# 离散数学讲义

陈建文

May 3, 2022

# 第 八 章　连通度和匹配

**定义8.1.** 图$G$的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

**定义8.2.** 图$G$的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从$G$中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

**定理8.1.** 对任一图$G$，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

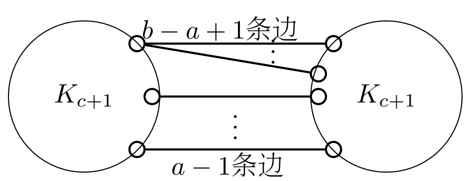
证明. 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$。如果$\delta(G) = 0$，则$G$不连通或者为平凡图，此时$\lambda(G) = 0$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$成立。如果$\delta(G) > 0$，不妨设$\deg v = \delta(G)$,从$G$中去掉与$v$关联的$\delta(G)$条边之后，得到的图中$v$为孤立顶点，所以$\lambda(G) \leq \delta(G)$。因此，对任意的图$G$，$\lambda(G) \leq \delta(G)$。

接下来证明$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。如果$G$不连通或者为平凡图，则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$。如果$G$是连通的且有一座桥$x$，则$\lambda(G) = 1$。因为在这种情况下$G$或者有一个割点关联于$x$或者$G$为$K_2$，所以$\kappa(G) = 1$。最后假定$\lambda(G) \geq 2$，则$G$中有$\lambda(G)$条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的$\lambda(G) - 1$条边后得到一个图，它有一条桥$x = uv$。对于这$\lambda(G) - 1$条边中每一条，选取一个关联于它但与$u$和$v$都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这$\lambda(G) - 1$条边。如果这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G) < \lambda(G)$。否则，$x$是这样产生的图的一条桥，从而移去$u$或$v$就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，$\kappa(G) \leq \lambda(G)$。 □

**定理8.2.** 对任何整数$a, b, c$，　$0 < a \leq b \leq c$，　存在一个图$G$使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

证明.




□

**定理8.3.** 设$G = (V, E)$有$p$个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明. $\lambda(G) \le \delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G) \ge \delta(G)$。

因为$\delta(G) \ge [\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，　则$\lambda(G) = \delta(G) = 0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G) > 0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V \setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。

由$|A| + |V \setminus A| = p$知必有$|A| \le [\frac{p}{2}]$或者$|V \setminus A| \le [\frac{p}{2}]$。不妨设$|A| \le [\frac{p}{2}]$。由于$\delta(G) \ge [\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u \le |A| - 1 \le [\frac{p}{2}] - 1 < \delta(G)$，矛盾。设$v$为$A$中的任一顶点，$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，与$A$中的$y$个顶点邻接，则$\deg v = x + y$。$v$与$V \setminus A$中的$x$个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_1$，则$F_1 \subseteq F$；$v$与$A$中的$y$个顶点邻接，而这$y$个顶点中的每个顶点都至少与$V \setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为$F_2$，则$F_2 \subseteq F$ 并且$F_1 \cap F_2 = \phi$，从而

$$\lambda(G) \ge |F_1| + |F_2| = x + y = \deg v \ge \delta(G)$$

□

**定义8.3.** 设$G$为一个图，如果$\kappa(G) \ge n$，则称$G$为$n$**-顶点连通**的，简称$n$-连通;如果$\lambda(G) \ge n$，则称$G$为$n$**-边连通**的。

**定理8.4.** 设$G = (V, E)$为有$p$个顶点的图，$p \ge 3$，则$G$为*2*-连通的，当且仅当$G$的任意两个不同的顶点在$G$的同一个圈上。

**定义8.4.** 设$u$与$v$为图$G$中的两个不同的顶点。两条联结$u$与$v$的路，如果除了$u$与$v$外没有公共顶点，则称这两条路为联结$u$与$v$的**不相交路**；如果联结$u$与$v$的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结$u$与$v$的**边不相交路**。

**定理8.5.** 分离图$G$的两个不邻接的顶点$s$和$t$的顶点最少数目等于联结$s$和$t$的不相交路的最多数目。

证明. 设$s$和$t$为图$G$的任意两个不邻接的顶点，分离顶点$s$和$t$的顶点最少数目记为$k(s,t)$，联结$s$和$t$的不相交路的最多数目记为$p(s,t)$, 显然$k(s,t) \ge p(s,t)$，否则，去掉$k(s,t)$个顶点，顶点$s$和顶点$t$之间至少还存在$p(s,t) - k(s,t)$条路，这与去掉$k(s,t)$个顶点之后可以分离顶点$s$和$t$矛盾。

以下用数学归纳法证明$k(s,t) \le p(s,t)$，施归纳于图$G$的边数$q$。

不妨设存在边$e = uv$，$e$不与顶点$s$关联，也不与顶点$t$关联。否则，从顶点$s$到顶点$t$的路长度都为2，结论显然成立。

设$H = G - e$。因为$H$为$G$的子图，所以$p_G(s,t) \ge p_H(s,t)$。由归纳假设，$k_H(s,t) = p_H(s,t)$。由图$H$的任意分离顶点$s$和$t$的顶点割集与边$e$的任意一个顶点一起构成了图$G$中分离顶点$s$和顶点$t$的顶点割集知$k_H(s,t) + 1 \ge k_G(s,t)$。因此，

$$p_G(s,t) \ge p_H(s,t) = k_H(s,t) \ge K_G(s,t) - 1$$

如果$p_G(s,t) > K_G(s,t) - 1$，即$p_G(s,t) \ge k_G(s,t)$，则结论得证。以下假设$p_G(s,t) = K_G(s,t) - 1$，从而$k_H(s,t) = k_G(s,t) - 1$。

以下将$k_G(s,t)$减记为$k$。设$S := \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\}$为$H$的分离顶点$s$和$t$的最小的顶点割集，$X$为$H - S$中从顶点$x$可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合，$Y$为$H - S$中从顶点$y$可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合。因

为$|S| = k-1$，集合$S$不是图$G$中分离顶点$s$和顶点$t$的顶点割集，因此在$G-S$中有一条从顶点$s$到顶点$t$的路。显然这条路中包含边$e = uv$。不失一般性，设$u \in X$，$v \in Y$。

设将$X$中的顶点收缩至顶点$s$所得到的图为$G/X$。$G/X$中分离顶点$s$和顶点$t$的顶点割集$T$也为$G$中分离顶点$s$和顶点$t$的顶点割集，这是因为如果$P$为$G$中从顶点$s$到顶点$t$的路，并且$P$中不包含$T$中的顶点，那么$G/X$的子图$P/X$为$G/X$的一条不包含$T$中顶点的路。因此$k_{G/X}(s,t) \geq k_G(s,t)$。另一方面，$k_{G/X}(s,t) \leq k_G(s,t)$，这是因为$S\cup\{v\}$为$G/X$的一个顶点割集。因此，$S\cup\{u\}$为$G/X$的一个分离顶点$s$和$t$的最小顶点割集。由归纳假设，在$G/X$中有$k$条互不相交的从顶点$s$到顶点$t$的路$P_1, P_2, \cdots, P_k$。$S \cup \{v\}$中的每个顶点恰好位于$P_1, P_2, \cdots, P_k$中的一条路上，不失一般性，假设$v_i$位于$P_i$之上（$1 \leq i \leq k-1$），$v \in P_k$。设将$Y$中的顶点收缩至顶点$t$所得到的图为$G/Y$。同理，在$G/Y$中有$k$条互不相交的从顶点$s$到顶点$t$的路$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$。$S\cup\{u\}$中的每个顶点恰好位于$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$中的一条路上，不失一般性，假设$v_i$位于$Q_i$之上（$1 \leq i \leq k-1$），$u \in Q_k$。因此，在$G$中存在$k$条联结顶点$s$与$t$的不相交路$sP_iv_iQ_it$，$1 \leq i \leq k-1$，$sP_kuvQ_kt$，与前述假设假设$p_G(s,t) = K-1$矛盾。 □

**定理8.6.** 图$G$为$n-$连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有$n$条不相交路。

**定理8.7.** 分离图$G$的两个不同的顶点$s$和$t$的边的最少数目等于边不相交$s-t$路的最多数目。

**定理8.8.** 图$G$为$n-$边连通的当且仅当$G$的任一对不同的顶点间至少有$n$条边不相交路。

**定义8.5.** 设$G = (V,E)$为一个图，$G$的任意两条不邻接的边$x$与$y$称为**互相独立**的边。$G$的边集$E$的子集$Y$称为$G$的一个**匹配**，如果$Y$中任意两条边都是互相独立的。

**定义8.6.** 设$Y$为图$G = (V,E)$的一个匹配，如果$2|Y| = |V|$，则称$Y$为$G$的一个**完美匹配**。

**定义8.7.** 设$Y$为图$G = (V,E)$的一个匹配，如果对于$G$的任一匹配$Y'$，恒有$|Y'| \leq |Y|$, 则称$Y$为$G$的一个**最大匹配**。

**定义8.8.** 设$G = (V,E)$为一个偶图且$V = V_1 \cup V_2, \forall x \in E$，$x$为联结$V_1$的一个顶点与$V_2$的一个顶点的边。如果存在$G$的一个匹配$Y$使得$|Y| = min\{|V_1|, |V_2|\}$，则称$Y$是偶图$G$的一个**完全匹配**。

**定义8.9.** 设$M$为图$G = (V,E)$的一个匹配，如果一条路$P$上的边在$M$与$E\setminus M$中交错出现，则称路$P$为图$G$中的一条***M*-交错路**。进一步，如果$P$的两个端点都不与$M$中的边相关联，则称$P$为一条***M*-增广路**。

**定理8.9.** 设$G = ((V_1,V_2),E)$为偶图，存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A\{x,y\} \in E\}$$

证法一. 设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y|=|V_1|$，则显然对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)|\geq|A|$。

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)|\geq|A|$。用反证法证明$G$一定存在一个完全匹配。假设$G$中不存在完全匹配。设$M^*$为$G$的一个最大匹配，则$M^*$不是$G$的完全匹配，从而存在顶点$u\in V_1$，$u$不与$M^*$中的任意一条边相关联。设$Z$为所有可以从顶点$u$经由一条$M^*-$交错路到达的顶点构成的集合。由$M^*$为一个最大匹配知$u$为$Z$中唯一没有与$M^*$中的边相关联的顶点。记$R=V_1\cap Z$，$B=V_2\cap Z$。显然$f=\{(x,y)\in R\setminus\{u\}\times B|\{x,y\}\in M^*\}$为从集合$R\setminus\{u\}$到$B$的双射，因此$|B|=|R|-1$。以下证明$N(R)=B$。显然$B\subseteq N(R)$。由$N(R)$中的每个顶点都在从$u$出发的一条$M^*$交错路上知$N(R)\subseteq B$。由$|B|=|R|-1$及$B=N(R)$知$|N(R)|=|R|-1$，与已知条件矛盾。 □

证法二. 设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在$G$的一个完全匹配$Y$且$|Y|=|V_1|$，则显然对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)|\geq|A|$。

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对$V_1$的任意子集$A$，$|N(A)|\geq|A|$，以下用数学归纳法证明存在$G$的一个完全匹配$Y$使得$|Y|=|V_1|$，施归纳于$|V_1|$。

(1)当$|V_1|=1$时，设$V_1$中唯一的一个元素为$u$，由$|N(V_1)|\geq|V_1|$知$N(V_1)$中至少含有一个元素$v$，则$\{\{u,v\}\}$构成了$G$的一个满足条件的完全匹配。

(2)假设当$|V_1|<k$时结论成立，往证当$|V_1|=k$时结论也成立。设$|V_1|=k$，分以下两种情况讨论:

（i）对$V_1$的任意真子集$A$，$|N(A)|>|A|+1$。取$V_1$中的任意一个元素$u$，由于$|N(\{u\})|\geq 1$，可取$N(\{u\})$中的一个元素$v$使得$uv\in E$。考虑偶图$G-\{u,v\}$，对任意的$V_1\setminus\{u\}$的子集$B$，$|N(B)|\geq|B|$。由归纳假设，偶图$G-\{u,v\}$ 有一个完全匹配$Y'$且$|Y'|=|V_1\setminus\{u\}|$。$Y'\cup\{\{u,v\}\}$即为$G$的一个完全匹配，且$|Y'\cup\{\{u,v\}\}|=|V_1|$。

（ii）存在$V_1$的真子集$A$，$|N(A)|=|A|$。

考虑图$G$中由$A\cup N(A)$导出的子图$G_1$以及由$(V_1\setminus A)\cup(N(V_1\setminus A)\setminus N(A))$导出的子图$G_2$。$G_1$为偶图，且在$G_1$中对$A$的任意子集$B$，$|N(B)|\geq|B|$。$G_2$为偶图，且在$G_2$中对集合$V_1\setminus A$的任意子集$C$，$|N(C)|\geq|C|$，这是因为如果$|N(C)|<|C|$, 则在$G$中$|N(C\cup A)|<|C\cup A|$，与前提条件矛盾。由归纳假设，$G_1$有完全匹配$M_1$，$|M_1|=|A|$，$G_2$有完全匹配$M_2$，$|M_2|=|V_1\setminus A|$。于是$M_1\cup M_2$构成了$G$的完全匹配，且$|M_1\cup M_2|=|V_1|$。 □

**定义8.10.** 设$X$为一个有穷集合，$A_1,A_2,\ldots,A_n$为$X$的子集的一个序列，由$X$的互不相同的元素构成的集合$\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$称为系统

$$T:A_1,A_2,\ldots,A_n$$

的**相异代表系**，如果$s_i\in A_i$，$i=1,2,\ldots,n$。

**定理8.10.** 设$X$为一个有限集，系统$T:A_1,A_2,\cdots,A_n$为$X$的一些子集组成的，则$T$有相异代表系的充分必要条件是$\forall I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$有

$$|\bigcup_{i\in I}A_i|\geq|I|$$

# 第 九 章