离散数学讲义

陈建文

April 11, 2022

第 三 章 关系

定义3.1. 设A与B为两个集合。一个从$A\times B$到$\{T,F\}$的映射R，称为从A到B的一个**二元关系**。$\forall(a,b)\in A\times B$，如果$(a,b)$在$R$下的象为$T$，则称$a$与$b$符合关系$R$，记为$aRb$; 如果$(a,b)$在$R$下的象为$F$，则称$a$与$b$不符合关系$R$，记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称$R$为$A$上的二元关系。

例3.1. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为一个从$2^X\times 2^X$到$\{T,F\}$的映射，

$\subseteq(\phi,\phi)=T, \subseteq(\phi,\{1\})=T, \subseteq(\phi,\{2\})=T, \subseteq(\phi,\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1\},\phi)=F, \subseteq(\{1\},\{1\})=T, \subseteq(\{1\},\{2\})=F, \subseteq(\{1\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{2\},\phi)=F, \subseteq(\{2\},\{1\})=F, \subseteq(\{2\},\{2\})=T, \subseteq(\{2\},\{1,2\})=T,$
$\subseteq(\{1,2\},\phi)=F, \subseteq(\{1,2\},\{1\})=F, \subseteq(\{1,2\},\{2\})=F, \subseteq(\{1,2\},\{1,2\})=T$

定义3.2. 设A与B为两个集合。$A\times B$的任一子集R称为从A到B的一个**二元关系**。如果$(a,b)\in R$，则称a与b符合关系R，记为aRb；如果$(a,b)\notin R$，则称a与b不符合关系R，并记为$a\not R b$。如果$A=B$，则称R为A上的二元关系。

例3.2. 设集合$X=\{1,2\}$，则2^X上的二元关系$\subseteq$可以定义为$2^X\times 2^X$的一个子集，

$$\begin{aligned}\subseteq=\{&(\phi,\phi),(\phi,\{1\}),(\phi,\{2\}),(\phi,\{1,2\}),\\&(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),\\&(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

例3.3. 自然数集$\mathbb{N}$上的小于等于关系"$\leq$"为$\mathbb{N}$上的一个二元关系。

例3.4. 设n为任一给定的自然数。对任意的两个整数m，k，如果$m-k$能被n整除，则称m与k为模n同余，并记为$m\equiv k \pmod n$。显然，$m\equiv k \pmod n$当且仅当m被n除所得到的余数与k被n除所得到的余数相等。模n同余为$\mathbb{Z}$上的一个二元关系。

定义3.3. 设$R\subseteq A\times B$，集合

$$\{x\in A|\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$$

称为R的定义域，记为$dom(R)$；集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{使得} (x, y) \in R\}$$

称为R的值域，记为$ran(R)$。

定义3.4. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，一个$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的一个$n$元关系，每个$A_i$称为$R$的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets $S_1, S_2, \cdots, S_n$ (not necessarily distinct)，R is a relation on these n sets if it is a set of n-tuples each of which has its first element from S_1, its second element from S_2, and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

定义3.5. 集合X上的二元关系R称为自反的，如果对X的任意元素x都有xRx。

例3.5. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ *(不是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ （不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$ （不是）
5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ （是）

定义3.6. 集合X上的二元关系R称为反自反的，如果对X的任意元素x都有$(x, x) \notin R$。

例3.6. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(是)*
2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ （不是）
3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）
4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（不是）

定义3.7. 集合X上的二元关系R称为对称的，如果对X的任意元素x，y，只要xRy就有yRx。

例3.7. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$*(不是)*

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（不是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.8. 集合X上的二元关系R称为反对称的，如果对X的任意元素x，y，xRy且yRx，则$x = y$。

例3.8. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

定义3.9. 集合X上的二元关系R称为传递的，如果对X的任意元素x，y，z，只要xRy且yRz，就有xRz。

例3.9. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合$X = \{1,2,3,4\}$，

1. 集合X上的二元关系$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$（是）

2. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$（不是）

3. 集合X上的二元关系$R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$（不是）

4. 集合X上的二元关系$R = \{(2,3)\}$（是）

5. 集合X上的恒等关系$I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$（是）

练习3.1. 设R为集合X上的反自反的和传递的二元关系，证明：R为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的$x \in X$，$y \in Y$，如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则由R为传递的知$(x,x) \in R$，这与R为反自反的矛盾，从而$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$不可能成立。即如果$(x,y) \in R$并且$(y,x) \in R$，则$x = y$成立，这证明了R为反对称的。

$\square$

证法二. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$并且$x \neq y$，以下证明$(y,x) \notin R$。用反证法，假设$(y,x) \in R$，则由R为传递的知$(x,x) \in R$，这与R为反自反的矛盾 □

证法三. 用反证法。假设R不是反对称的二元关系，则存在$x \in X$，$y \in X$，$(x,y) \in R$，$(y,x) \in R$并且$x \neq y$，由R为传递的知，$(x,x) \in R$，这与R为反自反的矛盾。 □

定义3.10. 设R为从集合A到集合B的二元关系，R的逆R^{-1}定义为从集合B到集合A的二元关系

$$R^{-1} = \{(y,x)|(x,y) \in R\}$$

例3.10. 设$X = \{1,2,3\}, R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$，则$R^{-1} = \{(2,1),(3,2),(3,1)\}$。

定理3.1. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R^{-1} \subseteq R$。

证明. 由R为对称的往证$R^{-1} \subseteq R$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由R为对称的知，$(x,y) \in R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证R为对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$。

□

定理3.2. 设R为集合X上的二元关系，则R为对称的当且仅当$R = R^{-1}$。

证明. 只需证$R^{-1} \subseteq R$当且仅当$R = R^{-1}$。

如果$R = R^{-1}$，则显然$R^{-1} \subseteq R$。

由$R^{-1} \subseteq R$往证$R = R^{-1}$，此时只需证$R \subseteq R^{-1}$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R$，则$(y,x) \in R^{-1}$，由$R^{-1} \subseteq R$知$(y,x) \in R$，从而$(x,y) \in R^{-1}$。 □

定理3.3. 设R和S为集合X上的二元关系，$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

定理3.4. 设R和S为集合X上的二元关系，则$(R^{-1})^{-1} = R$。

定义3.11. 设R为从集合A到集合B，S为从集合B到集合C的二元关系。R与S的合成$R \circ S$定义为从集合A到集合C的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x,z) \in A \times C | \exists y \in B \text{使得} xRy \text{且} ySz\}$$

例3.11. 设$X = \{1,2,3\}, R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，则$R \circ R = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$。

设R为集合X上的一个二元关系，R的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中，$R^0 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，$R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$。

定理3.5. 设R_1，R_2，R_3分别为从集合A到集合B，从集合B到集合C，从集合C到集合D的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\forall a \in A \forall d \in D \\
&(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
\Leftrightarrow &\exists c \in C((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow &\exists c \in C(\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
\Leftrightarrow &\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
\Leftrightarrow &\exists b \in B((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3) \\
\Leftrightarrow &(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}$$

□

定理3.6. 设R为集合X上的一个二元关系，则R为传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明. 由R为传递的往证$R \circ R \subseteq R$。

对任意的$a \in X$，$c \in X$，如果$(a, c) \in R \circ R$，则存在$b \in X$，$(a, b) \in R$并且$(b, c) \in R$，由R为传递的知$(a, c) \in R$。

由$R \circ R \subseteq R$往证R为传递的。

对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a, b) \in R$，$(b, c) \in R$，则$(a, c) \in R \circ R$，由$R \circ R \subseteq R$知$(a, c) \in R$。 □

定义3.12. 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$为一个包含$n$个元素的集合，$R$为从$X$到$Y$的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times n$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例3.12. 设集合$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

，则S的关系矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义3.13. 设$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个包含$m$个元素的集合，$R$为$X$上的一个二元关系。由$R$定义一个$m \times m$矩阵$B = (b_{ij})$如下：$\forall (x_i, y_j) \in X \times X$，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} x_i R y_j \\ 0, & \text{如果} x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵B称为关系R的矩阵。

例3.13. 设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned} R =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\ &(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\}, \end{aligned}$$

则关系R的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理3.7. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则

1. *R为自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为1;*
2. *R为反自反的，当且仅当B的对角线上的全部元素都为0;*
3. *R为对称的，当且仅当B为对称矩阵;*
4. *R为反对称的，当且仅当$i \neq j$时b_{ij}与b_{ji}不同时为1;*
5. *R为传递的，当且仅当如果$b_{ij} = 1$且$b_{jk} = 1$，则$b_{ik} = 1$。*

定理3.8. 设B为集合X上二元关系R的矩阵，则R^{-1}的矩阵为B^T。

定义3.14. 设B，C为两个布尔矩阵，B与C的逻辑乘为B与C的对应元素进行逻辑乘，所得到的布尔矩阵记为$B \wedge C$，即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B与C的逻辑加为B与C的对应元素进行逻辑加，所得到的布尔矩阵记为$B \vee C$，即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理3.9. 设R，S为从集合X到集合Y的二元关系，其矩阵分别为B_R和B_S。$R \cup S$与$R \cap S$的矩阵分别为$B_{R\cup S}$，$B_{R\cap S}$，则

$$B_{R\cup S} = B_R \vee B_S, B_{R\cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义3.15. 设A为$m \times p$布尔矩阵，B为$p \times n$布尔矩阵，A与B的布尔乘积$A \circ B$定义为矩阵C，其元素计算如下

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),\\ &i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理3.10. 设X, Y, Z为有穷集合，$|X| = m$，$|Y| = p$，$|Z| = n$。R为从X到Y的二元关系，S为从Y到Z的二元关系，R，S，$R \circ S$的矩阵分别为B_R，B_S，$B_{R \circ S}$，则$B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$。

设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$，关系$R$的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系$R \circ R$的矩阵为

$$B_{R \circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

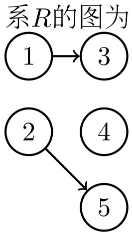
证明. 设$B_R = (a_{ij})$，$B_S = (b_{ij})$，$B_{R \circ S} = (c_{ij})$，

$$\begin{aligned} & c_{ij} = 1 \\ \Leftrightarrow & (x_i, z_j) \in R \circ S \\ \Leftrightarrow & \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\ \Leftrightarrow & (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1) \\ \Leftrightarrow & (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1 \end{aligned}$$

□

关系除了用矩阵表示外，还可以用图来表示。设X和Y为有穷集合，R为从X到Y的二元关系。当用图表示R时，先把X与Y的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序对(x, y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的"有向图"，称为关系R的图。

设$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，从X到Y的关系$R = \{(1, 3), (2, 5)\}$，则关系R的图为



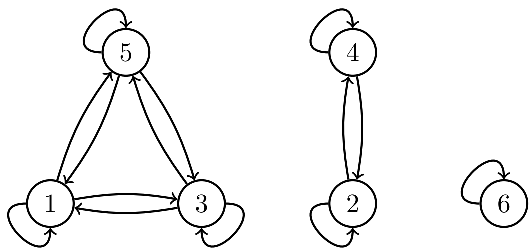
设X为有穷集合，R为集合X上的二元关系。当用图表示R时，先把X的元素在纸上用点表示，并在其旁边标上这个元素的名字。然后把R的任一序

对(x,y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的"有向图"，称为关系R的图。注意，如果$(x,x)\in R$，则在代表x的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$
\begin{aligned}
R=&\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}
$$

则关系R的图为



定理3.11. 设R为集合X上的二元关系，则

1. R为自反的，当且仅当R的图的每个顶点均有一个环；
2. R为反自反的，当且仅当R的图中没有环；
3. R为对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4. R为反对称的，当且仅当R的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线；
5. R为传递的，当且仅当在R的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定义3.16. 设R为集合X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示。即

$$R^+=\bigcap_{R\subseteq R' \text{且} R' \text{是传递的}} R'$$

定理3.12. 设R为集合X上的一个二元关系，则关系R的传递闭包R^+为包含R的传递关系。

证明. 由定义$R^+=\bigcap_{R\subseteq R'\text{且}R'\text{是传递的}} R'$，显然$R\subseteq R^+$。对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，$(x,y)\in R^+$并且$(y,z)\in R^+$，则对任意的$R'$，$R\subseteq R'$且$R'$是传递的，$(x,y)\in R'$并且$(y,z)\in R'$，由$R'$为传递的知$(x,z)\in R'$，从而$(x,z)\in R^+$，这证明了$R^+$为传递的。 $\square$

定理3.13. 设R为集合X上的一个二元关系，$a \in X$，$b \in X$，$n \geq 2$，则$(a,b) \in R^n$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{n-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{n-1},b) \in R$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 2$时，由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^2$当且仅当存在$x_1 \in X$使得$(a,x_1) \in R$且$(x_1,b) \in R$，结论成立。

假设当$n = k$时定理的结论成立，往证当$n = k+1$时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x \in X$使得$(a,x) \in R^k$且$(x,b) \in R$。由归纳假设，$(a,x) \in R^k$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，使得$(a,x_1) \in R$，$(x_1,x_2) \in R$，$\ldots$，$(x_{k-1},x) \in R$。记$x_k = x$，则$(a,b) \in R^{k+1}$当且仅当存在$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，$\ldots$，$x_{k-1} \in X$，$x_k \in X$，使得$(a,x_1) \in R, (x_1,x_2) \in R, \ldots, (x_{k-1},x_k) \in R, (x_k,b) \in R$。 □

定理3.14. 设R为集合X上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证明. 首先证明$R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

由R^+的定义，只需证$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为包含$R$的传递关系即可。$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是显然的。以下证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$为传递的。对任意的$a \in X$，$b \in X$，$c \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$并且$(b,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数$m$和$n$使得$(a,b) \in R^m$且$(b,c) \in R^n$。于是$(a,c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$，从而$(a,c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。所以，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

其次证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。对任意的$a \in X$，$b \in X$，如果$(a,b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在某个正整数$m$，使得$(a,b) \in R^m$。如果$m = 1$，则$(a,b) \in R \subseteq R^+$；如果$m > 1$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{m-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$，$(b_1,b_2) \in R$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R$。由$R \subseteq R^+$知$(a,b_1) \in R^+$，$(b_1,b_2) \in R^+$，$\ldots$，$(b_{m-1},b) \in R^+$。又因为$R^+$为传递的，所以$(a,b) \in R^+$。于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$。

因此，$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。 □

定理3.15. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数$k > n$，有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。为此，设$(a,b) \in R^k$，则存在$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1} \in X$使得$(a,b_1) \in R$, $(b_1,b_2) \in R, \cdots, (b_{k-2},b_{k-1}) \in R, (b_{k-1},b) \in R$。记$b_0 = a, b_k = b$。$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$是$X$中的$k$个元素，而$X$中仅有$n$个元素，$n < k$，所以$b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b$中必有两个相等的元素。设$b_i = b_j$，$1 \leq i < j \leq k$。于是，我们有$(a,b_1) \in R, \cdots, (b_{i-1},b_i) \in R, (b_j,b_{j+1}) \in R, \cdots, (b_{k-1},b) \in R$,故$(a,b) \in R^{k-(j-i)}$，$p_1 = k-(j-i) < k$。若$p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有$p_2 < p_1$使得$(a,b) \in R^{p_2}$。如此进行下去，必有$m \leq n$使得$(a,b) \in R^m$。所以，$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。因此，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$。 □

定理3.16. 设R为集合X上的一个二元关系，$|X| = n$，B为R的关系矩阵，B_{R^+}为R^+的关系矩阵，简记为B^+，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \cdots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合X上关系R的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE(B)
  // B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R
  $M = B$
  $A = M$
  for $i = 2$ **to** n
    $M = M \circ B$
    $A = A \vee M$
  return A // A is the zero-one matrix for R^+

WARSHALL(B)
  // B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R
  $A = B$
  for $k = 1$ **to** n
    for $i = 1$ **to** n
      for $j = 1$ **to** n
        $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$
  return A // A is the zero-one matrix for R^+

$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$
$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)})(k \geq 1)$
其中$a_{ij}^{(k)} = 1$当且仅当存在$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$使得$(x_i, x_{i_1}) \in R$，$(x_{i_1}, x_{i_2}) \in R$，$\cdots$，$(x_{i_m}, x_j) \in R$。
$a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$
$a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$

WARSHALL(B)
  // B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R
  $A = B$
  for $k = 1$ **to** n
    for $i = 1$ **to** n
      if $a_{ik} == 1$
        for $j = 1$ **to** n
          $a_{ij} = a_{ij} \vee a_{kj}$
  return A // A is the zero-one matrix for R^+

定义3.17. 集合X上的二元关系R称为**等价关系**，如果R同时满足以下三个性质：

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx;
2. R为对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy，则yRx;
3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于"$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$"的等式？这里的等价关系就是从"="抽象出来的。（1）$x=x$；（2）如果$x=y$，那么$y=x$;（3）如果$x=y$并且$y=z$，那么$x=z$。是不是显然成立呀?我们可以借助熟知的"="来理解等价关系的定义。

例3.14. 整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系为$\mathbb{Z}$上的等价关系。

证明. 只需验证整数集$\mathbb{Z}$上的模n同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$m\equiv m \pmod n$。(注：我们用$m\equiv k \pmod n$表示m与k模n同余,即$n|(m-k)$)

(2) 对称性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}$，如果$m\equiv k \pmod n$，则$n|(m-k)$，于是$n|(k-m)$，即$k\equiv m \pmod n$。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的$m\in\mathbb{Z}$，$k\in\mathbb{Z}$，$l\in\mathbb{Z}$，如果$m\equiv k \pmod n$并且$k\equiv l \pmod n$，则$n|(m-k)$并且$n|(k-l)$，从而$n|((m-k)+(k-l))$，即$n|(m-l)$，因此$m\equiv l \pmod n$。 □

练习3.2. 设$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$I_m(f)=I_m(g)$$

证明$\cong$是S上的等价关系，并求出等价类之集。

解. 首先验证$\cong$为S上的等价关系：

$\cong$为自反的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$I_m(f)=I_m(f)$;

$\cong$为对称的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，如果$I_m(f)=I_m(g)$，则$I_m(g)=I_m(f)$;

$\cong$为传递的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，$h:X\to Y$，如果$I_m(f)=I_m(g)$并且$I_m(g)=I_m(h)$，则$I_m(f)=I_m(h)$。

$S=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$，其中

$$\begin{aligned}
&f_1:X\to Y,f_1(1)=1,f_1(2)=1,f_1(3)=1,Im(f_1)=\{1\}\\
&f_2:X\to Y,f_2(1)=1,f_2(2)=1,f_2(3)=2,Im(f_2)=\{1,2\}\\
&f_3:X\to Y,f_3(1)=1,f_3(2)=2,f_3(3)=1,Im(f_3)=\{1,2\}\\
&f_4:X\to Y,f_4(1)=1,f_4(2)=2,f_4(3)=2,Im(f_4)=\{1,2\}\\
&f_5:X\to Y,f_5(1)=2,f_5(2)=1,f_5(3)=1,Im(f_5)=\{1,2\}\\
&f_6:X\to Y,f_6(1)=2,f_6(2)=1,f_6(3)=2,Im(f_6)=\{1,2\}\\
&f_7:X\to Y,f_7(1)=2,f_7(2)=2,f_7(3)=1,Im(f_7)=\{1,2\}\\
&f_8:X\to Y,f_8(1)=2,f_8(2)=2,f_8(3)=2,Im(f_8)=\{2\}
\end{aligned}$$

则$S/\cong=\{\{f_1\},\{f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\},\{f_8\}\}$ □

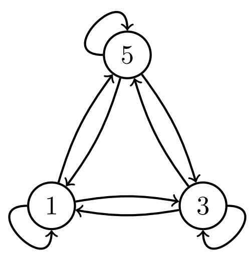
例3.15. 设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}R=\{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},\end{aligned}$$

则R为X上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。 □

证法二. 画出R的关系图进行判断。



（1）在R的图中，每个顶点均有一个环，这说明R为自反的；

（2）在R的图中,如果任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线,这说明R为对称的；

（3）在R的图中，如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线，这说明R为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系R的矩阵表示为

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1)B的对角线上的元素全为1说明R为自反的；

(2)B为对称矩阵说明R为对称的；

(3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由$B \circ B$中的每个元素小于等于B中的每个元素知R为传递的。 □

定义3.18. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，$x \in X$，X的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为x关于$\cong$的等价类，记为$[x]$，即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例3.16. 在例*3.14*中我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为$\{[0],[1],[2],[3]\}$,其中

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}\\
[1] &= \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}\\
[2] &= \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}\\
[3] &= \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}
\end{aligned}$$

□

例3.17. 设集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$上的关系R定义如下：

$$\begin{aligned}
R = &\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),\\
&(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,6)\},
\end{aligned}$$

在例*3.15*中，我们知道R为X上的等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合X上每个元素关于关系R的等价类：

$$\begin{aligned}
[1] &= \{1,3,5\}\\
[2] &= \{2,4\}\\
[3] &= \{1,3,5\}\\
[4] &= \{2,4\}\\
[5] &= \{1,3,5\}\\
[6] &= \{6\}
\end{aligned}$$

你发现了什么？有重复！于是关系R的所有等价类所构成的集合为$\{[1],[2],[6]\}$，即$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$。 □

通过以上的例子，我们发现了以下的结论：

定理3.17. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$x \cong y$当且仅当$[x] = [y]$。

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$x \cong y$往证$[x] = [y]$。这里是要证明两个集合相等。对任意的$z \in [x]$，则$x \cong z$，由$\cong$的对称性知$z \cong x$，再由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$z \cong y$，由$\cong$的对称性知$y \cong z$，从而$z \in [y]$。对任意的$z \in [y]$，则$y \cong z$，由$\cong$的传递性及$x \cong y$知$x \cong z$，从而$z \in [x]$。这证明了$[x] = [y]$。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，由$[x] = [y]$往证$x \cong y$。由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，再由$[x] = [y]$知$x \in [y]$，从而$y \cong x$，由$\cong$的对称性得$x \cong y$。 □

定义3.19. 设X为集合，X的一些非空子集形成的集族$\mathscr{A}$称为X的一个**划分**，如果$\mathscr{A}$具有性质

1. $\forall A, B \in \mathscr{A}$，如果$A \neq B$，则$A \cap B = \phi$；
2. $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} = X$

例3.18. 集合

$$\begin{aligned}
\{&\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\},\\
&\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\},\\
&\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\},\\
&\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\}
\end{aligned}$$

构成了整数集$\mathbb{Z}$的一个划分。

例3.19. 集合$\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$ 构成了集合$X = \{1,2,3,4,5,6\}$的一个划分。

定理3.18. 设$\cong$为集合X上的一个等价关系，则$\cong$的所有等价类的集合构成了集合X的一个划分。

证明. 这就是要证明$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。

对任意的$x \in X$，由$\cong$的自反性知$x \cong x$，从而$x \in [x]$，这证明了$[x]$非空。

对任意的$x \in X$,$y \in X$，如果$[x] \neq [y]$，以下证明$[x] \cap [y] = \phi$。用反证法，假设$[x] \cap [y] \neq \phi$，则存在$z \in [x] \cap [y]$，于是$z \in [x]$并且$z \in [y]$。由$z \in [x]$知$x \cong z$，由$z \in [y]$知$y \cong z$。由$\cong$的对称性可得$z \cong y$，再由$\cong$的传递性可得$x \cong y$，从而$[x] = [y]$，矛盾。

由对任意的$x \in X$，$x \in [x]$易知$\bigcup_{x \in X}[x] = X$。

综上，我们证明了$\{[x] | x \in X\}$构成了集合X的一个划分。 □

定理3.19. 设$\mathscr{A}$为集合X的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$$

则$\cong$为集合X上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合$X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\mathscr{A}=\{\{1,3,5\},\{2,4\},\{6\}\}$为集合$X$的一个划分，则

$$\begin{aligned}&\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A\\ =&(\{1,3,5\}\times\{1,3,5\})\cup(\{2,4\}\times\{2,4\})\cup(\{6\}\times\{6\})\\ =&\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(6,6)\}\end{aligned}$$

为集合X上的一个等价关系。

证明. 这就是要验证$\cong$满足自反性、对称性和传递性。

（1）对任意的$x\in X$，由$\mathscr{A}$为集合X的一个划分知存在$A\in\mathscr{A}$使得$x\in A$，从而$(x,x)\in A\times A$,于是，$(x,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足自反性。

（2）对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，从而$(y,x)\in A\times A$，于是$(y,x)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足对称性。

（3）对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果$(x,y)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，并且$(y,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，那么存在$A\in\mathscr{A}$使得$(x,y)\in A\times A$，并且存在$B\in\mathscr{A}$使得$(y,z)\in B\times B$。于是，$x\in A$，$y\in A$，$y\in B$，$z\in B$。此时，必有$A=B$，否则$A\cap B=\phi$，这与$y\in A$并且$y\in B$矛盾。从而，$x\in A$，$z\in A$，因此，$(x,z)\in A\times A$,于是$(x,z)\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A$，这说明$\cong$满足传递性。

□

本门课一个很重要的结论为“集合X上的所有等价关系之集与集合X的所有划分之集之间存在着一一对应的关系”。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合X上的所有等价关系之集到集合X的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合X上的所有等价关系之集到集合X的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗？

设$f:X\to Y$为一个映射。如果存在一个映射$g:Y\to X$使得

$$f\circ g=I_Y\text{且}g\circ f=I_X,$$

则称映射f为可逆的，而g称为f的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理：

定理3.20. 设X为一个集合，

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}=\{\cong\subseteq X\times X|\cong\text{为集合}X\text{上的一个等价关系}\},\\ &\mathbb{A}=\{\mathscr{A}\subseteq 2^X|\mathscr{A}\text{为集合}X\text{的一个划分}\},\\ &f=\{(\cong,\{[x]_{\cong}|x\in X\})|\cong\in\mathbb{R},[x]_{\cong}=\{y\in X|x\cong y\}\}\\ &g=\{(\mathscr{A},\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\times A)|\mathscr{A}\in\mathbb{A}\}\end{aligned}$$

则f为从$\mathbb{R}$到$\mathbb{A}$的双射，且$f^{-1}=g$。

如果我们能够完全理解该定理，并能够从"0"开始给出该定理的证明过程，即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明，那么，整个前三章的内容，我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程，顺藤摸瓜，这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明，直到可以从头开始说起，这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗？答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合:$X = \{1, 2, 3\}$。那么$\mathbb{R}$表示集合X上所有的等价关系构成的集合，这个集合是怎样的？这个问题不好回答吧？

让我们先看$\mathbb{A}$吧。$\mathbb{A}$表示集合X的所有划分构成的集合。这个集合比较好写，你能写出答案吗？我的答案是这样的：

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \{&\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},\\ &\{\{1, 2\}, \{3\}\},\\ &\{\{1, 3\}, \{2\}\},\\ &\{\{2, 3\}, \{1\}\},\\ &\{\{1, 2, 3\}\}\}\end{aligned}$$

对任意的$\mathscr{A} \in \mathbb{A}$，我们计算$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$,就可以得到$X$上的一个等价关系。该定理是在说，在$\mathbb{R}$和$\mathbb{A}$之间存在一个一一对应的关系，于是，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = \{&\{(1,1), (2,2), (3,3)\},\\ &\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\},\\ &\{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (2,2)\},\\ &\{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (1,1)\},\\ &\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}\}\end{aligned}$$

证明.
1. 证明f为映射。这就是要证明对于集合X上的任意一个等价关系$\cong$，$\{[x]_{\cong} | x \in X\}$为集合$X$的一个划分。这就是定理3.18。
2. 证明g为映射。这就是要证明对于集合X的任意一个划分$\mathscr{A}$，$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$为集合$X$上的一个等价关系。这就是定理3.19。
3. 证明$g \circ f = I_{\mathbb{R}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个等价关系$\cong$，$\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$。

   这里是要证明两个集合相等。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$，那么存在$x \in X$，$(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$，于是$x_1 \in [x]_{\cong}$并且$x_2 \in [x]_{\cong}$，从而$x \cong x_1$并且$x \cong x_2$，由$\cong$的对称性知$x_1 \cong x$，再由$\cong$的传递性知$x_1 \cong x_2$，即$(x_1, x_2) \in \cong$。

   对任意的$x_1 \in X$，$x_2 \in X$，如果$(x_1, x_2) \in \cong$，则$x_1 \cong x_2$，从而$x_2 \in [x_1]_{\cong}$，由$\cong$的自反性知$x_1 \cong x_1$，从而$x_1 \in [x_1]_{\cong}$。于是，$(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$。

4. 证明$f \circ g = I_{\mathbb{A}}$。这就是要证明对于集合$X$上的任意一个划分$\mathscr{A}$，关于等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$的等价类的集合就是$\mathscr{A}$。

   这里还是要证明两个集合相等。

   对任意的$x \in X$，设$[x]$为关于等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$的一个等价类，以下证明$[x] \in \mathscr{A}$。由$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = X$知存在$A \in \mathscr{A}$使得$x \in A$。如果我们能够证明$[x] = A$,则$[x] \in \mathscr{A}$得证。对任意的$y \in [x]$，则$(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$。于是，存在$B \in \mathscr{A}$使得$(x, y) \in B \times B$，如果$B \neq A$，那么$x \in A$且$x \in B$，这与$A \cap B = \phi$矛盾，从而$B = A$，因此$y \in A$。反之，对任意的$y \in A$，则$(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。这证明了$[x] = A$，从而$[x] \in \mathscr{A}$。

   对任意的$A \in \mathscr{A}$，以下证明A为等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$的一个等价类。由$A$非空知，存在$x$,$x \in A$，以下证明$A = [x]$，这里$[x]$表示$x$关于等价关系$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$的一个等价类。对任意的$y \in A$，则$(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \times A$，从而$y \in [x]$。反之，如果$y \in [x]$,则由与前面相类似的，可以证明$y \in A$。这证明了$A = [x]$。

□

定义3.20. 设$\cong$为X上的等价关系，$\cong$的所有等价类之集称为X对$\cong$的商集，记为$X/\cong$。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x]\text{为}x\text{关于} \cong \text{的等价类}\}$$

例3.20. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$\cong$为集合X的等价关系，$X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$，试求$\cong$。

定义3.21. 集合X上的二元关系R称为**偏序关系**，如果R同时满足以下三个性质:

1. R为自反的，即对X中的任意元素x，xRx;
2. R为反对称的，即对X中的任意元素x，y，如果xRy且yRx，则$x = y$;
3. R为传递的，即对X中的任意元素x，y，z，如果xRy且yRz，则xRz。

定义3.22. 设$\leq$为集合X上的一个偏序关系，则称二元组$(X, \leq)$为一个**偏序集**。

例3.21. 实数集$\mathbb{R}$上通常的"小于等于"关系$\leq$为一个偏序关系，所以$(\mathbb{R}, \leq)$为一个偏序集。

例3.22. 设S为一个集合，S的子集间的包含关系$\subseteq$为2^S上的一个偏序关系，所以$(2^{\mathbb{S}}, \subseteq)$为一个偏序集。

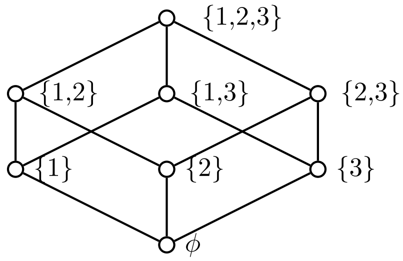
例3.23. 设集合$X = \{a, b, c, d\}$上的关系R定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则R为X上的偏序关系。

设$\leq$为集合X上的一个偏序关系。由于$\leq$为自反的，所以$\leq$的关系图中每个顶点都有一个环，略去每个顶点的环；由于$\leq$为传递的，如果$x \leq y$，且$y \leq z$，略去从顶点x到顶点z的矢线；由于$\leq$为反对称的，如果从顶点x到顶点y有矢线，则将顶点y画在顶点x的上方，并略去矢线的箭头。按这种方法画出的图称为$(X, \leq)$的哈斯图（Hasse图）。

例3.24. 设$X = \{1, 2, 3\}$，画出偏序集$(2^X, \subseteq)$的哈斯图。



定义3.23. 设$\leq$为集合X上的偏序关系，如果$\forall x, y \in X$，$x \leq y$与$y \leq x$至少有一个成立，则称$\leq$为X上的全序关系。相应的，二元组$(X, \leq)$称为全序集。

我们用$x < y$表示$x \leq y$并且$x \neq y$，$x \geq y$表示$y \leq x$，$x > y$表示$x \geq y$并且$x \neq y$。

定义3.24. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$使得$\forall x \in A$有$s \geq x$，则称s为A的**最大元素**；如果存在一个元素$t \in A$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的**最小元素**。

定义3.25. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in A$,在A中没有元素x使得$x > s$，则称s为A的**极大元素**；如果存在一个元素$t \in A$，在A中没有元素x使得$x < t$，则称t为A的**极小元素**。

定义3.26. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果存在一个元素$s \in X$使得$\forall x \in A$有$s \geq x$，则称s为A的一个**上界**；如果存在一个元素$t \in X$使得$\forall x \in A$有$t \leq x$，则称t为A的一个**下界**。

定义3.27. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$A \subseteq X$。如果A有上界且A的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为A的**上确界**，记为$\sup A$；如果A有下界且A的一切下界之集有最大元素，则这个最大下界称为A的**下确界**，记为$\inf A$。

定理3.21. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，如果X中所有链长度的最大值为n，则X的全部元素可以被分成n个非空不相交反链的并集。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n。

当$n = 1$时，X中最长链的长度为1，所以X中任意两个不同的元素不能比较，从而，X就是反链，故定理的结论成立。

假设当$n = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。设$(X, \leq)$中最长链的长度为$k + 1$，则X中有极大元。令M为X的所有极大元之集，则$M \neq \phi$且$M \neq X$。易证$X \setminus M$中最长链的长度为k。由归纳假设，$X \setminus M$可分解成k个不相交反链之并。M也是一个反链，所以X被分解成$k + 1$个反链之并。 $\square$

推论1. 设$(X, \leq)$为一个偏序集，$|X| = mn + 1$，则X中或存在一个长至少为$n + 1$的链，或存在一个长至少为$m + 1$的反链。

证明. 用反证法。假设结论不成立，则X中每个链的长度$\leq n$，并且每个反链的长度$\leq m$。设X中最长链的长度为k，则X能被分成k个不相交反链之并。这里$k \leq n$，再由每个反链的长度$\leq m$，可以得到

$$|X| \leq km \leq mn$$

这与假设$|X| = mn + 1$矛盾。 □

例3.25. 证明：每个由$n^2 + 1$个实数组成的序列$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$中必有长至少为$n + 1$的不减子序列，或有一个长至少为$n + 1$的不增子序列。

证明. 记$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}\}$，在$A$上定义二元关系$\leq'$为：$a_i \leq' a_j$当且仅当$a_i \leq a_j$并且$i \leq j$，这里$\leq$为实数间通常的小于等于关系。

易验证$\leq'$为自反的，反对称的和传递的，从而为集合A上的偏序关系。

A中或有长至少为$n + 1$的链，或有长至少为$n + 1$的反链。A中长至少为$n + 1$的链，就是序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$的不减子序列。而$A$的长至少为$n+1$的反链，就是序列$a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$的不增子序列。设反链中元素按下标递增顺序排列成

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n+1}} (i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1})$$

因为$a_{i_k} \leq' a_{i_{k+1}}$不成立，而$i_k < i_{k+1}$，所以$a_{i_k} \leq a_{i_{k+1}}$不成立，从而$a_{i_k} \geq a_{i_{k+1}}$，于是

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_{n+1}}$$

□

练习3.3. 设R为集合X上的自反且传递的二元关系。

*a)*给出R的一个实例。

*b)*在X上定义二元关系$\sim$如下：$x \sim y$当且仅当xRy且yRx。 证明$\sim$为X上的等价关系。

*c)*在商集$X/\sim$上定义二元关系$\leq$：$[a] \leq [b]$当且仅当aRb。证明$\leq$为$X/\sim$上的偏序关系。

a) 设集合$X = \{1, 2, 3\}$，$2^X = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$，$R \subseteq 2^X \times 2^X$，对任意的$A \in 2^X, B \in 2^X$，$(A, B) \in R$当且仅当在$A$与$B$之间存在一个单射，则$R$为集合$X$上的自反且传递的二元关系。

R为自反的，这是因为对任意的$A \in 2^X$，从A到A存在一个单射，例如从A到A的恒等映射就是一个单射。

R为传递的，这是因为对任意的$A \in 2^X, B \in 2^X, C \in 2^X$，如果从$A$到$B$存在一个单射$f$，从$B$到$C$存在一个单射$g$，则从$A$到$C$存在一个单射$g \circ f$。$g \circ f$为单射，这是因为对任意的$x_1 \in A, x_2 \in A$，如果$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$，则由$g$为单射知$f(x_1) = f(x_2)$，由$f$为单射知$x_1 = x_2$。

b)证明：只需证明$\sim$为自反的，对称的，传递的二元关系。

对任意的$x \in X$，由R为自反的知xRx，从而$x \sim x$，这说明$\sim$为自反的。

对任意的$x \in X$，对任意的$y \in X$，如果$x \sim y$，则xRy且yRx，即yRx且xRy，从而$y \sim x$，这说明$\sim$为对称的。

对任意的$x \in X$，对任意的$y \in X$，对任意的$z \in X$，如果$x \sim y$且$y \sim z$，则xRy且yRx，yRz且zRy，由R为传递的知xRz且zRx，从而$x \sim z$，这说明$\sim$为传递的。

综上验证了$\sim$为X上的等价关系。

c) 证明：

首先验证关于$\leq$的定义的合理性：对任意的a_1, a_2, b_1, b_2，如果$[a_1] \leq [b_1]$，$a_1 \sim a_2$，$b_1 \sim b_2$，则$a_2Ra_1, a_1Rb_1, b_1Rb_2$，由$R$的传递性知$a_2Rb_2$，从而$[a_2] \leq [b_2]$。

以下证明$\leq$为自反的，反对称的，传递的二元关系。

对任意的$x \in X$，由R为自反的知xRx，从而$[x] \leq [x]$，这说明$\leq$为自反的。

对任意的$x \in X$, $y \in X$，如果$[x] \leq [y]$并且$[y] \leq [x]$，则xRy并且yRx，从而$x \sim y$，于是$[x] = [y]$，这说明$\leq$为反对称的。

对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，如果$[x] \leq [y]$并且$[y] \leq [z]$，则xRy并且yRz，于是xRz，即$[x] \leq [z]$，这说明$\leq$为传递的。

综上验证了$\leq$为$X/\sim$上的偏序关系。

练习3.4. 设有穷偏序集$(X, \leq)$中有唯一极大元素x，则x为X的最大元素。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于X中元素的个数n。

（1）当$n = 1$时，$X = \{x\}$，则显然x为X的最大元素。

（2）假设当$n = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$n = k + 1$时结论也成立。设$|X| = k + 1$，x为X的唯一极大元素，以下证明x为X的最大元素。对任意的$y \in X$，如果$y = x$，则显然$y \leq x$。当$y \neq x$时，由x为X的唯一极大元素知y不是X的极大元素，从而存在$z \in Z$，$z > y$。关系$\{(x,y)|x \in X \setminus \{y\}, y \in X \setminus \{y\}, x \leq y\}$构成集合$X \setminus \{y\}$上的一个偏序关系。$|X \setminus \{y\}| = k$。

此时，x必为$X \setminus \{y\}$的唯一极大元。否则，如果存在元素a为$X \setminus \{y\}$的极大元，$a \neq x$，由a不是X的极大元知$a \leq y$,再由$z > y$知$z > a$，矛盾。由归纳假设，x为$X \setminus \{y\}$的最大元。由$z \leq x$及$z > y$知，$y \leq x$。 □

练习3.5. 设R，S为集合X上的等价关系。如果$R \circ S$为等价关系，则$R \circ S = (R \cup S)^+$。

证法一. 首先证明$R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$。

设T为任意一个包含$R \cup S$的传递关系。对任意的$a \in X, c \in X$,如果$(a,c) \in R \circ S$，则存在$b \in X$，$(a,b) \in R$并且$(b,c) \in S$。从而$(a,b) \in R \cup S \subseteq T$，$(b,c) \in R \cup S \subseteq T$，再由$T$为传递关系知$(a,c) \in T$。因此，$R \circ S \subseteq T$。这证明了$R \circ S \subseteq \bigcap_{R \cup S \subseteq T' \text{且} T' \text{是传递的}} T' = (R \cup S)^+$。

其次证明$(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$。

只需证明$R \circ S$为包含$R \cup S$的传递关系。对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a,c) \in R \cup S$，则$(a,c) \in R$或者$(a,c) \in S$。如果$(a,c) \in R$，此时由S为等价关系知$(c,c) \in S$，从而$(a,c) \in R \circ S$；　如果$(a,c) \in S$，此时由R为等价关系知$(a,a) \in R$，从而$(a,c) \in R \circ S$。这证明了$R \cup S \subseteq R \circ S$。由$R \circ S$为等价关系知$R \circ S$为传递的。

□

证法二. 先证$R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$。

对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a,c) \in R \circ S$，则存在$b \in X$，$(a,b) \in R$并且$(b,c) \in S$，从而$(a,b) \in R \cup S$并且$(b,c) \in R \cup S$，于是$(a,c) \in (R \cup S)^2 \subseteq (R \cup S)^+$。

再证$(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$。

对任意的$a \in X, c \in X$，由$(a,c) \in (R \cup S)^+$，往证$(a,c) \in R \circ S$。

对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a,c) \in (R \cup S)^+$，则存在自然数n，$n \geq 1$，$(a,c) \in (R \cup S)^n$。

以下用数学归纳法证明，对任意的自然数n，$n \geq 1$，$(R \cup S)^n \subseteq R \circ S$。

(1)当$n = 1$时，对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a,c) \in R \cup S$，则$(a,c) \in R$或者$(a,c) \in S$。如果$(a,c) \in R$，此时由S为等价关系知$(c,c) \in S$，从而$(a,c) \in R \circ S$；　如果$(a,c) \in S$，此时由R为等价关系知$(a,a) \in R$，从而$(a,c) \in R \circ S$。

(2)假设当$n = k(k \geq 1)$时结论成立，往证当$n = k+1$时结论也成立。

由R,S,$R \circ S$都为X上的等价关系知，$S \circ R = S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R \circ S$。

对任意的$a \in X, c \in X$，如果$(a,c) \in (R \cup S)^{k+1} = (R \cup S)^k \circ (R \cup S)$，则存在$b \in X$，$(a,b) \in (R \cup S)^k$并且$(b,c) \in (R \cup S)$。由归纳假设，$(a,b) \in R \circ S$。如果$(b,c) \in R$，那么$(a,c) \in (R \circ S) \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ S = R^2 \circ S \subseteq R \circ S$；如果$(b,c) \in S$，那么$(a,c) \in (R \circ S) \circ S = R \circ (S \circ S) = R \circ S^2 \subseteq R \circ S$。

$\square$

第 四 章