第五讲变换群、同构

陈建文

October 15, 2022

定义1. 设$(G_1, \circ)$，$(G_2, *)$为两个群。如果存在一个双射$\phi : G_1 \to G_2$使得$\forall a, b \in G$，

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b),$$

则称群G_1与G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$。ϕ称为从G_1到G_2的一个同构。

定义2. 设S为一个非空集合，从S到S的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群，称为S上的对称群，记为$Sym(S)$。当$S = \{1, 2, \cdots, n\}$时，$Sym(S) = S_n$。

定义3. $Sym(S)$的任意一个子群称为S上的一个变换群。S_n的任意一个子群称为一个置换群。

定理1. 任何一个群都同构于某个变换群。

证明. 设$(G, \circ)$为一个群。$\forall a \in G$，令$f_a : G \to G$，$\forall x \in G$，$f_a(x) = ax$，则f_a为G到G的一一对应。（f_a为单射，这是因为$\forall x_1, x_2 \in G$，如果$f_a(x_1) = f_a(x_2)$，则$ax_1 = ax_2$，从而$x_1 = x_2$；f_a为满射，这是因为$\forall y \in G$，$f_a(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = y$。）设$L(G) = \{f_a | f_a : G \to G, \forall x \in G, f_a(x) = ax, a \in G\}$，则$L(G)$对映射的合成构成一个群。实际上，$\forall f_a, f_b \in L(G)$，$\forall x \in G$，$f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = abx = f_{ab}(x)$，所以$f_{ab} = f_a \circ f_b$，即$f_a \circ f_b \in L(G)$。因此，合成运算在$L(G)$中封闭。显然，合成运算满足结合律。$G$上的恒等映射$I_G = f_e \in L(G)$为$L(G)$中的单位元素（$\forall x \in G, f_e(x) = ex = x$）。又因为$\forall a \in G$，$\forall x \in G$，

$$f_{a^{-1}} \circ f_a(x) = (a^{-1}a)x = x = f_e(x)$$

所以$f_{a^{-1}} f_a = f_e$，$f_{a^{-1}}$为f_a的左逆元。因此，$L(G)$为一个群。

令$\phi : G \to L(G)$，$\forall x \in G$，$\phi(a) = f_a$，则ϕ为双射（ϕ为单射，这是因为如果$\forall a, b \in G$，如果$\phi(a) = \phi(b)$，则$f_a = f_b$，从而$f_a(e) = f_b(e)$，即$ae = be$，于是$a = b$；ϕ为满射，这是因为对任意的$f \in L(G)$，$\exists a \in G$使得$f = f_a$，从而$\phi(a) = f_a = f$）。

$\forall a, b \in G, \phi(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = \phi(a) \circ \phi(b)$，因此$\phi$为从$G$到$L(G)$的一个同构，即$G \equiv L(G)$。 □

设$(G, \circ)$为一个n阶群，$G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则$G \cong L(G)$，这里

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_i a_1 & a_i a_2 & \cdots & a_i a_n \end{pmatrix} | a_i \in G \right\}$$

为一个置换群。

推论1. 任意一个n阶有限群同构于n次对称群S_n的一个n阶子群，亦即任意一个有限群同构于某个置换群。

课后作业题：

练习1. 设R为实数集合，G为一切形如$f(x) = ax + b$的从R到R的函数之集，这里$a \in R$，$b \in R$，$a \neq 0$，试证：G为一个变换群。

练习2. 设R为实数集合，H为一切形如$f(x) = x + b$的从R到R的函数之集，这里$b \in R$，试证：H为上题中G的一个子群。

练习3. 设R_+为一切正实数之集，R为一切实数之集。$(R_+, \times)$，$(R, +)$都为群。令$\phi : R_+ \rightarrow R, \forall x \in R_+, \phi(x) = log_p(x)$，其中$p$为任意一个正实数。证明$\phi$为同构。