习题. 设$p \geq mn+1$，D为一个有p个顶点的比赛图。对D的弧任意涂上红色或黄色，试证：D中有一条长至少为m的由红色弧组成的有向路，或有一条长至少为n的由黄色弧组成的有向路。

证明. 设R为由D的所有顶点和着红色的弧构成的D的子图，Y为由D的所有顶点和着黄色的弧构成的D的子图。与无向图类似的，定义有向图的色数。有向图D的一种（顶点）着色是指对D中的每个顶点指定一种颜色，使得没有邻接的顶点着同一种颜色。有向图D的一个n-着色是用n种颜色对D的着色。有向图D的色数是使D为n-着色的最小值，记为$\chi(D)$。以下证明$\chi(R) \geq m+1$或者$\chi(Y) \geq n+1$。用反证法，假设$\chi(R) \leq m$并且$\chi(Y) \leq n$。则可以用m种颜色对R的顶点进行着色，使得相邻的顶点着不同的颜色，着不同的颜色的顶点所构成的集合（称为色组）依次记为$U_1, U_2, \ldots, U_m$。同理，可以用n种颜色对Y的顶点进行着色，使得相邻的顶点着不同的颜色，不同的色组依次记为$W_1, W_2, \ldots, W_n$。于是，$U_i \cap W_j (i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n)$中的顶点在$D$中彼此是不邻接的，从而$\chi(D) \leq mn$，与$D$为比赛图矛盾。

以下证明对于任意的一个有向图$D=(V,A)$，D中存在一个长度大于等于$\chi(D)-1$的有向路，从而结论得证。设$A' \subseteq A$为使$D'=D-A'$不含有向圈的极小弧集（即对任意的$a \in A'$，$D'+a$含有向圈），并设D'中有向路的最大长度为k，只需证明$k \geq \chi(D)-1$。对$i=0,1,2,\cdots,k$，令$V_i=\{x \in V | D'$中以x为起点的有向路最大长度为$i\}$，则$V=V_0 \cup V_1 \cup \cdots V_k$，于是只需证明对任意的$i$，$0 \leq i \leq k$，$V_i$中的任意两个顶点是不邻接的，从而$\chi(D) \leq k+1$，即$k \geq \chi(D)-1$。

首先注意到，D'中不存在起点和终点都在$V_i (i=0,1,2,\cdots,k)$中的有向路，若不然，设P为D'中从顶点x到顶点y的有向路，则存在一条长度为i的且起点为y的有向路Q，因为D'不含有向圈，所以P之后接Q为D'中起点在x且长度$\geq i+1$的有向路，与$x \in V_i$矛盾。

以下证明对任意的i，$0 \leq i \leq k$，V_i中的任意两个顶点是不邻接的。用反证法，设x和y为V_i中两个在D中邻接的顶点，并且存在从顶点x到顶点y的弧。由于D'中不存在从顶点x到顶点y的路，所以$xy \in A'$，从而$D'+xy$中含有向圈，设为C，于是$C-xy$为D'中一条从顶点y到顶点x的有向路且$x, y \in V_i$，与前面所得到的结论矛盾。 □