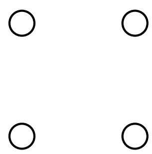
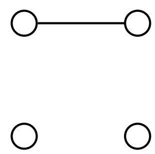
第六章作业题

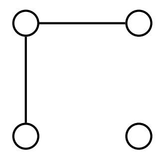
习题 1. 画出具有4个顶点的所有无向图（同构的只算一个）。



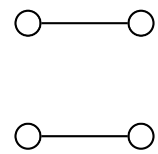
A



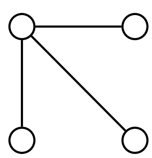
B



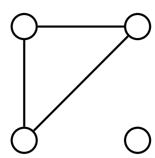
C



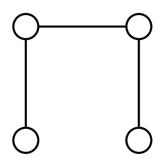
D



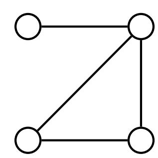
E



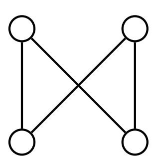
F



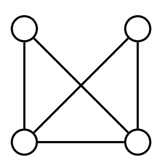
G



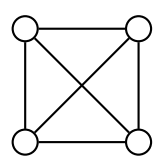
H



I



J



K

习题 2. 画出具有3个顶点的所有有向图（同构的只算一个）。

习题 3. 画出具有4个、6个、8个顶点的三次图。

习题 4. 某次宴会上，许多人互相握手，证明：握过奇数次手的人数为偶数（注意，0为偶数）。

习题 5. 设u与v为图G的两个不同的顶点，若u与v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈?

习题 6. 若G是一个(p,q)图，$q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$，试证$G$是连通图。

证明. 用反证法。假设G不连通，则至少有两个连通分量。设其中一个连通分量的顶点数为 p_1，边数为q_1，所有其他连通分量的顶点数为p_2，边数为q_2。则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)(p_1+p_2-2)\\
=&\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)((p_1-1)+(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_1(p_2-1)+p_2(p_1-1)+p_2(p_2-1)-(p_1-1)-(p_2-1))\\
=&\frac{1}{2}(p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1-1)(p_2-1))\\
=&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}+(p_1-1)(p_2-1))\\
\geq&\frac{p_1(p_1-1)}{2}+\frac{p_2(p_2-1)}{2}\\
\geq&q
\end{aligned}
$$

矛盾。 □

习题 7. 在一个有n个人的宴会上，每个人至少有m个朋友（$2 \leq m < n$），试证：有不少于$m+1$个人，使得他们按照某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

习题 8. 设G为图。证明：若$\delta(G) \geq 2$，则G包含长度至少为$\delta(G)+1$的圈。

证明. 设$P = v_0v_1 \ldots v_n$为G中的一条最长路，则v_0只能与P中的顶点相邻接，否则假设v_0与不在P中的顶点u邻接，则$uv_0v_1 \ldots v_n$构成了G中一条更长的路，与P为G中的最长路矛盾。取最大的s使得v_0与v_s相邻接，则$C = v_0v_1 \ldots v_sv_0$为长度至少为$\delta(G)+1$的圈，这是因为v_0至少与$\delta(G)$个顶点相邻接，而所有这些与v_0邻接的顶点均在圈C中。 □

习题 9. 证明：如果G不是连通图，则G^c是连通图。

习题 10. 每一个自补图有$4n$或$4n+1$个顶点。

习题 11. 给出一个10个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点的u和v，均有:$\deg u + \deg v \geq 9$。

习题 12. 试求K_p中不同的哈密顿圈的个数。

习题 13. 完全偶图$K_{m,n}$为哈密顿图的充分必要条件是什么?

习题 14. 证明：具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。