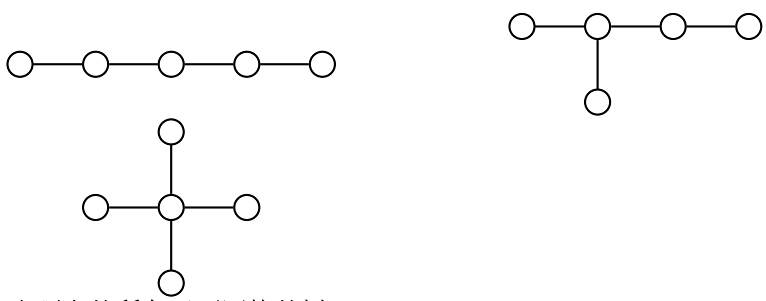
第七章作业题

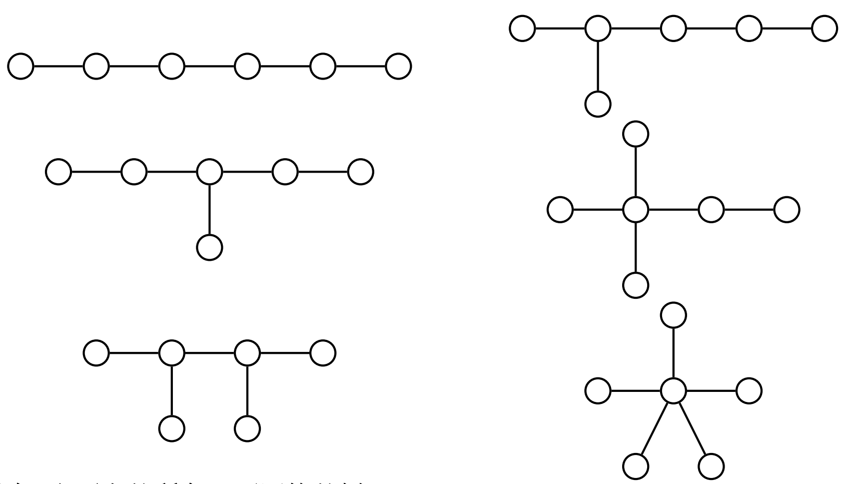
习题 1. 分别画出具有4个，5个，6个，7个顶点的所有树（同构的只算一个）。

解. 具有4个顶点的所有互不同构的树:

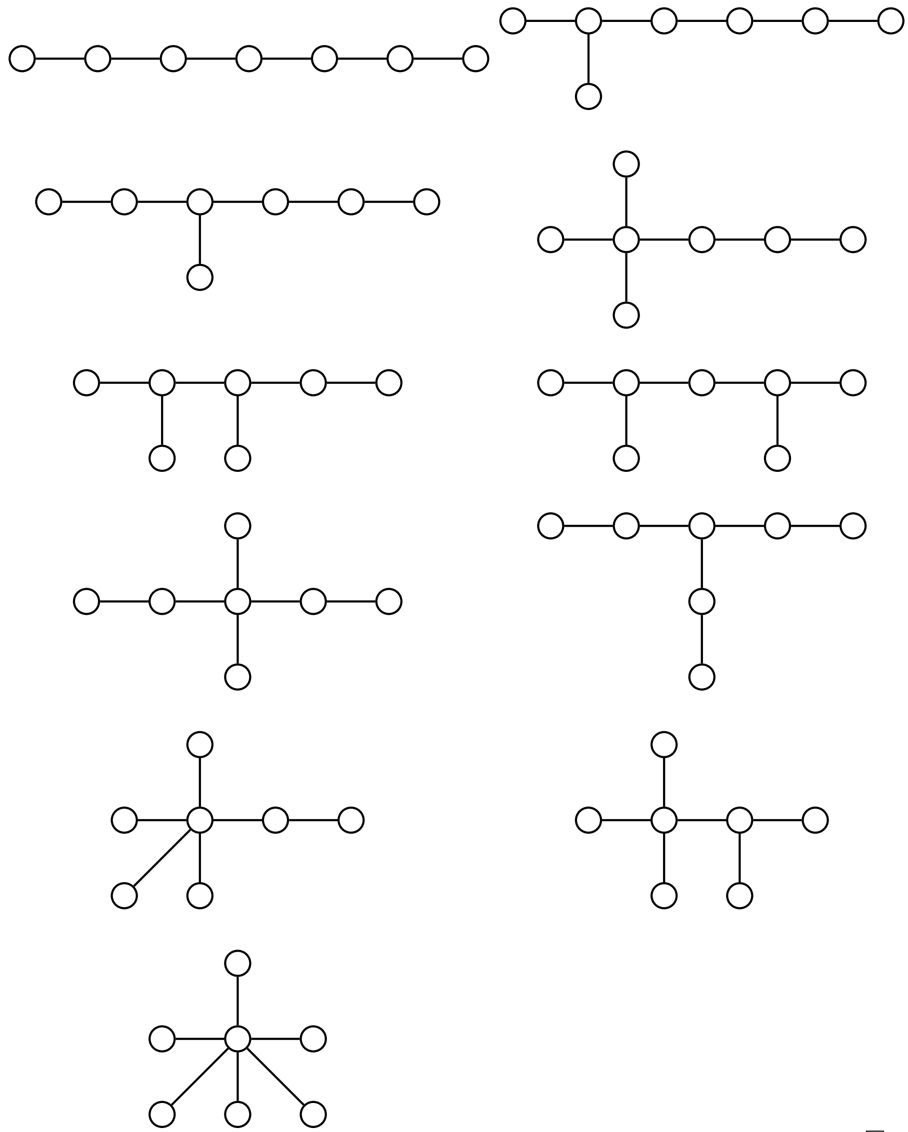
具有5个顶点的所有互不同构的树:



具有6个顶点的所有互不同构的树:



具有7个顶点的所有互不同构的树:



□

习题 2. 设G为一棵树且$\Delta(G) \geq k$，证明G中至少有k个度为1的顶点。

证明. 用反证法。假设G中有x个度为1的顶点，$x < k$。进一步，设G中有p个顶点，它们的度依次为d_1，d_2，…，d_p。则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} d_i &\geq k + x + 2(p-1-x)\\ &= 2(p-1) + k - x\\ &> 2(p-1)\end{aligned}$$

矛盾。 □

习题 3. 设T为一棵包含$k+1$个顶点的树。证明：如果图G的最小度$\delta(G)\geq k$，则G有一个同构于T的子图。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于k。

（1）当$k=0$时，T是一棵包含1个顶点的树，在G中取任意一个顶点u，该顶点自身为G的一个与T同构的子图。

（2）假设当$k=n$时结论成立，往证当$k=n+1$时结论也成立。设T是一棵$n+1+1$个顶点的树，去掉一个叶子顶点v，得到一棵树T'，则T'是一棵有$n+1$个顶点的树。图G的最小度$\delta(G)\geq n+1\geq n$，由归纳假设，G中存在一个同构于T'的子图G'。设在T中与其叶子顶点v邻接的顶点为u，在T'与G'的同构中，与u对应的顶点为u'。在G中，$\deg u'\geq n+1$，由于G'中有$n+1$个顶点，u'在G'中至多有n条与之关联的边，因此u'与G中除去G'中的顶点之外的其他某个顶点v'邻接，在G'中添加顶点v'和边$u'v'$，则得到一个与T同构的子图。 □

习题 4. 令G是一个有p个顶点，k个支的森林，证明G有$p-k$条边。

证明. 设G的k个支的顶点数依次为p_1，p_2，…，p_k，边数依次为q_1，q_2，…，q_k，则$q_1+q_2+\ldots+q_k=(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_k-1)$，即$q=p-k$。 □

习题 5. 设树T中有$2n$个度为1的顶点，$3n$个度为2的顶点，n个度为3的顶点，那么这棵树有多少个顶点，多少条边呢？

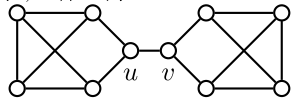
证明. 在树T中，边数＝顶点数－１，从而$(2n\times 1+3n\times 2+n\times 3)/2=2n+3n+n-1$，解得$n=2$，顶点数=12，边数=11。 □

习题 6. 一棵非平凡树T有n_2个度为2的顶点，n_3个度为3的顶点，…，n_k个度为k的顶点，则T有多少个度为1的顶点？

证明. 设非平凡树T有n_1个度为1的顶点，则由边数＝顶点数－１知，$(n_1+2n_2+\ldots+kn_k)/2=n_1+n_2+\ldots+n_k-1$，从而$n_1=n_3+2n_4+\ldots+(k-2)n_k+2$。 □

习题 7. 证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证明. 设uv为三次图G的一座桥，则$G-uv$包含两个支，其中一个支包含顶点u，另一个顶点包含顶点v。在包含顶点u的支中，至少含有一个顶点度为3，因此至少包含4个顶点。此时，如果该支中只包含4个顶点，则它们的度依次为$2,3,3,3$，这是不可能的（任意一个图中度为奇数的顶点的个数必为偶数）。因此，该支中至少包含5个顶点。同理，包含v的支至少包含5个顶点，如下图所示，结论得证。



□

习题 8. 有割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图？

解. 有割点的连通图可能为欧拉图；有割点的连通图一定不是哈密顿图。有桥的连通图一定不是欧拉图；有桥的连通图一定不是哈密顿图。 □