

# 第三章关系

陈建文

# 1. 关系的概念

## 定义1.1

设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

# 1. 关系的概念

## 定义1.1

设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

## 例1.1

设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} \subseteq (\phi, \phi) &= T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T, \\ \subseteq (\{1\}, \phi) &= F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq \\ (\{1\}, \{1, 2\}) &= T, \\ \subseteq (\{2\}, \phi) &= F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq \\ (\{2\}, \{1, 2\}) &= T, \\ \subseteq (\{1, 2\}, \phi) &= F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq \\ (\{1, 2\}, \{1, 2\}) &= T \end{aligned}$$

# 1. 关系的概念

## 定义1.2

设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

# 1. 关系的概念

## 定义1.2

设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

## 例1.2

设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = & \{(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}), \\ & (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

# 1. 关系的概念

## 例1.3

自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系" $\leq$ "是 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

# 1. 关系的概念

## 例1.3

自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系“ $\leq$ ”是 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

## 例1.4

设 $n$ 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 $m, k$ ，如果 $m - k$ 能被 $n$ 整除，则称 $m$ 与 $k$ 为模 $n$ 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 $m$ 被 $n$ 除所得到的余数与 $k$ 被 $n$ 除所得到的余数相等。模 $n$ 同余是 $\mathbb{Z}$ 上的一个二元关系。

# 1. 关系的概念

## 定义1.3

设 $R \subseteq A \times B$ , 集合

$$\{x \in A | \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的**定义域**, 记为 $dom(R)$ ; 集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的**值域**, 记为 $ran(R)$ 。



# 1. 关系的概念

## 定义1.4

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 $R$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 $n$ 元关系, 每个 $A_i$ 称为 $R$ 的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (not necessarily distinct),  $R$  is a relation on these  $n$  sets if it is a set of  $n$ -tuples each of which has its first element from  $S_1$ , its second element from  $S_2$ , and so on. More concisely,  $R$  is a subset of the Cartesian product  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1



E. F. Codd.

A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks.  
Information Retrieval, 13(6): 1970.

## 2. 关系的性质

### 定义2.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**自反**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**自反**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。

判断下列二元关系是否是自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

## 2. 关系的性质

### 定义2.2

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.2

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

判断下列二元关系是否是反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

## 2. 关系的性质

### 定义2.3

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**对称**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ，只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.3

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**对称**的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ , 只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

判断下列二元关系是否是对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$



## 2. 关系的性质

### 定义2.4

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**反对称**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ， $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.4

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**反对称**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ， $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ 。

判断下列二元关系是否是反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

## 2. 关系的性质

### 定义2.5

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.5

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

判断下列二元关系是否是传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ，

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

## 习题

以下两个结论哪个正确？

1. 如果 $R$ 与 $S$ 都为集合 $X$ 上传递的二元关系，则 $R \cap S$ 为集合 $X$ 上传递的二元关系。
2. 如果 $R$ 与 $S$ 都为集合 $X$ 上传递的二元关系，则 $R \cup S$ 为集合 $X$ 上传递的二元关系。

## 习题

设 $R$ 为集合 $X$ 上反自反的和传递的二元关系，证明： $R$ 为 $X$ 上反对称的二元关系。

### 3. 关系的运算

#### 定义3.1

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系,  $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.1

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系,  $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

#### 例3.1

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ ,  
则 $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$ 。



### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。



### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R^{-1}$ , 则 $(y, x) \in R$ , 由 $R$ 为对称的知,  $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R$ 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ , 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ 。

□

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。



### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ，如果 $(x, y) \in R$ ,

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ，如果 $(x, y) \in R$ ，则 $(y, x) \in R^{-1}$ ，



### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ，如果 $(x, y) \in R$ ，则 $(y, x) \in R^{-1}$ ，由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ ，

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ ，则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ ，此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ，如果 $(x, y) \in R$ ，则 $(y, x) \in R^{-1}$ ，由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ ，从而 $(x, y) \in R^{-1}$ 。  $\square$

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ , 则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ , 此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ , 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ , 从而 $(x, y) \in R^{-1}$ 。  $\square$

#### 定理3.3

设 $R$ 和 $S$ 为集合 $X$ 上的二元关系,  $R \subseteq S$ , 则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定理3.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $R$ 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明.

只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$ , 则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$ , 此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R$ , 则 $(y, x) \in R^{-1}$ , 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ , 从而 $(x, y) \in R^{-1}$ 。  $\square$

#### 定理3.3

设 $R$ 和 $S$ 为集合 $X$ 上的二元关系,  $R \subseteq S$ , 则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

#### 定理3.4

设 $R$ 和 $S$ 为集合 $X$ 上的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ， $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$



### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中,  $R^0 = ?$ ,  $R^3 = ?$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中,  $R^0 = ?$ ,  $R^3 = ?$

$$R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 例3.2

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 则 $R \circ R = ?$

$$R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中,  $R^0 = ?$ ,  $R^3 = ?$

$$R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}。$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C ((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$



### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C ((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C (\exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3))$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3))$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3)$$

### 定理3.5

设 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ , 从集合 $B$ 到集合 $C$ , 从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\forall a \in A \forall d \in D$$

$$(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3)$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3))$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3)$$

$$\Leftrightarrow (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$



### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ ,



### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ ,

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ , 则存在 $b \in X$ ,

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ,

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \circ R$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ，由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ , 由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \circ R$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ，由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ ,

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \circ R$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ，由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ ，如果 $(a, b) \in R$ ,

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, c) \in R \circ R$ , 则存在 $b \in X$ ,  $(a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ , 由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in R$ ,  $(b, c) \in R$ ,



### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \circ R$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ，由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ ，如果 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ ，则 $(a, c) \in R \circ R$ ，

### 定理3.6

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明.

由 $R$ 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$ ，如果 $(a, c) \in R \circ R$ ，则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$ ，由 $R$ 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 $R$ 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ ，如果 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ ，则 $(a, c) \in R \circ R$ ，由 $R \circ R \subseteq R$ 知 $(a, c) \in R$ 。 □

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.1

设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  为一个包含  $m$  个元素的集合,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  为一个包含  $n$  个元素的集合,  $R$  为从  $X$  到  $Y$  的一个二元关系。由  $R$  定义一个  $m \times n$  矩阵  $B = (b_{ij})$  如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵  $B$  称为关系  $R$  的矩阵。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.1

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的矩阵为?

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.1

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的矩阵为?

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.1

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的矩阵为?

关系 $R$ 的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.2

设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  为一个包含  $m$  个元素的集合,  $R$  为从  $X$  上的一个二元关系。由  $R$  定义一个  $m \times m$  矩阵  $B = (b_{ij})$  如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times X$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵  $B$  称为关系  $R$  的矩阵。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.2

设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系  $R$  的矩阵为?



## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.2

设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系  $R$  的矩阵为?

关系  $R$  的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.1

设 $B$ 为集合 $X$ 上二元关系 $R$ 的矩阵, 则

- (1)  $R$ 为自反的, 当且仅当 $B$ 的对角线上的全部元素都为1;
- (2)  $R$ 为反自反的, 当且仅当 $B$ 的对角线上的全部元素都为0;
- (3)  $R$ 为对称的, 当且仅当 $B$ 是对称矩阵;
- (4)  $R$ 为反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 $b_{ij}$ 与 $b_{ji}$ 不同时为1;
- (5)  $R$ 为传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$ , 则 $b_{ik} = 1$ 。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.2

设 $B$ 为集合 $X$ 上二元关系 $R$ 的矩阵, 则 $R^{-1}$ 的矩阵为 $B^T$ 。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.3

设 $B, C$ 为两个布尔矩阵,  $B$ 与 $C$ 的逻辑乘为 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为 $B \wedge C$ , 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$ 与 $C$ 的逻辑加为 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为 $B \vee C$ , 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

### 定理4.3

设 $R, S$ 为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的二元关系, 其矩阵分别为 $B_R$ 和 $B_S$ 。  $R \cup S$  与  $R \cap S$  的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$ ,  $B_{R \cap S}$ , 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.4

设 $A$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵,  $B$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵,  $A$ 与 $B$ 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,



## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,  
 $c_{ij} = 1$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$c_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$c_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$c_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1)$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.4

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

证明.

设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$c_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1)$$

$$\Leftrightarrow (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1$$



## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.5

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设 $X$ 和 $Y$ 为有穷集合， $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系。当用图表示 $R$ 时，先把 $X$ 与 $Y$ 的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 $R$ 的任一序对 $(x, y)$ 用从代表 $x$ 的点画一条指向代表 $y$ 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系 $R$ 的图。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.3

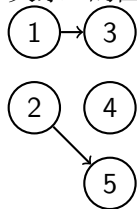
设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的图为?

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.3

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从 $X$ 到 $Y$ 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关系 $R$ 的图为?

关系 $R$ 的图为





## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.6

设 $X$ 为有穷集合， $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系。当用图表示 $R$ 时，先把 $X$ 的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 $R$ 的任一序对 $(x, y)$ 用从代表 $x$ 的点画一条指向代表 $y$ 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系 $R$ 的图。注意，如果 $(x, x) \in R$ ，则在代表 $x$ 的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.4

设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系 $R$ 的图为?

## 4. 关系矩阵和关系图

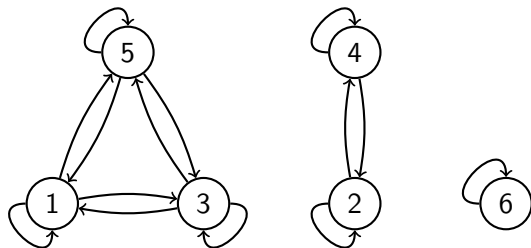
### 例4.4

设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系 $R$ 的图为?

关系 $R$ 的图为



## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.5

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则

- (1)  $R$ 为自反的，当且仅当 $R$ 的图的每个顶点均有一个环；
- (2)  $R$ 为反自反的，当且仅当 $R$ 的图中没有环；
- (3)  $R$ 为对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
- (4)  $R$ 为反对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两方向相反的矢线；
- (5)  $R$ 为传递的，当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ，要使得 $R$ 变成传递的二元关系，至少需要添加（ ）个有序对？

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ，要使得 $R$ 变成传递的二元关系，至少需要添加（ ）个有序对？

$$R^2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ，要使得 $R$ 变成传递的二元关系，至少需要添加（ ）个有序对？

$$R^2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

$$R^3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ，要使得 $R$ 变成传递的二元关系，至少需要添加（ ）个有序对？

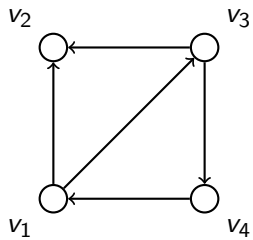
$$R^2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

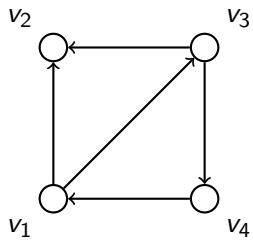
$$R^3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R^4 = \dots$$

$(x, y) \in R^4$ 当且仅当存在 $x_1, x_2, x_3 \in X$ ， $(x, x_1) \in R$ ， $(x_1, x_2) \in R$ ， $(x_2, x_3) \in R$ ， $(x_3, y) \in R$







$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5. 关系的闭包

### 定义5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。 $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包，用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X$ ,



## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X, (x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $z \in X$ ， $(x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R'$ ， $R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X, (x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R', R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的， $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X, (x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R', R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的， $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，由 $R'$ 为传递的知 $(x, z) \in R'$ ，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ ,  $z \in X$ ,  $(x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R'$ ,  $R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的,  $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，由 $R'$ 为传递的知 $(x, z) \in R'$ ，从而 $(x, z) \in R^+$ ，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

证明.

由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。

对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ ,  $z \in X$ ,  $(x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 $R'$ ,  $R \subseteq R'$ 且 $R'$ 是传递的,  $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，由 $R'$ 为传递的知 $(x, z) \in R'$ ，从而 $(x, z) \in R^+$ ，这证明了 $R^+$ 为传递的。  $\square$

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ ,  
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ ,  
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :



## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$ , 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ ,  $x_k \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x_k) \in R$ ,  $(x_k, b) \in R$ 。 □

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，



## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ， $b \in X$ ， $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ， $b \in X$ ， $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ， $b \in X$ ， $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ， $b \in X$ ， $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ ,



## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ;

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ ,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以， $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在某个正整数 $m$ ，使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ ，则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ；如果 $m > 1$ ，则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的，

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ , 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在某个正整数 $m$ , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ , 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ; 如果 $m > 1$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

因此,

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明.

首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义，只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $c \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以， $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X$ ,  $b \in X$ ，如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在某个正整数 $m$ ，使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$ ，则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ；如果 $m > 1$ ，则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+$ ,  $(b_1, b_2) \in R^+$ ,  $\dots$ ,  $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 $R^+$ 为传递的，所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是， $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

因此， $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

◦

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}$ ,  $p_1 = k - (j - i) < k$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}$ ,  $p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只需证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}$ ,  $p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此,  $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.5

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ ,  $B$ 为 $R$ 的关系矩阵,  $B_{R^+}$ 为 $R^+$ 的关系矩阵, 简记为 $B^+$ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

## 5. 关系的闭包

### 定理5.5

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ ,  $B$ 为 $R$ 的关系矩阵,  $B_{R^+}$ 为 $R^+$ 的关系矩阵, 简记为 $B^+$ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

TRANSITIVE-CLOSURE( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $M = B$

2  $A = M$

3 **for**  $i = 2$  **to**  $n$

4      $M = M \circ B$

5      $A = A \vee M$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)})(k \geq 1)$



## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)}) (k \geq 1)$

其中  $a_{ij}^{(k)} = 1$  当且仅当存在  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  使得  $(x_i, x_{i_1}) \in R, (x_{i_1}, x_{i_2}) \in R, \dots, (x_{i_m}, x_j) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

$$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$$

$$a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **if**  $a_{ik} == 1$

5             **for**  $j = 1$  **to**  $n$

6                  $a_{ij} = a_{ij} \vee a_{kj}$

7 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**等价关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ ，则 $yRx$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 例6.1

整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 例6.1

整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

### 证明.

只需验证整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系满足自反性, 对称性和传递性。

(1) 自反性成立, 这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \equiv m \pmod{n}$ 。(注: 我们用 $m \equiv k \pmod{n}$ 表示 $m$ 与 $k$ 模 $n$ 同余, 即 $n|(m-k)$ )

(2) 对称性成立, 这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 如果 $m \equiv k \pmod{n}$ , 则 $n|(m-k)$ , 于是 $n|(k-m)$ , 即 $k \equiv m \pmod{n}$ 。

(3) 传递性成立, 这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , 如果 $m \equiv k \pmod{n}$ 并且 $k \equiv l \pmod{n}$ , 则 $n|(m-k)$ 并且 $n|(k-l)$ , 从而 $n|((m-k) + (k-l))$ , 即 $n|(m-l)$ , 因此 $m \equiv l \pmod{n}$ 。 □



## 6. 等价关系与集合的划分

### 例6.2

设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则  $R$  为  $X$  上的等价关系。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.2

设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系,  $x \in X$ ,  $X$ 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 $x$ 关于 $\cong$ 的**等价类**, 记为 $[x]$ , 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

### 定义6.3

设 $\cong$ 为 $X$ 上的等价关系,  $\cong$ 的所有等价类之集称为 $X$ 对 $\cong$ 的商集, 记为 $X/\cong$ 。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x] \text{ 为 } x \text{ 关于 } \cong \text{ 的等价类}\}$$

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

解.

首先验证  $\cong$  为  $S$  上的等价关系:

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

解.

首先验证  $\cong$  为  $S$  上的等价关系:

$\cong$  为自反的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $I_m(f) = I_m(f)$ ;

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

解.

首先验证  $\cong$  为  $S$  上的等价关系:

$\cong$  为自反的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $I_m(f) = I_m(f)$ ;

$\cong$  为对称的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$ , 如果  $I_m(f) = I_m(g)$ , 则  $I_m(g) = I_m(f)$ ;

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

解.

首先验证  $\cong$  为  $S$  上的等价关系:

$\cong$  为自反的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $I_m(f) = I_m(f)$ ;

$\cong$  为对称的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$ , 如果  $I_m(f) = I_m(g)$ , 则  $I_m(g) = I_m(f)$ ;

$\cong$  为传递的, 这是因为对任意的映射  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : X \rightarrow Y$ ,  $h : X \rightarrow Y$ , 如果  $I_m(f) = I_m(g)$  并且  $I_m(g) = I_m(h)$ , 则  $I_m(f) = I_m(h)$

□

## 6. 等价关系与集合的划分

解(续).

$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ , 其中

$$f_1 : X \rightarrow Y, f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1, \text{Im}(f_1) = \{1\}$$

$$f_2 : X \rightarrow Y, f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2, \text{Im}(f_2) = \{1, 2\}$$

$$f_3 : X \rightarrow Y, f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1, \text{Im}(f_3) = \{1, 2\}$$

$$f_4 : X \rightarrow Y, f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2, \text{Im}(f_4) = \{1, 2\}$$

$$f_5 : X \rightarrow Y, f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1, \text{Im}(f_5) = \{1, 2\}$$

$$f_6 : X \rightarrow Y, f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2, \text{Im}(f_6) = \{1, 2\}$$

$$f_7 : X \rightarrow Y, f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1, \text{Im}(f_7) = \{1, 2\}$$

$$f_8 : X \rightarrow Y, f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2, \text{Im}(f_8) = \{2\}$$

则  $S/\cong = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}, \{f_8\}\}$





## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.1

设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系，对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $x \cong y$ 当且仅当 $[x] = [y]$ 。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.4

设 $X$ 为集合,  $X$ 的一些非空子集形成的集族 $\mathcal{A}$ 称为 $X$ 的一个划分, 如果 $\mathcal{A}$ 具有性质

1.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ , 如果 $A \neq B$ , 则 $A \cap B = \emptyset$ ;
2.  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.2

设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系，则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成 $X$ 的一个划分。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.2

设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系，则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成 $X$ 的一个划分。

### 定理6.3

设 $\mathcal{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$$

则 $\cong$ 是 $X$ 上的一个等价关系且 $\mathcal{A}$ 就是 $\cong$ 的等价类之集。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.4

设 $X$ 为一个集合,

$$\mathbb{R} = \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{ 为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\},$$

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{ 为集合 } X \text{ 的一个划分}\},$$

$$f = \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\}$$

$$g = \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\}$$

则 $f$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{A}$ 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

## 6. 等价关系与集合的划分

证明.

1. 证明 $f$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个等价关系 $\cong$ ,  $\{[x]_{\cong} | x \in X\}$ 为集合 $X$ 的一个划分。
2. 证明 $g$ 为映射。这就是要证明对于集合 $X$ 的任意一个划分 $\mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系。
3. 证明 $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个等价关系 $\cong$ ,  $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。
4. 证明 $f \circ g = I_{\mathbb{A}}$ 。这就是要证明对于集合 $X$ 上的任意一个划分 $\mathcal{A}$ , 等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 所对应的等价类的集合就是 $\mathcal{A}$ 。

□

## 6. 等价关系与集合的划分

### 习题

设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\cong$  为集合  $X$  的等价关系,  $X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ , 试求  $\cong$ 。

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$



1. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $x < y, x = y, y < x$ 中有且仅有一个成立。
2. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x < y$ 并且 $y < z$ , 则 $x < z$ 。
3. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x < y$ , 则 $x + z < y + z$ 。
4. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果 $x > 0$ ,  $y > 0$ , 则 $xy > 0$ 。

另外, 实数集还具有如下性质:

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 为实数集 $R$ 上的闭区间,  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ , 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**偏序关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是反对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**偏序关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是反对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

### 定义7.2

设 $\leq$ 为集合 $X$ 上的一个偏序关系，则称二元组 $(X, \leq)$ 为**偏序集**。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 例7.1

实数集 $\mathbb{R}$ 上通常的“小于等于”关系 $\leq$ 是偏序关系，所以 $(\mathbb{R}, \leq)$ 为偏序集。

### 例7.2

设 $S$ 为一个集合， $S$ 的子集间的包含关系 $\subseteq$ 是 $2^S$ 上的偏序关系，所以 $(2^S, \subseteq)$ 为偏序集。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 例7.3

设集合  $X = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则  $R$  为  $X$  上的偏序关系。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.3

设 $\leq$ 为集合 $X$ 上的偏序关系，如果 $\forall x, y \in X$ ， $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立，则称 $\leq$ 为 $X$ 上的**全序关系**。相应的，二元组 $(X, \leq)$ 称为**全序集**。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.4

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**最小元素**。

### 定义7.5

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $s < x$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**极大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $x < t$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**极小元素**。



## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.6

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的一个上界; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的一个下界。

### 定义7.7

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果 $A$ 有上界且 $A$ 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 $A$ 的上确界, 记为 $\sup A$ ; 如果 $A$ 有下界且 $A$ 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 $A$ 的下确界, 记为 $\inf A$ 。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.8

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果对任意的 $a, b \in A$ ,  $a \leq b$ 与 $b \leq a$ 必有一个成立, 则称 $A$ 为 $X$ 中的链; 如果对 $A$ 中任两个不同的元素 $a$ 与 $b$ ,  $a \leq b$ 与 $b \leq a$ 均不成立, 则称 $A$ 为 $X$ 中的反链。 $|A|$ 称为链 (反链) 的长度。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定理7.1

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集，如果 $X$ 中所有链长度的最大值为 $n$ ，则 $X$ 的全部元素可以被分成 $n$ 个非空不相交反链的并集。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定理7.1

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集，如果 $X$ 中所有链长度的最大值为 $n$ ，则 $X$ 的全部元素可以被分成 $n$ 个非空不相交反链的并集。

### 推论7.1

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集， $|X| = mn + 1$ ，则 $X$ 中或存在一个长至少为 $n + 1$ 的链，或存在一个长至少为 $m + 1$ 的反链。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定理7.1

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集, 如果 $X$ 中所有链长度的最大值为 $n$ , 则 $X$ 的全部元素可以被分成 $n$ 个非空不相交反链的并集。

### 推论7.1

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $|X| = mn + 1$ , 则 $X$ 中或存在一个长至少为 $n + 1$ 的链, 或存在一个长至少为 $m + 1$ 的反链。

### 例7.4

证明: 每个由 $n^2 + 1$ 个实数组成的序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 中必有长至少为 $n + 1$ 的不减子序列, 或有一个长至少为 $n + 1$ 的不增子序列。

# 习题

## 习题

是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系？

## 习题

实数集上的“小于”关系 $<$ 是否是反自反的？集合 $X$ 的幂集 $2^X$ 上的“真包含”关系 $\subset$ 是否是反自反的？为什么？

## 习题

下列说法是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请说明理由。

- 1) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的反自反的和传递的二元关系，则 $R$ 为反对称的二元关系。
- 2) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的对称的和传递的二元关系，则 $R$ 为自反的二元关系。

## 习题

### 习题

设  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

### 习题

设  $X, Y, S$  同习题4。  $S$  上的二元关系  $\cong$  定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$  当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明  $\cong$  是  $S$  上的等价关系, 并求出等价类之集。

# 习题

## 习题

设 $X, Y, S$ 同习题4。 $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下： $\forall f, g \in S, f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 $\cong$ 是 $S$ 上的等价关系，并求出等价类之集。

## 习题

是否存在一个偏序关系 $\leq$ ，使 $(X, \leq)$ 中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果有，请给出一个具体例子；如果没有，请证明之。

## 习题

令 $X = \{a, b, c, d\}$ ，画出偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 的Hasse图。



# 习题

## 习题

令  $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ , 画出偏序集  $(S, |)$  的 *Hasse* 图, 其中  $|$  为整除关系。它有几个极大 (小) 元素? 列出这些极大 (小) 元素。

## 习题

偏序集  $(X, \leq)$  称为有序完备的, 当且仅当  $X$  的每个有上界的非空子集有上确界。证明: 偏序集  $(X, \leq)$  为有序完备的当且仅当对  $X$  的每个有下界的非空子集有下确界。