

**习题 1.** 设  $A$  为由序列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  的所有项组成的集合, 则  $A$  是否是可数的? 为什么?

解:  $A$  不一定可数, 例如当  $a_1 = a_2 = \dots = 1$  时,  $A = \{1\}$  为有穷集合。

**习题 2.** 证明: 直线上互不相交的开区间的全体所构成的集合至多是可数集。

证明. 设  $A$  为直线上某个互不相交的开区间构成的集合, 在每个开区间中取一个有理数, 则  $A$  与有理数集合的一个子集之间存在一一对应的关系, 于是  $A$  为至多可数集。□

**习题 3.** 证明: 单调函数的不连续点的集合至多是可数集。

首先来看结论中涉及的一些基本概念。

设  $f: R \rightarrow R$  为一个函数。如果对任意的  $x_1 \in R, x_2 \in R, x_1 < x_2$ , 那么  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称  $f$  为单调函数。

设  $x_0 \in R, L \in R$ , 如果对任意的  $\varepsilon \in R, \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta \in R, \delta > 0$ , 只要  $|x - x_0| < \delta$ , 就有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  在  $x_0$  处的极限为  $L$ , 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 。

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f$  在  $x_0$  处连续,  $x_0$  为函数  $f$  的连续点; 如果函数  $f$  在  $x_0$  处不连续, 则称  $x_0$  为函数  $f$  的不连续点。

证明. 对任意的  $x_0 \in R$ , 由单调函数的定义知, 集合  $\{f(x) | x < x_0\}$  有上界  $f(x_0)$ , 从而有上确界, 定义  $L(x_0) = \sup\{f(x) | x < x_0\}$ ; 集合  $\{f(x) | x > x_0\}$  有下界  $f(x_0)$ , 从而有下确界, 定义  $U(x_0) = \inf\{f(x) | x > x_0\}$ 。如果  $x_1 < x_2$ , 那么  $U(x_1) \leq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq L(x_2)$ 。另外, 如果  $x_0$  为  $f$  的不连续点, 可以证明  $L(x_0) < U(x_0)$ 。因此, 集合  $S = \{(L(x), U(x)) | x \text{ 为函数 } f \text{ 的不连续点}\}$  中的开区间两两不相交。在  $S$  中的每个开区间中取一个有理数, 则所有这些有理数的集合与函数  $f$  的所有不连续点构成的集合是对等的, 从而  $f$  的所有不连续点所构成的集合为至多可数的。

设  $x_0$  为  $f$  的不连续点, 以下证明  $L(x_0) < U(x_0)$ 。由  $L(x_0) \leq f(x_0) \leq U(x_0)$  知  $L(x_0) \leq U(x_0)$ , 因此只需证  $L(x_0) \neq U(x_0)$ 。用反证法, 假设  $L(x_0) = U(x_0)$ , 则  $L(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$ 。对任意的  $\varepsilon > 0$ , 由  $L(x_0)$  的定义知存在  $x' < x_0$  使得  $f(x') > L(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$ ; 由  $U(x_0)$  的定义知存在  $x'' > x_0$  使得  $f(x'') < U(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon$ 。设  $\delta = \min(|x' - x_0|, |x'' - x_0|)$ , 那么当  $|x - x_0| < \delta$  时, 就有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 函数  $f$  在  $x_0$  处连续, 这与  $x_0$  为  $f$  的不连续点矛盾。□

**习题 4.** 任一可数集  $A$  的所有有限子集构成的集族是可数集族。

证明. 因为  $A$  为可数集合, 所以  $A$  中元素可以排成无重复项的序列:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

令  $S = \{B | B \subseteq A, B \text{ 为有穷集}\}$ ,  $Q$  为有理数集, 定义映射  $\phi: S \rightarrow Q$ , 对任意的  $B \in S, \phi(B) = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$ , 这里

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_i \in B \\ 0 & \text{如果 } a_i \notin B \end{cases}$$

则对任意的  $B_1 \in S, B_2 \in S$ , 如果  $B_1 \neq B_2$ , 则  $\phi(B_1) \neq \phi(B_2)$ , 即  $\phi$  为从  $S$  到  $Q$  的单射。 $\phi(S)$  为可数集  $Q$  的无限子集, 从而也为可数集。 $\phi$  为从  $S$  到  $\phi(S)$  的双射, 因此  $S$  为可数集。□

**习题 5.** 判断下列命题之真伪:

- a) 若  $f: X \rightarrow Y$  且  $f$  是满射, 则只要  $X$  是可数集, 那么  $Y$  是至多可数的;
- b) 若  $f: X \rightarrow Y$  且  $f$  是单射, 则只要  $Y$  是可数集, 则  $X$  也是可数集;
- c) 可数集在任一映射下的像也是可数集。

解. a) 真, b) c) 伪。□

**习题 6.** 设  $\Sigma$  为一个有限字母表,  $\Sigma$  上所有字 (包括空字  $\epsilon$ ) 之集记为  $\Sigma^*$ 。证明  $\Sigma^*$  是可数集。 $(n \text{ 元组 } (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ 称为 } \Sigma \text{ 上的一个字, 这里 } c_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n, \epsilon = () \text{ 称为 } \Sigma \text{ 上的一个空字})$ 。

证明.  $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ , 其中  $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$ 。对任意的自然数  $i, \Sigma^i$  为有穷集合。于是  $\Sigma^*$  可以排成无重复项的序列: 先排  $\Sigma^0$  中的元素, 再排  $\Sigma^1$  中的元素, 再排  $\Sigma^2$  中的元素,  $\dots$ 。□

**习题 7.** 利用康托的对角线法证明所有  $0, 1$  的无穷序列是不可数集。

证明. 用反证法。设所有  $0, 1$  的无穷序列构成的集合  $A$  为可数集, 则  $A$  中元素可以排成无重复项的序列:

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\ \dots \end{array}$$

其中  $a_{ij} = 0$  或  $1$ 。

构造  $0, 1$  序列

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

其中

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{如果 } a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{如果 } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

则所构造的0,1序列 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 与前述序列中的任意一个0,1序列都不相同，矛盾。 $\square$

**习题 8.** 证明：如果 $A$ 是可数集，则 $2^A$ 不是可数集。

证明. 由 $A$ 为可数集知 $A$ 中的元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

构造从 $2^A$ 到所有的0,1序列构成的集合之间的映射 $f$ :

对任意的 $B \in 2^A$ ， $f(B)$ 为如下的0,1序列:

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_i \in B \\ 0 & \text{如果 } a_i \notin B \end{cases}$$

则 $f$ 为从 $2^A$ 到所有的0,1序列构成的集合之间的双射，而所有的0,1序列构成的集合为不可数集，从而 $2^A$ 为不可数集。 $\square$