第八讲正规子群、商群

陈建文

November 4, 2022

定义1. 设G为一个群，G的任意子集称为群子集。在2^G中借助于G的乘法引入一个代数运算，称为群子集的乘法：$\forall A, B \in 2^G$，

$$AB = \{ab | a \in A且b \in B\}$$

对任意的$A \in 2^G$，定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

定理1. 设G为一个群，则$\forall A, B, C \in 2^G$，$(AB)C = A(BC)$。

定理2. 设G为一个群，则$\forall A, B \in 2^G$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

定理3. 设G为一个群，H为G的一个子群，则$HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$。

定理4. 设A，B为群G的子群，则AB为G的子群的充分必要条件为$AB = BA$。

证明. $\Rightarrow$设AB为G的子群，则$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$。

$\Leftarrow$设$AB = BA$，往证AB为G的子群。

由$(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$知$G$中的运算在$AB$中封闭。其次，$\forall a \in A, b \in B$，$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$。所以$AB$为$G$的子群。 □

例. 设H为G的一个子群且$H \neq \{e\}$。如果存在一个元素$x_0 \in G$使得$H(x_0^{-1}Hx_0) = G$，则$H \cap (x_0^{-1}Hx_0) \neq \{e\}$。

证明. 因为$x_0 \in G = H(x_0^{-1}Hx_0)$，所以$\exists h_1, h_2 \in H$使得$x_0 = h_1x_0^{-1}h_2x_0$，从而$e = h_1x_0^{-1}h_2$。于是，$x_0 = (h_1^{-1}h_2^{-1})^{-1} = h_2h_1 \in H$，从而$x_0^{-1}Hx_0 = H$。因此，$H \cap (x_0^{-1}Hx_0) = H \neq \{e\}$。 □

定义2. 设H为群G的子群，如果$\forall a \in G$，$aH = Ha$，则称H为G的正规子群。

定理5. 设H为群G的一个子群，则下列四个命题等价：

（1）H为群G的正规子群；

（2）$\forall a \in G, aHa^{-1} = H$；

（3）$\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$；

（4）$\forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H$。

证明. 先证（1）$\Leftrightarrow$（2）：

$\forall a \in G$，$aH = Ha \Leftrightarrow aHa^{-1} = H$。

再证（2）$\Leftrightarrow$（3）：

（2）$\Rightarrow$（3）显然成立。

以下证明（3）$\Rightarrow$（2）。

只需证$\forall a \in G, H \subseteq aHa^{-1}$。

$\forall h \in H$，$h = a(a^{-1}ha)a^{-1}$=a(a$^{-1}h(a^{-1})^{-1})a^{-1} \in aHa^{-1}$，这里$a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$是因为$a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subseteq H$。

□

定理6. 设H为群G的正规子群，则H的所有左陪集构成的集族S_l对群子集乘法形成一个群。

证明. $\forall aH, bH \in S_l$，$(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H \in S_l$，这验证了群子集乘法在$S_l$上封闭：。

群子集乘法显然满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$，所以$H$为$S_l$中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l$，$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$，所以，$a^{-1}H$为$aH$的左逆元。因此，$S_l$对群子集乘法构成一个群。 □

定理7. 设H为群G的正规子群，H的所有左陪集构成的集族为S_l，在S_l上定义乘法运算如下：$\forall aH, bH \in S_l, (aH)(bH) = (ab)H$，则$S_l$对于在其上定义的乘法构成一个群。

证明. 首先证明：如果$aH = a'H$，$bH = b'H$，则$(ab)H = (a'b')H$。由$(ab)^{-1}(a'b') = b^{-1}a^{-1}a'b' = (b^{-1}b')b'^{-1}a^{-1}a'b' \in H$知$(ab)H = (a'b')H$。这验证了$S_l$上乘法运算的合理性。

$\forall aH, bH, cH \in S_l, ((aH)(bH))(cH) = (abH)(cH) = ((ab)c)H, (aH)((bH)(cH)) = (aH)(bcH) = (a(bc))H$，从而$((aH)(bH))(cH) = (aH)((bH)(cH))$，这验证了乘法运算满足结合律。

$\forall aH \in S_l, H(aH) = (eH)(aH) = aH$，所以$H$为$S_l$中乘法的左单位元。

$\forall aH \in S_l$，$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$，所以，$a^{-1}H$为$aH$的左逆元。因此，$S_l$对乘法运算构成一个群。 □

定义3. 群G的正规子群H的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为G对H的商群，记为G/H。

课后作业题：

练习1. 设A和B为群G的两个有限子群，证明：

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

练习2. 利用上题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

练习3. 设G为一个n^2阶的群，H为G的一个n阶子群。证明：$\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$。

练习4. 证明：指数为2的子群为正规子群。

练习5. 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

练习6. 设H为群G的子群，N为群G的正规子群，试证：NH为群G的子群。

练习7. 设G为一个阶为$2n$的交换群，试证：G必有一个n阶商群。

练习8. 设H为群G的子群，证明：H为群G的正规子群的充分必要条件是H的任意两个左陪集的乘积还是H的一个左陪集。