第四章无穷集合及其基数

陈建文

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{4, 5, 6\}$，则下列不是双射的是?

A. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

B. $\{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$

C. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 6)\}$

D. $\{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$

下列说法错误的是?

A. 所有的n次奇置换构成的集合与所有的n次偶置换构成的集合之间存在一个双射。

B. 设X为集合，则X上的所有等价关系构成的集合与X的所有划分构成的集合之间存在一个双射。

C. 整数集合与偶数集合之间存在一个双射。

D. 设A与B为两个互不相交的集合，则在A与$A \cup B$之间不可能存在双射。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f: \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理

集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

1. 可数集

定理

可数集的任一无限子集也是可数集。

1. 可数集

定理

设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

1. 可数集

定理

设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

1. 可数集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理

设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

1. 可数集

定理

全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

2 连续统集

定理

区间$[0, 1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

2 连续统集

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

2 连续统集

1. 对任意的$x \in R$，$x \leq x$。
2. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq x$，则$x = y$。
3. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq z$，则$x \leq z$。
   我们用$x < y$表示$x \leq y$并且$x \neq y$，$x \geq y$表示$y \leq x$，$x > y$表示$x \geq y$并且$x \neq y$。
4. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。
5. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。

2 连续统集

另外，实数集还具有如下性质：
设A_1, A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

2 连续统集

定义

凡与集合$[0, 1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理

无穷集合必包含有可数子集。

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明.

因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。
令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。 $\square$

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明.

先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。

再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理

设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^n A_i$是连续统。

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论

全体实数之集是一个连续统。

推论

全体无理数之集是一个连续统。

2 连续统集

设A_1，A_2均为连续统，则$A_1 \times A_2$为连续统。

2 连续统集

$\mathrm{K}(P)$

```
if H(P, P) == 1
        return
else Loop forever
```

3 基数及其比较

定义

集合A的基数是一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义

所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义

集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

3 基数及其比较

定义

设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

3 基数及其比较

定义

设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

显然，

$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。

$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

1. 集合的概念

集合的定义

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个**集合**。

3. 基数及其比较

设A，B为两个集合，

$|A| = |B|$：在集合A与集合B之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$：在集合A与集合B之间存在一个单射。

$|A| < |B|$：在集合A与集合B之间存在一个单射，但不存在从集合A到集合B的满射。

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

设$M = \{1, 2, 3\}$，
则$2^M = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

4 康托-伯恩斯坦定理

Proof.

We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2. We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \cdots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1, in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B.

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.

□

Proof.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \cdots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A, then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1. Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h. On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B, then $g(y)$ belongs to A_2. In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h, as was to be shown. $\square$

定义

设α,β为两个基数，A与B为两个不相交集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$A \cup B$的基数称为基数$\alpha$与$\beta$的和，记为$\alpha + \beta$。

定义

设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$A \times B$的基数称为基数$\alpha$与$\beta$的积，记为$\alpha \cdot \beta$ 或者$\alpha\beta$。

定义

设α,β为两个基数，A与B为两个集合，$|A| = \alpha, |B| = \beta$，则集合$B^A = \{f | f : A \to B\}$的基数称为$\beta$的$\alpha$次幂，记为$\beta^\alpha$。

定理

设a为可数集的基数，c为连续统的基数，则

1. $\forall n \in N \cup \{0\}, n + a = a.$
2. $\forall n \in N, n \cdot a = a.$
3. $\forall n \in N, n \cdot c = c.$
4. $a \cdot c = c.$
5. $c \cdot c = c.$
6. $2^a = c.$
7. $(2^a)^a = c.$
8. $a^a = 2^a.$

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x(x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

$$\text{其中} a^+ = a \cup \{a\}$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \to y_1 = y_2) \\ \to \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A) m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall relationR)(\exists functionF)(F \subseteq R \wedge domF = domR)$$

5 公理集合论

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \to n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \to n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \to p(n++)) \to \forall n p(n)$。

习题： (P20-5)

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题： (P47-5)

设$f : X \to Y$。试证：f为满射当且仅当对任意的$E \in 2^Y$，$f(f^{-1}(E)) = E$。

习题： (P126-6)

设R为集合X上的自反且传递的二元关系。

a)给出R的一个实例。

b)在X上定义二元关系$\sim$如下：$x \sim y$当且仅当xRy且yRx。 证明$\sim$为X上的等价关系。

c)在商集$X/\sim$上定义二元关系$\leq$：$[a] \leq [b]$当且仅当aRb。证明$\leq$为$X/\sim$上的偏序关系。