离散数学讲义

陈建文

March 31, 2022

第 四 章　无穷集合

定义4.1. 如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义4.2. 如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X为可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理4.1. 集合A为可数集的充分必要条件为A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

定理4.2. 可数集的任一无限子集也是可数集。

定理4.3. 设A为可数集合，B为有穷集合，则$A \cup B$为可数集。

定理4.4. 设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

定理4.5. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$为可数集。即可数多个可数集之并为可数集。

定理4.6. 设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

定理4.7. 全体有理数之集$\mathbb{Q}$为可数集。

定理4.8. 区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合为不可数集。

定义4.3. 凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

定理4.9. 无穷集合必包含有可数子集。

定理4.10. 设M为一个无穷集合，A为至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

证明. 先考虑$A \cap M = \phi$的情况。因为M为一个无穷集合，所以M中必有一个可数子集D。令$P = M \setminus D$，则

$$M = P \cup D, M \cup A = P \cup (D \cup A)$$

由$P \sim P$，$D \sim D \cup A$，得到$M \sim M \cup A$。

再考虑$A \cap M \neq \phi$的情况，此时$A \setminus M$为至多可数集合，从而$M \sim M \cup (A \setminus M) = M \cup A$。 □

定理4.11. 设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

定理4.12. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$为连续统。

定理4.13. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论4.1. 全体实数之集是一个连续统。

推论4.2. 全体无理数之集是一个连续统。

定义4.4. 集合A的基数为一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义4.5. 所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义4.6. 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

定义4.7. 设α，β为任意两个基数，A,B为分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

显然，$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。
$\alpha < \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

定理4.14 (康托)**.** 对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

证明. 令$i : M \to 2^M$，其定义为对任意的$m \in M$，$i(m) = \{m\}$。于是，i为从M到2^M的单射，故$|M| \leq |2^M|$。为了完成定理的证明，我们还需要证明：如果$f : M \to 2^M$为单射，则f一定不为满射。为此，令

$$X = \{m \in M | m \notin f(m)\}$$

显然，$X \in 2^M$。现在证明对任意的$x \in M$，$f(x) \neq X$。实际上，如果存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = X$，则如果$x_0 \in X$，那么由X的的定义知$x_0 \notin f(x_0)$，即$x_0 \notin X$；如果$x_0 \notin X$，即$x_0 \notin f(x_0)$，由X的定义可得$x_0 \in X$。总之，$x_0 \in X$与$x_0 \notin X$都引出矛盾，从而不存在$x_0 \in M$使得$f(x_0) = X$。因此，f不为满射，从而

$$|M| < |2^M|$$

□

定理4.15 (康托-伯恩斯坦)**.** 设A，B为两个集合。如果存在单射$f : A \to B$与单射$g : B \to A$，则A与B的基数相等。

证法一. 设$f : A \to B$和$g : B \to A$都为单射。令$\psi : 2^A \to 2^A$,对任意的$E \in 2^A$,

$$\psi(E) = A \setminus g(B \setminus f(E))$$

易见，如果$E \subseteq F \subseteq A$，则$\psi(E) \subseteq \psi(F)$。令

$$\mathbb{D} = \{E \subseteq A | E \subseteq \psi(E)\}$$

，则$\phi \in \mathbb{D}$。又令

$$D = \bigcup_{E \in \mathbb{D}} E,$$

则对任意的$E \in \mathbb{D}$,由$E \subseteq D$知$E \subseteq \psi(E) \subseteq \psi(D)$，从而$D \subseteq \psi(D)$。于是$\psi(D) \subseteq \psi(\psi(D))$,故$\psi(D) \in \mathbb{D}$，因此，$\psi(D) \subseteq D$，所以

$$D = \psi(D) = A \setminus g(B \setminus f(D))$$

令$h : A \to B$，对任意的$x \in A$，定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果} x \in D \\ g^{-1}(x), & \text{如果} x \in A \setminus D \end{cases}$$

其中g^{-1}为视g为B到$g(B)$的一一对应时g的逆，易见h为一一对应。所以A与B的基数相等。 □

证法二. We separate A into two disjoint sets A_1 and A_2. We let A_1 consist of all $x \in A$ such that, when we lift back x by a succession of inverse maps,

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))) \cdots$$

then x can be lifted indefinitely, or at some stage we get stopped in A (i.e. reach an element of A which has no inverse image in B by g). We let A_2 be the complement of A_1, in other words, the set of $x \in A$ from which we get stopped in B by following the succession of inverse maps. We shall define a bijection h of A onto B.

If $x \in A_1$, we define $h(x) = f(x)$.

If $x \in A_2$, we define $h(x) = g^{-1}(x)$.

Then trivially, h is injective. We must prove that h is surjective. Let $y \in B$. If, when we try to lift back y by a succession of maps

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), f^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(y))) \cdots$$

we can lift back indefinitely, or if we get stopped in A, then $f^{-1}(y)$ is defined, and $f^{-1}(y)$ lies in A_1. Consequently, $y = h(f^{-1}(y))$ is in the image of h. On the other hand, if we cannot lift back y indefinitely, and get stopped in B, then $g(y)$ belongs to A_2. In this case, $y = h(g(y))$ is also in the image of h, as was to be shown.

□

刻画集合的ZFC公理系统（Zermelo-Fraenkel-Choice axioms of set theory）：

公理4.1 (外延公理)**.**

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理4.2 (空集公理)**.**

$$\exists \phi \forall x(x \notin \phi)$$

公理4.3 (对公理)**.**

$$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理4.4 (并集公理)**.**

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b)$$

公理4.5 (幂集公理)**.**

$$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理4.6 (子集公理)**.**

$$\forall c \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理4.7 (无穷公理)**.**

$$\exists A(\phi \in A \wedge (\forall a \in A)a^+ \in A)$$
$$\text{其中}a^+ = a \cup \{a\}$$

公理4.8 (代换公理)**.**

$$\begin{aligned}\forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \to y_1 = y_2)\\ \to \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))\end{aligned}$$

公理4.9 (正则公理)**.**

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理4.10 (选择公理)**.**

$$(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \wedge dom F = dom R)$$

刻画实数的公理系统:
设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$

4. $(-x) + x = x + (-x) = 0$

5. $x * y = y * x$

6. $(x * y) * z = x * (y * z)$

7. $1 * x = x * 1 = x$

8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1(x \neq 0)$

9. $x * (y + z) = x * y + x * z$

10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

11. 对任意的$x \in R$，$x \leq x$。

12. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq x$，则$x = y$。

13. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x \leq y$并且$y \leq z$，则$x \leq z$。

14. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$x \leq y$和$y \leq x$两者中必有其一成立。我们用$x < y$表示$x \leq y$并且$x \neq y$，$x \geq y$表示$y \leq x$，$x > y$表示$x \geq y$并且$x \neq y$。

15. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，$z \in R$，如果$x < y$，则$x + z < y + z$。

16. 对任意的$x \in R$，$y \in R$，如果$x > 0$，$y > 0$，则$xy > 0$。

17. 设A_1，A_2，$\cdots$，A_i，$\cdots$为实数集R上的闭区间，$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$非空。

第 五 章