习题 1. 设G为一个有p个顶点的图，$\delta(G) \geq (p+k-2)/2$，$p \geq 2$，试证：G为k-连通的，其中$k < p$。

证明. 设G'为G去掉任意的$k-1$个顶点所得到的一个图，以下证明G'为连通的。用反证法，假设G'不连通，则至少有一个支G_1,其顶点数小于等于$\frac{p-(k-1)}{2}$。设v为G_1中的任意一个顶点，则v在G中的度

$$\deg v \leq \frac{p-(k-1)}{2} - 1 + (k-1) = \frac{p+k-3}{2}$$

矛盾。 □

习题 2. 设G为一个三次正则图，试证：$\kappa(G) = \lambda(G)$

证明. （1）如果$\kappa(G) = 0$，则G不连通，此时$\lambda(G) = 0$，故$\kappa(G) = \lambda(G)$。

（2）如果$\kappa(G) = 1$，则G中存在顶点u，$G-u$不连通。由$\deg u = 3$知，$G-u$至少存在一个分支只有一条边与u相连，显然去掉这条边之后，G不连通，所以$\lambda(G) = 1$，故$\kappa(G) = \lambda(G)$。

（3）如果$\kappa(G) = 2$，则存在两个顶点v_1和v_2，$G - \{v_1, v_2\}$不连通。$G - v_1$是连通的，且$G - v_1 - v_2$不连通，类似于（2）中的讨论知$G - v_1$中存在一条边e_2，$G - v_1 - e_2$不连通。另一方面由$\lambda(G) \geq \kappa(G) = 2$知$G - e_2$是连通的，由于$G - e_2 - v_1 = G - v_1 - e_2$不连通，由与（2）类似的讨论知$G - e_2$中存在一条边$e_1$，$G - e_2 - e_1$不连通，所以$\lambda(G) = 2$，故$\kappa(G) = \lambda(G)$。

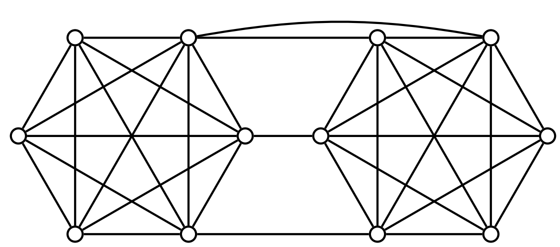
（4）如果$\kappa(G) \geq 3$，由$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$知，$\kappa(G) = \lambda(G) = 3$。 □

习题 3. 设$r \geq 2$，G是r正则图且$\kappa(G) = 1$。证明：$\lambda(G) \leq [\frac{r}{2}]$。

证明. 因为$\kappa(G) = 1$，所以G有一个割点v。由$\deg v = r$，且$G - v$有至少两个分支知，存在一个分支，v与该分支的顶点联结的边数小于等于$[\frac{r}{2}]$，去掉这些边，G不连通，从而$\lambda(G) \leq [\frac{r}{2}]$。 □

习题 4. 构造一个图G，使得$\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$。

解.

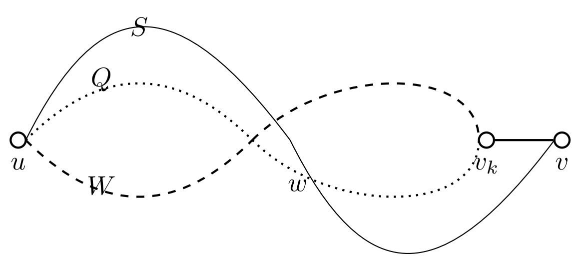


□

习题 5. 证明：图G为2-边连通的当且仅当G的任意两个不同的顶点间有两条边不相交路。

证明. 设x为G的任意一条边，其两个端点为u和v，由已知条件，u和v之间有两条边不相交路，去掉边x，u和v之间至少还有一条路，从而$G-x$连通，即图G为 2 -边连通的。

设G为2-边连通的，u和v为G的两个不同的顶点，以下施归纳于u与v之间的距离$d(u,v)$来证明u与v之间有两条边不相交路。当$d(u,v)=1$时，由于$\lambda(G)\geq 2$，所以$G-uv$连通，在$G-uv$中u与v之间还有一条路，所以u与v在G中有两条边不相交路。设对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k$时，u与v之间有两条边不相交路。以下证明对于G中的任意两个顶点u和v，当$d(u,v)=k+1$时，u与v之间有两条边不相交路。由$d(u,v)=k+1$知u与v之间有一条长为$k+1$的路$P: uv_1v_2\cdots v_kv$。显然$d(u,v_k)=k$。由归纳假设，u与v_k之间有两条边不相交路Q和W。由于$\lambda(G)\geq 2$，所以$G-v_kv$为连通图。于是，$G-v_kv$中存在从u到v的路S。u为Q,W,S的公共顶点。设w为S上从u到v且在Q或W上的最后一个顶点。不妨设w在Q上，则在G中u和v之间存在两条边不相交路：Q上的u与w间一段后接S上w与v间的那一段所构成的一条路，W后接v_kv所构成的另一条路。



□