第六讲循环群

陈建文

October 8, 2022

课后作业题:

练习1. 证明: n次单位根之集对数的通常乘法构成一个循环群。

证明. n次单位根之集对数的通常乘法构成的群为$(cos(\frac{\theta}{n})+isin(\frac{\theta}{n}))$。 □

练习2. 找出模12的同余类加群的所有子群。

解. $([0])=\{[0]\},([1])=Z_{12},([2])=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10],[12]\},([3])=\{[0],[3],[6],[9]\},([4])=\{[0],[4],[8]\},([6])=\{[0],[6]\}$。

□

练习3. 设$G=(a)$为一个n阶循环群。证明: 如果$(r,n)=1$, 则$(a^r)=G$。

证明. 由$(r,n)=1$知存在$s,t\in Z$, 使得$1=sr+tn$, 从而$a^1=a^{sr+tn}=(a^r)^s(a^n)^t=(a^r)^se^t=(a^r)^s$, 于是$a\in(a^r)$, 从而$(a^r)=G$。 □

练习4. 设群G中元素a的阶为n, $(r,n)=d$。证明: a^r的阶为n/d。

证明. 以下证明$(a^d)=(a^r)$, 而$|(a^d)|=n/d$, 于是$|(a^r)|=n/d$, 从而a^r的阶为n/d。

由$(r,n)=d$知存在$s,t\in Z$使得$d=sr+tn$, 从而$a^d=a^{(sr+tn)}=(a^r)^s(a^n)^t=(a^r)^se^t=(a^r)^s$, 于是$a^d\in(a^r)$, 由此可得$(a^d)\subseteq(a^r)$。

设$r=kd$, 这里$k\in n$, 于是$a^r=(a^d)^k$, 从而$a^r\in(a^d)$, 由此可得$(a^r)\subseteq(a^d)$。 □