第二讲半群、幺半群与群

陈建文

October 7, 2022

课后作业题:

练习1. 给出一个半群，它有无穷多个右单位元素。

解. 设S为一切形如
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, a, b \in N$$
的2×2矩阵之集，则S对矩阵的乘法构成一个半群。

$\forall d \in N$，2×2矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$$
为右单位元素。于是，$(S, *)$有无穷多个右单位元素。 □

练习2. 设$(S, \circ)$为一个半群，$a \in S$称为左消去元素，如果$\forall x, y \in S$，有$a \circ x = a \circ y$，则一定有$x = y$。试证：如果a和b均为左消去元，则$a \circ b$也是左消去元。

证明. 如果$\forall x, y \in S$，$(a \circ b) \circ x = (a \circ b) \circ y$，由结合律知$a \circ (b \circ x) = a \circ (b \circ y)$，由$a$为左消去元知$b \circ x = b \circ y$，由$b$为左消去元知$x = y$，这证明了$a \circ b$也是左消去元。 □

练习3. 设Z为整数集合，$M = Z \times Z$。在M上定义二元运算$\circ$如下:

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M, (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

试证:

(1)M对上述定义的代数运算构成一个幺半群。

*(2)*如果$(x_1, x_2) \neq (0, 0)$，则(x_1, x_2)是左消去元。

*(3)*运算"$\circ$"满足交换率。

证明. (1)$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M$，

$$\begin{aligned}
&((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) = (x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \circ (z_1, z_2) \\
=&(x_1y_1z_1 + 2x_2y_2z_1 + 2x_1y_2z_2 + 2x_2y_1z_2, x_1y_1z_2 + 2x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) \\
&(x_1, x_2) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)) = (x_1, x_2) \circ (y_1z_1 + 2y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1) \\
=&(x_1y_1z_1 + 2x_1y_2z_2 + 2x_2y_1z_2 + 2x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 + 2x_2y_2z_2) \\
&((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2))
\end{aligned}$$

这验证了“$\circ$”运算满足结合律。

$$\forall (x,y)\in M, (1,0)\circ(x,y)=(x,y)\circ(1,0)=(x,y)$$

这验证了$(1,0)$为“$\circ$”运算的单位元。

于是，M对“$\circ$”运算构成一个幺半群。

(2) $\forall (y_1,y_2),(z_1,z_2)\in M$，如果$(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2)=(x_1,x_2)\circ(z_1,z_2)$，则$(x_1y_1+2x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)=(x_1z_1+2x_2z_2, x_1z_2+x_2z_1)$，

当$(x_1,x_2)\neq 0$时，关于y_1和y_2的线性方程组

$$\begin{cases} x_1y_1+2x_2y_2=x_1z_1+2x_2z_2 \\ x_1y_2+x_2y_1=x_1z_2+x_2z_1 \end{cases}$$

有唯一解$y_1=z_2, y_2=z2$，因此(x_1,x_2)是左消去元。

(3)$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in M$，

$$\begin{aligned} &(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2)=(x_1y_1+2x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)\\ &(y_1,y_2)\circ(x_1,x_2)=(y_1x_1+2y_2x_2, y_1x_2+x_1y_2)\\ &(x_1,x_2)\circ(y_1,y_2)=(y_1,y_2)\circ(x_1,x_2) \end{aligned}$$

这证明了“$\circ$”运算满足交换律。 □

练习4. 证明：有限半群中一定有一个元素a使得$a\circ a=a$。

证明. 设$(S,\circ)$为有限半群，$x\in S$。由S为有限半群知，存在正整数i和j，使得$x^i=x^j$。取正整数n，使得$(n+1)(j-i)\geq j$，则$x^{2n(j-i)}=x^{n(j-i)}$，于是$(x^{n(j-1)})^2=x^{n(j-i)}$。 □

练习5. 设R为实数集合，$S=\{(a,b)|a\neq 0, a,b\in R\}$。在$S$上利用通常的加法和乘法定义二元运算“$\circ$”如下：

$$(a,b)\circ(c,d)=(ac, ad+b)$$

验证$(S,\circ)$为群。

证明. $\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in S$，

$$\begin{aligned} &((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)=(ac,ad+b)\circ(e,f)\\ =&(ace, acf+ad+b)\\ &(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f))=(a,b)\circ(ce,cf+d)\\ =&(ace, acf+ad+b)\\ &((a,b)\circ(c,d))\circ(e,f)=(a,b)\circ((c,d)\circ(e,f)) \end{aligned}$$

这验证了“$\circ$”运算满足结合律。

$\forall (c,d)\in S, (1,0)\circ(c,d)=(1\cdot c, 1\cdot d+0)=(c,d)$，这验证了$(1,0)$为$\circ$运算的左单位元。

$\forall (c,d)\in S, (1/c,-d/c)\circ(c,d)=(1,0)$,这验证了$(1/c,-d/c)$为$(c,d)$关于左单位元$(1,0)$的左逆元。 □

练习6. n次方程$x^n=1$的根称为n次单位根，所有n次单位根之集记为U_n。证明：U_n对通常的复数乘法构成一个群。

证明. 对任意的$x_1\in U_n$，$x_2\in U_n$，则$x_1^n=1$，$x_2^n=1$，从而$(x_1x_2)^n=1$，即$x_1x_2\in U_n$。

结合律显然成立。

$1^n=1$，从而$1\in U_n$。$\forall x\in U_n, 1\cdot x=x$，这说明1为左单位元。

$\forall x\in U_n$，则$x^n=1$，从而$(\frac{1}{x})^n=1$，即$\frac{1}{x}\in U_n$。$\frac{1}{x}\cdot x=1$说明$\frac{1}{x}$为x关于左单位元1的左逆元。

以上验证了U_n对通常的复数乘法构成一个群。 □

练习7. 令

$$G=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

试证：G对矩阵乘法构成一个群。

证明. 易验证G对矩阵的乘法满足封闭性。

结合律显然成立。

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$为左单位元。

$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$的左逆元为$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$的左逆元为$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$的左逆元为$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$。

以上验证了G对矩阵的乘法构成一个群。

□