9、参数化

过三点P_0、P_1和P_2构造参数表示的插值多项式是唯一的还是有多个呢？（设置一个课间提问）

插值多项式可以有无数条，这是因为对应地参数t在[0，1]中可以有无数种取法

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \qquad t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 1$$

参数方程：
$$x(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$
$$y(t) = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$$

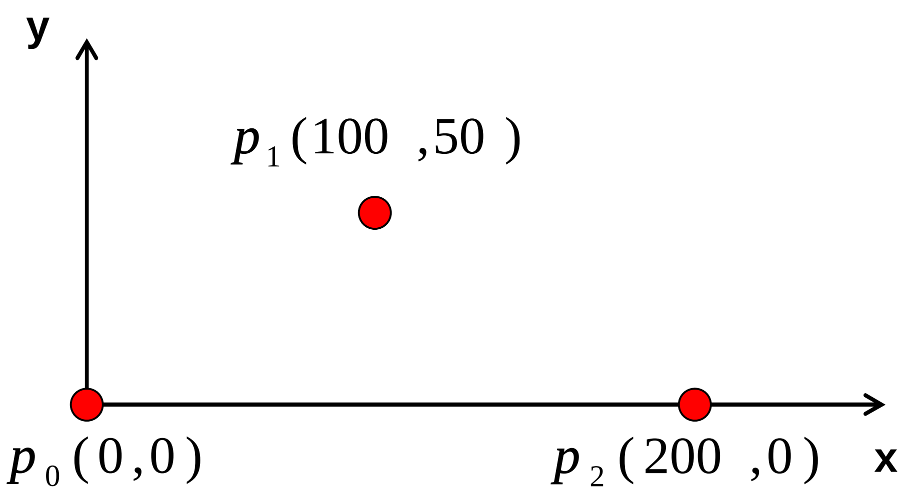
插值问题实际上就是解方程组的问题。但如果参数取的不一样的话，结果是不一样的

每个参数值称为节点（knot）。对于一条插值曲线，p_0、p_1、p_2这些点称为型值点

对于一条插值曲线，型值点p_0，p_1，… ，p_n 与其参数域 $t\in[t0, t1]$ 内的节点之间有一种对应关系。对于一组有序的型值点，所确定一种参数分割，称之这组型值点的参数化

现在给定3个点p_0、p_1、p_2，坐标是（0，0）、（100，50）、（200，0），求一条2次的多项式曲线来插值这三个点

假设第一个点参数t = 0，
第二个点参数取t = 1/2，
第三个点的参数取t = 1。
如何列这个方程?



$$t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{1}{2} \quad t_3 = 1$$

$$x(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

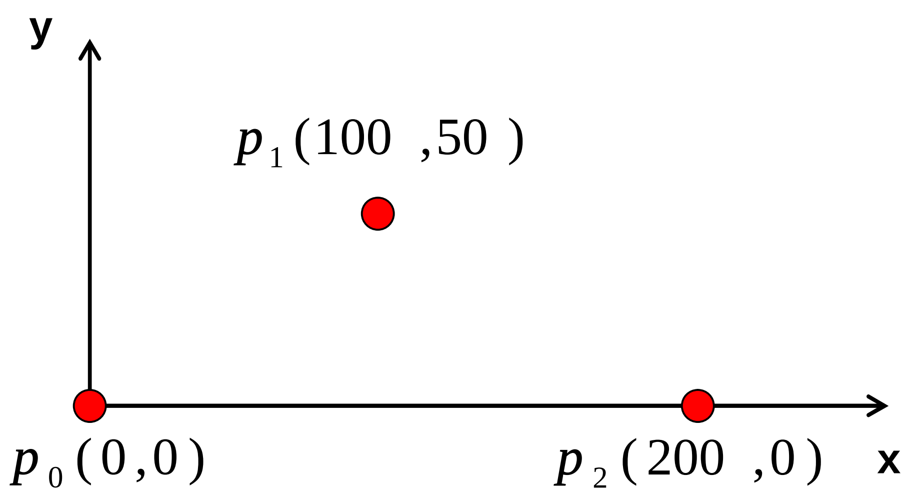
$$y(t) = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$$

$$0 = x(0) = a_3$$

$$0 = y(0) = b_3$$

$$100 = x(\frac{1}{2}) = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} + a_3$$

$$50 = y(\frac{1}{2}) = \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + b_3$$



$$200 = x(1) = a_1 + a_2 + a_3$$

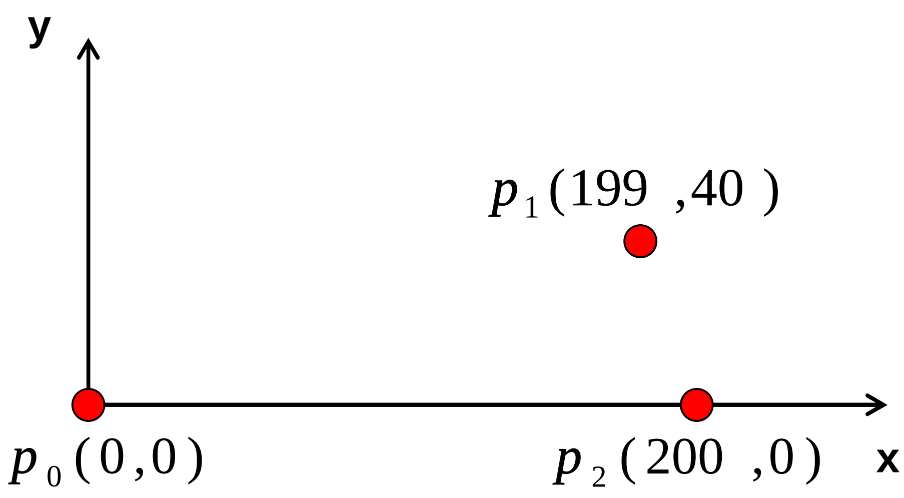
$$0 = y(1) = b_1 + b_2 + b_3$$

6个方程6个未知数，插值问题的本质是方程的个数和未知数的个数是一致的

现在的问题是凭什么取：t=0，t=1/2，t=1？

为什么t不可以取别的值,如t=0，t=1/3，t=1？哪种取法更科学？

这样一条曲线参数t应该如何取比较好？如果再取成t=0，t=1/2，t=1好不好？



参数化的本质就是找一组恰当的参数t来匹配这一组不同的型值点。给定一组不同的型值点，就要给出不同的参数化即不同的t值，这样才使得这条曲线美观、合理

参数化常用方法:

（1）均匀参数化

节点在参数轴上呈等距分布。如0、1/10、2/10。。。

（2）累加弦长参数化（根据长度的比例关系来确定t）

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_i = t_{i-1} + \left|\Delta P_{i-1}\right|, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

这种参数法如实反映了型值点按弦长的分布情况，能够克服型值点按弦长分布不均匀的情况下采用均匀参数化所出现的问题

3、向心参数化法

$$t_0 = 0$$

$$t_i = t_{i-1} + \left|\Delta P_{i-1}\right|^{1/2}, i = 1,2,\cdots,n$$

向心参数化法假设在一段曲线弧上的向心力与曲线切矢从该弧段始端至末端的转角成正比，加上一些简化假设，得到向心参数化法。此法尤其适用于非均匀型值点分布。

10、参数曲线的代数和几何形式

以三次参数曲线为例，讨论参数曲线的代数和几何形式

(1)代数形式：

$$\begin{cases} x(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x} \\ y(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y} \\ z(t) = a_{3z}t^3 + a_{2z}t^2 + a_{1z}t + a_{0z} \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

上述代数式写成矢量式是：

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \qquad t \in [0,1]$$

注意：a_3，a_2，a_1，a_0是参数曲线的系数，但记住不是常数而是向量。a_3对应刚才的a_{3x}、a_{3y}、a_{3z}。改变系数曲线如何变化是不清楚的，这是代数形式的缺点

几何形式:

几何形式是利用一条曲线端点的几何性质来刻画一条曲线。所谓端点的几何性质，就是指曲线的端点位置、切向量、各阶导数等端点的信息。

对三次参数曲线，若用其端点位矢P(0)、P(1)和切矢P’(0)、P’(1)描述。需要这四个量来刻画三次参数曲线

将P(0)、P(1)、P'(0)和 P'(1) 简记为：

$$P_0 、 P_1 、 p_0' 、 p_1'$$

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \qquad t \in [0,1]$$

$$P_0 = a_0$$

$$P_1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

$$P_0' = a_1$$

$$P_1' = 3a_3 + 2a_2 + a_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = P_0 \\ a_1 = P_0' \\ a_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P_0' - P_1' \\ a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1' \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = P_0 \\ a_1 = P_0' \\ a_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P'_0 - P_1' \\ a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1' \end{cases}$$

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)p_0 + (-2t^3 + 3t^2)p_1 + (t^3 - 2t^2 - t)p_0' + (t^3 - t^2)p_1'$$

得到:

$$P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)p_0 + (-2t^3 + 3t^2)p_1 + (t^3 - 2t^2 - t)p_0' + (t^3 - t^2)p_1'$$

令:

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad G_1(t) = t^3 - t^2$$

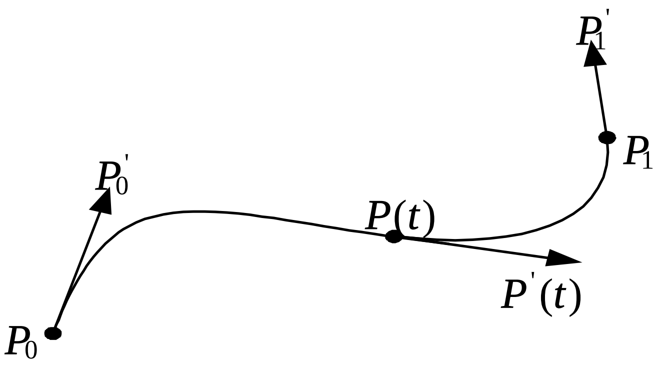
$$P(t) = F_0 P_0 + F_1 P_1 + G_0 P_0' + G_1 P_1' \qquad t \in [0,1]$$

$$P(t) = F_0 P_0 + F_1 P_1 + G_0 P_0' + G_1 P_1' \qquad t \in [0,1]$$

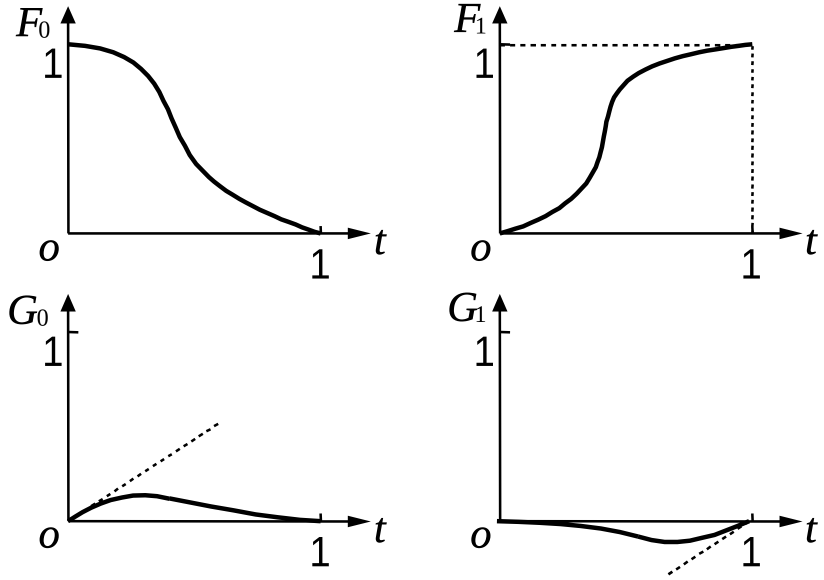
上式是三次Hermite曲线（三次哈密特曲线）的几何形式，几何系数是：

$$P_0 、 P_1 、 p_0' 、 p_1'$$

F0、F1、G0、G1称为调和函数（或混合函数）



曲线端点位矢和切矢



三次调和函数