

# 二维图形变换

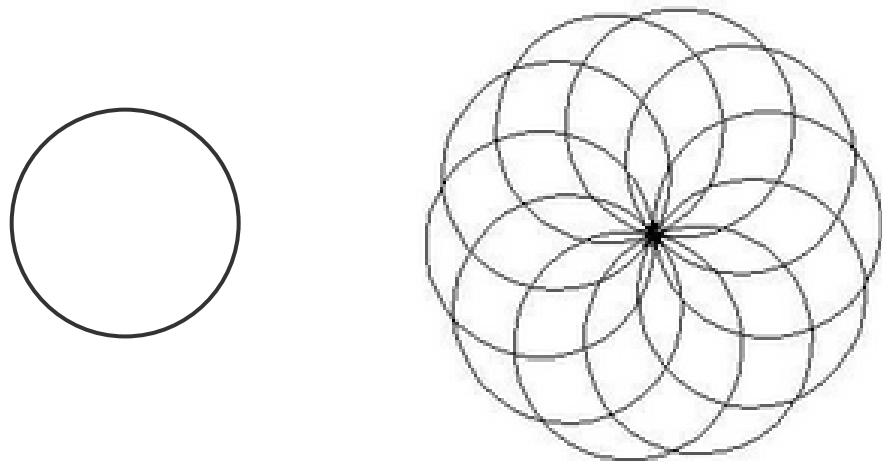
# 一、图形变换

## 1、图形变换的用途

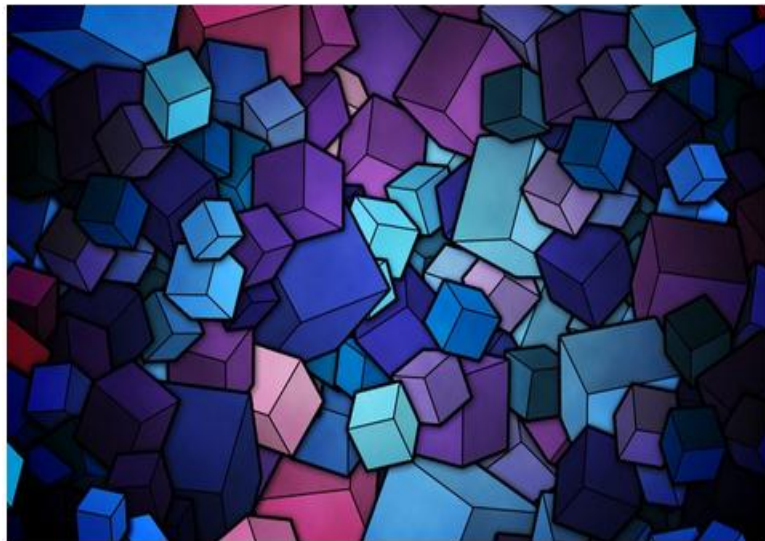
图形变换和观察是计算机图形学的基础内容之一，也是图形显示过程中不可缺少的一个环节

一个简单的图形，通过各种变换（如：比例、旋转、镜象、错切、平移等）可以形成一个丰富多彩的图形或图案

(1) 由一个基本的图案，经过变换组合成另外一个复杂图形



## (2) 用很少的物体组成一个场景

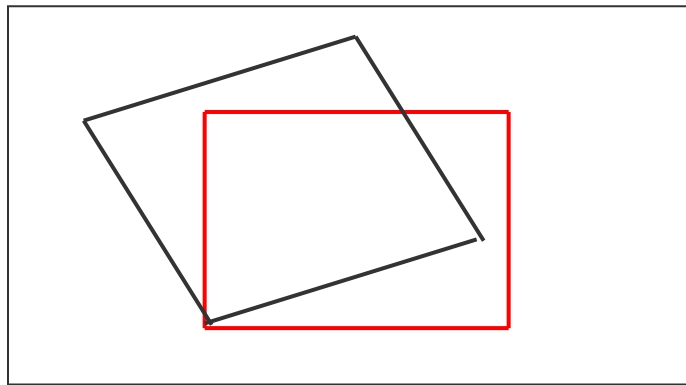
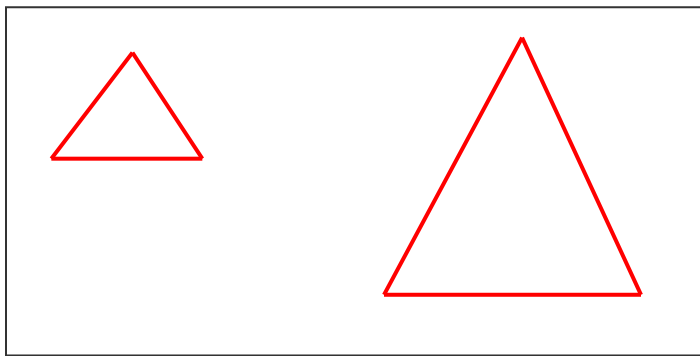


### (3) 可以通过图形变换组合得到动画效果

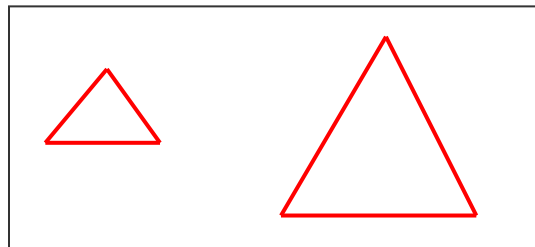
在计算机动画中，经常有几个物体之间的相对运动，可以通过平移和旋转这些物体的局部坐标系得到这种动画效果

## 2、图形变换的基本原理

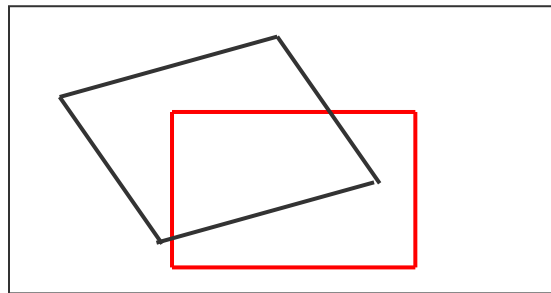
图形是根据什么样的原理来实现各种变换的呢？



(1) 图形变化了，但原图形的  
连边规则没有改变



(2) 图形的变化，是因为顶点  
位置的改变决定的



变换图形就是要变换图形的几何关系，即改变顶点的坐标；同时，保持图形的原拓扑关系不变

仿射变换（Affine Transformation或 Affine Map）是一种二维坐标到二维坐标之间的线性变换

（1）“平直性”。即：直线经过变换之后依然是直线

（2）“平行性”。即：平行线依然是平行线，且直线上点的位置顺序不变）



$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

称为**二维仿射变换**（ affine transformation ），其中坐标 $x'$  和 $y'$  都是原始坐标 $x$ 和 $y$ 的线性函数

参数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $m$ 和 $n$ 是函数的系数

在几何中把向量看成从一个点到另一个点的位移。向量算法提供了一种统一的方法来对几何思想进行代数的表示

## 二、齐次坐标

在二维平面内，我们是用一对坐标值  $(x, y)$  来表示一个点在平面内的确切位置，或着说是用一个向量  $(x, y)$  来标定一个点的位置

假如变换前的点坐标为  $(x, y)$ ，变换后的点坐标为  $(x^*, y^*)$ ，这个变换过程可以写成如下矩阵形式：

$$[x^*, y^*] = [x, y] \bullet M$$

$$\begin{cases} x^* = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y^* = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

$$[x^*, y^*] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

上两式是完全等价的。对于向量  $(x, y, 1)$ ，可以在几何意义上理解为是在第三维为常数的平面上的一个二维向量。

这种用三维向量表示二维向量，或者一般而言，用一个 $n+1$ 维的向量表示一个 $n$ 维向量的方法称为齐次坐标表示法

$n$ 维向量的变换是在 $n+1$ 维的空间进行的，变换后的 $n$ 维结果是被反投回到感兴趣的特定的维空间内而得到的。

如 $n$ 维向量  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  表示为  $(hp_1, hp_2, \dots, hp_n, h)$  ,  
其中 $h$ 称为哑坐标。

普通坐标与齐次坐标的关系为“一对多”：

普通坐标  $\times h \rightarrow$  齐次坐标

齐次坐标  $\div h \rightarrow$  普通坐标

当 $h = 1$ 时产生的齐次坐标称为“规格化坐标”，因为前 $n$ 个坐标就是普通坐标系下的 $n$ 维坐标

## 为什么要采用齐次坐标？

在笛卡儿坐标系内，向量  $(x, y)$  是位于  $z=0$  的平面上的点；而向量  $(x, y, 1)$  是位于  $z=1$  的等高平面上的点

对于图形来说，没有实质性的差别，但是却给后面矩阵运算提供了可行性和方便性

采用了齐次坐标表示法，就可以统一地把二维线形变换表示如下式所示的规格化形式：

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

对于一个图形，可以用顶点表来描述图形的几何关系，用连边表来描述图形的拓扑关系。所以对图形的变换，最后是只要变换图形的顶点表