

第三章关系

陈建文

March 29, 2023

定义1. 设 A 与 B 为两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 R ，称为从 A 到 B 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 (a, b) 在 R 下的象为 T ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 (a, b) 在 R 下的象为 F ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，记为 $a \nR b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

例1. 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 2^X 上的二元关系 \subseteq 可以定义为一个从 $2^X \times 2^X$ 到 $\{T, F\}$ 的映射，

$$\begin{aligned} &\subseteq (\phi, \phi) = T, \subseteq (\phi, \{1\}) = T, \subseteq (\phi, \{2\}) = T, \subseteq (\phi, \{1, 2\}) = T, \\ &\subseteq (\{1\}, \phi) = F, \subseteq (\{1\}, \{1\}) = T, \subseteq (\{1\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1\}, \{1, 2\}) = T, \\ &\subseteq (\{2\}, \phi) = F, \subseteq (\{2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{2\}, \{2\}) = T, \subseteq (\{2\}, \{1, 2\}) = T, \\ &\subseteq (\{1, 2\}, \phi) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{2\}) = F, \subseteq (\{1, 2\}, \{1, 2\}) = T \end{aligned}$$

定义2. 设 A 与 B 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 R 称为从 A 到 B 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，并记为 $a \nR b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

例2. 设集合 $X = \{1, 2\}$ ，则 2^X 上的二元关系 \subseteq 可以定义为 $2^X \times 2^X$ 的一个子集，

$$\begin{aligned} \subseteq = &\{(\phi, \phi), (\phi, \{1\}), (\phi, \{2\}), (\phi, \{1, 2\}), \\ &(\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), \\ &(\{1, 2\}, \{1, 2\})\} \end{aligned}$$

例3. 自然数集 \mathbb{N} 上的小于等于关系“ \leq ”为 \mathbb{N} 上的一个二元关系。

例4. 设 n 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 m, k ，如果 $m - k$ 能被 n 整除，则称 m 与 k 为模 n 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 m 被 n 除所得到的余数与 k 被 n 除所得到的余数相等。模 n 同余为 \mathbb{Z} 上的一个二元关系。

定义3. 设 $R \subseteq A \times B$ ，集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的定义域，记为 $\text{dom}(R)$ ；集合

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的值域，记为 $\text{ran}(R)$ 。

定义4. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 R 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 间的一个 n 元关系, 每个 A_i 称为 R 的一个域。

The term relation is used here in its accepted mathematical sense. Given sets S_1, S_2, \dots, S_n (not necessarily distinct), R is a relation on these n sets if it is a set of n -tuples each of which has its first element from S_1 , its second element from S_2 , and so on. More concisely, R is a subset of the Cartesian product $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

1	5	9
2	5	7
3	5	2
2	6	12
3	6	3
4	7	1
6	7	1

[Codd, 1974]E. F. Codd. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. Information Retrieval, 13(6): 1970.

定义5. 集合 X 上的二元关系 R 称为自反的, 如果对 X 的任意元素 x 都有 xRx 。

例5. 判断下列二元关系是否为自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (不是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (不是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义6. 集合 X 上的二元关系 R 称为反自反的, 如果对 X 的任意元素 x 都有 $(x, x) \notin R$ 。

例6. 判断下列二元关系是否为反自反的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)

定义7. 集合 X 上的二元关系 R 称为对称的, 如果对 X 的任意元素 x, y , 只要 xRy 就有 yRx 。

例7. 判断下列二元关系是否为对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (不是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (不是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义8. 集合 X 上的二元关系 R 称为反对称的, 如果对 X 的任意元素 x, y , xRy 且 yRx , 则 $x = y$ 。

例8. 判断下列二元关系是否为反对称的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

定义9. 集合 X 上的二元关系 R 称为传递的, 如果对 X 的任意元素 x, y, z , 只要 xRy 且 yRz , 就有 xRz 。

例9. 判断下列二元关系是否为传递的。设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

1. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ (是)
2. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ (不是)
3. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (不是)
4. 集合 X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$ (是)
5. 集合 X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ (是)

练习1. 设 R 为集合 X 上的反自反的和传递的二元关系, 证明: R 为反对称的二元关系。

证法一. 对任意的 $x \in X, y \in Y$, 如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$, 则由 R 为传递的知 $(x, x) \in R$, 这与 R 为反自反的矛盾, 从而 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$ 不可能成立。即如果 $(x, y) \in R$ 并且 $(y, x) \in R$, 则 $x = y$ 成立, 这证明了 R 为反对称的。

□

证法二. 对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $(x, y) \in R$ 并且 $x \neq y$, 以下证明 $(y, x) \notin R$ 。用反证法, 假设 $(y, x) \in R$, 则由 R 为传递的知 $(x, x) \in R$, 这与 R 为反自反的矛盾

□

证法三. 用反证法。假设 R 不是反对称的二元关系, 则存在 $x \in X, y \in X, (x, y) \in R, (y, x) \in R$ 并且 $x \neq y$, 由 R 为传递的知, $(x, x) \in R$, 这与 R 为反自反的矛盾。 \square

定义10. 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系, R 的逆 R^{-1} 定义为从集合 B 到集合 A 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

例10. 设 $X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, 则 $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$ 。

定理1. 设 R 和 S 为集合 X 上的二元关系, $R \subseteq S$, 则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$ 。

定理2. 设 R 为集合 X 上的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$ 。

定理3. 设 R 为集合 X 上的二元关系, 则 R 为对称的当且仅当 $R^{-1} \subseteq R$ 。

证明. 由 R 为对称的往证 $R^{-1} \subseteq R$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $(x, y) \in R^{-1}$, 则 $(y, x) \in R$, 由 R 为对称的知, $(x, y) \in R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 R 为对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R^{-1}$, 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$ 。 \square

定理4. 设 R 为集合 X 上的二元关系, 则 R 为对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

证明. 只需证 $R^{-1} \subseteq R$ 当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

如果 $R = R^{-1}$, 则显然 $R^{-1} \subseteq R$ 。

由 $R^{-1} \subseteq R$ 往证 $R = R^{-1}$, 此时只需证 $R \subseteq R^{-1}$ 。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R^{-1}$, 由 $R^{-1} \subseteq R$ 知 $(y, x) \in R$, 从而 $(x, y) \in R^{-1}$ 。 \square

定义11. 设 R 为从集合 A 到集合 B , S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C | \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

例11. 设 $X = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, 则 $R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ 。

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, R 的非负整数次幂递归的定义如下:

$$R^0 = I_X, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

在上例中, $R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ 。

定理5. 设 R_1, R_2, R_3 分别为从集合 A 到集合 B , 从集合 B 到集合 C , 从集合 C 到集合 D 的二元关系, 则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明.

$$\begin{aligned}
& \forall a \in A \forall d \in D \\
& (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 \\
& \Leftrightarrow \exists c \in C ((a, c) \in R_1 \circ R_2 \wedge (c, d) \in R_3) \\
& \Leftrightarrow \exists c \in C (\exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \wedge (c, d) \in R_3) \\
& \Leftrightarrow \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge \exists c \in C ((b, c) \in R_2 \wedge (c, d) \in R_3)) \\
& \Leftrightarrow \exists b \in B ((a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_2 \circ R_3) \\
& \Leftrightarrow (a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)
\end{aligned}$$

□

定理6. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 则 R 为传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明. 由 R 为传递的往证 $R \circ R \subseteq R$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in R \circ R$, 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in R$, 由 R 为传递的知 $(a, c) \in R$ 。

由 $R \circ R \subseteq R$ 往证 R 为传递的。

对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$, 如果 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R \circ R$, 由 $R \circ R \subseteq R$ 知 $(a, c) \in R$ 。 □

定义12. 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 m 个元素的集合, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为一个包含 n 个元素的集合, R 为从 X 到 Y 的一个二元关系。由 R 定义一个 $m \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下: $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 B 称为关系 R 的矩阵。

例12. 设集合 $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}$, 从 X 到 Y 的关系

$$S = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

, 则 S 的关系矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义13. 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 m 个元素的集合, R 为 X 上的一个二元关系。由 R 定义一个 $m \times m$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下: $\forall (x_i, y_j) \in X \times X$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 B 称为关系 R 的矩阵。

例13. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系 R 的矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理7. 设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则

1. R 为自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为 1;
2. R 为反自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为 0;
3. R 为对称的, 当且仅当 B 为对称矩阵;
4. R 为反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 b_{ij} 与 b_{ji} 不同时为 1;
5. R 为传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$, 则 $b_{ik} = 1$ 。

定理8. 设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则 R^{-1} 的矩阵为 B^T 。

定义14. 设 B, C 为两个布尔矩阵, B 与 C 的逻辑乘为 B 与 C 的对应元素进行逻辑乘所得到的布尔矩阵, 记为 $B \wedge C$, 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B 与 C 的逻辑加为 B 与 C 的对应元素进行逻辑加所得到的布尔矩阵, 记为 $B \vee C$, 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理9. 设 R, S 为从集合 X 到集合 Y 的二元关系, 其矩阵分别为 B_R 和 B_S 。 $R \cup S$ 与 $R \cap S$ 的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$, $B_{R \cap S}$, 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

定义15. 设 A 为 $m \times p$ 布尔矩阵, B 为 $p \times n$ 布尔矩阵, A 与 B 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 C , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}),$$

$$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

设布尔矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理10. 设 X, Y, Z 为有穷集合, $|X| = m, |Y| = p, |Z| = n$. R 为从 X 到 Y 的二元关系, S 为从 Y 到 Z 的二元关系, $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$, 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$.

设集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$, 关系 R 的矩阵为

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则关系 $R \circ R$ 的矩阵为

$$B_{R \circ R} = B_R \circ B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

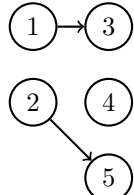
证明. 设 $B_R = (a_{ij}), B_S = (b_{ij}), B_{R \circ S} = (c_{ij})$,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 1 \\ &\Leftrightarrow (x_i, z_j) \in R \circ S \\ &\Leftrightarrow \exists y_k \in Y (x_i, y_k) \in R \wedge (y_k, z_j) \in S \\ &\Leftrightarrow (a_{i1} = 1 \wedge b_{1j} = 1) \vee (a_{i2} = 1 \wedge b_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (a_{ip} = 1 \wedge b_{pj} = 1) \\ &\Leftrightarrow (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}) = 1 \end{aligned}$$

□

关系除了用矩阵表示外, 还可以用图来表示。设 X 和 Y 为有穷集合, R 为从 X 到 Y 的二元关系。当用图表示 R 时, 先把 X 与 Y 的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 R 的任一序对 (x, y) 用从代表 x 的点画一条指向代表 y 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”, 称为关系 R 的图。

设 $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4, 5\}$, 从 X 到 Y 的关系 $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$, 则关系 R 的图为



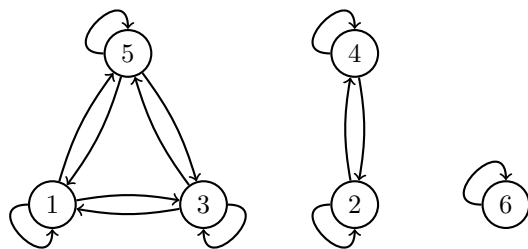
设 X 为有穷集合, R 为集合 X 上的二元关系。当用图表示 R 时, 先把 X 的元素在纸上用点表示, 并在其旁边标上这个元素的名字。然后把 R 的任一序

对 (x, y) 用从代表 x 的点画一条指向代表 y 的点的矢线表示。这样就得到了一个由点、线组成的“有向图”，称为关系 R 的图。注意，如果 $(x, x) \in R$ ，则在代表 x 的点画一条又指向此点的矢线，称为环。

设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下：

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则关系 R 的图为



定理11. 设 R 为集合 X 上的二元关系，则

1. R 为自反的，当且仅当 R 的图的每个顶点均有一个环；
2. R 为反自反的，当且仅当 R 的图中没有环；
3. R 为对称的，当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
4. R 为反对称的，当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两条方向相反的矢线；
5. R 为传递的，当且仅当在 R 的图中如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

定义16. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系。 X 上的一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包，用 R^+ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

定理12. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系，则关系 R 的传递闭包 R^+ 为包含 R 的传递关系。

证明。由定义 $R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$ ，显然 $R \subseteq R^+$ 。对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $z \in X$ ， $(x, y) \in R^+$ 并且 $(y, z) \in R^+$ ，则对任意的 R' ， $R \subseteq R'$ 且 R' 是传递的， $(x, y) \in R'$ 并且 $(y, z) \in R'$ ，由 R' 为传递的知 $(x, z) \in R'$ ，从而 $(x, z) \in R^+$ ，这证明了 R^+ 为传递的。□

定理13. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X, b \in X, n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设, $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$, 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_{k-1} \in X, x_k \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R, (x_1, x_2) \in R, \dots, (x_{k-1}, x_k) \in R, (x_k, b) \in R$ 。□

定理14. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

证明. 首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

由 R^+ 的定义, 只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为包含 R 的传递关系即可。 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是显然的。以下证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 为传递的。对任意的 $a \in X, b \in X, c \in X$, 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 并且 $(b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 则存在正整数 m 和 n 使得 $(a, b) \in R^m$ 且 $(b, c) \in R^n$ 。于是 $(a, c) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 从而 $(a, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。所以, $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的。

其次证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。对任意的 $a \in X, b \in X$, 如果 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 则存在某个正整数 m , 使得 $(a, b) \in R^m$ 。如果 $m = 1$, 则 $(a, b) \in R \subseteq R^+$; 如果 $m > 1$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{m-1}, b) \in R$ 。由 $R \subseteq R^+$ 知 $(a, b_1) \in R^+, (b_1, b_2) \in R^+, \dots, (b_{m-1}, b) \in R^+$ 。又因为 R^+ 为传递的, 所以 $(a, b) \in R^+$ 。于是, $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

因此, $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。□

定理15. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明. 只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R, (b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$, 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以, $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此, $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。□

定理16. 设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, B 为 R 的关系矩阵, B_{R^+} 为 R^+ 的关系矩阵, 简记为 B^+ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

以下为计算集合 X 上关系 R 的传递闭包的算法。

TRANSITIVE-CLOSURE(B)

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $M = B$ 
2   $A = M$ 
3  for  $i = 2$  to  $n$ 
4       $M = M \circ B$ 
5       $A = A \vee M$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

WARSHALL(B)

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          for  $j = 1$  to  $n$ 
5               $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 
6  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$
 $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \vee (a_{ik}^{(k-1)} \wedge a_{kj}^{(k-1)}) (k \geq 1)$
 其中 $a_{ij}^{(k)} = 1$ 当且仅当存在 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 使得 $(x_i, x_{i_1}) \in R, (x_{i_1}, x_{i_2}) \in R, \dots, (x_{i_m}, x_j) \in R$ 。
 $a_{ik} = a_{ik} \vee (a_{ik} \wedge a_{kk})$
 $a_{kj} = a_{kj} \vee (a_{kk} \wedge a_{kj})$

WARSHALL(B)

```
// B is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$ 
1   $A = B$ 
2  for  $k = 1$  to  $n$ 
3      for  $i = 1$  to  $n$ 
4          if  $a_{ik} == 1$ 
5              for  $j = 1$  to  $n$ 
6                   $a_{ij} = a_{ij} \vee a_{kj}$ 
7  return  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$ 
```

定义17. 集合 X 上的二元关系 R 称为**等价关系**, 如果 R 同时满足以下三个性质:

1. R 为自反的, 即对 X 中的任意元素 x , xRx ;
2. R 为对称的, 即对 X 中的任意元素 x, y , 如果 xRy , 则 yRx ;
3. R 为传递的, 即对 X 中的任意元素 x, y, z , 如果 xRy 且 yRz , 则 xRz 。

这是在我们这门课中迄今为止所学的所有概念中最重要的概念之一, 是不是有点抽象? 我们可以借助一个具体的例子, 帮助我们理解这些抽象的概念。从小学到现在, 我们是不是学了许多类似于“ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ”的等式? 这里的等价关系就是从“=”抽象出来的。(1) $x = x$; (2) 如果 $x = y$, 那么 $y = x$; (3) 如果 $x = y$ 并且 $y = z$, 那么 $x = z$ 。是不是显然成立呀? 我们可以借助熟知的“=”来理解等价关系的定义。

定义18. 设 $a, b \in Z$, 如果存在 $q \in Z$ 使得 $a = qb$, 则称 b 整除 a , 记为 $b|a$ 。

定义19. 设 $a, b \in Z$, $b > 0$, $a = qb + r$, $q \in Z$, $0 \leq r < b$, 则称 r 为 a 除以 b 所得到的余数, 记为 $a \bmod b$ 。

定义20. 设 $a, b, n \in Z$, $n > 0$, 如果 $a \bmod n = b \bmod n$, 则称 a 与 b 模 n 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{n}$ 。

定理17. $\forall a, b, n \in Z, n > 0, a \equiv b \pmod{n}$ 等价于 $n|(a - b)$ 。

例14. 整数集 Z 上的模 n 同余关系为 Z 上的等价关系。

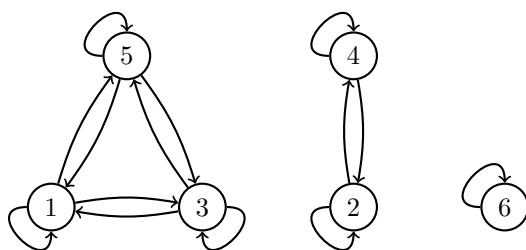
例15. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

则 R 为 X 上的等价关系。

证法一. 直接根据定义进行验证。 □

证法二. 画出 R 的关系图进行判断。



- (1) 在 R 的图中, 每个顶点均有一个环, 这说明 R 为自反的;
- (2) 在 R 的图中, 如果任意两个不同顶点间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线, 这说明 R 为对称的;
- (3) 在 R 的图中, 如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点, 则从该顶点到另一顶点有一条矢线, 这说明 R 为传递的。

□

如果我们写个程序进行判断，首先要将该二元关系在计算机中表示出来。矩阵表示法为我们提供了一种解决方案。

证法三. 关系 R 的矩阵表示为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) B 的对角线上的元素全为1说明 R 为自反的;
- (2) B 为对称矩阵说明 R 为对称的;
- (3)

$$B \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $B \circ B$ 中的每个元素小于等于 B 中的每个元素知 R 为传递的。 \square

定义21. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, $x \in X$, X 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 x 关于 \cong 的等价类, 记为 $[x]$, 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

例16. 在例14中我们已经知道模4同余关系为等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 模4同余关系所有等价类所构成的集合为 $\{[0], [1], [2], [3]\}$, 其中

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{aligned}$$

\square

例17. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 6)\},$$

在例15中, 我们知道 R 为 X 上的等价关系, 试写出其所有等价类所构成的集合。

解. 我们先尝试写出集合 X 上每个元素关于关系 R 的等价类:

$$\begin{aligned}[1] &= \{1, 3, 5\} \\ [2] &= \{2, 4\} \\ [3] &= \{1, 3, 5\} \\ [4] &= \{2, 4\} \\ [5] &= \{1, 3, 5\} \\ [6] &= \{6\}\end{aligned}$$

你发现了什么? 有重复! 于是关系 R 的所有等价类所构成的集合为 $\{[1], [2], [6]\}$, 即 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$. \square

通过以上的例子, 我们发现了以下的结论:

定理18. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, 对任意的 $x \in X$, $y \in X$, $x \cong y$ 当且仅当 $[x] = [y]$.

证明. 对任意的 $x \in X$, $y \in X$, 由 $x \cong y$ 往证 $[x] = [y]$. 这里是要证明两个集合相等. 对任意的 $z \in [x]$, 则 $x \cong z$, 由 $x \cong y$ 及 \cong 的对称性知 $y \cong x$, 再由 \cong 的传递性知 $y \cong z$, 从而 $z \in [y]$. 对任意的 $z \in [y]$, 则 $y \cong z$, 由 $x \cong y$ 及 \cong 的传递性知 $x \cong z$, 从而 $z \in [x]$. 这证明了 $[x] = [y]$.

对任意的 $x \in X$, $y \in X$, 由 $[x] = [y]$ 往证 $x \cong y$. 由 \cong 的自反性知 $x \cong x$, 从而 $x \in [x]$, 再由 $[x] = [y]$ 知 $x \in [y]$, 从而 $y \cong x$, 由 \cong 的对称性得 $x \cong y$. \square

定义22. 设 X 为集合, X 的一些非空子集形成的集族 \mathcal{A} 称为 X 的一个划分, 如果 \mathcal{A} 具有性质

1. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 如果 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \phi$;

2. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$

例18. 集合

$$\begin{aligned}&\{\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}, \\ &\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}\end{aligned}$$

构成了整数集 \mathbb{Z} 的一个划分。

例19. 集合 $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 构成了集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个划分。

定理19. 设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, 则 \cong 的所有等价类的集合构成了集合 X 的一个划分。

证明. 这就是要证明 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 X 的一个划分。

对任意的 $x \in X$, 由 \cong 的自反性知 $x \cong x$, 从而 $x \in [x]$, 这证明了 $[x]$ 非空。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $[x] \neq [y]$, 以下证明 $[x] \cap [y] = \phi$. 用反证法, 假设 $[x] \cap [y] \neq \phi$, 则存在 $z \in [x] \cap [y]$, 于是 $z \in [x]$ 并且 $z \in [y]$. 由 $z \in [x]$ 知 $x \cong z$,

由 $z \in [y]$ 知 $y \cong z$ 。由 \cong 的对称性可得 $z \cong y$ ，再由 \cong 的传递性可得 $x \cong y$ ，从而 $[x] = [y]$ ，矛盾。

由对任意的 $x \in X$ ， $x \in [x]$ 易知 $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ 。

综上，我们证明了 $\{[x] | x \in X\}$ 构成了集合 X 的一个划分。 \square

定理20. 设 \mathcal{A} 为集合 X 的一个划分，令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$$

则 \cong 为集合 X 上的一个等价关系。

这个定理的符号不太好理解吧？在以后学习的过程中，遇到类似这个定理中的抽象的符号应该怎么办？具体的例子可以帮助我们很好的理解这些抽象的符号。例如，设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $\mathcal{A} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}\}$ 为集合 X 的一个划分，则

$$\begin{aligned} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A \\ &= (\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{2, 4\} \times \{2, 4\}) \cup (\{6\} \times \{6\}) \\ &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 6)\} \end{aligned}$$

为集合 X 上的一个等价关系。

证明。这就是要验证 \cong 满足自反性、对称性和传递性。

(1) 对任意的 $x \in X$ ，由 \mathcal{A} 为集合 X 的一个划分知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ ，从而 $(x, x) \in A \times A$ ，于是， $(x, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足自反性。

(2) 对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，从而 $(y, x) \in A \times A$ ，于是 $(y, x) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足对称性。

(3) 对任意的 $x \in X$ ， $y \in X$ ， $z \in X$ ，如果 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，并且 $(y, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，那么存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in A \times A$ ，并且存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $(y, z) \in B \times B$ 。于是， $x \in A$ ， $y \in A$ ， $y \in B$ ， $z \in B$ 。此时，必有 $A = B$ ，否则 $A \cap B = \emptyset$ ，这与 $y \in A$ 并且 $y \in B$ 矛盾。从而， $x \in A$ ， $z \in A$ ，因此， $(x, z) \in A \times A$ ，于是 $(x, z) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ ，这说明 \cong 满足传递性。 \square

本门课一个很重要的结论为“集合 X 上的所有等价关系之集与集合 X 的所有划分之集之间存在着一一对应的关系”。为了证明这个结论，我们需要构造一个从集合 X 上的所有等价关系之集到集合 X 的所有划分之集之间的一个双射。还记得我们学过的可逆映射的概念吗？一个映射为双射，当且仅当为该映射为可逆映射。于是我们可以构造一个从集合 X 上的所有等价关系之集到集合 X 的所有划分之集之间的一个可逆映射。还记得可逆映射的定义吗？

设 $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 f 为可逆的，而 g 称为 f 的逆映射。借助于以上我们所学过的数学概念，我们有如下的定理：

定理21. 设 X 为一个集合,

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\}, \\ \mathbb{A} &= \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{为集合 } X \text{ 的一个划分}\}, \\ f &= \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\} \\ g &= \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\}\end{aligned}$$

则 f 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{A} 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

如果我们能够完全理解该定理, 并能够从“0”开始给出该定理的证明过程, 即该定理所依赖的其他结论都可以给出证明, 那么, 整个前三章的内容, 我们就有了一个很好的把握了。集中精力搞懂本课程的一些重要定理的证明过程, 顺藤摸瓜, 这些定理所依赖的其他结论也能够给出证明, 直到可以从头开始说起, 这对于提升我们的逻辑思维能力是很有帮助的。

这是我们所遇到的第一个重要的定理。让我们先从理解这个定理开始吧。还记得我们应该怎样理解抽象的符号和术语吗? 答案是尝试具体的例子。

让我们尝试一个简单的集合: $X = \{1, 2, 3\}$ 。那么 \mathbb{R} 表示集合 X 上所有的等价关系构成的集合, 这个集合是怎样的? 这个问题不好回答吧?

让我们先看 \mathbb{A} 吧。 \mathbb{A} 表示集合 X 的所有划分构成的集合。这个集合比较好写, 你能写出答案吗? 我的答案是这样的:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \{ & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ & \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}\}\end{aligned}$$

对任意的 $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$, 我们计算 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$, 就可以得到 X 上的一个等价关系。该定理是在说, 在 \mathbb{R} 和 \mathbb{A} 之间存在一个一一对应的关系, 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{R} = \{ & \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}, \\ & \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 1)\}, \\ & \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}\end{aligned}$$

证明. 1. 证明 f 为映射。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong , $\{[x]_{\cong} \mid x \in X\}$ 为集合 X 的一个划分。这就是定理19。

2. 证明 g 为映射。这就是要证明对于集合 X 的任意一个划分 \mathcal{A} , $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 X 上的一个等价关系。这就是定理20。

3. 证明 $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong , $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。

这里是要证明两个集合相等。

对任意的 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, 如果 $(x_1, x_2) \in \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$, 那么存在 $x \in X$, $(x_1, x_2) \in [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$, 于是 $x_1 \in [x]_{\cong}$ 并且 $x_2 \in [x]_{\cong}$, 从而 $x \cong x_1$ 并且 $x \cong x_2$, 由 \cong 的对称性知 $x_1 \cong x$, 再由 \cong 的传递性知 $x_1 \cong x_2$, 即 $(x_1, x_2) \in \cong$ 。

对任意的 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, 如果 $(x_1, x_2) \in \cong$, 则 $x_1 \cong x_2$, 从而 $x_2 \in [x_1]_{\cong}$, 由 \cong 的自反性知 $x_1 \in [x_1]_{\cong}$, 从而 $x_1 \in [x_1]_{\cong}$ 。于是, $(x_1, x_2) \in [x_1]_{\cong} \times [x_1]_{\cong} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong}$ 。

4. 证明 $f \circ g = I_A$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个划分 \mathcal{A} , 关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的等价类的集合就是 \mathcal{A} 。

这里还是要证明两个集合相等。

对任意的 $x \in X$, 设 $[x]$ 为关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类, 以下证明 $[x] \in \mathcal{A}$ 。由 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ 知存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$ 。如果我们能够证明 $[x] = A$, 则 $[x] \in \mathcal{A}$ 得证。对任意的 $y \in [x]$, 则 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 。于是, 存在 $B \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in B \times B$, 如果 $B \neq A$, 那么 $x \in A$ 且 $x \in B$, 这与 $A \cap B = \emptyset$ 矛盾, 从而 $B = A$, 因此 $y \in A$ 。反之, 对任意的 $y \in A$, 则 $(x, y) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$, 从而 $y \in [x]$ 。这证明了 $[x] = A$, 从而 $[x] \in \mathcal{A}$ 。

对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 以下证明 A 为等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类。由 A 非空知, 存在 $x, x \in A$, 以下证明 $A = [x]$, 这里 $[x]$ 表示 x 关于等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 的一个等价类。对任意的 $y \in A$, 则 $(x, y) \in A \times A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$, 从而 $y \in [x]$ 。反之, 如果 $y \in [x]$, 则由与前面相类似的, 可以证明 $y \in A$ 。这证明了 $A = [x]$ 。

□

定义23. 设 \cong 为 X 上的等价关系, \cong 的所有等价类之集称为 X 对 \cong 的商集, 记为 X/\cong 。即

$$X/\cong = \{[x] | x \in X, [x] \text{ 为 } x \text{ 关于 } \cong \text{ 的等价类}\}$$

例20. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, \cong 为集合 X 的等价关系, $X/\cong = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$, 试求 \cong 。

练习2. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 \cong 是 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

解. 首先验证 \cong 为 S 上的等价关系:

\cong 为自反的, 这是因为对任意的映射 $f : X \rightarrow Y$, $I_m(f) = I_m(f)$;

\cong 为对称的, 这是因为对任意的映射 $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$, 如果 $I_m(f) = I_m(g)$, 则 $I_m(g) = I_m(f)$;

\cong 为传递的，这是因为对任意的映射 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$, $h: X \rightarrow Y$, 如果 $I_m(f) = I_m(g)$ 并且 $I_m(g) = I_m(h)$, 则 $I_m(f) = I_m(h)$ 。

$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$, 其中

$$\begin{aligned} f_1: X &\rightarrow Y, f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1, Im(f_1) = \{1\} \\ f_2: X &\rightarrow Y, f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2, Im(f_2) = \{1, 2\} \\ f_3: X &\rightarrow Y, f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1, Im(f_3) = \{1, 2\} \\ f_4: X &\rightarrow Y, f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2, Im(f_4) = \{1, 2\} \\ f_5: X &\rightarrow Y, f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1, Im(f_5) = \{1, 2\} \\ f_6: X &\rightarrow Y, f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2, Im(f_6) = \{1, 2\} \\ f_7: X &\rightarrow Y, f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1, Im(f_7) = \{1, 2\} \\ f_8: X &\rightarrow Y, f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2, Im(f_8) = \{2\} \end{aligned}$$

则 $S/\cong = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}, \{f_8\}\}$ □

定义24. 集合 X 上的二元关系 R 称为**偏序关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

1. R 为自反的，即对 X 中的任意元素 x , xRx ;
2. R 为反对称的，即对 X 中的任意元素 x, y , 如果 xRy 且 yRx , 则 $x = y$;
3. R 为传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z , 如果 xRy 且 yRz , 则 xRz 。

定义25. 设 \leq 为集合 X 上的一个偏序关系，则称二元组 (X, \leq) 为一个**偏序集**。

例21. 实数集 \mathbb{R} 上通常的“小于等于”关系 \leq 为一个偏序关系，所以 (\mathbb{R}, \leq) 为一个偏序集。

例22. 设 S 为一个集合， S 的子集间的包含关系 \subseteq 为 2^S 上的一个偏序关系，所以 $(2^S, \subseteq)$ 为一个偏序集。

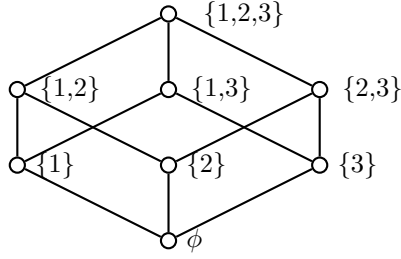
例23. 设集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则 R 为 X 上的偏序关系。

设 \leq 为集合 X 上的一个偏序关系。由于 \leq 为自反的，所以 \leq 的关系图中每个顶点都有一个环，略去每个顶点的环；由于 \leq 为传递的，如果 $x \leq y$, 且 $y \leq z$, 略去从顶点 x 到顶点 z 的矢线；由于 \leq 为反对称的，如果从顶点 x 到顶点 y 有矢线，则将顶点 y 画在顶点 x 的上方，并略去矢线的箭头。按这种方法画出的图称为 (X, \leq) 的哈斯图（Hasse图）。

例24. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, 画出偏序集 $(2^X, \subseteq)$ 的哈斯图。



定义26. 设 \leq 为集合 X 上的偏序关系, 如果 $\forall x, y \in X$, $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立, 则称 \leq 为 X 上的全序关系。相应的, 二元组 (X, \leq) 称为全序集。

我们用 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 并且 $x \neq y$, $x \geq y$ 表示 $y \leq x$, $x > y$ 表示 $x \geq y$ 并且 $x \neq y$ 。

定义27. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $s \geq x$, 则称 s 为 A 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的**最小元素**。

定义28. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$, 在 A 中没有元素 x 使得 $x > s$, 则称 s 为 A 的**极大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$, 在 A 中没有元素 x 使得 $x < t$, 则称 t 为 A 的**极小元素**。

定义29. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $s \geq x$, 则称 s 为 A 的一个**上界**; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的一个**下界**。

定义30. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果 A 有上界且 A 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 A 的**上确界**, 记为 $\sup A$; 如果 A 有下界且 A 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 A 的**下确界**, 记为 $\inf A$ 。

定理22. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, 如果 X 中所有链长度的最大值为 n , 则 X 的全部元素可以被分成 n 个非空不相交反链的并集。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n 。

当 $n = 1$ 时, X 中最长链的长度为1, 所以 X 中任意两个不同的元素不能比较, 从而, X 就是反链, 故定理的结论成立。

假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设 (X, \leq) 中最长链的长度为 $k + 1$, 则 X 中有极大元。令 M 为 X 的所有极大元之集, 则 $M \neq \emptyset$ 且 $M \neq X$ 。易证 $X \setminus M$ 中最长链的长度为 k 。由归纳假设, $X \setminus M$ 可分解成 k 个不相交反链之并。 M 也是一个反链, 所以 X 被分解成 $k + 1$ 个反链之并。□

推论1. 设 (X, \leq) 为一个偏序集, $|X| = mn + 1$, 则 X 中或存在一个长至少为 $n + 1$ 的链, 或存在一个长至少为 $m + 1$ 的反链。

证明. 用反证法。假设结论不成立, 则 X 中每个链的长度 $\leq n$, 并且每个反链的长度 $\leq m$ 。设 X 中最长链的长度为 k , 则 X 能被分成 k 个不相交反链之并。这里 $k \leq n$, 再由每个反链的长度 $\leq m$, 可以得到

$$|X| \leq km \leq mn$$

这与假设 $|X| = mn + 1$ 矛盾。 \square

例25. 证明：每个由 $n^2 + 1$ 个实数组成的序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 中必有长至少为 $n + 1$ 的不减子序列，或有一个长至少为 $n + 1$ 的不增子序列。

证明. 记 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}\}$ ，在 A 上定义二元关系 \leq' 为： $a_i \leq' a_j$ 当且仅当 $a_i \leq a_j$ 并且 $i \leq j$ ，这里 \leq 为实数间通常的小于等于关系。

易验证 \leq' 为自反的，反对称的和传递的，从而为集合 A 上的偏序关系。

A 中或有长至少为 $n + 1$ 的链，或有长至少为 $n + 1$ 的反链。 A 中长至少为 $n + 1$ 的链，就是序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 的不减子序列。而 A 的长至少为 $n + 1$ 的反链，就是序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 的不增子序列。设反链中元素按下标递增顺序排列成

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n+1}} (i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1})$$

因为 $a_{i_k} \leq' a_{i_{k+1}}$ 不成立，而 $i_k < i_{k+1}$ ，所以 $a_{i_k} \leq a_{i_{k+1}}$ 不成立，从而 $a_{i_k} \geq a_{i_{k+1}}$ ，于是

$$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_{n+1}}$$

\square

练习3. 设 R 为集合 X 上的自反且传递的二元关系。

a) 给出 R 的一个实例。

b) 在 X 上定义二元关系 \sim 如下： $x \sim y$ 当且仅当 xRy 且 yRx 。证明 \sim 为 X 上的等价关系。

c) 在商集 X/\sim 上定义二元关系 \leq ： $[a] \leq [b]$ 当且仅当 aRb 。证明 \leq 为 X/\sim 上的偏序关系。

a) 设集合 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $2^X = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ， $R \subseteq 2^X \times 2^X$ ，对任意的 $A \in 2^X, B \in 2^X$ ， $(A, B) \in R$ 当且仅当在 A 与 B 之间存在一个单射，则 R 为集合 X 上的自反且传递的二元关系。

R 为自反的，这是因为对任意的 $A \in 2^X$ ，从 A 到 A 存在一个单射，例如从 A 到 A 的恒等映射就是一个单射。

R 为传递的，这是因为对任意的 $A \in 2^X, B \in 2^X, C \in 2^X$ ，如果从 A 到 B 存在一个单射 f ，从 B 到 C 存在一个单射 g ，则从 A 到 C 存在一个单射 $g \circ f$ 。 $g \circ f$ 为单射，这是因为对任意的 $x_1 \in A, x_2 \in A$ ，如果 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ ，则由 g 为单射知 $f(x_1) = f(x_2)$ ，由 f 为单射知 $x_1 = x_2$ 。

b) 证明：只需证明 \sim 为自反的，对称的，传递的二元关系。

对任意的 $x \in X$ ，由 R 为自反的知 xRx ，从而 $x \sim x$ ，这说明 \sim 为自反的。

对任意的 $x \in X$ ，对任意的 $y \in X$ ，如果 $x \sim y$ ，则 xRy 且 yRx ，即 yRx 且 xRy ，从而 $y \sim x$ ，这说明 \sim 为对称的。

对任意的 $x \in X$ ，对任意的 $y \in X$ ，对任意的 $z \in X$ ，如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ ，则 xRy 且 yRx ， yRz 且 zRy ，由 R 为传递的知 xRz 且 zRx ，从而 $x \sim z$ ，这说明 \sim 为传递的。

综上验证了 \sim 为 X 上的等价关系。

c) 证明：

首先验证关于 \leq 的定义的合理性：对任意的 a_1, a_2, b_1, b_2 ，如果 $[a_1] \leq [b_1]$ ， $a_1 \sim a_2$ ， $b_1 \sim b_2$ ，则 $a_2Ra_1, a_1Rb_1, b_1Rb_2$ ，由 R 的传递性知 a_2Rb_2 ，从而 $[a_2] \leq [b_2]$ 。

以下证明 \leq 为自反的，反对称的，传递的二元关系。

对任意的 $x \in X$, 由 R 为自反的知 xRx , 从而 $[x] \leq [x]$, 这说明 \leq 为自反的。

对任意的 $x \in X, y \in X$, 如果 $[x] \leq [y]$ 并且 $[y] \leq [x]$, 则 xRy 并且 yRx , 从而 $x \sim y$, 于是 $[x] = [y]$, 这说明 \leq 为反对称的。

对任意的 $x \in X, y \in X, z \in X$, 如果 $[x] \leq [y]$ 并且 $[y] \leq [z]$, 则 xRy 并且 yRz , 于是 xRz , 即 $[x] \leq [z]$, 这说明 \leq 为传递的。

综上验证了 \leq 为 X/\sim 上的偏序关系。

练习4. 设有穷偏序集 (X, \leq) 中有唯一极大元素 x , 则 x 为 X 的最大元素。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 X 中元素的个数 n 。

(1) 当 $n = 1$ 时, $X = \{x\}$, 则显然 x 为 X 的最大元素。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

设 $|X| = k + 1$, x 为 X 的唯一极大元素, 以下证明 x 为 X 的最大元素。对任意的 $y \in X$, 如果 $y = x$, 则显然 $y \leq x$ 。当 $y \neq x$ 时, 由 x 为 X 的唯一极大元素知 y 不是 X 的极大元素, 从而存在 $z \in X, z > y$ 。关系 $\{(x, y) | x \in X \setminus \{y\}, y \in X \setminus \{y\}, x \leq y\}$ 构成集合 $X \setminus \{y\}$ 上的一个偏序关系。 $|X \setminus \{y\}| = k$ 。

此时, x 必为 $X \setminus \{y\}$ 的唯一极大元。否则, 如果存在元素 a 为 $X \setminus \{y\}$ 的极大元, $a \neq x$, 由 a 不是 X 的极大元知 $a \leq y$, 再由 $z > y$ 知 $z > a$, 矛盾。由归纳假设, x 为 $X \setminus \{y\}$ 的最大元。由 $z \leq x$ 及 $z > y$ 知, $y \leq x$ 。□

练习5. 设 R, S 为集合 X 上的等价关系。如果 $R \circ S$ 为等价关系, 则 $R \circ S = (R \cup S)^+$ 。

证法一. 首先证明 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

设 T 为任意一个包含 $R \cup S$ 的传递关系。对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in R \circ S$, 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$ 。从而 $(a, b) \in R \cup S \subseteq T, (b, c) \in R \cup S \subseteq T$, 再由 T 为传递关系知 $(a, c) \in T$ 。因此, $R \circ S \subseteq T$ 。这证明了 $R \circ S \subseteq \bigcap_{R \cup S \subseteq T' \text{ 且 } T' \text{ 是传递的}} T' = (R \cup S)^+$ 。

其次证明 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

只需证明 $R \circ S$ 为包含 $R \cup S$ 的传递关系。对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in R \cup S$, 则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$, 此时由 S 为等价关系知 $(c, c) \in S$, 从而 $(a, c) \in R \circ S$; 如果 $(a, c) \in S$, 此时由 R 为等价关系知 $(a, a) \in R$, 从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。这证明了 $R \cup S \subseteq R \circ S$ 。由 $R \circ S$ 为等价关系知 $R \circ S$ 为传递的。□

证法二. 先证 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in R \circ S$, 则存在 $b \in X, (a, b) \in R$ 并且 $(b, c) \in S$, 从而 $(a, b) \in R \cup S$ 并且 $(b, c) \in R \cup S$, 于是 $(a, c) \in (R \cup S)^2 \subseteq (R \cup S)^+$ 。

再证 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$, 由 $(a, c) \in (R \cup S)^+$, 往证 $(a, c) \in R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in (R \cup S)^+$, 则存在自然数 $n, n \geq 1$, $(a, c) \in (R \cup S)^n$ 。

以下用数学归纳法证明, 对任意的自然数 $n, n \geq 1, (R \cup S)^n \subseteq R \circ S$ 。

(1) 当 $n = 1$ 时, 对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in R \cup S$, 则 $(a, c) \in R$ 或者 $(a, c) \in S$ 。如果 $(a, c) \in R$, 此时由 S 为等价关系知 $(c, c) \in S$, 从而 $(a, c) \in R \circ S$; 如果 $(a, c) \in S$, 此时由 R 为等价关系知 $(a, a) \in R$, 从而 $(a, c) \in R \circ S$ 。

(2) 假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。

由 $R, S, R \circ S$ 都为 X 上的等价关系知, $S \circ R = S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R \circ S$ 。

对任意的 $a \in X, c \in X$, 如果 $(a, c) \in (R \cup S)^{k+1} = (R \cup S)^k \circ (R \cup S)$, 则存在 $b \in X$, $(a, b) \in (R \cup S)^k$ 并且 $(b, c) \in (R \cup S)$ 。由归纳假设, $(a, b) \in R \circ S$ 。如果 $(b, c) \in R$, 那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ R = R \circ (S \circ R) = R \circ (R \circ S) = (R \circ R) \circ S = R^2 \circ S \subseteq R \circ S$; 如果 $(b, c) \in S$, 那么 $(a, c) \in (R \circ S) \circ S = R \circ (S \circ S) = R \circ S^2 \subseteq R \circ S$ 。

□