TD 3

1 Vrai/Faux

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite bornée est convergente.
3. Si une suite est croissante, elle est majorée si et seulement si elle converge.
4. Une série converge si et seulement si son terme général tend vers 0.

2 Trouver des suites

Donner un exemple d'une suite :

1. ni croissante, ni décroissante.
2. majorée et non minorée.
3. bornée non convergente.
4. convergente ni croissante ni décroissante.
5. ni minorée ni majorée.
6. majorée par l et convergente vers l.
7. majorée par l et non convergente vers l.
8. strictement croissante et bornée.
9. alternée ni minorée ni majorée.

3 Suites majorées, minorées, etc.

Parmi ces suites, déterminer lesquelles sont majorées, minorées, bornées, croissantes, décroissantes, convergentes, divergentes :

1. $u_n = n^2 + 5n$
2. $u_n = (-1)^n\left(n^2 + 5n\right)$
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{1+2n^2}$

4 Limites de suites

Étudier les limites de :

1. $u_n = \dfrac{3n-7}{2n+8}$
2. $u_n = \dfrac{5n^3+27n+8}{4n^2+28}$
3. $u_n = \dfrac{17n+12}{8n^2+15}$
4. $u_n = \dfrac{7n^3-12n+15}{8n^3+5n-5}$

5 Suites adjacentes

On considère les deux suites de termes généraux, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}$$

où $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Conclure.

6 Épargne placée au taux de 5 %

On dispose initialement d'une épargne de 2 000 euros, placée au taux de 5 % par an. De plus on ajoute 500 euros par an à cette épargne.

1. Écrire l'équation récurrente correspondant à cette situation. Donner la solution générale de l'équation homogène, puis celle de l'équation complète.
2. Quelle est la condition initiale ici ? En déduire la solution précise. De combien disposera-t-on dans 10 ans ? Que se passe-t-il au bout d'un grand nombre d'années ?

7 Calculs de limites

Étudier les limites (finies ou infinies) des suites définies par :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$
2. $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$
3. $u_n = \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}\right)^n$
4. $u_n = \sqrt{n^2+4n} - n$

8 Capital placé avec prélèvement chaque année

1. M. Dupond dispose initialement d'une épargne de 200 000 euros, placée au taux de 6 % par an. Il prélève 15 000 euros par an à ce patrimoine. Quel sera son capital dans 10 ans ? Dans 20 ans ?
2. Mêmes questions, mais il prélève d'abord 15 000 euros, puis 16 000 euros, puis 17 000 euros, etc.

9 Quelques équations récurrentes

1. Trouver la solution de $x_{n+1} - 2x_n = 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_0 = 10$.
2. Même question si $x_{n+1} - \dfrac{1}{2}x_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_0 = 10$.
3. Résoudre l'équation $x_{t+1} - \dfrac{2}{3}x_t = t + 3$, pour tout $t \in \mathbb{N}$, avec $x_0 = 5$.
4. Déterminer la solution des équations de récurrence suivantes, et étudier leur limite quand $n \to +\infty$:
   a. $u_n + 2u_{n-1} = 3n^2 + 1$, avec $u_0 = 1$.
   b. $3u_n - u_{n-1} = 3^n$, avec $u_0 = 0$.

10 Séries

Calculer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots$

Groupe 7 2020-11-04
matin.

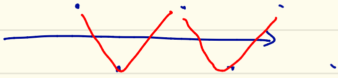
TD 3 :

Ex 1 : ① Vrai

② Faux eg : $u_n = (-1)^n$. $u_0 = \underline{1}$. $u_1 = \underline{-1}$, $u_2 = \underline{1}$ .....

u_n est bornée

u_n est diverge



③ Vrai

④ Faux $\Rightarrow$ vrai

$\Leftarrow$ fausse.

par exemple : la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente

mais son terme général $\longrightarrow 0$

Remarque : déf : Soit (u_n) une suite.

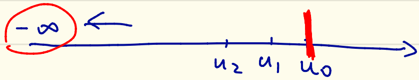
On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) déf

par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad \forall n$

EX 2 : ① $u_n = (-1)^n$. ni $\nearrow$ ni $\searrow$

② $u_n = -n$.

$u_0 = 0 \quad u_1 = -1 \quad u_2 = -2$



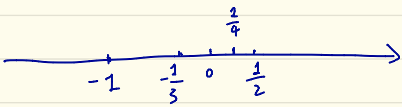
(u_n) est majorée, non minorée

③ $u_n = (-1)^n$.

bornée non convergente

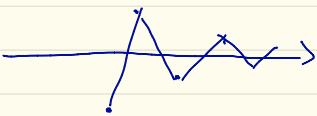
④ $u_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$, $n = \{1, 2, \cdots\}$

$u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{2}$ $u_3 = -\frac{1}{3}$



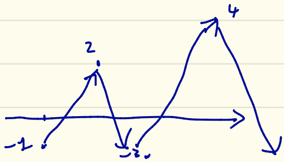
u_n est convergente. $(-1)^n \times \frac{1}{\underset{\to +\infty}{n}} \to 0$

u_n ni $\nearrow$ ni $\searrow$



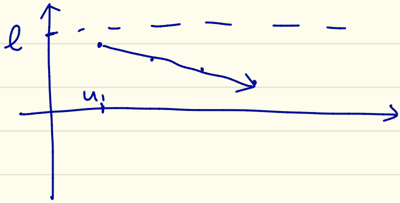
⑤ $u_n = (-1)^n \times n$

ni minorée, ni majorée



⑥ $u_n = \ell - \frac{1}{n}$

$u_1 = \ell - 1 \qquad u_2 = \ell - \frac{1}{2}$

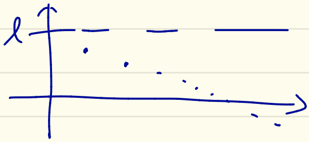


$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ell - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \ell - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \ell$$

u_n est majorée par ℓ et convergente vers ℓ.

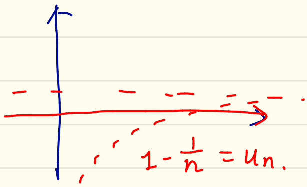
⑦ $u_n = \ell - n$ non convergente.

$u_1 = \ell - 1 \qquad u_2 = \ell - 2\,, \quad u_3 = \ell - 3$



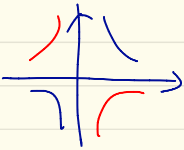
u_n est majorée par ℓ

⑧ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

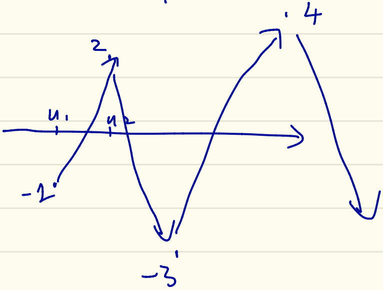


u_n est strictement ↑ et bornée.

$-\frac{1}{x}$



⑨ $u_n = (-1)^n \times n.$ pour $n \in \mathbb{N}$



(u_n) ni minorée
ni majorée

TD3 :

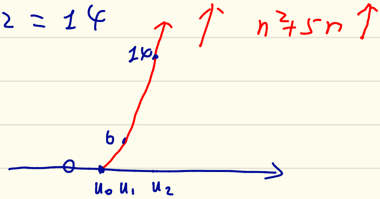
Ex3 : ① $u_n = n^2 + 5n$

$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1+5 = 6 \qquad u_2 = 2^2 + 5\times 2 = 14$

u_n est minorée par 0

u_n n'est pas majorée. non borné.

strictement $\nearrow$. divergente



② $u_n = (-1)^n (n^2 + 5n)$

$= \{ 0, (-1)^1 \times (1+6), (-1)^2 \times (2^2 + 5\times 2) \cdots \}$

$= \{ 0, -6, 14, \cdots \}$

(u_n) est non minorée

non majorée.

si n grand, n^2+5n grand.

$(-1)^n (n^2+5n)$

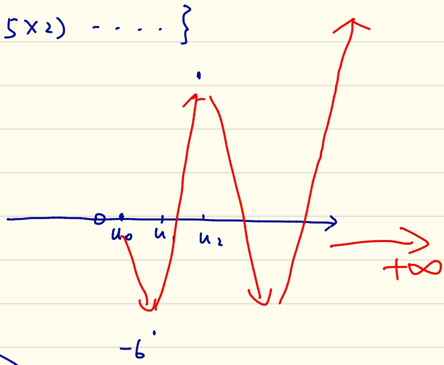
si n est paire, $(-1)^n = 1$,

$(-1)^n (n^2+5n) = n^2+5n$ grand, si n grand.

si n est impaire : $(-1)^n = -1$.

$(-1)^n (n^2+5n) = -(n^2+5n)$ petit, si n grand.

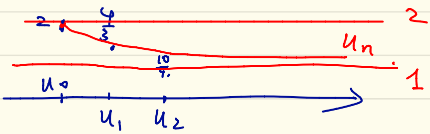
Donc. (u_n) est divergente.



③ $u_n = 1 + \frac{1}{1+2n^2}$.

$= \{ 2, 1 + \frac{1}{1+2}, 1 + \frac{1}{1+2\times 2^2} \cdots \}$

$= \{ 2, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{9}, \cdots \}$



Un est majorée. par 2.

Un est minorée par 1 : $1 + \frac{1}{1+2n^2}$, $\frac{1}{1+2n^2} \to 0$, si $n \to \infty$

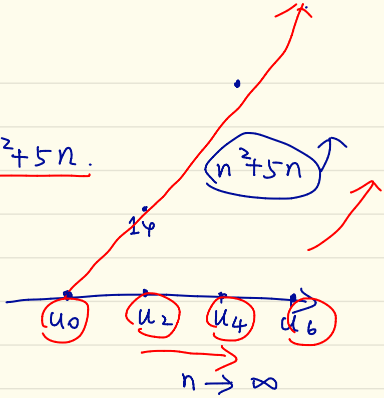
$1 + \frac{1}{1+2n^2} > 1$.

Donc. borée. $\Rightarrow$ Un est convergente.

Ex 3

② $u_n = (-1)^n (n^2 + 5n)$

Si n paire. $(-1)^n = 1$, $\underline{u_n = n^2 + 5n}$.



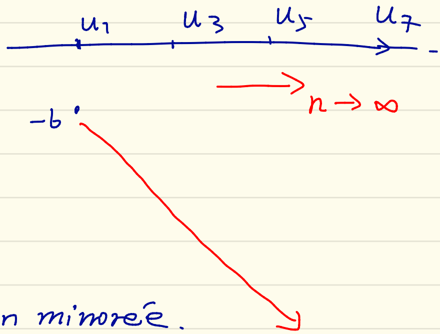
si n est grand, u_n est grand.

$u_0 = 0$

$u_2 = 14$

$u_4 = 16 + 20 = 36$

Si n impaire. $(-1)^n = -1$, $u_n = -(n^2 + 5n)$



Si n est grand, u_n est petite.

Donc. (u_n) est non majorée. non minorée.

TD3

EX4 : ① $u_n = \dfrac{3n-7}{2n+8}$

$\lim\limits_{n\to\infty} 3n-7 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n+8 = +\infty$ $\Big\} \to \dfrac{+\infty}{+\infty}$ indéterminée.

$$\frac{3n-7}{2n+8} = \frac{\cancel{n}(3-\frac{7}{n})}{\cancel{n}(2+\frac{8}{n})} \quad \begin{matrix}\to 3 \\ \to 2\end{matrix}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3-\frac{7}{n}) = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2+\frac{8}{n}) = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$

② $u_n = \dfrac{5n^3+27n+8}{4n^2+28} = \dfrac{n\,\cancel{n^3}\left(5+\frac{27}{n^2}+\frac{8}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(4+\frac{28}{n^2}\right)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\underbrace{\frac{27}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{8}{n^3}}_{\to 0}\right) = 5$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\underbrace{\frac{28}{n^2}}_{\to 0}\right) = 4$

Donc. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n \times \dfrac{5+\frac{27}{n^2}+\frac{8}{n^3}}{4+\frac{28}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n \times \dfrac{5}{4} = +\infty$.

③ $u_n = \dfrac{17n+12}{8n^2+15}$

$= \dfrac{n(17+\frac{12}{n})}{n^2(8+\frac{15}{n^2})} = \dfrac{17+\frac{12}{n}}{n(8+\frac{15}{n^2})}$

où $\lim\limits_{n\to+\infty}(17+\underbrace{\frac{12}{n}}_{\to 0}) = 17$. et $\lim\limits_{n\to+\infty}(8+\underbrace{\frac{15}{n^2}}_{\to 0}) = 8$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\,\dfrac{17+\frac{12}{n}}{8+\frac{15}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}\left(\frac{17}{8}\right) = 0 \times \dfrac{17}{8} = 0$

④ $u_n = \dfrac{\cancel{n^3}\left(7-\overbrace{\frac{12}{n^2}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{15}{n^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left(8+\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{5}{n^3}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow \dfrac{7}{8}$, quand $n\to+\infty$.

Ex7 :

Remarque : ① Soient (u_n) (v_n) deux suites t.q $0 \leq u_n \leq v_n$.

si $\lim v_n = 0$, $\Rightarrow$ $\lim u_n = 0$.

② Soient $(u_n), (v_n)$ - - - - - - t.q. $u_n > v_n$.

si $\lim v_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\lim u_n = +\infty$.

① $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3}}$. pour $n \geqslant 2$

$\Downarrow$

$u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$

Donc $u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1}$

$\frac{2}{3} u_{n-1} \leq \frac{2}{3} u_{n-2} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$

$\vdots$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} u_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2$

$u_n + \cancel{\frac{2}{3} u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} u_3 \leq \cancel{\frac{2}{3} u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2$

$\Rightarrow$ $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2^2}{2!}$

$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}_{\to 0} \times 2 \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to 0} u_n = 0$