习题 1. 写出方程$x^2+2x+1=0$的根所构成的集合。

解. {-1} □

习题 2. 设有n个集合A_1，A_2，…，A_n，且$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1$，试证

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n。

１．当$n=2$时，$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_1$，$A_1 = A_2$显然成立。

２．假设当$n=k(k \geq 2)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。

设$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A_1$，则由$A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A_1$知$A_k \subseteq A_1$, 于是$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq A_1$，由归纳假设,$A_1 = A_2 = \ldots = A_k$。

由$A_1 = A_k$，$A_{k+1} \subseteq A_1$知$A_{k+1} \subseteq A_k$，再由$A_k \subseteq A_{k+1}$知，$A_k = A_{k+1}$。

于是$A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A_{k+1}$，结论得证。 □

习题 3. 设集合$S = \{\phi, \{\phi\}\}$，则$2^S = \underline{\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}}$。

习题 4. 设集合S有n个元素，证明2^S有2^n个元素。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

1.当$n=0$时，$S=\phi$，$2^\phi = \{\phi\}$有1个元素，结论成立。

2.假设当$n=k(k \geq 0)$时结论成立，往证当$n=k+1$时结论也成立。设集合S中有$k+1$个元 素s_1，s_2，…，s_k，s_{k+1}，记

$$S_1 = 2^{S \setminus \{s_{k+1}\}}$$
$$S_2 = \{X \cup \{s_{k+1}\} | X \subseteq S \setminus \{s_{k+1}\}\}$$

则$2^S = S_1 \cup S_2$。

考虑映射$f: S_1 \to S_2$，对任意的$X \in S_1$，$f(X) = X \cup \{s_{k+1}\}$。易验证$f$为从$S_1$到$S_2$的双射，从而$|S_1| = |S_2|$。

显然$S_1 \cap S_2 = \phi$，再由归纳假设，$|S_1| = 2^k$，从而$|2^S| = |S_1| + |S_2| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$。

□

习题 5. 设A，B为集合，试证

$$(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \phi$$

证明. 如果$B=\phi$，显然$(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B$。

由$(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B$,往证$B=\phi$。用反证法，假设$B \neq \phi$，则存在$x \in B$，于是$x \in (A \setminus B) \cup B$，但是$x \notin (A \cup B) \setminus B$，这与$(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B$矛盾。 □

习题 6. 设A，B为集合，试证$A = \phi \Leftrightarrow B = A \triangle B$。

证法一. 当$A=\phi$时，显然$B = A \triangle B$。

设$B = A \triangle B$，往证$A=\phi$。用反证法。设$A \neq \phi$，则存在$x \in A$。此时，如果$x \in B$，则$x \notin A \triangle B = B$，矛盾；如果$x \notin B$，则$x \in A \triangle B = B$，也矛盾。 □

证法二.

$$
\begin{aligned}
& B = A \triangle B \\
\Leftrightarrow & B \triangle B = (A \triangle B) \triangle B \\
\Leftrightarrow & \phi = A \triangle (B \triangle B) \\
\Leftrightarrow & \phi = A \triangle \phi \\
\Leftrightarrow & \phi = A
\end{aligned}
$$

□

习题 7. 设A，B为集合，证明$A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \setminus C$。

证明. 先证$A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B \setminus C$。

对任意的$x \in A \setminus (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \notin B \cup C$，即$x \in A$并且$x \notin B$，$x \notin C$，故$x \in A \setminus B \setminus C$。

再证$A \setminus B \setminus C \subseteq A \setminus (B \cup C)$。

对任意的$x \in A \setminus B \setminus C$，则$x \in A$并且$x \notin B$，$x \notin C$，于是$x \in A$并且$x \notin B \cup C$，故$A \setminus (B \cup C)$。

□

习题 8. 设A, B, C为集合，证明$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

证明. 先证$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

对任意的$x \in (A \cup B) \setminus C$，则$x \in A \cup B$并且$x \notin C$，从而$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \notin C$，于是，$x \in A$并且$x \notin C$，或者$x \in B$并且$x \notin C$， 即$x \in A \setminus C$或者$x \in B \setminus C$，因此$x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

再证$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$。

对任意的$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$，则$x \in A \setminus C$或者$x \in B \setminus C$，即$x \in A$并且$x \notin C$，或者$x \in B$并且$x \notin C$，从而$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \notin C$，于是$x \in A \cup B$并且$x \notin C$，因此$x \in (A \cup B) \setminus C$。 □

习题 9. 设A, B, C为集合，证明$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

证明. 先证$(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

对任意的$x \in (A \cap B) \setminus C$，则$x \in A \cap B$并且$x \notin C$，于是$x \in A$，$x \in B$，并且$x \notin C$，从而$x \in A \setminus C$并且$x \in B \setminus C$，因此$x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$。

再证$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus C$。

对任意的$x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$，则$x \in A \setminus C$并且$x \in B \setminus C$，于是$x \in A$，$x \in B$，并且$x \notin C$，从而$x \in A \cap B$并且$x \notin C$，因此$x \in (A \cap B) \setminus C$。

□

习题 10. 设A, B, C都是集合，若$A \cup B = A \cup C$且$A \cap B = A \cap C$，试证$B = C$。

证法一. 先证$B \subseteq C$。

对任意的$x \in B$，分两种情况讨论:

1)若$x \in A$:此时$x \in A \cap B$，由$A \cap B = A \cap C$知$x \in A \cap C$，从而$x \in C$。

2)若$x \notin A$:此时由$x \in B$知$x \in A \cup B$，再由$A \cup B = A \cup C$知$x \in A \cup C$，再由$x \notin A$知$x \in C$。

综合以上两种情况知对任意的x,当$x \in B$时$x \in C$，即$B \subseteq C$。

由B和C的对称性知$C \subseteq B$，因此$B = C$。 □

证法二. $B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap B)=C\cap(A\cup B)=C\cap(A\cup C)=C$

$\square$

证法三. 由已知条件知$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup C)\setminus(A\cap C)$，从而$A\triangle B=A\triangle C$，于是$A\triangle(A\triangle B)=A\triangle(A\triangle C)$, 由对称差运算的结合律知$(A\triangle A)\triangle B=(A\triangle A)\triangle C$，即$\phi\triangle B=\phi\triangle C$，从而$B=C$。 $\square$

习题 11. 下列等式是否成立？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由。

a) $(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$;
b)$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;
c)$A\setminus(B\cup C)=(A\cup B)\setminus C$。

解. a)结论不成立。这是因为设$A=\phi$，$B=\phi$，$C=\{1\}$，则$(A\setminus B)\cup C=\{1\}$，而$A\setminus(B\setminus C)=\phi$，$(A\setminus B)\cup C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

b)结论不成立。这是因为设$A=\{1\}$，$B=\phi$，$C=\{1\}$，则$A\cup(B\setminus C)=\{1\}$，而$(A\cup B)\setminus C=\phi$，$A\cup(B\setminus C)\neq(A\cup B)\setminus C$。

c)结论不成立。这是因为设$A=\phi$，$B=\{1\}$，$C=\phi$，则$A\setminus(B\cup C)=\phi$，$(A\cup B)\setminus C=\{1\}$，$A\setminus(B\cup C)\neq(A\cup B)\setminus C$ $\square$

习题 12. 下列命题中哪个是真的？*(B)*

A. 对任意集合A，B，$2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$。
B. 对任意集合A，B，$2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$。
C. 对任意集合A，B，$2^{A\setminus B}=2^A\setminus 2^B$。
D. 对任意集合A，B，$2^{A\triangle B}=2^A\triangle 2^B$。

习题 13. 填空：设A，B为两个集合。

a) $x\notin A\cup B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\wedge x\notin B}$
b) $x\notin A\cap B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\vee x\notin B}$
c) $x\notin A\setminus B\Leftrightarrow \underline{x\notin A\vee x\in B}$
d) $x\notin A\triangle B\Leftrightarrow \underline{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\notin A\vee x\notin B)}$

习题 14. 设A，B，C为任意三个集合，下列集合表达式中哪一个等于$A\setminus(B\cap C)$？*(B)*

A. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
B. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
C. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)$
D. $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$

习题 15. 设A,B,C为集合，并且$A\cup B=A\cup C$，则下列哪个等式成立？*(D)*

A.$B=C$
B.$A\cap B=A\cap C$
C.$A\cap B^c=A\cap C^c$
D.$A^c\cap B=A^c\cap C$

习题 16. 设A, B, C为集合，化简：

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup\\
&(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup\\
&(A^c\cap B\cap C^c)
\end{aligned}
$$

解法一. 设全集为S，则
原式$\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)=S$
原式$\cap(A^c\cap B^c\cap C^c)=\phi$
从而原式$=(A^c\cap B^c\cap C^c)^c=A\cup B\cup C$。 □

解法二.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= ((A\cap B)\cap(C\cup C^c))\cup((A^c\cap B)\cap(C\cup C^c))\cup((A\cap B^c)\cap(C\cup C^c))\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=(A\cap(B\cup B^c))\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=A\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=((A\cup A^c)\cap(A\cup B))\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=(A\cup B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\\
&=(A\cup B\cup A^c)\cap(A\cup B\cup B^c)\cap(A\cup B\cup C)\\
&=A\cup B\cup C
\end{aligned}
$$

□

习题 17. 设V为一个集合，证明：$\forall S,T,W\in 2^V$有$S\subseteq T\subseteq W$当且仅当$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$。

证明. 首先，$\forall S,T,W\in 2^V$由$S\subseteq T\subseteq W$往证$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$。

由$S\subseteq T\subseteq W$知$S\triangle T=T\backslash S$，$S\triangle W=W\backslash S$，由$T\subseteq W$知$T\backslash S\subseteq W\backslash S$，从而$S\triangle T\subseteq S\triangle W$。$S\subseteq W$显然成立。

接下来，$\forall S,T,W\in 2^V$由$S\triangle T\subseteq S\triangle W$且$S\subseteq W$往证$S\subseteq T\subseteq W$。

由$S\subseteq W$知$S\triangle W=W\setminus S$。

先证$S\subseteq T$。用反证法，假设$S\subseteq T$不成立,则存在x，$x\in S$但$x\notin T$，于是$x\in S\setminus T\subseteq S\triangle T\subseteq S\triangle W=W\setminus S$，这与$x\in S$矛盾。

再证$T\subseteq W$。用反证法，假设$T\subseteq W$不成立,则存在x，$x\in T$但$x\notin W$，由$S\subseteq W$知$x\notin S$，于是$x\in T\setminus S\subseteq S\triangle T\subseteq S\triangle W=W\setminus S$，这与$x\notin W$矛盾。 □

习题 18. 设$A=\{a,b,c\},B=\{e,f,g,h\},C=\{x,y,z\}$。求$A\times B, B\times A, A\times C, A\times B\times C, A^2\times B$。

解.

$$
\begin{aligned}
&A \times B \\
=\ &\{(a,e),(a,f),(a,g),(a,h), \\
&(b,e),(b,f),(b,g),(b,h) \\
&(c,e),(c,f),(c,g),(c,h) \\
&\} \\
&B \times A \\
=\ &\{(e,a),(e,b),(e,c),(f,a),(f,b),(f,c), \\
&(g,a),(g,b),(g,c),(h,a),(h,b),(h,c) \\
&\} \\
&A \times C \\
=\ &\{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x,),(c,y),(c,z)\} \\
&A \times B \times C \\
=\ &\{(a,e,x),(a,e,y),(a,e,z), \\
&(a,f,x),(a,f,y),(a,f,z), \\
&(a,g,x),(a,g,y),(a,g,z), \\
&(a,h,x),(a,h,y),(a,h,z), \\
&(b,e,x),(b,e,y),(b,e,z), \\
&(b,f,x),(b,f,y),(b,f,z), \\
&(b,g,x),(b,g,y),(b,g,z), \\
&(b,h,x),(b,h,y),(b,h,z), \\
&(c,e,x),(c,e,y),(c,e,z), \\
&(c,f,x),(c,f,y),(c,f,z), \\
&(c,g,x),(c,g,y),(c,g,z), \\
&(c,h,x),(c,h,y),(c,h,z), \\
&\} \\
&A^2 \times B \\
=\ &\{((a,a),x),((a,a),y),((a,a),z), \\
&((a,b),x),((a,b),y),((a,b),z), \\
&((a,c),x),((a,c),y),((a,c),z), \\
&((b,a),x),((b,a),y),((b,a),z), \\
&((b,b),x),((b,b),y),((b,b),z), \\
&((b,c),x),((b,c),y),((b,c),z), \\
&((c,a),x),((c,a),y),((c,a),z), \\
&((c,b),x),((c,b),y),((c,b),z), \\
&((c,c),x),((c,c),y),((c,c),z) \\
&\}
\end{aligned}
$$

□

习题 19. 设A, B为集合，试证：$A \times B = B \times A$的充分必要条件是下列三个条件至少一个成立：

(1) $A = \phi$*;(2)* $B = \phi$*;(3)* $A = B$。

证明. 如果 (1) $A = \phi$;(2) $B = \phi$;(3) $A = B$中的一条成立，易验证$A \times B = B \times A$成立。

设$A \times B = B \times A$成立。如果$A \neq \phi$并且$B \neq \phi$，以下证明必有$A = B$成立。 由$A \neq \phi$并且$B \neq \phi$知存在$a \in A$，$b \in B$。对任意的$x \in A$，则$(x, b) \in A \times B = B \times A$，从而$x \in B$；对任意的$x \in B$，则$(x, a) \in B \times A = A \times B$，从而$x \in A$。 □

习题 20. 设A，B，C，D为任意四个集合，证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

先在草稿纸上分析如下：

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\
&\quad \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \\
&\quad \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \\
&\quad \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in D \\
&\quad \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D \\
&\quad \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}$$

然后转换称用自然语言描述的证明过程如下：

证明. 先证$(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$。

对任意的x和y，如果$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$，则$(x, y) \in A \times C$，并且$(x, y) \in B \times D$，从而$x \in A, y \in C, x \in B, y \in D$，即$x \in A$，$x \in B$，$y \in C$，$y \in D$，于是$x \in A \cap B$并且$y \in C \cap D$，因此$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$。

再证$(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$。

对任意的x和y，$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$，则$x \in A \cap B$并且$y \in C \cap D$，从而$x \in A$，$x \in B$，$y \in C$，$y \in D$，即$x \in A, y \in C, x \in B, y \in D$，于是$(x, y) \in A \times C$，并且$(x, y) \in B \times D$，因此$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$。

□

习题 21. 设A, B, C为集合，证明：$A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$。

证明.

$$\begin{aligned}
&A \times (B \triangle C) \\
=&A \times ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \\
=&(A \times (B \setminus C)) \cup (A \times (C \setminus B)) \\
=&((A \times B) \setminus (A \times C)) \cup ((A \times C) \setminus (A \times B)) \\
=&(A \times B) \triangle (A \times C)
\end{aligned}$$

□

习题 22. 设A有m个元素，B有n个元素，则$A\times B$是多少个序对组成的？$A\times B$有多少个不同的子集？

解. $A\times B$是mn个序对组成的，$A\times B$有2^{mn}个不同的子集。 □

习题 23. 设A,B为集合，$B\neq\phi$。试证：如果$A\times B=B\times B$，则$A=B$。

证明. 由$B\neq\phi$知，存在b，$b\in B$。对任意的$x\in A$，则$(x,b)\in A\times B=B\times B$，从而$x\in B$；对任意的$x\in B$，则$(x,b)\in B\times B=A\times B$，从而$x\in A$。这证明了$A=B$。 □

习题 24. 某班学生中有45%正在学德文，65%正在学法文，问此班中至少有百分之几的学生正在同时学德文和法文？

解. 此班中至少有10%的学生正在同时学德文和法文。 □

习题 25. 设A,B为两个有穷集合，则$|2^{2^{A\times B}}|=\underline{2^{2^{|A||B|}}}$。

习题 26. 毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞。已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有的姑娘跳过舞。同样的，每个姑娘也至少与一个小伙子跳过舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙子与姑娘中，必可找到两个小伙子与两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙子中的一个跳过舞。

证法一. 设小伙子的集合为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，姑娘的集合为$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，G_{b_i}为与小伙子b_i跳过舞的姑娘的集合，则由假设$G_{b_i}\neq G$，$i=1,2,\cdots,m$。如果存在i,j，$i\neq j$，使得$G_{b_i}\not\subseteq G_{b_j}$且$G_{b_j}\not\subseteq G_{b_i}$，则问题得证。否则，对任意的$i$，$j$，或者$G_{b_i}\subseteq G_{b_j}$，或者$G_{b_j}\subseteq G_{b_i}$，于是有

$$G_{b_{i_1}}\subseteq G_{b_{i_2}}\subseteq\cdots\subseteq G_{b_{i_m}}$$

但由假设，$\bigcup_{i=1}^{m}G_{b_i}=G$，即$G_{b_{i_m}}=G$，所以$b_{i_m}$与所有的姑娘都跳过舞，矛盾。

□

证法二. 设b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子。由b_1未能与所有的姑娘跳过舞知，存在一个姑娘g_2，b_1未能与g_2跳过舞。由每个姑娘至少与一个小伙子跳过舞知，存在一个小伙子b_2与g_2跳过舞。在与小伙子b_1跳过舞的姑娘中，必存在一个姑娘g_1未能与小伙子b_2跳过舞，否则与b_1为与姑娘跳舞最多的小伙子矛盾。于是，b_1与g_1跳过舞，但未与g_2跳过舞；b_2与g_2跳过舞，但未与g_1跳过舞，结论得证。 □