

离散数学讲义

陈建文

April 23, 2022

第八章 连通度和匹配

定义8.1. 图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

定义8.2. 图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

定理8.1. 对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

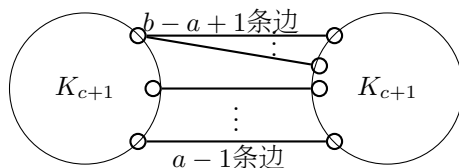
证明. 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后, 得到的图中 v 为孤立顶点, 所以 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。因此, 对任意的图 G , $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图, 则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x , 则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 , 所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$, 则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边, 移去它们后所得到的图不连通。显然, 移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图, 它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条, 选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的, 则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则, x 是这样产生的图的一条桥, 从而移去 u 或 v 就产生了一个不连通图或平凡图。所以, 在任何情况下, $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。 \square

定理8.2. 对任何整数 a, b, c , $0 < a \leq b \leq c$, 存在一个图 G 使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

证明.



\square

定理8.3. 设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明. $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。设 v 为 A 中的任一顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$; v 与 A 中的 y 个顶点邻接, 而这 y 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_2 , 则 $F_2 \subseteq F$ 并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| = x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

□

定义8.3. 设 G 为一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 为 n -顶点连通的, 简称 n -连通; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 为 n -边连通的。

定理8.4. 设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在 G 的同一个圈上。

定义8.4. 设 u 与 v 为图 G 中的两个不同的顶点。两条联结 u 与 v 的路, 如果除了 u 与 v 外没有公共顶点, 则称这两条路为联结 u 与 v 的**不相交路**; 如果联结 u 与 v 的两条路上没有公共边, 则称这两条路为联结 u 与 v 的**边不相交路**。

定理8.5. 分离图 G 的两个不邻接的顶点 s 和 t 的顶点最少数目等于联结 s 和 t 的不相交路的最多数目。

证明. 设 s 和 t 为图 G 的任意两个不邻接的顶点, 分离顶点 s 和 t 的顶点最少数目记为 $k(s, t)$, 联结 s 和 t 的不相交路的最多数目记为 $p(s, t)$, 显然 $k(s, t) \geq p(s, t)$, 否则, 去掉 $k(s, t)$ 个顶点, 顶点 s 和顶点 t 之间至少还存在 $p(s, t) - k(s, t)$ 条路, 这与去掉 $k(s, t)$ 个顶点之后可以分离顶点 s 和 t 矛盾。

以下用数学归纳法证明 $k(s, t) \leq p(s, t)$, 施归纳于图 G 的边数 q 。

不妨设存在边 $e = uv$, e 不与顶点 s 关联, 也不与顶点 t 关联。否则, 从顶点 s 到顶点 t 的路长度都为 2, 结论显然成立。

设 $H = G - e$ 。因为 H 为 G 的子图, 所以 $p_G(s, t) \geq p_H(s, t)$ 。由归纳假设, $k_H(s, t) = p_H(s, t)$ 。由图 H 的任意分离顶点 s 和 t 的顶点割集与边 e 的任意一个顶点一起构成了图 G 中分离顶点 s 和顶点 t 的顶点割集知 $k_H(s, t) + 1 \geq k_G(s, t)$ 。因此,

$$p_G(s, t) \geq p_H(s, t) = k_H(s, t) \geq K_G(s, t) - 1$$

如果 $p_G(s, t) > K_G(s, t) - 1$, 即 $p_G(s, t) \geq k_G(s, t)$, 则结论得证。以下假设 $p_G(s, t) = K_G(s, t) - 1$, 从而 $k_H(s, t) = k_G(s, t) - 1$ 。

以下将 $k_G(s, t)$ 减记为 k 。设 $S := \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ 为 H 的分离顶点 s 和 t 的最小的顶点割集, X 为 $H - S$ 中从顶点 x 可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合, Y 为 $H - S$ 中从顶点 y 可以有路到达的顶点所构成的顶点的集合。因

为 $|S| = k - 1$ ，集合 S 不是图 G 中分离顶点 s 和顶点 t 的顶点割集，因此在 $G - S$ 中有一条从顶点 s 到顶点 t 的路。显然这条路中包含边 $e = uv$ 。不失一般性，设 $u \in X$ ， $v \in Y$ 。

设将 X 中的顶点收缩至顶点 s 所得到的图为 G/X 。 G/X 中分离顶点 s 和顶点 t 的顶点割集 T 也为 G 中分离顶点 s 和顶点 t 的顶点割集，这是因为如果 P 为 G 中从顶点 s 到顶点 t 的路，并且 P 中不包含 T 中的顶点，那么 G/X 的子图 P/X 为 G/X 的一条不包含 T 中顶点的路。因此 $k_{G/X}(s, t) \geq k_G(s, t)$ 。另一方面， $k_{G/X}(s, t) \leq k_G(s, t)$ ，这是因为 $S \cup \{v\}$ 为 G/X 的一个顶点割集。因此， $S \cup \{u\}$ 为 G/X 的一个分离顶点 s 和 t 的最小顶点割集。由归纳假设，在 G/X 中有 k 条互不相交的从顶点 s 到顶点 t 的路 P_1, P_2, \dots, P_k 。 $S \cup \{v\}$ 中的每个顶点恰好位于 P_1, P_2, \dots, P_k 中的一条路上，不失一般性，假设 v_i 位于 P_i 之上（ $1 \leq i \leq k - 1$ ）， $v \in P_k$ 。设将 Y 中的顶点收缩至顶点 t 所得到的图为 G/Y 。同理，在 G/Y 中有 k 条互不相交的从顶点 s 到顶点 t 的路 Q_1, Q_2, \dots, Q_k 。 $S \cup \{u\}$ 中的每个顶点恰好位于 Q_1, Q_2, \dots, Q_k 中的一条路上，不失一般性，假设 v_i 位于 Q_i 之上（ $1 \leq i \leq k - 1$ ）， $u \in Q_k$ 。因此，在 G 中存在 k 条联结顶点 s 与 t 的不相交路 $sP_i v_i Q_i t$ ， $1 \leq i \leq k - 1$ ， $sP_k u v Q_k t$ ，与前述假设假设 $k_G(s, t) = K - 1$ 矛盾。□

定理8.6. 图 G 为 n -连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有 n 条不相交路。

定理8.7. 分离图 G 的两个不同的顶点 s 和 t 的边的最少数目等于边不相交 $s - t$ 路的最多数目。

定理8.8. 图 G 为 n -边连通的当且仅当 G 的任一对不同的顶点间至少有 n 条边不相交路。

定义8.5. 设 $G = (V, E)$ 为一个图， G 的任意两条不邻接的边 x 与 y 称为**互相独立**的。 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个**匹配**，如果 Y 中任意两条边都是互相独立的。

定义8.6. 设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果 $2|Y| = |V|$ ，则称 Y 为 G 的一个**完美匹配**。

定义8.7. 设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 G 的任一匹配 Y' ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。

定义8.8. 设 $G = (V, E)$ 为一个偶图且 $V = V_1 \cup V_2$ ， $\forall x \in E$ ， x 为联结 V_1 的一个顶点与 V_2 的一个顶点的边。如果存在 G 的一个匹配 Y 使得 $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$ ，则称 Y 是偶图 G 的一个**完全匹配**。

定义8.9. 设 M 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果一条路 P 上的边在 M 与 $E \setminus M$ 中交错出现，则称路 P 为图 G 中的一条 **M -交错路**。进一步，如果 P 的两个端点都不与 M 中的边相关联，则称 P 为一条 **M -增广路**。

定理8.9. 设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图，存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A ， $|N(A)| \geq |A|$ ，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证法一. 设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$, 则显然对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。显然 $B \subseteq N(R)$ 。由 $N(R)$ 中的每个顶点都在从 u 出发的一条 M^* -交错路上知 $N(R) \subseteq B$ 。由 $|B| = |R| - 1$ 及 $B = N(R)$ 知 $|N(R)| = |R| - 1$, 与已知条件矛盾。□

证法二. 设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$, 则显然对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 以下用数学归纳法证明存在 G 的一个完全匹配 Y 使得 $|Y| = |V_1|$, 施归纳于 $|V_1|$ 。

(1) 当 $|V_1| = 1$ 时, 设 V_1 中唯一的一个元素为 u , 由 $|N(V_1)| \geq |V_1|$ 知 $N(V_1)$ 中至少含有一个元素 v , 则 $\{\{u, v\}\}$ 构成了 G 的一个满足条件的完全匹配。

(2) 假设当 $|V_1| < k$ 时结论成立, 往证当 $|V_1| = k$ 时结论也成立。设 $|V_1| = k$, 分以下两种情况讨论:

(i) 对 V_1 的任意真子集 A , $|N(A)| > |A| + 1$ 。取 V_1 中的任意一个元素 u , 由于 $|N(\{u\})| \geq 1$, 可取 $N(\{u\})$ 中的一个元素 v 使得 $uv \in E$ 。考虑偶图 $G - \{u, v\}$, 对任意的 $V_1 \setminus \{u\}$ 的子集 B , $|N(B)| \geq |B|$ 。由归纳假设, 偶图 $G - \{u, v\}$ 有一个完全匹配 Y' 且 $|Y'| = |V_1 \setminus \{u\}|$ 。 $Y' \cup \{\{u, v\}\}$ 即为 G 的一个完全匹配, 且 $|Y' \cup \{\{u, v\}\}| = |V_1|$ 。

(ii) 存在 V_1 的真子集 A , $|N(A)| = |A|$ 。

考虑图 G 中由 $A \cup N(A)$ 导出的子图 G_1 以及由 $(V_1 \setminus A) \cup (N(V_1 \setminus A) \setminus N(A))$ 导出的子图 G_2 。 G_1 为偶图, 且在 G_1 中对 A 的任意子集 B , $|N(B)| \geq |B|$ 。 G_2 为偶图, 且在 G_2 中对集合 $V_1 \setminus A$ 的任意子集 C , $|N(C)| \geq |C|$, 这是因为如果 $|N(C)| < |C|$, 则在 G 中 $|N(C \cup A)| < |C \cup A|$, 与前提条件矛盾。由归纳假设, G_1 有完全匹配 M_1 , $|M_1| = |A|$, G_2 有完全匹配 M_2 , $|M_2| = |V_1 \setminus A|$ 。于是 $M_1 \cup M_2$ 构成了 G 的完全匹配, 且 $|M_1 \cup M_2| = |V_1|$ 。□

定义 8.10. 设 X 为一个有穷集合, A_1, A_2, \dots, A_n 为 X 的子集的一个序列, 由 X 的互不相同的元素构成的集合 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 称为系统

$$T : A_1, A_2, \dots, A_n$$

的相异代表系, 如果 $s_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

定理 8.10. 设 X 为一个有限集, 系统 $T : A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 X 的一些子集组成的, 则 T 有相异代表系的充分必要条件是 $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ 有

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

第九章