曲线曲面基本理论

计算机图形学三大块内容：光栅图形显示、几何造型技术、真实感图形显示。光栅图形学是图形学的基础，有大量的思想和算法

几何造型技术是一项研究在计算机中，如何表达物体模型形状的技术

描述物体的三维模型有三种:

线框模型、曲面模型和实体模型

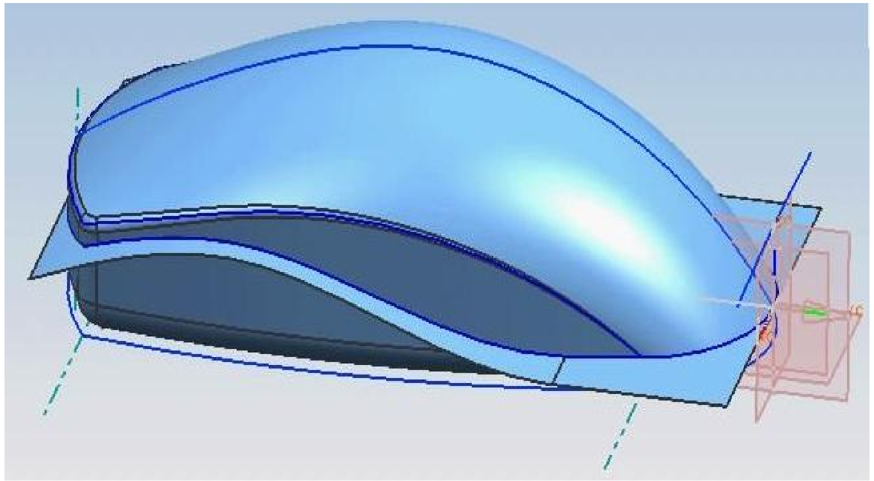
线框模型用顶点和棱边来表示物体

曲面模型只描述物体的表面和表面的连接关系，不描述物体内部的点的属性

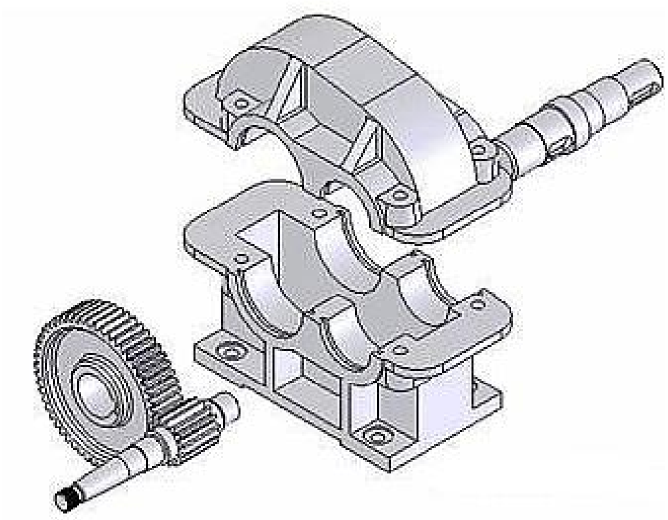
实体模型不但有物体的外观而且也有物体内点的描述

一、几何造型的历史

曲面造型：60年代，法国雷诺汽车公司的Pierre Bézier研发了汽车外形设计的UNISURF系统



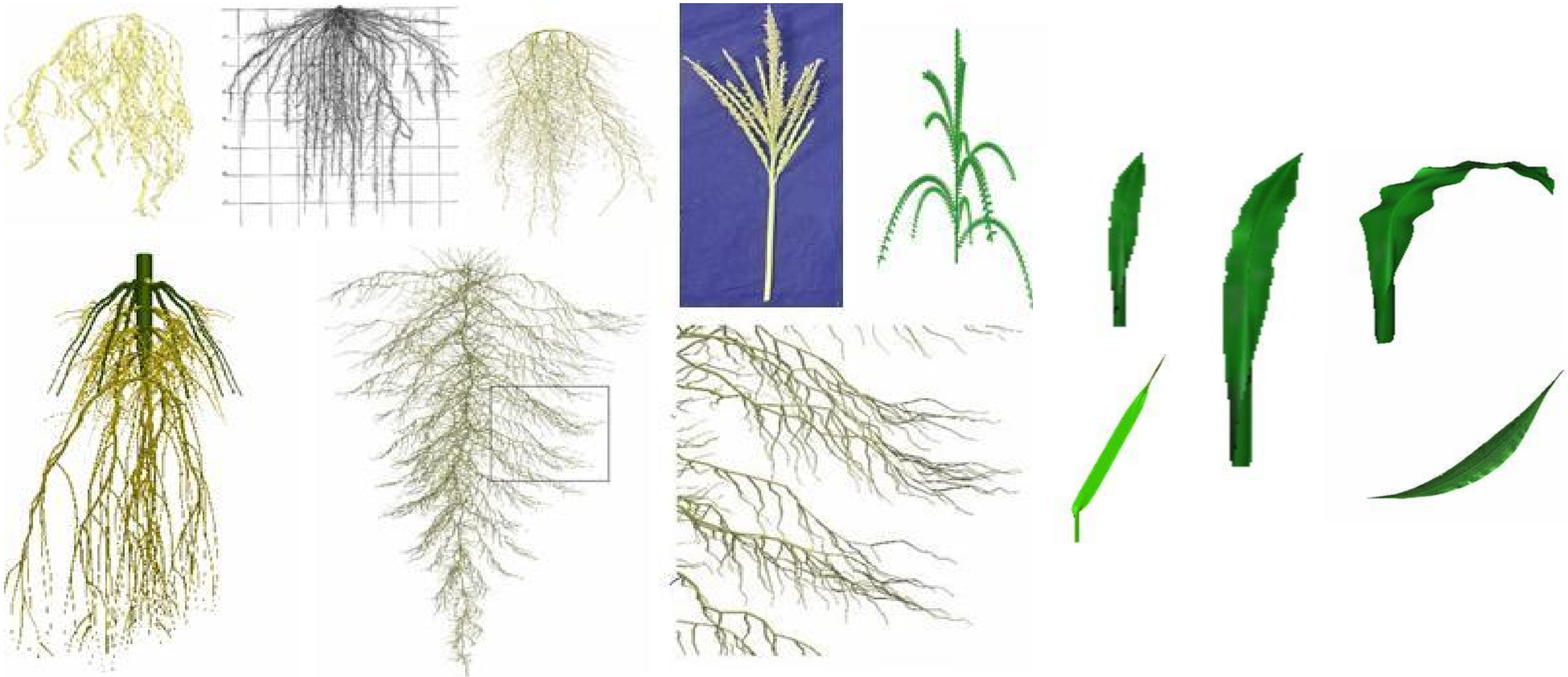
实体造型：1973英国剑桥大学CAD小组的Build系统、美国罗彻斯特大学的PADL-1系统等



- In 1962, Pierre Bézier, an engineer of French Renault Car company, propose a new kind of curve representation, and finally developed a system UNISURF for car surface design in 1972.

- Solid Modeling（实体造型）:
  - In1973, Ian Braid of Cambridge University developed a solid modeling system for designing engineering parts.
  - Ian Braid presented in his dissertation "Designing with volumes", this work being demonstrated with the BUILD-1 system.


Super-7



二、曲线曲面基础

1、显示、隐式和参数表示

曲线和曲面的表示方程有参数表示和非参数表示之分，非参数表示又分为显式表示和隐式表示。

对于一个平面曲线，显式表示一般形式是：$y = f(x)$

$$y = f(x)$$

在此方程中，一个x值与一个y值对应，所以显式方程不能表示封闭或多值曲线

如果一个平面曲线方程，表示成 f（x，y）= 0 的形式，称之为隐式表示。隐式表示的优点是易于判断一个点是否在曲线上

2、显式或隐式表示存在的问题

（1）与坐标轴相关

（2）用隐函数表示不直观，作图不方便

（3）用显函数表示存在多值性

（4）会出现斜率为无穷大的情形

3、参数方程

为了克服以上问题，曲线曲面方程通常表示成参数的形式，假定用t表示参数，平面曲线上任一点P可表示为：

$$p(t) = [x(t), \quad y(t)]$$

空间曲线上任一三维点P可表示为：

$$p(t) = [x(t), \; y(t), \; z(t)]$$

它等价于笛卡儿分量表示：

$$p(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

这样，给定一个t值，就得到曲线上一点的坐标

假设曲线段对应的参数区间为[a,b]，即a≤t≤b。为方便期间，可以将区间[a,b]规范化成[0,1]，参数变换为：

$$t' = \frac{t - a}{b - a}$$

参数曲线一般可写成：

$$p = p(t) \qquad t \in [0,1]$$

$$p = p(t) \qquad t \in [0,1]$$

该形式把曲线上表示一个点的位置矢量的各个分量合写在一起当成一个整体，考虑的是曲线上点之间的相对位置关系而不是它们与所取坐标系之间的相对位置关系

类似地，可把曲面表示成为双参数u和v的矢量函数

$$p(u,v) = p(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

最简单的参数曲线是直线段，端点为P_1、P_2的直线段参数方程可表示为：

$$p(t) = p_1 + (p_2 - p_1)t \qquad t \in [0,1]$$

4、参数方程的优势

在曲线、曲面的表示上，参数方程比显式、隐式方程有更多的优越性，主要表现在：

(1) 可以满足几何不变性的要求

即指形状的数学表示及其所表达的形状不随所取坐标系而改变的性质

（2）有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

只有四个系数控制曲线的形状。而二维三次曲线的参数表达式为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\ b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \end{bmatrix} \qquad t \in (0,1)$$

有8个系数可用来控制此曲线的形状

（3）直接对参数方程进行几何变换

对非参数方程表示的曲线、曲面进行变换，必须对曲线、曲面上的每个型值点进行几何变换；而对参数表示的曲线、曲面可对其参数方程直接进行几何变换

（4）便于处理斜率为无穷大的情形，不会因此而中断计算

（5）界定曲线、曲面的范围十分简单

具有规格化的参数变量$t \in [0,1]$

（6）易于用向量（矢量）和矩阵运算，简化计算