

习题. 设  $f: X \rightarrow Y$ 。试证:  $f$  为满射当且仅当对任意的  $E \in 2^Y$ ,  $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

证明. 设  $f$  为满射, 对任意的  $E \in 2^Y$  往证  $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

对任意的  $y$ ,  $y \in f(f^{-1}(E))$ , 则存在  $x$ ,  $x \in f^{-1}(E)$  并且  $y = f(x)$ , 于是存在  $x$ ,  $f(x) \in E$  并且  $y = f(x)$ , 从而  $y \in E$ 。

对任意的  $y$ ,  $y \in E$ , 由  $f$  为满射知存在  $x \in X$ ,  $y = f(x)$ , 从而  $f(x) \in E$ , 即  $x \in f^{-1}(E)$ , 由  $y = f(x)$  知  $y \in f(f^{-1}(E))$ 。

设对任意的  $E \in 2^Y$ ,  $f(f^{-1}(E)) = E$ , 往证  $f$  为满射。

对任意的  $y \in Y$ , 则  $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ , 于是  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ , 从而存在  $x \in X$ ,  $x \in f^{-1}(\{y\})$ , 即  $f(x) \in \{y\}$ , 等价的,  $f(x) = y$ , 故  $f$  为满射。  $\square$