习题 1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系?

习题 2. 是否存在一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系?

习题 3. 设R和S为集合X上的二元关系，下列命题哪些成立：

*a)*如果R与S为自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为自反的;
*b)*如果R与S为反自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反自反的;
*c)*如果R与S为对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为对称的;
*d)*如果R与S为反对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反对称的;
*e)*如果R与S为传递的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为传递的;
*f)*如果R与S不是自反的，则$R \cup S$不是自反的;
*g)*如果R为自反的，则R^c为反自反的;
*h)*如果R与S为传递的，则$R \setminus S$为传递的。

习题 4. 设R与S为集合X上的二元关系，证明：

a) $(R^{-1})^{-1} = R$;
b)$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
c)$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
*d)*如果$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

习题 5. 设R为集合X上的二元关系。证明：$R\cup R^{-1}$为集合X上对称的二元关系。

习题 6. "父子"关系的平方是什么关系?

习题 7. 设R与S为集合X上的二元关系，下列哪些命题为真?

*a)*如果R，S都是自反的，则$R\circ S$也是自反的;

*b)*如果R，S都是反自反的，则$R\circ S$也是反自反的;

*c)*如果R，S都是对称的，则$R\circ S$也是对称的;

*d)*如果R，S都是反对称的，则$R\circ S$也是反对称的;

*e)*如果R，S都是传递的，则$R\circ S$也是传递的。

习题 8. 设R，S为集合X上的两个满足$R\circ S\subseteq S\circ R$的对称关系。证明：$R\circ S=S\circ R$。

习题 9. 设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

习题 10. 设集合$X=\{1,2,3\}$， $Y=\{1,2\}$，$S=\{f|f:X\to Y\}$。S上的二元关系$\cong$定义如下：$\forall f,g\in S$，$f\cong g$当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{g^{-1}(\{y\})|y\in Y\}$$

证明$\cong$为S上的等价关系，并求出等价类之集。

解. $S=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\}$， 其中

$$\begin{aligned}
&f_1:X\to Y,f_1(1)=1,f_1(2)=1,f_1(3)=1,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,2,3\},\phi\}\\
&f_2:X\to Y,f_2(1)=1,f_2(2)=1,f_2(3)=2,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,2\},\{3\}\}\\
&f_3:X\to Y,f_3(1)=1,f_3(2)=2,f_3(3)=1,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1,3\},\{2\}\}\\
&f_4:X\to Y,f_4(1)=1,f_4(2)=2,f_4(3)=2,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{1\},\{2,3\}\}\\
&f_5:X\to Y,f_5(1)=2,f_5(2)=1,f_5(3)=1,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{2,3\},\{1\}\}\\
&f_6:X\to Y,f_6(1)=2,f_6(2)=1,f_6(3)=2,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{2\},\{1,3\}\}\\
&f_7:X\to Y,f_7(1)=2,f_7(2)=2,f_7(3)=1,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\{3\},\{1,2\}\}\\
&f_8:X\to Y,f_8(1)=2,f_8(2)=2,f_8(3)=2,\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}=\{\phi,\{1,2,3\}\}
\end{aligned}$$

易验证$\cong$为S上的自反的、对称的、传递的二元关系，从而为S上的等价关系。

$S/\cong=\{\{f_1,f_8\},\{f_2,f_7\},\{f_3,f_6\},\{f_4,f_5\}\}$ □

习题 11. 由置换$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&4&7\end{pmatrix}$确定了集合$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$上的一个二元关系$\cong$：对任意的$i,j\in X$，$i\cong j$当且仅当$i$与$j$在$\sigma$的循环分解式的同一个循环置换中。 证明：$\cong$为集合$X$上的等价关系，求$X/\cong$。

习题 12. 给出集合$X=\{1,2,3,4\}$上的两个等价关系R与S，使得$R\circ S$不是等价关系。

习题 13. 设R为集合X上的一个二元关系，试证：R为一个等价关系，当且仅当以下两条成立（1）对任意的x，xRx；（2）如果xRy且xRz，则yRz。

证明. 设R为等价关系，往证（1）（2）成立。由R为自反的知（1）成立。其次，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，如果xRy且xRz，由R的对称性知yRx，再由R的传递性知yRz。

假设（1）（2）成立，往证R为等价关系。由（1）知R为自反的。其次，对任意的$x \in X$，$y \in X$，如果xRy，由（1）知xRx，再由（2）知yRx，这说明R为对称的。最后，对任意的$x \in X$，$y \in X$，$z \in X$，如果xRy并且yRz，由R为对称的知yRx，再由（2）知xRz，这说明R为传递的。

□

习题 14. 设X为一个集合，$|X| = n$，试求：

*a)*集合X上自反二元关系的个数；
*b)*集合X上反自反二元关系的个数；
*c)*集合X上对称二元关系的个数；
*d)*集合X上反对称二元关系的个数。

习题 15. 是否存在一个偏序关系$\leq$，使$(X, \leq)$中有唯一极大元素，但没有最大元素？如果有，请给出一个具体例子；如果没有，请证明之。

习题 16. 令$S = \{1, 2, \cdots, 12\}$，画出偏序集$(S, |)$的$Hasse$图，其中$|$为整除关系。它有几 个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素。