第四章无穷集合及其基数

陈建文

设集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{4,5,6\}$，则下列不是双射的是?

A. $\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$

B. $\{(1,6),(2,4),(3,5)\}$

C. $\{(1,4),(2,4),(3,6)\}$

D. $\{(1,5),(2,4),(3,6)\}$

下列说法错误的是?

A. 所有的n次奇置换构成的集合与所有的n次偶置换构成的集合之间存在一个双射。

B. 设X为集合，则X上的所有等价关系构成的集合与X的所有划分构成的集合之间存在一个双射。

C. 整数集合与偶数集合之间存在一个双射。

D. 设A与B为两个互不相交的集合，则在A与$A \cup B$之间不可能存在双射。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y**对等**，记为$X \sim Y$。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

1. 可数集

定义

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理

集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

1. 可数集

定理

可数集的任一无限子集也是可数集。

1. 可数集

定理

设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

1. 可数集

定理

设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

1. 可数集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理

设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

1. 可数集

定理

全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

2 连续统集

定理

区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

2 连续统集

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

2 连续统集

1. 对任意的$x \in R$，$x \leq x$。
2. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq x$，则$x = y$。
3. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq z$，则$x \leq z$。
4. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$x \leq y$和$y \leq x$两者中必有其一成立。
   我们用$x < y$表示$x \leq y$并且$x \neq y$，$x \geq y$表示$y \leq x$，$x > y$表示$x \geq y$并且$x \neq y$。
5. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。
6. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。

2 连续统集

另外，实数集还具有如下性质：
设A_1, A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

2 连续统集

定义

凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理

无穷集合必包含有可数子集。

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明.

因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。
令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。 $\square$

定理

设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明.

先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。
再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理

设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$是连续统。

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论

全体实数之集是一个连续统。

2 连续统集

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论

全体实数之集是一个连续统。

推论

全体无理数之集是一个连续统。

3 基数及其比较

定义

集合A的基数是一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

3 基数及其比较

定义

集合A的基数是一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义

所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

3. 基数及其比较

设A，B为两个集合，

3. 基数及其比较

设A，B为两个集合，

$|A| = |B|$：在集合A与集合B之间存在一个双射。

3. 基数及其比较

设A，B为两个集合，

$|A| = |B|$：在集合A与集合B之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$：在集合A与集合B之间存在一个单射。

3. 基数及其比较

设A，B为两个集合，

$|A| = |B|$：在集合A与集合B之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$：在集合A与集合B之间存在一个单射。

$|A| < |B|$：在集合A与集合B之间存在一个单射，但不存在从集合A到集合B的双射。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

设$M = \{1, 2, 3\}$，
则$2^M = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f: M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \le |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f: M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f: M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i: M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f: M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，

3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明.

令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，从而

$$|M| < |2^M|$$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h : A \to B$，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h: A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h: A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 如果x \in D \\ g^{-1}(x), & 如果x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

如果可以找到A的子集D使得$D = A \setminus g(B \setminus f(D))$，令$h: A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以A与B的基数相等。 $\square$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f:A\to B$与单射$g:B\to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi:2^A\to 2^A$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi: 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$,

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

4 康托-伯恩斯坦定理

定理 (康托-伯恩斯坦)

设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则存在从A到B的双射。

证明.

令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$，

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

1. 集合的概念

集合的定义

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^{+} \in A)$$

$$\text{其中} a^{+} = a \cup \{a\}$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A) m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \wedge dom F = dom R)$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（1）令$[a,b]$表示$\{x \in R | a \le x \le b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

（2）令$[a,b]$表示$\{x \in Q | a \le x \le b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（1）令$[a, b]$表示$\{x \in R | a \leq x \leq b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ______。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（1）令$[a, b]$表示$\{x \in R | a \leq x \leq b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（1）令$[a, b]$表示$\{x \in R | a \leq x \leq b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

（1）$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（1）令$[a,b]$表示$\{x \in R | a \le x \le b\}$，这里$R$为实数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

（1）$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \ge \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\ =& \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) = \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \le 0 \end{aligned}$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$,

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \ \geq \ \sqrt{2}$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \geq \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$，

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \geq \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$，由序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降知

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \geq \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$，由序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降知序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升，

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1）这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \geq \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$，由序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降知序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升，由$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$知$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

（1） 这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降且有下界，因此收敛，设极限为$x$，则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得$x = \sqrt{2}$。

由$x_n \geq \sqrt{2}$知$\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$，由序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降知序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升，由$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$知$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$。

综上，$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \{\sqrt{2}\}$。 □

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________ 。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

$$\begin{aligned} & x_n^2 \\ =& (\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 \\ =& \frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) \\ \geq& \frac{1}{4}(2 * x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}} + 4) = 2 \end{aligned}$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ =& \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) = \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

这说明序列$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$单调下降，从而序列$\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \cdots, \frac{2}{x_n}, \cdots$单调上升。 □

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \le x \le b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

$$x_n - \frac{2}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n} = \frac{(\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 - 2}{x_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) - 2}{x_n} = \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 4)}{x_n}$$

$$= \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{4x_n}(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}) \le \frac{1}{4}(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}})$$

这说明$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$。 □

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2） 令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

习题:

设
$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a,b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。设存在$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n]$，

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。设存在$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n]$，由$x$为有理数知$x^2 \neq 2$。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \le x \le b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ ________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。设存在$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n]$，由$x$为有理数知$x^2 \neq 2$。

如果$x^2 > 2$，则$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$，从而$(\frac{2}{x})^2 < 2 < x^2$，于是$\frac{2}{x} < x$。对任意的自然数$n$，由$x \le x_n$知$\frac{2}{x} \ge \frac{2}{x_n}$，从而$x_n - \frac{2}{x_n} \ge x - \frac{2}{x}$，这与$\lim_{n \to \infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$矛盾。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 & = 2 \\ x_n & = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

（2）令$[a, b]$表示$\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$，这里$Q$为有理数集，则$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] =$ __________。

解.

以下证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$。

用反证法。设存在$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[\frac{2}{x_n}, x_n]$，由$x$为有理数知$x^2 \neq 2$。

如果$x^2 > 2$，则$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$，从而$(\frac{2}{x})^2 < 2 < x^2$，于是$\frac{2}{x} < x$。对任意的自然数$n$，由$x \leq x_n$知$\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$，从而$x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$，这与$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$矛盾。

如果$x^2 < 2$，则$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{2}$，从而$(\frac{2}{x})^2 > 2 > x^2$，于是$\frac{2}{x} > x$。对任意的自然数$n$，由$x \geq \frac{2}{x_n}$知$\frac{2}{x} \leq x_n$，从而$x_n - \frac{2}{x_n} \geq \frac{2}{x} - x$，这也与$\lim_{n\to\infty}(x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$矛盾。 □

习题： (P20-5)

设X为一个非空集合，$A_n \subseteq X$, $A_{n+1} \subseteq A_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$。试证对任意的自然数n，

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题：(P47-5)

设$f : X \to Y$。试证：f为满射当且仅当对任意的$E \in 2^Y$，$f(f^{-1}(E)) = E$。

习题： (P126-6)

设R为集合X上的自反且传递的二元关系。

a)给出R的一个实例。

b)在X上定义二元关系$\sim$如下：$x \sim y$当且仅当xRy且yRx。 证明$\sim$为X上的等价关系。

c)在商集$X/\sim$上定义二元关系$\leq$：$[a] \leq [b]$当且仅当aRb。证明$\leq$为$X/\sim$上的偏序关系。