TD 1

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Tout nombre réel est rationnel.
2. Tout nombre rationnel est réel.
3. Une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet toujours un plus grand élément.
4. Une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet toujours une borne supérieure.
5. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. La seule fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle (c'est-à-dire telle que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

2 Mélanges d'intersections et d'unions

Montrer que si A, B, C sont des ensembles, alors :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

et

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

3 Max, min, sup, inf

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, donner le plus grand élément, le plus petit élément, la borne sup, la borne inf des parties suivantes.

1. $A = [1;3[$
2. $B =]-4;+\infty[$
3. $C = \left\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$

4 Domaine de définition

Quel est le domaine de définition D_f des fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
2. $f(x) = 4 + \dfrac{7}{x-2}$
3. $f(x) = 2 + \dfrac{8}{x^2+2}$
4. $f(x) = 17 + 3x + \dfrac{9}{x^2-16}$
5. $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x^2-5x+6}$

5 Fonctions paires, fonctions impaires

Dites si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni l'un ni l'autre :

1. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 7$
2. $g(x) = x^3 - 7x$
3. $h(x) = x^5 + 2x^2 + 1$
4. $F(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+7}$

6 Une récurrence

Montrer par récurrence que :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7 Coût quadratique et fonction de profit

Une entreprise fabrique des objets qu'elle vend au prix unitaire de 100 euros. Les coûts de fabrication d'une quantité q d'objets sont donnés par :

$$C(q) = 0{,}1q^2 + 50q + 4\,000$$

1. Calculer le profit $\Pi(q)$ de l'entreprise si elle fabrique q objets et qu'elle réussit à les vendre tous au prix unitaire de 100 euros.
2. Pour quelles valeurs de q le profit est-il nul ?
3. Pour quelles valeurs de q le profit est-il positif ?

8 Factoriser pour résoudre

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

1. Calculer $f(1)$. En déduire une factorisation de f.
2. Résoudre $f(x) = 0$.

9 Binôme de Newton

Calculer $(x+2)^5$ de deux façons différentes :

1. Par calcul direct.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton.

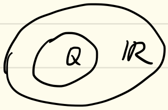
10 Fonction rationnelle et coût moyen

Une imprimerie produit des ouvrages au coût unitaire de 5 euros pour les 2 000 premiers exemplaires, et de 8 euros pour les exemplaires au-delà de 2 000 (car elle doit alors utiliser une machine plus coûteuse).

Quelle est la fonction de coût total ?

Quelle est la fonction de coût moyen ?

Ex1 : 1. Faux. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



2. Vrai $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

3. Faux.

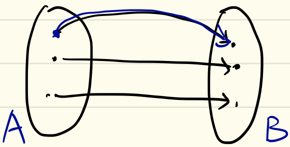
On dit que A admet un plus ~~grand~~ petit élément s'il existe un élément M de A qui ~~majore~~ minore tous les autres. $M = \max(A)$

par exemple. $A = [0, 2[$ pas de plus grand élément car $2 \notin A$

4. Vrai.

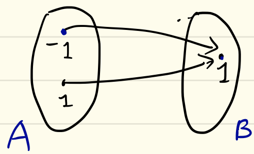
5. Faux. $f(-1) = f(1) = 1$

1 a deux antécédents



bijection

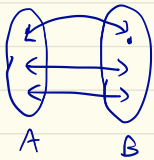
$f(x) = x^2$



par exemple

$g(x) = x$

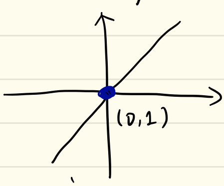
bijection



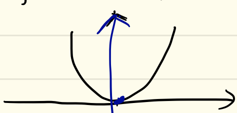
6. Vrai

la fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la fonction paire : $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$



impaire



paire

impaire et paire

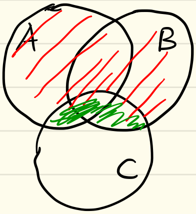
De plus. si $f(x)$ est impaire. on a $f(-x) = -f(x)$

si $f(x)$ est paire. on a $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow -f(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 0$

Ex2. ① $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



$A \cup B$:  ou

$A \cap B$  et

"$\Rightarrow$" $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Soit $x \in (A \cup B) \cap C$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in C$

$\Rightarrow$ $x \in A$ ou $x \in B$ et $x \in C$

c'est-à-dire, $x \in C$ et $x \in A$ ou $x \in C$ et $x \in B$

Ce qui donne $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$

Donc $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

"$\Leftarrow$" $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Soit $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, alors $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$

Ceci peut s'écrire $(x \in A$ et $x \in C)$ ou $(x \in B$ et $x \in C)$

c'est-à-dire : $x \in A$ ou $x \in B$ et $x \in C$

ce qui donne $x \in A \cup B$ et $x \in C$

Donc $x \in (A \cup B) \cap C$

$\boxed{}$

② $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

"$\Rightarrow$" $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Soit $x \in (A \cap B) \cup C$, alors $x \in A \cap B$ ou $x \in C$

c'est-à-dire. $x \in A$ et $x \in B$ ou $x \in C$

Ce qui revient à $(x \in A$ ou $x \in C)$ et $(x \in B$ ou $x \in C)$

Donc $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

"$\Leftarrow$" Soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$

c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$ et $x \in B$ ou $x \in C$

Donc $(x \in A$ et $x \in B)$ ou $x \in C$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup C$

$\boxed{}$

Ex3 :

On dit que A admet un plus grand (petit) élément s'il existe un élément M de A qui majore (minore) tous les autres. $M = \max(A)$

la borne supérieur (inf) de A : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble de ces majorants (minorants) admet toujour un plus petit (grand) élément. On le note $\sup(A)$ ($\inf(A)$)

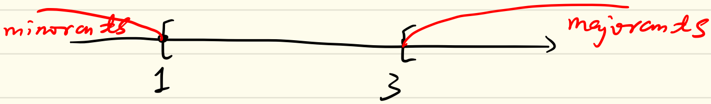
On dit que A est majorée (minorée) s'il existe $K \in \mathbb{R}$ (k) t.q $K \geq x$ ($k \leq x$) pour tout $x \in A$. K (k) est un majorant (minorant) de A

---

① $A = [1, 3[$

A est majorée et minorée. $\min(A) = 1$. $\inf(A) = 1$.

A n'a pas de plus grand élément car $3 \notin A$ $\sup(A) = 3$

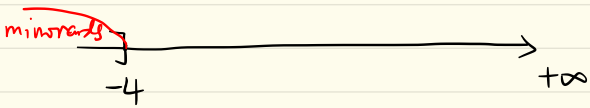


② $B =]-4, +\infty[$

B n'a pas de plus grand élément. mais $\sup B = +\infty$.

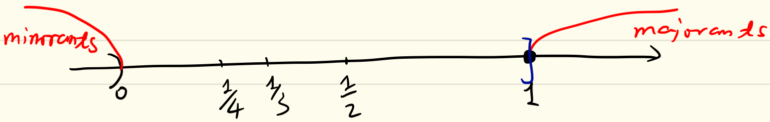
B n'a pas de plus petit élément. car $-4 \notin B$.

$\inf(B) = -4$



③ $C = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, 3 \dots \right\}$.

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



C est majorée et minorée. donc $\sup(C) = 1$ $\inf(C) = 0$

$\max(C) = 1$

C n'a pas de plus petit élément, car $0 \notin C$.

Ex4 : dénominateur n'est pas nul !

On ne peut pas diviser par 0 !

① $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^*$ $\quad x \neq 0$

② $f(x) = 4 + \frac{7}{x-2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

③ $f(x) = 2 + \frac{8}{x^2+2}$.

puisque $x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. donc $D_f = \mathbb{R}$

④ $f(x) = 17 + 3x + \frac{9}{x^2-16}$.

f est définie pour $x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \quad x \neq 4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

⑤ $f(x) = 5 - \frac{2}{x^2-5x+6}$. $f(x)$ est définie pour $x^2 - 5x + 6 \neq 0$

Trouver les racines de $x^2 - 5x + 6$

Méthode 1 : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$$

Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$. $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad ax^2 + bx + c = 0$

Deux racines $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode 2 :

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 \underbrace{-(x_1 + x_2)}_{b} x + \underbrace{x_1 x_2}_{c}$$

$$x^2 \underbrace{-5}_{\Downarrow \atop -2-3} x + \underbrace{6}_{\Downarrow \atop {(-2)\times(-3) \atop {\Downarrow \atop 2\times3}}} = x^2 - (2+3)x + 2\times 3$$

$$= (x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -2 \\ 1 & & -3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(x-2)(x-3)} \end{array}$$

Donc les racines sont 2 et 3

le Domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

---

① Trouver les racines de $ax^2 + bx + c$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

② Trouver les racines de $x^2 + bx + c$.

Chercher x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2 = -b$, $\quad x_1 x_2 = c$

exemple 1 : $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -3 \\ 1 & & -4 \\ \hline \end{array} \qquad 3+4 = -7 = -b \qquad 3\times 4 = 12$$

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$$

exemple 2 : $x^2 - x - 12 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & +3 \\ 1 & & -4 \\ \hline \end{array} \qquad -3+4 = 1 = -(-1) = -b \qquad (-3)\times 4 = -12 = c$$

$$(x+3)(x-4) = x^2 - x - 12$$

pour tout

EX5 : fonction impaire : si $\forall x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = -f(x)$
paire : si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$ ou autre ?

1. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 7$

$$f(-x) = 2 \times (-x)^4 - (-x)^2 + 7 \qquad (-1)^2 = 1$$
$$= 2x^4 - x^2 + 7 = f(x)$$

paire.

2. $g(x) = x^3 - 7x$

$$g(-x) = (-x)^3 - 7 \times (-x) \qquad (-1)^3 = -1$$
$$= -x^3 + 7x$$
$$= -(x^3 - 7x) = -g(x)$$

impaire

Remarque :

x^2 est paire, car $(-x)^2 = x^2$

x^4 x^6 ... paire

x^n est paire, si n est paire.

$x^2 + x^4 + \cdots x^n$ est paire, si n est paire

x^3 est impaire, car $(-x)^3 = -x^3$

$x + x^3 + x^5 + \cdots x^m$ est impaire. si m est impaire

3. $h(x) = x^5 + 2x^2 + 1$

$$h(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^2 + 1$$
$$= -x^5 + 2x^2 + 1 \neq h(x)$$
$$\neq -h(x)$$

ni impaire . ni paire

4. $F(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 7}$

$$F(-x) = \frac{(-x)^3 + 8}{(-x)^2 + 7} = \frac{-x^3 + 8}{x^2 + 7} \neq F(-x)$$

Aussi. $F(-x) \neq -F(x)$, ni impaire, ni paire

Ex6:

- pour $n=1$, on a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1 = 1^2$, donc la proriété est vrai pour $n=1$.

- Supposons maintenant que la propriété est vrai au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'elle est vrai pour $n+1$. c-à-d, $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Selon l'hypothèse de récurrence au rang n, on a $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= \frac{1}{6}\left((n^2+n)(2n+1)\right) + n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+2n^2+n^2+n\right)+n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$$

D'autre part, $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}\left((n^2+3n+2)(2n+3)\right)$

$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+9n^2+13n+6\right)$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$$

Donc on a bien $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est la propriété au rang $n+1$.

CQFD.

Ex7 : ① $\Pi(q) = 100q - C(q)$

$$= 100q - (0.1q^2 + 50q + 4000) = -0.1q^2 + \underline{100q - 50q} - 4000$$

$$= -0.1q^2 + 50q - 4000$$

② $\Pi(q)$ est un polynôme de degré 2. on trouve les racines de $\Pi(q)$

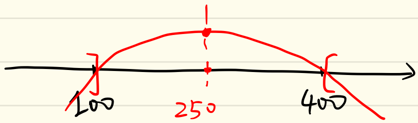
$$\Pi(q) = -0.1q^2 + 50q - 4000 = 0$$

$$\Delta = 50^2 - 4\times(-0.1)\times(-4000) = 2500 - 1600 = 900 > 0$$

Donc. $x_1 = \dfrac{-50 + \sqrt{900}}{2\times(-0.1)} = 100$, $x_2 = \dfrac{-50 - \sqrt{900}}{2\times(-0.1)} = 400$

③ On a $\Pi(q) = -0.1q^2 + 50q - 4000$

$$= -0.1(q - 100)(q - 400)$$



Donc si $q \in]100, 400[$, $\Pi(q)$ est positif.

Remarque : la dérivée de $\Pi(q)$: $\Pi'(q) = -0.2q + 50 = 0$

$\Rightarrow \quad q = 250.$

variation

x	100	250	400
$\Pi'(q)$	+	$\boxed{}$	−
$\Pi(q)$	$\boxed{}$ ↗		↘ $\boxed{}$

Ex8 : $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$f(1) = 1^3 - 7\times 1^2 + 14\times 1 - 8 = 0$

Alors 1 est une racine de $f(x)$. Donc on peut factoriser $f(x)$ par $(x-1)$. c-à-d. $f(x)$ s'écrit sous la forme du produit de $(x-1)$ et un poly de 2, i.e.

$$f(x) = \underline{(x-1)(\underset{\downarrow \, 1}{a}x^2 + bx + c)}$$

Comme le terme de plus haut degré de $f(x)$ est x^3.

on a $a = 1$

pour trouver b et c, on développe.

$$(x-1)(x^2 + bx + c) = x^3 + bx^2 - x^2 + cx - bx - c$$
$$= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$$
$$= x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

Donc
$$b - 1 = -7$$
$$c - b = 14$$
$$c = 8$$

$\Rightarrow$ $c = 8$, $b = -6$

Donc. $f(x) = (x-1)(x^2 - 6x + 8)$

② $f(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x^2 \underbrace{- 6}_{-2-4}x + \underbrace{8}_{(-2)(-4)} = 0$

méthode 1 :

$\Delta = 36 - 4\times 8 = 4$

$x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4$

$x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2$

méthode 2 :

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 1 & & -4 \\ \hline \end{array}$$

$(x-2)(x-4)$

Les trois racines de $f(x)$ sont 1, 2, 4.

Ex9 : ① $(x+2)^5 = (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$

② La formule du binôme de Newton.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_5^0 = C_5^5 = 1$$

$$C_5^1 = C_5^4 = 5$$

$$C_5^3 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$(x+2)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^{5-k} 2^k$$

$$= C_5^0 x^5 2^0 + C_5^1 x^4 2^1 + C_5^2 x^3 2^2 + C_5^3 x^2 2^3 + C_5^4 x\, 2^4 + C_5^5 x^0 2^5$$

$$= x^5 + 5x^4 \times 2 + 10x^3 \times 4 + 10x^2 \times 8 + 5x \times 2^4 + 2^5$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Ex10 : ① pour un nombre x d'exemplaires.

la fonction de coût total est

$$C(x) = \begin{cases} 5x & x \leq 2000 \\ 2000 \times 5 + 8(x - 2000) & x > 2000 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x & x \leq 2000 \\ 8x - 6000 & x > 2000 \end{cases}$$

② la fonction de coût moyen.

$$\mu(x) = \frac{C(x)}{x} = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2000 \\ 8 - \dfrac{6000}{x} & \text{si } x > 2000 \end{cases}$$

TD2 : 2020-09-30.

EX1 : ① ✓ si f est affine, alors il existe a, b t.q
$f(x) = ax + b$. pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - ax_0 - b}{x_1 - x_0} = a = \text{cste}.$$

② ✓
f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se rapproch d'une limite quand $h \to 0$

la tangente à la Courbe en x_0 est la droite
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

③ X $g \circ f(x)$, une fonction composée : $\sqrt{1+x^2}$, $g = \sqrt{x}$, $f(x) = 1 + x^2$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \neq g'(x)\, f'(x)$$

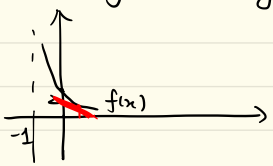
④ ✓

⑤ ✓

Remarque : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

EX3 :
① $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{\cancel{1+h-1}\ h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2+h} - \frac{2}{1+1}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{2+h} - 1\right)$$
$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

la tangente : $y = f(1) + f'(1)(x-1)$
$$= \frac{2}{1+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Ex4 : ① $f(x) = x^2 - 3x + 7$

on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 1^2 - 3 \times 1 + 7 = 5$

Remarque : Si f est dérivable en x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

② $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \longrightarrow 0 \quad , \text{ si } x \to 1, \\ x^2-1 \longrightarrow 0 \quad , \text{ si } x \to 1 \end{array}\right\} \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$

Donc $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2$