

离散数学讲义

陈建文

April 7, 2022

第四章 无穷集合

定义4.1. 如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义4.2. 如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

定理4.1. 集合 A 为可数集的充分必要条件为 A 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

定理4.2. 可数集的任一无限子集也是可数集。

定理4.3. 设 A 为可数集合, B 为有穷集合, 则 $A \cup B$ 为可数集。

定理4.4. 设 A 与 B 为两个可数集, 则 $A \cup B$ 为可数集。

定理4.5. 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理4.6. 设 A 与 B 为两个可数集, 则 $A \times B$ 为可数集。

定理4.7. 全体有理数之集 \mathbb{Q} 为可数集。

定理4.8. 区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义4.3. 凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合, 简称连续统。

定理4.9. 无穷集合必包含有可数子集。

定理4.10. 设 M 为一个无穷集合, A 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

证明. 先考虑 $A \cap M = \emptyset$ 的情况。因为 M 为一个无穷集合, 所以 M 中必有一个可数子集 D 。令 $P = M \setminus D$, 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$, $D \sim D \cup A$, 得到 $M \sim M \cup A$ 。

再考虑 $A \cap M \neq \emptyset$ 的情况, 此时 $A \setminus M$ 为至多可数集合, 从而 $M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$ 。□

定理4.11. 设 M 为无穷集合, A 为 M 的至多可数子集, $M \setminus A$ 为无穷集合, 则 $M \sim M \setminus A$ 。

定理4.12. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为连续统。

定理4.13. 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

推论4.1. 全体实数之集是一个连续统。

推论4.2. 全体无理数之集是一个连续统。

定义4.4. 集合 A 的基数为一个符号, 凡与 A 对等的集合都赋以同一个记号。集合 A 的基数记为 $|A|$ 。

定义4.5. 所有与集合 A 对等的集合构成的集族称为 A 的基数。

定义4.6. 集合 A 的基数与集合 B 的基数称为是相等的, 当且仅当 $A \sim B$ 。

定义4.7. 设 α, β 为任意两个基数, A, B 为分别以 α, β 为其基数的集合。如果 A 与 B 的一个真子集对等, 但 A 却不能与 B 对等, 则称基数 α 小于基数 β , 记为 $\alpha < \beta$ 。

显然, $\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

$\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 且不存在 A 到 B 的双射。

定理4.14 (康托). 对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

证明. 令 $i: M \rightarrow 2^M$, 其定义为对任意的 $m \in M$, $i(m) = \{m\}$ 。于是, i 为从 M 到 2^M 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 f 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然, $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$, $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$, 则如果 $x_0 \in X$, 那么由 X 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$, 即 $x_0 \notin X$; 如果 $x_0 \notin X$, 即 $x_0 \notin f(x_0)$, 由 X 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之, $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此, f 不为满射, 从而

$$|M| < |2^M|$$

□

定理4.15 (康托-伯恩斯坦). 设 A, B 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$, 则 A 与 B 的基数相等。

证法一. 设 $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow A$ 都为单射。令 $\psi : 2^A \rightarrow 2^A$, 对任意的 $E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$, 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$, 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$, 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$, 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$, 因此, $\psi(D) \subseteq D$, 所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

令 $h : A \rightarrow B$, 对任意的 $x \in A$, 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中 g^{-1} 为视 g 为 B 到 $g(B)$ 的一一对应时 g 的逆, 易见 h 为一一对应。所以 A 与 B 的基数相等。 \square

证法二. We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2 . We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \dots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1 , in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B .

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \dots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A , then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1 . Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h . On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B , then $g(y)$ belongs to A_2 . In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h , as was to be shown. \square

刻画集合的ZFC公理系统 (Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory) :

公理4.1 (外延公理).

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理4.2 (空集公理).

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理4.3 (对公理).

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4.4 (并集公理).

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

公理4.5 (幂集公理).

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理4.6 (子集公理).

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理4.7 (无穷公理).

$$\begin{aligned} \exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A) \\ \text{其中 } a^+ = a \cup \{a\} \end{aligned}$$

公理4.8 (代换公理).

$$\begin{aligned} \forall A ((\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x, y))) \end{aligned}$$

公理4.9 (正则公理).

$$(\forall A \neq \phi) (\exists m \in A) m \cap A = \phi$$

公理4.10 (选择公理).

$$(\forall \text{relation } R) (\exists \text{function } F) (F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

刻画实数的公理系统:

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$

4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1 (x \neq 0)$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$
11. 对任意的 $x \in R$, $x \leq x$ 。
12. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq x$, 则 $x = y$ 。
13. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq z$, 则 $x \leq z$ 。
14. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 两者中必有其一成立。
我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$, $x \geq y$ 表示 $y \leq x$, $x > y$ 表示 $x \geq y$ 并且 $x \neq y$ 。
15. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x < y$, 则 $x + z < y + z$ 。
16. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, 如果 $x > 0$, $y > 0$, 则 $xy > 0$ 。
17. 设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 为实数集 R 上的闭区间, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空。

练习4.1. 设 A 为 R 的任意一个非空子集, 如果 A 有上界, 则 A 有上确界。

证明. 设 b 为 A 的一个上界, 由 A 非空知, 存在 $a \in A$ 。

将闭区间 $[a, b]$ 二等分, 得到两个小的闭区间 $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $I_2 = [\frac{a+b}{2}, b]$ 。如果 I_2 中存在 A 中的点, 则记 $A_1 = I_2$; 否则, I_1 中必存在 A 中的点, 记 $A_1 = I_1$ 。这样得到的闭区间 A_1 中必存在 A 中的点, 并且其右边界为 A 的上界。

按照同样的方法将 A_1 二等分, 这样依次可以得到闭区间 A_2, A_3, \dots , 每个闭区间中存在 A 中的点, 并且其右边界为 A 的上界。

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空, 取 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 以下证明 x 为 A 的上确界。

首先证明 x 为 A 的上界。用反证法, 假设 x 不是 A 的上界, 则存在 $y \in A$, $y > x$ 。由于当 $i \rightarrow \infty$ 时, A_i 的长度 $\rightarrow 0$, 所以存在正整数 N , A_N 的右边界 $-x < A_N$ 的长度 $< y - x$, 从而 A_N 的右边界 $< y$, 这与 A_N 的右边界为 A 的上界矛盾。

其次证明 x 为 A 的最小上界。用反证法, 假设 x 不是 A 的最小上界, 则存在上界 x' , $x' < x$ 。由于当 $i \rightarrow \infty$ 时, A_i 的长度 $\rightarrow 0$, 所以存在整数 M , $x - A_M$ 的左边界 $< A_M$ 的长度 $< x - x'$, 从而 A_M 的左边界 $> x'$, 而 A_M 中存在 A 中的点 z , $z > x'$, 与 x' 为 A 的上界矛盾。□

练习4.2. 有下界的单调下降序列必收敛。

证明. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为有下界的单调下降序列, 则其所有元素构成的集合 A 有下界, 从而有下确界, 记为 a 。

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

对任给的 $\epsilon > 0$, 由于 $a + \epsilon$ 不是 A 的下界, 从而存在自然数 N 使得 $a_N < a + \epsilon$ 。

由 a 为 A 的下界知 $a \leq a_N$ 。

由序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 单调下降且 A 的下确界为 a 知当 $n \geq N$ 时, $a \leq a_n < a_N + \epsilon$, 这证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。□

证明. □

练习4.3. 设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$, 这里 R 为实数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] =$

_____。

(2) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$, 这里 Q 为有理数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] =$

_____。

解. (1) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) \\ &= \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

这说明序列 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ 单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为 x , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得 $x = \sqrt{2}$ 。

由 $x_n \geq \sqrt{2}$ 知 $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$, 由序列 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ 单调下降知序列 $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$ 单调上升, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$ 。

综上, $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \{\sqrt{2}\}$ 。

(2)

$$x_n^2 = (\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 = \frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) \geq \frac{1}{4}(2 * x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}} + 4) = 2$$

$$\begin{aligned}
& x_n - x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) - x_{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1} \right) \\
&= \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

这说明序列 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ 单调下降, 从而序列 $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$ 单调上升。

$$\begin{aligned}
& x_n - \frac{2}{x_n} \\
&= \frac{x_n^2 - 2}{x_n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) \right)^2 - 2}{x_n} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4 \right) - 2}{x_n} \\
&= \frac{\frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 4 \right)}{x_n} \\
&= \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{4x_n} \left(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}} \right)
\end{aligned}$$

这说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$ 。以下证明 $\bigcap_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{x_n}, x_n \right] = \phi$ 。

用反证法。设存在 $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{x_n}, x_n \right]$, 由 x 为有理数知 $x^2 \neq 2$ 。

如果 $x^2 > 2$, 则 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$, 从而 $\left(\frac{2}{x} \right)^2 < 2 < x^2$, 于是 $\frac{2}{x} < x$ 。对任意的自然数 n , 由 $x \leq x_n$ 知 $\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$, 从而 $x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$ 矛盾。

如果 $x^2 < 2$, 则 $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{2}$, 从而 $\left(\frac{2}{x} \right)^2 > 2 > x^2$, 于是 $\frac{2}{x} > x$ 。对任意的自然数 n , 由 $x \geq \frac{2}{x_n}$ 知 $\frac{2}{x} \leq x_n$, 从而 $x_n - \frac{2}{x_n} \geq \frac{2}{x} - x$, 这也与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right) = 0$ 矛盾。

□

证明：任何有理数的平方不等于2。

证明. 用反证法。假设存在有理数 $x = \frac{n}{m}$ 使得 $x^2 = 2$ ，这里 m 与 n 互素，于是 $(\frac{n}{m})^2 = 2$ ，即

$$2m^2 = n^2 \tag{4.1}$$

这说明 n 为偶数，从而存在整数 k ，使得 $n = 2k$ 。带入(4.1)得， $m^2 = 2k^2$ ，从而 m 为偶数，这与 m 和 n 互素矛盾，结论得证。 \square

第 五 章