课后作业题

**练习1. 设**$(S,\circ)$为一个代数系，如果二元代数运算"$\circ$"满足结合律和交换律，则$\forall a_i \in S$，$i=1,2,\cdots,n$，$n$个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$的乘积仅与这$n$个元素有关而与它们的次序无关。

证明. 设$\pi$为从集合$\{1,2,\cdots,n\}$到$\{1,2,\cdots,n\}$的一个双射，以下用数学归纳法证明$a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)}\circ\cdots\circ a_{\pi(n)}=(((a_1\circ a_2)\circ a_3)\circ\cdots)\circ a_n$。

这里$a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)}\circ\cdots\circ a_{\pi(n)}$表示按照$a_{\pi(1)},a_{\pi(2)},\cdots,a_{\pi(n)}$的次序进行"$\circ$"运算时任意加括号所得到的运算结果。

当$n=1$时，结论显然成立。

假设当$n=k$时结论成立，往证当$n=k+1$时，结论也成立。

设$\pi(i)=k+1$，则

$$
\begin{aligned}
& a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)}\circ\cdots\circ a_{\pi(k+1)} \\
=& ((((a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)})\circ a_{\pi(3)})\cdots)\circ a_{\pi(i-1)})\circ(a_{\pi(i)}\circ((((a_{\pi(i+1)}\circ a_{\pi(i+2)})\circ a_{\pi(i+3)})\circ\cdots)\circ a_{\pi(k+1)})) \\
=& ((((a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)})\circ a_{\pi(3)})\cdots)\circ a_{\pi(i-1)})\circ(((((a_{\pi(i+1)}\circ a_{\pi(i+2)})\circ a_{\pi(i+3)})\circ\cdots)\circ a_{\pi(k+1)})\circ a_{\pi(i)}) \\
=& ((((a_{\pi(1)}\circ a_{\pi(2)})\circ a_{\pi(3)})\cdots)\circ a_{\pi(i-1)})\circ((((a_{\pi(i+1)}\circ a_{\pi(i+2)})\circ a_{\pi(i+3)})\circ\cdots)\circ a_{\pi(k+1)}))\circ a_{\pi(i)} \\
=& ((((a_1\circ a_2)\circ a_3)\circ\cdots\circ)a_k)\cdots\circ a_{k+1}
\end{aligned}
$$

□