第十一讲无零因子环的特征数

陈建文

October 7, 2022

在初等代数中，如果$a \neq 0$，则$na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{n}} \neq 0$, 这个结论在一般的域中成立吗?

例． 设p为一个素数，则模p同余类环$Z_p = \{[0], [1], \cdots, [p-1]\}$为一个域。在域$Z_p$中，同余类$[1] \neq [0]$，但是

$$p[1] = \underbrace{[1] + [1] + \cdots + [1]}_{p\text{个}[1]} = [0]$$

而且$\forall [i] \in Z_p$，$p[i] = [pi] = [0]$。$[0]$为域Z_p中的零元，在Z_p中任一非零元的p倍等于零元。

在上例中，任意一个非零元对加法的阶都等于p，在一般的域中，这个结论成立吗?

下面的例子说明在一般的环中，该结论不成立。

例． 在环$Z_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$中，$[1]$对加法的阶为4，$[2]$对加法的阶为2。

定理1． 在一个无零因子环中，每个非零元素对加法的阶均相等。

推论1． 体和域中每个非零元素对加法的阶均相等。

定义1． 无零因子环中非零元素对加法的阶称为该环的特征数，简称特征；域（体）中非零元素对加法的阶称为该域（体）的特征数，简称特征。

定理2． 如果一个无零因子环R的特征数为正整数p，则p为素数。

定理3． 在特征为p的域中，

$$\begin{aligned}(a+b)^p =& a^p + b^p\\ (a-b)^p =& a^p - b^p\end{aligned}$$

证明．由

$$a^p = (a - b + b)^p = (a-b)^p + b^p$$

可得

$$(a-b)^p = a^p - b^p$$

□

课后作业题：

练习1. 设F为一个域，$|F|=4$，证明：

（*1*）F的特征数为2；

（*2*）F的任意一个非零元并且非单位元1的元素x均满足方程$x^2=x+1$；

（*3*）列出F的加法表和乘法表。