信号分析

郑 英　教授
zyhidy@mail.hust.edu.cn
QQ: 436101176

华中科技大学人工智能与自动化学院

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

线性时不变系统的分析方法

第一步：建立数学模型(建立微分方程)

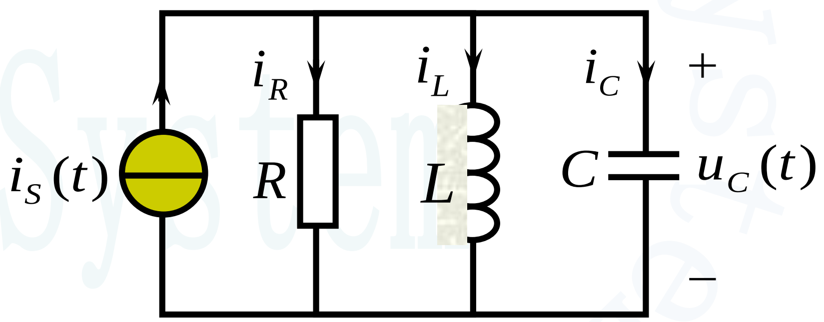
第二步：运用数学工具去处理

第三步：对所得的数学解给出物理解释，赋予物理意义。

系统模型的建立

- 电气系统

$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_C(t)$$



$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_C(\tau)d\tau \qquad i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

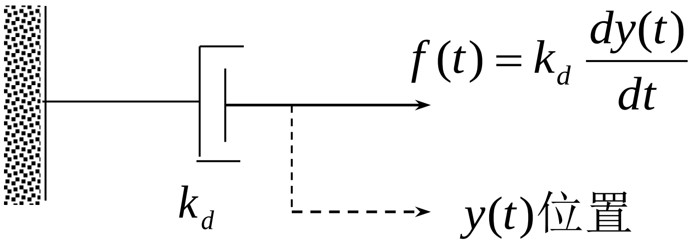
根据KCL有 $$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_S(t)$$

$$C\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}u_C(t) = \frac{di_S(t)}{dt}$$

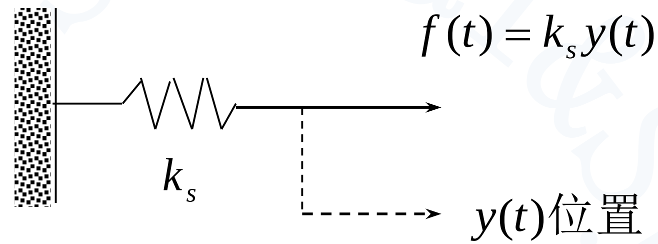
*由例题可以得出如下结论：

含有几个储能元件，就为几阶方程

- 机械系统

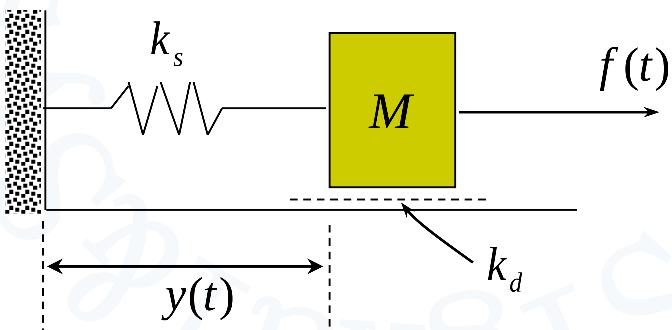


（a）阻尼器



（b）弹簧

运动物体的惯性力



合力 摩擦力 弹簧力

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}=f(t)-k_d\frac{dy(t)}{dt}-k_s y(t)$$

拉力

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+k_d\frac{dy(t)}{dt}+k_s y(t)=f(t)$$

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

n阶常系数微分方程的求解法

微分方程求解

- 时域分析法（经典法）
  - 全响应=
    齐次方程通解 + 非齐次方程特解
    （自由响应） （强迫响应）
  - 全响应=
    零输入响应 + 零状态响应
    （解齐次方程） （叠加积分法）
- 变换域法（第4章拉普拉斯变换法）

2.3 用时域经典法求解微分方程

描述LTI连续系统激励与响应关系的数学模型是n阶线性常系数微分方程。

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1r^{(1)}(t)+a_0r(t)$$
$$=b_me^{(m)}(t)+b_{m-1}e^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1e(t)$$

上式可缩写为： $\sum_{i=0}^{n}a_ir^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_je^{(j)}(t)$ $\quad a_n=1$

微分方程的特征方程为

$$p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0=(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)=0$$

λ_i为微分方程的特征根。

微分方程的经典解：r(t)(完全解) = r_h(t)(齐次解) + r_p(t)(特解）

全响应＝齐次解（自由响应）＋特解（强迫响应）

◆ 齐次解$r_h(t)$：齐次解是齐次微分方程（右边为零时）

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\dots+a_1r^{(1)}(t)+a_0r(t)=0$$ 的解

写出特征方程，求出特征根(自然频率或固有频率)。
根据特征根的特点，齐次解有不同的形式。

齐次解 $r_h(t)$的函数形式由上述微分方程的特征根确定。

$$r_h(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}$$

式中常数C_i由初始条件确定。

不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$r_h(t)$
单实根	$Ce^{\lambda t}$
m重实根	$C_{m-1}t^{m-1}e^{\lambda t}+C_{m-2}t^{m-2}e^{\lambda t}+\cdots+C_1t\ e^{\lambda t}+C_0e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1\cdot 2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}\left[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)\right]$

2.3 用时域经典法求解微分方程

微分方程的经典解：r(t)(完全解) = r_h(t)(齐次解) + r_p(t)(特解)

- 特解： $r_p(t)$
  - 根据输入信号的形式有对应特解的形式见下表2-3 ，用待定系数法确定系数。

特解的函数形式与激励函数的形式有关。

- 全解（全响应）：

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}+r_p(t)$$

用初始值确定积分常数。一般情况下，n 阶方程有n 个常数，可用n个初始值确定。

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励e(t)数形式无关，称为系统的固有响应或自由响应；
特解的函数形式由激励确定，称为强迫响应。

全响应＝齐次解（自由响应）＋特解（强迫响应）

特解$r_p(t)$

表2-3 与几种典型激励所对应的特解形式

激励函数$e(t)$	响应函数的特解$r_p(t)$	备注
E（常数）	A	A（待定常数）
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$	α不等于特征根
	$(A_1t+A_0)e^{\alpha t}$	α等于特征单根
	$(A_kt^k+A_{k-1}t^{k-1}+\ldots+A_1t+A_0)e^{\alpha t}$	α等于k重特征根
t^m	$A_mt^m+A_{m-1}t^{m-1}+\ldots+A_1t+A_0$	所有特征根均不等于 0
	$(A_mt^m+A_{m-1}t^{m-1}+\ldots+A_1t+A_0)t^k$	有 k 重等于 0 的特征根
$cos(\omega t)$或$sin(\omega t)$	$A_1cos(\omega t)+A_2sin(\omega t)$	所有特征根均不等于$\pm j\omega$
$t^me^{\alpha t}cos(\omega t)$ $t^me^{\alpha t}sin(\omega t)$	$(A_mt^m+A_{m-1}t^{m-1}+\ldots+A_1t+A_0)e^{\alpha t}cos(\omega t)+$ $(B_mt^m+B_{m-1}t^{m-1}+\ldots+B_1t+B_0)e^{\alpha t}sin(\omega t)$	特征根$\neq\alpha,\pm j\omega$， 无重根

特解是满足微分方程并和激励信号形式有关的解

例：描述某系统的微分方程为

1. y``(t) + 5y`(t) + 6y(t) = f(t)

求（1）当f(t) = 2e^{-t}，t≥0；y(0)=2，y`(0)= －1时的全解；

（2）当f(t) = e^{-2t}，t≥0；y(0)= 1，y`(0)=0时的全解。

解：(1) 特征方程为λ² + 5λ+ 6 = 0 ,其特征根λ1= –2，λ2= – 3。

齐次解为 $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

由表2-3可知，当f(t)=2e^{-t}时，其特解可设为 $y_p(t) = Pe^{-t}$

将其代入微分方程得 $Pe^{-t} + 5(-Pe^{-t}) + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$

解得 P=1 于是特解为 $y_p(t) = e^{-t}$

全解为：$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$

其中待定常数C_1,C_2由初始条件确定。

y(0) = C_1+C_2+ 1 = 2，

y`(0) = – 2C_1 – 3C_2 – 1= – 1

解得C_1 = 3，C_2 = – 2。最后得全解

$$y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}, t > 0$$

例：$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$， $f(t) = e^{-2t}$，$t\geq 0$；$y(0)= 1$，$y'(0)=0$

（2）齐次解同上。当激励$f(t)=e^{-2t}$时，其指数与特征根之一相重。

由表2-3知：其特解为 $y_p(t) = (P_1t + P_0)e^{-2t}$

代入微分方程可得 $P_1e^{-2t} = e^{-2t}$，所以$P_1=1$ 但P_0不能求得。

全解为
$$y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + \boxed{te^{-2t} + P_0e^{-2t}}$$
$$= (C_1 + P_0)e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t}$$

将初始条件代入，得 $y(0) = (C_1+P_0) + C_2=1$；

$y'(0) = -2(C_1+P_0) -3C_2+1=0$

解得 $C_1 + P_0 = 2$，$C_2= -1$ 最后得微分方程的全解为

$$y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}, t > 0$$

上式第一项的系数$C_1+P_0= 2$，不能区分C_1和P_0，因而也不能区分自由响应和强迫响应。

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

1、0_-状态和0_+状态

- 0_-状态称为零输入时的初始状态。即初始值是由系统的储能产生的；
- 0_+状态称为加入输入后的初始状态。即初始值不仅有系统的储能，还受激励的影响。

- 从 0_- 状态到 0_+状态的跃变
  - 当系统用微分方程表示时，系统的初始值从0_-状态到0_+状态有没有跳变决定于微分方程右端自由项是否包含δ(t)及其各阶导数。
  - 如果包含有δ(t)及其各阶导数，说明相应的0_-状态到0_+状态发生了跳变。

- 0_+ 状态的确定
  - 已知 0_- 状态求 0_+ 状态的值，可用冲激函数匹配法。
  - 求 0+ 状态的值还可以用拉普拉斯变换中的初值定理求出，见第4章内容。

2、冲激函数匹配法

目的： 用来求解初始值，求（0+）和（0—）时刻值的关系。

应用条件： 如果微分方程右边包含δ（t）及其各阶导数，那么（0+）时刻的值不一定等于（0—）时刻的值。

原理： 利用t＝0时刻方程两边的δ（t）及各阶导数应该平衡的原理来求解（0+）

$$a_0 y(t)+a_1 y'(t)+\ldots+a_n y^{(n)}(t)=b_0+b_1\delta(t)+b_2\delta'(t)+\ldots+b_m\delta^{(m-1)}(t)$$

①m≤n，则设

$$\boxed{\begin{aligned}
&y^{(n)}(t)=C_m\delta^{(m-1)}(t)+\ldots+C_1\delta(t)+C_0\\
&y^{(n-1)}(t)=C_m\delta^{(m-2)}(t)+\ldots+C_2\delta(t)+C_1\\
&\ldots\\
&y^{(n-m)}(t)=C_m\\
&y^{(n-m-1)}(t)=\ldots=y(t)=0
\end{aligned}}$$

(0-<t<0+)

冲激函数匹配法

$$a_0 y(t)+a_1 y'(t)+\ldots+a_n y^{(n)}(t)=b_0+b_1\delta(t)+b_2\delta'(t)+\ldots+b_m\delta^{(m-1)}(t)$$

②m>n，则设

$$y^{(n)}(t)=C_m\delta^{(m-1)}(t)+\ldots+C_1\delta(t)+C_0$$

$$y^{(n-1)}(t)=C_m\delta^{(m-2)}(t)+\ldots+C_2\delta(t)+C_1$$

$$\ldots$$

$$y(t)=C_m\delta^{(m-n-1)}(t)+\ldots+C_{n-1}$$

将y(t)及其各阶导数带入原方程，求出$C_0 \ldots C_m$；

对y(t)及各阶导数求（0－，0＋）的积分，求$y^{(i)}(0+)$.

$$y^{(n-1)}(0+)-y^{(n-1)}(0-)=\int_{0-}^{0+} y^{(n)}(t)dt \qquad n\geq 1$$

$$\ldots$$

$$y'(0+)-y'(0-)=\int_{0-}^{0+} y''(t)dt$$

$$y(0+)-y(0-)=\int_{0-}^{0+} y'(t)dt$$

冲激函数匹配法

例1：描述某系统的微分方程为y”(t) + 3y’(t) + 2y(t) = 2f’(t) + 6f(t)，已知y(0-)=2，y’(0-)= 0，f(t)=u(t)，求y(0+)和y’(0+)。

解： 将输入f(t)=u(t)代入上述微分方程得

y”(t) + 3y’(t) + 2y(t) = 2δ(t) + 6u(t)

列式得：

$$y''(t) = a\delta(t) + b$$
$$y'(t) = a$$
$$y(t) = 0$$

代入原方程比较系数得 a=2，b=0

代入得

$$y''(t) = 2\delta(t) + 0$$
$$y'(t) = 2$$
$$y(t) = 0$$

0-到0+积分

从0-到0+积分得：

$$y'(0+) - y'(0-) = 2$$
$$y(0+) - y(0-) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} y'(0+) &= y'(0-) + 2 = 2 \\ y(0+) &= y(0-) + 0 = 2 \end{aligned}}$$

当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。

但如果右端不含δ时，则不会跃变。

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

2.5 零输入响应和零状态响应

1、定义

（1）零输入响应$r_{zi}(t)$：没有外加激励信号的作用，只有起始状态所产生的响应。

零输入响应, 起始状态的约束满足$r^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_)$

（2）零状态响应$r_{zs}(t)$：不考虑起始时刻系统储能的作用，由系统外加激励信号所产生的响应。

零状态响应, 起始状态的约束满足$r^{(k)}(0_)=0$

LTI的全响应： $\boxed{r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)}$

2、零输入响应

（1）即求解对应齐次微分方程的解

①特征方程的根为n个单根

当特征方程的根（特征根）为n个单根（不论实根、虚根、复数根）λ1，λ2，…，λn时，$r_{zi}(t)$的通解表达式为

$$r_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$$

② 特征方程的根为n重根

当特征方程的根(特征根)为n个重根(不论实根、虚根、复数根) $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n$ 时，$r_{zi}(t)$ 的通解表达式为:

$$r_{zi}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_2 t}+\ldots+C_nt^{n-1}e^{\lambda_n t}$$

(2) 求 $r_{zi}(t)$ 的基本步骤

①求系统的特征根，写出 $r_{zi}(t)$ 的通解表达式。

②由于激励为零，所以零输入的初始值:

$$r_{zi}^{(i)}(0+)=r_{zi}^{(i)}(0-)$$

确定积分常数C1，C2， ...，Cn

③将确定出的积分常数C1，C2， ...，Cn代入通解表达式，即得 $r_{zi}(t)$ 。

3、零状态响应

（1）即求解对应非齐次微分方程的解

（2）求$r_{zs}(t)$的基本步骤

①求系统的特征根，写出的通解表达式。

②根据f(t)的形式，确定特解形式，代入方程解得特解。

③求全解，若方程右边有冲激函数（及其各阶导数）时，根据冲激函数匹配法求得 $r_{zs}^{(i)}(0+)$ ，确定积分常数C1，C2， ...，Cn

方程两端奇异函数平衡条件判断是否有跳变

零状态响应，起始状态的约束满足$r^{(k)}(0_)=0$ （即$r_{zs}^{(k)}(0_)=0$ ）

④将确定出的积分常数C1，C2， ...，Cn代入全解表达式，即得。

- **零输入响应的求法与齐次解一样**

$$r_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_{xi}e^{\lambda_i t}$$

λ_i 为特征根　C_{xi} 由初始值确定

- **零状态响应的求法与求非齐次方程一样**

$$r_{zs}(t)=\text{齐次解}+\text{特解}=\sum_{j=1}^{n}C_{fj}e^{\lambda_j t}+r_p(t)$$

λ_j 为特征根　C_{fj} 由零状态初始值确定

- **各种响应用初始值确定积分常数的区别**
  - 在经典法求全响应的积分常数时，用的是 0_+ 状态初始值。
  - 在求系统零输入响应时，用的是 0_- 状态初始值。
  - 在求系统零状态响应时，用的是 0_+ 状态初始值，这时的零状态是指 0_-时刻状态为零。

P59 2-8例题（需掌握和理解）

已知系统方程式 $\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=3e(t)$，

若起始状态为 $r(0_-)=3/2$，激励信号 $e(t)=u(t)$，求系统的自由响应、强迫响应、零输入响应、零状态响应以及完全响应。

解：（1）特征根 $\alpha=-3$，齐次解是 Ae^{-3t}，由激励信号 $u(t)$ 求出特解是 1。

完全响应表达式为：

最高阶r'(t)=u(t)
r(t)无跳变

$$r(t)=Ae^{-3t}+1$$

由方程式两端奇异函数平衡条件可判断，$r(t)$ 在起始点无跳变，

$r(0_+)=r(0_-)=3/2$，利用此条件解出系数 A=1/2，得完全解：

$$\boxed{r(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+1}$$

式中第一项 $\frac{1}{2}e^{-3t}$ 为自由响应，第二项 1 为强迫响应。

（2）求零输入响应。此时特解为零。 $r(t)=Ae^{-3t}+1$

利用此时满足的初始条件 $r(0+)=r(0-)=3/2$, 求A_{zi}， 得 $A_{zi}=3/2$

$$r_{zi}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}$$

求零状态响应：

即 $r(0-)=0$, 求A_{zs}

此时奇异函数平衡最高阶 r’(t)=u(t)，可推出 r(t) 无跳变

故 $r(0+)=0$，可解出相应的系数 $A_{zs}=-1$，

$$r_{zs}(t)=-e^{-3t}+1$$

以上两者合并得完全响应

自由响应 强迫响应

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}-e^{-3t}+1$$

零输入响应 零状态响应

说明：也可以采用利用经典法（通解特解）求全响应后，在求取了零输入响应后两者相减即可得到零状态响应

[例2]：描述某系统的微分方程为y”(t) + 3y’(t) + 2y(t) = 2f’(t) + 6f(t)，已知y(0-)=2，y’(0-)=0，f(t)=u(t)。求该系统的全响应，零输入响应和零状态响应。

解：（1）$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$ 前面P17例1

利用系数匹配法分析列式得：$y''(t)=a\delta(t)+b$，

$y'(t)=a$，

$y(t)=0$

代入原方程得 a=2，b=0

$$y'(0+) = y'(0-) + 2 = 2 \qquad y(0+) = y(0-) + 0 = 2$$

$$\boxed{y^{(n-1)}(0+) - y^{(n-1)}(0-) = \int_{0-}^{0+} y^{(n)}(t)dt \qquad n \geq 1}$$

（1）系统的全响应

y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2δ(t) + 6u(t)

根据微分方程经典求法：$\lambda^2+3\lambda+2=0$

齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$

特解：$y_p(t)=B$　　解得　B＝3

解得全响应为：$y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}+3\quad t>0$

利用初始值 $y'(0+)=2$，$y(0+)=2$ 解得：$C_1=-1$，$C_2=0$

全响应为：$y(t)=-e^{-2t}+3\quad t>0$

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$

（2）零输入响应$y_{zi}(t)$

激励为0，

$y_{zi}(0+) = y_{zi}(0-) = y(0-) = 2$

$y_{zi}'(0+) = y_{zi}'(0-) = y'(0-) = 0$

根据特征根求得通解为： $y_{zi}(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$

解得系数为 $C_1 = -2$，$C_2 = 4$ 代入得 $y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 4e^{-t}, t > 0$

（3）零状态响应$y_{zs}(t)$

满足 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$

利用系数匹配法解得：

$y_{zs}(0-) = y'_{zs}(0-) = 0$

$y'_{zs}(0+) = y'_{zs}(0-) + 2 = 2$

$y_{zs}(0+) = y_{zs}(0-) + 0 = 0$

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6u(t)$

对t>0时，有 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6$

其齐次解为 $y_{zsh}(t) = C_{f1}e^{-2t} + C_{f2}e^{-t}$

其特解为常数 3，

于是有 $y_{zs}(t) = C_{f1}e^{-2t} + C_{f2}e^{-t} + 3$

根据初始值求得: $C_{f1} = 1$ $\quad C_{f2} = -4$

$$\boxed{\begin{aligned} y'_{zs}(0+) &= 2 \\ y_{zs}(0+) &= 0 \end{aligned}}$$

$$y_{zs}(t) = e^{-2t} - 4e^{-t} + 3, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = [-2e^{-2t} + 4e^{-t}] + [e^{-2t} - 4e^{-t} + 3]$$
$$= -e^{-2t} + 3, \quad t \geq 0$$

4．系统响应划分

$$r(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_{x_i} e^{\lambda_i t}}_{r_{zi}(t)\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_{f_i} e^{\lambda_i t}+r_p(t)}_{r_{zs}(t)\text{零状态响应}}$$

式中

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_{x_i} e^{\lambda_i t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}c_{f_i} e^{\lambda_i t}}_{\text{零状态响应的齐次解}}$$

两种分解方式的区别：

1、 自由响应与零输入响应的系数各不相同

c_i 由初始状态和激励共同确定

c_{x_i} 由初始状态确定

2、自由响应包含了零输入响应和零状态响应中的齐次解

3、零输入响应是自由响应的一部分，零状态响应由自由响应的一部分和强迫响应构成。

2.5 零输入响应和零状态响应

$$y(t) = -e^{-2t} + 3$$

$$= y_x(t) + y_f(t) = (-2e^{-2t} + 4e^{-t}) + (e^{-2t} - 4e^{-t} + 3),\quad t \ge 0$$

零输入响应

自由响应

强迫响应

零状态响应

实际问题通常只需研究零状态响应，按照零输入响应＋零状态响应分解有利于理解线性系统的叠加性和齐次性的特性。

对于系统响应还有一种分解方式，即瞬态响应和稳态响应。

瞬态响应： $t \to \infty$ 时，响应趋于零的那部分响应分量；

稳态响应： $t \to \infty$ 时，响应不为零的那部分响应分量。

$$y(t) = \underbrace{-e^{-2t}}_{\text{瞬态分量}} + \underbrace{3}_{\text{稳态分量}}$$

已知系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=4e^{-3t}$，且初始条件为$y(0)=3$和$y'(0)=4$。求系统的自由响应、强迫响应、零输入响应、零状态响应及全响应。并弄清楚几种响应之间的关系。

$$y_{zi}(t)=10e^{-t}-7e^{-2t} \quad t\geq 0$$

$$y_{zs}(t)=2e^{-t}-4e^{-2t}+2e^{-3t} \quad t\geq 0$$

$$y(t)=\underbrace{12e^{-t}-11e^{-2t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{2e^{-3t}}_{\text{强迫响应}} \quad t\geq 0$$

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

2.6 冲激响应与阶跃响应

$$LTI\text{ 系统的零状态响应} \rightarrow \text{叠加积分} \rightarrow \begin{cases} \text{冲激响应}\boldsymbol{h(t)} \\ \text{阶跃响应}\boldsymbol{g(t)} \end{cases}$$

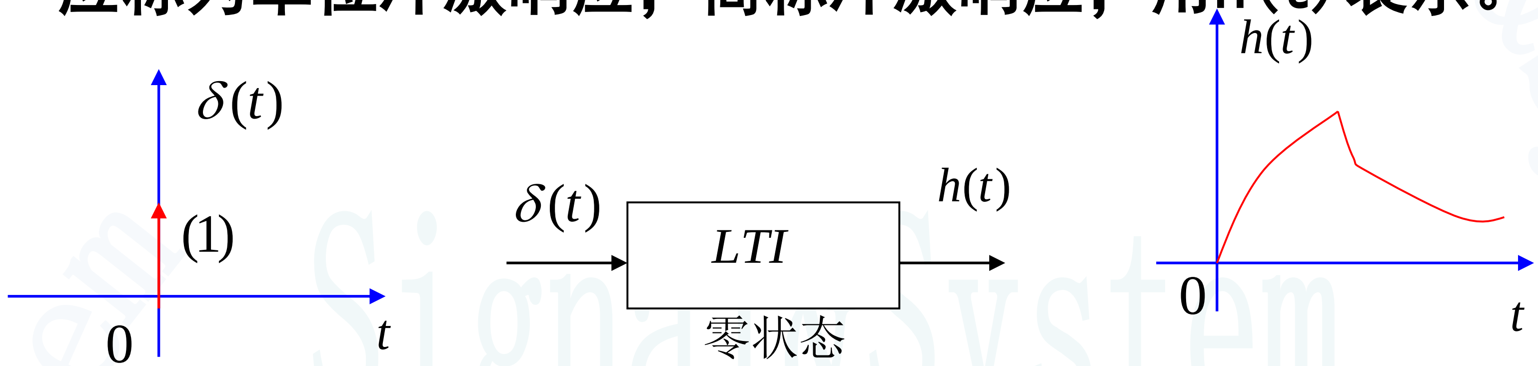
- **输入信号为单位冲激函数时系统的零状态响应，称为冲激响应。用 $h(t)$ 表示。**
- **输入信号为单位阶跃函数时系统的零状态响应，称为阶跃响应。用 $g(t)$ 表示。**
- **阶跃响应与冲激响应的关系：**

$$h(t) = \frac{d\,g(t)}{dt} \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

2. 6 冲激响应与阶跃响应

一. 冲激响应

1. 定义： 当激励为单位冲激函数 $\delta(t)$ 时，系统的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，用h(t)表示。



t>0时，系统输入=0，响应的形式与零输入响应相同（齐次解）

2、冲激响应h(t)的求解方法

例1. 描述某系统的微分方程为：$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$

试求该系统的冲激响应h(t)。

解：由冲激响应的定义，当e(t)= $\delta(t)$ 时，$r_{ZS}(t)=h(t)$

得 $$\begin{cases} h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\delta(t) & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ h(0\_)=h'(0\_)=0 \end{cases}$$

例1续 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\delta(t)$$

$\because t>0$时，$\delta(t)=0$， $\therefore$ 上式可化为

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=0 \qquad t>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$

$$故\ h(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t})\,\varepsilon(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由方程（1）等号两边奇异函数要平衡，确定初始条件$h(0_+)$和$h'(0_+)$

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=\delta(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

h''(t)=aδ(t)+b

h'(t)=a

h(t)=0

代入原方程得 a=1，b=-3

h''(t)=δ(t)-3

h'(t)=1

h(t)=0

$$\boxed{h^{(n-1)}(0+)-h^{(n-1)}(0-)=\int_{0-}^{0+}h^{(n)}(t)dt \qquad n\geq 1}$$

h''(t)含冲激函数， h'(t) 从0-到0+会发生突变；

h'(t)为常数， h（t）从0-到0+不会发生突变。

例1续 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$

$$h^{(n-1)}(0+)-h^{(n-1)}(0-)=\int_{0-}^{0+}h^{(n)}(t)dt \qquad n\geq 1$$

h''(t)= δ (t)−3

h'(t)=1

h(t)=0

h''(t)含冲激函数， h'(t) 从0-到0+会发生突变；

h'(t)为常数， h（t）从-到0+不会发生突变。

$$故h'(0_+)-h'(0\_)=1,即h'(0_+)=1$$

$$h(0_+)=0$$

$$h(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t})\varepsilon(t) \quad \text{.......... ....}(3)$$

将初始条件$h'(0_+)=1$， $h(0_+)=0$代入(3)式得

$$\left.\begin{aligned} h(0_+)&=C_1+C_2=0 \\ h'(0_+)&=-C_1-2C_2=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

故$h(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0r(t)=e(t)$$

当 $e(t)=\delta(t)$ 时

$$\left.\begin{aligned}&h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0h(t)=\delta(t)\\&h^{(j)}(0\_)=0\qquad j=0,1,2,\ldots,n-1\end{aligned}\right\}(1)$$

由系数平衡法，可推得

$$\left.\begin{aligned}&\boxed{\begin{aligned}&h^{(j)}(0_+)=0\\&h^{n-1}(0_+)=1\end{aligned}}\qquad j=0,1,2,\ldots,n-2\end{aligned}\right\}(2)$$

为什么?

方程两端在$\int_{0_-}^{0_+}$积分

$h^{(n)}(t)$含$\delta(t)$, 积分一次，由n阶导数变为n-1

$$\int_{0_-}^{0_+}h^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t+a_{n-1}\int_{0_-}^{0_+}h^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+a_0\int_{0_-}^{0_+}h(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t$$

积分一次，由n阶导数变为n-1

$$\int_{0_-}^{0_+} h^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + a_{n-1}\int_{0_-}^{0_+} h^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + a_0\int_{0_-}^{0_+} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

含δ(t)项积分不为0

有界函数，在无穷小区间积分为0

积分为1

$$h^{(n-1)}(0_+) - h^{(n-1)}(0_-) = 1 \rightarrow \boxed{h^{(n-1)}(0_+) = 1}$$

系统是零状态的，故：

$$h^{(n-1)}(0_-) = h^{(n-2)}(0_-) = \cdots = h(0_-) = 0$$

$$\boxed{h^{(n-2)}(0_+) = h^{(n-3)}(0_+) = \cdots = h(0_+) = 0}$$

如果等号右边冲激函数的最高阶次为0，可以用直接积分的方法，更简单。

定理：若已知LTI系统的阶跃响应为g(t)，则系统的冲激响应由下式决定：

$$h(t)=\frac{d}{dt}g(t)$$

例：线性时不变系统。当激励为12U(*t*)时，响应为(24－12e^{-2t})U(*t*)，试求单位冲击响应。

解：（1）单位阶跃：

$$g(t)=\frac{1}{12}g(t)=(2-e^{-2t})U(t)$$

（2）求*h*(*t*)

$$h(t)=\frac{d}{dt}g(t)$$

$$h(t)=2e^{-2t}U(t)+\delta(t)$$

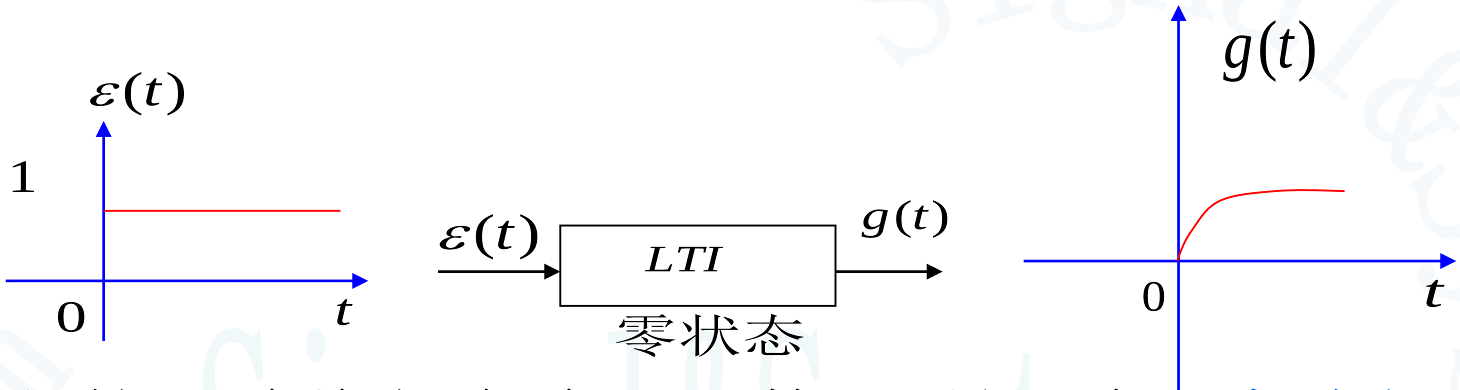
• 表2-4 冲激响应h(t)

系统方程式		冲激响应 h(t)
一阶（特征根 $\alpha=-C$）	$\frac{dr(t)}{dt}+Cr(t)=Ee(t)$	$Ee^{\alpha t}\varepsilon(t)$
	$\frac{dr(t)}{dt}+Cr(t)=E\frac{de(t)}{dt}$	$E\delta(t)+E\alpha e^{\alpha t}\varepsilon(t)$
二阶（特征根 $\alpha1,\alpha1=\frac{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4C_2}}{2}$）	$\frac{dr^2(t)}{dt^2}+C_1\frac{dr(t)}{dt}+C_2r(t)=Ee(t)$	$\frac{E}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t})\varepsilon(t)$
	$\frac{dr^2(t)}{dt^2}+C_1\frac{dr(t)}{dt}+C_2r(t)=E\frac{de(t)}{dt}$	$\frac{E}{\alpha_1-\alpha_2}(\alpha_1e^{\alpha_1 t}-\alpha_2e^{\alpha_2 t})\varepsilon(t)$

$h(t)$的求法 $\begin{cases} 1.化为零状态响应(难点h(0_+)的确定) \\ 2.h(t)=\dfrac{dg(t)}{dt} \quad (\because\ \delta(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}) \\ 3.h(t)=L^{-1}[H(s)] \end{cases}$

二、阶跃响应g(t)

1. 定义



系统方程的右端将包含阶跃函数，所以除了齐次解外，还有特解项。

当系统受阶跃信号激励时，方程式右端可能包含阶跃函数、冲激函数及其导数。阶跃响应的求取方法与求冲激响应类似，需注意方程右端阶跃函数的出现，阶跃响应的表达式中除了齐次解外需增加特解项（阶跃函数项）。

2. 阶跃响应g(t)的求解方法

$$\left.\begin{aligned} &g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 g(t)=\varepsilon(t) \\ &g^{(j)}(0_-)=0,\ j=0,1,2\ldots,n-1 \end{aligned}\right\}(2-1)$$

由方程两边奇异函数要平衡，得 $\boxed{g^{(j)}(0_+)=g^{(j)}(0_-)=0}$

$j=0,1,2,\ldots,n-1$

若该方程的特征根均为单根，则

$$\boxed{g(t)=\Big(\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i t}+\frac{1}{a_0}\Big)\varepsilon(t)}$$

齐次解　　特解

另外：$\boxed{g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau}$ $[\because \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau]$

例2 描述某系统的微分方程为 $r''(t)+6r'(t)+8r(t)=e(t)$，试求该系统的阶跃响应

解：$g(t)$满足方程为

$$\left.\begin{aligned} & g''(t)+6g'(t)+8g(t)=\varepsilon(t) \\ & g'(0_+)=0 \\ & g(0_+)=0 \end{aligned}\right\}$$

特征根为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$，故$g(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-4t}+\frac{1}{8})\varepsilon(t)$

由0_+初始值代入上式得

$$\left.\begin{aligned} & g(0_+)=C_1+C_2+\frac{1}{8}=0 \\ & g'(0_+)=-2C_1-4C_2=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=-\frac{1}{4}, C_2=\frac{1}{8}$$

于是得 $g(t)=(-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{8}e^{-4t}+\frac{1}{8})\varepsilon(t)$

例3：系统的微分方程为$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2e'(t)+e(t)$，已知$r(0_-)=2, r'(0_-)=1, e(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$，求全响应r(t).

解：$(1) r(t)=r_h(t)+r_p(t)$

特征根$\lambda_1=-1, \lambda_2=-3$

$$\therefore r_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}$$

由$e(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$，得$e'(t)=-2e^{-2t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\delta(t)$

$$2e'(t)+e(t)=2e^{-2t}\delta(t)-3e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$=\boxed{2\delta(t)}-3e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2\delta(t)-3e^{-2t}\varepsilon(t)$$

例3：系统的微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2e'(t)+e(t)$,
已知 $r(0_-)=2, r'(0_-)=1, e(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$**，求全响应r(t).**

续

$$\boxed{r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2\delta(t)-3e^{-2t}\varepsilon(t)}$$

$t>0$时，系统方程为：

$$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=-3e^{-2t}\varepsilon(t) \qquad (1)$$

设特解 $r_p(t)=pe^{-2t}$

$$r_p'(t)=-2pe^{-2t}, \quad r_p''(t)=4pe^{-2t}$$

将r_p，r_p'，r_p''代入（1）式，可得$r_p(t)=3e^{-2t}$

$$\therefore r(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+3e^{-2t}$$

下一步：由0+状态（初始状态）求系数C1，C2

例3：系统的微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2e'(t)+e(t)$，**已知** $r(0_-)=2, r'(0_-)=1, e(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$，**求全响应r(t).**

续

(2) $r(0_+), r'(0_+)$的确定

$$r''(t)+4r'(t)+3r(t)=2\delta(t)-3e^{-2t}\varepsilon(t)$$

r”含冲激函数，积分有跳变。

将方程两边积分

$$\int_{0-}^{0+} r''(t)dt+\int_{0-}^{0+} 4r'(t)dt+\int_{0-}^{0+} 3r(t)dt=\int_{0-}^{0+} 2\delta(t)dt-\int_{0-}^{0+} 3e^{-2t}\varepsilon(t)dt$$

$$[r'(0_+)-r'(0_-)]+4[r(0_+)-r(0_-)]=2$$

$$r(0_+)=r(0_-)=2 \quad , r'(0_+)=r'(0_-)+2=3$$

将$\boldsymbol{r}(0_+)=2, \boldsymbol{r}'(0_+)=3$ 代入$\boldsymbol{r}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}+3e^{-2t}$

得 $\left.\begin{aligned} c_1+c_2+3&=2 \\ -c_1-3c_2-6&=3 \end{aligned}\right\}$ $c_1=3, \quad c_2=-4$

故$\boldsymbol{r}(t)=3e^{-t}-4e^{-3t}+3e^{-2t} \qquad t>0$

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变–从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

从信号分解可知

- 可用δ(t)表示任意信号

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

即任意信号 $f(t)$可以分解为无穷多个不同强度的冲激函数之和，也即任意信号可以用函数δ(t) 来表示。

1 .任意信号作用下的零状态响应

激励信号　　响应信号

根据$h(t)$的定义：

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

由时不变性：　$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性：　$f(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$f(t) \qquad\qquad\qquad\qquad y_{zs}(t)$$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

卷积积分

2.卷积积分的定义

已知定义在区间（–∞，∞）上的两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积；

简记为 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)\otimes f_2(t)$

注意：积分是在虚设的变量τ下进行的，τ为积分变量，*t*为参变量。结果仍为*t* 的函数。

卷积积分的定义

- 在因果系统中，零状态响应为：

$$\boxed{y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t)*h(t)}$$

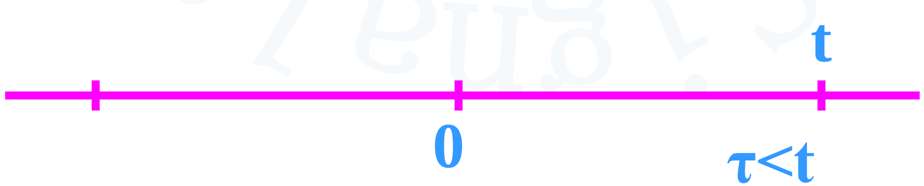
$$\because t<0,\quad h(t)=0 \;\therefore t-\tau<0,\text{即}\,\tau>t,\,h(t-\tau)=0$$

故积分上限可改为t,有$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

又激励是在$t=0$时接入系统，即$t<0$时，$f(t)=0$

$\therefore$积分下限可改为0

$$\therefore y_{zs}(t)=\int_{0}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



3.卷积的图解法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

卷积过程可分解为以下几步：

（1）换元： t换为τ→得 $f_1(\tau)$， $f_2(\tau)$。

（2）把其中一个信号反折（反转）：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$。

（3）反折后的信号移位（平移），移位量为t。在τ坐标系中， t>0,图形右移t， $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t-\tau)$。

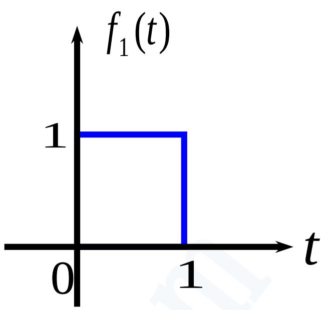
（4）两信号重叠部分乘积： $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$

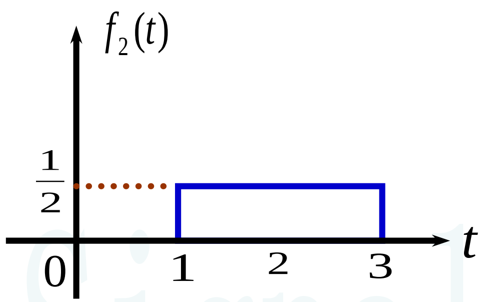
（5）完成相乘后图形的积分： τ从 –∞到∞对乘积项积分。

注意：t为参变量。

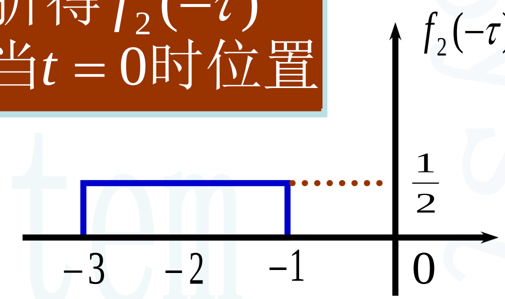
例1：计算 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

步骤



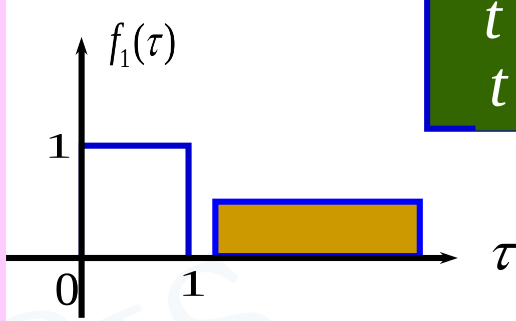


将 $f_2(\tau)$ 反折得 $f_2(-\tau)$
即 $f_2(t-\tau)$ 当 $t=0$ 时位置

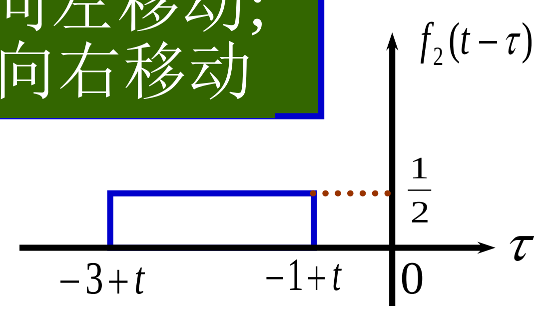


卷积积分的图解法步骤：

- 换元：t 换成τ
- 反折：将波形反折
- 平移：从左向右移动
- 分时段：确定积分段
- 定积分限；
- 计算积分值；

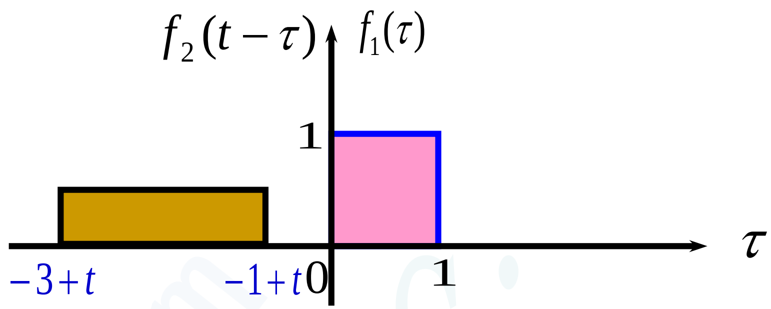


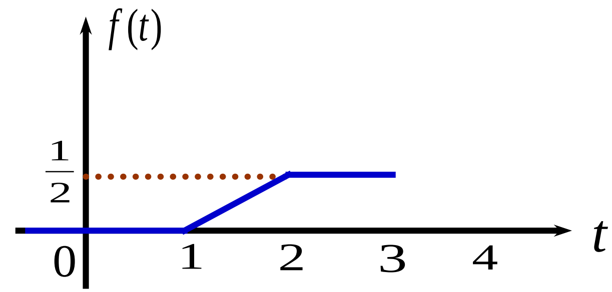
$t<0$,图形向左移动;
$t>0$,图形向右移动

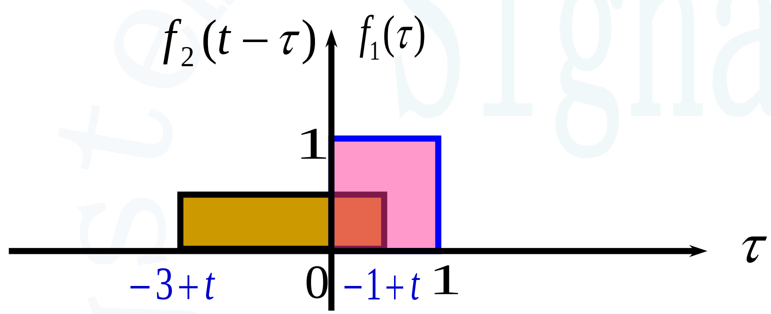


扫描（平移）

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$



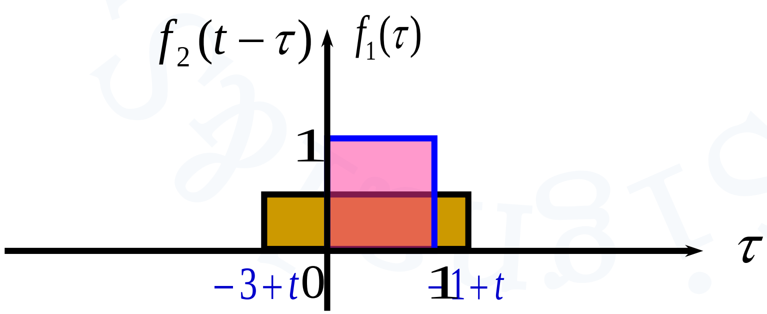




当 $0\le -1+t<1$ 即 $1\le t<2$ 时：

$$f(t)=\int_0^{-1+t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^{-1+t}1\times\frac{1}{2}d\tau=\frac{1}{2}(t-1)$$

即为重叠部分的面积。

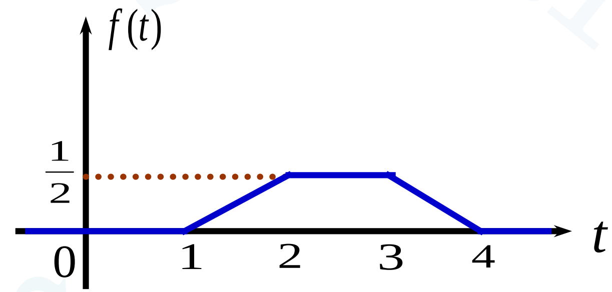


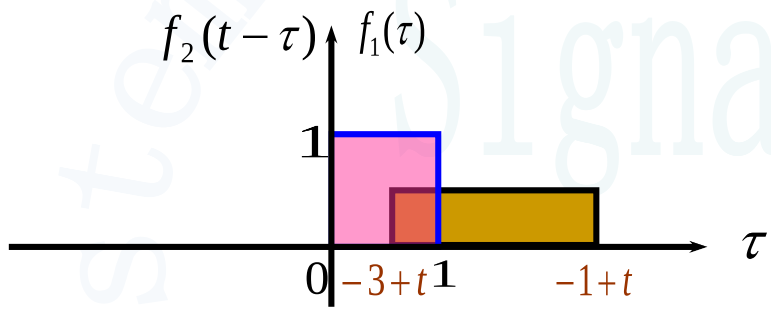
当 $1\le -1+t$ 且 $-3+t<0$ 即 $2\le t<3$ 时：

$$f(t)=\int_0^{1}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^{1}1\times\frac{1}{2}d\tau=\frac{1}{2}$$

即为重叠部分的面积。

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

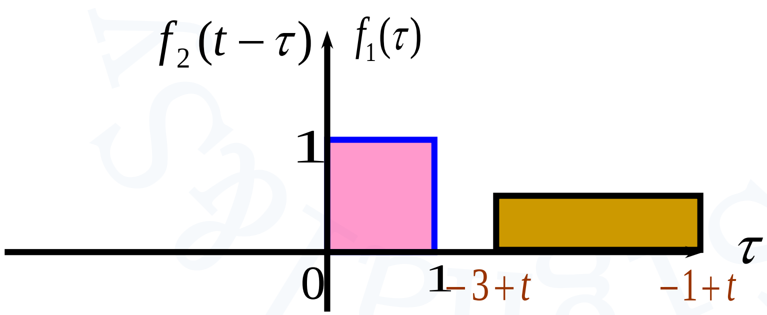




当 $0\le -3+t<1$ 即 $3\le t<4$ 时：

$$f(t)=\int_{-3+t}^{1}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-3+t}^{1}1\times\frac{1}{2}d\tau=\frac{1}{2}(4-t)$$

即为重叠部分的面积。



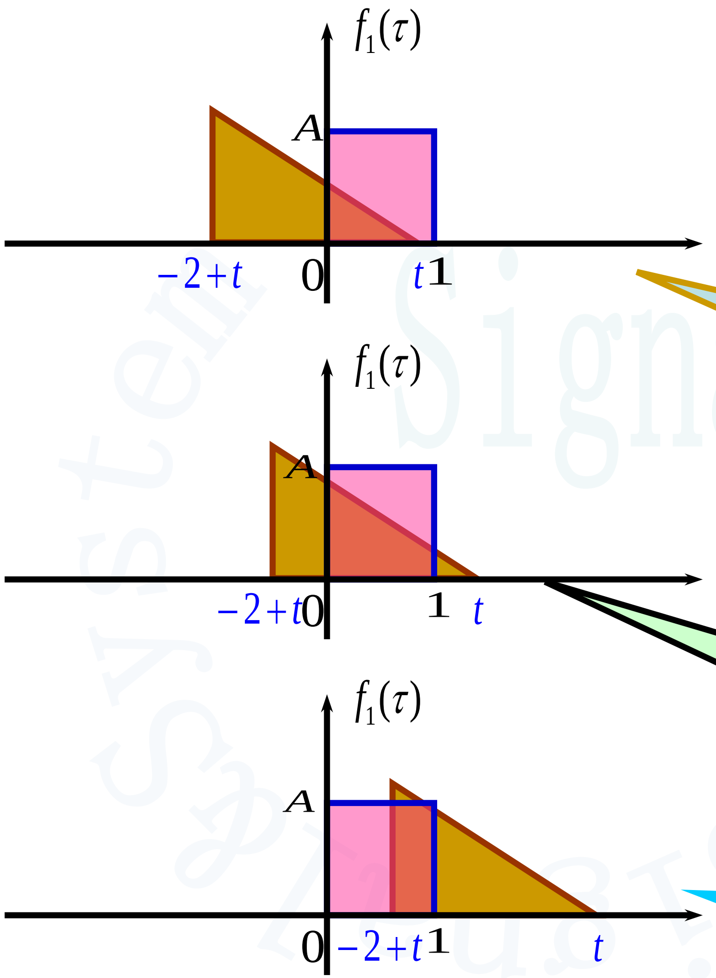
当 $-3+t\ge 1$ 即 $t\ge 4$时：

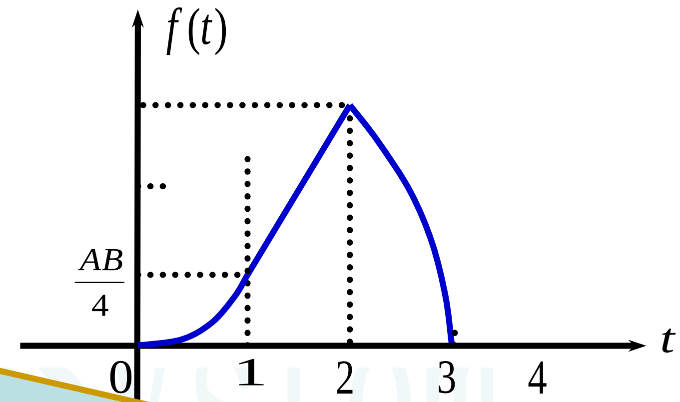
$f_2(t-\tau)$和 $f_1(\tau)$ 没有公共的重叠部分，

故卷积 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$

例2

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$





当 $0\le t<1$ 时：

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t A\times\frac{B}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{AB}{4}t^2$$

当 $1\le t$ 且 $-2+t<0$ 即 $1\le t<2$ 时：

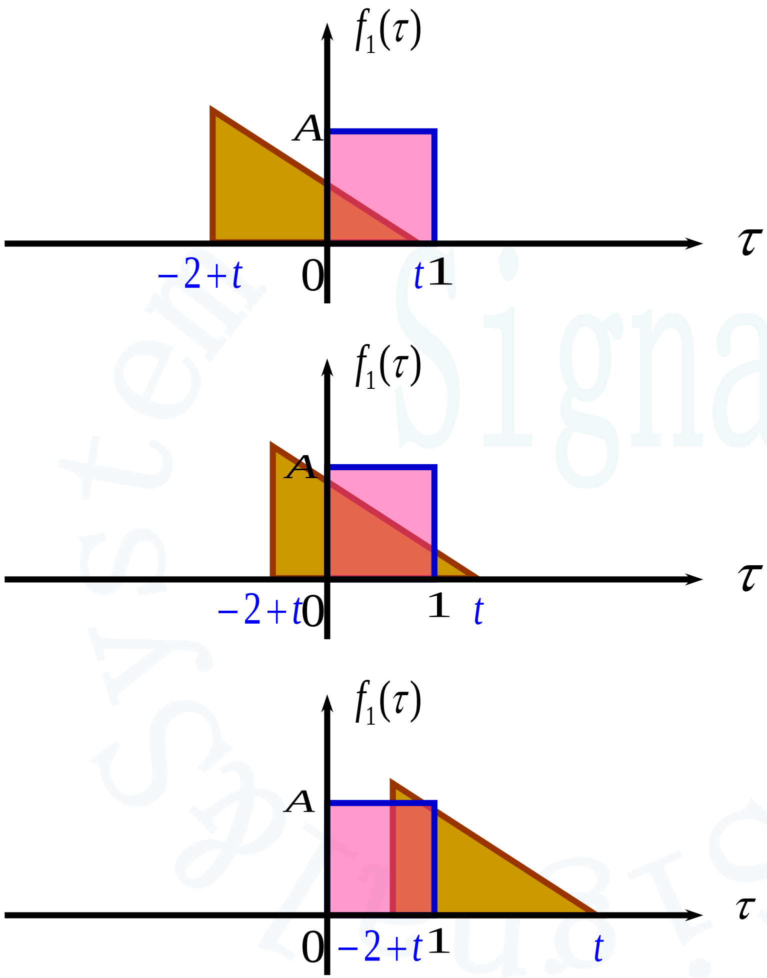
$$f(t)=\int_0^1 A\times\frac{B}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{AB}{4}(2t-1)$$

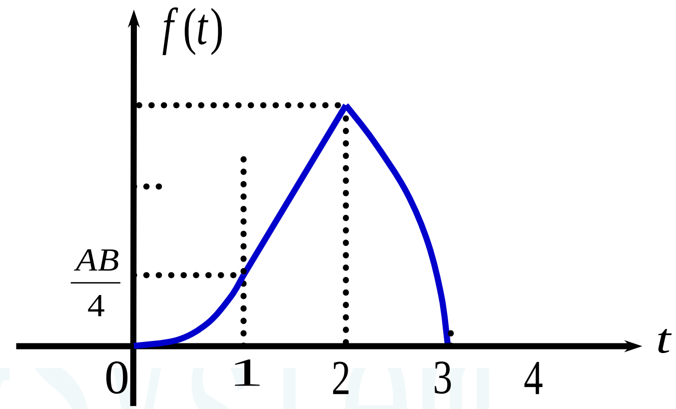
当 $0\le -2+t<1$ 即 $2\le t<3$ 时：

$$f(t)=\int_{-2+t}^1 A\times\frac{B}{2}(t-\tau)d\tau=\frac{AB}{4}[4-(t-1)^2]$$

例2

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

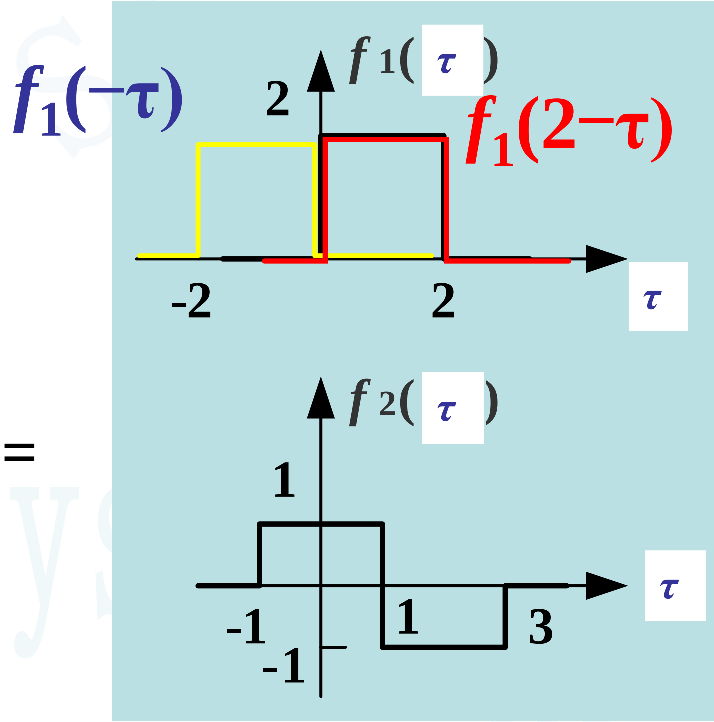




$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{AB}{4}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{AB}{2}(2t-1) & 1\le t<2\\ \frac{AB}{4}[4-(t-1)^2] & 2\le t<3\\ 0 & t\ge 3\end{cases}$$

求某一时刻卷积值

图解法一般比较繁琐，确定积分的上下限是关键。但若只求某一时刻卷积值时还是比较方便的。



例3：$f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，已知$f(t) = f_2(t) * f_1(t)$，求$f(2) = ?$

解：
$$f(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(2-\tau) \mathrm{d}\tau$$

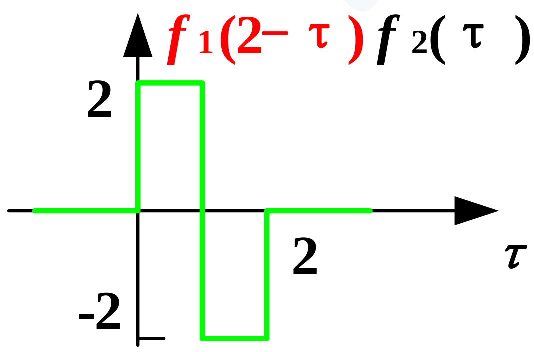
（1）换元

（2）$f_1(\tau)$得$f_1(-\tau)$

（3）$f_1(-\tau)$右移2得$f_1(2-\tau)$

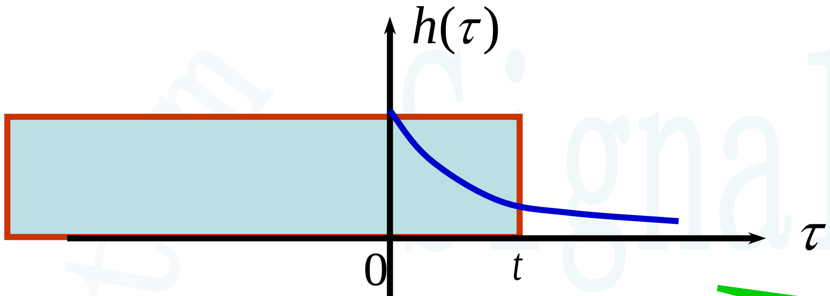
（4）$f_1(2-\tau)$乘$f_2(\tau)$

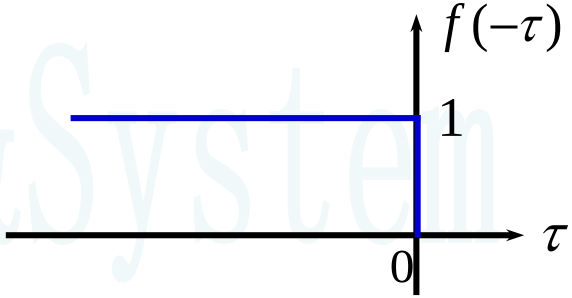
（5）积分，得$f(2) = 0$（面积为0）



例4：已知线性非时变系统的冲激响应 $h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，激励信号为 $f(t)=\varepsilon(t)$ 。试求系统的零状态响应。

解：系统零状态响应为： $y_{zs}(t)=h(t)*f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)$





将f(t)反折，再扫描可确定积分上下限。

$$\therefore\ y_{zs}(t)=\int_0^t e^{-\tau}d\tau=-e^{-\tau}\Big|_0^t=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

也可以直接用公式求： $y_{zs}(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\tau}d\tau$

$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

几条结论

- 卷积中积分限的确定取决于两个图形交叠部分的范围。
- 卷积结果所占有的时宽等于两个函数各自时宽之和。

  $f(t)$的开始时间等于$f_1(t)$和$f_2(t)$的开始时间之和； $f(t)$的结束时间等于$f_1(t)$和$f_2(t)$的结束时间之和。 $f(t)$的持续时间等于$f_1(t)$和$f_2(t)$的持续时间之和。
- 两个宽度不同的矩形波其卷积波形为梯形波。梯形波平顶宽度为两矩形波宽度之差，梯形波的高度为宽度小的矩形波面积乘以宽度大的矩形波的高度。
- 两个宽度相同的矩形波其卷积波形为三角波。三角波的高度为一个矩形波面积乘以另一矩形波的高度。
- 卷积积分的变量为τ。t 的函数可被提出到卷积积分之外。（ t 的函数是关于τ 的常数）

例5：线性非时变系统的输入信号f(t)和冲激响应h(t)由下列各式给出，试求系统的零状态响应。

$$f(t)=\mathrm{e}^{-0.5t}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right] \qquad h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

解 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-0.5\tau}[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-2)]e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-0.5\tau}e^{-(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-0.5\tau}e^{-(t-\tau)}\varepsilon(\tau-2)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=[e^{-t}\int_{0}^{t}e^{0.5\tau}d\tau]\varepsilon(t)-[e^{-t}\int_{2}^{t}e^{0.5\tau}d\tau]\varepsilon(t-2)$$

$$=2\left(\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-t}\right)\varepsilon(t)-2\left(\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-(t-1)}\right)\varepsilon(t-2)$$

第二章　连续时间系统的时域分析

- 系统数学模型（微分方程）的建立
- 微分方程的经典解法（时域求解方法）
- 起始点的跳变–从0_-到0_+状态的转换
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应和阶跃响应
- 卷积
- 卷积的性质

- 卷积的代数性质
  - ◆交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
  - ◆分配律：
    $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
  - ◆结合律：$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$
- 卷积的微分与积分性质

（1）微分性质：$f'(t)=f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*f_2(t)$

（2）积分性质：$\int f(t)=f_1(t)*\int f_2(t)=\int f_1(t)*f_2(t)$

（3）微积分性质：$f(t)=\int f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*\int f_2(t)$

（1）微分性质： $f'(t)=f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*f_2(t)$

（2）积分性质： $\int f(t)=f_1(t)*\int f_2(t)=\int f_1(t)*f_2(t)$

（3）微积分性质： $\int f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*\int f_2(t)$

若$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

特例：$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$

注意：$f^{-1}(t)=\int f(t)$

应用(2),(3)两个性质的条件是 $\int_{-\infty}^{t}f_i'(\tau)d\tau=f_i(t)$ 必须成立， i=1、2

即必须有：$\boxed{\lim_{t\to-\infty}f_i(t)=f_i(-\infty)=0}$ 否则不能应用。

● 时移性质

◆若 $f_1(t)*f_2(t)=f(t)$，则有 $f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

● 含有冲激函数的卷积

◆ $f(t)*\delta(t)=f(t)$，　$f(t)*\delta(t-t0)= f(t-t0)$

◆ $f(t-t1)*\delta(t-t2)= f(t-t1-t2)$ ，　$\delta(t-t1)*\delta(t-t2)= \delta(t-t1-t2)$

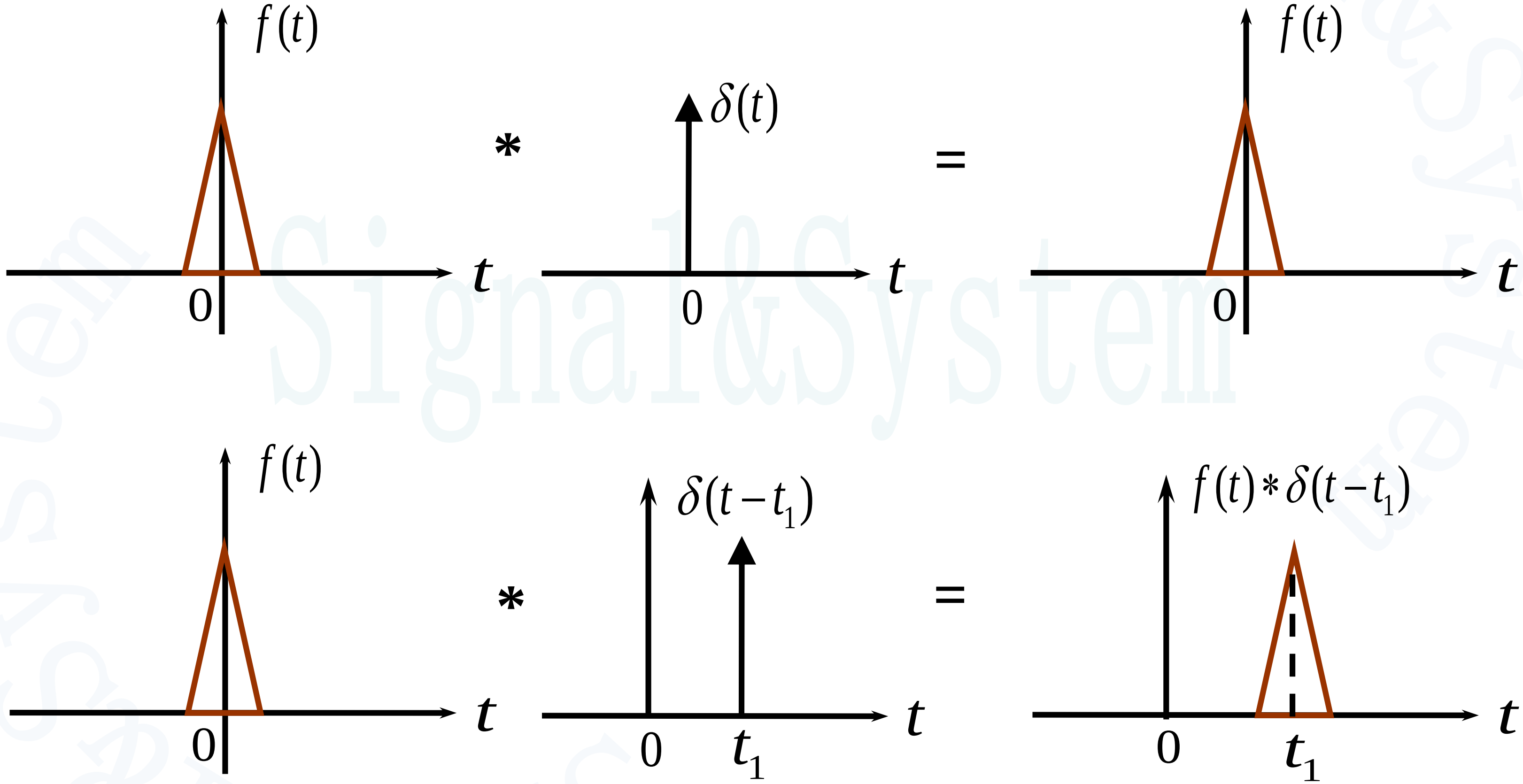
◆ $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$,　$f(t)*\delta''(t)=f''(t)$, …

与阶跃函数的卷积　$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

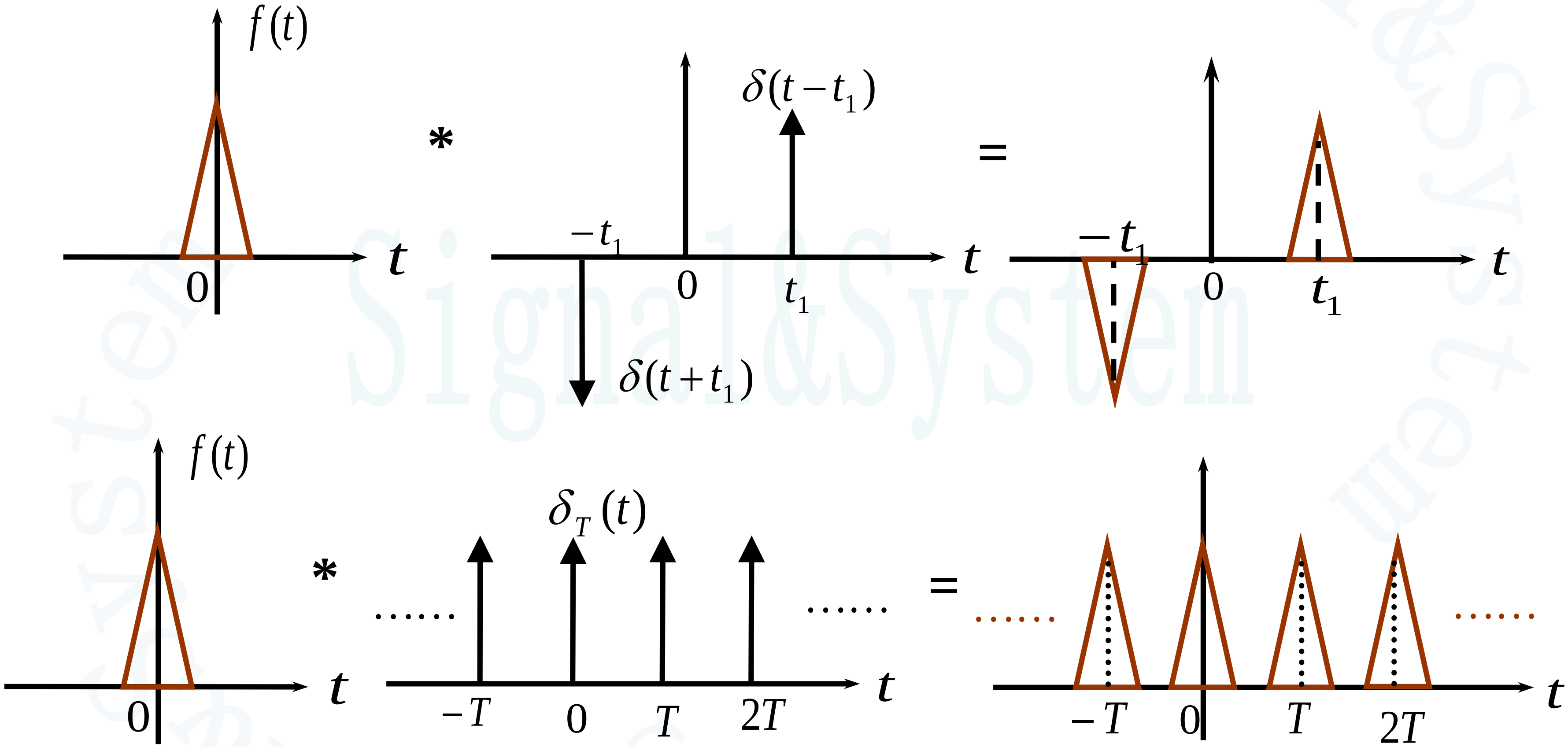
$$f(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau-t_0)d\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0} f(\tau)d\tau$$

利用卷积积分的性质计算卷积积分，可使卷积积分的计算大大简化

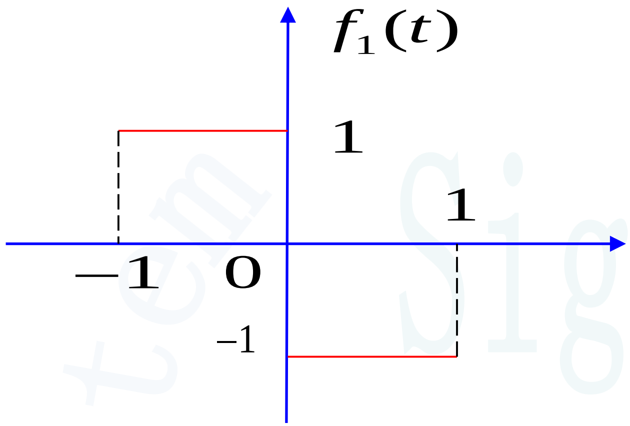
与冲激函数的卷积

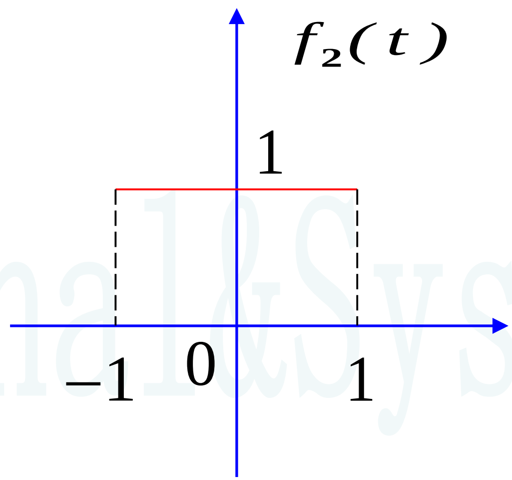


与冲激函数的卷积



例1: 已知：$f_1(t)$与$f_2(t)$的波形图如图所示，求$(t) = f_1(t) * f_2(t) * \delta'(t)$，并画波形。

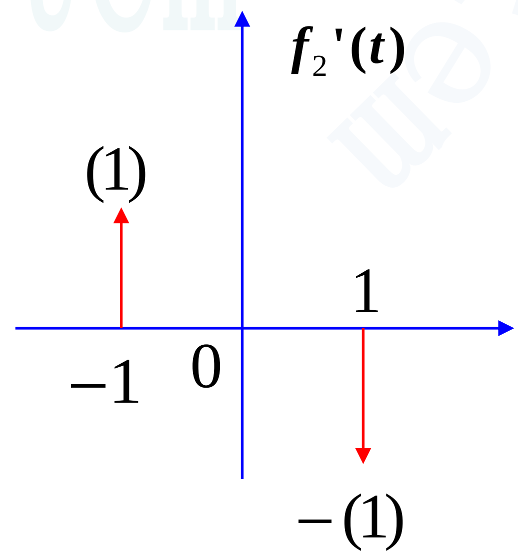




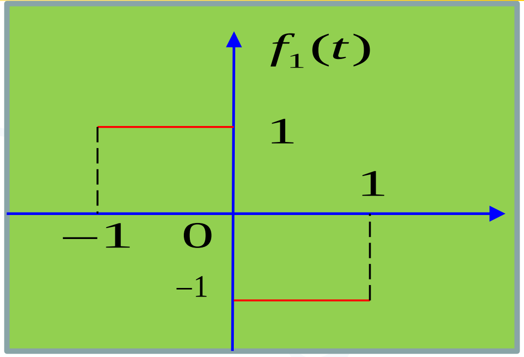
解

$$f_2(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$$

$$f_2'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$



$$f'(t) = \left[f_1(t) * f_2(t)\right]' = f_1(t) * f_2'(t)$$



$$f_2'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

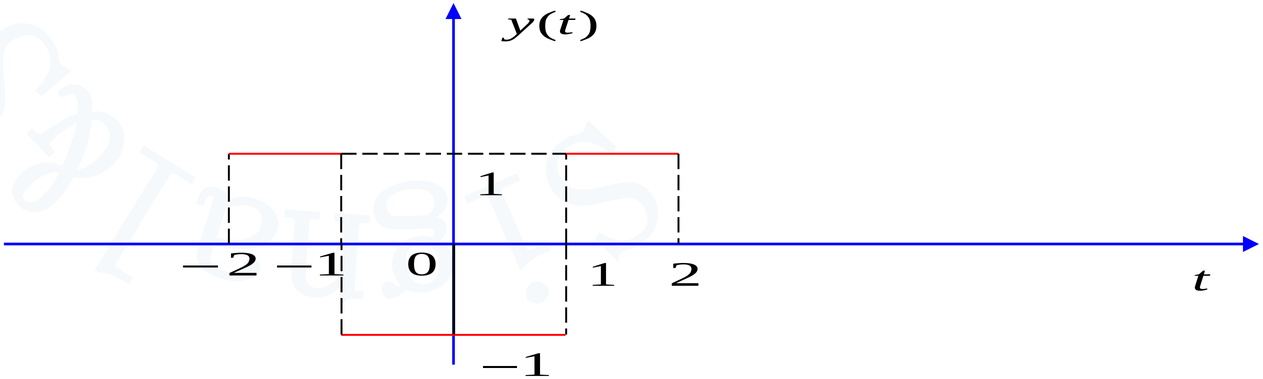
$$y(t) = f_1(t) * f_2(t) * \delta'(t) \xlongequal{\text{由卷积性质6}} [f_1(t) * f_2(t)]' * \delta(t)$$

$$\xlongequal{f(t)=f(t)*\delta(t)} [f_1(t) * f_2(t)]'$$

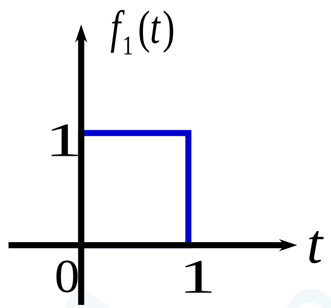
$$= f_1(t) * f_2'(t)$$

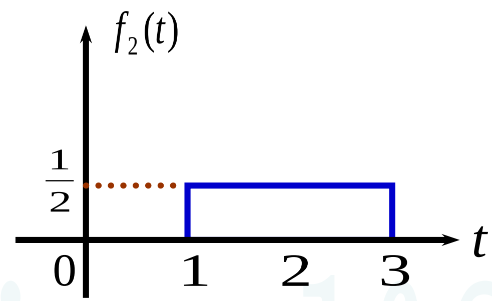
$$= f_1(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)]$$

$$\xlongequal{\text{延时性}} f_1(t+1) - f_1(t-1)$$



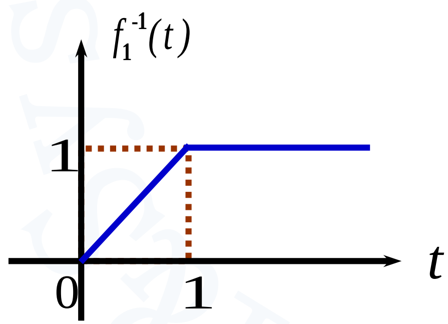
例2利用卷积的微积分性质 $f(t)=\int f_1(t) * f_2'(t)=f_1'(t) * \int f_2(t)$ 计算。

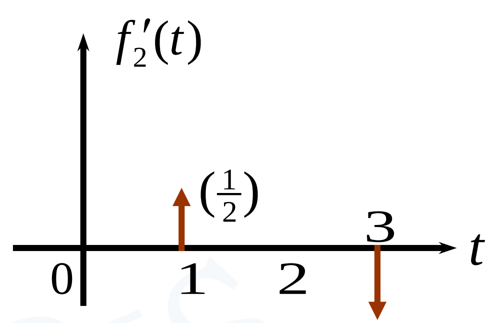


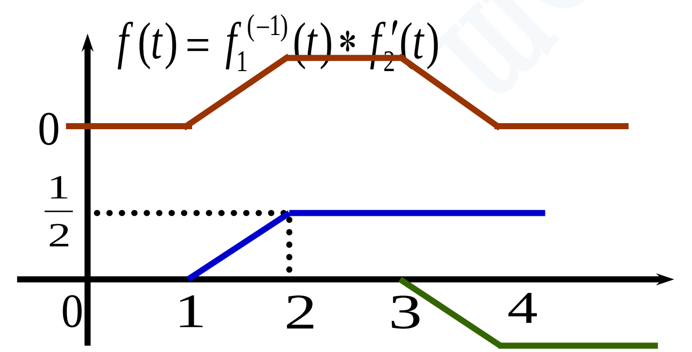


$\boxed{\lim_{t\to-\infty} f_{1、2}(t)=f_{1、2}(-\infty)=0}$

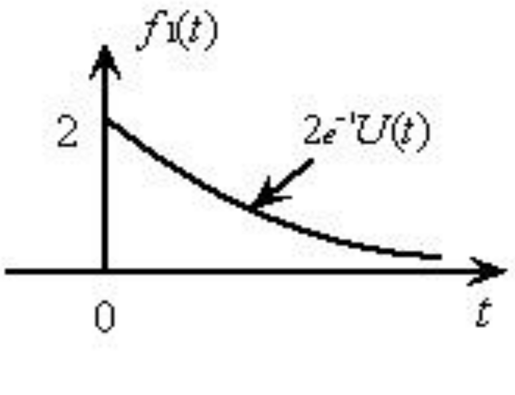
能用微积分的性质



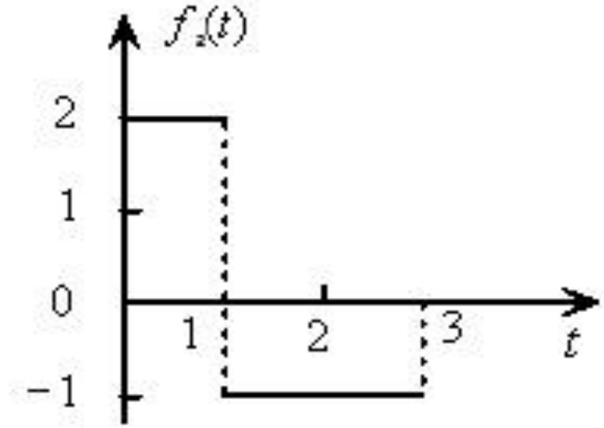




求图所示两函数的卷积积分。 $f(t)=\int f_1(t) * f_2'(t)=f_1'(t) * \int f_2(t)$



(a)



(b)

解：

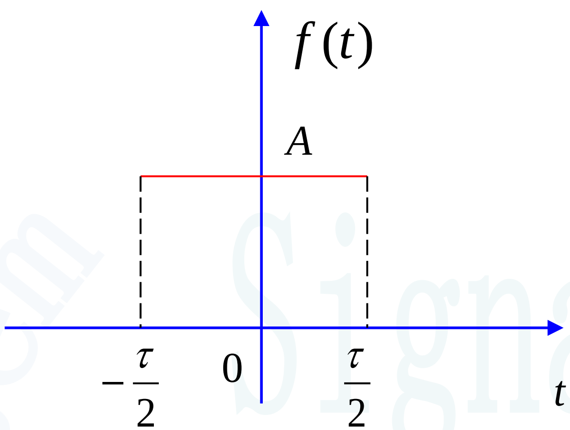
$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * f_2'(t)$$

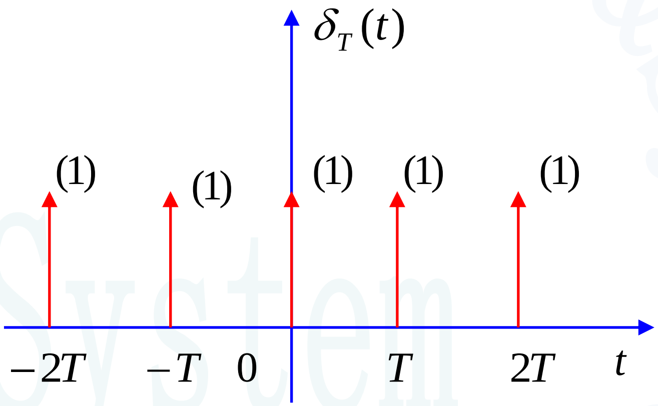
$$=\int_0^t 2e^{-\tau}d\tau * [2\delta(t)-3\delta(t-1)+\delta(t-3)]$$

$$=(2-2e^{-t})U(t)*[2\delta(t)-3\delta(t-1)+\delta(t-3)]$$

$$=2(2-2e^{-t})U(t)-3[2-2e^{-(t-1)}]U(t-1)+[2-2e^{-(t-3)}]U(t-3)$$

例3：时间函数f(t)与单位冲激函数 $\delta_T(t)$ **的波形如图所示，求** $f(t)*\delta_T(t)$ **并画出其波形。设** $\tau \le T$

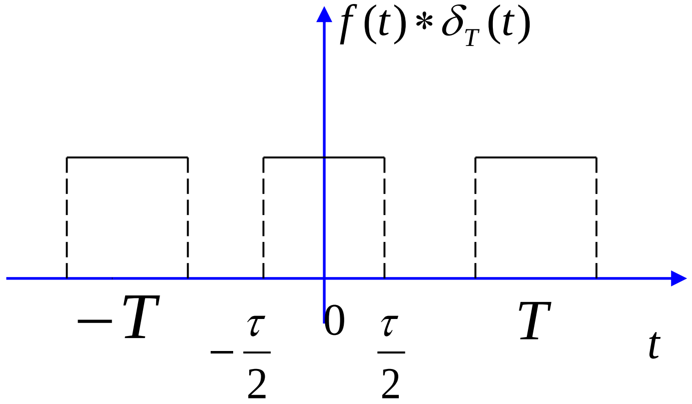




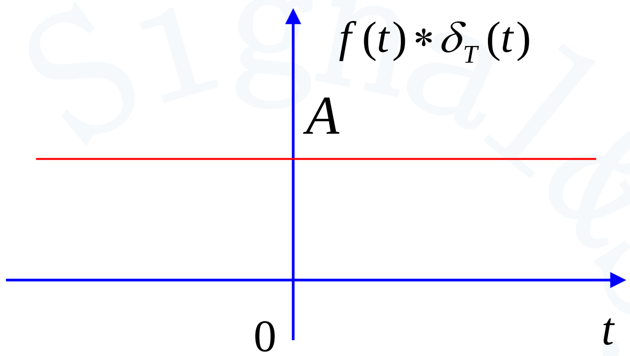
解：

$$f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(t)*\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(t-kT)\ldots\ldots k=0,\pm1,\pm2\ldots$$



$T>\tau$



$T=\tau$

当$T<\tau$时，$f(t)*\delta_T(t)$的波形如何？

例4：$f_1(t)=1,\ f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, 求$f_1(t)*f_2(t)$

解：$$f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}\varepsilon(\tau)d\tau=\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau$$

$$=e^{-\tau}\Big|_0^{\infty}=1$$

注意：套用 $f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=0*f_2^{(-1)}(t)=0$

显然是错误的。

例5:已知 $f_1(t)*e^{-t}u(t)=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$

求 f1(t) 。

解: 将原式等号两端同时求一阶导数得

卷积微分性质

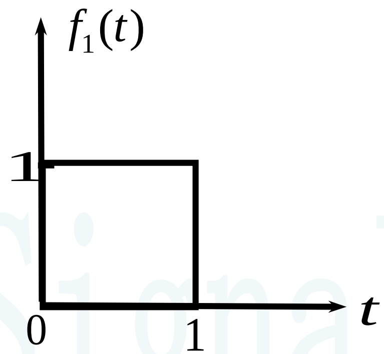
$$f_1(t)*\left[\delta(t)-e^{-t}U(t)\right]=e^{-t}U(t)-e^{-(t-1)}\ U(t-1)$$

$$f_1(t)-\boxed{f_1(t)*e^{-t}U(t)}=e^{-t}U(t)-e^{-(t-1)}\ U(t-1)$$

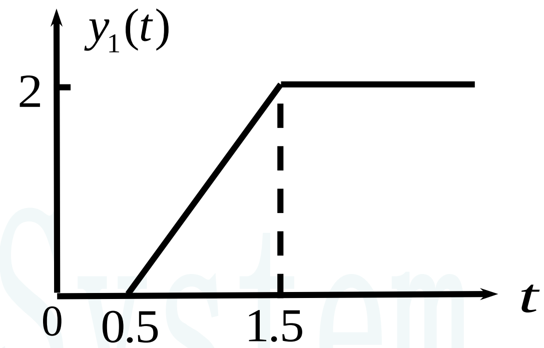
已知条件

$$f_1(t)=U(t)-U(t-1)$$

例6:已知激励和零状态响应波形，求冲激响应。



$$f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$$



$$y_1(t)$$

$$g(t) = \varepsilon(t) * h(t)$$

$$y_1(t) = f_1(t) * h(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * h(t) = g(t) - g(t-1)$$

$$y_1(t) = 2(t-0.5)\varepsilon(t-0.5) - 2(t-1.5)\varepsilon(t-1.5)$$

$$\rightarrow \quad g(t) = 2(t-0.5)\varepsilon(t-0.5)$$

$$h(t) = g'(t) = 2\varepsilon(t-0.5)$$

第二章总结

1、LTI连续系统的响应：

全响应＝齐次解(自由响应)＋特解(强迫响应)

2、关于0-和0+初始值

当系统已经用微分方程表示时，如果包含有δ(t)及其各阶导数，说明相应的0－状态到0＋状态发生了跳变。

计算0+初始值的方法：

冲激函数匹配法

如果方程右端δ(t)的最高阶次为0，可以用直接积分的方法

3、零输入响应和零状态响应

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

自由响应＋强迫响应；瞬态响应+稳态响应；零输入响应＋零状态响应

4、冲激响应和阶跃响应

5、卷积积分

卷积过程可分解为四步：

（1）换元：　t换为τ→得f1(τ)，　f2(τ)

（2）反转：由f2(τ)反转→ f2(–τ)

（3）平移：右移t → f2(t-τ)

（4）乘积：　f1(τ) f2(t-τ)

（5）积分：　τ从–∞到∞对乘积项积分。

6、卷积积分的性质

若$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$$

特例：$f_1(t)*f_2(t)=f_1^{'}(t)*f_2^{(-1)}(t)$

- $f(t)*\delta(t)=f(t)$， $f(t)*\delta(t-t0)=f(t-t0)$
- $f(t-t1)*\delta(t-t2)=f(t-t1-t2)$ ，
- $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$, $f(t)*\delta''(t)=f''(t)$, …

本章习题

- 全响应

  2-5，2-6
- 冲激响应、阶跃响应

  2-9（1,2）
- 卷积的计算

  2-14、2-15(1,4)，
- 卷积的性质

  2-16
- 卷积法求解系统响应

  2-21