习题 1. 设A为由序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的所有项组成的集合，则$A$是否是可数的？为什么？

解：A不一定可数，例如当$a_1 = a_2 = \cdots = 1$时，$A = \{1\}$为有穷集合。

习题 2. 证明：直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多是可数集。

证明. 设A为直线上某个互不相交的开区间构成的集合，在每个开区间中取一个有理数，则A与有理数集合的一个子集之间存在一一对应的关系，于是A为至多可数集。 □

习题 3. 证明：单调函数的不连续点的集合至多是可数集。

首先来看结论中涉及的一些基本概念。

设$f: R \to R$为一个函数。如果对任意的$x_1 \in R$，$x_2 \in R$，$x_1 < x_2$，那么$f(x_1) \le f(x_2)$，则称f为单调函数。

设$x_0 \in R$，$L \in R$，如果对任意的$\varepsilon \in R$，$\varepsilon > 0$，存在$\delta \in R$，$\delta > 0$，只要$|x - x_0| < \delta$，就有$|f(x) - L| < \varepsilon$，则称函数f在x_0处的极限为L，记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$。

如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f$在$x_0$处连续，$x_0$为函数$f$的连续点；如果函数$f$在$x_0$处不连续，则称$x_0$为函数$f$的不连续点。

证明. 对任意的$x_0 \in R$，由单调函数的定义知，集合$\{f(x)|x < x_0\}$有上界$f(x_0)$，从而有上确界，定义$L(x_0) = sup\{f(x)|x < x_0\}$；集合$\{f(x)|x > x_0\}$有下界$f(x_0)$，从而有下确界，定义$U(x_0) = inf\{f(x)|x > x_0\}$。如果$x_1 < x_2$，那么$U(x_1) \le f(\frac{x_1+x_2}{2}) \le L(x_2)$。另外，如果$x_0$为$f$的不连续点，可以证明$L(x_0) < U(x_0)$。因此，集合$S = \{(L(x), U(x))|x\text{为函数f的不连续点}\}$中的开区间两两不相交。在$S$中的每个开区间中取一个有理数，则所有这些有理数的集合与函数f的所有不连续点构成的集合是对等的，从而f的所有不连续点所构成的集合为至多可数的。

设x_0为f的不连续点，以下证明$L(x_0) < U(x_0)$。由$L(x_0) \le f(x_0) \le U(x_0)$知$L(x_0) \le U(x_0)$，因此只需证$L(x_0) \ne U(x_0)$。用反证法，假设$L(x_0) = U(x_0)$，则$L(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$。对任意的$\varepsilon > 0$，由$L(x_0)$的定义知存在$x' < x_0$使得$f(x') > L(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$；由$U(x_0)$的定义知存在$x'' > x_0$使得$f(x'') < U(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$。设$\delta = \min(|x' - x_0|, |x'' - x_0|)$，那么当$|x - x_0| < \delta$时，就有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，从而$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$，函数$f$在$x_0$处连续，这与$x_0$为$f$的不连续点矛盾。 □

习题 4. 任一可数集A的所有有限子集构成的集族是可数集族。

证明. 因为A为可数集合，所以A中元素可以排成无重复项的序列：
$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
令$S = \{B | B \subseteq A, B$为有穷集$\}$，Q为有理数集， 定义映射$\phi : S \to Q$，对任意的$B \in S$,$\phi(B) = 0.b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$， 这里

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果} a_i \in B \\ 0 & \text{如果} a_i \notin B \end{cases}$$

则对任意的$B_1 \in S, B_2 \in S$,如果$B_1 \neq B_2$,则$\phi(B_1) \neq \phi(B_2)$，即ϕ为从S到Q的单射。$\phi(S)$为可数集Q的无限子集，从而也为可数集。ϕ为从S到$\phi(S)$的双射,因此S为可数集。 □

习题 5. 判断下列命题之真伪：
a) 若$f : X \to Y$且f是满射，则只要X是可数集，那么Y是至多可数的；
b) 若$f : X \to Y$且f是单射，则只要Y是可数集，则X也是可数集；
c) 可数集在任一映射下的像也是可数集。

解. a)真，b)c)伪。 □

习题 6. 设$\sum$为一个有限字母表，$\sum$上所有字（包括空字ϵ)之集记为$\sum^*$。证明$\sum^*$是可数集。 （n元组$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$称为$\sum$上的一个字，这里$c_i \in \sum, 1 \leq i \leq n$，$\epsilon = ()$称为$\sum$上的一个空字）。

证明. $\sum^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sum^n$，其中$\sum^0 = \{\epsilon\}$。对任意的自然数$i$,$\sum^i$为有穷集合。于是$\sum^*$可以排成无重复项的序列： 先排$\sum^0$中的元素，再排$\sum^1$中的元素，再排$\sum^2$中的元素，$\cdots$。 □

习题 7. 用对角线法证明：如果A是可数集，则2^A是不可数集。

证明. 由A为可数集知A中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

2^A与A的所有特征函数构成的集合$Ch(A)$对等。进一步，$Ch(A)$与所有的0,1序列构成的集合对等，对任意的$f \in Ch(A)$，f对应$0, 1$序列$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \cdots$。
以下用对角线法证明所有的$0, 1$序列构成的集合不可数。
用反证法，假设所有0,1的无穷序列构成的集合B为可数集， 则B中元素可以排成无重复项的序列：

$$\begin{array}{r} b_{11} b_{12} b_{13} \cdots \\ b_{21} b_{22} b_{23} \cdots \\ b_{31} b_{32} b_{33} \cdots \\ \cdots \\ b_{n1} b_{n2} b_{n3} \cdots \\ \cdots \end{array}$$

其中$b_{ij}=0$或1。

构造0,1序列

$$d_1, d_2, d_3, \cdots$$

其中

$$d_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} b_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果} b_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列$d_1, d_2, d_3, \cdots$与前述序列中的任意一个$0, 1$序列都不相同，矛盾。

$\square$

习题 8. 利用康托的对角线法证明所有*0*，*1*的无穷序列是不可数集。

证明. 用反证法。设所有0,1的无穷序列构成的集合A为可数集， 则A中元素可以排成无重复项的序列:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\ \cdots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \cdots \end{aligned}$$

其中$a_{ij}=0$或1。

构造0,1序列

$$b_1, b_2, b_3, \cdots$$

其中

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{如果} a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果} a_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列$b_1, b_2, b_3, \cdots$与前述序列中的任意一个$0, 1$序列都不相同，矛盾。 $\square$