第七讲陪集、拉格朗日定理

陈建文

October 9, 2022

定义1. 设G为一个群，G的任意子集称为群子集。在2^G中借助于G的乘法引入一个代数运算，称为群子集的乘法：$\forall A, B \in 2^G$，

$$AB = \{ab | a \in A \text{且} b \in B\}$$

$\forall g \in G, A \in 2^G, \{g\}A$简写为$gA$，即$gA = \{ga | a \in A\}$。

定义2. 设H为群G的一个子群，$a \in G$，则集合aH称为子群H的一个左陪集，Ha称为H的一个右陪集。

定理1. 设H为群G的一个子群，则$\forall a \in G$，$aH = H$的充分必要条件是$a \in H$。

定理2. 设H为群G的一个子群，则$\forall a, b \in G$，$aH = bH$的充分必要条件是$a^{-1}b \in H$。

定理3. 设H为群G的一个子群，则$\forall a, b \in G$，$aH = bH$或者$aH \cap bH = \phi$。

定理4. 设H为群G的一个子群，则$\forall a, b \in G$，$|aH| = |bH|$。

定理5. 设H为群G的一个子群，则H的左右左陪集构成的集合为G的一个划分。

定义3. 设H为群G的一个子群，如果H的所有不同的左陪集的个数为有限数j，则称j为H在G中的指数，记为$j = [G : H]$，否则称H在G中的指数为无穷大。

定理6. 设G为一个有限群，H为G的一个子群，则$|G| = |H| \cdot [G : H]$。

推论1. 有限群中每个元素的阶都能整除该有限群的阶。

推论2. 如果群G的阶为素数，则G为一个循环群。

推论3. 设G为一个群，则$\forall a \in G$，$a^{|G|} = e$。

例. 阶小于等于5的群为交换群。

定理7. 设H为群G的一个子群，S_l为H的所有左陪集构成的集合，S_r为H的所有右陪集构成的集合，则$|S_l| = |S_r|$。

课后作业题：

练习1. 证明：六阶群里必有一个三阶子群。

练习2. 设p为一个素数，证明：在阶为p^m的群里一定含有一个p阶子群，其中$m \geq 1$。

练习3. 在三次对称群S_3中，找一个子群H，使得H的左陪集不等于H的右陪集。

练习4. 设H为群G的一个子群，如果左陪集aH等于右陪集Ha，即$aH = Ha$，则$\forall h \in H, ah = ha$一定成立吗?