习题. 设X是一个无穷集合，$f: X \to X$。证明：存在X的一个非空真子集E使得$f(E) \subseteq E$。

证明. 记映射f自身n次的合成为f^n，并约定$f^1 = f, f^0 = I_X$。取集合X中的一个元素x，记集合$F = \{f^n(x) | n = 0, 1, 2, \cdots\}$。如果存在$n$使得$f^n(x) = x$，则$F$为$X$的真子集（这是因为$F$为有穷集合，而X为无穷集合），并且$f(F) \subseteq F$。如果对任意的$n$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，$f^n(x) \neq x$，令$E = F \setminus \{x\}$，则$E$为$X$的真子集（这是因为$E$中不包含$x$），并且$f(E) \subseteq E$。 $\square$