离散数学讲义

陈建文

April 6, 2022

第 四 章　无穷集合

定义4.1. 如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义4.2. 如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f: \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理4.1. 集合A为可数集的充分必要条件为A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

定理4.2. 可数集的任一无限子集也是可数集。

定理4.3. 设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

定理4.4. 设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

定理4.5. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理4.6. 设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

定理4.7. 全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

定理4.8. 区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义4.3. 凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

定理4.9. 无穷集合必包含有可数子集。

定理4.10. 设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明. 先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。

再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理4.11. 设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

定理4.12. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^n A_i$为连续统。

定理4.13. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论4.1. 全体实数之集是一个连续统。

推论4.2. 全体无理数之集是一个连续统。

定义4.4. 集合A的基数为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义4.5. 所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义4.6. 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

定义4.7. 设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

显然，$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。
$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

定理4.14 (康托)**.** 对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明. 令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，从而

$$|M| < |2^M|$$

□

定理4.15 (康托-伯恩斯坦)**.** 设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则A与B的基数相等。

证法一. 设$f : A \to B$和$g : B \to A$都为单射。令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以A与B的基数相等。 □

证法二. We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2. We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \cdots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1, in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B.

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \cdots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A, then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1. Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h. On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B, then $g(y)$ belongs to A_2. In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h, as was to be shown.

□

刻画集合的ZFC公理系统（Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory）：

公理4.1 (外延公理)**.**

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理4.2 (空集公理)**.**

$$\exists \phi \forall x(x \notin \phi)$$

公理4.3 (对公理)**.**

$$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4.4 (并集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b)$$

公理4.5 (幂集公理)**.**

$$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理4.6 (子集公理)**.**

$$\forall c \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理4.7 (无穷公理)**.**

$$\begin{aligned} &\exists A(\phi \in A \wedge (\forall a \in A)a^+ \in A) \\ &\text{其中} a^+ = a \cup \{a\} \end{aligned}$$

公理4.8 (代换公理)**.**

$$\begin{aligned} &\forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \to y_1 = y_2) \\ &\to \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y))) \end{aligned}$$

公理4.9 (正则公理)**.**

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理4.10 (选择公理)**.**

$$(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \wedge dom F = dom R)$$

刻画实数的公理系统:
设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$

4. $(-x)+x=x+(-x)=0$

5. $x*y=y*x$

6. $(x*y)*z=x*(y*z)$

7. $1*x=x*1=x$

8. $x^{-1}*x=x*x^{-1}=1(x\neq 0)$

9. $x*(y+z)=x*y+x*z$

10. $(y+z)*x=y*x+z*x$

11. 对任意的$x\in R$，$x\leq x$。

12. 对任意的$x\in R$，$y\in R$，如果$x\leq y$并且$y\leq x$，则$x=y$。

13. 对任意的$x\in R$，$y\in R$，$z\in R$，如果$x\leq y$并且$y\leq z$，则$x\leq z$。

14. 对任意的$x\in R$，$y\in R$，$x\leq y$和$y\leq x$两者中必有其一成立。

    我们用$x<y$表示$x\leq y$并且$x\neq y$，$x\geq y$表示$y\leq x$，$x>y$表示$x\geq y$并且$x\neq y$。

15. 对任意的$x\in R$，$y\in R$，$z\in R$，如果$x<y$，则$x+z<y+z$。

16. 对任意的$x\in R$，$y\in R$，如果$x>0$，$y>0$，则$xy>0$。

17. 设A_1，A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\cdots\supseteq A_i\supseteq\cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$非空。

练习4.1. 设A为R的任意一个非空子集，如果A有上界，则A有上确界。

证明. 设b为A的一个上届，由A非空知，存在$a\in A$。

将闭区间$[a,b]$二等分，得到两个小的闭区间$I_1=[a,\frac{a+b}{2}]$和$I_2=[\frac{a+b}{2},b]$。如果I_2中存在A中的点，则记$A_1=I_2$；否则，I_1中必存在A中的点，记$A_1=I_1$。这样得到的闭区间A_1中必存在A中的点，并且其右边界为A的上界。

按照同样的方法将A_1二等分，这样依次可以得到闭区间$A_2,A_3,\cdots$，每个闭区间中存在A中的点，并且其右边界为A的上界。

$\cap_{i=0}^{\infty}A_i$非空，取$x\in\cap_{i=0}^{\infty}A_i$，以下证明$x$为$A$的上确界。

首先证明x为A的上界。用反证法，假设x不是A的上界，则存在$y\in A$，$y>x$。由于当$i\rightarrow\infty$时，A_i的长度$\rightarrow 0$，所以存在正整数N，A_N的右边界$-x<A_N$的长度$<y-x$，从而A_N的右边界$<y$，这与A_N的右边界为A的上界矛盾。

其次证明x为A的最小上界。用反证法，假设x不是A的最小上界，则存在上界x'，$x'<x$。由于当$i\rightarrow\infty$时，A_i的长度$\rightarrow 0$，所以存在整数M，$x-A_M$的左边界$<A_M$的长度$<x-x'$，从而A_M的左边界$>x'$，而A_M中存在A中的点z，$z>x'$，与x'为A的上界矛盾。 $\square$

练习4.2. 有下界的单调下降序列必收敛。

证明. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$为有下界的单调下降序列，则其所有元素构成的集合$A$有下界，从而有下确界，记为$a$。

以下证明$\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

对任给的$\epsilon > 0$，由于$a+\epsilon$不是A的下界，从而存在自然数N使得$a_N < a+\epsilon$。由a为A的下界知$a \le a_N$。

由序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$单调下降且$A$的下确界为$a$知当$n \ge N$时，$a \le a_n < a_N + \epsilon$，这证明了$\lim_{n\to\infty} a_n = a$。 □

证明. □

练习4.3. 设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（*1*）令$[a,b]$表示$\{x \in R | a \le x \le b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

（*2*）令$[a,b]$表示$\{x \in Q | a \le x \le b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解. （1）$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \ge \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\ =& \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) \\ =& \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\ \le& 0 \end{aligned}$$

这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \ge \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \le \sqrt{2}$，由序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降知序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升，由$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$知$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$。

综上，$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \{\sqrt{2}\}$。

（2）

$x_n^2 = (\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 = \frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) \ge \frac{1}{4}(2 * x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}} + 4) = 2$

$$
\begin{aligned}
& x_n - x_{n-1} \\
=& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\
=& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\
=& \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) \\
=& \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\
\leq& 0
\end{aligned}
$$

这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降，从而序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升。

$$
\begin{aligned}
& x_n - \frac{2}{x_n} \\
=& \frac{x_n^2 - 2}{x_n} \\
=& \frac{(\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 - 2}{x_n} \\
=& \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) - 2}{x_n} \\
=& \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 4)}{x_n} \\
=& \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{4x_n}(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}) \\
\leq& \frac{1}{4}(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}})
\end{aligned}
$$

这说明$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$。以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。设存在$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n]$，由$x$为有理数知$x^2 \neq 2$。

如果$x^2 > 2$，则$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$，从而$(\frac{2}{x})^2 < 2 < x^2$，于是$\frac{2}{x} < x$。对任意的自然数$n$，由$x \leq x_n$知$\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$，从而$x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$，这与$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$矛盾。

如果$x^2 < 2$，则$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{2}$，从而$(\frac{2}{x})^2 > 2 > x^2$，于是$\frac{2}{x} > x$。对任意的自然数$n$，由$x \geq \frac{2}{x_n}$知$\frac{2}{x} \leq x_n$，从而$x_n - \frac{2}{x_n} \geq \frac{2}{x} - x$，这也与$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$矛盾。

□

证明：任何有理数的平方不等于2。

证明. 用反证法。假设存在有理数$x = \frac{n}{m}$使得$x^2 = 2$，这里m与n互素，于是$(\frac{n}{m})^2 = 2$，即

$$2m^2 = n^2 \tag{4.1}$$

这说明n为偶数，从而存在整数k，使得$n = 2k$。带入(4.1)得，$m^2 = 2k^2$，从而m为偶数，这与m和n互素矛盾，结论得证。 □

练习4.4. 设有穷偏序集$(X, \leq)$中有唯一极大元素x，则x为X的最大元素。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于X中元素的个数n。

（1）当$n = 1$时，$X = \{x\}$，则显然x为X的最大元素。

（2）假设当$n = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。设$|X| = k + 1$，x为X的唯一极大元素，以下证明x为X的最大元素。对任意的$y \in X$，如果$y = x$，则显然$y \leq x$。当$y \neq x$时，由x为X的唯一极大元素知y不是X的极大元素，从而存在$z \in Z$，$z > y$。关系$\{(x, y)|x \in X \setminus \{y\}, y \in X \setminus \{y\}, x \leq y\}$构成集合$X \setminus \{y\}$上的一个偏序关系。$|X \setminus \{y\}| = k$。

此时，x必为$X \setminus \{y\}$的唯一极大元。否则，如果存在元素a为$X \setminus \{y\}$的极大元，$a \neq x$，由a不是X的极大元知$a \leq y$,再由$z > y$知$z > a$，矛盾。由归纳假设，x为$X \setminus \{y\}$的最大元。由$z \leq x$及$z > y$知，$y \leq x$。 □

第 五 章