$。用反证法证明G一定存在一个完全匹配。假设G中不存在完全匹配。设M^*为G的一个最大匹配，则M^*不是G的完全匹配，从而存在顶点$u \in V_1$，u不与M^*中的任意一条边相关联。设Z为所有可以从顶点u经由一条M^*–交错路到达的顶点构成的集合。由M^*为一个最大匹配知u为Z中唯一没有与M^*中的边相关联的顶点。记$R = V_1 \cap Z$，$B = V_2 \cap Z$。显然$f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B | \{x, y\} \in M^*\}$为从集合$R \setminus \{u\}$到$B$的双射，因此$|B| = |R| - 1$。以下证明$N(R) = B$。显然$B \subseteq N(R)$。由$N(R)$中的每个顶点都在从$u$出发的一条$M^*$交错路上知$N(R) \subseteq B$。由$|B| = |R| - 1$及$B = N(R)$知$|N(R)| = |R| - 1$，与已知条件矛盾。 $\square$

3. 匹配

定义 3.8
设X为一个有穷集合，$(A_1, A_2, \ldots, A_n)$为X的子集的一个序列，由X的互不相同的元素构成的集合$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$称为系统

$$T : A_1, A_2, \ldots, A_n$$

的相异代表系，如果$s_i \in A_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$。

练习:

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$,则$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,1\}$有（）个相异代表系。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

匹配

定理 3.2

设X为一个有限集，系统$T: A_1, A_2, \cdots, A_n$为X的一些子集组成的，则T有相异代表系的充分必要条件是$\forall I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$有

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

（1）当$l = 0$时，

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路$P : uu_1u_2 \ldots u_sv_k$，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l=0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u=v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k+1$的通道$uv_1v_2\cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路$P: uu_1u_2\ldots u_sv_k$，此时如果v不在路P中出现，

练习：
设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。
（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。
（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路$P: uu_1u_2 \ldots u_sv_k$，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路$uu_1u_2 \ldots u_sv_kv$；

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。

（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2 \cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路P ： $uu_1u_2 \ldots u_sv_k$，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路$uu_1u_2 \ldots u_sv_kv$；如果v在路P中出现，

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

（1）当$l = 0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u = v$，显然u与v之间有一条路。

（2）假设当$l = k$时结论成立，往证当$l = k + 1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k + 1$的通道$uv_1v_2\cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路$P : uu_1u_2\ldots u_sv_k$，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路$uu_1u_2\ldots u_sv_kv$；如果v在路P中出现，设v在路P中的第一次出现记为u_i，

练习：

设图G的顶点u与v之间有一条通道，那么u与v之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点u与v之间通道的长l。

（1）当$l=0$时，顶点u与v之间有一条长为0的通道，此时$u=v$，显然u与v之间有一条路。

（2）假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。设顶点u与v之间有一条长为$k+1$的通道$uv_1v_2\cdots v_kv$，则顶点u与顶点v_k之间有一条长为k的通道。由归纳假设，u与v_k之间有一条路$P: uu_1u_2\ldots u_sv_k$，此时如果v不在路P中出现，则路P之后接顶点v就构成了u与v之间的一条路$uu_1u_2\ldots u_sv_kv$；如果v在路P中出现，设v在路P中的第一次出现记为u_i，那么路P中从u到u_i之间的路$uu_1u_2\ldots u_i$就是u与v之间的一条路。 $\square$

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

练习:

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是 图G的 两 个 不 同 顶 点 。

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是 图G的 两 个 不 同 顶 点 。如 果u与v间 有 两 条 不 同 的 通 道 ，

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。

练习:
设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.
设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：

练习:

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$,

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，

练习：
设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.
设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

练习：
设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.
设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。
如果u与v间有两条不同的迹，

练习:

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。
如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \ldots v_nv$不是路，

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$不是路，设$v_j = v_i (i < j)$为第一个重复的顶点，

练习：

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。
如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \ldots v_nv$不是路，设$v_j = v_i (i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1} \ldots v_j$构成$G$中的一个圈；

练习：
设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.
设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。
如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \ldots v_nv$不是路，设$v_j = v_i(i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1} \ldots v_j$构成$G$中的一个圈；同理，

练习:

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$不是路，设$v_j = v_i(i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1} \dots v_j$构成G中的一个圈；同理，如果T_2不是路，

练习:

设u与v为图G的两个不同的顶点。如果u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

答.

设u与v是图G的两个不同顶点。如果u与v间有两条不同的通道，则G中不一定有圈。举例如下：考虑$G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$，则$uv$和$uvuv$为$u$与$v$间两条不同的通道，但$G$中没有圈。

如果u与v间有两条不同的迹，则G中一定有圈。证明如下：设u与v间有两条不同的迹T_1和T_2。如果T_1和T_2都为路，则G中有圈；如果$T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$不是路，设$v_j = v_i(i < j)$为第一个重复的顶点，则$v_iv_{i+1} \dots v_j$构成G中的一个圈；同理，如果T_2不是路，G中有圈。 $\square$

参考文献

D. Gale and L. S. Shapley.
College Admissions and the Stability of Marriage.
The American Mathematical Monthly, 1962.