

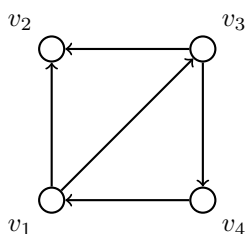
离散数学讲义

陈建文

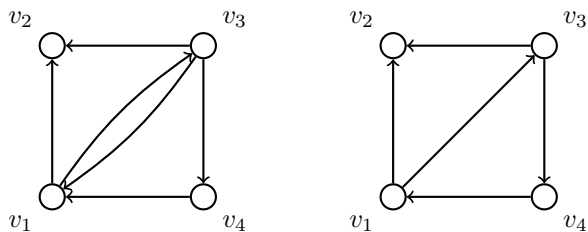
March 9, 2022

第十章 有向图

定义10.1. 设 V 为一个有穷非空集合, $A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$, 二元组 $D = (V, A)$ 称为一个**有向图**。 V 称为有向图 D 的**顶点集**, V 中的元素称为 D 的**顶点**。 A 称为 D 的**弧集**或有**有向边集**, A 中的元素称为 D 的**弧**或有**有向边**。如果 $x = (u, v) \in A$, 则 u 称为弧 x 的**起点**, v 称为弧 x 的**终点**。

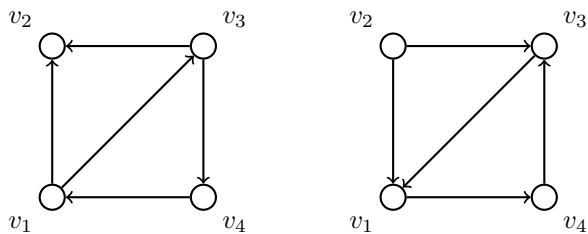


定义10.2. 如果 (u, v) 和 (v, u) 都是有向图 D 的弧, 则称 (u, v) 与 (v, u) 为 D 的**对称弧**。如果 D 中不含对称弧, 则称 D 为**定向图**。

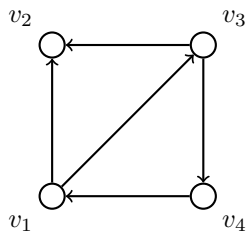


定义10.3. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, D 的**反向图**为有向图 $D^T = (V, A^T)$, 其中

$$A^T = \{(u, v) | (v, u) \in A\}$$



定义10.4. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, v 为 D 的任一顶点, 以 v 为终点的弧称为 v 的**入弧**; 以 v 为始点的弧称为 v 的**出弧**。顶点 v 的入弧的条数称为 v 的**入度**, 记为 $id(v)$; 顶点 v 的出弧的条数称为 v 的**出度**, 记为 $od(v)$ 。

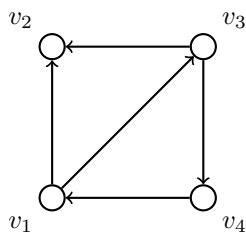


定理10.1. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $|A| = q$, 则

$$\sum_{v \in V} id(v) = \sum_{v \in V} od(v) = q$$

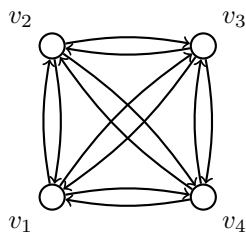
从而

$$\sum_{v \in V} (id(v) + od(v)) = 2q$$



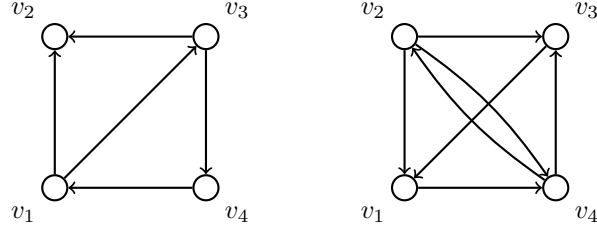
定义10.5. 有向图 $D = (V, A)$ 称为**完全有向图**, 如果

$$A = V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$$

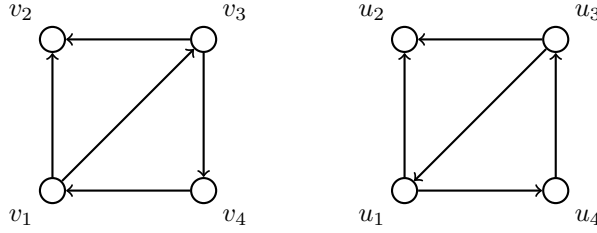


定义10.6. 有向图 $D = (V, A)$ 的**补图** 定义为 $D^c = (V, A^c)$, 其中

$$A^c = (V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}) \setminus A$$



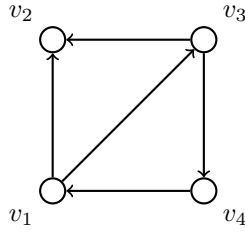
定义10.7. 设 $D_1 = (V_1, A_1)$, $D_2 = (V_2, A_2)$ 都为有向图, 如果存在一个一一对应 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, 使得 $\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$ 当且仅当 $(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$, 则称 D_1 与 D_2 同构。



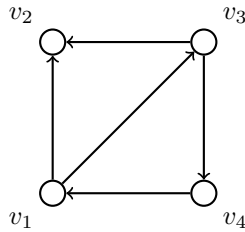
定义10.8. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图。 D 的一条**有向通道**为 D 的顶点和弧的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

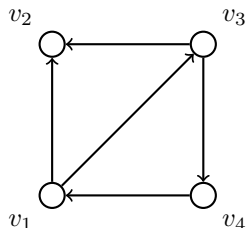
其中 $x_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为该有向通道的长。 这样的有向通道常称为 $v_0 - v_n$ 有向通道, 并简记为 $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ 。 当 $v_0 = v_n$ 时, 则称此有向通道为**闭有向通道**。



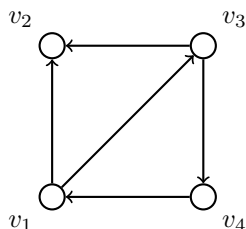
定义10.9. 如果有向图中一条有向通道的各弧互不相同, 则称此有向通道为有向图的**有向迹**。 如果一条闭有向通道上的各弧互不相同, 则称此闭有向通道为**闭有向迹**。



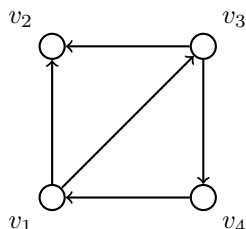
定义10.10. 如果一条有向通道上的各顶点互不相同, 则称此有向通道为**有向路**。如果一条长度大于0的闭有向迹上除终点外各顶点互不相同, 则称此闭有向迹为**有向圈**, 或有**有向回路**。



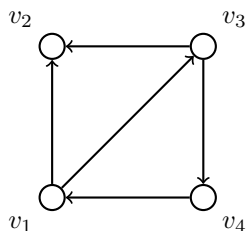
定义10.11. 含有向图 D 的所有顶点的有向圈称为 D 的**生成有向圈**, 或有**有向哈密顿圈**。有生成有向圈的有向图称为**有向哈密顿图**。含有向图 D 的所有顶点的有向路称为 D 的**生成有向路**, 或有**有向哈密顿路**。



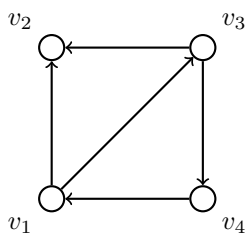
定义10.12. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, u 和 v 为 D 的顶点。如果在 D 中有一条从 u 到 v 的有向路, 则称从 u 能达到 v , 或者 v 是从 u 可达的。



定义10.13. 有向图 D 称为是**强连通**的, 如果对 D 的任意两个不同的顶点 u 和 v , u 和 v 是互达的 (即从 u 可以达到 v 并且从 v 可以达到 u)。



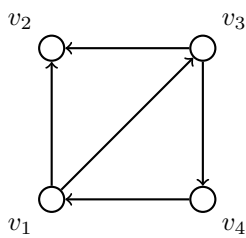
定义10.14. 有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个**强支**。



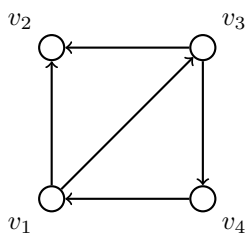
定理10.2. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 互达}$$

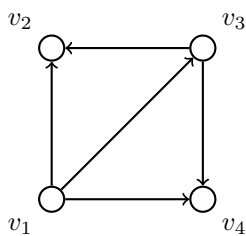
则 \cong 为 V 上的等价关系， D 的强支就是顶点集 V 关于 \cong 的每个等价类的导出子图。



定义10.15. 有向图 $D = (V, A)$ 称为**单向连通**的，如果对 D 的任意两个不同的顶点 u 和 v ，或从 u 可达到 v ，或从 v 可达到 u 。



定义10.16. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图，如果抹去 D 中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称 D 为**弱连通**的，简称**连通**的。



定义10.17. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \times p$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 称为 D 的邻接矩阵, 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果}(v_i, v_j) \in A \\ 0, & \text{如果}(v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

定理10.3. 设 B 为有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, 则从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长为 l 的有向通道的条数等于 B^l 的第 i 行第 j 列元素 $(B^l)_{ij}$ 的值。

定义10.18. 设 $D = (V, A)$ 为一个有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \times p$ 矩阵 $R = (r_{ij})$ 称为 D 的可达矩阵, 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果从} v_i \text{可以达到} v_j \\ 0, & \text{如果从} v_i \text{不能达到} v_j \end{cases}$$

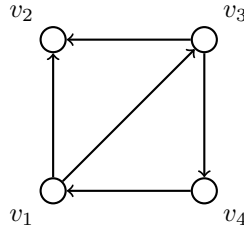
定理10.4. 设 $p \times p$ 矩阵 B 是有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, 则 D 的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$$

定理10.5. 设 $p \times p$ 矩阵 R 为有向图 $D = (V, A)$ 的可达矩阵,

$$C = R \wedge R^T,$$

C 的第 i 行上为1的元素 $c_{ij_1}, c_{ij_2}, \dots, c_{ij_k}$, 则 v_i 在由 $V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$ 诱导出的 D 的子图- D 的强支中。



定义10.19. 设 $D = (V, A)$ 为一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, $p \times q$ 矩阵 $H = (h_{ij})$ 称为 D 的关联矩阵, 其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} v_i \text{为弧} x_j \text{的起点} \\ -1, & \text{如果} v_i \text{为弧} x_j \text{的终点} \\ 0, & \text{如果} v_i \text{既不是弧} x_j \text{的起点也不是弧} x_j \text{的终点} \end{cases}$$

定义10.20. 一个有向图, 如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树, 则称该有向图为一棵**有向树**。

定义10.21. 有向树 D 称为**有根树**, 如果 D 中恰有一个顶点的入度为0, 而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根, 出度为0的顶点称为有根树的**叶子**, 非叶顶点称为有根树的**分支点**或**内顶点**。

定义10.22. 设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树。如果 $(u, v) \in A$ ，则称 v 为 u 的**儿子**， u 为 v 的**父亲**。如果从顶点 u 能达到顶点 v ，则称 v 为 u 的**子孙**， u 为 v 的**祖先**。如果 u 为 v 的祖先且 $u \neq v$ ，则称 u 为 v 的**真祖先**， v 为 u 的**真子孙**。

定义10.23. 设 $T = (V, A)$ 为一棵以 v_0 为根的有根树。从 v_0 到顶点 v 的有向路的长度称为 T 的顶点 v 的**深度**。从顶点 v 到 T 的叶子的最长的有向路的长度称为顶点 v 在 T 中的**高度**。根顶点 v_0 的高度称为树 T 的**高度**。

定义10.24. 设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树， v 为 T 的一个顶点，由 v 及其子孙所导出的 T 的子图称为 T 的以 v 为根的**子树**。

定义10.25. 设 $T = (V, A)$ 为一棵有根树。如果 T 的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称 T 为一棵**有序树**。

定义10.26. 有序树 T 称为 **m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度 $\leq m$ 。一棵 m 元有序树 T 称为**正则 m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度不是0就是 m 。二元有序树简称**二元树**。

第 十 一 章