Bezier曲线与曲面

一、Bezier曲线的背景和定义

1、Bezier曲线的背景

给定n+1个数据点，$p_0(x_0,y_0),\cdots p_n(x_n,y_n)$，生成一条曲线，使得该曲线与这些点所描述的形状相符

如果要求曲线通过所有的数据点，则属于插值问题；如果只要求曲线逼近这些数据点，则属于逼近问题

逼近在计算机图形学中主要用来设计美观的或符合某些美学标准的曲线。为了解决这个问题，有必要找到一种用小的部分即曲线段构建曲线的方法，来满足设计标准

当用曲线段拟合曲线f(x)时，可以把曲线表示为许多小线段$\phi_i(x)$之和，其中$\phi_i(x)$称为基（混合）函数。

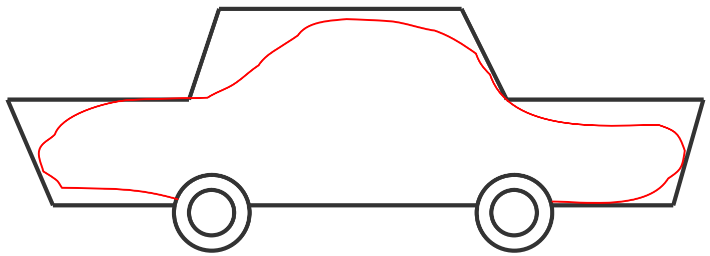
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x)$$

这些基（混合）函数是要用于计算和显示的。因此，经常选择多项式作为基（混合）函数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

1962年，贝塞尔（P.E.Bezier）构造了一种以逼近为基础的参数曲线和曲面的设计方法，并用这种方法完成了一种称为UNISURF 的曲线和曲面设计系统。

想法基点是在进行汽车外形设计时，先用折线段勾画出汽车的外形大致轮廓，然后用光滑的参数曲线去逼近这个折线多边形



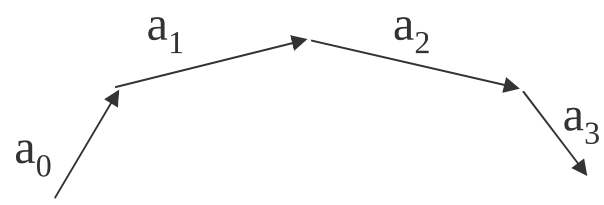
这个折线多边形被称为特征多边形。逼近该特征多边形的曲线被称为Bezier曲线

Bezier方法将函数逼近同几何表示结合起来，使得设计师在计算机上就象使用作图工具一样得心应手

贝塞尔曲线广泛地应用于很多图形图像软件中，例如Flash、Illstrator、CoralDRAW 和 Photoshop 等等

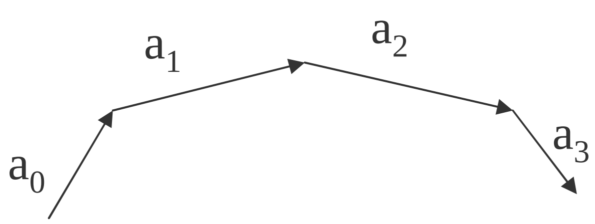
贝塞尔把参数n次曲线表示为:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_{i,n}(t) \qquad 0 \le t \le 1$$



其中系数矢量a_i(i=0,1,⋯,n)顺序首尾相接

从a_0的末端到a_n的末端所形成的折线称为控制多边形或贝塞尔多边形



$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_{i,n}(t) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$f_{i,n}(t) = \begin{cases} 1, \quad i = 0, \\ \dfrac{(-t)^i}{(i-1)!} \dfrac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \left(\dfrac{(1-t)^{n-1} - 1}{t} \right) \end{cases}$$

称为贝塞尔基函数

航空学报
1980年第一期

Bézier 基函数的导出

北京航空学院　施法中　韩道康

摘　要

Bézier 教授在《数值控制》一书中，对 Bézier 曲线曲面作了优美而详尽的说明。Bézier 基函数的表达式表于本文（2）和（3）。

Bézier 曲线有着很多重要的和有趣的几何性质。这些性质是 Bézier 基函数性质的直接推论。到目前为止还没有见到关于导出这些基函数的文献。

本文证明了从 Bézier 曲线的三条简单的、合理的几何要求出发，用两种不同的计算方法可以完全确定并导出这些基函数。

1972年，剑桥大学的博士生Forrest 在《Computer Aided Design》发表了他一生中最著名的论文。Forest证明了Bezier曲线的基函数可以简化成伯恩斯坦基函数!

一个连续函数 y=f（x），任给一个ξ＞0，总能找到一个多项式和这个函数足够逼近。伯恩斯坦有一套逼近的理论，逼近的形式是:

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \qquad (i = 0,1,\ldots.\ n)$$

C_n^i 从n个不同元素中，任取i(i≤n)个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出i个元素的一个组合

Forest证明了Bezier曲线的基函数可以简化成伯恩斯坦基函数

2、Bezier曲线的定义

针对Bezier曲线，给定空间n+1个点的位置矢量P_i（i=0，1，2，…，n），则Bezier曲线段的参数方程表示如下：

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]$$

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

其中p_i（x_i,y_i,z_i），i=0,1,2…n 是控制多边形的n+1个顶点，即构成该曲线的特征多边形；$B_{i,n}$（t）是Bernstein基函数，有如下形式：

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=C_n^i t^i(1-t)^{n-i} \qquad (i=0,1,\ldots n)$$

二项式定理，又称牛顿二项式定理。该定理给出两个数之和的整数次幂的恒等式

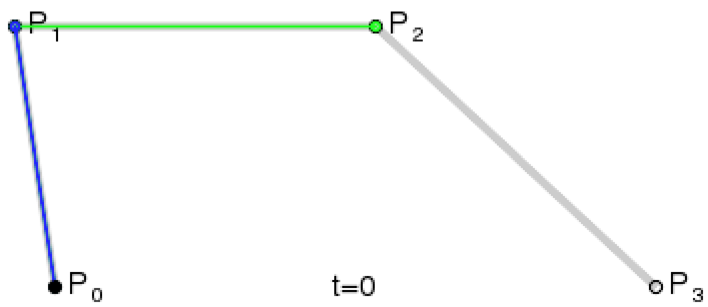
$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}\qquad(i=0,1,\ldots.n)$$

$\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)$ 恰好是二项式 $[t+(1-t)]^n$ 的展开式！

注意：当i=0，t=0时，t^i=1，i!=1。即： 0^0=1，0!=1

P_i代表空间的很多点，t在0到1之间，把t代进去可以算出一个数--即平面或空间一个点

随着t值的变化，点也在变化。当t从0变到1时，就得到空间的一个图形，这个图形就是bezier曲线



（1）一次Bezier曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

当n=1时，有两个控制点p_0和p_1，Bezier多项式是一次多项式：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{1}P_iB_{i,1}(t)=P_0B_{0,1}(t)+P_1B_{1,1}(t)$$

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

$$B_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$B_{0,1}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{1!}{0!(1-0)!} t^0 (1-t)^{1-0}$$

$$= (1-t)$$

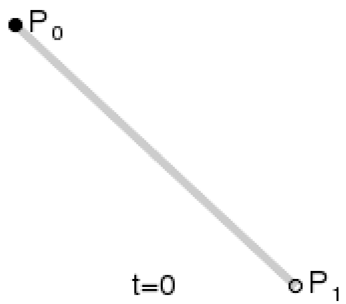
$$B_{1,1}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{1!}{1!(1-1)!} t^1 (1-1)^{1-1}$$

$$= t$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{1} P_i B_{i,1}(t) = P_0 B_{0,1}(t) + P_1 B_{1,1}(t)$$

$$= (1 - t)P_0 + tP_1$$

这恰好是连接起点p_0和终点p_1的直线段！



（2）二次Bezier曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

当n=2时，有3个控制点p_0、p_1和p_2，Bezier多项式是二次多项式：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{2} P_i B_{i,2}(t)=P_0 B_{0,2}(t)+P_1 B_{1,2}(t)+P_2 B_{2,2}(t)$$

$$B_{0,2}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{2!}{0!(2-0)!}t^0(1-t)^{2-0}$$

$$=(1-t)^2$$

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2$$

$$B_{1,2}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{2!}{1!(2-1)!} t^1 (1-t)^{2-1}$$

$$= 2t(1-t)$$

$$B_{2,2}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{2!}{2!(2-2)!} t^2 (1-t)^{2-2}$$

$$= t^2$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i B_{i,2}(t) = P_0 B_{0,2}(t) + P_1 B_{1,2}(t) + P_2 B_{2,2}(t)$$

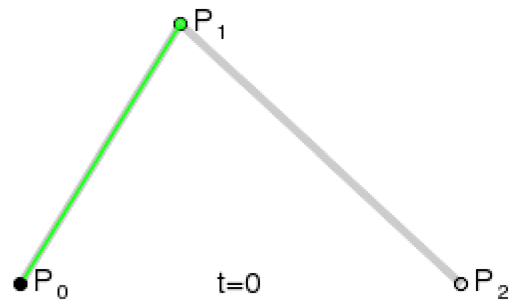
$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

$$p(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$= (P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0$$

二次Bezier曲线为抛物线，其矩阵形式为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$



（3）三次Bezier曲线

三次Bezier曲线由4个控制点生成，这时n=3，有4个控制点p_0、p_1、p_2和p_3，Bezier多项式是三次多项式：

$$p(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=P_0B_{0,3}(t)+P_1B_{1,3}(t)+P_2B_{2,3}(t)+P_3B_{3,3}(t)$$

$$B_{0,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{0!(3-0)!}t^0(1-t)^{3-0}=(1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}=\frac{3!}{1!(3-1)!}t^1(1-t)^{3-1}=3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i} (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{2!(3-2)!} t^{2} (1-t)^{3-2} = 3t^{2}(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^{i} (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{3!(3-3)!} t^{3} (1-t)^{3-3} = t^{3}$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t) = (1-t^{3}) P_0 + 3t(1-t)^{2} P_1 + 3t^{2}(1-t) P_2 + t^{3} P_3$$

其中

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

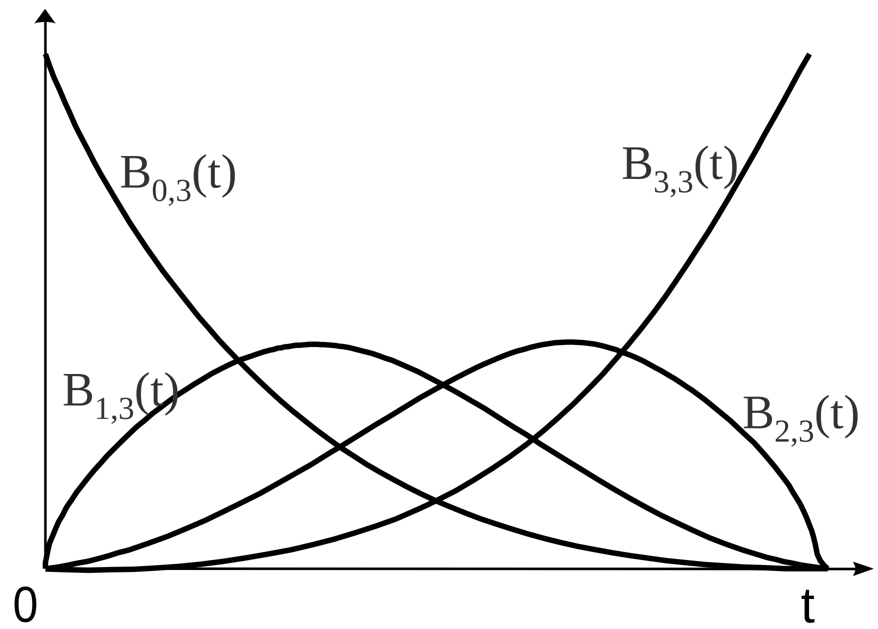
$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

为三次Bezier曲线的基函数。

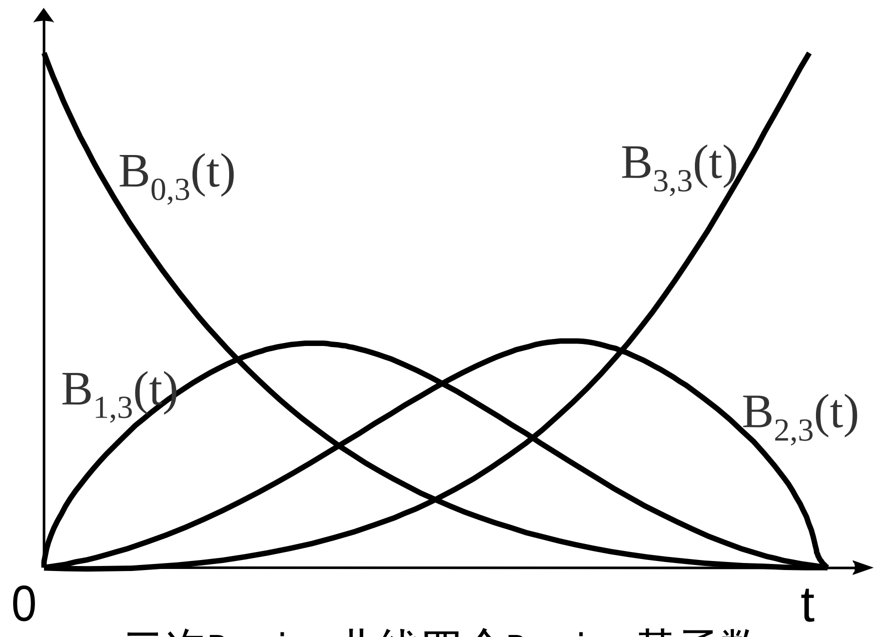
这四条曲线均是三次曲线，任何三次Bezier曲线都是这四条曲线的线形组合



三次Bezier曲线四个Bezier基函数

注意图中每个基函数在参数t的整个（0，1）的开区间范围内不为0

Bezier曲线不可能对曲线形状进行局部控制，如果改变任一控制点位置，整个曲线会受到影响



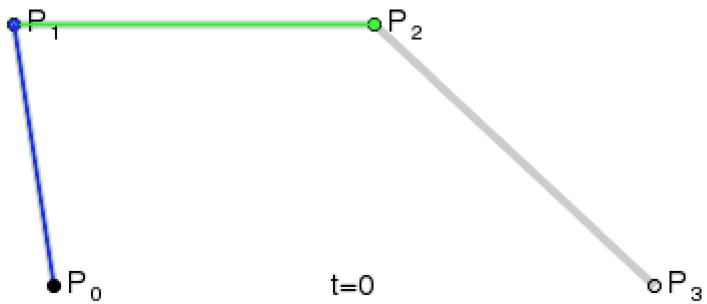
三次Bezier曲线四个Bezier基函数

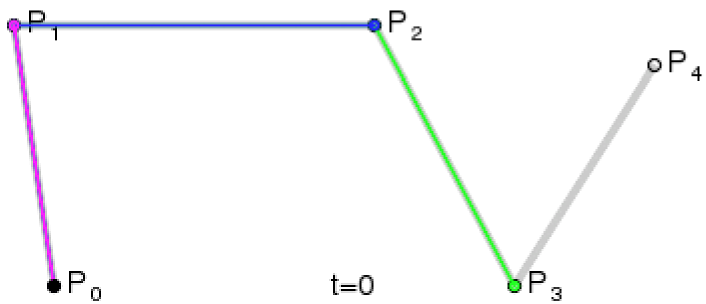
把Bezier三次曲线多项式写成矩阵形式：

$$p(t)=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \qquad t\in[0,1]$$

$$= T\cdot M_{be}\cdot G_{be}$$

其中，M_{be}是三次Bezier曲线系数矩阵，为常数；G_{be}是4个控制点位置矢量。


P1
P2
P0
t=0
P3


P1
P2
P4
P0
t=0
P3