

第五讲变换群、同构

陈建文

October 30, 2022

定义1. 设 (G_1, \circ) , $(G_2, *)$ 为两个群。如果存在一个双射 $\phi : G_1 \rightarrow G_2$, 使得 $\forall a, b \in G$,

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b),$$

则称群 G_1 与 G_2 同构, 记为 $G_1 \cong G_2$ 。 ϕ 称为从 G_1 到 G_2 的一个同构。

定义2. 设 S 为一个非空集合, 从 S 到 S 的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群, 称为 S 上的对称群, 记为 $Sym(S)$ 。当 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, $Sym(S) = S_n$ 。

定义3. $Sym(S)$ 的任意一个子群称为 S 上的一个变换群。 S_n 的任意一个子群称为一个置换群。

定理1. 任何一个群都同构于某个变换群。

证明. 设 (G, \circ) 为一个群。 $\forall a \in G$, 令 $f_a : G \rightarrow G$, $\forall x \in G$, $f_a(x) = ax$, 则 f_a 为从 G 到 G 的双射。 $(f_a$ 为单射, 这是因为 $\forall x_1, x_2 \in G$, 如果 $f_a(x_1) = f_a(x_2)$, 则 $ax_1 = ax_2$, 从而 $x_1 = x_2$; f_a 为满射, 这是因为 $\forall y \in G$, $f_a(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = y$ 。) 设 $L(G) = \{f_a | f_a : G \rightarrow G, \forall x \in G, f_a(x) = ax, a \in G\}$, 则 $L(G)$ 对映射的合成构成一个群。实际上, $\forall f_a, f_b \in L(G)$, $\forall x \in G$, $f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = abx = f_{ab}(x)$, 所以 $f_{ab} = f_a \circ f_b$, 即 $f_a \circ f_b \in L(G)$ 。因此, 合成运算在 $L(G)$ 中封闭。显然, 合成运算满足结合律。 G 上的恒等映射 $I_G = f_e \in L(G)$ 为 $L(G)$ 中的单位元素 ($\forall x \in G, f_e(x) = ex = x$)。又因为 $\forall a \in G$, $\forall x \in G$,

$$f_{a^{-1}} \circ f_a(x) = (a^{-1}a)x = x = f_e(x)$$

所以 $f_{a^{-1}}f_a = f_e$, $f_{a^{-1}}$ 为 f_a 的左逆元。因此, $L(G)$ 为一个群。

令 $\phi : G \rightarrow L(G)$, $\forall a \in G$, $\phi(a) = f_a$, 则 ϕ 为双射 (ϕ 为单射, 这是因为如果 $\forall a, b \in G$, 如果 $\phi(a) = \phi(b)$, 则 $f_a = f_b$, 从而 $f_a(e) = f_b(e)$, 即 $ae = be$, 于是 $a = b$; ϕ 为满射, 这是因为对任意的 $f \in L(G)$, $\exists a \in G$ 使得 $f = f_a$, 从而 $\phi(a) = f_a = f$)。

$\forall a, b \in G$, $\phi(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = \phi(a) \circ \phi(b)$, 因此 ϕ 为从 G 到 $L(G)$ 的一个同构, 即 $G \cong L(G)$ 。□

设 (G, \circ) 为一个 n 阶群, $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则 $G \cong L(G)$, 这里

$$L(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_i a_1 & a_i a_2 & \cdots & a_i a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in G \right\}$$

为一个置换群。

推论1. 任意一个 n 阶有限群同构于 n 次对称群 S_n 的一个 n 阶子群，亦即任意一个有限群同构于某个置换群。

课后作业题：

练习1. 设 R 为实数集合， G 为一切形如 $f(x) = ax + b$ 的从 R 到 R 的函数之集，这里 $a \in R, b \in R, a \neq 0$ ，试证： G 为一个变换群。

证明. 设 $f(x) = ax + b, g(x) = cx + d, a, b, c, d \in R, a \neq 0, c \neq 0$ ，则 $(f \circ g)(x) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$ ，这里 $ac \neq 0$ ，因此 $f \circ g \in G$ 。这验证了 G 中的函数关于函数的合成满足封闭性。

设 $h: R \rightarrow R, h(x) = x$ ，则 $h \in G$ ， h 为 G 中的函数关于函数合成运算的单位元。

对任意的 $f \in G$ ，设 $f(x) = ax + b, a, b \in R, a \neq 0$ 。

寻找 $g \in G$ ，使得 $g \circ f = h$ 。设 $g(x) = cx + d, c, d \in R, c \neq 0$ ，

则 $(g \circ f)(x) = c(ax + b) + d = cax + (cb + d) = x$ ，解方程组
$$\begin{cases} ca = 1 \\ cb + d = 0 \end{cases}$$

得 $c = \frac{1}{a}, d = -\frac{b}{a}$ ，易验证 $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 满足 $(g \circ f)(x) = x$ 。

□

练习2. 设 R 为实数集合， H 为一切形如 $f(x) = x + b$ 的从 R 到 R 的函数之集，这里 $b \in R$ ，试证： H 为上题中 G 的一个子群。

证明. 显然 H 非空，例如 $h: R \rightarrow R, \forall x \in R, h(x) = x$ ，则 $h \in H$ 。

$\forall f, g \in H, f(x) = x + b, g(x) = x + c, b, c \in R$ ，则 $(f \circ g^{-1})(x) = (x - c) + b = x + (b - c) \in H$ ，因此 H 为上题中 G 的一个子群。□

练习3. 设 R_+ 为一切正实数之集， R 为一切实数之集。 $(R_+, \times), (R, +)$ 都为群。令 $\phi: R_+ \rightarrow R, \forall x \in R_+, \phi(x) = \log_p(x)$ ，其中 p 为任意一个正实数。证明 ϕ 为同构。

证明. 显然 ϕ 为从 R_+ 到 R 的双射。

其次， $\phi(x \times y) = \log_p(x \times y) = \log_p(x) + \log_p(y) = \phi(x) + \phi(y)$ 。

因此， ϕ 为从 (R_+, \times) 到 $(R, +)$ 的同构。□