习题 1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系?

习题 2. 是否存在一个同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性的二元关系?

习题 3. 设R和S为集合X上的二元关系，下列命题哪些成立：

*a)*如果R与S为自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为自反的;
*b)*如果R与S为反自反的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反自反的;
*c)*如果R与S为对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为对称的;
*d)*如果R与S为反对称的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为反对称的;
*e)*如果R与S为传递的，则$R \cup S$和$R \cap S$也为传递的;
*f)*如果R与S不是自反的，则$R \cup S$不是自反的;
*g)*如果R为自反的，则R^c为反自反的;
*h)*如果R与S为传递的，则$R \setminus S$为传递的。

习题 4. 设R与S为集合X上的二元关系，证明：

a) $(R^{-1})^{-1} = R$;
b)$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
c)$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
*d)*如果$R \subseteq S$，则$R^{-1} \subseteq S^{-1}$。

习题 5. 设R为集合X上的二元关系。证明：$R \cup R^{-1}$为集合X上对称的二元关系。

习题 6. 设$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确。请找出正确的哪一个。

（1）*(a)* 若$f(x) \in f(A)$，则x可能属于A，也可能不属于A;
*(b)*若$f(x) \in f(A)$，则$x \in A$;
*(c)*若$f(x) \in f(A)$，则$x \notin A$;
*(d)*若$f(x) \in f(A)$，则$x \in A^c$。
（2）*(a)* $f(f^{-1}(B)) = B$;
(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;
(c) $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$;
(d)$f(f^{-1}(B)) = B^c$。
（3）*(a)*$f^{-1}(f(A)) = A$;
(b) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$;
(c)$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;
*(d)*以上三个均不对。
（4）*(a)*$f(A) \neq \phi$;
(b)$f^{-1}(B) \neq \phi$;
*(c)*若$y \in Y$，则$f^{-1}(\{y\}) \in X$;
*(d)*若$y \in Y$，则$f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$。

习题 7. 设$X = \{a, b, c\}$，$Y = \{0, 1\}$，$Z = \{2, 3\}$。$f : X \to Y$，$f(a) = f(b) = 0$，$f(c) = 1$；$g : Y \to Z$，$g(0) = 2, g(1) = 3$。试求$g \circ f$。

习题 8. 设$N = \{1, 2, \cdots\}$，试构造两个从集合N到集合N的映射f与g，使得$fg = I_N$，但$gf \neq I_N$。

习题 9. 设$f: X \to Y$。

（1）如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$gf = I_X$，那么f是否可逆呢?

（2）如果存在唯一的一个映射$g: Y \to X$，使得$fg = I_Y$，那么f是否可逆呢?

习题 10. 设$f: X \to Y$，X与Y为有穷集合，

（1）如果f是左可逆的，那么f有多少个左逆映射?

（2）如果f是右可逆的，那么f有多少个右逆映射?

习题 11. 是否有一个从X到X的一一对应f，使得$f = f^{-1}$，但$f \neq I_X$?

习题 12. 设$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$。求$\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_2\sigma_1$，$\sigma_1^{-1}$，$\sigma_2^{-1}$。

习题 13. 将置换$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$分解成对换的乘积。