习题. 设R, S为集合X上的等价关系，证明：$(R\cup S)^+$为X上的等价关系。

证明. 以下验证$(R\cup S)^+$为集合X上自反的，对称的和传递的二元关系。

首先验证自反性：对任意的$x \in X$，由R为等价关系知$(x,x) \in R$，从而$(x,x)\in R\cup S\subseteq (R\cup S)^+$。

其次验证对称性：对任意的$x \in X, y \in X$，如果$(x,y) \in (R\cup S)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty}(R\cup S)^n$，则存在$m$使得$(x,y) \in R^m$。 于是存在$x_1, x_2, \ldots, x_{m-1} \in X$使得$(x,x_1)\in R\cup S$，$(x_1,x_2)\in R\cup S$，$\ldots$，$(x_{m-1},y)\in R\cup S$。由$R$和$S$都为 X上的等价关系知R和S都是对称的，从而易验证$(y,x_{m-1})\in R\cup S$，$\ldots$，$(x_2,x_1)\in R\cup S$，$(x_1,x)\in R\cup S$，从而$(y,x)\in (R\cup S)^m\subseteq (R\cup S)^+$。

最后验证传递性：显然$(R\cup S)^+$为传递的。 $\square$