TD 2

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ a un taux d'accroissement constant si et seulement si elle est affine.
2. Si une fonction f est dérivable en x_0, alors son graphe admet une tangente en x_0.
3. La dérivée d'une fonction composée est la composée des dérivées.
4. Toute fonction polynôme est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.
5. Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

2 Dérivée du coût de production

On note $C(Q)$ le coût total de production de Q unités d'un bien. On suppose que C est dérivable.

1. Supposons que $C'(500) = 20$. Qu'est-ce que cela signifie concrètement ?
2. Supposons que l'on vende ce bien au prix unitaire $P = 25$, et que la production actuelle est de 500. Est-il intéressant d'augmenter un peu la production ?
3. Même question pour un prix $P = 15$.

3 Dérivée limite du taux d'accroissement

En utilisant la définition de la dérivée en un point, déterminer la dérivée de f en $x_0 = 1$, si $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ pour tout $x \geq 0$. Tracer sur un même graphique le graphe de f et sa tangente en x_0.

4 Limite en un point

Calculer la limite en $x_0 = 1$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{x^2 - 3x + 2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

5 Dérivée et tangente

1. Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$.
   Calculer la dérivée de f en $x_0 = 2$. Tracer sur un même graphique la courbe représentant f et sa tangente en $x_0 = 2$.
2. Mêmes questions pour $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ avec $x_0 = 4$.

6 Calculs de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$
2. $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{8}{x} - \dfrac{7}{x^3}$
5. $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x - 3}$
7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x^2 + 2}}$

7 Profit sur un marché concurrentiel

1. Une firme est dans un marché concurrentiel pour la production d'un bien donné. Le prix du marché est $P = 100$. Le coût de production pour cette firme d'une quantité Q de bien est $C(Q) = 60Q + 2Q^2$.

   Calculer la fonction de profit puis sa dérivée. Quelle est la quantité Q^* qui maximise le profit de la firme ?
2. Mêmes questions avec $P = 50$.

8 Profit d'un monopole

Une entreprise est en situation de monopole pour la production d'un bien. On suppose que la demande Q dépend du prix P de la façon suivante :

$$Q = 100 - \frac{1}{2}P$$

Supposons de plus que le coût de production d'une quantité Q est :

$$C(Q) = 60Q + 2Q^2$$

Calculer la fonction de profit en fonction uniquement de la quantité Q, puis sa dérivée. Quelle est la quantité Q^* qui maximise le profit de la firme ?

9 Variations d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout x par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$$

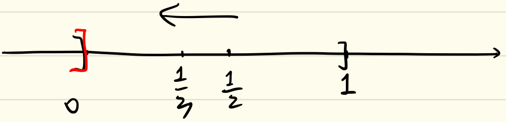
Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 10]$.

Calculer sa dérivée et faire son tableau de variations sur cet intervalle.

TD1 :

EX3 : $C = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\qquad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 \dots\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\}$



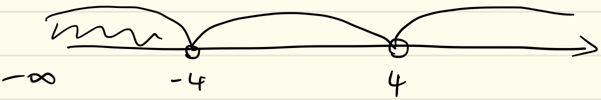
$\sup(C) = 1 \in C$. $\max(c) = 1$

$\inf(c) = 0 \notin C$.

C n'admet pas de plus petit élément.

EX4 : $\frac{1}{x^2-16}$ est définie t.q $x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4, 4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} =]-\infty, -4] \cup]-4, 4[\cup]4, +\infty[$



TD2 :

EX1 : ① V Si f est affine alors il existe a et b, t-q

$f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

par la def du taux d'accroissement,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = a = \text{Constante}$$

Réciproquement, si le taux d'accroissement est une constante C.

Alors. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = C$. pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc. $f(x) = C(x - x_0) + f(x_0) = \underbrace{cx}_{ax} \underbrace{- cx_0 + f(x_0)}_{+b} \Rightarrow$ affine

$\square$.

TD2

Ex1 : 2. Révision : dérivée en un point.

On dit f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite quand $h \to 0$.

Équation de la tangente : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

vrai.

3 Faux. une fonction composée $H = f \circ g$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x) \Rightarrow \text{définition}$$

exemple1 :

$H = \sqrt{x^2+1}$ $\quad f = \sqrt{y}$, $g = x^2 + 1$

$f \circ g = \sqrt{x^2+1}$

Calculer la dérivée de $H = f \circ g$

$H'(x) = (f \circ g)'(x)$

$f = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^{1/2}}$

$g = x^2 + 1. \Rightarrow g' = 2x$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

exemple 2 $\quad H = e^{x^2} = f \circ g.$ $\quad f = e^y$, $g = x^2 \Rightarrow f'(y) = e^y$

$g'(x) = 2x$

$$H'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= e^{x^2} \times 2x = 2x\, e^{x^2}$$

---

4 vrai

5 vrai

EX3 :.. Révision : dérivée en un point.

On dit f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite. quand $h \to 0$.

Équation de la tangente : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h+1+1} - \frac{2}{1+1}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h+2}$$

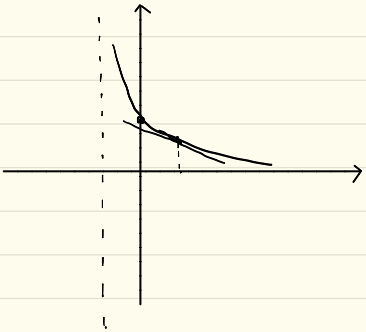
$$= -\frac{1}{2}$$

✓

Équation de la tangente : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$= f(1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



TD2 :

EX1 : ① vrai. si f est affine. alors il existe a et b tel que

$$f(x) = ax + b \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

par la définition du taux d'accroissement.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0}$$

$$= a = \text{constante}.$$

Réciproquement. si le taux d'accroissement est C.

Alors $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = C(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= \underbrace{Cx}_{ax} \underbrace{- Cx_0 + f(x_0)}_{+b}$$

② vrai.

On dit que f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite. quand $h \to 0$.

la tangente à la courbe C_f en x_0 est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

③ Faux.

Une fonction composée : $H = f \circ g$

$$H'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x)$$

exemple : $H = \sqrt{x^2 + 1}$.

H est une fonction composée $f \circ g$ avec $f = \sqrt{x}$, $g = x^2 + 1$

on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad g'(x) = 2x$

Donc. $(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = H'(x)$

EX3 :

On dit que f est dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se rapproche d'une valeur limite quand $h \to 0$.

la tangente à la courbe C_f en x_0 est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}.$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h+1} - \underbrace{\frac{2}{1+1}}_{=1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h+2} - 1\right)$$

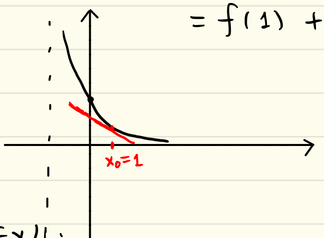
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2-(h+2)}{h+2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{-\cancel{h}}{h+2} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

La tangente en $x_0 = 1$ est la droite d'éq :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{2}{1+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



EX4 :

Remarque : si f est dérivable en x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

① $f(x) = x^2 - 3x + 7$. elle est définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x)$ est dérivable en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 7 = 5.$$

Ex4:

② $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad (x-1) = (x-1)\times 1$

On voit que le numérateur $x^2-1 \to 0$ quand $x \to 1$

$x-1 \to 0$ quand $x \to 1$

C'est une forme indéterminée. $\frac{0}{0}$

Donc on factorise en haut et en bas par $(x-1)$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1+1 = 2$

③ $f(x) = \dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{x^2-3x+2}$

On remarque que 1 est une racine de x^2-3x+2, car $1^2-3\times 1+2=0$

1 est - - - - - - $x^3-8x^2+19x-12$, car $1^3-8\times 1^2+19-12=0$

Donc x^2-3x+2 et $x^3-8x^2+19x-12$ peuvent factoriser par $(x-1)$.

c-à-d, $x^2-3x+2 = (x-1)(x+b) = (x-1)(x-2)$

$\underline{x^3-8x^2+19x-12} = (x-1)(x^2+cx+d)$

pour trouver b, c, d on développe.

$x^2-3x+2 = x^2\underbrace{-x+bx}_{(b-1)x} - b$. on trouve $b=-2$

$b-1=-3$

$-b=2$

$$x^3-8x^2+19x-12 = x^3+cx^2+dx-x^2-cx-d$$
$$= x^3+(c-1)x^2+(d-c)x-d$$

on trouve $\begin{cases} -8 = c-1 \\ 19 = d-c \\ -12 = -d \end{cases} \Rightarrow d=12,\quad c=-7$

Donc. $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2-7x+12)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \dfrac{x^2-7x+12}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Alors. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1^2-7\times 1+12}{1-2} = \dfrac{6}{-1} = -6$

④ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

le numérateur $x^2 - 3x + 2 \longrightarrow 0$, quand $x \to 1$

le dénominateur $x^3 - 1 \longrightarrow 0$ quand $x \to 1$

on factorise en haut et en bas par $(x-1)$

d'où $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1-2}{1^2+1+1} = -\dfrac{1}{3}$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+b) = x^2 - x + bx - b = x^2 + bx - x - b$

$= x^2 + (b-1)x - b \quad x^2 + (b-1)x - b$

$$\left.\begin{array}{l} b - 1 = -3 \\ -b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -2$$

EX5: ① $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

par la déf de la dérivée en $x_0 = 2$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{4}(2+h)^3 - \frac{1}{4} \cdot 2^3}{h}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(2+h)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 h + 3 \times 2 \times h^2 + h^3$

$= 8 + 12h + 6h^2 + h^3$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{4}(\cancel{8} + 12h + 6h^2 + h^3) - \cancel{\frac{1}{4} 8}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{4h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12h + 6h^2 + h^3}{4h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{4}(12 + 6h + h^2)$

$= \frac{1}{4}(12 + 6 \times 0 + 0^2)$

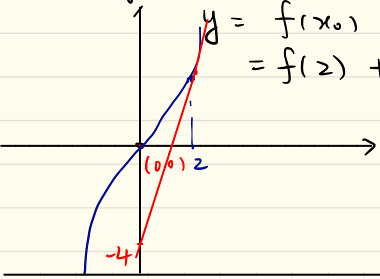
$= 3$

Donc. $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$.

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot x^2 = \frac{3}{4}x^2.$

$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 = 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}\cdot 2^2 = 3$

la tangente est :



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(2) + f'(2)(x-2) = 2 + 3(x-2) = 3x - 4$

Révision : fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$

paire : $f(-x) = f(x)$.

Donc. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ est impaire

EX5. ② $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$.

calculer la dérivée de $f(x)$ en $x_0 = 4$.

$f(x) = 1 + 2x^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$g(x) = x^n$

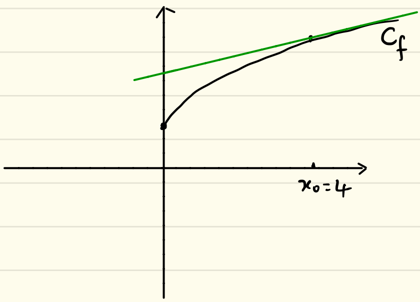
$g'(x) = n x^{n-1}$

la tangente en $x_0 = 4$. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(4) + f'(4)(x-4)$

$= 1 + 2\times\sqrt{4} + \frac{1}{2}\times(x-4)$

$= 1 + 4 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}x + 3$



$f(0) = 1$. $f(4) = 5$

Exo 6 :

① $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$. $\Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 7\times 3x^2 + 8$

$D_f = \mathbb{R}$ $= 12x^3 - 21x^2 + 8$

② $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$. $D_f = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}.\ x \geq 0\}$.

$= 17x^2 - x^{1/2}$

Donc $f'(x) = 17\times 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 34x - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

Attention : $f(x)$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$

③ $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = v \circ u$ avec $v = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $u = x^2 + 1$.

on a $v'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $u'(x) = 2x$

Donc. $f'(x) = v'(u(x))\cdot u'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

④ $f(x) = 8\cdot x^{-1} - 7x^{-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 8\times(-1)x^{-2} - 7\times(-3)x^{-4}$

$D_f = \mathbb{R}^*$ $= -8x^{-2} + 21x^{-4}$

⑤ $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$f(x)$ est un quotient. $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 2+x$, $v = 2-x$.

Donc. $u' = 1$ $v' = -1$

Donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1\times(2-x) - (2+x)\times(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}$

$= \frac{4}{(2-x)^2}$

⑥ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 7$. $v = x - 3$. donc $u' = 2x$. $v' = 1$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x\times(x-3) - (x^2-7)\times 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)2}$

⑦ $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}$. est définie pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1-x}{x^2+1} \geq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

Donc. $f(x)$ est définie pour $1-x \geq 0$, c-à-d. $x \leq 1$

$D_f =]-\infty, 1]$ f est dérivable sur $]-\infty, 1]$

$f(x)$ est une fonction composée $f = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$, et $g = \dfrac{1-x}{x^2+2}$

$g(x) = \dfrac{1-x}{x^2+1} = \dfrac{v}{u}$ avec $v = 1-x$, $u = x^2+2$

on a $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $v' = -1$, $u' = 2x$.

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{v' \times u - v \times u'}{u^2} = \frac{-1 \times (x^2+2) - (1-x) \times 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}} \times \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2} = \frac{\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^{3/2}}$$

Révision : $(u+v)' = u' + v'$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

Comment calculer la dérivée d'une fonction composée?

$(f\circ g)(x)$. $\qquad (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x)$

---

⑦ $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$. est définie pour $x \in \mathbb{R}$ t.q $\frac{1-x}{x^2+2} \geq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

mais $x^2+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x)$ est définie pour $1-x \geq 0$, c-à-d. $x \leq 1$

$\Rightarrow D_f =]-\infty, 1]$ $\qquad$ f est dérivable sur $]-\infty, 1]$

$f(x)$ est une fonction composée $f = h\circ g$ avec $h = \sqrt{x}$.

$g = \frac{1-x}{x^2+2} = \frac{u}{v}$ avec $u = 1-x$, $v = x^2+2$

Donc. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad u' = -1$, $\quad v' = 2x$

On a $\quad g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-1\times(x^2+2) - (1-x)\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{-x^2-2 - 2x + 2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

Donc. $f'(x) = h'(g(x))\, g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{1-x}} \; \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

Ex 9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ ⇒ est un poly

la dérivée. $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$

On étudie le signe du $f'(x)$. c'est un poly de degré 2.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16$

les racines de $f'(x)$ sont $x_1 = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} = 6$. $x_2 = \frac{8 - \sqrt{16}}{2} = 2$

la graphe de f'

Donc. f est croissante sur $]-\infty, 2]$, et $[6, +\infty[$

f est décroissante sur $[2, 6]$.

On calcule

$f(2) = \dots\dots = \frac{17}{3}$

$f(6) = -5$

$f(0) = -5$

$f(10) = \frac{1000}{3} - 285 \approx 48.3$

le tableau de variation :

x	0		2		6		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	−5	↗	$\frac{17}{3}$	↘	−5	↗	48.3

TD3 :

EX1 : ① ✓

② X par ex : $U_n = (-1)^n$. $U_0 = 1$

$U_1 = -1$

$U_2 = 1$

③ ✓. ↗ + majorée ⇒ conv

④ X ⇒ vrai

⇐ fausse. la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$. diver

mais son terme général → 0

EX3 :

① $U_n = n^2 + 5n$. $n \in \mathbb{N}$

minorée par 0

mais pas majorée. ↗ divergente.

③ $U_n = 1 + \frac{1}{1+2n^2}$ $n \in \mathbb{N}$ = 0. 1. 2 . . . . . . ,

$= \left\{ 2, \frac{4}{3}, 1 + \frac{1}{9} \ldots \right\}$

minoré par 1.

majorée par 2. } bornée.

$1+2n^2$ ↗ . $\frac{1}{1+2n^2}$ ↘ U_n ↘ ⇒ convergente

2020-10-14
matin

TP2.

Ex5. ① $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

par la définition de la dérivée en $x_0 = 2$

$$\lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(2+h)^3 - \frac{1}{4}\times 2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{4h}\left(h^3 + 6h^2 + 12h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{4}(h^2 + 6h + 12)$$

$$= \frac{1}{4}\times 12 = 3$$

Donc. $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$= 3$

Calculer la dérivé directement : $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}\times 3x^2 = \frac{3}{4}\cdot x^2$

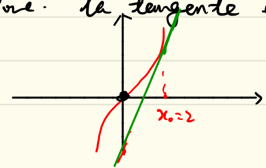
$\Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}\times 2^2 = 3$

La tangente : $y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{3}(x - x_0)$

$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}\cdot 2^3 = 2$

$f'(x_0) = f'(2) = 3$

Donc. la tangente en $x_0 = 2$ est la droite : $y = 2 + 3(x-2) = 3x - 4$



$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$$

1

$$(2+h)^3 = (2+h)^2(2+h) = (4+h^2+4h)(2+h)$$

$$= 8 + 4h + 2h^2 + h^3 + 8h + 4h^2$$

$$= h^3 + 6h^2 + 12h + 8$$

2

$$(2+h)^3 = \underbrace{C_3^0}\,\underbrace{2^0}\, h^3 + C_3^1 \, 2 \, h^2 + \underbrace{C_3^2 \, 2^2}_{3\times 4} h + C_3^3 \, 2^3 \, h^0$$

$$= h^3 + 6h^2 + 12h + 8$$

2020-10-14
après midi

TD2. Ex5.

① $f=\frac{1}{4}x^3$.

1°: par la définition. $x_0=2$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(2+h)^3-\frac{1}{4}\cdot 2^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{8}+12h+6h^2+h^3-\cancel{8}}{4h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{4}\left(\underset{\downarrow\,12}{12}+\underset{\downarrow\,0}{6h}+\underset{\downarrow\,0}{h^2}\right)=\frac{1}{4}\times 12=3$$

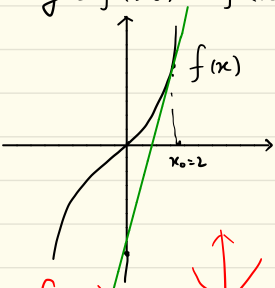
quand $h\to 0$

Donc. $f'(2)=3$

La tangente: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(2)+3(x-2)$

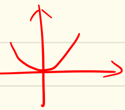
$=2+3(x-2)=3x-4$.

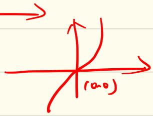
$f(x)=\frac{1}{4}x^3$



paire: $f(-x)=f(x)$

impaire: $f(-x)=-f(x)$





② $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$. en $x_0 = 4$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} . x \geq 0\}$.

$= 1 + 2x^{\frac{1}{2}}$

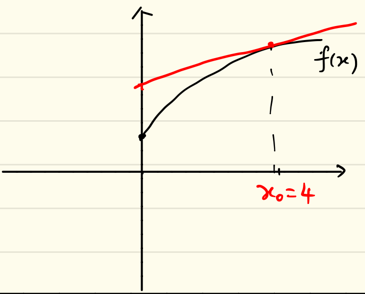
$\Rightarrow f'(x) = 2 \times \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

la tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= f(4) + \frac{1}{2}(x-4)$

$= \underbrace{1 + 2\times\sqrt{4}}_{5} + \frac{1}{2}(\underbrace{x-4}_{-2}) = \frac{1}{2}x + 3$



EX6. ① $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$. $D_f = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(x) = 3 \times 4x^3 - 7 \times 3x^2 + 8 = 12x^3 - 21x^2 + 8$

② $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} . x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow f'(x) = 17 \times 2x - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 34x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

③ $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ est une fonction composée. $f(x) = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$, $g = x^2 + 1$

on a $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

④ $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} = 8 \cdot x^{-1} - 7 \cdot x^{-3}$

$f'(x) = 8 \times (-1) x^{-2} - 7 \times (-3) x^{-4} = -8x^{-2} + 21x^{-4}$

Révision : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \neq f'(x) \circ g'(x)$

Révision : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\frac{8}{x} = \frac{u}{v}$. $u = 8$. $v = x$. on a $u' = 0$. $v' = 1$

$\left(\frac{8}{x}\right)' = \frac{0 \times x - 8 \times 1}{x^2} = -\frac{8}{x^2} = -8x^{-2}$

---

⑤ $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$f(x)$ est un quotient. $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 2+x$. $v = 2-x$

on a $u' = 1$ $v' = -1$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (2-x) - (2+x) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{4}{(2-x)^2}.$$

⑥ $f(x) = \frac{x^2-7}{x-3}$

$f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 7$, $v = x - 3$

on a $u' = 2x$ $v' = 1$

Donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x \times (x-3) - (x^2-7) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - x^2 + 7}{(x-3)^2}$

$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$$

⑦ $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$.

$f(x)$ est une fonction composée. $f(x) = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g = \frac{1-x}{x^2+2} = \frac{u}{v}$

avec $u = 1-x$. $v = x^2+2$

on a $u' = -1$, $v' = 2x$ $\Rightarrow g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-1 \times (x^2+2) - (1-x) \times 2x}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{-x^2 - 2 - 2x + 2x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

⑦

$f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}$ est définie pour $\dfrac{1-x}{x^2+2} \geq 0$ et $x^2+2 \neq 0$

$x^2+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

on a $1-x \geq 0$, donc $x \leq 1$, $\Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}.\ x \leq 1\}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+2}}$.

$f(x)$ est une fonction composée $f(x) = h \circ g$ avec $h = \sqrt{x}$, $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g = \dfrac{1-x}{x^2+2} = \dfrac{u}{v}$

avec $u = 1-x$, $v = x^2+2$

on a $u' = -1$, $v' = 2x$ $\Rightarrow g'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{-1 \times (x^2+2) - (1-x) \times 2x}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{-x^2-2-2x+2x^2}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}} \cdot \dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

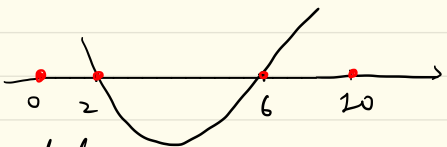
$= \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

EX9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$.

la dérivée $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 12 = 64 - 48 = 16$

les racines de f' sont $x_1 = \dfrac{8+\sqrt{16}}{2} = 6$. $x_2 = \dfrac{8-\sqrt{16}}{2} = 2$.



On calcule :

$f(0) = -5$ $\quad f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 12 \times 2 - 5 = \frac{17}{3}$

$f(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 4 \times 6^2 + 12 \times 6 - 5 = -5$

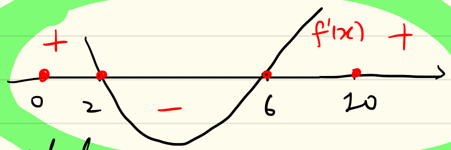
$f(10) = \frac{1}{3} \times 10^3 - 4 \times 10^2 + 12 \times 10 - 5 = \dfrac{1000}{3} - 285 \approx 48.3$

EX 9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - 5$.

la dérivée $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 12 = 64 - 48 = 16$

les racines de f' sont $x_1 = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} = 6$. $x_2 = \frac{8 - \sqrt{16}}{2} = 2$.



On calcule :

$f(0) = -5$ $\quad f(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 12 \times 2 - 5 = \frac{17}{3}$

$f(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 4 \times 6^2 + 12 \times 6 - 5 = -5$

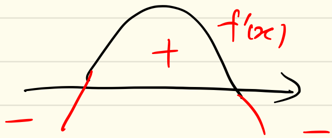
$f(10) = \frac{1}{3} \times 10^3 - 4 \times 10^2 + 12 \times 10 - 5 = \frac{1000}{3} - 285 \approx 48.3$

le tableau de variation :

x	0		2		6		10
$f'(x)$		+		−		+	
$f(x)$	-5	↗	$\frac{17}{3}$	↘	-5	↗	48.3

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$

$f'(x) = -\frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x = -x^2 - 2$



le tableau

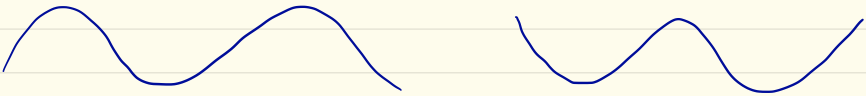
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(x) = -4x + 5$

$f'(x)$

poly degré 2 ax^2+bx+c

degré 3.

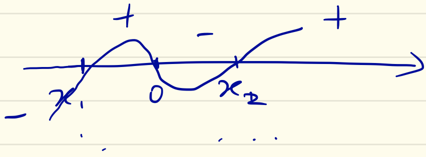


$$f(x) = -2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5$$

$$f'(x) = -8x^3 + 9x^2 + 8x$$

$$= x(-8x^2 + 9x + 8)$$

$$= x(x - x_1)(x - x_2)$$



le tableau

		x_1		0		x_2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

TD3.

EX1. ① ✓

② ✗ $u_n = (-1)^n$.

③ ✓

④ ✗ $\Rightarrow$ vrai

$\Leftarrow$ fausse. la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergent mais son terme général $\to 0$

EX3 :

① $u_n = n^2 + 5n$. $n \in \mathbb{N}$

$u_n = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$.

$= \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ \ldots \}$.

minorée par 0

mais pas majorée. $\nearrow$ divergente.

③ $u_n = 1 + \frac{1}{1+2n^2}$ $n \in \mathbb{N}$ $= 0. 1. 2 \ldots,$

$= \{ 2, \frac{4}{3}, 1 + \frac{1}{9} \ \ldots \}$

minorée par 1.

majorée par 2.

$\}$ bornée.

$1+2n^2 \nearrow$ $\frac{1}{1+2n^2} \searrow$ $u_n \searrow$ $\Rightarrow$ convergente.

TD2.

EX4: 3. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 9x - 12}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x-1)(x^2 - 7x + 12)}{(x-1)(x-2)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 2} = \frac{1^2 - 7 + 12}{1 - 2} = -6$$

EX5. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

on a $f(2) = 2$. $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ donc $f'(2) = 3$

L'éq de la tangente au point $(2. f(2)) = (2, 2)$ est donc

$$T_2 : y = 2 + f'(2)(x-2) = 2 + 3(x-2)$$
$$= 3x - 4$$