习题 1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系?

解. 设集合$X = \{1,2\}$，X上的二元关系$R = \{(1,1)\}$为一个既不是自反的又不是反自反的二元关系。 $\square$

习题 2. 是否存在一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系?

解. 设集合$X = \{1,2,3\}$，X上的二元关系$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2)\}$为一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系。 $\square$

习题 3. 设R和S为集合X上的二元关系，下列命题哪些成立：

*a)*如果R与S为自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为自反的；
*b)*如果R与S为反自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反自反的；
*c)*如果R与S为对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为对称的；
*d)*如果R与S为反对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反对称的；
*e)*如果R与S为传递的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为传递的；
*f)*如果R与S不是自反的，则$R \cup S$不是自反的；
*g)*如果R为自反的，则R^c为反自反的；
*h)*如果R与S为传递的，则$R \setminus S$为传递的。

解. a) b) c) g)成立。 $\square$

习题 4. 设R与S为集合X上的二元关系，证明：

a) $(R^{-1})^{-1} = R$;
b)$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
c)$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
*d)*如果$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

a) $(R^{-1})^{-1} = R$;

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，$(x,y) \in (R^{-1})^{-1}$等价于$(y,x) \in R^{-1}$，等价于$(x,y) \in R$。 $\square$

b)$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，$(x,y) \in (R \cup S)^{-1}$等价于$(y,x) \in R \cup S$，等价于$(y,x) \in R$或者$(y,x) \in S$，等价于$(x,y) \in R^{-1}$或者$(x,y) \in S^{-1}$，等价于$(x,y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$。 $\square$

c)$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，$(x,y) \in (R \cap S)^{-1}$等价于$(y,x) \in R \cap S$，等价于$(y,x) \in R$并且$(y,x) \in S$，等价于$(x,y) \in R^{-1}$并且$(x,y) \in S^{-1}$，等价于$(x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$。 $\square$

d)如果$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果$(x,y) \in R^{-1}$，则$(y,x) \in R$，由$R \subseteq S$知$(y,x) \in S$，因此$(x,y) \in S^{-1}$。 $\square$

习题 5. 设R为集合X上的二元关系。证明：$R\cup R^{-1}$为集合X上对称的二元关系。

证法一. 对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果$(x,y)\in R\cup R^{-1}$，则$(x,y)\in R$或者$(x,y)\in R^{-1}$，从而$(y,x)\in R^{-1}$或者$(y,x)\in R$，即$(y,x)\in R\cup R^{-1}$，因此$R\cup R^{-1}$为集合X上对称的二元关系。 □

证法二. $(R\cup R^{-1})^{-1}=R^{-1}\cup(R^{-1})^{-1}=R^{-1}\cup R=R\cup R^{-1}$ □

习题 6. "父子"关系的平方是什么关系?

解. "父子"关系的平方是"爷孙"关系。 □

习题 7. 设R与S为集合X上的二元关系，下列哪些命题为真?

*a)*如果R，S都是自反的，则$R\circ S$也是自反的;

*b)*如果R，S都是反自反的，则$R\circ S$也是反自反的;

*c)*如果R，S都是对称的，则$R\circ S$也是对称的;

*d)*如果R，S都是反对称的，则$R\circ S$也是反对称的;

*e)*如果R，S都是传递的，则$R\circ S$也是传递的。

解. a)为真。 □

习题 8. 设R，S为集合X上的两个满足$R\circ S\subseteq S\circ R$的对称关系。证明：$R\circ S=S\circ R$。

证明. 只需证$S\circ R\subseteq R\circ S$。

由已知条件，$R\circ S\subseteq S\circ R$，两边求逆得$(R\circ S)^{-1}\subseteq(S\circ R)^{-1}$，从而$S^{-1}\circ R^{-1}\subseteq R^{-1}\circ S^{-1}$，由$R$和$S$为对称的知$S\circ R\subseteq R\circ S$。 □

习题 9. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

解. 首先验证$\cong$为S上的等价关系：

$\cong$为自反的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$f(1)+f(2)+f(3)=f(1)+f(2)+f(3)$;

$\cong$为对称的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，如果$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$，则$g(1)+g(2)+g(3)=f(1)+f(2)+f(3)$;

$\cong$为传递的，这是因为对任意的映射$f:X\to Y$，$g:X\to Y$，$h:X\to Y$，如果$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$并且$g(1)+g(2)+g(3)=h(1)+h(2)+h(3)$，则$f(1)+f(2)+f(3)=h(1)+h(2)+h(3)$。

$S=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$， 其中

$$
\begin{aligned}
&f_1:X\to Y, f_1(1)=1, f_1(2)=1, f_1(3)=1, f_1(1)+f_1(2)+f_1(3)=3\\
&f_2:X\to Y, f_2(1)=1, f_2(2)=1, f_2(3)=2, f_2(1)+f_2(2)+f_2(3)=4\\
&f_3:X\to Y, f_3(1)=1, f_3(2)=2, f_3(3)=1, f_3(1)+f_3(2)+f_3(3)=4\\
&f_4:X\to Y, f_4(1)=1, f_4(2)=2, f_4(3)=2, f_4(1)+f_4(2)+f_4(3)=5\\
&f_5:X\to Y, f_5(1)=2, f_5(2)=1, f_5(3)=1, f_5(1)+f_5(2)+f_5(3)=4\\
&f_6:X\to Y, f_6(1)=2, f_6(2)=1, f_6(3)=2, f_6(1)+f_6(2)+f_6(3)=5\\
&f_7:X\to Y, f_7(1)=2, f_7(2)=2, f_7(3)=1, f_7(1)+f_7(2)+f_7(3)=5\\
&f_8:X\to Y, f_8(1)=2, f_8(2)=2, f_8(3)=2, f_8(1)+f_8(2)+f_8(3)=6
\end{aligned}
$$

则$S/\cong=\{\{f_1\},\{f_2,f_3,f_5\},\{f_4,f_6,f_7\},\{f_8\}\}$ □

习题 10. 设集合$X=\{1,2,3\}$， $Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{g^{-1}(\{y\})|y\in Y\}$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

解. $S=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$， 其中

$$
\begin{aligned}
&f_1:X\to Y, f_1(1)=1, f_1(2)=1, f_1(3)=1, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,2,3\},\phi\}\\
&f_2:X\to Y, f_2(1)=1, f_2(2)=1, f_2(3)=2, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,2\},\{3\}\}\\
&f_3:X\to Y, f_3(1)=1, f_3(2)=2, f_3(3)=1, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,3\},\{2\}\}\\
&f_4:X\to Y, f_4(1)=1, f_4(2)=2, f_4(3)=2, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1\},\{2,3\}\}\\
&f_5:X\to Y, f_5(1)=2, f_5(2)=1, f_5(3)=1, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{2,3\},\{1\}\}\\
&f_6:X\to Y, f_6(1)=2, f_6(2)=1, f_6(3)=2, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{2\},\{1,3\}\}\\
&f_7:X\to Y, f_7(1)=2, f_7(2)=2, f_7(3)=1, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{3\},\{1,2\}\}\\
&f_8:X\to Y, f_8(1)=2, f_8(2)=2, f_8(3)=2, \{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\phi,\{1,2,3\}\}
\end{aligned}
$$

易验证$\cong$为S上的自反的、对称的、传递的二元关系，从而为S上的等价关系。

$S/\cong=\{\{f_1,f_8\},\{f_2,f_7\},\{f_3,f_6\},\{f_4,f_5\}\}$ □

习题 11. 由置换$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&4&7\end{pmatrix}$确定了集合$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$上的一个二元关系$\cong$：对任意的$i,j\in X$，$i\cong j$当且仅当$i$与$j$在$\sigma$的循环分解式的同一个循环置换中。 证明：$\cong$为集合$X$上的等价关系，求$X/\cong$。

解. 易验证$\cong$为S上的自反的、对称的、传递的二元关系，从而为S上的等价关系。

$X/\cong\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{4,8,7\}\}$

□

习题 12. 给出集合$X=\{1,2,3,4\}$上的两个等价关系R与S，使得$R\circ S$不是等价关系。

解. 设$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$，$S=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$， 则$R$和$S$都为集合$X$上的等价关系，但由于$(1,3)\in R\circ S$，$(3,1)\notin R\circ S$，$R\circ S$不是等价关系。 □

习题 13. 设R为集合X上的一个二元关系，试证：R为一个等价关系，当且仅当以下两条成立（1）对任意的x，xRx；（2）如果xRy且xRz，则yRz。

证明. 设R为等价关系，往证（1）（2）成立。由R为自反的知（1）成立。其次，对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果xRy且xRz，由R的对称性知yRx，再由R的传递性知yRz。

假设（1）（2）成立，往证R为等价关系。由（1）知R为自反的。其次，对任意的$x\in X$，$y\in X$，如果xRy，由（1）知xRx，再由（2）知yRx，这说明R为对称的。最后，对任意的$x\in X$，$y\in X$，$z\in X$，如果xRy并且yRz，由R为对称的知yRx，再由（2）知xRz，这说明R为传递的。

□

习题 14. 设X为一个集合，$|X|=n$，试求：

*a)*集合X上自反二元关系的个数；

*b)*集合X上反自反二元关系的个数；

*c)*集合X上对称二元关系的个数；

*d)*集合X上反对称二元关系的个数。

解. a)集合X上自反二元关系的个数：2^{n^2-n}

b)集合X上反自反二元关系的个数：2^{n^2-n}

c)集合X上对称二元关系的个数：$2^{\frac{n^2+n}{2}}$

d)集合X上反对称二元关系的个数：$2^n\cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ □

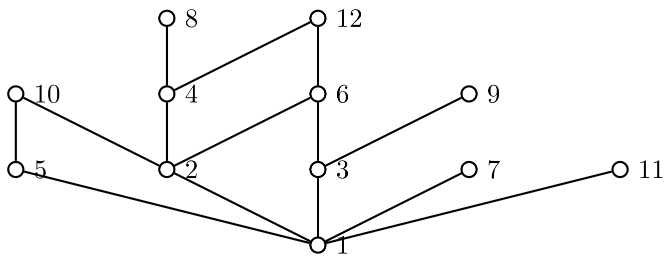
习题 15. 是否存在一个偏序关系$\leq$，使$(X,\leq)$中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果存在，请给出一个具体例子；如果不存在，请证明之。

解. 存在。偏序集$(R\cup\{i\},\leq)$上有唯一极大元素i，但没有最大元素。

这里$\leq$为实数集上的小于等于关系，复数i与任意实数都不可比较，因此没有元素比它大，它就是极大元。 □

习题 16. 令$S=\{1,2,\cdots,12\}$，画出偏序集$(S,|)$的$Hasse$图，其中$|$为整除关系。它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素。

解.



极大元有6个：$7, 8, 9, 10, 11, 12$

极小元有1个：1 $\square$