

第四章无穷集合及其基数

陈建文

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射，则称 X 与 Y 对等，记为 $X \sim Y$ 。

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

1. 可数集

定义1.1

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

定理1.1

集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

因此, A 可写成 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 。

1. 可数集

定理1.2

可数集的任一无限子集也是可数集。

1. 可数集

定理1.3

设 A 为可数集合, B 为有穷集合, 则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.4

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.5

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理1.6

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \times B$ 为可数集。

1. 可数集

定理1.7

全体有理数之集 \mathbb{Q} 为可数集。

2 连续统集

定理2.1

区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

2 连续统集

定义2.1

凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设 M 为一个无穷集合， A 为至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

2 连续统集

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设 M 为一个无穷集合， A 为至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

定理2.4

设 M 为无穷集合， A 为 M 的至多可数子集， $M \setminus A$ 为无穷集合，则 $M \sim M \setminus A$ 。

2 连续统集

定理2.5

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

2 连续统集

定理2.6

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

推论2.1

全体实数之集是一个连续统。

推论2.2

全体无理数之集是一个连续统。

2 连续统集

设 A_1 , A_2 均为连续统, 则 $A_1 \times A_2$ 为连续统。

2 连续统集

$K(P)$

```
1  if  $H(P, P) == 1$   
2      return  
3  else Loop forever
```

3 基数及其比较

定义3.1

集合 A 的基数是一个符号，凡与 A 对等的集合都赋以同一个记号。集合 A 的基数记为 $|A|$ 。

定义3.2

所有与集合 A 对等的集合构成的集族称为 A 的基数。

定义3.3

集合 A 的基数与集合 B 的基数称为是相等的，当且仅当 $A \sim B$ 。

3 基数及其比较

定义3.4

设 α, β 为任意两个基数, A, B 为分别以 α, β 为其基数的集合。如果 A 与 B 的一个真子集对等, 但 A 却不能与 B 对等, 则称基数 α 小于基数 β , 记为 $\alpha < \beta$ 。

3 基数及其比较

定义3.4

设 α, β 为任意两个基数, A, B 为分别以 α, β 为其基数的集合。如果 A 与 B 的一个真子集对等, 但 A 却不能与 B 对等, 则称基数 α 小于基数 β , 记为 $\alpha < \beta$ 。

显然,

$\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

$\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 且不存在 A 到 B 的双射。

1. 集合的概念

集合的定义

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。

3. 基数及其比较

设 A , B 为两个集合,

$|A| = |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个单射。

$|A| < |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个单射, 但不存在从集合 A 到集合 B 的满射。

3 基数及其比较

定理3.1 (康托)

对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

设 $M = \{1, 2, 3\}$,

则 $2^M = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理4.1 (康托-伯恩斯坦)

设 A, B 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ ，则存在从 A 到 B 的双射。

4 康托-伯恩斯坦定理

Proof.

We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2 . We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \dots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1 , in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B .

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.



Proof.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \dots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A , then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1 . Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h . On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B , then $g(y)$ belongs to A_2 . In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h , as was to be shown. □

定义4.1

设 α, β 为两个基数, A 与 B 为两个不相交集合, $|A| = \alpha, |B| = \beta$, 则集合 $A \cup B$ 的基数称为基数 α 与 β 的和, 记为 $\alpha + \beta$ 。

定义4.2

设 α, β 为两个基数, A 与 B 为两个集合, $|A| = \alpha, |B| = \beta$, 则集合 $A \times B$ 的基数称为基数 α 与 β 的积, 记为 $\alpha \cdot \beta$ 或者 $\alpha\beta$ 。

定义4.3

设 α, β 为两个基数, A 与 B 为两个集合, $|A| = \alpha, |B| = \beta$, 则集合 $B^A = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ 的基数称为 β 的 α 次幂, 记为 β^α 。

定理4.2

设 a 为可数集的基数, c 为连续统的基数, 则

1. $\forall n \in N \cup \{0\}, n + a = a.$

2. $\forall n \in N, n \cdot a = a.$

3. $\forall n \in N, n \cdot c = c.$

4. $a \cdot c = c.$

5. $c \cdot c = c.$

6. $2^a = c.$

7. $(2^a)^a = c.$

8. $a^a = 2^a.$

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

$$\text{其中 } a^+ = a \cup \{a\}$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall \text{relation } R)(\exists \text{function } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

5 公理集合论

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \rightarrow n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \rightarrow n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \rightarrow p(n++)) \rightarrow \forall n p(n)$ 。

5 公理集合论

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \rightarrow x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

5 公理集合论

1. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $x < y, x = y, y < x$ 中有且仅有一个成立。
2. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x < y$ 并且 $y < z$, 则 $x < z$ 。
3. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x < y$, 则 $x + z < y + z$ 。
4. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, 如果 $x > 0$, $y > 0$, 则 $xy > 0$ 。

另外，实数集还具有如下性质：

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 为实数集 R 上的闭区间， $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ ，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空。

习题: (P20-5)

设 X 为一个非空集合, $A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 n ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题: (P47-5)

设 $f : X \rightarrow Y$ 。试证: f 为满射当且仅当对任意的 $E \in 2^Y$, $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

习题: (P126-6)

设 R 为集合 X 上的自反且传递的二元关系。

a) 给出 R 的一个实例。

b) 在 X 上定义二元关系 \sim 如下: $x \sim y$ 当且仅当 xRy 且 yRx 。 证明 \sim 为 X 上的等价关系。

c) 在商集 X/\sim 上定义二元关系 \leq : $[a] \leq [b]$ 当且仅当 aRb 。证明 \leq 为 X/\sim 上的偏序关系。