二、Bernstein基函数的性质

1、正性（非负性）

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} = 0 & t = 0,1 \\ > 0 & t \in (0,1), i = 1,2,\cdots,n-1; \end{cases}$$

2、权性

基函数有n+1项，n+1个基函数的和加起来正好等于1

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \equiv 1 \qquad t \in (0,1)$$

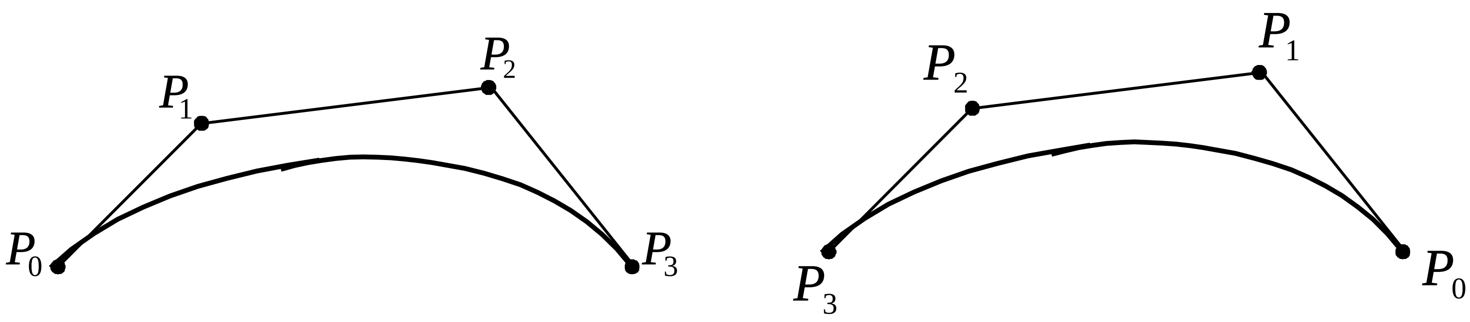
3、端点性质

$$B_{i,n}(0)=\begin{cases}1 & (i=0)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$B_{i,n}(1)=\begin{cases}1 & (i=n)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

4、对称性

可以证明，假如保持n次Bezier曲线控制多边形的顶点位置不变，而把次序颠倒过来，则此时曲线仍不变，只不过曲线的走向相反而已



$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

$$B_{n-i,n}(1-t) = C_n^{n-i}[1-(1-t)]^{n-(n-i)} \cdot (1-t)^{n-i}$$

$$= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t)$$

5、递推性

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \qquad (i = 0,1,\cdots n)$$

即n次的Bernstein基函数可由两个n-1次的Bernstein基函数线性组合而成。因为:

$$C_n^i = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1})$$

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(t) &= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) t^i (1-t)^{n-i} \\
&= (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{(n-1)-i} + t C_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\
&= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t)
\end{aligned}$$

6、导函数

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] \qquad i = 0,1,\cdots,n;$$

7、最大值

$B_{i,n}(t)$在 $t = \dfrac{i}{n}$ 处达到最大值

8、积分

$$\int_0^1 B_{i,n}(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$$

9、降阶公式

$$B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,n-l}(u) + uB_{i-l,n-l}(u)$$

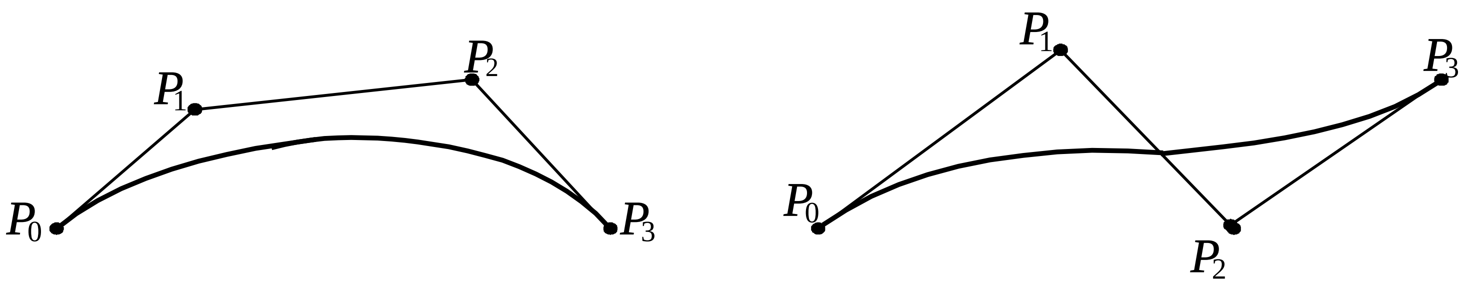
一个n次Bernstein基函数能表示成两个n-1次基函数的线性和

10、升阶公式

$$B_{i,n}(n) = \frac{i+1}{n+1}B_{i+1,n+1}(t) + \frac{n+1-i}{n+1}B_{i-1,n-1}(t)$$

三、Bezier曲线的性质

1、端点性质



顶点p_0和p_n分别位于实际曲线段的起点和终点上

Bezier曲线段的参数方程表示如下：

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) = P_0 B_{0,n}(t) + P_1 B_{1,n}(t) + \mathbf{K} + P_n B_{n,n}(t)$$

$$p(0) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(0) = P_0 B_{0,n}(0) + P_1 B_{1,n}(0) + \mathbf{K} + P_n B_{n,n}(0) = P_0$$

$$p(1) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(1) = P_0 B_{0,n}(1) + P_1 B_{1,n}(1) + \mathbf{K} + P_n B_{n,n}(1) = P_n$$

2、一阶导数

Bernstein基函数的一阶导数为:

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{\mathrm{i}-1,n-1}(t) - B_{\mathrm{i},n-1}(t)] \qquad i = 0,1,\cdots,n;$$

$$\mathrm{p}'(t) = n\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}(p_i - p_{i-1})B_{i-1,n-1}(t)$$

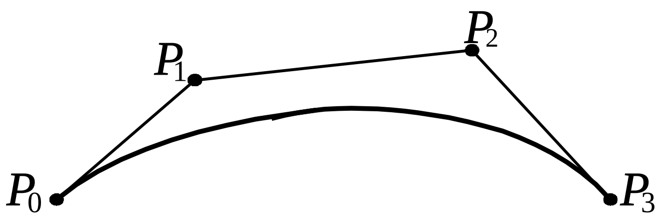
当 t=0:

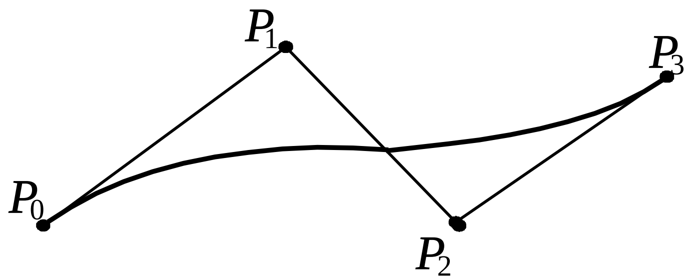
$$p'(0) = n(p_1 - p_0)$$

当 t=1:

$$p'(1) = n(p_{\mathrm{n}} - p_{n-1})$$

这说明Bezier曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致





3、几何不变性

指某些几何特性不随坐标变换而变化的特性。Bezier曲线的形状仅与控制多边形各顶点的相对位置有关，而与坐标系的的选择无关

4、变差缩减性

若Bezier曲线的特征多边形是一个平面图形，则平面内任意直线与p(t)的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数，这一性质叫变差缩减性质

此性质反映了Bezier曲线比其特征多边形的波动还小，也就是说Bezier曲线比特征多边形的折线更光顺