

习题. 设 T 是一棵 $k+1$ 个顶点的树。证明：如果图 G 的最小度 $\delta(G) \geq k$ ，则 G 有一个同构于 T 的子图。

证明。用数学归纳法证明，施归纳于 k 。

(1) 当 $k=1$ 时， T 是一棵包含两个个顶点的树，图 G 的最小度 $\delta(G) \geq 1$ ，在 G 中取某个度为1的顶点 u ，则存在另一个顶点 v ， u 和 v 邻接， u 和 v 及其与它们关联的边构成了与 T 同构的子图。

(2) 假设当 $k=n$ 时结论成立，往证当 $k=n+1$ 时结论也成立。设 T 是一棵 $n+1+1$ 个顶点的树，去掉一个叶子顶点 v ，得到一棵树 T' ，则 T' 是一棵有 $n+1$ 个顶点的树。图 G 的最小度 $\delta(G) \geq n+1 \geq n$ ，由归纳假设， G 中存在一个同构于 T' 的子图 G' 。设在 T 中与其叶子顶点 v 邻接的顶点为 u ，在 T' 与 G' 的同构中，与 u 对应的顶点为 u' 。在 G 中， $\deg u' \geq n+1$ ，由于 G' 中有 $n+1$ 个顶点， u' 在 G' 中至多有 n 条与之关联的边，因此 u' 与 G 中除去 G' 中的顶点之外的其他某个顶点 v' 邻接，在 G' 中添加顶点 v' 和边 $u'v'$ ，则得到一个与 T 同构的子图。 \square