

# 离散数学讲义

陈建文

May 13, 2022



## 第四章 无穷集合

**定义4.1.** 如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射, 则称 $X$ 与 $Y$ 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

**定义4.2.** 如果从自然数集 $\mathbb{N}$ 到集合 $X$ 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 则称集合 $X$ 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 $X$ 不是可数集且 $X$ 不是有穷集合, 则称 $X$ 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

**定理4.1.** 集合 $A$ 为可数集的充分必要条件为 $A$ 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

**定理4.2.** 可数集的任一无限子集也是可数集。

**定理4.3.** 设 $A$ 为可数集合,  $B$ 为有穷集合, 则 $A \cup B$ 为可数集。

**定理4.4.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集, 则 $A \cup B$ 为可数集。

**定理4.5.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

**定理4.6.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集, 则 $A \times B$ 为可数集。

**定理4.7.** 全体有理数之集 $\mathbb{Q}$ 为可数集。

**定理4.8.** 区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

**定义4.3.** 凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合, 简称连续统。

**定理4.9.** 无穷集合必包含有可数子集。

**定理4.10.** 设 $M$ 为一个无穷集合,  $A$ 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

证明. 先考虑 $A \cap M = \emptyset$ 的情况。因为 $M$ 为一个无穷集合, 所以 $M$ 中必有一个可数子集 $D$ 。令 $P = M \setminus D$ , 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$ ,  $D \sim D \cup A$ , 得到 $M \sim M \cup A$ 。

再考虑 $A \cap M \neq \emptyset$ 的情况, 此时 $A \setminus M$ 为至多可数集合, 从而 $M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$ 。□

**定理4.11.** 设 $M$ 为无穷集合,  $A$ 为 $M$ 的至多可数子集,  $M \setminus A$ 为无穷集合, 则 $M \sim M \setminus A$ 。

**定理4.12.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为连续统。

**定理4.13.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

**推论4.1.** 全体实数之集是一个连续统。

**推论4.2.** 全体无理数之集是一个连续统。

**定义4.4.** 集合 $A$ 的基数为一个符号, 凡与 $A$ 对等的集合都赋以同一个记号。集合 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。

**定义4.5.** 所有与集合 $A$ 对等的集合构成的集族称为 $A$ 的基数。

**定义4.6.** 集合 $A$ 的基数与集合 $B$ 的基数称为是相等的, 当且仅当 $A \sim B$ 。

**定义4.7.** 设 $\alpha, \beta$ 为任意两个基数,  $A, B$ 为分别以 $\alpha, \beta$ 为其基数的集合。如果 $A$ 与 $B$ 的一个真子集对等, 但 $A$ 却不能与 $B$ 对等, 则称基数 $\alpha$ 小于基数 $\beta$ , 记为 $\alpha < \beta$ 。

显然,  $\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

$\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 且不存在 $A$ 到 $B$ 的双射。

**定理4.14** (康托). 对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明. 令 $i: M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此,  $f$ 不为满射, 从而

$$|M| < |2^M|$$

□

**定理4.15** (康托-伯恩斯坦). 设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则 $A$ 与 $B$ 的基数相等。

证法一. 设  $f : A \rightarrow B$  和  $g : B \rightarrow A$  都为单射。令  $\psi : 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的  $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果  $E \subseteq F \subseteq A$ , 则  $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则  $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的  $E \in \mathbb{D}$ , 由  $E \subseteq D$  知  $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而  $D \subseteq \psi(D)$ 。于是  $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故  $\psi(D) \in \mathbb{D}$ , 因此,  $\psi(D) \subseteq D$ , 所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

令  $h : A \rightarrow B$ , 对任意的  $x \in A$ , 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中  $g^{-1}$  为视  $g$  为  $B$  到  $g(B)$  的一一对应时  $g$  的逆, 易见  $h$  为一一对应。所以  $A$  与  $B$  的基数相等。  $\square$

证法二. We separate  $A$  into two disjoint sets  $A_1$  and  $A_2$ . We let  $A_1$  consist of all  $x \in A$  such that, when we lift back  $x$  by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \dots$$

then  $x$  can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in  $A$  (i.e. reach an element of  $A$  which has no inverse image in  $B$  by  $g$ ). We let  $A_2$  be the complement of  $A_1$ , in other words, the set of  $x \in A$  from which we get stopped in  $B$  by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection  $h$  of  $A$  onto  $B$ .

If  $x \in A_1$ , we define  $h(x) = f(x)$ .

If  $x \in A_2$ , we define  $h(x) = g^{-1}(x)$ .

Then trivially,  $h$  is injective. We must prove that  $h$  is surjective. Let  $y \in B$ . If, when we try to lift back  $y$  by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \dots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in  $A$ , then  $f^{-1}(y)$  is defined, and  $f^{-1}(y)$  lies in  $A_1$ . Consequently,  $y = h(f^{-1}(y))$  is in the image of  $h$ . On the other hand, if we cannot lift back  $y$  indefinitely, and get stopped in  $B$ , then  $g(y)$  belongs to  $A_2$ . In this case,  $y = h(g(y))$  is also in the image of  $h$ , as was to be shown.  $\square$

刻画集合的ZFC公理系统 (Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory) :

公理4.1 (外延公理).

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理4.2 (空集公理).

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理4.3 (对公理).

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4.4 (并集公理).

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

公理4.5 (幂集公理).

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理4.6 (子集公理).

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理4.7 (无穷公理).

$$\begin{aligned} \exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A) \\ \text{其中 } a^+ = a \cup \{a\} \end{aligned}$$

公理4.8 (代换公理).

$$\begin{aligned} \forall A ((\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x, y))) \end{aligned}$$

公理4.9 (正则公理).

$$(\forall A \neq \phi) (\exists m \in A) m \cap A = \phi$$

公理4.10 (选择公理).

$$(\forall \text{relation } R) (\exists \text{function } F) (F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

刻画实数的公理系统:

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$

4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. 对任意的  $x \in R$ ,  $x \leq x$ 。
12. 对任意的  $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果  $x \leq y$  并且  $y \leq x$ , 则  $x = y$ 。
13. 对任意的  $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果  $x \leq y$  并且  $y \leq z$ , 则  $x \leq z$ 。
14. 对任意的  $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $x \leq y$  和  $y \leq x$  两者中必有其一成立。  
我们用  $x < y$  表示  $x \leq y$  并且  $x \neq y$ ,  $x \geq y$  表示  $y \leq x$ ,  $x > y$  表示  $x \geq y$  并且  $x \neq y$ 。
15. 对任意的  $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果  $x < y$ , 则  $x + z < y + z$ 。
16. 对任意的  $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果  $x > 0$ ,  $y > 0$ , 则  $xy > 0$ 。
17. 设  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  为实数集  $R$  上的闭区间,  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ , 则  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  非空。

**练习4.1.** 设  $A$  为  $R$  的任意一个非空子集, 如果  $A$  有上界, 则  $A$  有上确界。

证明. 设  $b$  为  $A$  的一个上界, 由  $A$  非空知, 存在  $a \in A$ 。

将闭区间  $[a, b]$  二等分, 得到两个小的闭区间  $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$  和  $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$ 。如果  $I_2$  中存在  $A$  中的点, 则记  $A_1 = I_2$ ; 否则,  $I_1$  中必存在  $A$  中的点, 记  $A_1 = I_1$ 。这样得到的闭区间  $A_1$  中必存在  $A$  中的点, 并且其右边界为  $A$  的上界。

按照同样的方法将  $A_1$  二等分, 这样依次可以得到闭区间  $A_2, A_3, \dots$ , 每个闭区间中存在  $A$  中的点, 并且其右边界为  $A$  的上界。

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  非空, 取  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ , 以下证明  $x$  为  $A$  的上确界。

首先证明  $x$  为  $A$  的上界。用反证法, 假设  $x$  不是  $A$  的上界, 则存在  $y \in A$ ,  $y > x$ 。由于当  $i \rightarrow \infty$  时,  $A_i$  的长度  $\rightarrow 0$ , 所以存在正整数  $N$ ,  $A_N$  的右边界  $-x < A_N$  的长度  $< y - x$ , 从而  $A_N$  的右边界  $< y$ , 这与  $A_N$  的右边界为  $A$  的上界矛盾。

其次证明  $x$  为  $A$  的最小上界。用反证法, 假设  $x$  不是  $A$  的最小上界, 则存在上界  $x'$ ,  $x' < x$ 。由于当  $i \rightarrow \infty$  时,  $A_i$  的长度  $\rightarrow 0$ , 所以存在整数  $M$ ,  $x - A_M$  的左边界  $< A_M$  的长度  $< x - x'$ , 从而  $A_M$  的左边界  $> x'$ , 而  $A_M$  中存在  $A$  中的点  $z$ ,  $z > x'$ , 与  $x'$  为  $A$  的上界矛盾。□

**练习4.2.** 有下界的单调下降序列必收敛。

证明. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  为有下界的单调下降序列, 则其所有元素构成的集合  $A$  有下界, 从而有下确界, 记为  $a$ 。

以下证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

对任给的  $\epsilon > 0$ , 由于  $a + \epsilon$  不是  $A$  的下界, 从而存在自然数  $N$  使得  $a_N < a + \epsilon$ 。

由  $a$  为  $A$  的下界知  $a \leq a_N$ 。

由序列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  单调下降且  $A$  的下确界为  $a$  知当  $n \geq N$  时,  $a \leq a_n < a_N + \epsilon$ , 这证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。□

证明. □

**练习4.3.** 设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $R$  为实数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] =$

\_\_\_\_\_。

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] =$

\_\_\_\_\_。

解. (1)  $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) \\ &= \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ , 由序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降知序列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单调上升, 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$ 。

综上,  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \{\sqrt{2}\}$ 。

(2)

$$x_n^2 = (\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 = \frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) \geq \frac{1}{4}(2 * x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}} + 4) = 2$$



$$\begin{aligned}
& x_n - x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) - x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1} \right) \\
&= \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降, 从而序列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单调上升。

$$\begin{aligned}
& x_n - \frac{2}{x_n} \\
&= \frac{x_n^2 - 2}{x_n} \\
&= \frac{\left( \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) \right)^2 - 2}{x_n} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \left( x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4 \right) - 2}{x_n} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \left( x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 4 \right)}{x_n} \\
&= \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{4x_n} \left( x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left( x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}} \right)
\end{aligned}$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$ 。以下证明  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{x_n}, x_n \right] = \phi$ 。

用反证法。设存在  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{x_n}, x_n \right]$ , 由  $x$  为有理数知  $x^2 \neq 2$ 。

如果  $x^2 > 2$ , 则  $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$ , 从而  $\left( \frac{2}{x} \right)^2 < 2 < x^2$ , 于是  $\frac{2}{x} < x$ 。对任意的自然数  $n$ , 由  $x \leq x_n$  知  $\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$ , 从而  $x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$ , 这与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$  矛盾。

如果  $x^2 < 2$ , 则  $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{2}$ , 从而  $\left( \frac{2}{x} \right)^2 > 2 > x^2$ , 于是  $\frac{2}{x} > x$ 。对任意的自然数  $n$ , 由  $x \geq \frac{2}{x_n}$  知  $\frac{2}{x} \leq x_n$ , 从而  $x_n - \frac{2}{x_n} \geq \frac{2}{x} - x$ , 这也与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$  矛盾。

□

证明：任何有理数的平方不等于2。

证明. 用反证法。假设存在有理数  $x = \frac{n}{m}$  使得  $x^2 = 2$ ，这里  $m$  与  $n$  互素，于是  $(\frac{n}{m})^2 = 2$ ，即

$$2m^2 = n^2 \tag{4.1}$$

这说明  $n$  为偶数，从而存在整数  $k$ ，使得  $n = 2k$ 。带入(4.1)得， $m^2 = 2k^2$ ，从而  $m$  为偶数，这与  $m$  和  $n$  互素矛盾，结论得证。  $\square$

## 第 五 章