

第四章无穷集合及其基数

陈建文

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, 则下列不是双射的是?

- A. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$
- B. $\{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$
- C. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 6)\}$
- D. $\{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$

下列说法错误的是？

- A. 所有的 n 次奇置换构成的集合与所有的 n 次偶置换构成的集合之间存在一个双射。
- B. 设 X 为集合，则 X 上的所有等价关系构成的集合与 X 的所有划分构成的集合之间存在一个双射。
- C. 整数集合与偶数集合之间存在一个双射。
- D. 设 A 与 B 为两个互不相交的集合，则在 A 与 $A \cup B$ 之间不可能存在双射。

1. 可数集

定义

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射，则称 X 与 Y 对等，记为 $X \sim Y$ 。

1. 可数集

定义

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

1. 可数集

定义

如果从集合 X 到集合 Y 存在一个双射, 则称 X 与 Y 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

定义

如果从自然数集 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 X 不是可数集且 X 不是有穷集合, 则称 X 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

定理

集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

1. 可数集

定理

可数集的任一无限子集也是可数集。

1. 可数集

定理

设 A 为可数集合， B 为有穷集合，则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \cup B$ 为可数集。

1. 可数集

定理

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理

设 A 与 B 为两个可数集，则 $A \times B$ 为可数集。

1. 可数集

定理

全体有理数之集 \mathbb{Q} 为可数集。

2 连续统集

定理

区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

2 连续统集

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \rightarrow x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

2 连续统集

1. 对任意的 $x \in R$, $x \leq x$ 。
2. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq x$, 则 $x = y$ 。
3. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq z$, 则 $x \leq z$ 。
4. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 两者中必有其一成立。

我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$, $x \geq y$ 表示 $y \leq x$, $x > y$ 表示 $x \geq y$ 并且 $x \neq y$ 。

5. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, 如果 $x < y$, 则 $x + z < y + z$ 。
6. 对任意的 $x \in R$, $y \in R$, 如果 $x > 0$, $y > 0$, 则 $xy > 0$ 。

2 连续统集

另外，实数集还具有如下性质：

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 为实数集 R 上的闭区

间， $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ ，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空。

2 连续统集

定义

凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理

无穷集合必包含有可数子集。

定理

设 M 为一个无穷集合, A 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

定理

设 M 为一个无穷集合, A 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

证明.

因为 M 为一个无穷集合, 所以 M 中必有一个可数子集 D 。

令 $P = M \setminus D$, 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$, $D \sim D \cup A$, 得到 $M \sim M \cup A$ 。



定理

设 M 为一个无穷集合, A 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

证明.

先考虑 $A \cap M = \emptyset$ 的情况。因为 M 为一个无穷集合, 所以 M 中必有一个可数子集 D 。令 $P = M \setminus D$, 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$, $D \sim D \cup A$, 得到 $M \sim M \cup A$ 。

再考虑 $A \cap M \neq \emptyset$ 的情况, 此时 $A \setminus M$ 为至多可数集合, 从而 $M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$ 。



定理

设 M 为无穷集合， A 为 M 的至多可数子集， $M \setminus A$ 为无穷集合，则 $M \sim M \setminus A$ 。

2 连续统集

定理

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

2 连续统集

定理

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

推论

全体实数之集是一个连续统。

推论

全体无理数之集是一个连续统。

3 基数及其比较

定义

集合 A 的基数是一个符号，凡与 A 对等的集合都赋以同一个记号。集合 A 的基数记为 $|A|$ 。

定义

所有与集合 A 对等的集合构成的集族称为 A 的基数。

3. 基数及其比较

设 A , B 为两个集合,

$|A| = |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个单射。

$|A| < |B|$: 在集合 A 与集合 B 之间存在一个单射, 但不存在从集合 A 到集合 B 的双射。

1. 集合的概念

集合的定义

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

设 $M = \{1, 2, 3\}$,

则 $2^M = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 M , $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i: M \rightarrow 2^M$, 其定义为对任意的 $m \in M$, $i(m) = \{m\}$ 。于是, i 为从 M 到 2^M 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 f 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然, $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$, $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = X$, 则如果 $x_0 \in X$, 那么由 X 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$, 即 $x_0 \notin X$; 如果 $x_0 \notin X$, 即 $x_0 \notin f(x_0)$, 由 X 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之, $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此, f 不为满射, 从而

$$|M| < |2^M|$$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设 A, B 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$, 则存在从 A 到 B 的双射。

证法一.

设 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow A$ 都为单射。令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$, 对任意的 $E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$, 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$, 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$, 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$, 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$, 因此, $\psi(D) \subseteq D$, 所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D)).$$

令 $h: A \rightarrow B$, 对任意的 $x \in A$, 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中 g^{-1} 为视 g 为 B 到 $g(B)$ 的一一对应时 g 的逆, 易见 h 为一一对应。所以 A 与 B 的基数相等。

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

$$\text{其中 } a^+ = a \cup \{a\}$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall \text{relation } R)(\exists \text{function } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

5 公理集合论

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \rightarrow n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \rightarrow n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \rightarrow p(n++)) \rightarrow \forall n p(n)$ 。

习题: (P20-5)

设 X 为一个非空集合, $A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 n ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题: (P47-5)

设 $f : X \rightarrow Y$ 。试证: f 为满射当且仅当对任意的 $E \in 2^Y$, $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

习题: (P126-6)

设 R 为集合 X 上的自反且传递的二元关系。

a) 给出 R 的一个实例。

b) 在 X 上定义二元关系 \sim 如下: $x \sim y$ 当且仅当 xRy 且 yRx 。 证明 \sim 为 X 上的等价关系。

c) 在商集 X/\sim 上定义二元关系 \leq : $[a] \leq [b]$ 当且仅当 aRb 。证明 \leq 为 X/\sim 上的偏序关系。