离散数学讲义

陈建文

February 24, 2022

第 一 章　集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示“并且”，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为ϕ。

定义1.2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B : \forall x \in Ax \in B$ 即$\forall x(x \in A \to x \in B)$
$A \subset B : A \subseteq B \wedge \exists x \in Bx \notin A$即$A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$
设$A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则$A \subseteq B$，其含义是$\forall xx \in A \to x \in B$。对一些特殊的$x$的值分析如下：

- 当$x = 1$时，$1 \in A \to 1 \in B$，即$T \to T$，其真值为T;
- 当$x = 3$时，$3 \in A \to 3 \in B$，即$F \to T$，其真值为T;
- 当$x = 0$时，$0 \in A \to 0 \in B$，即$F \to F$，其真值为T。

定义1.3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1,2,3,4,5\} = \{3,4,2,1,5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

证明. 设A为任意一个集合，显然对任意的x属于空集，则$x \in A$，因此空集为A的子集。

以下证明空集是唯一的。用反证法。假设存在两个不相等的空集ϕ和ϕ'，则$\phi \subseteq \phi'$并且$\phi' \subseteq \phi$，从而$\phi = \phi'$，矛盾。

□

"空集为任一集合的子集"这一结论初学时，也可以用反证法证明其正确性，以帮助我们理解其中的逻辑。为了用反证法证明该结论，首先让我们分析一下对于任意的集合A和B，A不是B的子集（$A \nsubseteq B$）的含义：

$$\begin{aligned} A \nsubseteq B &\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall x x \in A \to x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \to x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \\ &\Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg(x \in A)) \wedge \neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \end{aligned}$$

空集为任一个集合的子集。

证明. 用反证法。设存在一个集合A，$\phi \nsubseteq A$，则存在$x \in \phi$，但$x \notin A$，这显然是不可能的，结论得证。 □

定义1.4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

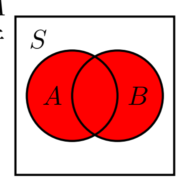
例. $2^\phi = \{\phi\}$
$2^{\{1\}} = \{\phi, \{1\}\}$
$2^{\{1,2\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$2^{\{1,2,3\}} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

例. $2^{\{\phi,\{\phi\}\}} = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

例. 对于任意的集合A，$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。

证明. 根据幂集的定义，$\phi \in 2^A$，从而$\{\phi\} \subseteq 2^A$，即$\{\phi\} \in 2^{2^A}$。又因为$\phi \in 2^{2^A}$，所以$\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq 2^{2^A}$，从而$\{\phi, \{\phi\}\} \in 2^{2^{2^A}}$。 □

定义1.5. 设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

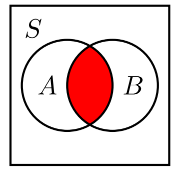


$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

（这里$\vee$表示"或者"）

例. $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

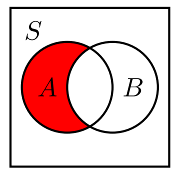
定义1.6. 设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例. $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$

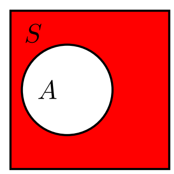
定义1.7. 设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。



$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例. $S = \{0,1\}, A = \{0\}$, 则$A^c = \{1\}$。

定理1.2. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$.
7. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
7'. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

以下只证明结论5和结论7，其他结论的证明留给读者自己完成。

首先证明结论5的第一条,我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$\begin{aligned}
&\forall x x \in A \cup (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cup (B \cap C)$，则$x \in A$或者$x \in B \cap C$，从而$x \in A$，或者$x \in B$并且$x \in C$，因此，$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \in A$或者$x \in C$，即，$x \in A \cup B$ 并且$x \in A \cup C$，于是，$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

再证$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，则$x \in A \cup B$ 并且$x \in A \cup C$，从而$x \in A$或者$x \in B$，并且$x \in A$或者$x \in C$，因此，$x \in A$，或者$x \in B$并且$x \in C$，即，$x \in A$或者$x \in (B \cap C)$，于是，$x \in A \cup (B \cap C)$。

$\square$

接下来证明结论7的第一条，我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$
\begin{aligned}
&\forall x x \in C \setminus (A \cap B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge x \notin A \cap B\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge \neg(x \in A \cap B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))\\
\Leftrightarrow& x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\\
\Leftrightarrow& (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B)\\
\Leftrightarrow& (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B)\\
\Leftrightarrow& x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证$C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$。

对任意的x，如果$x \in C \setminus (A \cap B)$，则$x \in C$并且$x \notin A \cap B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$或者$x \notin B$，因此，$x \in C \setminus A$或者$x \in C \setminus B$，于是$x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$。

再证$(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cap B)$。

对任意的x，如果$x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$， 则$x \in C \setminus A$或者$x \in C \setminus B$，从而$x \in C$并且$x \notin A$或者$x \notin B$,因此，$x \in C$并且$x \notin A \cap B$，于是$x \in C \setminus (A \cap B)$。 $\square$

例. 下列等式是否成立?

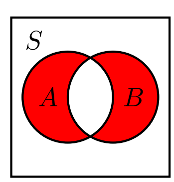
$(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$

若成立，请给出证明。若不成立，请说明理由。

答. 该等式不成立。设$A = \phi$，$B = \phi$，$C = \{0\}$，则$(A \setminus B) \cup C = \{0\}$，而$A \setminus (B \setminus C) = \phi$，$(A \setminus B) \cup C \neq A \setminus (B \setminus C)$。 $\square$

定义1.9. 设A, B为任意的两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对**称差**，记为$A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例.

$$
\begin{aligned}
&\{1,2\} \triangle \{2,3\} = \{1,3\} \\
&\{1,2\} \triangle \{1\} = \{2\} \\
&\{1,2\} \triangle \phi = \{1,2\} \\
&\{1,2\} \triangle \{1,2\} = \phi
\end{aligned}
$$

定理1.3. 设A, B为任意两个集合，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设A, B, C为任意三个集合，则
1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

以下证明结论 2 和结论 5，其他结论留给读者思考。先证明结论 2 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$
\begin{aligned}
x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&x \in (A \triangle B) \triangle C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\
&\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&x \in A \triangle (B \triangle C) \\
&\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

再证明结论 5 。

证明.

$$
\begin{aligned}
&A\cap(B\triangle C)\\
=&A\cap(B\setminus C\cup C\setminus B)\\
=&(A\cap B\setminus C)\cup(A\cap C\setminus B) \qquad (1.5)\\
&(A\cap B)\triangle(A\cap C)\\
=&(A\cap B)\setminus(A\cap C)\cup(A\cap C)\setminus(A\cap B)\\
=&(A\cap B)\setminus A\cup(A\cap B)\setminus C\cup(A\cap C)\setminus A\cup(A\cap C)\setminus B\\
=&(A\cap B)\setminus C\cup(A\cap C)\setminus B\\
=&(A\cap B\setminus C)\cup(A\cap C\setminus B) \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

由式(1.5)和式(1.6)知$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$。 □

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义1.11. 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\exists\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x|\forall\alpha\in I x\in A_\alpha\}$$

例. 如果$I=\{1,2,3\}$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3$；
如果$I=\{1,2,3\}$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cap A_2\cap A_3$；
如果$I=\mathbb{N}$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{N}$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_0\cap A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{Z}^+$，则$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots=\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha$；
如果$I=\mathbb{Z}^+$，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots=\bigcap_{\alpha=1}^{\infty}A_\alpha$。

例. 设$I=\{x\in\mathbb{R}|0<x\leq 1\}$，$\forall x\in\mathbb{R},A_x=\{y\in\mathbb{R}|0<y<x\}$，则

$$\bigcup_{x\in I}A_x=\{x\in\mathbb{R}|0<x<1\},\bigcap_{x\in I}A_x=\phi$$

定理1.5. 设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$
2. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$

证明. 留给读者自己完成。 □

定理1.6. 设C为任意集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$
2. $C\setminus(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$

以下只证明第1条，其他结论的证明留给读者自己完成。
我们先在草稿纸上做如下的分析：

$$
\begin{aligned}
&\forall x x\in C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\neg(x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\neg(\forall\alpha\alpha\in I\to x\in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\exists\alpha\neg(\alpha\in I\to x\in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\exists\alpha\neg(\neg(\alpha\in I)\vee x\in A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\exists\alpha\neg\neg(\alpha\in I)\wedge\neg x\in A_\alpha\\
\Leftrightarrow & x\in C\wedge\exists\alpha(\alpha\in I\wedge x\notin A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & \exists\alpha(\alpha\in I\wedge x\in C\wedge x\notin A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & \exists\alpha(\alpha\in I\wedge x\in C\setminus A_\alpha)\\
\Leftrightarrow & x\in\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

证明. 先证明$C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$。

对任意的x，如果$x\in C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则$x\in C$，且$x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，从而$x\in C$，且存在$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha$。于是，存在$\alpha\in I$，$x\in C\setminus A_\alpha$。因此，$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$，故$C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$。

其次，对任意的x，如果$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$，则存在$\alpha\in I$，$x\in C\setminus A_\alpha$。因此，存在$\alpha\in I$，$x\in C$且$x\notin A_\alpha$，故$x\in C$且$x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$。于是，$x\in C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$。所以，$\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)\subseteq C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)$。

由集合相等的定义便知，$C\setminus(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(C\setminus A_\alpha)$。 □

将以上定理中的集合C替换为全集S，我们可以得到如下结论：

定理1.7. 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$
2. $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

第 二 章