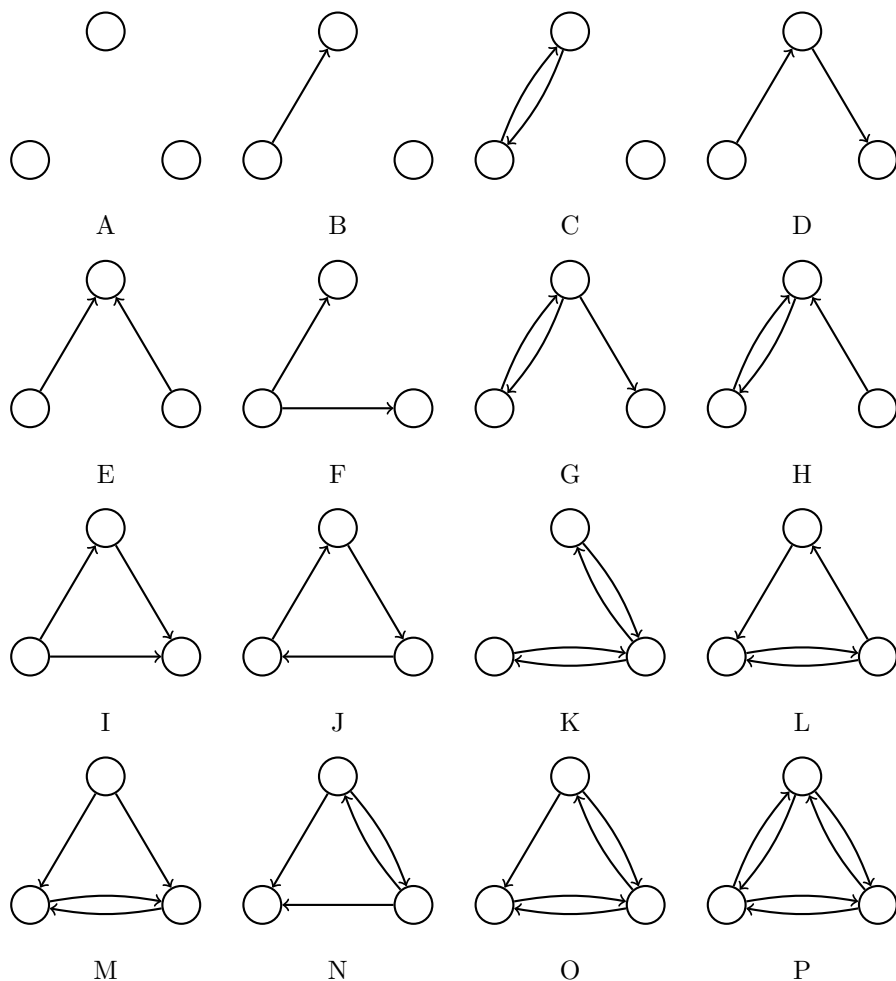


习题 1. 画出具有3个顶点的所有有向图（同构的只算一个）。



习题 2. 具有 p 个顶点的完全有向图中有多少条弧？

解. $p(p-1)$ 。

□

习题 3. 设 D 为一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图。如果 D 为连通的，证明： $p-1 \leq q \leq p(p-1)$ 。

证明. 由 D 为连通的知略去 D 中所有弧的方向所得到的无向图 G 为连通的，从而 $q \geq p-1$ 。显然 D 中弧的条数小于等于具有 p 个顶点的完全有向图中弧的条数，从而 $q \leq p(p-1)$ 。 □

习题 4. 设 D 为一个有 p 个顶点 q 条弧的强连通的有向图，则 q 至少是多大？

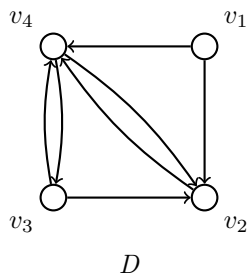
答. 当 $p=1$ 时， $q=0$ ；当 $p>1$ 时， q 至少为 p 。

当 $p > 1$ 时，由 D 为强连通的知 D 中每个顶点至少有一条出弧，因此 D 中弧的数目大于等于 p 。

显然由 p 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_p 依次相连所构成的圈 $v_1 v_2 \dots v_p v_1$ 有 p 条弧。因此 q 至少为 p 。

□

习题 5. 有向图 D 的图解如下图所示:



(1) 写出 D 的邻接矩阵及可达矩阵;

(2) 写出 D 的关联矩阵。

解. D 的邻接矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D 的可达矩阵:

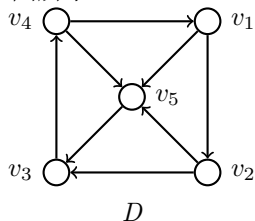
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D 的关联矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

□

习题 6. 有向图 D 的图解如下图所示:



求从顶点 v_2 到其余每个顶点的长 ≤ 4 的所有有向通道的条数。

解. 有向图 D 的邻接矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从 v_2 到每个顶点长度为1的通道的条数为

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

从 v_2 到每个顶点长度为2的通道的条数为

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

从 v_2 到每个顶点长度为3的通道的条数为

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

从 v_2 到每个顶点长度为4的通道的条数为

$$[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

从 v_2 到每个顶点长度小于等于4的通道的条数为

$$\begin{aligned} & [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] + [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] + [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2] \\ & = [2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4] \end{aligned}$$

所以, v_2 到 v_1, v_3, v_4, v_5 长度小于等于4的通道的条数分别为2, 3, 2, 4。

□

习题 7. 设 T 为一棵正则 m 元有序树, 它有 n_0 个叶子, T 有多少条弧?

解. 当 $m = 1$ 时, T 可以有任意正整数条弧; 当 $m > 1$ 时, T 有 $\frac{m(n_0-1)}{m-1}$ 条弧。

□

习题 8. 设 T 为一棵有 n_0 个叶子的二元树，出度为2的顶点数为 n_2 ，试证 $n_0 = n_2 + 1$ 。

证明. 设出度为1的顶点数为 n_1 ，则 $2n_2 + n_1 = n_2 + n_1 + n_0 - 1$ ，从而 $n_0 = n_2 + 1$ 。□

习题 9. 用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p = 1$ 时，结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k(k \geq 1)$ 时结论成立，往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $D = (V, A)$ 为一个包含 $k + 1$ 个顶点的比赛图， v 为 D 的任意一个顶点，则 $D - v$ 为一个包含 k 个顶点的比赛图。由归纳假设， $D - v$ 有一条有向哈密顿路 $v_1 v_2 \dots v_k$ 。如果 $(v, v_1) \in A$ ，那么 $vv_1 v_2 \dots v_k$ 为有向图 D 的一条有向哈密顿路；如果 $(v_k, v) \in A$ ，那么 $v_1 v_2 \dots v_k v$ 为有向图 D 的一条有向哈密顿路；如果 $(v, v_1) \notin A$ 并且 $(v_k, v) \notin A$ ，由 D 为比赛图知 $(v_1, v) \in A$ 并且 $(v, v_k) \in A$ ，在 $1, 2, \dots, k$ 中选取最大的下标 i 使得 $(v_i, v) \in A$ ，则 $(v, v_{i+1}) \in A$ ，于是 $v_1, v_2, \dots, v_i, v, v_{i+1}, \dots, v_k$ 为 D 的一条有向哈密顿路。□