习题. 设M为一个非空集合，$\phi : M \to M$，$N \subseteq M$。令$\mathscr{A} = \{P | P \subseteq M$且$N \subseteq P, \phi(P) \subseteq P\}$， $G = \cap_{P \in \mathscr{A}} P$。试证：*(1)*$G \in \mathscr{A}$；*(2)*$N \cup \phi(G) = G$。

证明. (1) 易验证$G \subseteq M$且$N \subseteq G$，$\phi(G) \subseteq G$，从而$G \in \mathscr{A}$。

(2) 由$N \subseteq G$，$\phi(G) \subseteq G$知$N \cup \phi(G) \subseteq G$。

以下证明$G \subseteq N \cup \phi(G)$。首先验证

$$G = N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots \tag{1}$$

由此易得$G \subseteq N \cup \phi(G)$。

(1)式就是要证$\cap_{P \in \mathscr{A}} P = N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots$。首先验证$N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots \in \mathscr{A}$，从而$\cap_{P \in \mathscr{A}} P \subseteq N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots$。其次验证对任意的$P \in \mathscr{A}$，$N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots \subseteq P$, 从而$N \cup \phi(N) \cup \ldots \cup \phi^n(N) \cup \ldots \subseteq \cap_{P \in \mathscr{A}} P$。 □