第四讲子群、生成子群

陈建文

October 7, 2022

定义1. 设S为群G的非空子集，如果G的乘法在S中封闭且S对此乘法也构成一个群，则称S为G的一个子群。如果$S \neq G$，则称S为G的真子群。

定理1. 设G_1为G的子群，则G_1的单位元必为G的单位元；G_1的元素a在G_1中的逆元素也是a在G中的逆元素。

定理2. 群G的任意多个子群的交还是G的子群。

定理3. 任一群不能是其两个真子群的并。

定理4. 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是
（1）$\forall a, b \in S, ab \in S$且
（2）$\forall a \in S, a^{-1} \in S$。

定理5. 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是$\forall a, b \in S, ab^{-1} \in S$。

定理6. 群G的有限非空子集F为G的子群的充分必要条件是$\forall a, b \in F, ab \in F$。

定义2. 群G的元素a称为G的中心元素，如果a与G的每个元素可交换，即$\forall x \in G, ax = xa$。G的所有中心元素构成的集合C称为G的中心。

定理7. 群G的中心C是G的可交换子群。

例. 设G为一个群，$a \in G$，$\{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\}$为$G$的一个子群。

例. 设G为一个有限群，$a \in G$，$\{e, a, a^2, \cdots\}$为G的一个子群。

例. 设G为一个交换群，$a, b \in G$，则$\{a^m b^n | m, n \in Z\}$为G的一个子群。

定义3. 设M为G的一个子集，G的包含M的所有子群的交称为由M生成的子群，记为(M)。

课后作业题:

练习1. 举例说明两个子群的并可以不是子群。

练习2. 设G_1和G_2为群G的两个真子群，证明：$G_1 \cup G_2$为G的子群的充分必要条件是$G_1 \subseteq G_2$并且$G_2 \subseteq G_1$。

练习3. 设$(G_1, \circ)$和$(G_2, *)$都是群，$\phi : G_1 \to G_2$，$\forall a, b \in G_1$，$\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)$，证明：$\phi^{-1}(e_2)$为$G_1$的子群，其中$e_2$为$G_2$的单位元素。

练习4. 找出3次对称群的所有子群。

练习5. 令$P = \{(12), (123)\} \subseteq S_3$。写出由$P$生成的$S_3$的子群$(P)$。