第五讲变换群、同构

陈建文

February 14, 2023

定义1. 设$(G_1,\circ)$，$(G_2,*)$为两个群。如果存在一个双射$\phi: G_1 \to G_2$，使得$\forall a,b \in G_1$，

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)*\phi(b),$$

则称群G_1与G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$。ϕ称为从G_1到G_2的一个同构。

定义2. 设S为一个非空集合，从S到S的所有双射构成的集合对映射的合成构成一个群，称为S上的对称群，记为$Sym(S)$。当$S=\{1,2,\cdots,n\}$时，$Sym(S)=S_n$。

定义3. $Sym(S)$的任意一个子群称为S上的一个变换群。S_n的任意一个子群称为一个置换群。

定理1. 任何一个群都同构于某个变换群。

证明. 设$(G,\circ)$为一个群。$\forall a\in G$，令$f_a: G\to G$，$\forall x\in G$，$f_a(x)=ax$，则f_a为从G到G的双射。（f_a为单射，这是因为$\forall x_1,x_2\in G$，如果$f_a(x_1)=f_a(x_2)$，则$ax_1=ax_2$，从而$x_1=x_2$；f_a为满射，这是因为$\forall y\in G$，$f_a(a^{-1}y)=a(a^{-1}y)=y$。）设$L(G)=\{f_a|f_a: G\to G, \forall x\in G, f_a(x)=ax, a\in G\}$，则$L(G)$对映射的合成构成一个群。实际上，$\forall f_a,f_b\in L(G)$，$\forall x\in G$，$f_a\circ f_b(x)=f_a(f_b(x))=f_a(bx)=abx=f_{ab}(x)$，所以$f_{ab}=f_a\circ f_b$，即$f_a\circ f_b\in L(G)$。因此，合成运算在$L(G)$中封闭。显然，合成运算满足结合律。$G$上的恒等映射$I_G=f_e\in L(G)$为$L(G)$中的单位元素（$\forall x\in G, f_e(x)=ex=x$）。又因为$\forall a\in G$，$\forall x\in G$，

$$f_{a^{-1}}\circ f_a(x)=(a^{-1}a)x=x=f_e(x)$$

所以$f_{a^{-1}}f_a=f_e$，$f_{a^{-1}}$为f_a的左逆元。因此，$L(G)$为一个群。

令$\phi: G\to L(G)$，$\forall a\in G$，$\phi(a)=f_a$，则ϕ为双射（ϕ为单射，这是因为$\forall a,b\in G$，如果$\phi(a)=\phi(b)$，则$f_a=f_b$，从而$f_a(e)=f_b(e)$，即$ae=be$，于是$a=b$；ϕ为满射，这是因为对任意的$f\in L(G)$，$\exists a\in G$使得$f=f_a$，从而$\phi(a)=f_a=f$）。

$\forall a,b\in G, \phi(ab)=f_{ab}=f_a\circ f_b=\phi(a)\circ\phi(b)$，因此$\phi$为从$G$到$L(G)$的一个同构，即$G\cong L(G)$。 □

设$(G,\circ)$为一个n阶群，$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则$G\cong L(G)$，这里

$$L(G)=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_ia_1 & a_ia_2 & \cdots & a_ia_n\end{pmatrix} | a_i\in G\right\}$$

为一个置换群。

推论1. 任意一个n阶有限群同构于n次对称群S_n的一个n阶子群，亦即任意一个有限群同构于某个置换群。

课后作业题：

练习1. 设R为实数集合，G为一切形如$f(x) = ax + b$的从R到R的函数之集，这里$a \in R$，$b \in R$，$a \neq 0$，试证：G为一个变换群。

证明. 显然G中的每个函数都为从R到R的双射。

设$f(x) = ax+b$，$g(x) = cx+d$，$a, b, c, d \in R$，$a \neq 0$，$c \neq 0$，则$(f \circ g)(x) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$，这里$ac \neq 0$，因此$f \circ g \in G$。这验证了$G$中的函数关于函数的合成满足封闭性。

设$h : R \to R, h(x) = x$,则$h \in G$，h为G中的函数关于函数合成运算的单位元。

对任意的$f \in G$，设$f = ax + b$，$a, b \in R$，$a \neq 0$。

寻找$g \in G$，使得$g \circ f = h$。设$g(x) = cx + d$，$c, d \in R$，$c \neq 0$，

则$(g \circ f)(x) = c(ax + b) + d = cax + (cb + d) = x$，解方程组$\begin{cases} ca = 1 \\ cb + d = 0 \end{cases}$

得$c = \frac{1}{a}, d = -\frac{b}{a}$，易验证$g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$满足$(g \circ f)(x) = x$。

$\square$

练习2. 设R为实数集合，H为一切形如$f(x) = x + b$的从R到R的函数之集，这里$b \in R$，试证：H为上题中G的一个子群。

证明. 显然H非空，例如$h : R \to R, \forall x \in R, h(x) = x$，则$h \in H$。

$\forall f, g \in H$，$f(x) = x + b$，$g(x) = x + c$，$b, c \in R$，则$(f \circ g^{-1})(x) = (x - c) + b = x + (b - c) \in H$，因此$H$为上题中$G$的一个子群。 $\square$

练习3. 设R_+为一切正实数之集，R为一切实数之集。$(R_+, \times)$，$(R, +)$都为群。令$\phi : R_+ \to R, \forall x \in R_+, \phi(x) = log_p(x)$，其中$p$为任意一个正实数。证明$\phi$为同构。

证明. 显然ϕ为从R_+到R的双射。

其次，$\phi(x \times y) = log_p(x \times y) = \log_p(x) + \log_p(y) = \phi(x) + \phi(y)$。

因此，ϕ为从$(R_+, \times)$到$(R, +)$的同构。 $\square$