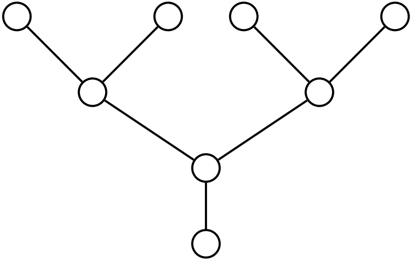
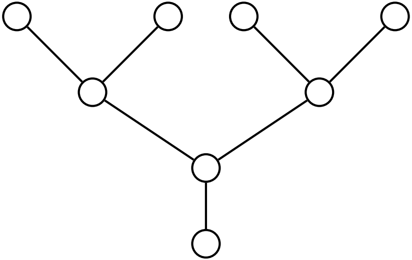
第七章树和割集

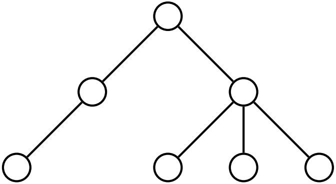
陈建文

1. 树及其性质



1. 树及其性质





1. 树及其性质

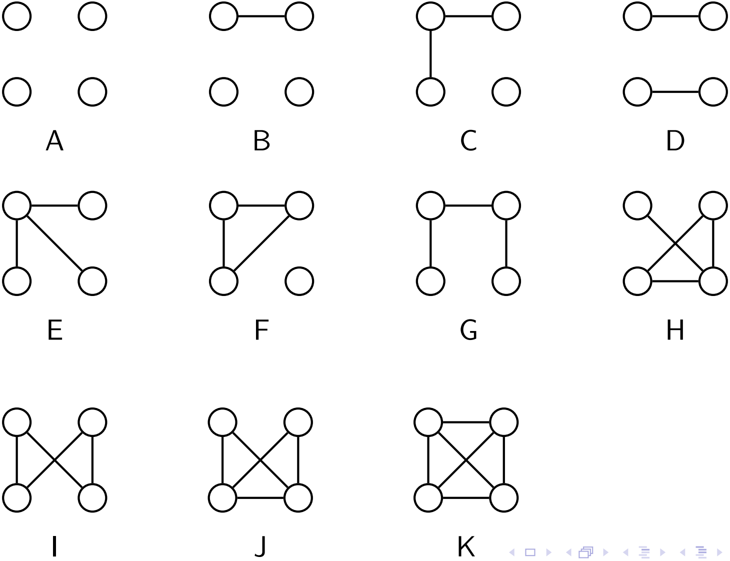
定义1.1

连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。

1. 树及其性质

定义1.1

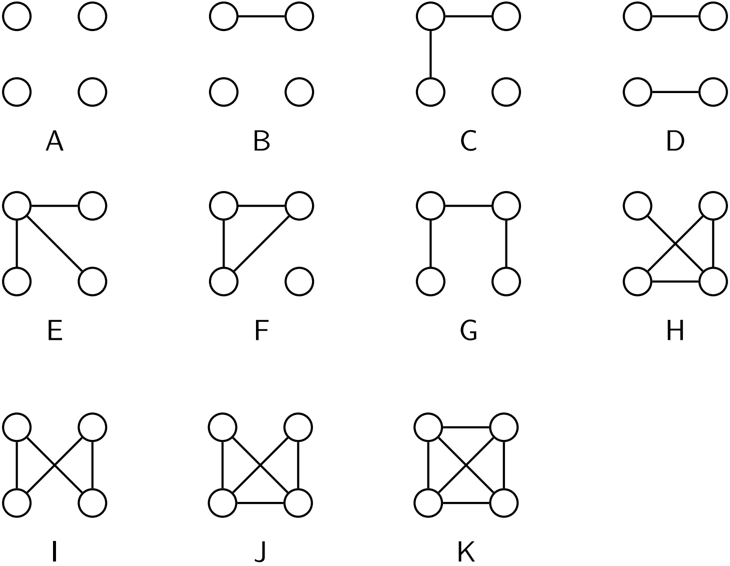
连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。



定义1.2
一个没有圈的无向图称为无向森林，简称森林。

定义1.2

一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。



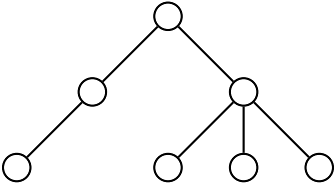
1. 树及其性质

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

1. 树及其性质

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n = k (k \geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n = k + 1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$P(k) \rightarrow P(k + 1)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n = k (k \geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n = k + 1$时$P(n)$也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$P(k) \rightarrow P(k+1)$

$P(0)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 □

(1)$P(0)$

(2)$P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(0)$ $P(1)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n=k(k\geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n=k+1$时$P(n)$也成立。 □

(1)$P(0)$

(2)$P(k)\rightarrow P(k+1)$

$P(0)$ $P(1)$ $P(2)$

数学归纳法I

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n = k(k \geq 0)$时$P(n)$成立，往证当$n = k + 1$时$P(n)$也成立。 □

(1)$P(0)$

(2)$P(k) \to P(k+1)$

$P(0)\ P(1)\ P(2)\ \cdots$

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。
（2）假设当$p = k$时结论成立，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1） 当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2） 假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1） 当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2） 假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。
（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。
（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。
（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q=p-1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q=p-1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p=1$时，$q=0$,结论显然成立。

（2）假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉T中一个度为1的顶点及其与之关联的边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假设，$q - 1 = k - 1$，

定理1.1
设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。
（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。
（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为1。去掉T中一个度为1的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假设，$q - 1 = k - 1$， 从而$q = (k + 1) - 1$，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

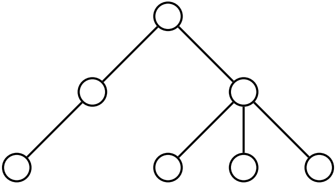
（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k+1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假设，$q - 1 = k - 1$， 从而$q = (k + 1) - 1$， 即当$p = k + 1$时结论也成立。 □

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。



数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n=0$时$P(n)$成立。

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n < k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n < k(k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n < k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

数学归纳法II

定理
$\forall n P(n)$

证明.
用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n < k(k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$(\forall n < kP(n)) \to P(k)$
$P(0)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n < k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$
$P(0)$ $P(1)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。

(1)当$n = 0$时$P(n)$成立。

(2)假设当$n < k (k \geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n = k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$

(2)$(\forall n < k P(n)) \rightarrow P(k)$

$P(0)$ $P(1)$ $P(2)$

数学归纳法II

定理

$\forall n P(n)$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n。
(1)当$n=0$时$P(n)$成立。
(2)假设当$n<k(k\geq 1)$时$P(n)$成立，往证当$n=k$时结论也成立。 $\square$

(1)$P(0)$
(2)$(\forall n<kP(n))\to P(k)$
$P(0)\ P(1)\ P(2)\ \cdots$

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。
（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。
（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加 1，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

定理1.1

设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$，结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中的任意一条边，得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此为树。设T_1有p_1个顶点，k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。 □

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.

用反证法。假设图G中有圈，

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.

用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.

用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，

定理1.2

设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.

用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。从而最后得到的图中有$p - 1$条边，

定理1.2
设图G有p个顶点和q条边，如果G连通且$q = p - 1$，则G中无圈。

证明.
用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然为连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。从而最后得到的图中有$p - 1$条边，这与去掉边之前图G中的边数$q = p - 1$矛盾。 $\square$

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.

设图G有k个支，

定理1.3
设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.
设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。

定理1.3
设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.
设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，

定理1.3
设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.
设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.

设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，则在第i个支中$q_i = p_i - 1$。

定理1.3
设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.
设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，则在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，

定理1.3
设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.
设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，则在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.

设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，则在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。于是$k = 1$，

定理1.3

设图G有p个顶点和q条边，如果G无圈且$q = p - 1$，则G连通。

证明.

设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边，则在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。于是$k = 1$，从而G为连通的。 □

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k (k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p=2$时，$a_1+a_2=2(2-1)=2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1=1$，$a_2=1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p=k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1)=2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s=1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1}=1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p=2$时，$a_1+a_2=2(2-1)=2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1=1$，$a_2=1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p=k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1)=2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s=1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1}=1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t>1$。否则,$a_1=a_2=\cdots=a_k=1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k>1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k-1$为正整数，并且$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+(a_k-1)=2(k-1)$。由归纳假设，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。
(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。
(2)假设当$p = k (k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一棵具有$k+1$个顶点的树，

习题1

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一棵具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于p。

(1)当$p = 2$时，$a_1 + a_2 = 2(2-1) = 2$。由a_1，a_2为正整数知,$a_1 = 1$，$a_2 = 1$。两个顶点之间联结一条边，就构成了一棵满足条件的树。

(2)假设当$p = k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$p = k+1$时结论也成立。设a_1，a_2，$\cdots$，a_{k+1}为$k+1$个正整数，并且$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2(k+1-1) = 2k$。此时必存在$s$，$1 \leq s \leq k+1$，使得$a_s = 1$。否则，如果对任意的$i$，$1 \leq i \leq k+1$，有$a_i \geq 2$，那么$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 2(k+1)$，与$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 2k$矛盾。不妨设$a_{k+1} = 1$。此时必存在$t$，$1 \leq t \leq k$，$a_t > 1$。否则,$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$，于是$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k+1 < 2k$，矛盾。不妨设$a_k > 1$。于是$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k - 1$为正整数，并且$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + (a_k - 1) = 2(k-1)$。由归纳假设，存在一棵具有$k$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k-1}$，$a_k - 1$。在其度为$a_k - 1$的顶点上联结一条边和一个顶点，便得到了一棵具有$k+1$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_{k+1}$。 □

241131211

241131211
24113111

241131211
24113111
2411211

241131211
24113111
2411211
241111

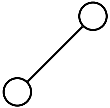
241131211
24113111
2411211
241111
23111

241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211

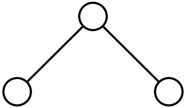
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211

241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11

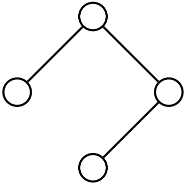
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



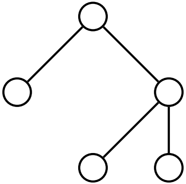
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



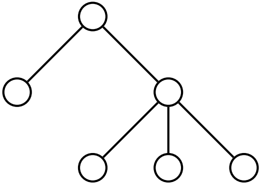
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



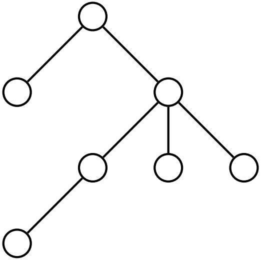
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



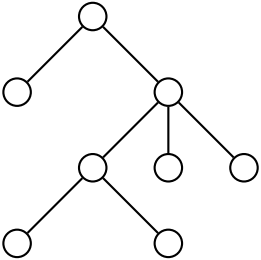
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



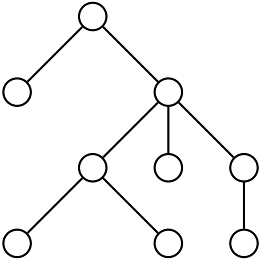
241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



241131211
24113111
2411211
241111
23111
2211
211
11



2. 生成树

定义2.1
设$G=(V,E)$为一个图，G的一个生成子图$T=(V,F)$如果是树，则称T为G的生成树。

2. 生成树

定义2.1

设$G = (V, E)$为一个图，G的一个生成子图$T = (V, F)$如果是树，则称T为G的**生成树**。

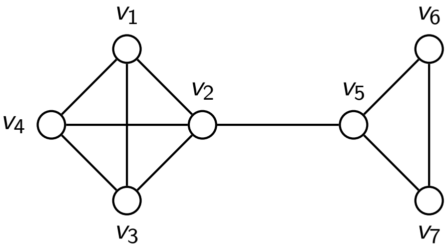
定理2.1

图G有生成树的充分必要条件是G为一个连通图。

3. 割点、桥和割集

定义3.1

设v为图G的一个顶点，如果$G-v$的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个割点。



3. 割点、桥和割集

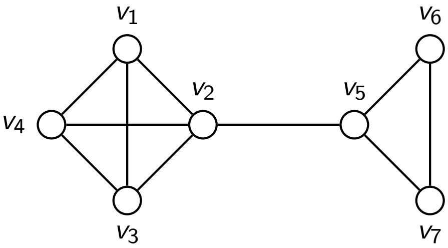
定理3.1

设v为连通图$G=(V,E)$的一个割点，则下列命题等价：

(1) v为图G的一个割点；

(2) 集合$V\backslash\{v\}$有一个二划分$\{U,W\}$, 使得对任意的$u\in U$，$w\in W$，v在联结u和w的每条路上；

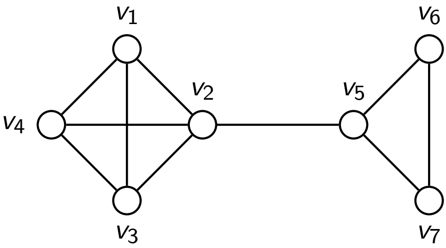
(3) 存在与v不同的两个顶点u和w，使得v在每一条u与w间的路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.2

图G的一条边x称为G的一座桥，如果$G-x$的支数大于G的支数。



3. 割点、桥和割集

定理3.2

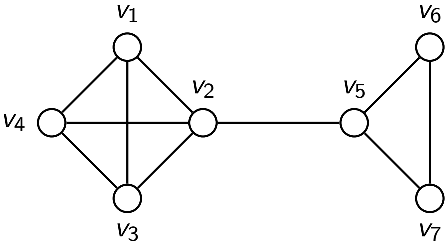
设x为连通图$G=(V,E)$的一条边，则下列命题等价：

(1) x为G的桥；

(2) x不在G的任一圈上；

(3) 存在V的一个划分$\{U,W\}$，使得对任意的$u\in U, w\in W$，x在每一条联结u与w的路上；

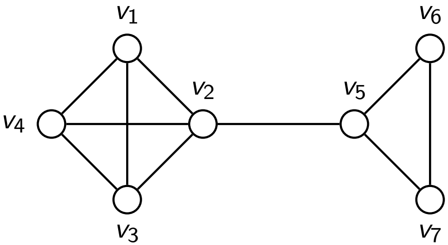
(4) 存在G的不同顶点u和v，使得边x在联结u和v的每条路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.3

设$G=(V,E)$为图，$S\subseteq E$。如果从G中去掉S中的所有边得到的图$G-S$的支数大于G的支数，而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数，则称S为G的一个割集。



习题

习题2

分别画出具有 4 、 5 、 6 、 7 个顶点的所有树（同构的只算一个）。