

第二讲半群、么半群与群

陈建文

September 21, 2022

定义1. 设“ \circ ”为非空集合 S 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in S$,

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

则称集合 S 对“ \circ ”运算形成一个半群 (*semigroup*)，并记为 (S, \circ) 。

例. 正整数集合 Z_+ 对“ $+$ ”运算构成一个半群。

$$\forall a, b, c \in Z_+ (a + b) + c = a + (b + c)$$

定义2. 如果一个半群中的二元代数运算满足交换律，则称此半群为交换半群。

例. 设 S 为一切形如

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in N$$

的 2×2 矩阵之集，则 S 对矩阵的乘法构成一个不可交换的半群。

$\forall d \in N$, 2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为左单位元素。于是， $(S, *)$ 有无穷多个左单位元素，然而它却没有右单位元素。

定理1. 如果半群 (S, \circ) 中既有左单位元素又有右单位元素，则左单位元素与右单位元素相等，从而有单位元素且单位元素是唯一的。

定义3. 有单位元素的半群称为独异点 (*monoid*)，或称为么半群。

例. 自然数集合 N 对加法运算“ $+$ ”构成么半群，单位元为0。正整数集合 Z_+ 对乘法运算“ \times ”构成么半群，单位元为1。

例. 设 S 为任意一个非空集合，则 $(2^S, \cup, \phi)$ 和 $(2^S, \cap, S)$ 都为么半群。

定义4. 如果一个么半群中的二元代数运算满足交换律，则称此么半群为交换么半群。

例. 设 S 为非空集合， $M(S) = \{f | f : S \rightarrow S\}$ ，则 $M(S)$ 对映射的合成构成了一个以 I_S 为单位元的么半群 $(M(S), \circ, I_S)$ ，它是不可交换么半群。

例. 设 M_n 为所有 $n \times n$ 实矩阵构成的集合, 则 M_n 对矩阵的乘法构成了一个以 I_n 为单位元的幺半群 $(M_n, *, I_n)$ 。

定义5. 设 (S, \circ, e) 为一个幺半群, $a \in S$ 。如果存在 $a_l \in S$ 使得 $a_l \circ a = e$, 则称 a_l 为 a 的左逆元素; 如果存在 $a_r \in S$ 使得 $a \circ a_r = e$, 则称 a_r 为 a 的右逆元素; 如果存在 $b \in S$ 使得 $b \circ a = a \circ b = e$, 则称 b 为 a 的逆元素。

定理2. 如果幺半群 (S, \circ, e) 中的元素 a 既有左逆元素 a_l , 又有右逆元素 a_r , 则 $a_l = a_r$ 。于是, a 有逆元素且 a 的逆元素是唯一的, 记为 a^{-1} 。

定义6. 每个元素都有逆元素的幺半群称为群。

例. 全体整数集合 Z , 全体有理数集合 Q , 全体实数集合 R , 全体复数集合 C 对通常的加法运算构成群; 全体非零有理数集合 Q^* , 全体非零实数集合 R^* , 全体非零复数集合 C^* 对通常的乘法运算构成群。

定义7. 如果一个群中的二元代数运算满足交换律, 则称此群为交换群, 又称为 $Abel$ 群。

例. 设 S 为一个非空集合, 从 S 到 S 的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群, 称为 S 上的对称群, 记为 $Sym(S)$ 。当 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, $Sym(S) = S_n$ 。

例. 设 M_n 为所有可逆 $n \times n$ 实矩阵构成的集合, 则 M_n 对矩阵的乘法构成了一个以 I_n 为单位元的群 $(M_n, *, I_n)$ 。

定义8. 群 (G, \circ) 称为有限群, 如果 G 为有限集。 G 的基数称为群 G 的阶。如果 G 含有无穷多个元素, 则称 G 为无限群。

课后作业题:

练习1. 给出一个半群, 它有无穷多个右单位元素。

练习2. 设 (S, \circ) 为一个半群, $a \in S$ 称为左消去元素, 如果 $\forall x, y \in S$, 有 $a \circ x = a \circ y$, 则一定有 $x = y$ 。试证: 如果 a 和 b 均为左消去元, 则 $a \circ b$ 也是左消去元。

练习3. 设 Z 为整数集合, $M = Z \times Z$ 。在 M 上定义二元运算 \circ 如下:

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M, (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

试证:

(1) M 对上述定义的代数运算构成一个幺半群。

(2) 如果 $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, 则 (x_1, x_2) 是左消去元。

(3) 运算“ \circ ”满足交换率。

练习4. 证明: 有限半群中一定有一个元素 a 使得 $a \circ a = a$ 。

练习5. 设 R 为实数集合, $S = \{(a, b) | a \neq 0, a, b \in R\}$ 。在 S 上利用通常的加法和乘法定义二元运算“ \circ ”如下:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$$

验证 (S, \circ) 为群。

练习6. n 次方程 $x^n = 1$ 的根称为 n 次单位根，所有 n 次单位根之集记为 U_n 。证明： U_n 对通常的复数乘法构成一个群。

练习7. 令

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

试证： G 对矩阵乘法构成一个群。