习题 1. 写出方程$x^2+2x+1=0$的根所构成的集合。

解. {-1} □

习题 2. 设有n个集合A_1，A_2，$\ldots$，A_n，且$A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\subseteq A_1$，试证

$$A_1=A_2=\ldots=A_n$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n。

１．当$n=2$时，$A_1\subseteq A_2\subseteq A_1$，$A_1=A_2$显然成立。

２．假设当$n=k(k\geq 2)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。

设$A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_k\subseteq A_{k+1}\subseteq A_1$，则由$A_k\subseteq A_{k+1}\subseteq A_1$知$A_k\subseteq A_1$, 于是$A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_k\subseteq A_1$，由归纳假设,$A_1=A_2=\ldots=A_k$。

由$A_1=A_k$，$A_{k+1}\subseteq A_1$知$A_{k+1}\subseteq A_k$，再由$A_k\subseteq A_{k+1}$知，$A_k=A_{k+1}$。

于是$A_1=A_2=\ldots=A_k=A_{k+1}$，结论得证。 □

习题 3. 设集合$S=\{\phi,\{\phi\}\}$，则$2^S=\underline{\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}}$。

习题 4. 设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

1.当$n=0$时，$S=\phi$，$2^\phi=\{\phi\}$有1个元素，结论成立。

2.假设当$n=k(k\geq 0)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。设集合S中有$k+1$个元 素s_1，s_2，$\ldots$，s_k，s_{k+1}，记

$$S_1=2^{S\setminus\{s_{k+1}\}}$$
$$S_2=\{X\cup\{s_{k+1}\}|X\subseteq S\setminus\{s_{k+1}\}\}$$

则$2^S=S_1\cup S_2$。

考虑映射$f:S_1\to S_2$，对任意的$X\in S_1$，$f(X)=X\cup\{s_{k+1}\}$。易验证f为从S_1到S_2的双射，从而$|S_1|=|S_2|$。

显然$S_1\cap S_2=\phi$，再由归纳假设，$|S_1|=2^k$，从而$|2^S|=|S_1|+|S_2|=2^k+2^k=2^{k+1}$。

□

习题 5. 设A，B为集合，试证

$$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\phi$$

证明. 如果$B=\phi$，显然$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$。

由$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$,往证$B=\phi$。用反证法，假设$B\neq\phi$，则存在$x\in B$，于是$x\in(A\setminus B)\cup B$，但是$x\notin(A\cup B)\setminus B$，这与$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B$矛盾。 □

习题 6. 设A，B为集合，试证$A=\phi\Leftrightarrow B=A\triangle B$。

证法一. 当$A=\phi$时，显然$B=A\triangle B$。

设$B=A\triangle B$，往证$A=\phi$。用反证法。设$A\neq\phi$，则存在$x\in A$。此时，如果$x\in B$，则$x\notin A\triangle B=B$，矛盾；如果$x\notin B$，则$x\in A\triangle B=B$，也矛盾。 □

证法二.

$$
\begin{aligned}
& B = A \triangle B \\
\Leftrightarrow & B \triangle B = (A \triangle B) \triangle B \\
\Leftrightarrow & \phi = A \triangle (B \triangle B) \\
\Leftrightarrow & \phi = A \triangle \phi \\
\Leftrightarrow & \phi = A
\end{aligned}
$$

□

习题 7. 设A，B为集合，证明$A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \setminus C$。

证明. 先证$A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B \setminus C$。

对任意的$x \in A \setminus (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \notin B \cup C$，即$x \in A$并且$x \notin B$，$x \notin C$，故$x \in A \setminus B \setminus C$。

再证$A \setminus B \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$。

对任意的$x \in A \setminus B \setminus C$，则$x \in A$并且$x \notin B$，$x \notin C$，于是$x \in A$并且$x \notin B \cup C$，故$A \setminus (B \cup C)$。

□

习题 8. 设A, B, C为集合，证明$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

证明. 先证$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

对任意的$x \in (A \cup B) \setminus C$，则$x \in A \cup B$并且$x \notin C$，从而$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \notin C$，于是，$x \in A$并且$x \notin C$，或者$x \in B$并且$x \notin C$， 即$x \in A \setminus C$或者$x \in B \setminus C$，因此$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

再证$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$。

对任意的$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$，则$x \in A \setminus C$或者$x \in B \setminus C$，即$x \in A$并且$x \notin C$，或者$x \in B$并且$x \notin C$，从而$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \notin C$，于是$x \in A \cup B$并且$x \notin C$，因此$x \in (A \cup B) \setminus C$。 □

习题 9. 设A, B, C为集合，证明$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

证明. 先证$(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

对任意的$x \in (A \cap B) \setminus C$，则$x \in A \cap B$并且$x \notin C$，于是$x \in A$，$x \in B$，并且$x \notin C$，从而$x \in A \setminus C$并且$x \in B \setminus C$，因此$x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

再证$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus C$。

对任意的$x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$，则$x \in A \setminus C$并且$x \in B \setminus C$，于是$x \in A$，$x \in B$，并且$x \notin C$，从而$x \in A \cap B$并且$x \notin C$，因此$x \in (A \cap B) \setminus C$。

□

习题 10. 设A, B, C都是集合，若$A \cup B = A \cup C$且$A \cap B = A \cap C$，试证$B = C$。

证法一. 先证$B \subseteq C$。

对任意的$x \in B$，分两种情况讨论:

1)若$x \in A$:此时$x \in A \cap B$，由$A \cap B = A \cap C$知$x \in A \cap C$，从而$x \in C$。

2)若$x \notin A$:此时由$x \in B$知$x \in A \cup B$，再由$A \cup B = A \cup C$知$x \in A \cup C$，再由$x \notin A$知$x \in C$。

综合以上两种情况知对任意的x,当$x \in B$时$x \in C$，即$B \subseteq C$。

由B和C的对称性知$C \subseteq B$，因此$B = C$。 □

证法二. $B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap B)=C\cap(A\cup B)=C\cap(A\cup C)=C$ $\square$

证法三. 由已知条件知$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup C)\setminus(A\cap C)$，从而$A\triangle B=A\triangle C$，于是$A\triangle(A\triangle B)=A\triangle(A\triangle C)$, 由对称差运算的结合律知$(A\triangle A)\triangle B=(A\triangle A)\triangle C$，即$\phi\triangle B=\phi\triangle C$，从而$B=C$。 $\square$

习题 11. 下列等式是否成立？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由。

a) $(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$;

b)$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;

c)$A\setminus(B\cup C)=(A\cup B)\setminus C$。

解. a)结论不成立。这是因为设$A=\phi$，$B=\phi$，$C=\{1\}$，则$(A\setminus B)\cup C=\{1\}$，而$A\setminus(B\setminus C)=\phi$，$(A\setminus B)\cup C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

b)结论不成立。这是因为设$A=\{1\}$，$B=\phi$，$C=\{1\}$，则$A\cup(B\setminus C)=\{1\}$，而$(A\cup B)\setminus C=\phi$，$A\cup(B\setminus C)\neq(A\cup B)\setminus C$。

c)结论不成立。这是因为设$A=\phi$，$B=\{1\}$，$C=\phi$，则$A\setminus(B\cup C)=\phi$，$(A\cup B)\setminus C=\{1\}$，$A\setminus(B\cup C)\neq(A\cup B)\setminus C$ $\square$

习题 12. 下列命题中哪个是真的？*(B)*

A. 对任意集合A，B，$2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$。

B. 对任意集合A，B，$2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$。

C. 对任意集合A，B，$2^{A\setminus B}=2^A\setminus 2^B$。

D. 对任意集合A，B，$2^{A\triangle B}=2^A\triangle 2^B$。

习题 13. 填空：设A，B为两个集合。

a) $x\notin A\cup B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\wedge x\notin B}$

b) $x\notin A\cap B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\vee x\notin B}$

c) $x\notin A\setminus B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\vee x\in B}$

d) $x\notin A\triangle B\Leftrightarrow \underline{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\notin A\wedge x\notin B)}$

习题 14. 设A，B，C为任意三个集合，下列集合表达式中哪一个等于$A\setminus(B\cap C)$？*(B)*

A. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

B. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

C. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

D. $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$

习题 15. 设A,B,C为集合，并且$A\cup B=A\cup C$，则下列哪个等式成立？*(D)*

A.$B=C$

B.$A\cap B=A\cap C$

C.$A\cap B^c=A\cap C^c$

D.$A^c\cap B=A^c\cap C$

习题 16. 设A, B, C为集合，化简：

$$\begin{aligned}&(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup\\&(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup\\&(A^c\cap B\cap C^c)\end{aligned}$$

解法一. 设全集为S，则
原式$\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)=S$
原式$\cap(A^c\cap B^c\cap C^c)=\phi$
从而原式$=(A^c\cap B^c\cap C^c)^c=A\cup B\cup C$。 □

解法二.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=((A\cap B)\cap(C\cup C^c))\cup((A^c\cap B)\cap(C\cup C^c))\cup((A\cap B^c)\cap(C\cup C^c))\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=(A\cap(B\cup B^c))\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=A\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=((A\cup A^c)\cap(A\cup B))\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=(A\cup B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\&=(A\cup B\cup A^c)\cap(A\cup B\cup B^c)\cap(A\cup B\cup C)\\&=A\cup B\cup C\end{aligned}$$

□

习题 17. 设V为一个集合，证明：$\forall S, T, W\in 2^V$有$S\subseteq T\subseteq W$当且仅当$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$。

证明. 首先，$\forall S, T, W\in 2^V$由$S\subseteq T\subseteq W$往证$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$。
由$S\subseteq T\subseteq W$知$S\triangle T=T\backslash S$，$S\triangle W=W\backslash S$，由$T\subseteq W$知$T\backslash S\subseteq W\backslash S$，从而$S\triangle T\subseteq S\triangle W$。$S\subseteq W$显然成立。
接下来，$\forall S, T, W\in 2^V$由$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$往证$S\subseteq T\subseteq W$。
由$S\subseteq W$知$S\triangle W=W\setminus S$。
先证$S\subseteq T$。用反证法，假设$S\subseteq T$不成立,则存在x，$x\in S$但$x\notin T$，于是$x\in S\setminus T\subseteq S\triangle T\subseteq S\triangle W=W\setminus S$，这与$x\in S$矛盾。
再证$T\subseteq W$。用反证法，假设$T\subseteq W$不成立,则存在x，$x\in T$但$x\notin W$，由$S\subseteq W$知$x\notin S$，于是$x\in T\setminus S\subseteq S\triangle T\subseteq S\triangle W=W\setminus S$，这与$x\notin W$矛盾。 □

习题 18. 设$A=\{a, b, c\}, B=\{e, f, g, h\}, C=\{x, y, z\}$。求$A\times B, B\times A, A\times C, A\times B\times C, A^2\times B$。

解.

$$
\begin{aligned}
&A \times B \\
=&\{(a,e),(a,f),(a,g),(a,h), \\
&(b,e),(b,f),(b,g),(b,h), \\
&(c,e),(c,f),(c,g),(c,h)\} \\
&B \times A \\
=&\{(e,a),(e,b),(e,c),(f,a),(f,b),(f,c), \\
&(g,a),(g,b),(g,c),(h,a),(h,b),(h,c)\} \\
&A \times C \\
=&\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x,),(c,y),(c,z)\} \\
&A \times B \times C \\
=&\{(a,e,x),(a,e,y),(a,e,z), \\
&(a,f,x),(a,f,y),(a,f,z), \\
&(a,g,x),(a,g,y),(a,g,z), \\
&(a,h,x),(a,h,y),(a,h,z), \\
&(b,e,x),(b,e,y),(b,e,z), \\
&(b,f,x),(b,f,y),(b,f,z), \\
&(b,g,x),(b,g,y),(b,g,z), \\
&(b,h,x),(b,h,y),(b,h,z), \\
&(c,e,x),(c,e,y),(c,e,z), \\
&(c,f,x),(c,f,y),(c,f,z), \\
&(c,g,x),(c,g,y),(c,g,z), \\
&(c,h,x),(c,h,y),(c,h,z)\} \\
&A^2 \times B \\
=&\{((a,a),x),((a,a),y),((a,a),z), \\
&((a,b),x),((a,b),y),((a,b),z), \\
&((a,c),x),((a,c),y),((a,c),z), \\
&((b,a),x),((b,a),y),((b,a),z), \\
&((b,b),x),((b,b),y),((b,b),z), \\
&((b,c),x),((b,c),y),((b,c),z), \\
&((c,a),x),((c,a),y),((c,a),z), \\
&((c,b),x),((c,b),y),((c,b),z), \\
&((c,c),x),((c,c),y),((c,c),z)\}
\end{aligned}
$$

□

习题 19. 设A,B为集合，试证：$A \times B = B \times A$的充分必要条件是下列三个条

件至少一个成立：

(1) $A=\phi$*;(2)* $B=\phi$*;(3)* $A=B$。

证明. 如果 (1) $A=\phi$;(2) $B=\phi$;(3) $A=B$中的一条成立，易验证$A\times B=B\times A$成立。

设$A\times B=B\times A$成立。如果$A\neq\phi$并且$B\neq\phi$，以下证明必有$A=B$成立。由$A\neq\phi$并且$B\neq\phi$知存在$a\in A$，$b\in B$。对任意的$x\in A$，则$(x,b)\in A\times B=B\times A$，从而$x\in B$；对任意的$x\in B$，则$(x,a)\in B\times A=A\times B$，从而$x\in A$。 □

习题 20. 设A，B，C，D为任意四个集合，证明

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

先在草稿纸上分析如下：

$$\begin{aligned}
&\forall x\forall y(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\\
&\quad\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D\\
&\quad\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D\\
&\quad\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\in B\wedge y\in D\\
&\quad\Leftrightarrow(x,y)\in A\times C\wedge(x,y)\in B\times D\\
&\quad\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)
\end{aligned}$$

然后转换成用自然语言描述的证明过程如下：

证明. 先证$(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

对任意的x和y，如果$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，则$(x,y)\in A\times C$，并且$(x,y)\in B\times D$，从而$x\in A,y\in C,x\in B,y\in D$，即$x\in A$，$x\in B$，$y\in C$，$y\in D$，于是$x\in A\cap B$并且$y\in C\cap D$，因此$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$。

再证$(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

对任意的x和y，$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，则$x\in A\cap B$并且$y\in C\cap D$，从而$x\in A$，$x\in B$，$y\in C$，$y\in D$，即$x\in A,y\in C,x\in B,y\in D$，于是$(x,y)\in A\times C$，并且$(x,y)\in B\times D$，因此$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$。

□

习题 21. 设A,B,C为集合，证明：$A\times(B\triangle C)=(A\times B)\triangle(A\times C)$。

证明.

$$\begin{aligned}
&A\times(B\triangle C)\\
=&A\times((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\\
=&(A\times(B\setminus C))\cup(A\times(C\setminus B))\\
=&((A\times B)\setminus(A\times C))\cup((A\times C)\setminus(A\times B))\\
=&(A\times B)\triangle(A\times C)
\end{aligned}$$

□

习题 22. 设A有m个元素，B有n个元素，则$A\times B$是多少个序对组成的？$A\times B$有多少个不同的子集？

解. $A\times B$是mn个序对组成的，$A\times B$有2^{mn}个不同的子集。 $\square$

习题 23. 设A,B为集合，$B\neq\phi$。试证：如果$A\times B=B\times B$，则$A=B$。

证明. 由$B\neq\phi$知，存在b，$b\in B$。对任意的$x\in A$，则$(x,b)\in A\times B=B\times B$，从而$x\in B$；对任意的$x\in B$，则$(x,b)\in B\times B=A\times B$，从而$x\in A$。这证明了$A=B$。 $\square$

习题 24. 某班学生中有45%正在学德文，65%正在学法文，问此班中至少有百分之几的学生正在同时学德文和法文？

解. 此班中至少有10%的学生正在同时学德文和法文。 $\square$

习题 25. 设A,B为两个有穷集合，则$|2^{2^{A\times B}}|=\underline{2^{2^{|A||B|}}}$。

习题 26. 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一. 设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^{m}G_{b_i}=G$，即$G_{b_{i_m}}=G$，所以$b_{i_m}$与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

$\square$

证法二. 设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；b_2与g_2跳过舞，但未与g_1跳过舞，结论得证。 $\square$