8、连续性

当许多参数曲线段首尾相连构成一条曲线时，如何保证各曲线段在连接处具有合乎要求的连续性是一个重要问题。假定参数曲线段p_i以参数形式进行描述：

$$p_i = p_i(t) \qquad t \in [t_{i0}, t_{i1}]$$

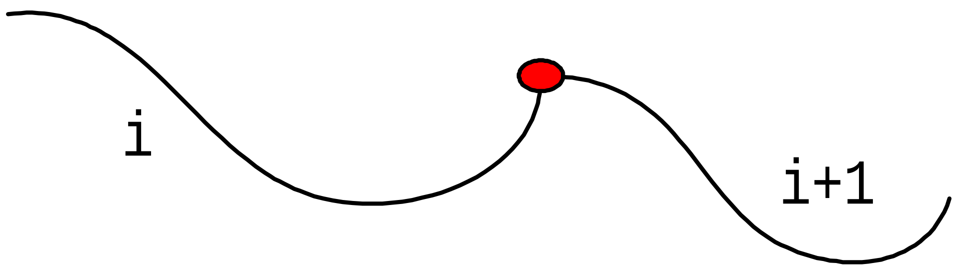
这里讨论参数曲线两种意义上的连续性：即参数连续性和几何连续性

（1）参数连续性

0阶参数连续性：

记作C^0连续性，是指曲线的几何位置连接，即第一个曲线段在t_{i1}处的x,y,z值与第二个曲线段在$t_{(i+1)0}$处的x,y,z值相等：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$



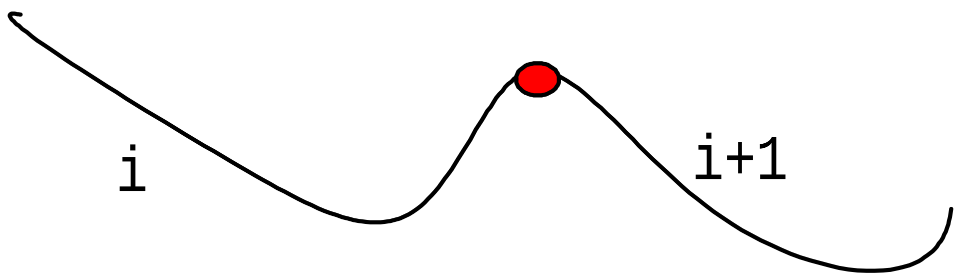
1阶参数连续性：

记作C^1连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数（切线）：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

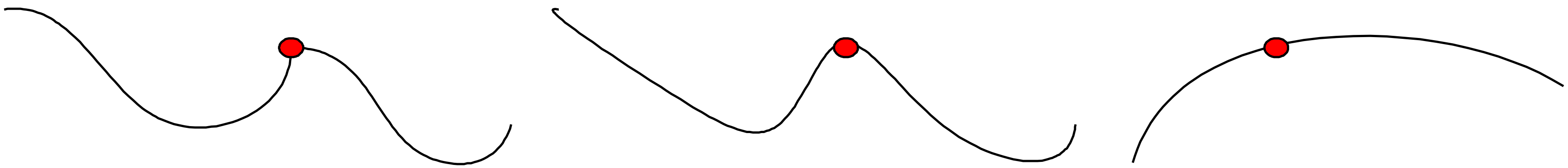
$$\text{且} \quad p_i'(t_{i1}) = p_{(i+1)}'(t_{(i+1)0})$$

一阶连续性对数字化绘画及一些设计应用已经足够



2阶参数连续性：

记作C^2连续性，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。类似地，还可定义高阶参数连续性



(a)0阶连续性　　(b)1阶连续性　　(c)2阶连续性

对于C^2连续性，交点处的切向量变化率相等，即切线从一个曲线段平滑地变化到另一个曲线段

二阶连续性对电影中的动画途径和很多精密CAD需求有用

经典的参数连续性在图形学里是不适合的，因为太苛刻，所以引进了几何连续性的概念

汽车曲面的设计美观要求很高，但有时候车身的一条曲线并不是参数连连续的，但人眼看上去已经是很光滑的了，因此需要一种更弱的连续性

$$\Phi(t)=\begin{cases}V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}t, & 0\le t\le 1\\ V_0+\dfrac{V_1-V_0}{3}+(t-1)\dfrac{2(V_1-V_0)}{3}, & 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$\Phi'(1^-)=\frac{1}{3}(V_1-V_0) \qquad \Phi'(1^+)=\frac{2}{3}(V_1-V_0)$$

$$\Phi'(1^-) = \frac{1}{3}(V_1 - V_0) \qquad \Phi'(1^+) = \frac{2}{3}(V_1 - V_0)$$

上面的函数实际上是直线方程。但可以发现，在t=1这一点，直线的左右导数不相等

在微积分里，如果一个函数的在一点处它的左导数和右导数都存在并且相等，就说明在这一点是连续的

（2）几何连续性

曲线段相连的另一个连续性条件是几何连续性。与参数连续性不同的是，它只需曲线段在相交处的参数导数成比例即可

0阶几何连续性：记作G^0连续性。与0阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

1阶几何连续性，记作G^1连续性。若要求在结合处达到G^1连续，就是说两条曲线在结合处在满足G0连续的条件下，并有公共的切矢

$$Q'(0) = aP'(1) \qquad (a > 0)$$

2阶几何连续性，记作G^2连续性。就是说两条曲线在结合处在满足G^1 连续的条件下，并有公共的曲率

一阶导数相等和有公共切向量这两个概念差别是什么？导数相等是大小方向都相等，而公共切矢意味着方向相同但大小不等

所谓参数连续意味着导数相等，导数相等意味着两个切向量不但方向相等而且长度也相等

如果是几何连续的话，只是要求切向量一样，方向一样，长度可以不同。条件减弱了