

第一讲若干基本概念

陈建文

September 24, 2022

课后作业题

练习1. 设 (S, \circ) 为一个代数系, 如果二元代数运算“ \circ ”满足结合律和交换律, 则 $\forall a_i \in S, i = 1, 2, \dots, n$, n 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的乘积仅与这 n 个元素有关而与它们的次序无关。

证明. 设 π 为从集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个双射, 以下用数学归纳法证明 $a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)} \circ \dots \circ a_{\pi(n)} = (((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \dots) \circ a_n$ 。

这里 $a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)} \circ \dots \circ a_{\pi(n)}$ 表示按照 $a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}$ 的次序进行“ \circ ”运算时任意加括号所得到的运算结果。

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $n = k$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时, 结论也成立。

设 $\pi(i) = k + 1$, 则

$$\begin{aligned} & a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)} \circ \dots \circ a_{\pi(k+1)} \\ &= (((a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)}) \circ a_{\pi(3)}) \dots) \circ a_{\pi(i-1)} \circ (a_{\pi(i)} \circ (((a_{\pi(i+1)} \circ a_{\pi(i+2)}) \circ a_{\pi(i+3)}) \circ \dots) \circ a_{\pi(k+1)})) \\ &= (((a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)}) \circ a_{\pi(3)}) \dots) \circ a_{\pi(i-1)} \circ (((((a_{\pi(i+1)} \circ a_{\pi(i+2)}) \circ a_{\pi(i+3)}) \circ \dots) \circ a_{\pi(k+1)}) \circ a_{\pi(i)}) \\ &= (((a_{\pi(1)} \circ a_{\pi(2)}) \circ a_{\pi(3)}) \dots) \circ a_{\pi(i-1)} \circ (((a_{\pi(i+1)} \circ a_{\pi(i+2)}) \circ a_{\pi(i+3)}) \circ \dots) \circ a_{\pi(k+1)}) \circ a_{\pi(i)} \\ &= (((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ \dots \circ a_k) \dots \circ a_{k+1} \end{aligned}$$

□