

## 5、参数曲线的基本概念

这部分内容完全来自于微分几何。微分几何是用微分的方法来研究曲线的局部性质，如曲线的弯曲程度等

一条用参数表示的三维曲线是一个有界点集，可写成一个带参数的、连续的、单值的数学函数，其形式：

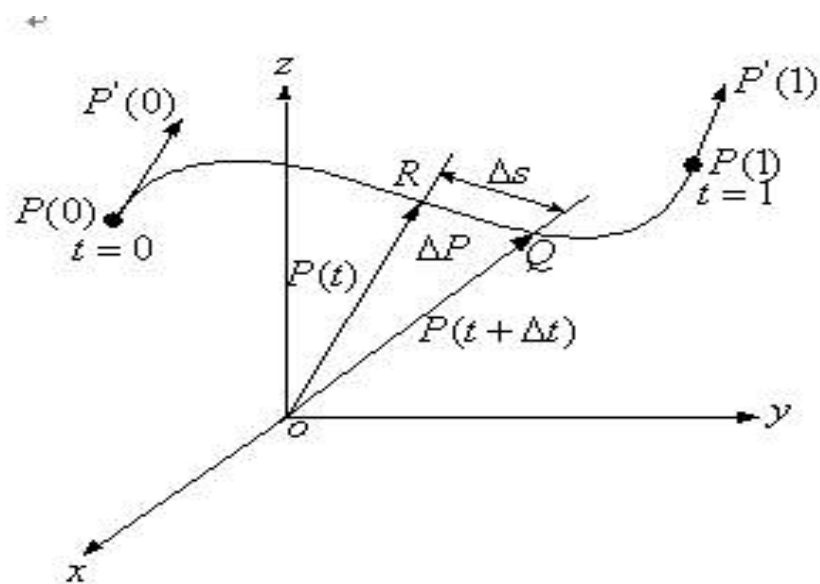
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$p'(t) = \frac{dP}{dt} \quad p''(t) = \frac{d^2 P}{dt^2}$$

## (1) 位置矢量

曲线上任一点的位置矢量  
可表示为：

$$p(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$



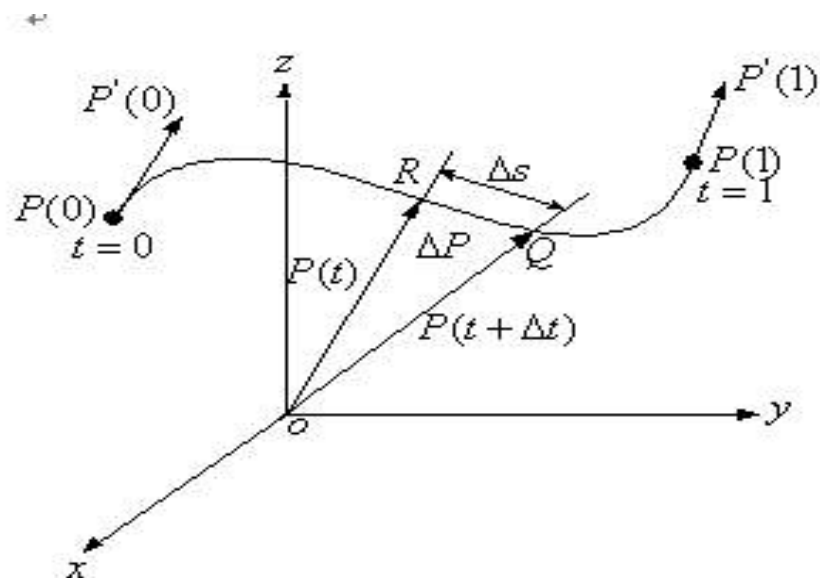
## (2) 切矢量

选择弧长 $s$ 作为参数，当  
 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，弦长 $\Delta s \rightarrow 0$ ，但  
方向不能趋向于0

$$T = \frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} \quad \text{单位矢量}$$

根据弧长微分公式有：

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$



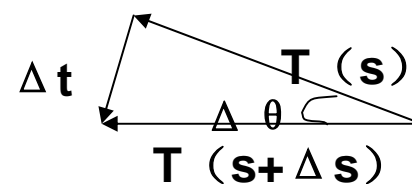
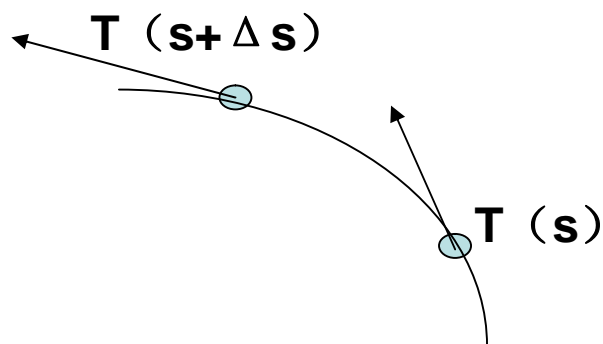
引入参数t，可改写为：

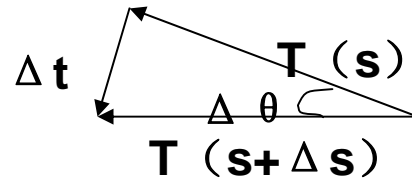
$$(ds / dt)^2 = (dx / dt)^2 + (dy / dt)^2 + (dz / dt)^2 = |P'(t)|^2$$

$$T = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{P'(t)}{|P'(t)|} \quad \text{即T是单位切矢量}$$

### (3) 曲率

切向量求导，求导以后还是一个向量，称为**曲率**，其几何意义是曲线的单位切向量对弧长的转动率，即刻画这一点的曲线的弯曲程度。





$$k = |T'| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta T}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{T(s + \Delta s) - T(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta q}{\Delta s} \right|$$

曲率越大，表示曲线的弯曲程度越大

曲率k的倒数  $r = \frac{1}{k}$  称为曲率半径

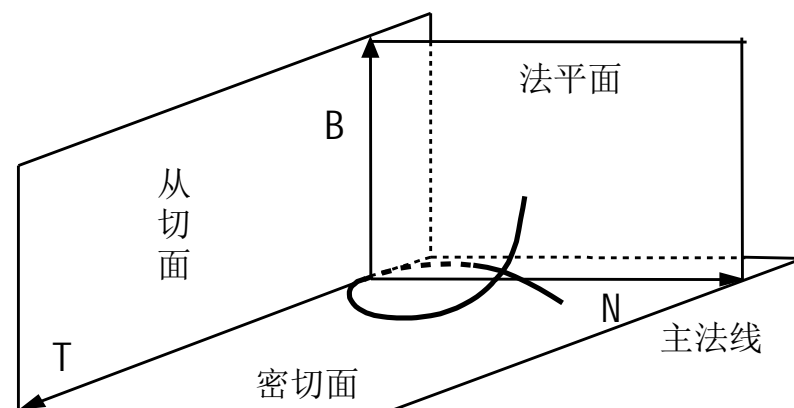
曲率半径越大，圆弧越平缓

曲率半径越小，圆弧越陡

#### (4) 法矢量

法矢量是与切矢量垂直的向量

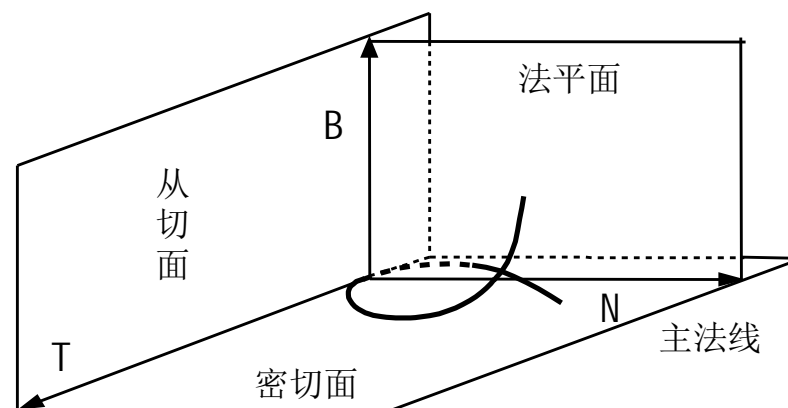
N、B 构成的平面称为法平面，N、T 构成的平面称为密切平面，B、T 构成的平面称为从切平面





T(切矢)、N(主法矢)和B(副法矢)构成了曲线上的活动坐标架

$$B = T \times N$$



## (5) 挠率

空间曲线不但要弯曲，而且还要扭曲，即要离开它的密切平面。为了能刻画这一扭曲程度，等价于去研究密切平面的法矢量（即曲线的副法矢量）关于弧长的变化率。

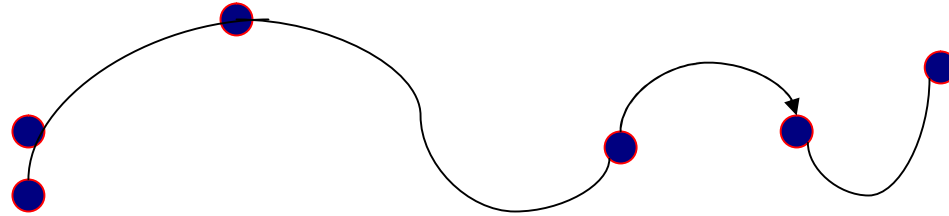
挠率  $t$  的绝对值等于副法线方向(或密切平面)对于弧长的转动率：

$$|t| = \lim_{\Delta s} \left| \frac{\Delta q}{\Delta s} \right|$$

## 6、插值

自由曲线和自由曲面一般通过少数分散的点生成，这些点叫做“型值点”、“样本点”或“控制点”

给定一组有序的数据点 $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ ，要求构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值(interpolation)，所构造的曲线称为插值曲线

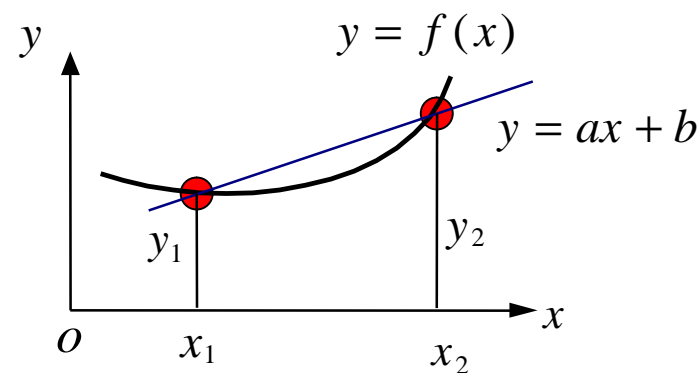


把曲线插值推广到曲面，类似地就有插值曲面

构造插值曲线曲面所采用的数学方法称为曲线曲面插值法

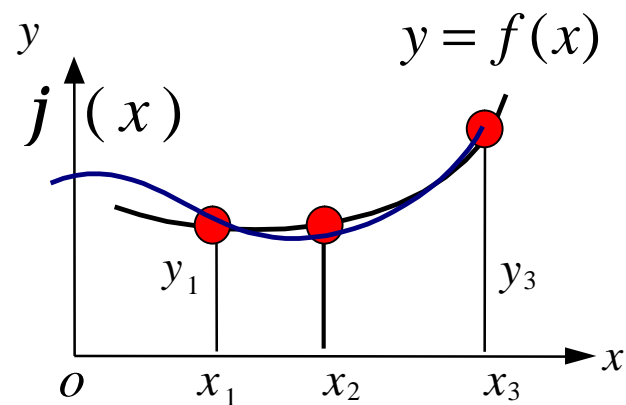
(1) 线性插值：假设给定函数 $f(x)$

在两个不同点 $x_1$ 和 $x_2$ 的值，用一个线形函数： $y=ax+b$ ，近似代替，称为的线性插值函数



(2) 抛物线插值：已知三个点的坐标，要求构造一个抛物线函数

$$j(x) = ax^2 + bx + c$$



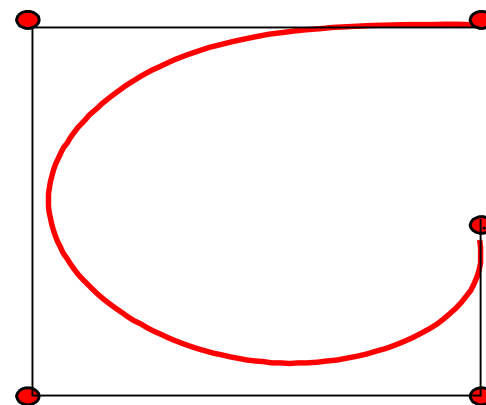
## 7、拟合

构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，所构造的曲线为拟合曲线

在计算数学中，逼近通常指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义，因此插值和拟合都可以视为逼近

对于逼近样条，连接控制点序列的折线通常被显示出来，以提醒设计者控制点的次序

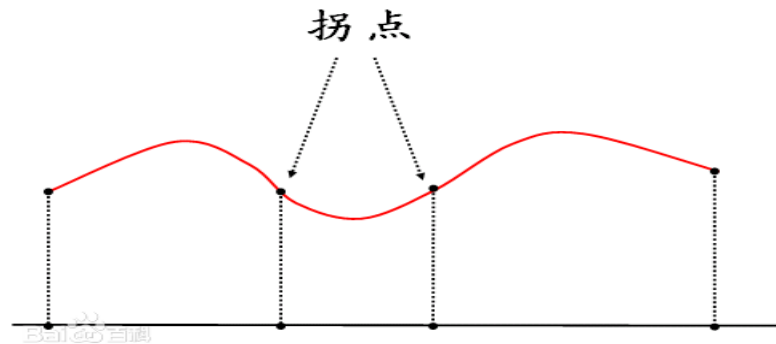
一般将连接有一定次序控制点的直线序列称为**控制多边形**或**特征多边形**





## 7、光顺

指曲线的拐点不能太多（有一、二阶导数等）



在数学领域是指：凸曲线与凹曲线的连接点

对平面曲线而言，相对光顺的条件是：

- a. 具有二阶几何连续性( $G^2$ )
- b. 不存在多余拐点和奇异点
- c. 曲率变化较小