# 第五讲变换群、同构

陈建文

November 27, 2022

**定义1.** 设$(G_1,\circ)$，$(G_2,*)$为两个群。如果存在一个双射$\phi: G_1 \to G_2$，使得$\forall a,b\in G$，

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)*\phi(b),$$

则称群$G_1$与$G_2$同构，记为$G_1\cong G_2$。$\phi$称为从$G_1$到$G_2$的一个同构。

**定义2.** 设$S$为一个非空集合，从$S$到$S$的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群，称为$S$上的对称群，记为$Sym(S)$。当$S=\{1,2,\cdots,n\}$时，$Sym(S)=S_n$。

**定义3.** $Sym(S)$的任意一个子群称为$S$上的一个变换群。$S_n$的任意一个子群称为一个置换群。

**定理1.** 任何一个群都同构于某个变换群。

证明. 设$(G,\circ)$为一个群。$\forall a\in G$，令$f_a: G\to G$，$\forall x\in G$，$f_a(x)=ax$，则$f_a$为从$G$到$G$的双射。（$f_a$为单射，这是因为$\forall x_1,x_2\in G$，如果$f_a(x_1)=f_a(x_2)$，则$ax_1=ax_2$，从而$x_1=x_2$；$f_a$为满射，这是因为$\forall y\in G$，$f_a(a^{-1}y)=a(a^{-1}y)=y$。）设$L(G)=\{f_a|f_a: G\to G,\forall x\in G,f_a(x)=ax,a\in G\}$，则$L(G)$对映射的合成构成一个群。实际上，$\forall f_a,f_b\in L(G)$，$\forall x\in G$，$f_a\circ f_b(x)=f_a(f_b(x))=f_a(bx)=abx=f_{ab}(x)$，所以$f_{ab}=f_a\circ f_b$，即$f_a\circ f_b\in L(G)$。因此，合成运算在$L(G)$中封闭。显然，合成运算满足结合律。$G$上的恒等映射$I_G=f_e\in L(G)$为$L(G)$中的单位元素（$\forall x\in G, f_e(x)=ex=x$）。又因为$\forall a\in G$，$\forall x\in G$，

$$f_{a^{-1}}\circ f_a(x)=(a^{-1}a)x=x=f_e(x)$$

所以$f_{a^{-1}}f_a=f_e$，$f_{a^{-1}}$为$f_a$的左逆元。因此，$L(G)$为一个群。

令$\phi: G\to L(G)$，$\forall a\in G$，$\phi(a)=f_a$，则$\phi$为双射（$\phi$为单射，这是因为如果$\forall a,b\in G$，如果$\phi(a)=\phi(b)$，则$f_a=f_b$，从而$f_a(e)=f_b(e)$，即$ae=be$，于是$a=b$；$\phi$为满射，这是因为对任意的$f\in L(G)$，$\exists a\in G$使得$f=f_a$，从而$\phi(a)=f_a=f$）。

$\forall a,b\in G,\phi(ab)=f_{ab}=f_a\circ f_b=\phi(a)\circ\phi(b)$，因此$\phi$为从$G$到$L(G)$的一个同构，即$G\cong L(G)$。 □

设$(G,\circ)$为一个$n$阶群，$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则$G\cong L(G)$，这里

$$L(G)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_ia_1 & a_ia_2 & \cdots & a_ia_n\end{pmatrix}|a_i\in G\right\}$$

为一个置换群。

**推论1.** 任意一个$n$阶有限群同构于$n$次对称群$S_n$的一个$n$阶子群，亦即任意一个有限群同构于某个置换群。

课后作业题：

**练习1.** 设$R$为实数集合，$G$为一切形如$f(x)=ax+b$的从$R$到$R$的函数之集，这里$a\in R$，$b\in R$，$a\neq 0$，试证：$G$为一个变换群。

证明. 显然$G$中的每个函数都为从$R$到$R$的双射。

设$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，$a,b,c,d\in R$，$a\neq 0$，$c\neq 0$，则$(f\circ g)(x)=a(cx+d)+b=acx+(ad+b)$，这里$ac\neq 0$，因此$f\circ g\in G$。这验证了$G$中的函数关于函数的合成满足封闭性。

设$h:R\to R,h(x)=x$,则$h\in G$，$h$为$G$中的函数关于函数合成运算的单位元。

对任意的$f\in G$，设$f=ax+b$，$a,b\in R$，$a\neq 0$。

寻找$g\in G$，使得$g\circ f=h$。设$g(x)=cx+d$，$c,d\in R$，$c\neq 0$，

则$(g\circ f)(x)=c(ax+b)+d=cax+(cb+d)=x$，解方程组$\begin{cases} ca=1 \\ cb+d=0 \end{cases}$

得$c=\frac{1}{a},d=-\frac{b}{a}$，易验证$g(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$满足$(g\circ f)(x)=x$。

□

**练习2.** 设$R$为实数集合，$H$为一切形如$f(x)=x+b$的从$R$到$R$的函数之集，这里$b\in R$，试证：$H$为上题中$G$的一个子群。

证明. 显然$H$非空，例如$h:R\to R,\forall x\in R,h(x)=x$，则$h\in H$。

$\forall f,g\in H$，$f(x)=x+b$，$g(x)=x+c$，$b,c\in R$，则$(f\circ g^{-1})(x)=(x-c)+b=x+(b-c)\in H$，因此$H$为上题中$G$的一个子群。 □

**练习3.** 设$R_+$为一切正实数之集，$R$为一切实数之集。$(R_+,\times)$，$(R,+)$都为群。令$\phi:R_+\to R,\forall x\in R_+,\phi(x)=log_p(x)$，其中$p$为任意一个正实数。证明$\phi$为同构。

证明. 显然$\phi$为从$R_+$到$R$的双射。

其次，$\phi(x\times y)=log_p(x\times y)=\log_p(x)+\log_p(y)=\phi(x)+\phi(y)$。

因此，$\phi$为从$(R_+,\times)$到$(R,+)$的同构。 □