第八讲正规子群、商群

陈建文

October 7, 2022

定义1. 设G为一个群，G的任意子集称为群子集。在2^G中借助于G的乘法引入一个代数运算，称为群子集的乘法：$\forall A, B \in 2^G$，

$$AB = \{ab | a \in A \text{且} b \in B\}$$

对任意的$A \in 2^G$，定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

定理1. 设G为一个群，则$\forall A, B, C \in 2^G$，$(AB)C = A(BC)$。

定理2. 设G为一个群，则$\forall A, B \in 2^G$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

定理3. 设G为一个群，H为G的一个子群，则$HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$。

定理4. 设A，B为群G的子群，则AB为G的子群的充分必要条件为$AB = BA$。

例. 设H为G的一个子群且$H \neq \{e\}$。如果存在一个元素$x_0 \in G$使得$H(x_0^{-1}Hx_0) = G$，则$H \cap (x_0^{-1}Hx_0) \neq \{e\}$。

定义2. 设H为群G的子群，如果$\forall a \in G$有$aH = Ha$，则称H为G的正规子群。

定理5. 设H为群G的一个子群，则下列三个命题等价：

（1）H为群G的正规子群；
（2）$\forall a \in G, aHa^{-1} = H$；
（3）$\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$。

定理6. 设H为群G的正规子群，则H的所有左陪集构成的集族S_l对群子集乘法形成一个群。

定义3. 群G的正规子群H的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为G对H的商群，记为G/H。

课后作业题：

练习1. 设A和B为群G的两个有限子群，证明：

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

练习2. 利用上题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

练习3. 设G为一个n^2阶的群，H为G的一个n阶子群。证明：$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。

练习4. 证明：指数为*2*的子群为正规子群。

练习5. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

练习6. 设H为群G的子群，N为群G的正规子群，试证：NH为群G的子群。

练习7. 设G为一个阶为$2n$的交换群，试证：G必有一个n阶商群。

练习8. 设H为群G的子群，证明：H为群G的正规子群的充分必要条件是H的任意两个左陪集的乘积还是H的一个左陪集。