

# 第四章无穷集合及其基数

陈建文

设集合  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5, 6\}$ , 则下列不是双射的是?

- A.  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$
- B.  $\{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$
- C.  $\{(1, 4), (2, 4), (3, 6)\}$
- D.  $\{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$

下列说法错误的是？

- A. 所有的 $n$ 次奇置换构成的集合与所有的 $n$ 次偶置换构成的集合之间存在一个双射。
- B. 设 $X$ 为集合，则 $X$ 上的所有等价关系构成的集合与 $X$ 的所有划分构成的集合之间存在一个双射。
- C. 整数集合与偶数集合之间存在一个双射。
- D. 设 $A$ 与 $B$ 为两个互不相交的集合，则在 $A$ 与 $A \cup B$ 之间不可能存在双射。

# 1. 可数集

## 定义

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射，则称 $X$ 与 $Y$ 对等，记为 $X \sim Y$ 。

# 1. 可数集

## 定义

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射, 则称 $X$ 与 $Y$ 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

## 定义

如果从自然数集 $\mathbb{N}$ 到集合 $X$ 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 则称集合 $X$ 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 $X$ 不是可数集且 $X$ 不是有穷集合, 则称 $X$ 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

# 1. 可数集

## 定义

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射, 则称 $X$ 与 $Y$ 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

## 定义

如果从自然数集 $\mathbb{N}$ 到集合 $X$ 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 则称集合 $X$ 为可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 $X$ 不是可数集且 $X$ 不是有穷集合, 则称 $X$ 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

## 定理

集合 $A$ 为可数集的充分必要条件是 $A$ 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

# 1. 可数集

## 定理

可数集的任一无限子集也是可数集。

# 1. 可数集

## 定理

设 $A$ 为可数集合， $B$ 为有穷集合，则 $A \cup B$ 为可数集。



# 1. 可数集

## 定理

设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集，则 $A \cup B$ 为可数集。

# 1. 可数集

## 定理

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

# 1. 可数集

## 定理

设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集，则 $A \times B$ 为可数集。

# 1. 可数集

## 定理

全体有理数之集 $\mathbb{Q}$ 为可数集。

## 2 连续统集

### 定理

区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合为不可数集。

## 2 连续统集

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \rightarrow x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 2 连续统集

1. 对任意的 $x \in R$ ,  $x \leq x$ 。
2. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq x$ , 则 $x = y$ 。
3. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x \leq y$ 并且 $y \leq z$ , 则 $x \leq z$ 。
4. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 两者中必有其一成立。

我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$ ,  $x \geq y$ 表示 $y \leq x$ ,  $x > y$ 表示 $x \geq y$ 并且 $x \neq y$ 。

5. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ ,  $z \in R$ , 如果 $x < y$ , 则 $x + z < y + z$ 。
6. 对任意的 $x \in R$ ,  $y \in R$ , 如果 $x > 0$ ,  $y > 0$ , 则 $xy > 0$ 。

## 2 连续统集

另外，实数集还具有如下性质：

设 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 为实数集 $R$ 上的闭区

间， $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$ ，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 非空。



## 2 连续统集

### 定义

凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

## 2 连续统集

### 定理

无穷集合必包含有可数子集。

## 定理

设 $M$ 为一个无穷集合,  $A$ 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

## 定理

设 $M$ 为一个无穷集合,  $A$ 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

## 证明.

因为 $M$ 为一个无穷集合, 所以 $M$ 中必有一个可数子集 $D$ 。

令 $P = M \setminus D$ , 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$ ,  $D \sim D \cup A$ , 得到 $M \sim M \cup A$ 。



## 定理

设 $M$ 为一个无穷集合,  $A$ 为至多可数集合, 则 $M \sim M \cup A$ 。

## 证明.

先考虑 $A \cap M = \emptyset$ 的情况。因为 $M$ 为一个无穷集合, 所以 $M$ 中必有一个可数子集 $D$ 。令 $P = M \setminus D$ , 则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由 $P \sim P$ ,  $D \sim D \cup A$ , 得到 $M \sim M \cup A$ 。

再考虑 $A \cap M \neq \emptyset$ 的情况, 此时 $A \setminus M$ 为至多可数集合, 从而 $M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$ 。



## 定理

设 $M$ 为无穷集合， $A$ 为 $M$ 的至多可数子集， $M \setminus A$ 为无穷集合，则 $M \sim M \setminus A$ 。

## 2 连续统集

### 定理

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

## 2 连续统集

### 定理

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$



## 2 连续统集

### 定理

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为两两不相交的集序列。如果  $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

### 推论

全体实数之集是一个连续统。

## 2 连续统集

### 定理

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为两两不相交的集序列。如果  $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

### 推论

全体实数之集是一个连续统。

### 推论

全体无理数之集是一个连续统。

### 3 基数及其比较

#### 定义

集合 $A$ 的基数是一个符号，凡与 $A$ 对等的集合都赋以同一个记号。集合 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定义

集合 $A$ 的基数是一个符号，凡与 $A$ 对等的集合都赋以同一个记号。集合 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。

#### 定义

所有与集合 $A$ 对等的集合构成的集族称为 $A$ 的基数。

设集合  $X = \{1, 2, 3\}$ , 在  $2^X$  上定义二元关系  $R$ , 对任意的  $A \in 2^X$ ,  $B \in 2^X$ ,  $(A, B) \in R$  当且仅当在  $A$  与  $B$  之间存在一个双射, 则  $|2^X/R| = ?$

以下结论是否正确?

设 $N$ 为自然数集, 在 $2^N$ 上定义二元关系 $R$ , 对任意的 $A \in 2^X$ ,  $B \in 2^X$ ,  $(A, B) \in R$ 当且仅当在 $A$ 与 $B$ 之间存在一个双射, 则 $2^N/R$ 为可数集。

### 3. 基数及其比较

设 $A$ ,  $B$ 为两个集合,

### 3. 基数及其比较

设 $A$ ,  $B$ 为两个集合,

$|A| = |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个双射。



### 3. 基数及其比较

设 $A$ ,  $B$ 为两个集合,

$|A| = |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个单射。

### 3. 基数及其比较

设 $A$ ,  $B$ 为两个集合,

$|A| = |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个双射。

$|A| \leq |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个单射。

$|A| < |B|$ : 在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一个单射, 但不存在从集合 $A$ 到集合 $B$ 的双射。

### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

设 $M = \{1, 2, 3\}$ ,

则 $2^M = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ ,

### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,

### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。



### 3 基数及其比较

定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明:

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此,



### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ ,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ ,



### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ ,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ;

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ ,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i: M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ ,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i: M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。



### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i : M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f : M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i: M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此,  $f$ 不为满射,

### 3 基数及其比较

#### 定理 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

证明.

令 $i: M \rightarrow 2^M$ , 其定义为对任意的 $m \in M$ ,  $i(m) = \{m\}$ 。于是,  $i$ 为从 $M$ 到 $2^M$ 的单射, 故 $|M| \leq |2^M|$ 。为了完成定理的证明, 我们还需要证明: 如果 $f: M \rightarrow 2^M$ 为单射, 则 $f$ 一定不为满射。为此, 令

$$X = \{m \in M \mid m \notin f(m)\}$$

显然,  $X \in 2^M$ 。现在证明对任意的 $x \in M$ ,  $f(x) \neq X$ 。实际上, 如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ , 则如果 $x_0 \in X$ , 那么由 $X$ 的定义知 $x_0 \notin f(x_0)$ , 即 $x_0 \notin X$ ; 如果 $x_0 \notin X$ , 即 $x_0 \notin f(x_0)$ , 由 $X$ 的定义可得 $x_0 \in X$ 。总之,  $x_0 \in X$ 与 $x_0 \notin X$ 都引出矛盾, 从而不存在 $x_0 \in M$ 使得 $f(x_0) = X$ 。因此,  $f$ 不为满射, 从而

$$|M| < |2^M|$$

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ ,



## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ , 定义

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ , 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ , 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中 $g^{-1}$ 为视 $g$ 为 $B$ 到 $g(B)$ 的一一对应时 $g$ 的逆,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ , 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中 $g^{-1}$ 为视 $g$ 为 $B$ 到 $g(B)$ 的一一对应时 $g$ 的逆, 易见 $h$ 为一一对应。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 证明.

如果可以找到 $A$ 的子集 $D$ 使得 $D = A \setminus g(B \setminus f(D))$ , 令 $h: A \rightarrow B$ , 对任意的 $x \in A$ , 定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果 } x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中 $g^{-1}$ 为视 $g$ 为 $B$ 到 $g(B)$ 的一一对应时 $g$ 的逆, 易见 $h$ 为一一对应。所以 $A$ 与 $B$ 的基数相等。 □

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ ,



## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$



## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$ , 因此,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$ , 因此,  $\psi(D) \subseteq D$ ,

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$ , 因此,  $\psi(D) \subseteq D$ , 所以



## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 为两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ , 则存在从 $A$ 到 $B$ 的双射。

证明.

令 $\psi: 2^A \rightarrow 2^A$ , 对任意的 $E \in 2^A$ ,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见, 如果 $E \subseteq F \subseteq A$ , 则 $\psi(E) \subseteq \psi(F)$ 。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A \mid E \subseteq \psi(E)\}$$

, 则 $\phi \in \mathbb{D}$ 。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的 $E \in \mathbb{D}$ , 由 $E \subseteq D$ 知 $E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$ , 从而 $D \subseteq \psi(D)$ 。于是 $\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$ , 故 $\psi(D) \in \mathbb{D}$ , 因此,  $\psi(D) \subseteq D$ , 所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D)).$$

# 1. 集合的概念

## 集合的定义

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。

## 5 公理集合论

### 公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

### 公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

### 公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

### 公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

## 5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

$$\text{其中 } a^+ = a \cup \{a\}$$

## 5 公理集合论

### 公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

### 公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

### 公理5.10 (选择公理)

$$(\forall \text{relation } R)(\exists \text{function } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $R$  为实数集,  
则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集,  
则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $R$ 为实数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $R$ 为实数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.



## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $R$ 为实数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

$$(1) \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$$

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(1) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in R | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $R$ 为实数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

$$(1) \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) = \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界,

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛,

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ ,

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。



习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ ,

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ , 由序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降知

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ , 由序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降知序列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单调上升,

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ , 由序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降知序列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单调上升, 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$ 。

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

解.

(1) 这说明序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降且有下界, 因此收敛, 设极限为  $x$ , 则

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

解得  $x = \sqrt{2}$ 。

由  $x_n \geq \sqrt{2}$  知  $\frac{2}{x_n} \leq \sqrt{2}$ , 由序列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单调下降知序列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单调上升, 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n} = \sqrt{2}$ 。

综上,  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \{\sqrt{2}\}$ 。



习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

$$\begin{aligned} & x_n^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4 \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left( 2 * x_{n-1} * \frac{2}{x_{n-1}} + 4 \right) = 2 \end{aligned}$$



## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

$$\begin{aligned} & x_n - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) - x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} - 2x_{n-1}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_{n-1}} - x_{n-1}) = \frac{2 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \leq 0 \end{aligned}$$

这 说 明 序 列  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  单 调 下 降 , 从 而 序 列  $\frac{2}{x_0}, \frac{2}{x_1}, \dots, \frac{2}{x_n}, \dots$  单 调 上 升。 □

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

$$\begin{aligned} x_n - \frac{2}{x_n} &= \frac{x_n^2 - 2}{x_n} = \frac{(\frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}))^2 - 2}{x_n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} + 4) - 2}{x_n} = \frac{\frac{1}{4}(x_{n-1}^2 + \frac{4}{x_{n-1}^2} - 4)}{x_n} \\ &= \frac{x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}}{4x_n} (x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}) \leq \frac{1}{4}(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}}) \end{aligned}$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$ 。



习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $Q$ 为有理数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

用反证法。

习题:

设

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $Q$ 为有理数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

用反证法。设存在 $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n]$ ,

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

用反证法。设存在  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n]$ , 由  $x$  为有理数知  $x^2 \neq 2$ 。

## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令  $[a, b]$  表示  $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里  $Q$  为有理数集, 则  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

用反证法。设存在  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n]$ , 由  $x$  为有理数知  $x^2 \neq 2$ 。

如果  $x^2 > 2$ , 则  $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$ , 从而  $(\frac{2}{x})^2 < 2 < x^2$ , 于是  $\frac{2}{x} < x$ 。对任意的自然数  $n$ , 由  $x \leq x_n$  知  $\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$ , 从而  $x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$ , 这与  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$  矛盾。



## 习题:

设

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}) \end{cases}$$

(2) 令 $[a, b]$ 表示 $\{x \in Q | a \leq x \leq b\}$ , 这里 $Q$ 为有理数集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解.

以下证明 $\bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n] = \phi$ 。

用反证法。设存在 $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\frac{2}{x_n}, x_n]$ , 由 $x$ 为有理数知 $x^2 \neq 2$ 。

如果 $x^2 > 2$ , 则 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$ , 从而 $(\frac{2}{x})^2 < 2 < x^2$ , 于是 $\frac{2}{x} < x$ 。对任意的自然数 $n$ , 由 $x \leq x_n$ 知 $\frac{2}{x} \geq \frac{2}{x_n}$ , 从而 $x_n - \frac{2}{x_n} \geq x - \frac{2}{x}$ , 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$ 矛盾。

如果 $x^2 < 2$ , 则 $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{2}$ , 从而 $(\frac{2}{x})^2 > 2 > x^2$ , 于是 $\frac{2}{x} > x$ 。对任意的自然数 $n$ , 由 $x \geq \frac{2}{x_n}$ 知 $\frac{2}{x} \leq x_n$ , 从而 $x_n - \frac{2}{x_n} \geq \frac{2}{x} - x$ , 这也与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \frac{2}{x_n}) = 0$ 矛盾。 □

习题: (P20-5)

设 $X$ 为一个非空集合,  $A_n \subseteq X$ ,  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ 。试证对任意的自然数 $n$ ,

$$A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} (A_m \cap A_{m+1}^c) \cup \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

习题: (P47-5)

设  $f : X \rightarrow Y$ 。试证:  $f$  为满射当且仅当对任意的  $E \in 2^Y$ ,  $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

### 习题: (P126-6)

设 $R$ 为集合 $X$ 上的自反且传递的二元关系。

a)给出 $R$ 的一个实例。

b)在 $X$ 上定义二元关系 $\sim$ 如下:  $x \sim y$ 当且仅当 $xRy$ 且 $yRx$ 。 证明 $\sim$ 为 $X$ 上的等价关系。

c)在商集 $X/\sim$ 上定义二元关系 $\leq$ :  $[a] \leq [b]$ 当且仅当 $aRb$ 。证明 $\leq$ 为 $X/\sim$ 上的偏序关系。