

## 第八讲正规子群、商群

陈建文

November 5, 2022

**定义1.** 设 $G$ 为一个群,  $G$ 的任意子集称为群子集。在 $2^G$ 中借助于 $G$ 的乘法引入一个代数运算, 称为群子集的乘法:  $\forall A, B \in 2^G$ ,

$$AB = \{ab | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

对任意的 $A \in 2^G$ , 定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

**定理1.** 设 $G$ 为一个群, 则 $\forall A, B, C \in 2^G$ ,  $(AB)C = A(BC)$ 。

**定理2.** 设 $G$ 为一个群, 则 $\forall A, B \in 2^G$ ,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

**定理3.** 设 $G$ 为一个群,  $H$ 为 $G$ 的一个子群, 则 $HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$ 。

**定理4.** 设 $A, B$ 为群 $G$ 的子群, 则 $AB$ 为 $G$ 的子群的充分必要条件为 $AB = BA$ 。

证明.  $\Rightarrow$  设 $AB$ 为 $G$ 的子群, 则 $AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$ 。

$\Leftarrow$  设 $AB = BA$ , 往证 $AB$ 为 $G$ 的子群。

由 $(AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = AB$ 知 $G$ 中的运算在 $AB$ 中封闭。其次,  $\forall a \in A, b \in B$ ,  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$ 。所以 $AB$ 为 $G$ 的子群。□

**例.** 设 $H$ 为 $G$ 的一个子群且 $H \neq \{e\}$ 。如果存在一个元素 $x_0 \in G$ 使得 $H(x_0^{-1}Hx_0) = G$ , 则 $H \cap (x_0^{-1}Hx_0) \neq \{e\}$ 。

证明. 因为 $x_0 \in G = H(x_0^{-1}Hx_0)$ , 所以 $\exists h_1, h_2 \in H$ 使得 $x_0 = h_1x_0^{-1}h_2x_0$ , 从而 $e = h_1x_0^{-1}h_2$ 。于是,  $x_0 = (h_1^{-1}h_2^{-1})^{-1} = h_2h_1 \in H$ , 从而 $x_0^{-1}Hx_0 = H$ 。因此,  $H \cap (x_0^{-1}Hx_0) = H \neq \{e\}$ 。□

**定义2.** 设 $H$ 为群 $G$ 的子群, 如果 $\forall a \in G$ ,  $aH = Ha$ , 则称 $H$ 为 $G$ 的正规子群。

**定理5.** 设 $H$ 为群 $G$ 的一个子群, 则下列四个命题等价:

- (1)  $H$ 为群 $G$ 的正规子群;
- (2)  $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$ ;
- (3)  $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$ ;
- (4)  $\forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H$ 。

**定理6.** 设 $H$ 为群 $G$ 的正规子群，则 $H$ 的所有左陪集构成的集族 $S_l$ 对群子集乘法形成一个群。

**定理7.** 设 $H$ 为群 $G$ 的正规子群， $H$ 的所有左陪集构成的集族为 $S_l$ ，在 $S_l$ 上定义乘法运算如下： $\forall aH, bH \in S_l, (aH)(bH) = (ab)H$ ，则 $S_l$ 对于在其上定义的乘法构成一个群。

**定义3.** 群 $G$ 的正规子群 $H$ 的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为 $G$ 对 $H$ 的商群，记为 $G/H$ 。

课后作业题：

**练习1.** 设 $A$ 和 $B$ 为群 $G$ 的两个有限子群，证明：

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

**练习2.** 利用上题的结论证明：六阶群中有唯一的一个三阶子群。

**练习3.** 设 $G$ 为一个 $n^2$ 阶的群， $H$ 为 $G$ 的一个 $n$ 阶子群。证明： $\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$ 。

**练习4.** 证明：指数为2的子群为正规子群。

**练习5.** 证明：两个正规子群的交还是正规子群。

**练习6.** 设 $H$ 为群 $G$ 的子群， $N$ 为群 $G$ 的正规子群，试证： $NH$ 为群 $G$ 的子群。

**练习7.** 设 $G$ 为一个阶为 $2n$ 的交换群，试证： $G$ 必有一个 $n$ 阶商群。

**练习8.** 设 $H$ 为群 $G$ 的子群，证明： $H$ 为群 $G$ 的正规子群的充分必要条件是 $H$ 的任意两个左陪集的乘积还是 $H$ 的一个左陪集。