第七讲陪集、拉格朗日定理

陈建文

October 9, 2022

课后作业题:

练习1. **证**明：六阶群里必有一个三阶子群。

证明. 设G为任意一个六阶群。在G中如果存在一个阶为3的元素a，则(a)为G的一个三阶子群；如果存在一个阶为6的元素b,则(b^2)为G的一个三阶子群；否则，由于G中每个元素的阶均整除6，此时G中除了单位元外每个元素的阶都为2，因此G为交换群。取G中的元素e, x, y，这里e为G的单位元，x和y为不是单位元的互不相同的其他两个元素，易验证此时必有$xy = e$，这是因为如果$xy \neq e$，则可以验证$\{e, x, y, xy\}$构成一个四阶群，但4不整除6，矛盾。于是，$\{e, x, y\}$构成了G中的一个三阶群。 □

练习2. 设p为一个素数，证明：在阶为p^m的群里一定含有一个p阶子群，其中$m \geq 1$。

证明. 设G为任意一个p^m阶群。在G中任取一个不是单位元的元素a，则a的阶整除p^m。由于a不是单位元，因此a的阶不为1，从而存在i，$1 \leq i \leq m$，使得a的阶为p^i。如果$i = 1$，则(a)为G的一个p阶子群；如果$i > 1$，则(a^{i-1})为G的一个p阶子群。 □

练习3. 在三次对称群S_3中，找一个子群H，使得H的左陪集不等于H的右陪集。

证明. 设$H = \{(1), (12)\}$，则$(13)H = \{(13), (132)\}$，$H(13) = \{(13), (123)\}$，$(13)H \neq H(13)$。 □

练习4. 设H为群G的一个子群，如果左陪集aH等于右陪集Ha，即$aH = Ha$，则$\forall h \in H, ah = ha$一定成立吗?

证明. 不一定成立。

例如，$H = \{(1), (123), (132)\}$为$S_3$的一个子群，$(12)H = \{(12), (13), (23)\}$，$H(12) = \{(12), (23), (13)\}$，$(12)H = H(12)$。$(12)(123) = (13)$，$(123)(12) = (23)$，$(12)(123) \neq (123)(12)$。 □