三、基本几何变换

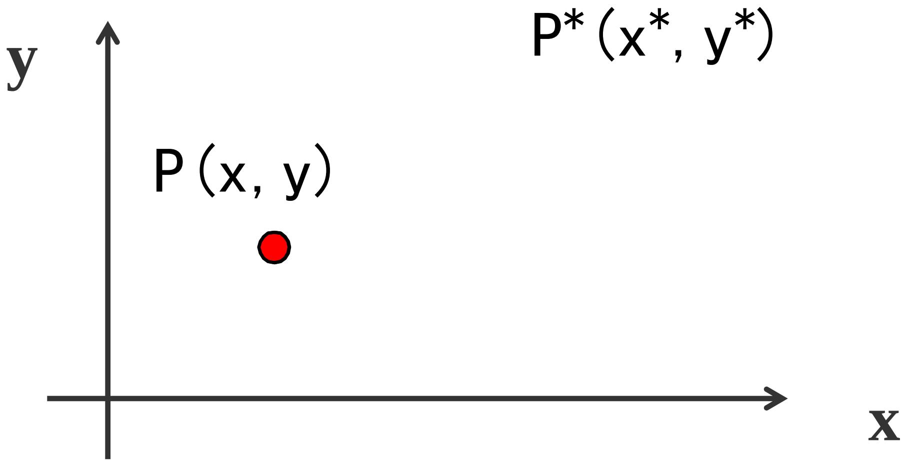
图形的**几何变换**是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形

$p(x,y)$ ⟶ 表示平面上一个未被变换的点

$p^*(x^*,y^*)$ ⟶ 变换后的新点坐标

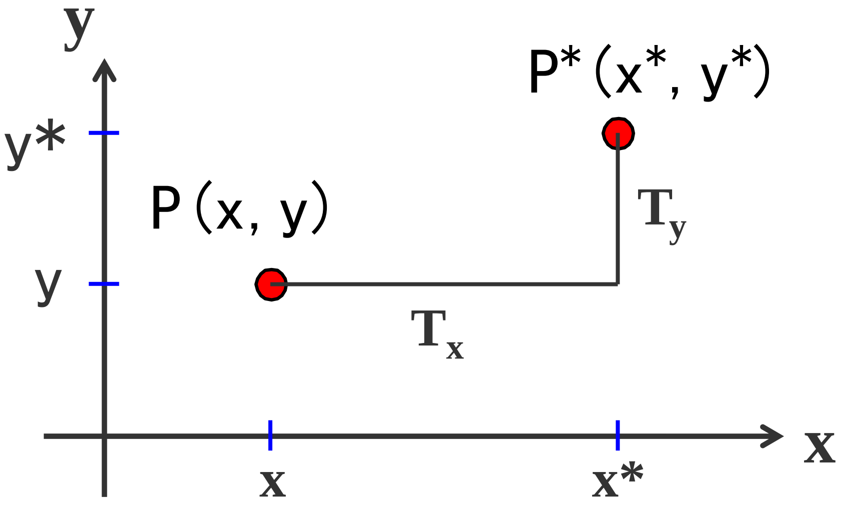
1、平移变换

平移是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程



即新的坐标分别在x方向和y方向增加了一个增量和，使得：

$$\begin{cases} x^* = x + T_x \\ y^* = y + T_y \end{cases}$$



T_x，T_y称为平移矢量

$$\begin{cases} x^* = x + Tx \\ y^* = y + Ty \end{cases}$$

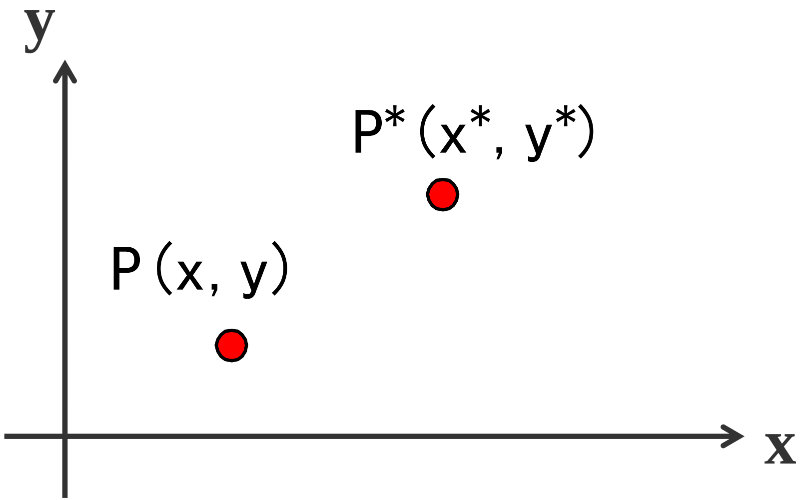
$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+Tx & y+Ty & 1 \end{bmatrix}$$

平移是一种不产生变形而移动物体的刚体变换，即物体上的每个点移动相同数量的坐标

2、比例变换

比例变换是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩Sx倍，沿y方向放缩Sy倍。其中Sx和Sy称为比例系数

$$\begin{cases} x^* = x \bullet S_x \\ y^* = y \bullet S_y \end{cases}$$

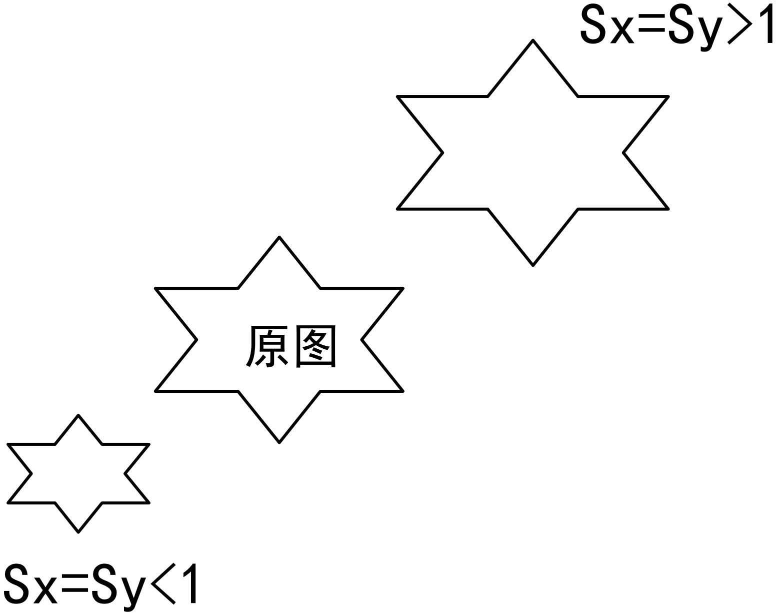


比例变换的齐次坐标计算形式如下：

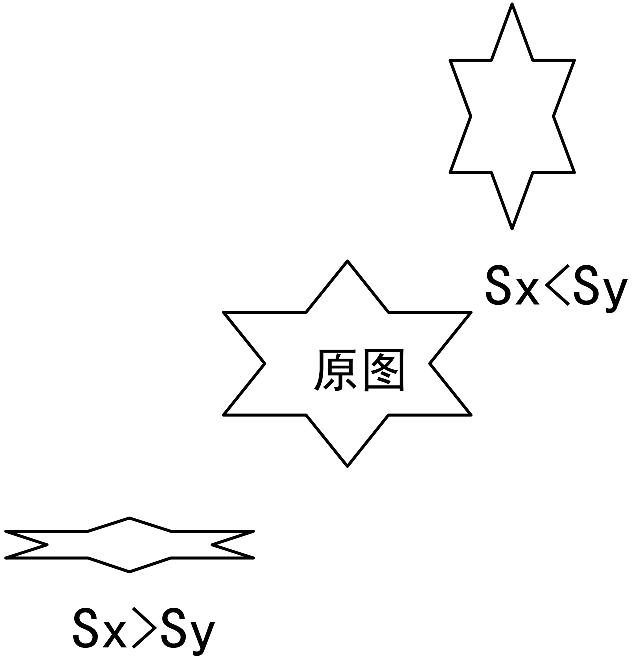
$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \bullet x & S_y \bullet y & 1 \end{bmatrix}$$

缩放系数S_x和S_y可赋予任何正整数。值小于1缩小物体的尺寸，值大于1则放大物体，都指定为1，物体尺寸就不会改变

（a）Sx=Sy比例



（b）Sx<>Sy比例



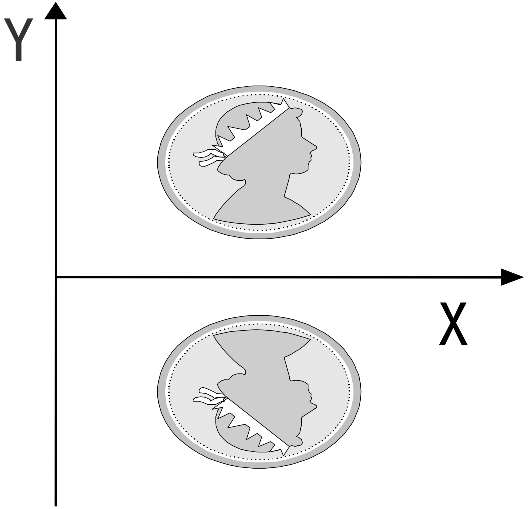
当Sx=Sy时，变换成为整体比例变换，用以下矩阵进行计算：

$$\begin{bmatrix} x* & y* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{S} & \frac{y}{S} & 1 \end{bmatrix}$$

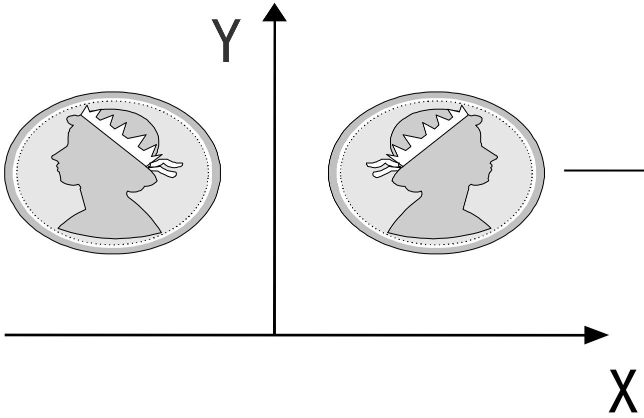
整体比例变换时，若S>1，图形整体缩小；若0<S<1，图形整体放大；若S<0，发生关于原点的对称等比变换

3、对称变换

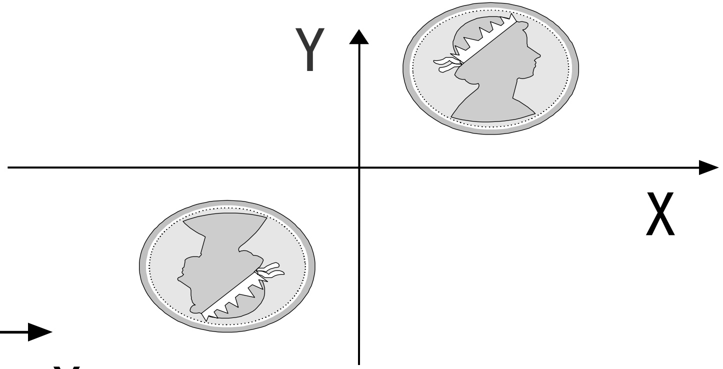
对称变换也称为反射变换或镜像变换，变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。



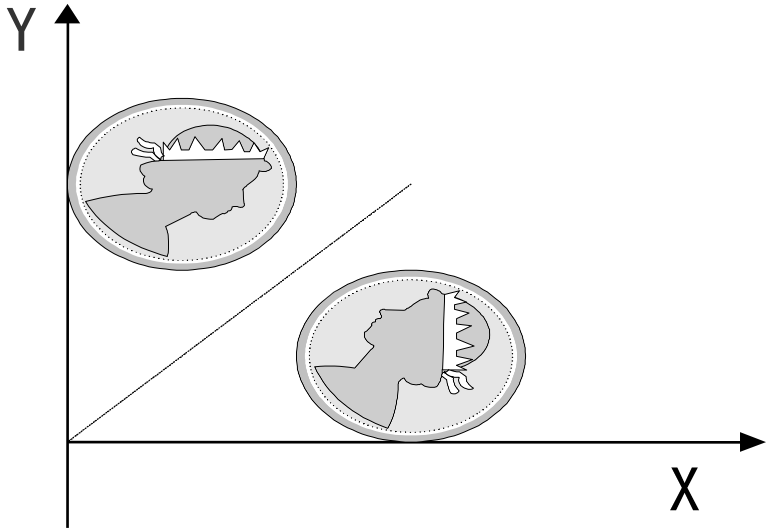
关于x轴对称



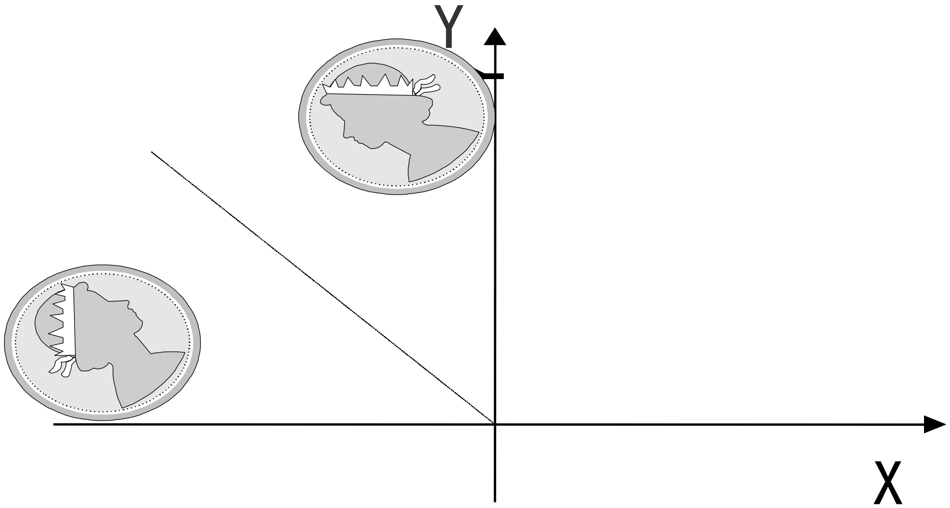
关于y轴对称



关于原点对称



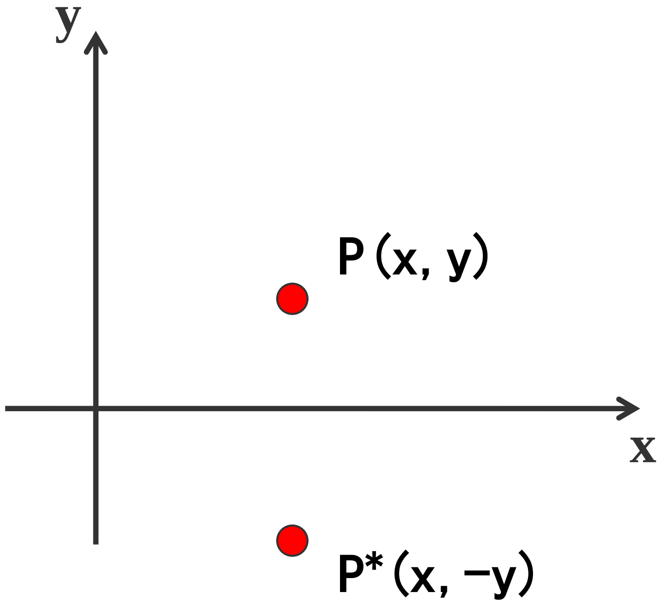
关于x=y对称



关于x=-y对称

（a）关于X轴对称

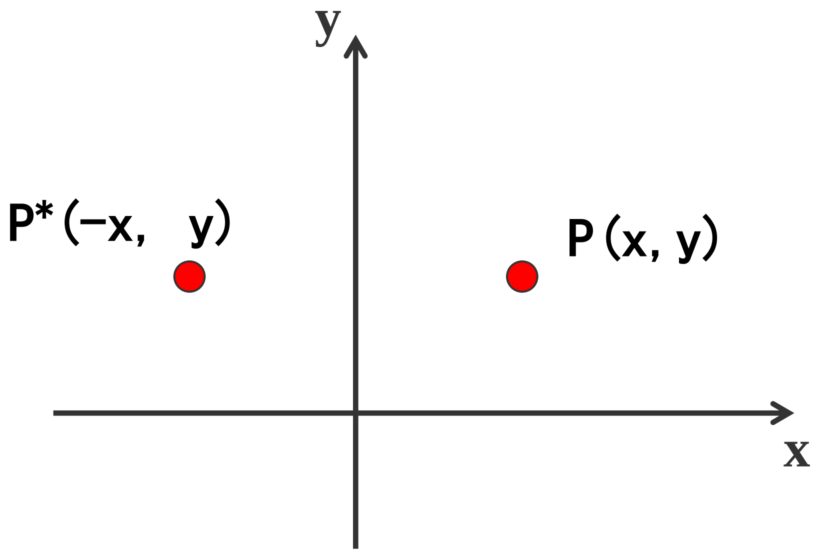
点P经过关于X轴的对称变换后形成点P*，则x*=x且y*=-y，写成齐次坐标的计算形式为：



$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad -y \quad 1]$$

（b）关于y轴对称

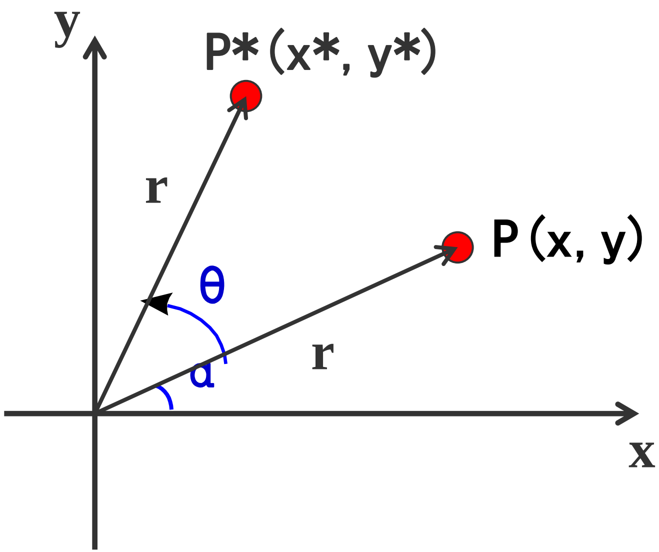
点P经过关于X轴的对称变换后形成点P*，则x*=-x且y*=y，写成齐次坐标的计算形式为：



$$[x^* \quad y^* \quad 1]=[x \quad y \quad 1]\bullet\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-x \quad y \quad 1]$$

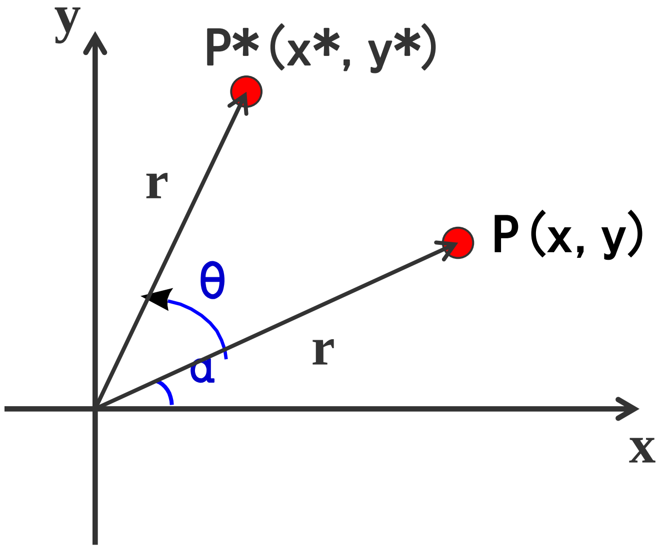
4、旋转变换

二维旋转是指将P点绕坐标原点转动某个角度θ（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点P*的重定位过程



首先确定当基准点为坐标原点时，点位置P旋转的变换方程

应用标准三角特性，利用角度α和θ将转换后的坐标表示为：



$$\begin{cases} x^* = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y^* = r\sin(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

在极坐标系中点的原始坐标为：

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

将x、y 代入上式，就得到相对于原点将在位置（x, y）处的点旋转θ角的变换方程：

$$\begin{cases} x^* = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y^* = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

二维图形绕原点逆时针旋转θ角的齐次坐标计算形式可写为：

$$\begin{bmatrix} x* & y* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \bullet \cos\theta - y \bullet \sin\theta & x \bullet \sin\theta + y \bullet \cos\theta & 1 \end{bmatrix}$$

绕原点顺时针旋转θ角的齐次坐标计算形式可写为：

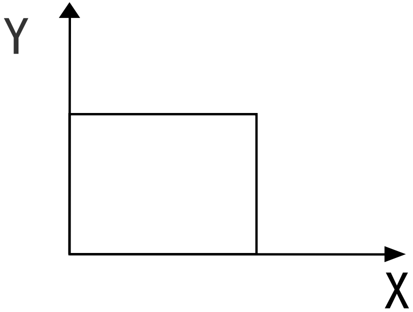
$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5、错切变换

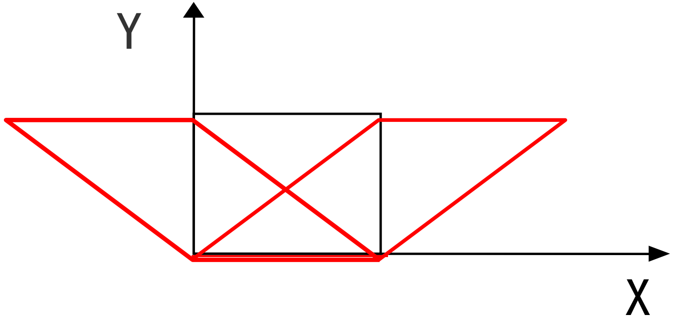
在图形学的应用中，有时需要产生弹性物体的变形处理，这就要用到错切变换。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

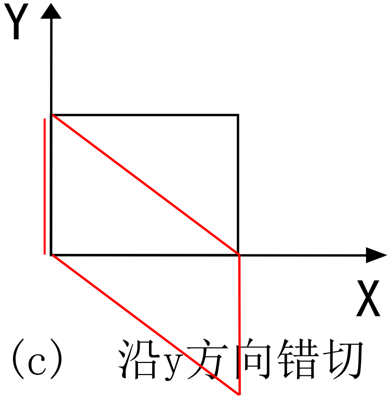
变换矩阵中的非对角线元素大都为零，若变换矩阵中的非对角元素不为0，则意味着x, y同时对图形的变换起作用。也就是说，变换矩阵中非对角线元素起着把图形沿x方向或y方向错切的作用。



（a） 原图



（b）沿x方向错切



（c） 沿y方向错切

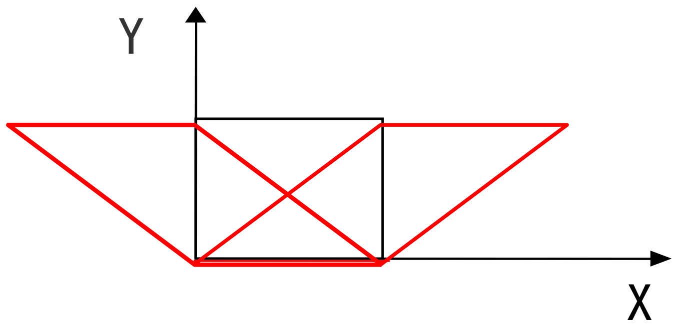
x值或y值越小，错切量越小； x值或y值越大，错切量越大。其变换矩阵为：

$$[x* \quad y* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \bullet \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x + cy \quad bx + y \quad 1]$$

（1）沿x方向错切

当b = 0时，有：

$$\begin{cases} x^* = x + cy \\ y^* = y \end{cases}$$



为什么要采用齐次坐标？

假如变换前的点坐标为（x, y），变换后的点坐标为（x*, y*），这个变换过程可以写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet T_{2\times 2}$$

（1）比例变换

$$\begin{cases} x^* = x \bullet S_x \\ y^* = y \bullet S_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

（2）关于X轴对称

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{cases} x \\ -y \end{cases}$$

（3）关于y=x对称

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} y \\ x \end{cases}$$

（4）旋转变换

$$\begin{cases} x^* = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y^* = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

（5）平移变换

$$\begin{cases} x^* = x + l \\ y^* = y + m \end{cases} \qquad （1）$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad （2）$$

无论矩阵中的几何元素如何变化，都不能获得式（1）的形式。也就是说，不能用式（2）表示平移变换

将$T_{2\times2}$矩阵扩展成$T_{3\times3}$矩阵，写成如下的形式：

$$T=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法定义，只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时才能相乘。将二维点用三维向量来表示：

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+l & y+m & 1 \end{bmatrix}$$

四、复合变换

复合变换是指图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次的变换矩阵相乘

从另一方面看，任何一个复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。

$$
\begin{aligned}
P' &= P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n) \\
&= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n \qquad (n > 1)
\end{aligned}
$$

（1）二维复合平移

p点经过两次连续平移后，其变换矩阵可写为：

$$T_t = T_{t1} \cdot T_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} + T_{x2} & T_{y1} + T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

（2）二维复合比例平移

p点经过两个连续比例变换后，其变换矩阵可写为：

$$T_s = T_{s1} \cdot T_{s2} = \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{x1} \cdot S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} \cdot S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结果矩阵表明连续比例变换是相乘的

（3）二维复合旋转

p点经过两个连续旋转变换后，其变换矩阵可写为：

$$T_r = T_{r1} \cdot T_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结果矩阵表明两个连续旋转是相加的

在进行复合变换时，需要注意的是矩阵相乘的顺序

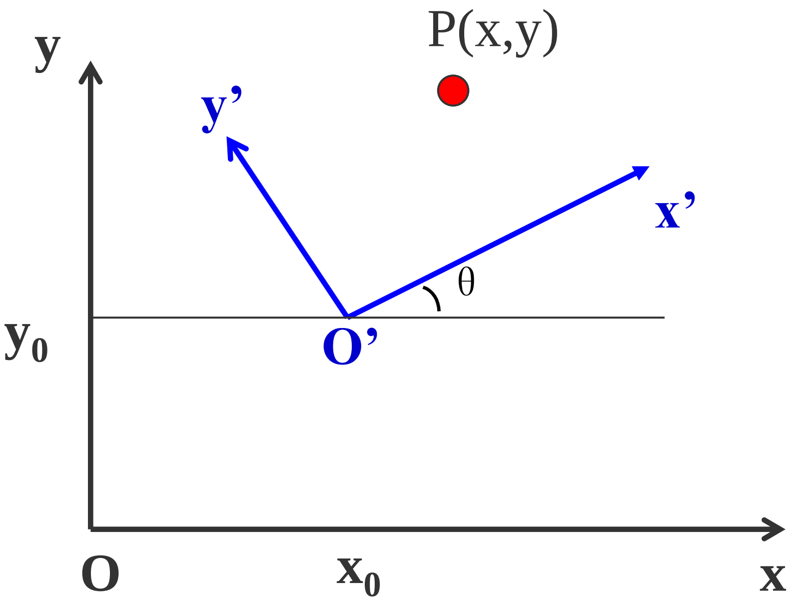
由于矩阵乘法不满足交换率，因此通常$T_1*T_2 \neq T_2*T_1$，即

矩阵相乘的顺序不可交换

（4）坐标系之间的变换

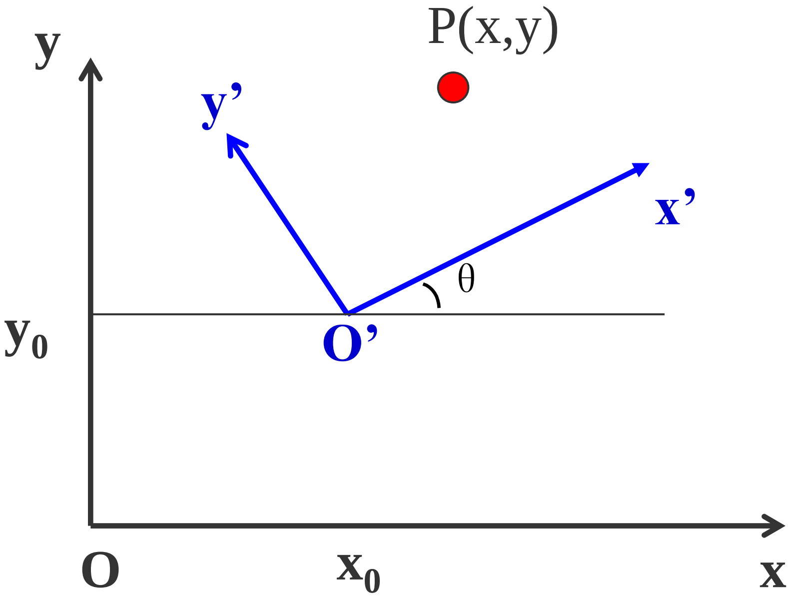
图形变换经常需要从一个坐标系变换到另一个坐标系

例：右图显示了两个笛卡儿坐标系x0y和x’0’y’，而0’点在x0y坐标系的（x_0, y_0）处。



为了将p（x_p，y_p）点从x0y坐标系变换到x’0’y’坐标系，如何进行计算？

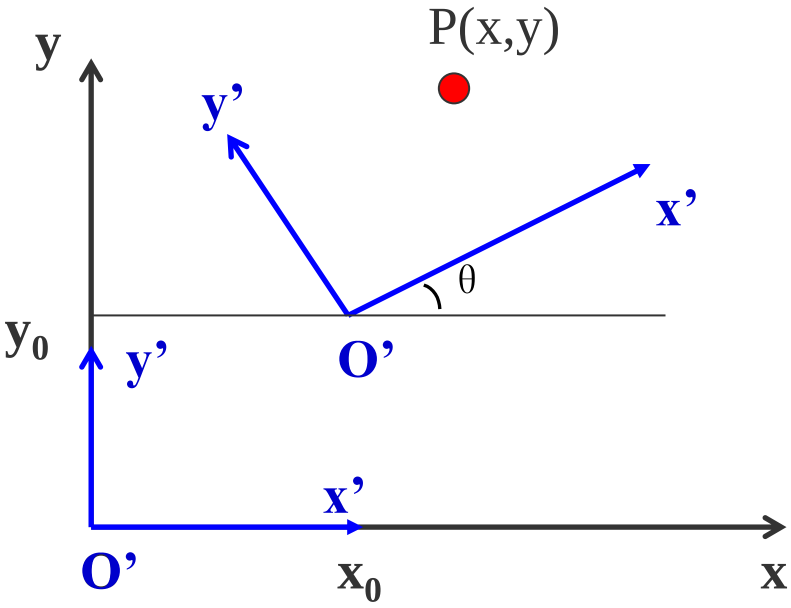
需建立变换使x’0’y’坐标系与x0y坐标系重合



可以分两步来进行：

① 将x’ 0’ y’ 坐标系的原点平移至x0y坐标系的原点—平移变换

② 将x’ 轴旋转到x轴上—旋转变换



上述变换步骤可用变换矩阵表示：

$$T = T_t \cdot T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（5）相对任意参考点的二维几何变换

比例、旋转变换等均与参考点相关。如要对某个参考点（x_f，y_f）作二维几何变换，其变换过程如下：

a、将固定点移至坐标原点，此时进行平移变换

b、针对原点进行二维几何变换

c、进行反平移，将固定点又移回到原来的位置

五、二维变换矩阵

二维空间中某点的变化可以表示成点的齐次坐标与3阶的二维变换矩阵T_{2d}相乘，即：

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D}$$

$$= [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

对图形进行比例、旋转、对称、错切等变换；

$$T_2 = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix}$$

对图形进行平移变换

$$T_3 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

是对图形作投影变换

$$T_4 = \begin{bmatrix} s \end{bmatrix}$$

是对图形作整体比例变换

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right]$$

六、二维图形几何变换的计算

几何变换均可表示成：P*=P ·T的形式，其中，P为变换前二维图形的规范化齐次坐标，P*为变换后的规范化齐次坐标 ，T为变换矩阵。

1、点的变换

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \bullet T$$

2、直线的变换

直线的变换可以通过对直线两端点进行变换，从而改变直线的位置和方向

$$\begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* & 1 \\ x_2^* & y_2^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \bullet T$$

3、多边形的变换

多边形变换是将变换矩阵作用到每个顶点的坐标位置，并按新的顶点坐标值和当前属性设置来生成新的多边形

$$p = \begin{bmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$$