习题. 设R，S为集合X上的等价关系。如果$R\circ S$为等价关系，则$R\circ S=(R\cup S)^+$。

证法一. 根据传递闭包的定义进行证明。只需证$R\circ S$为包含$R\cup S$的所有传递关系的交。

首先证明$R\circ S$为包含$R\cup S$的传递关系。对任意的$a\in X, c\in X$，如果$(a,c)\in R\cup S$，则$(a,c)\in R$或者$(a,c)\in S$。如果$(a,c)\in R$，此时由S为等价关系知$(c,c)\in S$，从而$(a,c)\in R\circ S$； 如果$(a,c)\in S$，此时由R为等价关系知$(a,a)\in R$，从而$(a,c)\in R\circ S$。这证明了$R\cup S\subseteq R\circ S$。由$R\circ S$为等价关系知$R\circ S$为传递的。

其次，设T为任意一个包含$R\cup S$的传递关系，证明$R\circ S\subseteq T$。对任意的$a\in X, c\in X$,如果$(a,c)\in R\circ S$，则存在$b\in X$，$(a,b)\in R$并且$(b,c)\in S$。从而$(a,b)\in R\cup S\subseteq T$，$(b,c)\in R\cup S\subseteq T$，再由$T$为传递关系知$(a,c)\in T$。 □

证法二. 先证$R\circ S\subseteq(R\cup S)^+$。

对任意的$a\in X, c\in X$，如果$(a,c)\in R\circ S$，则存在$b\in X$，$(a,b)\in R$并且$(b,c)\in S$，从而$(a,b)\in R\cup S$并且$(b,c)\in R\cup S$，于是$(a,c)\in(R\cup S)^2\subseteq(R\cup S)^+$。

再证$(R\cup S)^+\subseteq R\circ S$。

对任意的$a\in X, c\in X$，由$(a,c)\in(R\cup S)^+$，往证$(a,c)\in R\circ S$。

对任意的$a\in X, c\in X$，如果$(a,c)\in(R\cup S)^+$，则存在自然数n，$n\geq 1$，$(a,c)\in(R\cup S)^n$。

以下用数学归纳法证明，对任意的自然数n，$n\geq 1$，$(R\cup S)^n\subseteq R\circ S$。

(1)当$n=1$时，对任意的$a\in X, c\in X$，如果$(a,c)\in R\cup S$，则$(a,c)\in R$或者$(a,c)\in S$。如果$(a,c)\in R$，此时由S为等价关系知$(c,c)\in S$，从而$(a,c)\in R\circ S$； 如果$(a,c)\in S$，此时由R为等价关系知$(a,a)\in R$，从而$(a,c)\in R\circ S$。

(2)假设当$n=k(k\geq 1)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。

由R,S,$R\circ S$都为X上的等价关系知，$S\circ R=S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}=R\circ S$。

对任意的$a\in X, c\in X$，如果$(a,c)\in(R\cup S)^{k+1}=(R\cup S)^k\circ(R\cup S)$，则存在$b\in X$，$(a,b)\in(R\cup S)^k$并且$(b,c)\in(R\cup S)$。由归纳假设，$(a,b)\in R\circ S$。如果$(b,c)\in R$，那么$(a,c)\in(R\circ S)\circ R=R\circ(S\circ R)=R\circ(R\circ S)=(R\circ R)\circ S=R^2\circ S\subseteq R\circ S$；如果$(b,c)\in S$，那么$(a,c)\in(R\circ S)\circ S=R\circ(S\circ S)=R\circ S^2\subseteq R\circ S$。

□