计算机图形学

第三章：二维图形观察及变换

主要内容

本章主要讲述向量、世界坐标系、用户坐标系、窗口与视区、齐次坐标、二维变换等。

掌握要点

向量、矩阵以及它们的运算
坐标系的概念和坐标系之间的变换
齐次坐标的概念
二维图形的各种变换
窗口与视区的变换

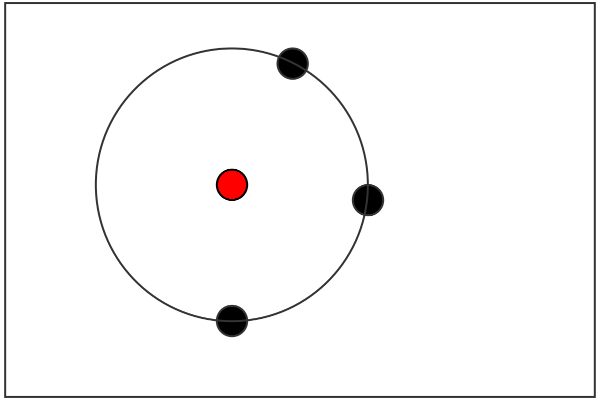
一、向量

1、向量为什么如此重要

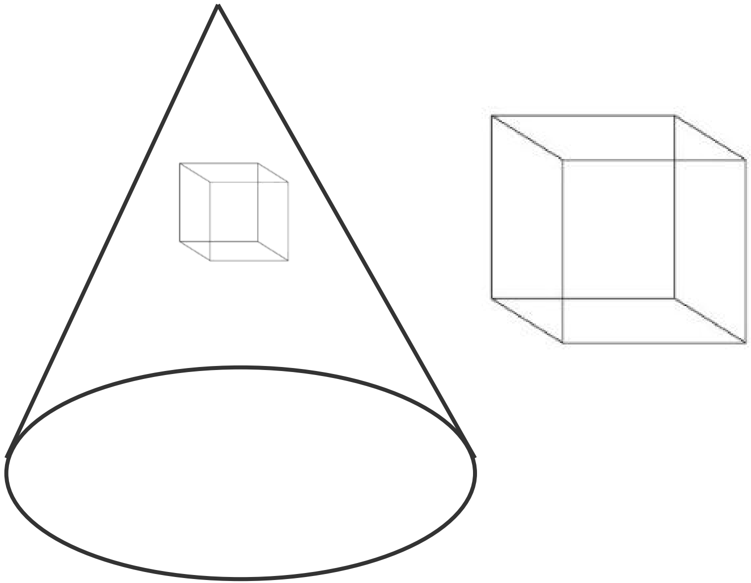
在计算机图形学中，主要处理三维世界中的物体对象。所有需要绘制的对象，都拥有形状、位置和方向等属性

需要编写合适的计算机程序来大致描述这些对象，并描述出围绕在物体周围的光线强度

计算出最终在显示器上的每一个像素的值



在给定坐标系下，所求圆的圆心在哪里呢？如果不使用向量，这个问题会很棘手



在给定圆锥体、立方体和摄像机位置的前提下，怎样才能获得反射影像的准确位置，它的颜色和形状又如何？

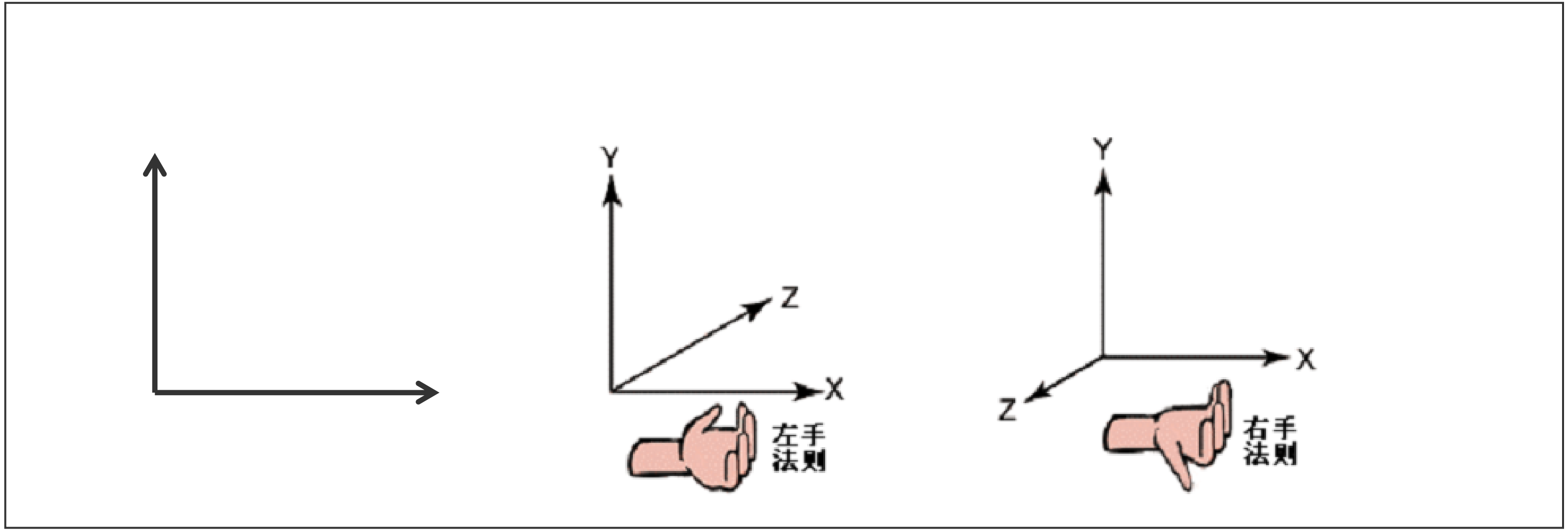
在图形学中，有两大基本工具能帮助我们实现上述要求：

向量分析　　图形变换

通过学习这些工具，可以设计出一些方法来描述我们所遇到的各种几何对象，并学会如何把这些几何方法转换成数字

2、向量一些基础知识

我们所使用的所有点和向量都是基于某一坐标系定义的

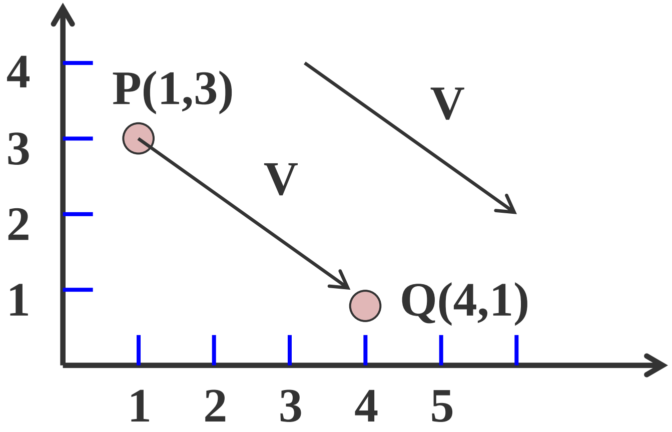


从几何的角度看，向量是具有长度和方向的实体，但是没有位置

而点是只有位置，没有长度和方向

在几何中把向量看成从一个点到另一个点的位移。向量算法提供了一种统一的方法来对几何思想进行代数的表示

（1）向量的表示



从P点到Q点的位移用向量

v =（3，-2）表示

v是从点P到点Q的向量。两个点的差是一个向量：

$$v = Q - P$$

$$v = Q - P$$

换个角度，可有说点Q是由点P平移向量v得到的；或者说v 偏移（offset）P得到Q

$$Q = P + v$$

可以把向量表示成它所有分量的列表，一个n维向量就是一个n元组：

$$w = (w_1, w_2, \ldots w_n) \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

（2）向量基本运算

向量允许两个基本操作：

向量**相加**　　　标量（实数）的**数乘**

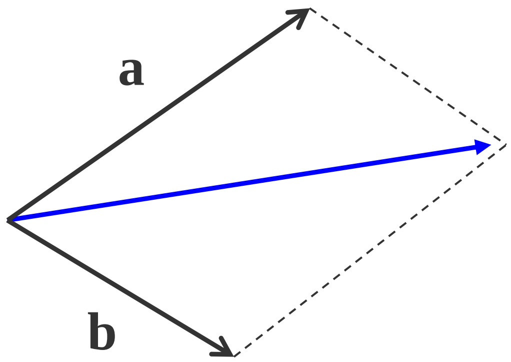
如果 a 和 b 是两个向量，s是一个标量，

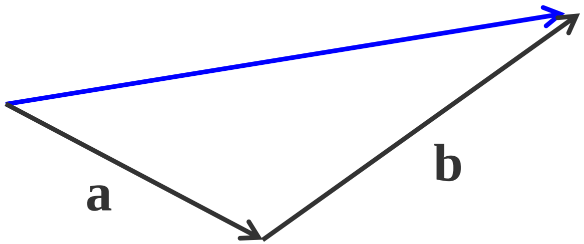
a+b 和 sa 都是有意义的

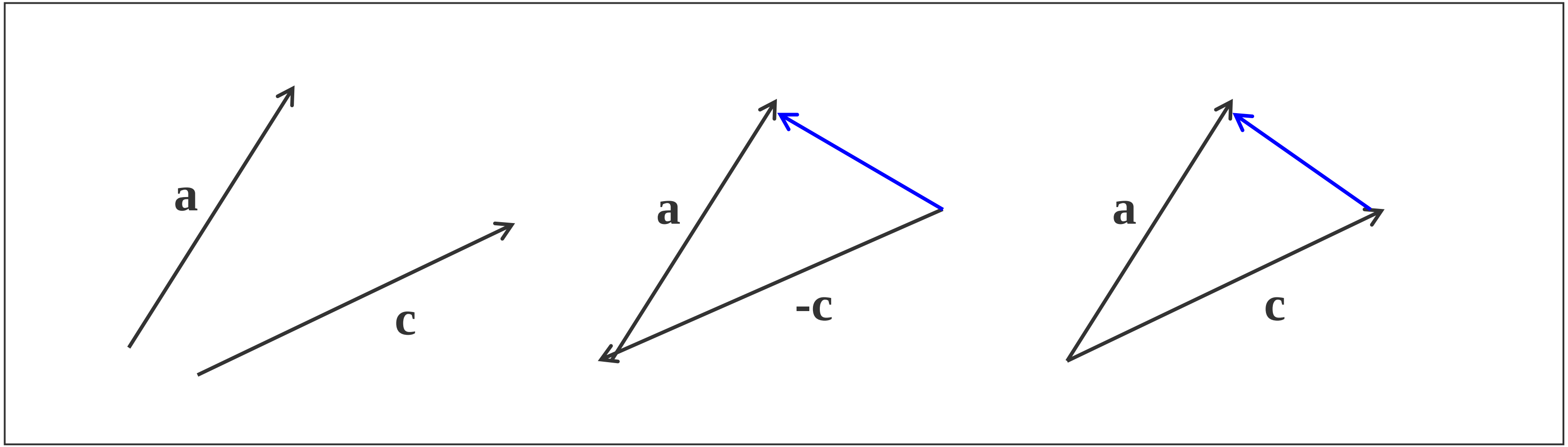
$$a = (2,6) \qquad b = (3,1)$$

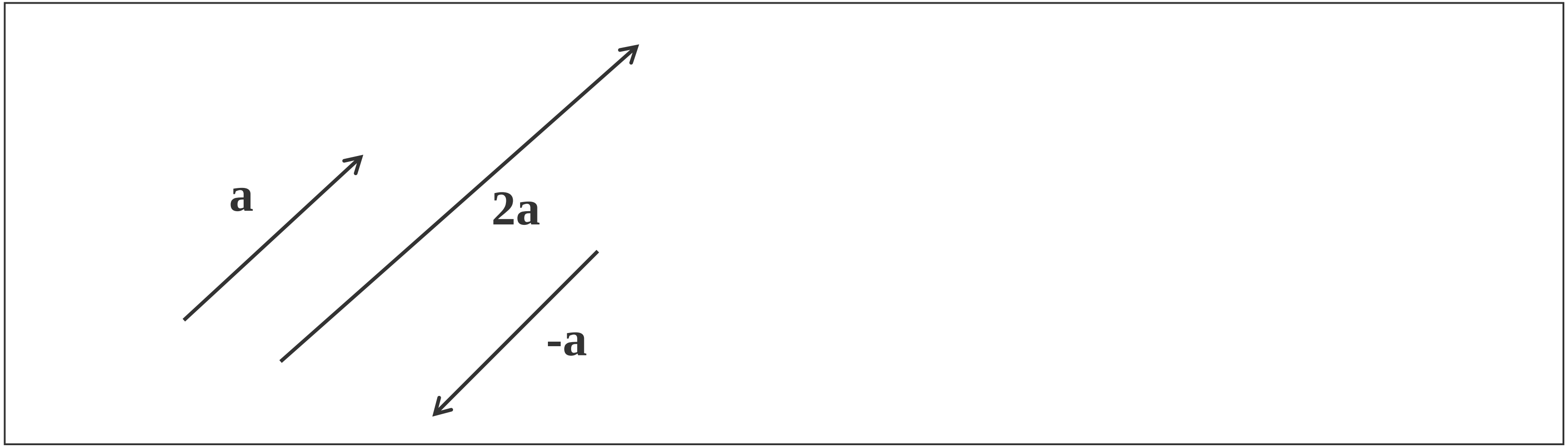
$$a + b = (5,7) \qquad 2a = (4,12)$$

向量的加（减）法可以采用“平行四边形法则”






a
c
a
-c
a
c


a
2a
-a

（3）向量线性组合

掌握了向量的加法和数乘，就可以定义任意多个向量的线性组合

m个向量$v_1, v_2, \ldots, v_m$的线性组合具有如下形式的向量：

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

$$2(3,-1) + 6(-1,2)$$

$$(0,10)$$

有两种特殊的线性组合在计算机图形学中很重要：

仿射组合　　凸组合

① 仿射组合

如果线性组合的系数$a_1, a_2, \ldots, a_m$的和等于1，那么它就是仿射组合

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 1$$

② 向量的凸组合

凸组合在数学中具有重要的位置，在图形学中也有很多应用。凸组合是对仿射组合加以更多的限制得来的

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 1$$

$$i = 1,2\ldots,m \qquad a_i \geq 0$$

3、向量的点积和叉积

有两个功能强大的工具一直推动着向量的应用：

点积　叉积

点积得到一个标量，叉积产生一个新的向量

（1）向量的点积

$$a = (a_1, a_2) \qquad b = (b_1, b_2)$$

$$a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

也就是说，计算点积时，只需将两个向量相应的分量相乘，然后将结果相加即可

$$d = v \bullet w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

点积最重要的应用就是计算两个向量的夹角，或者两条直线的夹角

$$b \bullet c = |b||c|\cos\theta$$

其中 θ是b和c之间的夹角

$$\cos\theta = \frac{b \bullet c}{|b||c|} = \hat{b} \bullet \hat{c}$$

由于两个向量的点积和它们之间夹角的余弦成正比，可以得出以下关于两个非零向量夹角与点积的关系：

$$b \bullet c > 0 \qquad \theta < 90^0$$

$$b \bullet c = 0 \qquad \theta = 90^0$$

$$b \bullet c < 0 \qquad \theta > 90^0$$

余弦定理和新闻的分类

谷歌、百度的新闻是自动分类和整理的。所谓新闻的分类无非是要把相似的新闻放到一类中

如何设计一个算法来算出任意两篇新闻的相似性？

用一个向量来描述一篇新闻

当夹角的余弦接近于1时，两条新闻相似，从而可以归成一类；夹角的余弦越小，两条新闻越不相关

（2）向量的叉积

两个向量的叉积是另一个三维向量。叉积只对三维向量有意义。它有许多有用的属性，但最常用的一个是它与原来的两个向量都正交。

$$a = (a_x, a_y, a_z) \qquad b = (b_x, b_y, b_z)$$

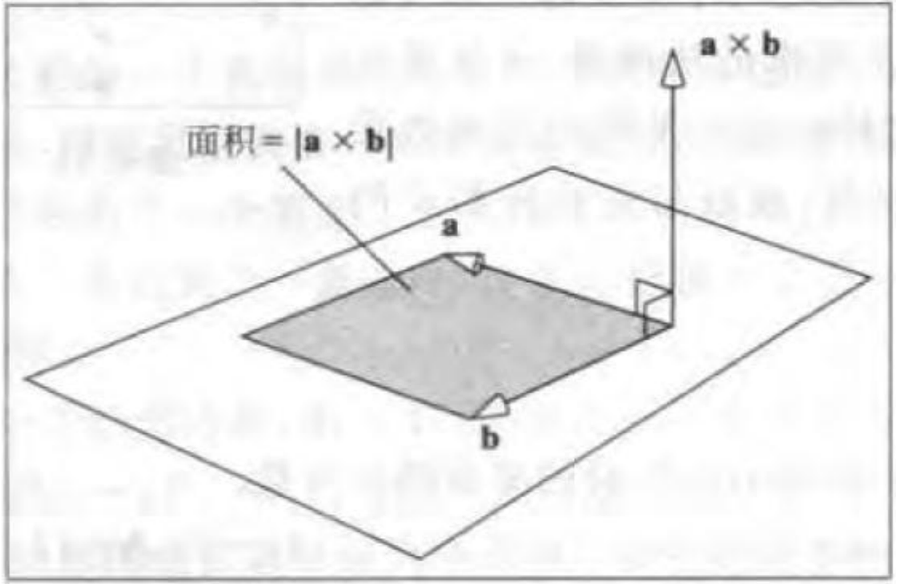
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

两个向量的叉积a×b是另一个向量，但是这个向量与原来的两个向量在几何上有什么关系，为什么对它感兴趣呢？

① a×b和a、b两个向量都正交

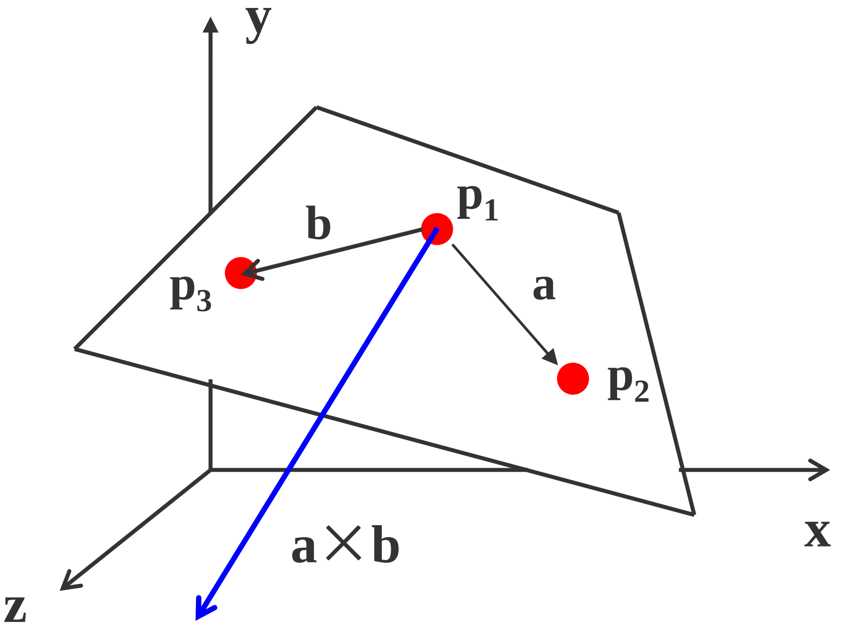
② a×b的长度等于由a和b决定的平行四边形面积

$$a \times b = |a||b|\sin(\theta)$$



利用叉积求平面的法向量

法向量是空间解析几何的一个概念，垂直于平面的直线所表示的向量为该平面的法向量



将向量分析应用到几何场景处理中是值得研究的内容

把一个场景中众多向量的各种属性搜集起来，并将它们与在图形学中遇到的实际几何问题相结合，寻找出一个解决方案，将是非常有用的