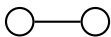


第八章 连通度和匹配

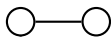
陈建文



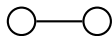
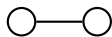
A



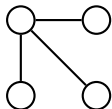
B



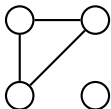
C



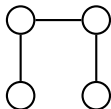
D



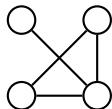
E



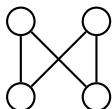
F



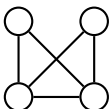
G



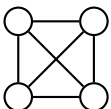
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

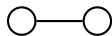
1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

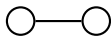
图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。



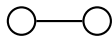
A



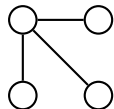
B



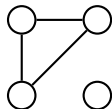
C



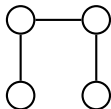
D



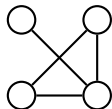
E



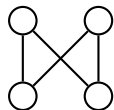
F



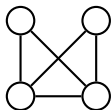
G



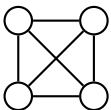
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要
从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

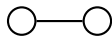
1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

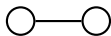
图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或者平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



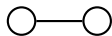
A



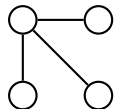
B



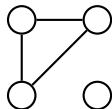
C



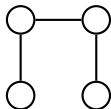
D



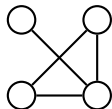
E



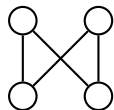
F



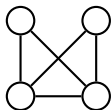
G



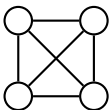
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

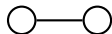
1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

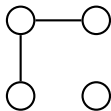
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。



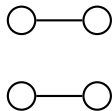
A



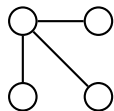
B



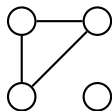
C



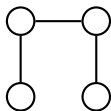
D



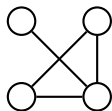
E



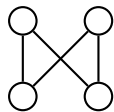
F



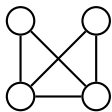
G



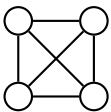
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$ ，则 G 不连通或者为平凡图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$ ，则 G 不连通或者为平凡图，此时 $\lambda(G) = 0$ ， $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后, 得到的图中 v 为孤立顶点,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后, 得到的图中 v 为孤立顶点, 所以 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后, 得到的图中 v 为孤立顶点, 所以 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。因此,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。如果 $\delta(G) = 0$, 则 G 不连通或者为平凡图, 此时 $\lambda(G) = 0$, $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 成立。如果 $\delta(G) > 0$, 不妨设 $\deg v = \delta(G)$, 从 G 中去掉与 v 关联的 $\delta(G)$ 条边之后, 得到的图中 v 为孤立顶点, 所以 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。因此, 对任意的图 G , $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。 \square

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

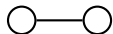
1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

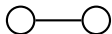
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。



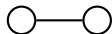
A



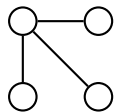
B



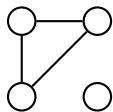
C



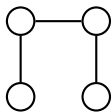
D



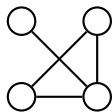
E



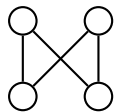
F



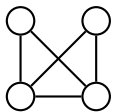
G



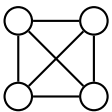
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则， x 是这样产生的图的一条桥，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则， x 是这样产生的图的一条桥，从而移去 u 或 v 就产生了一个不连通图或平凡图。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则， x 是这样产生的图的一条桥，从而移去 u 或 v 就产生了一个不连通图或平凡图。所以，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则， x 是这样产生的图的一条桥，从而移去 u 或 v 就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下，

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.1

对任一图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

接下来证明 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。如果 G 不连通或者为平凡图，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ 。如果 G 是连通的且有一座桥 x ，则 $\lambda(G) = 1$ 。因为在这种情况下 G 或者有一个割点关联于 x 或者 G 为 K_2 ，所以 $\kappa(G) = 1$ 。最后假定 $\lambda(G) \geq 2$ ，则 G 中有 $\lambda(G)$ 条边，移去它们后所得到的图不连通。显然，移去这些边中的 $\lambda(G) - 1$ 条边后得到一个图，它有一条桥 $x = uv$ 。对于这 $\lambda(G) - 1$ 条边中每一条，选取一个关联于它但与 u 和 v 都不同的顶点。移去这些顶点之后就移去了这 $\lambda(G) - 1$ 条边。如果这样产生的图是不连通的，则 $\kappa(G) < \lambda(G)$ 。否则， x 是这样产生的图的一条桥，从而移去 u 或 v 就产生了一个不连通图或平凡图。所以，在任何情况下， $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。 \square

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

对任何整数 a, b, c , $0 < a \leq b \leq c$, 存在一个图 G 使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任意一个顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任意一个顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$;

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任意一个顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$; v 与 A 中的 y 个顶点邻接, 而这 y 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_2 , 则 $F_2 \subseteq F$ 并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。如果 G 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 G 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任意一个顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$; v 与 A 中的 y 个顶点邻接, 而这 y 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_2 , 则 $F_2 \subseteq F$ 并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| \geq x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.3

设 G 为一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 为 n -顶点连通的, 简称 n -连通; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 为 n -边连通的。

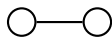
1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.3

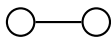
设 G 为一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 为 n -顶点连通的, 简称 n -连通; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 为 n -边连通的。



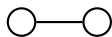
A



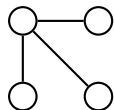
B



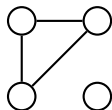
C



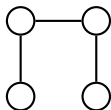
D



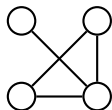
E



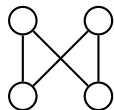
F



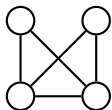
G



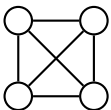
H



I



J



K

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上, 则 G 为没有割点的连通图,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上, 则 G 为没有割点的连通图, 所以 G 为 2-连通的。 □

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下施归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下施归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。当 $d(u, v) = 1$ 时,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下施归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。当 $d(u, v) = 1$ 时, 由于 $\kappa(G) \geq 2$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下施归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。当 $d(u, v) = 1$ 时, 由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 uv 不是桥,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下施归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。当 $d(u, v) = 1$ 时, 由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 uv 不是桥, 于是 uv 必在某个圈上,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设 G 为2-连通的, u 和 v 为 G 的两个不同的顶点, 以下归纳于 u 与 v 之间的距离 $d(u, v)$ 来证明 u 与 v 在同一个圈上。当 $d(u, v) = 1$ 时, 由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 uv 不是桥, 于是 uv 必在某个圈上, 所以 u 与 v 在同一个圈上。



1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v ,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v ,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是, $G - v_k$ 中存在从 u 到 v 的路 S 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是, $G - v_k$ 中存在从 u 到 v 的路 S 。 u 为 Q, W, S 的公共顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是, $G - v_k$ 中存在从 u 到 v 的路 S 。 u 为 Q, W, S 的公共顶点。设 w 为 S 上从 u 到 v 且在 Q 或 W 上的最后一个顶点。

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是, $G - v_k$ 中存在从 u 到 v 的路 S 。 u 为 Q, W, S 的公共顶点。设 w 为 S 上从 u 到 v 且在 Q 或 W 上的最后一个顶点。不妨设 w 在 Q 上,

1. 顶点连通度和边连通度

定理1.4

设 $G = (V, E)$ 为有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 为2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在同一个圈上。

证明.

设对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。以下证明对于 G 中的任意两个顶点 u 和 v , 当 $d(u, v) = k + 1$ 时, u 与 v 必在同一个圈上。由 $d(u, v) = k + 1$ 知 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的路 $P : uv_1v_2 \cdots v_kv$ 。显然 $d(u, v_k) = k$ 。由归纳假设, u 与 v_k 在同一个圈上, 于是, u 与 v_k 间有两条没有内部公共顶点 (即除 u 与 v_k 外) 的两条路 Q, W 。由于 $\kappa(G) \geq 2$, 所以 G 没有割点, 从而 $G - v_k$ 为连通图。于是, $G - v_k$ 中存在从 u 到 v 的路 S 。 u 为 Q, W, S 的公共顶点。设 w 为 S 上从 u 到 v 且在 Q 或 W 上的最后一个顶点。不妨设 w 在 Q 上, 则在 G 中存在包含 u 和 v 的圈: Q 上的 u 与 w 间一段后接 S 上 w 与 v 间的那一段, 然后是边 vv_k , 最后是 W 。□

2. 门格尔定理

定义 2.1

设 u 与 v 为图 G 中的两个不同的顶点。两条联结 u 与 v 的路，如果除了 u 与 v 外没有公共顶点，则称这两条路为联结 u 与 v 的**不相交路**；如果联结 u 与 v 的两条路上没有公共边，则称这两条路为联结 u 与 v 的**边不相交路**。

定理 2.1

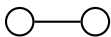
图 G 为 n -连通的当且仅当每一对不同顶点间至少有 n 条不相交路。

定理 2.2

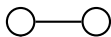
图 G 为 n -边连通的当且仅当 G 的任一对不同的顶点间至少有 n 条边不相交路。



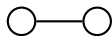
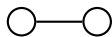
A



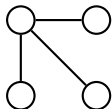
B



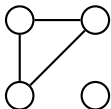
C



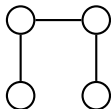
D



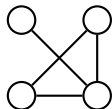
E



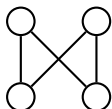
F



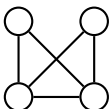
G



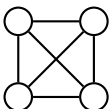
H



I



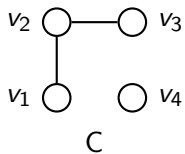
J



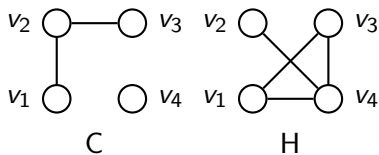
K

3. 匹配

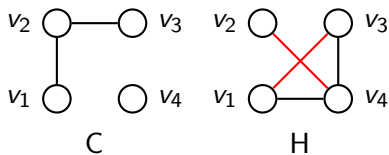
3. 匹配



3. 匹配



3. 匹配



3. 匹配

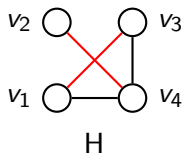
定义 3.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图, G 的任意两条不邻接的边 x 与 y 称为互相**独立**的。

3. 匹配

定义 3.1

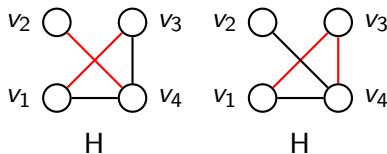
设 $G = (V, E)$ 为一个图， G 的任意两条不邻接的边 x 与 y 称为互相**独立**的。



3. 匹配

定义 3.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图, G 的任意两条不邻接的边 x 与 y 称为互相**独立**的。



3. 匹配

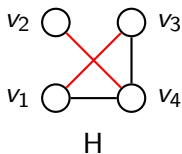
定义 3.2

图 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个匹配, 如果 Y 中任意两条不同的边都是互相独立的。

3. 匹配

定义 3.2

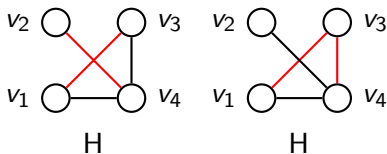
图 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个**匹配**，如果 Y 中任意两条不同的边都是互相独立的。



3. 匹配

定义 3.2

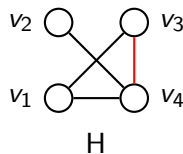
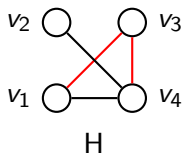
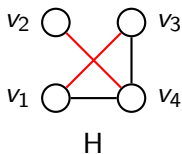
图 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个**匹配**，如果 Y 中任意两条不同的边都是互相独立的。



3. 匹配

定义 3.2

图 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个**匹配**，如果 Y 中任意两条不同的边都是互相独立的。



3. 匹配

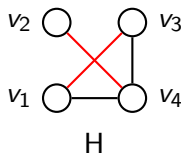
定义 3.3

设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。

3. 匹配

定义 3.3

设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。



3. 匹配

定义 3.4

设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。

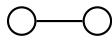
3. 匹配

定义 3.4

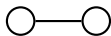
设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个**完美匹配**。



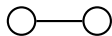
A



B



C



D



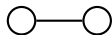
E



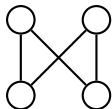
F



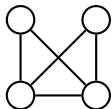
G



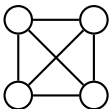
H



I



J



K

3. 匹配

定义 3.5

设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果对于 G 的任一匹配 Y' , 恒有 $|Y'| \leq |Y|$, 则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。

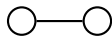
3. 匹配

定义 3.5

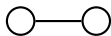
设 Y 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果对于 G 的任一匹配 Y' , 恒有 $|Y'| \leq |Y|$, 则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。



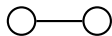
A



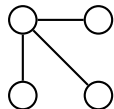
B



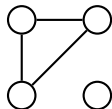
C



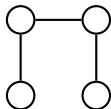
D



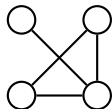
E



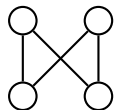
F



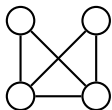
G



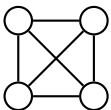
H



I



J



K

3. 匹配

定义 3.6

设 $G = (V, E)$ 为一个偶图且 $V = V_1 \cup V_2$, $\forall x \in E$, x 为联结 V_1 的一个顶点与 V_2 的一个顶点的边。如果存在 G 的一个匹配 Y 使得 $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$, 则称 Y 是偶图 G 的一个完全匹配。

匹配

定理 3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

匹配

定义 3.7

设 M 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果一条路 P 上的边在 M 与 $E \setminus M$ 中交错出现，则称路 P 为图 G 中的一条**M-交错路**。

匹配

定义 3.7

设 M 为图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果一条路 P 上的边在 M 与 $E \setminus M$ 中交错出现，则称路 P 为图 G 中的一条**M-交错路**。进一步，如果 P 的两个端点都不与 M 中的边相关联，则称 P 为一条**M-增广路**。

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是: 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图,

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$,

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是: 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$, 则显然对 V_1 的任意子集 A ,

匹配

定理3.1

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 M 且 $|M| = |V_1|$ 的充分必要条件是: 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 \mid \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$, 则显然对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。

证明.

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A ,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。显然 $B \subseteq N(R)$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。显然 $B \subseteq N(R)$ 。由 $N(R)$ 中的每个顶点都在从 u 出发的一条 M^* 交错路上知 $N(R) \subseteq B$ 。

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。显然 $B \subseteq N(R)$ 。由 $N(R)$ 中的每个顶点都在从 u 出发的一条 M^* -交错路上知 $N(R) \subseteq B$ 。由 $|B| = |R| - 1$ 及 $B = N(R)$ 知 $|N(R)| = |R| - 1$,

证明.

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。用反证法证明 G 一定存在一个完全匹配。假设 G 中不存在完全匹配。设 M^* 为 G 的一个最大匹配, 则 M^* 不是 G 的完全匹配, 从而存在顶点 $u \in V_1$, u 不与 M^* 中的任意一条边相关联。设 Z 为所有可以从顶点 u 经由一条 M^* -交错路到达的顶点构成的集合。由 M^* 为一个最大匹配知 u 为 Z 中唯一没有与 M^* 中的边相关联的顶点。记 $R = V_1 \cap Z$, $B = V_2 \cap Z$ 。显然 $f = \{(x, y) \in R \setminus \{u\} \times B \mid \{x, y\} \in M^*\}$ 为从集合 $R \setminus \{u\}$ 到 B 的双射, 因此 $|B| = |R| - 1$ 。以下证明 $N(R) = B$ 。显然 $B \subseteq N(R)$ 。由 $N(R)$ 中的每个顶点都在从 u 出发的一条 M^* -交错路上知 $N(R) \subseteq B$ 。由 $|B| = |R| - 1$ 及 $B = N(R)$ 知 $|N(R)| = |R| - 1$, 与已知条件矛盾。 \square

AUGMENTING-PATH-SEARCH(G, M, u)

// G is a bipartite graph satisfying the Hall condition,

// M is a match in G ,

// and u is a vertex which is not incident to any edge in M

1 $V(T) = \{u\}$

2 $E(T) = \phi$

3 $R(T) = \{u\}$

4 **while** there is an edge xy with $x \in R(T)$ and $y \in V(G) \setminus V(T)$

5 $V(T) = V(T) \cup \{y\}$

6 $E(T) = E(T) \cup \{xy\}$

7 **if** y is incident with an edge yz in M

8 $V(T) = V(T) \cap \{z\}$

9 $E(T) = E(T) \cup \{yz\}$

10 **else**

11 $M = M \triangle E(P)$, where $P = uTy$

12 **return** M

3. 匹配

定义 3.8

设 X 为一个有穷集合, (A_1, A_2, \dots, A_n) 为 X 的子集的一个序列, 由 X 的互不相同的元素构成的集合 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 称为系统

$$T : A_1, A_2, \dots, A_n$$

的相异代表系, 如果 $s_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

匹配

定理 3.2

设 X 为一个有限集, 系统 $\mathcal{T} : A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 X 的一些子集组成的, 则 \mathcal{T} 有相异代表系的充分必要条件是 $\forall I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ 有

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$$

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2)

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P : uu_1u_2 \dots u_kv_k$,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P : uu_1u_2 \dots u_kv_k$, 此时如果 v 不在路 P 中出现,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P: uu_1u_2 \dots u_kv_k$, 此时如果 v 不在路 P 中出现, 则路 P 之后接顶点 v 就构成了 u 与 v 之间的一条路 $uu_1u_2 \dots u_kv_kv$;

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P: uu_1u_2 \dots u_kv_k$, 此时如果 v 不在路 P 中出现, 则路 P 之后接顶点 v 就构成了 u 与 v 之间的一条路 $uu_1u_2 \dots u_kv_kv$; 如果 v 在路 P 中出现,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P: uu_1u_2 \dots u_kv_k$, 此时如果 v 不在路 P 中出现, 则路 P 之后接顶点 v 就构成了 u 与 v 之间的一条路 $uu_1u_2 \dots u_kv_kv$; 如果 v 在路 P 中出现, 设 v 在路 P 中的第一次出现记为 u_i ,

练习:

设图 G 的顶点 u 与 v 之间有一条通道, 那么 u 与 v 之间有一条路。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点 u 与 v 之间通道的长 l 。

(1) 当 $l = 0$ 时, 顶点 u 与 v 之间有一条长为0的通道, 此时 $u = v$, 显然 u 与 v 之间有一条路。

(2) 假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。设顶点 u 与 v 之间有一条长为 $k + 1$ 的通道 $uv_1v_2 \cdots v_kv$, 则顶点 u 与顶点 v_k 之间有一条长为 k 的通道。由归纳假设, u 与 v_k 之间有一条路 $P: uu_1u_2 \dots u_kv_k$, 此时如果 v 不在路 P 中出现, 则路 P 之后接顶点 v 就构成了 u 与 v 之间的一条路 $uu_1u_2 \dots u_kv_kv$; 如果 v 在路 P 中出现, 设 v 在路 P 中的第一次出现记为 u_i , 那么路 P 中从 u 到 u_i 之间的路 $uu_1u_2 \dots u_i$ 就是 u 与 v 之间的一条路。 \square

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈?

答.

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹), 则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道,

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹), 则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道, 则 G 中不一定有圈。举例如下: 考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$,

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹), 则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道, 则 G 中不一定有圈。举例如下: 考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$, 则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道, 但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹, 则 G 中一定有圈。证明如下:

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路，设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路，设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点，则 $v_iv_{i+1} \dots v_j$ 构成 G 中的一个圈；

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹), 则 G 中是否有圈?

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道, 则 G 中不一定有圈。举例如下: 考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$, 则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道, 但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹, 则 G 中一定有圈。证明如下: 设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路, 则 G 中有圈; 如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路, 设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点, 则 $v_iv_{i+1} \dots v_j$ 构成 G 中的一个圈; 同理,

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路，设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点，则 $v_iv_{i+1} \dots v_j$ 构成 G 中的一个圈；同理，如果 T_2 不是路，

练习:

设 u 与 v 为图 G 的两个不同的顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有圈？

答.

设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。如果 u 与 v 间有两条不同的通道，则 G 中不一定有圈。举例如下：考虑 $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ ，则 uv 和 $uvuv$ 为 u 与 v 间两条不同的通道，但 G 中没有圈。

如果 u 与 v 间有两条不同的迹，则 G 中一定有圈。证明如下：设 u 与 v 间有两条不同的迹 T_1 和 T_2 。如果 T_1 和 T_2 都为路，则 G 中有圈；如果 $T_1 = uv_1v_2 \dots v_nv$ 不是路，设 $v_j = v_i (i < j)$ 为第一个重复的顶点，则 $v_iv_{i+1} \dots v_j$ 构成 G 中的一个圈；同理，如果 T_2 不是路， G 中有圈。□

参考文献



D. Gale and L. S. Shapley.

College Admissions and the Stability of Marriage.

The American Mathematical Monthly, 1962.