

习题 1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？

习题 2. 是否存在一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系？

习题 3. 设  $R$  和  $S$  为集合  $X$  上的二元关系，下列命题哪些成立：

- a) 如果  $R$  与  $S$  为自反的，则  $R \cup S$  和  $R \cap S$  也为自反的；
- b) 如果  $R$  与  $S$  为反自反的，则  $R \cup S$  和  $R \cap S$  也为反自反的；
- c) 如果  $R$  与  $S$  为对称的，则  $R \cup S$  和  $R \cap S$  也为对称的；
- d) 如果  $R$  与  $S$  为反对称的，则  $R \cup S$  和  $R \cap S$  也为反对称的；
- e) 如果  $R$  与  $S$  为传递的，则  $R \cup S$  和  $R \cap S$  也为传递的；
- f) 如果  $R$  与  $S$  不是自反的，则  $R \cup S$  不是自反的；
- g) 如果  $R$  为自反的，则  $R^c$  为反自反的；
- h) 如果  $R$  与  $S$  为传递的，则  $R \setminus S$  为传递的。

习题 4. 设  $R$  与  $S$  为集合  $X$  上的二元关系，证明：

- a)  $(R^{-1})^{-1} = R$ ;
- b)  $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ ;
- c)  $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ ;
- d) 如果  $R \subseteq S$ ，则  $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

**习题 5.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系。证明： $R \cup R^{-1}$ 为集合 $X$ 上对称的二元关系。

**习题 6.** “父子”关系的平方是什么关系？

习题 7. 设  $R$  与  $S$  为集合  $X$  上的二元关系, 下列哪些命题为真?

- a) 如果  $R, S$  都是自反的, 则  $R \circ S$  也是自反的;
- b) 如果  $R, S$  都是反自反的, 则  $R \circ S$  也是反自反的;
- c) 如果  $R, S$  都是对称的, 则  $R \circ S$  也是对称的;
- d) 如果  $R, S$  都是反对称的, 则  $R \circ S$  也是反对称的;
- e) 如果  $R, S$  都是传递的, 则  $R \circ S$  也是传递的。

习题 8. 设  $R, S$  为集合  $X$  上的两个满足  $R \circ S \subseteq S \circ R$  的对称关系。证明:  $R \circ S = S \circ R$ 。

习题 9. 设集合  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S, f \cong g$  当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明  $\cong$  为  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

**习题 10.** 设集合  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明  $\cong$  为  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

**习题 11.** 由置换  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  确定了集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  上的一个二元关系  $\cong$ : 对任意的  $i, j \in X$ ,  $i \cong j$  当且仅当  $i$  与  $j$  在  $\sigma$  的循环分解式的同一个循环置换中。 证明:  $\cong$  为集合  $X$  上的等价关系, 求  $X / \cong$ 。

**习题 12.** 给出集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  上的两个等价关系  $R$  与  $S$ , 使得  $R \circ S$  不是等价关系。

**习题 13.** 设  $R$  为集合  $X$  上的一个二元关系, 试证:  $R$  为一个等价关系, 当且仅当以下两条成立 (1) 对任意的  $x$ ,  $xRx$ ; (2) 如果  $xRy$  且  $xRz$ , 则  $yRz$ 。

**习题 14.** 设 $X$ 为一个集合,  $|X| = n$ , 试求:

- a) 集合 $X$ 上自反二元关系的个数;
- b) 集合 $X$ 上反自反二元关系的个数;
- c) 集合 $X$ 上对称二元关系的个数;
- d) 集合 $X$ 上反对称二元关系的个数。

**习题 15.** 是否存在一个偏序关系 $\leq$ , 使 $(X, \leq)$ 中有唯一极大元素, 但没有最大元素? 如果有, 请给出一个具体例子; 如果没有, 请证明之。

**习题 16.** 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ , 画出偏序集 $(S, |)$ 的 $Hasse$ 图, 其中 $|$ 为整除关系。它有几个极大(小)元素? 列出这些极大(小)元素。