

# 离散数学讲义

陈建文

March 22, 2022



# 第三章 关系

**定义3.1.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \nabla R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例3.1.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} & \subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T, \\ & \subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T \end{aligned}$$

**定义3.2.** 设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \nabla R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

**例3.2.** 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 $2^X$ 上的二元关系 $\subseteq$ 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = & \{(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}), \\ & (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ & (\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

**例3.3.** 自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系“ $\leq$ ”为 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

**例3.4.** 设 $n$ 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 $m, k$ ，如果 $m - k$ 能被 $n$ 整除，则称 $m$ 与 $k$ 为模 $n$ 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 $m$ 被 $n$ 除所得到的余数与 $k$ 被 $n$ 除所得到的余数相等。模 $n$ 同余为 $\mathbb{Z}$ 上的一个二元关系。

**定义3.3.** 设 $R \subseteq A \times B$ ，集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的定义域, 记为 $dom(R)$ ; 集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的值域, 记为 $ran(R)$ 。

**定义3.4.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 $R$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 $n$ 元关系, 每个 $A_i$ 称为 $R$ 的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (not necessarily distinct),  $R$  is a relation on these  $n$  sets if it is a set of  $n$ -tuples each of which has its first element from  $S_1$ , its second element from  $S_2$ , and so on. More concisely,  $R$  is a subset of the Cartesian product  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

**定义3.5.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。

**例3.5.** 判断下列二元关系是否为自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.6.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

**例3.6.** 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)

5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)

**定义3.7.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ , 只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

**例3.7.** 判断下列二元关系是否为对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (不是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (不是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.8.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反对称的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ,  $xRy$ 且 $yRx$ , 则 $x = y$ 。

**例3.8.** 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**定义3.9.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ , 只要 $xRy$ 且 $yRz$ , 就有 $xRz$ 。

**例3.9.** 判断下列二元关系是否为传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

1. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  (是)
2. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$  (不是)
3. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  (不是)
4. 集合 $X$ 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$  (是)
5. 集合 $X$ 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$  (是)

**练习3.1.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的反自反的和传递的二元关系, 证明:  $R$ 为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的 $x \in X, y \in Y$ , 如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ , 则由 $R$ 为传递的知 $(x, x) \in R$ , 这与 $R$ 为反自反的矛盾, 从而 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ 不可能成立。即如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ , 则 $x = y$ 成立, 这证明了 $R$ 为反对称的。

□

证法二. 对任意的  $x \in X$ ,  $y \in X$ , 如果  $(x, y) \in R$  并且  $x \neq y$ , 以下证明  $(y, x) \notin R$ 。用反证法, 假设  $(y, x) \in R$ , 则由  $R$  为传递的知  $(x, x) \in R$ , 这与  $R$  为反自反的矛盾  $\square$

证法三. 用反证法。假设  $R$  不是反对称的二元关系, 则存在  $x \in X$ ,  $y \in X$ ,  $(x, y) \in R$ ,  $(y, x) \in R$  并且  $x \neq y$ , 由  $R$  为传递的知,  $(x, x) \in R$ , 这与  $R$  为反自反的矛盾。  $\square$

**定义3.10.** 设  $R$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的二元关系,  $R$  的逆  $R^{-1}$  定义为从集合  $B$  到集合  $A$  的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

**定理3.1.** 设  $R$  为集合  $X$  上的二元关系, 则  $R$  为对称的当且仅当  $R = R^{-1}$ 。

**定义3.11.** 设  $R$  为从集合  $A$  到集合  $B$ ,  $S$  为从集合  $B$  到集合  $C$  的二元关系。  $R$  与  $S$  的合成  $R \circ S$  定义为从集合  $A$  到集合  $C$  的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

**定理3.2.** 设  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  分别为从集合  $A$  到集合  $B$ , 从集合  $B$  到集合  $C$ , 从集合  $C$  到集合  $D$  的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

**定理3.3.** 设  $R$  为集合  $X$  上的一个二元关系, 则  $R$  为传递的当且仅当  $R \circ R \subseteq R$ 。

**定义3.12.** 设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  为一个包含  $m$  个元素的集合,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  为一个包含  $n$  个元素的集合,  $R$  为从  $X$  到  $Y$  的一个二元关系。由  $R$  定义一个  $m \times n$  矩阵  $B = (b_{ij})$  如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵  $B$  称为关系  $R$  的矩阵。

**例3.10.** 设集合  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从  $X$  到  $Y$  的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

, 则  $S$  的关系矩阵为?

**例3.11.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$ , 则  $R$  的关系矩阵为?

**定理3.4.** 设  $B$  为集合  $X$  上二元关系  $R$  的矩阵, 则

1.  $R$  为自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 1;
2.  $R$  为反自反的, 当且仅当  $B$  的对角线上的全部元素都为 0;
3.  $R$  为对称的, 当且仅当  $B$  为对称矩阵;

4.  $R$ 为反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 $b_{ij}$ 与 $b_{ji}$ 不同时为1;

5.  $R$ 为传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$ , 则 $b_{ik} = 1$ 。

**定理3.5.** 设 $B$ 为集合 $X$ 上二元关系 $R$ 的矩阵, 则 $R^{-1}$ 的矩阵为 $B^T$ 。

**定义3.13.** 设 $B, C$ 为两个布尔矩阵,  $B$ 与 $C$ 的逻辑乘为 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为 $B \wedge C$ , 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$ 与 $C$ 的逻辑加为 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为 $B \vee C$ , 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

**定理3.6.** 设 $R, S$ 为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的二元关系, 其矩阵分别为 $B_R$ 和 $B_S$ 。  $R \cup S$ 与 $R \cap S$ 的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$ ,  $B_{R \cap S}$ , 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

**定义3.14.** 设 $A$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵,  $B$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵,  $A$ 与 $B$ 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**定理3.7.** 设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m$ ,  $|Y| = p$ ,  $|Z| = n$ 。  $R$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 为从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ , 关系 $R$ 的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系 $R \circ R$ 的矩阵为

$$B_{R \circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

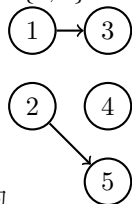
证明. 设  $B_R = (a_{ij})$ ,  $B_S = (b_{ij})$ ,  $B_{R \circ S} = (c_{ij})$ ,

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= 1 \\
 &\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S \\
 &\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\
 &\Leftrightarrow (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1) \\
 &\Leftrightarrow (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1
 \end{aligned}$$

□

关系除了用矩阵表示外, 还可以用图来表示。设  $X$  和  $Y$  为有穷集合,  $R$  为从  $X$  到  $Y$  的二元关系。当用图表示  $R$  时, 先把  $X$  与  $Y$  的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把  $R$  的任一序对  $(x, y)$  用从代表  $x$  的点画一条指向代表  $y$  的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系  $R$  的图。

设  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 从  $X$  到  $Y$  的关系  $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$ , 则关

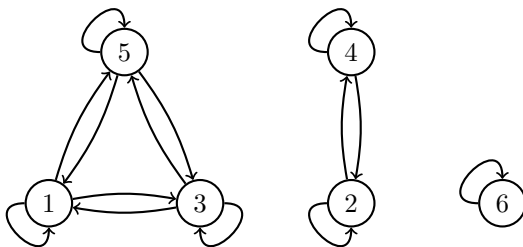


系  $R$  的图为

设  $X$  为有穷集合,  $R$  为集合  $X$  上的二元关系。当用图表示  $R$  时, 先把  $X$  的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把  $R$  的任一序对  $(x, y)$  用从代表  $x$  的点画一条指向代表  $y$  的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系  $R$  的图。注意, 如果  $(x, x) \in R$ , 则在代表  $x$  的点画一条又指向此点的矢线, 称为环。

设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$\begin{aligned}
 R = \{ &(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), \\
 &(4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6) \},
 \end{aligned}$$



则关系  $R$  的图为

**定理3.8.** 设  $R$  为集合  $X$  上的二元关系, 则



1.  $R$ 为自反的, 当且仅当 $R$ 的图的每个顶点均有一个环;
2.  $R$ 为反自反的, 当且仅当 $R$ 的图中没有环;
3.  $R$ 为对称的, 当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线;
4.  $R$ 为反对称的, 当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线, 则不能有两条方向相反的矢线;
5.  $R$ 为传递的, 当且仅当在 $R$ 的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

**定义3.15.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。 $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包, 用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

**定理3.9.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 为包含 $R$ 的传递关系。

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $R$ 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

**定理3.10.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X, b \in X, n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$ , 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X, x_k \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$ 。□

**定理3.11.** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明. 首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 $R^+$ 的定义, 只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 $R$ 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$ , 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ , 则存在正整数 $m$ 和 $n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ , 则存在正整数 $m+n$ 使得 $(a, c) \in R^{m+n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

$R^m$  且  $(b, c) \in R^n$ 。于是  $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$ ，从而  $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以， $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$  是传递的。

其次证明  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的  $a \in X$ ， $b \in X$ ，如果  $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，则存在某个正整数  $m$ ，使得  $(a, b) \in R^m$ 。如果  $m = 1$ ，则  $(a, b) \in R \subseteq R^+$ ；如果  $m > 1$ ，则存在  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$  使得  $(a, b_1) \in R$ ， $(b_1, b_2) \in R$ ， $\dots$ ， $(b_{m-1}, b) \in R$ 。由  $R \subseteq R^+$  知  $(a, b_1) \in R^+$ ， $(b_1, b_2) \in R^+$ ， $\dots$ ， $(b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为  $R^+$  为传递的，所以  $(a, b) \in R^+$ 。于是， $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

因此， $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。□

**定理3.12.** 设  $R$  为集合  $X$  上的一个二元关系， $|X| = n$ ，则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明。只须证明对任一自然数  $k > n$ ，有  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此，设  $(a, b) \in R^k$ ，则存在  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$  使得  $(a, b_1) \in R$ ， $(b_1, b_2) \in R$ ， $\dots$ ， $(b_{k-2}, b_{k-1}) \in R$ ， $(b_{k-1}, b) \in R$ 。记  $b_0 = a$ ， $b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$  是  $X$  中的  $k$  个元素，而  $X$  中仅有  $n$  个元素， $n < k$ ，所以  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$  中必有二个相等的元素。设  $b_i = b_j$ ， $1 \leq i < j \leq k$ 。于是，我们有  $(a, b_1) \in R$ ， $\dots$ ， $(b_{i-1}, b_i) \in R$ ， $(b_j, b_{j+1}) \in R$ ， $\dots$ ， $(b_{k-1}, b) \in R$ ，故  $(a, b) \in R^{k-(j-i)}$ ， $p_1 = k - (j - i) < k$ 。若  $p_1 = k - (j - i) > n$ ，则重复上述过程又有  $p_2 < p_1$  使得  $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去，必有  $m \leq n$  使得  $(a, b) \in R^m$ 。所以， $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此， $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。□

**定理3.13.** 设  $R$  为集合  $X$  上的一个二元关系， $|X| = n$ ， $B$  为  $R$  的关系矩阵， $B_{R^+}$  为  $R^+$  的关系矩阵，简记为  $B^+$ ，则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合  $X$  上关系  $R$  的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $M = B$

2  $A = M$

3 **for**  $i = 2$  **to**  $n$

4      $M = M \circ B$

5      $A = A \vee M$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

```

WARSHALL( $B$ )
  //  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3    for  $i = 1$  to  $n$ 
4      if  $a_{ik} = 1$ 
5        for  $j = 1$  to  $n$ 
6           $a_{ij} = a_{ij} \vee a_{kj}$ 
7  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 

```

**定义3.16.** 集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**等价关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

1.  $R$ 为自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
2.  $R$ 为对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ ，则 $yRx$ ；
3.  $R$ 为传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一，是不是有点抽象？我们可以借助一个具体的例子，帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在，我们是不是学了许多类似于“ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ”的等式？这里的等价关系就是从“=”抽象出来的。（1） $x = x$ ；（2）如果 $x = y$ ，那么 $y = x$ ；（3）如果 $x = y$ 并且 $y = z$ ，那么 $x = z$ 。是不是显然成立呀？我们可以借助熟知的“=”来理解等价关系的定义。

**例3.12.** 整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系为 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

证明. 只需验证整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系满足自反性，对称性和传递性。

(1) 自反性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $m \equiv m \pmod{n}$ 。（注：我们用 $m \equiv k \pmod{n}$ 表示 $m$ 与 $k$ 模 $n$ 同余，即 $n|(m-k)$ ）

(2) 对称性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，如果 $m \equiv k \pmod{n}$ ，则 $n|(m-k)$ ，于是 $n|(k-m)$ ，即 $k \equiv m \pmod{n}$ 。

(3) 传递性成立，这是因为对任意的 $m \in \mathbb{Z}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， $l \in \mathbb{Z}$ ，如果 $m \equiv k \pmod{n}$ 并且 $k \equiv l \pmod{n}$ ，则 $n|(m-k)$ 并且 $n|(k-l)$ ，从而 $n|((m-k) + (k-l))$ ，即 $n|(m-l)$ ，因此 $m \equiv l \pmod{n}$ 。□

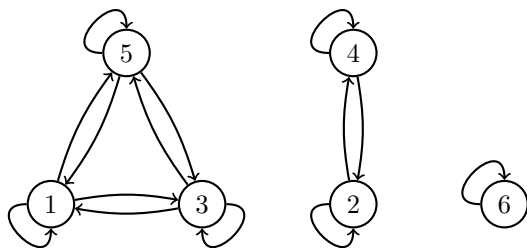
**例3.13.** 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下：

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则 $R$ 为 $X$ 上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。□

证法二. 画出 $R$ 的关系图进行判断。



- (1) 在 $R$ 的图中, 每个顶点均有一个环, 这说明 $R$ 为自反的;  
 (2) 在 $R$ 的图中, 如果任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线, 这说明 $R$ 为对称的;  
 (3) 在 $R$ 的图中, 如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线, 这说明 $R$ 为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断, 首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系 $R$ 的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1)  $B$ 的对角线上的元素全为1说明 $R$ 为自反的;  
 (2)  $B$ 为对称矩阵说明 $R$ 为对称的;  
 (3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $B \circ B$ 中的每个元素小于等于 $B$ 中的每个元素知 $R$ 为传递的。

□

**定义3.17.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系,  $x \in X$ ,  $X$ 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 $x$ 关于 $\cong$ 的等价类, 记为 $[x]$ , 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

**例3.14.** 在例3.12中我们已经知道模4同余关系为等价关系，试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为 $\{[0], [1], [2], [3]\}$ , 其中

$$\begin{aligned}[0] &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}\end{aligned}$$

□

**例3.15.** 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 $R$ 定义如下:

$$\begin{aligned}R = \{ &(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), \\ &(4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},\end{aligned}$$

在例3.13中, 我们知道 $R$ 为 $X$ 上的等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合 $X$ 上每个元素关于关系 $R$ 的等价类:

$$\begin{aligned}[1] &= \{1, 3, 5\} \\ [2] &= \{2, 4\} \\ [3] &= \{1, 3, 5\} \\ [4] &= \{2, 4\} \\ [5] &= \{1, 3, 5\} \\ [6] &= \{6\}\end{aligned}$$

你发现了什么? 有重复! 于是关系 $R$ 的所有等价类所构成的集合为 $\{[1], [2], [6]\}$ , 即 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 。 □

通过以上的例子, 我们发现了以下的结论:

**定理3.14.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系, 对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ ,  $x \cong y$ 当且仅当 $[x] = [y]$ 。

证明. 对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ , 由 $x \cong y$ 往证 $[x] = [y]$ 。这里是要证明两个集合相等。对任意的 $z \in [x]$ , 则 $x \cong z$ , 由 $\cong$ 的对称性知 $z \cong x$ , 再由 $\cong$ 的传递性及 $x \cong y$ 知 $z \cong y$ , 由 $\cong$ 的对称性知 $y \cong z$ , 从而 $z \in [y]$ 。对任意的 $z \in [y]$ , 则 $y \cong z$ , 由 $\cong$ 的传递性及 $x \cong y$ 知 $x \cong z$ , 从而 $z \in [x]$ 。这证明了 $[x] = [y]$ 。

对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ , 由 $[x] = [y]$ 往证 $x \cong y$ 。由 $\cong$ 的自反性知 $x \cong x$ , 从而 $x \in [x]$ , 再由 $[x] = [y]$ 知 $x \in [y]$ , 从而 $y \cong x$ , 由 $\cong$ 的对称性得 $x \cong y$ 。 □

**定义3.18.** 设 $X$ 为集合,  $X$ 的一些非空子集形成的集族 $\mathcal{A}$ 称为 $X$ 的一个划分, 如果 $\mathcal{A}$ 具有性质

1.  $\forall A, B \in \mathcal{A}$ , 如果 $A \neq B$ , 则 $A \cap B = \phi$ ;

$$2. \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$$

**例3.16.** 集合

$$\begin{aligned} & \{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}, \\ & \{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\} \end{aligned}$$

构成了整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个划分。

**例3.17.** 集合 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$  构成了集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个划分。

**定理3.15.** 设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系，则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成了集合 $X$ 的一个划分。

证明. 这就是要证明 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 $X$ 的一个划分。

对任意的 $x \in X$ ，由 $\cong$ 的自反性知 $x \cong x$ ，从而 $x \in [x]$ ，这证明了 $[x]$ 非空。

对任意的 $x \in X, y \in X$ ，如果 $[x] \neq [y]$ ，以下证明 $[x] \cap [y] = \emptyset$ 。用反证法，假设 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ，则存在 $z \in [x] \cap [y]$ ，于是 $z \in [x]$ 并且 $z \in [y]$ 。由 $z \in [x]$ 知 $x \cong z$ ，由 $z \in [y]$ 知 $y \cong z$ 。由 $\cong$ 的对称性可得 $z \cong y$ ，再由 $\cong$ 的传递性可得 $x \cong y$ ，从而 $[x] = [y]$ ，矛盾。

由对任意的 $x \in X$ ， $x \in [x]$ 易知 $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ 。

综上，我们证明了 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 $X$ 的一个划分。  $\square$

**定理3.16.** 设 $\mathcal{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$$

则 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 为集合 $X$ 的一个划分，则

$$\begin{aligned} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A \\ &= (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\}) \cup (\{6\} \times \{6\}) \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6)\} \end{aligned}$$

为集合 $X$ 上的一个等价关系。

证明. 这就是要验证 $\cong$ 满足自反性、对称性和传递性。

(1) 对任意的 $x \in X$ ，由 $\mathcal{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ ，从而 $(x, x) \in A \times A$ ，于是， $(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 $\cong$ 满足自反性。

(2) 对任意的  $x \in X, y \in X$ , 如果  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 那么存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $(x, y) \in A \times A$ , 从而  $(y, x) \in A \times A$ , 于是  $(y, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 这说明  $\cong$  满足对称性。

(3) 对任意的  $x \in X, y \in X, z \in X$ , 如果  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 并且  $(y, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 那么存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $(x, y) \in A \times A$ , 并且存在  $B \in \mathcal{A}$  使得  $(y, z) \in B \times B$ 。于是,  $x \in A, y \in A, y \in B, z \in B$ 。此时, 必有  $A = B$ , 否则  $A \cap B = \emptyset$ , 这与  $y \in A$  并且  $y \in B$  矛盾。从而,  $x \in A, z \in A$ , 因此,  $(x, z) \in A \times A$ , 于是  $(x, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 这说明  $\cong$  满足传递性。

□

本门课一个很重要的结论为“集合  $X$  上的所有等价关系之集与集合  $X$  的所有划分之集之间存在着——对应的关系”。为了证明这个结论, 我们需要构造一个从集合  $X$  上的所有等价关系之集到集合  $X$  的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗? 一个映射为双射, 当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合  $X$  上的所有等价关系之集到集合  $X$  的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗?

设  $f: X \rightarrow Y$  为一个映射。如果存在一个映射  $g: Y \rightarrow X$  使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射  $f$  为可逆的, 而  $g$  称为  $f$  的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念, 我们有如下的定理:

**定理3.17.** 设  $X$  为一个集合,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{ 为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\}, \\ \mathbb{A} &= \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{ 为集合 } X \text{ 的一个划分}\}, \\ f &= \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\} \\ g &= \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\} \end{aligned}$$

则  $f$  为从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{A}$  的双射, 且  $f^{-1} = g$ 。

如果我们能够完全理解该定理, 并能够从“0”开始给出该定理的证明过程, 即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明, 那么, 整个前三章的内容, 我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程, 顺藤摸瓜, 这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明, 直到可以从头开始说起, 这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗? 答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合:  $X = \{1, 2, 3\}$ 。那么  $\mathbb{R}$  表示集合  $X$  上所有的等价关系构成的集合, 这个集合是怎样的? 这个问题不好回答吧?

让我们先看  $\mathbb{A}$  吧。  $\mathbb{A}$  表示集合  $X$  的所有划分构成的集合。这个集合比较好写, 你能写出答案吗? 我的答案是这样的:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = & \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ & \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

对任意的  $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ , 我们计算  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 就可以得到  $X$  上的一个等价关系。该定理是在说, 在  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{A}$  之间存在一个一一对应的关系, 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}, \\ & \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\end{aligned}$$

- 证明. 1. 证明  $f$  为映射。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个等价关系  $\cong$ ,  $\{[x]_{\cong} | x \in X\}$  为集合  $X$  的一个划分。这就是定理 3.15。
2. 证明  $g$  为映射。这就是要证明对于集合  $X$  的任意一个划分  $\mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  为集合  $X$  上的一个等价关系。这就是定理 3.16。
3. 证明  $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个等价关系  $\cong$ ,  $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。

这里是要证明两个集合相等。

对任意的  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ , 如果  $(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ , 那么存在  $x \in X$ ,  $(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ , 于是  $x_1 \in [x]_{\cong}$  并且  $x_2 \in [x]_{\cong}$ , 从而  $x \cong x_1$  并且  $x \cong x_2$ , 由  $\cong$  的对称性知  $x_1 \cong x$ , 再由  $\cong$  的传递性知  $x_1 \cong x_2$ , 即  $(x_1, x_2) \in \cong$ 。

对任意的  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ , 如果  $(x_1, x_2) \in \cong$ , 则  $x_1 \cong x_2$ , 从而  $x_2 \in [x_1]_{\cong}$ , 由  $\cong$  的自反性知  $x_1 \cong x_1$ , 从而  $x_1 \in [x_1]_{\cong}$ 。于是,  $(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ 。

4. 证明  $f \circ g = I_{\mathbb{A}}$ 。这就是要证明对于集合  $X$  上的任意一个划分  $\mathcal{A}$ , 关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的等价类的集合就是  $\mathbb{A}$ 。

这里还是要证明两个集合相等。

对任意的  $x \in X$ , 设  $[x]$  为关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类, 以下证明  $[x] \in \mathbb{A}$ 。由  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$  知存在  $A \in \mathcal{A}$  使得  $x \in A$ 。如果我们能够证明  $[x] = A$ , 则  $[x] \in \mathbb{A}$  得证。对任意的  $y \in [x]$ , 则  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 。于是, 存在  $B \in \mathcal{A}$  使得  $(x, y) \in B \times B$ , 如果  $B \neq A$ , 那么  $x \in A$  且  $x \in B$ , 这与  $A \cap B = \emptyset$  矛盾, 从而  $B = A$ , 因此  $y \in A$ 。反之, 对任意的  $y \in A$ , 则  $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 从而  $y \in [x]$ 。这证明了  $[x] = A$ , 从而  $[x] \in \mathbb{A}$ 。



对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 以下证明  $A$  为等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类。  
 由  $A$  非空知, 存在  $x, x \in A$ , 以下证明  $A = [x]$ , 这里  $[x]$  表示  $x$  关于等价关系  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$  的一个等价类。对任意的  $y \in A$ , 则  $(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ , 从而  $y \in [x]$ 。反之, 如果  $y \in [x]$ , 则由与前面相类似的, 可以证明  $y \in A$ 。这证明了  $A = [x]$ 。

□

**定义3.19.** 设  $\cong$  为  $X$  上的等价关系,  $\cong$  的所有等价类之集称为  $X$  对  $\cong$  的商集, 记为  $X/\cong$ 。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x] \text{ 为 } x \text{ 关于 } \cong \text{ 的等价类}\}$$

**例3.18.** 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\cong$  为集合  $X$  的等价关系,  $X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ , 试求  $\cong$ 。

**定义3.20.** 集合  $X$  上的二元关系  $R$  称为 **偏序关系**, 如果  $R$  同时满足以下三个性质:

1.  $R$  为自反的, 即对  $X$  中的任意元素  $x$ ,  $xRx$ ;
2.  $R$  为反对称的, 即对  $X$  中的任意元素  $x, y$ , 如果  $xRy$  且  $yRx$ , 则  $x = y$ ;
3.  $R$  为传递的, 即对  $X$  中的任意元素  $x, y, z$ , 如果  $xRy$  且  $yRz$ , 则  $xRz$ 。

**定义3.21.** 设  $\leq$  为集合  $X$  上的一个偏序关系, 则称二元组  $(X, \leq)$  为一个 **偏序集**。

**例3.19.** 实数集  $\mathbb{R}$  上通常的“小于等于”关系  $\leq$  为一个偏序关系, 所以  $(\mathbb{R}, \leq)$  为一个偏序集。

**例3.20.** 设  $S$  为一个集合,  $S$  的子集间的包含关系  $\subseteq$  为  $2^S$  上的一个偏序关系, 所以  $(2^S, \subseteq)$  为一个偏序集。

**例3.21.** 设集合  $X = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则  $R$  为  $X$  上的偏序关系。

**定义3.22.** 设  $\leq$  为集合  $X$  上的偏序关系, 如果  $\forall x, y \in X$ ,  $x \leq y$  与  $y \leq x$  至少有一个成立, 则称  $\leq$  为  $X$  上的全序关系。相应的, 二元组  $(X, \leq)$  称为全序集。

**定义3.23.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in A$  使得  $\forall x \in A$  有  $x \leq s$ , 则称  $s$  为  $A$  的**最大元素**; 如果存在一个元素  $t \in A$  使得  $\forall x \in A$  有  $t \leq x$ , 则称  $t$  为  $A$  的**最小元素**。

我们用  $x < y$  表示  $x \leq y$  且  $x \neq y$ 。

**定义3.24.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in A$ , 在  $A$  中没有元素  $x$  使得  $s < x$ , 则称  $s$  为  $A$  的**极大元素**; 如果存在一个元素  $t \in A$ , 在  $A$  中没有元素  $x$  使得  $x < t$ , 则称  $t$  为  $A$  的**极小元素**。

**定义3.25.** 设  $(X, \leq)$  为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素  $s \in X$  使得  $\forall x \in A$  有  $x \leq s$ , 则称  $s$  为  $A$  的一个**上界**; 如果存在一个元素  $t \in X$  使得  $\forall x \in A$  有  $t \leq x$ , 则称  $t$  为  $A$  的一个**下界**。

**定义3.26.** 设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果 $A$ 有上界且 $A$ 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 $A$ 的**上确界**, 记为 $\sup A$ ; 如果 $A$ 有下界且 $A$ 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 $A$ 的**下确界**, 记为 $\inf A$ 。

**练习3.2.** 是否存在一个同时不满足自反性、对称性、反对称性、传递性和反自反性的二元关系?

**练习3.3.** 实数集上的“小于”关系 $<$ 是否为反自反的? 集合 $X$ 的幂集 $2^X$ 上的“真包含”关系 $\subset$ 是否为反自反的? 为什么?

**练习3.4.** 下列说法是否正确? 若正确, 请给出证明; 若不正确, 请说明理由。

1) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的反自反的和传递的二元关系, 则 $R$ 为反对称的二元关系。

2) 设 $R$ 为集合 $X$ 上的对称的和传递的二元关系, 则 $R$ 为自反的二元关系。

**练习3.5.** 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

**练习3.6.** 设 $X, Y, S$ 同习题3.4。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

**练习3.7.** 设 $X, Y, S$ 同习题3.4。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 $\cong$ 为 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

**练习3.8.** 是否存在一个偏序关系 $\leq$ , 使 $(X, \leq)$ 中有唯一极大元素, 但没有最大元素? 如果有, 请给出一个具体例子; 如果没有, 请证明之。

**练习3.9.** 令 $X = \{a, b, c, d\}$ , 画出偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 的Hasse图。

**练习3.10.** 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ , 画出偏序集 $(S, |)$ 的Hasse图, 其中 $|$ 为整除关系。它有几个极大(小)元素? 列出这些极大(小)元素。

**练习3.11.** 偏序集 $(X, \leq)$ 称为有序完备的, 当且仅当 $X$ 的每个有上界的非空子集有上确界。证明: 偏序集 $(X, \leq)$ 为有序完备的当且仅当对 $X$ 的每个有下界的非空子集有下确界。

## 第 四 章