

信号与系统

第一章

1-2 分别判断下列各函数式属于何种信号。(重复题 1-1 所问。)

$$(1) e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$(4) \sin(n\omega_0) \quad (\omega_0 \text{ 为任意值})$$

$$(2) e^{-nT}$$

$$(5) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(3) \cos(n\pi)$$

以上各式中 n 为正整数。

解: 根据表 1-1, 易知 (1) 是连续时间信号中的模拟信号, (2)~(5) 是离散时间信号。进一步考查后者的值域, 可知只有 (3) 取值孤立点 ± 1 , (2)、(4)、(5) 均有无穷多种取值, 故 (3) 是数字信号, (2)、(4)、(5) 是抽样信号。

本题中 (5) 最容易被错判为数字信号, 因为其取值 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ 也是离散的, 但随着 $n \rightarrow \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的值域元素趋于无穷多, 所以 (5) 仍是抽样信号。

1-3 分别求下列各周期信号的周期 T 。

(1) $\cos(10t) - \cos(30t)$

(2) e^{j10t}

(3) $[5 \sin(8t)]^2$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - nT) - u(t - nT - T)]$ (n 为正整数)

解: 如果信号 $f(t)$ 不是常量, 且在定义域内满足 $f(t) = f(t + nT)$, 其中 n 为任意整数, 则称之为周期信号, 其中满足上式成立的最小 T 称为 $f(t)$ 的周期。复指数信号、正弦和余弦信号是最简单的周期信号。

(1) 原信号由 $\cos(10t)$ 和 $\cos(30t)$ 两个周期信号组成, 其中 $\cos(10t)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, $\cos(30t)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$, 所以原信号的周期是两者的最小公倍数, 即 $\frac{\pi}{5}$ 。

(2) 原信号的周期是 $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ 。

(3) 原信号 $= 25 \sin^2(8t) = \frac{25}{2} [1 - \cos(16t)]$, 由两部分组成。由于前者是常数, 所以周期由后者决定, 即 $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ 。

(4) 考查求和符号内的表达式, 有

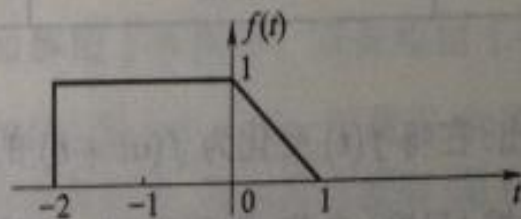
$$(-1)^n [u(t - nT) - u(t - nT - T)] = \begin{cases} (-1)^n & nT < t < (n+1)T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

所以原信号中的无穷多项在任一时间只有一项取值 $(-1)^n$, 其余取值均为零, 从而得到

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (-1)^n \quad nT < t < (n+1)T \\ &= \begin{cases} 1 & 2nT < t < (2n+1)T \\ -1 & (2n+1)T < t < (2n+2)T \end{cases} \end{aligned}$$

其中 n 为正整数。所以对于 $t > 0$, 原信号周期为 $2T$ 。

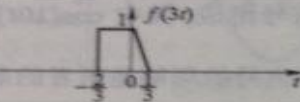
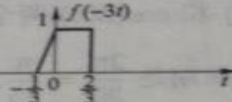
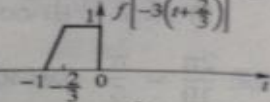
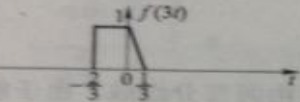
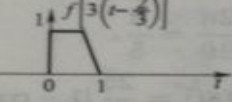
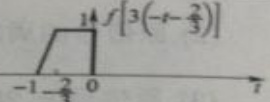
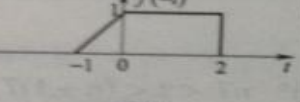
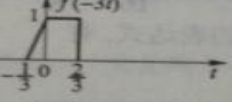
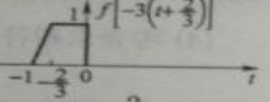
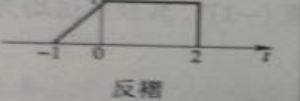
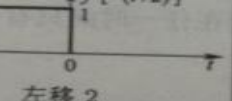
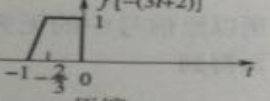
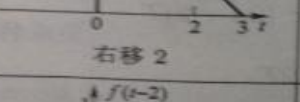
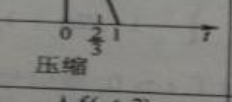
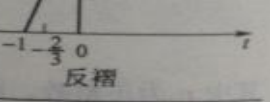
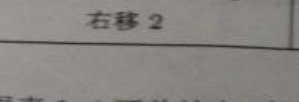
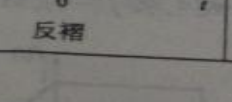
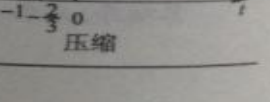
1-4 对于主教材例 1-1 所示信号 (题图 1-4), 由 $f(t)$ 求 $f(-3t-2)$, 但改变运算顺序, 先求 $f(3t)$ 或先求 $f(-t)$, 讨论所得结果是否与原例之结果一致。



题图 1-4

解: 将 $f(t)$ 变为 $f(-3t-2)$ 需经压扩(尺度)、反褶和移位三个步骤, 可以任意顺序执行, 按排列组合共有六种实现方法。需注意每一种操作都是针对 t 进行, 因而移位的方向和数值会有变化。六种方法的操作步骤和结果如表 1-4 所示。

表 1-4

方法	第一步	第二步	第三步
1	 压缩	 反褶	 左移 $\frac{2}{3}$
2	 压缩	 右移 $\frac{2}{3}$	 反褶
3	 反褶	 压缩	 左移 $\frac{2}{3}$
4	 反褶	 左移 2	 压缩
5	 右移 2	 压缩	 反褶
6	 右移 2	 反褶	 压缩

根据表 1-4 可总结出: 在将 $f(t)$ 变化为 $f(at+b)$ 的三个步骤中,

A. 若移位发生在压扩(尺度)之前, 则移位 $|b|$, 否则移位 $\left|\frac{b}{a}\right|$ 。

B. 若移位发生在反褶之前(或无反褶), 则左移 ($b > 0$) 或右移 ($b < 0$), 否则右移 ($b > 0$) 或左移 ($b < 0$)。

1-8 试将描述主教材图 1-15(题图 1-8) 所示波形的主教材式 (1-16) 和主教材式 (1-17) 改用阶跃信号表示。

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t-t_0)}, & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases} \quad \text{主教材式(1-16)}$$

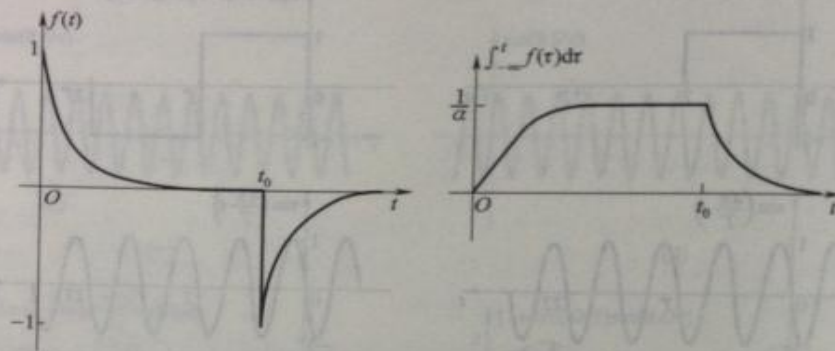
$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}), & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{1}{\alpha}[1 - e^{-\alpha(t-t_0)}], & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases}$$

主教材式(1-17)

解: 和题 1-7 相反, 本题考查用 $u(t)$ 表示分段连续信号的方法。不失一般性, 分段连续信号可分为三种: A. 相邻段之间的分隔点有定义且连续; B. 分隔点无

定义; C. 分隔点有定义但不连续。A 类信号一般形式为

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & -\infty < t < t_1 \\ g_2(t) & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_N(t) & t_{N-1} \leq t < \infty \end{cases} \quad (1)$$



题图 1-8

其中 $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1}$, $g_i(t_i) = g_{i+1}(t_i)$, $1 \leq i < N$ 。B 类和 C 类信号的一般形式和 A 类相仿, 对于 B 类, 式 (1) 中的 \leq 全部换成 $<$; 对于 C 类, 每个区间的上下限可能是 \leq 或 $<$, 且 $g_i(t_i) \neq g_{i+1}(t_i)$ 。

无论 A 类还是 B 类, 都可用 $u(t)$ 及其移位表示为

$$f(t) = g_1(t)u(t_1 - t) + g_2(t)[u(t - t_1) - u(t - t_2)] + \dots + g_N(t)u(t - t_{N-1}) \quad (2)$$

具体的, 为表示 A 类信号可定义式 (2) 中的 $u(0) = \frac{1}{2}$; 为表示 B 类可不定义 $u(t)$ 在 0 时刻的取值。

对于 C 类, 式 (2) 不能表示其不连续点的值。实际上, “信号与系统” 涉及的大部分信号均为前两类信号, 即使有个别 C 类信号, 忽略间隔点的近似表示也不影响对概念的理解和后续分析讨论的正确性。因而不必纠缠于不连续点是否被严格表示的问题, 统一用式 (2) 的形式即可。

根据上述分析, 对主教材式 (1-16) 有

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\alpha t}[u(t) - u(t - t_0)] + [e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t-t_0)}]u(t - t_0) \\ &= e^{-\alpha t}u(t) - e^{-\alpha t}u(t - t_0) + e^{-\alpha t}u(t - t_0) - e^{-\alpha(t-t_0)}u(t - t_0) \\ &= e^{-\alpha t}u(t) - e^{-\alpha(t-t_0)}u(t - t_0) \end{aligned}$$

对主教材式 (1-17) 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) [u(t) - u(t - t_0)] + \left\{ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(t-t_0)}] \right\} u(t - t_0) \\ &= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t - t_0) + \frac{1}{\alpha} [-e^{-\alpha t} + e^{-\alpha(t-t_0)}] u(t - t_0) \\ &= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t) - \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(t-t_0)}] u(t - t_0) \end{aligned}$$

1-14 应用冲激信号的抽样特性, 求下列表示式的函数值。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u\left(t-\frac{t_0}{2}\right)dt$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t}+t)\delta(t+2)dt$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} (t+\sin t)\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt$$

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$$

解: 冲激信号具有筛选特性, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

特别的, 当 $t_0 = 0$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t_0)\delta(t)dt = f(-t_0)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t)dt = f(t_0)$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u\left(t-\frac{t_0}{2}\right)dt = u\left(t_0-\frac{t_0}{2}\right) = u\left(\frac{t_0}{2}\right)$$

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt = u(t_0-2t_0) = u(-t_0)$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t}+t)\delta(t+2)dt = e^{-(-2)}+(-2) = e^2-2$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} (t+\sin t)\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt = \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt = e^{-j\omega 0} - e^{-j\omega t_0} = 1 - e^{-j\omega t_0}$$

1-17 分别指出下列各波形的直流分量等于多少。

(1) 全波整流 $f(t) = |\sin(\omega t)|$

(2) $f(t) = \sin^2(\omega t)$

(3) $f(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$

(4) 升余弦 $f(t) = K[1 + \cos(\omega t)]$

解: 信号可分解为直流分量和交流分量之和

$$f(t) = f_D + f_A(t)$$

其中直流分量 f_D 是信号在其持续时间内的平均值

$$f_D = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

对于周期信号而言, 直流分量即一个周期内的均值

$$f_D = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt$$

(1) 因为 $\sin(\omega t) = -\sin(\omega t + \pi)$, 即 $|\sin(\omega t)| = |\sin(\omega t + \pi)| = \left| \sin \left[\omega \left(t + \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right|$, 所以周期为 $\frac{\pi}{\omega}$ 。

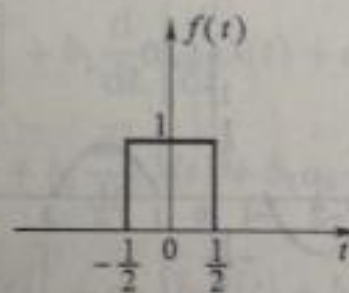
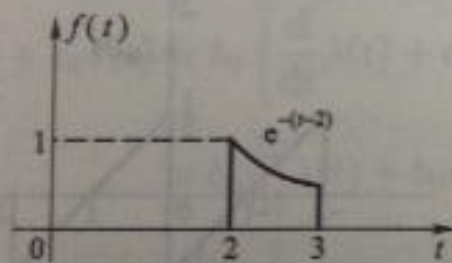
$$f_D = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} |\sin(\omega t)| dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \right) \cos(\omega t) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2}{\pi}$$

(2) $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$, 由于 $\cos(2\omega t)$ 无直流分量, 所以直接得到 $f_D = \frac{1}{2}$ 。

(3) 正弦信号和余弦信号均无直流分量, 所以 $f_D = 0$ 。

(4) 参考第 (2) 小题, 有 $f_D = K$ 。

1-18 粗略绘出题图 1-18 所示各波形的偶分量和奇分量。

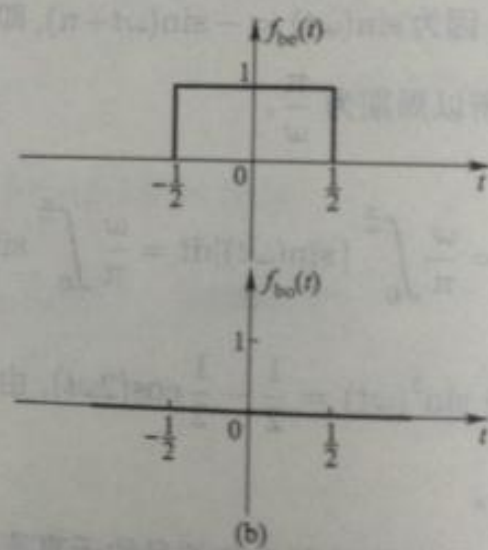
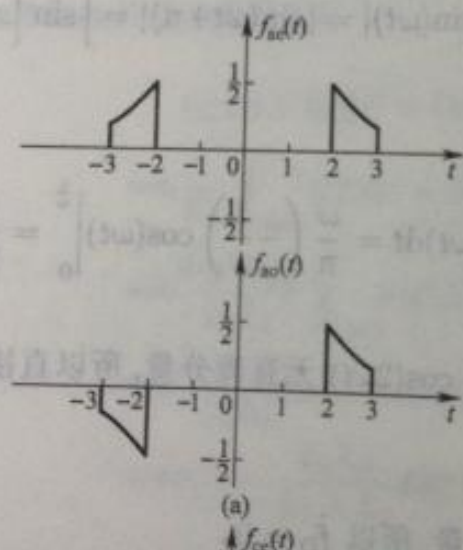


解: 信号 $f(t)$ 可分解为偶分量 $f_e(t)$ 和奇分量 $f_o(t)$ 之和

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

明显满足 $f_e(t) = f_e(-t)$ 和 $f_o(t) = -f_o(-t)$ 。由于上式中只有反褶和幅度减半的操作, 所以完成此类绘图题目时一般不需要经过原图 \rightarrow 表达式 \rightarrow 奇/偶分量表达式 \rightarrow 奇/偶分量波形图的步骤, 直接作图即可。如解图 1-18 所示。需注意题图 1-18(b) 本身即是偶函数, 所以偶分量是它自身, 奇分量为零。



1-24 证明 δ 函数的尺度运算特性满足 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ 。(提示: 利用主教材图 1-28, 当以 t 为自变量时脉冲底宽为 τ , 而改以 at 为自变量时底宽变成 $\frac{\tau}{|a|}$, 借此关系以及偶函数特性即可求出以上结果。)(新增习题)

证: 方法一: 根据提示, 参考主教材图 1-28, δ 函数可看作宽为 τ , 高为 $\frac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲在 $\tau \rightarrow 0$ 过程中形成的, 因为矩形脉冲的面积恒定为 1, 所以称为单位冲激函数。当以 at 为自变量时 (假设 $a > 0$), 矩形脉冲的高度仍为 $\frac{1}{\tau}$, 但底宽变成 $\frac{\tau}{a}$, 所以面积变成了 $\frac{1}{a}$, 即 $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$ 。因为 $\delta(t)$ 是偶函数, 所以当 $a < 0$ 时有 $\delta(at) = \delta(-at) = -\frac{1}{a}\delta(t)$, 即 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ 。

方法二: 利用狄拉克定义, $\delta(t)$ 满足下式。

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当 } t \neq 0) \end{cases}$$

容易证明

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |a| \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) d(at) = 1 \\ \delta(at) = 0 \quad (\text{当 } t \neq 0) \end{cases}$$

所以 $|a|\delta(at) = \delta(t)$, 即证明 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ 。

方法三: 参考主教材 (第二版) 第二章 (76 页) 利用“分配函数”的概念证明, 不再赘述。

信号与系统

第二章

2-5、2-6 完全响应的求解

2-9 (1)、(2) 作业, (3) 选做 冲激响应、阶跃响应

2-14

卷积

2-15 (1) (4) 作业, (2) (3) 选做

2-16 卷积 冲激函数卷积特性

2-19 卷积 利用冲激响应和激励信号求系统的响应

2-5 给定系统微分方程、起始状态以及激励信号分别为以下两种情况

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = e(t), r(0_-) = 0, e(t) = u(t)$$

$$(2) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = 3\frac{d}{dt}e(t), r(0_-) = 0, e(t) = u(t)$$

试判断在起始点是否发生跳变, 据此对 (1)、(2) 分别写出其 $r(0_+)$ 值。

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = e(t), r(0_-) = 0, e(t) = u(t)$$

$$(2) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = 3\frac{d}{dt}e(t), r(0_-) = 0, e(t) = u(t)$$

试判断在起始点是否发生跳变, 据此对 (1)、(2) 分别写出其 $r(0_+)$ 值。

解: 如果 $r(t)(0_- < t < 0_+)$ 及其各阶导数 $r^{(i)}(t), i \geq 1$ 中含有 $u(t)$ 分量, 则发生起始点跳变, 即 $r^{(i)}(0_-) \neq r^{(i)}(0_+), i \geq 0$ 。可用冲激函数匹配法判定。

(1) 将 $e(t) = u(t)$ 代入微分方程, 有

$$\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = u(t) \quad (1)$$

式 (1) 左右两侧奇异函数的最高阶分别是 $\frac{d}{dt}r(t)$ 和 $u(t)$, 为保证平衡, $\frac{d}{dt}r(t)$ 中一定含有 $u(t)$ 分量, 所以

$$r(0_+) - r(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} \frac{d}{dt}r(t)dt = \int_{0_-}^{0_+} u(t)dt = 0$$

所以起始点不发生跳变, $r(0_+) = r(0_-) = 0$ 。

(2) 将 $e(t) = u(t)$ 代入微分方程, 有

$$\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = 3\delta(t)$$

同样根据左右两侧奇异函数最高阶相同的原则, $\frac{d}{dt}r(t)$ 中一定含有 $3\delta(t)$ 分量 [或者说 $r(t)$ 中含有 $3u(t)$ 分量], 所以

$$r(0_+) - r(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} \frac{d}{dt}r(t)dt = \int_{0_-}^{0_+} 3\delta(t)dt = 3$$

所以起始点发生跳变, $r(0_+) = r(0_-) + 3 = 3$ 。

2-6 给定系统微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$$

若激励信号和起始状态为

$$e(t) = u(t), r(0_-) = 1, r'(0_-) = 2$$

试求它的完全响应, 并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。提示: 将 $e(t)$ 代入方程后可见右端最高阶次奇异函数为 $\delta(t)$, 故左端最高阶次也为 $\delta(t)$ 。因而, $r(t)$ 项无跳变, 而 $r'(t)$ 项跳变值应为 1, 由此导出 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$ 。

解: 齐次解对应自由响应, 特解对应强迫响应。若无输入信号 (仅靠系统储能) 得到的是零输入响应, 系统无储能 (初始状态为零) 的响应称为零状态响应。

本题特征方程为 $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$, 解得 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$, 齐次解为

$$r_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} \quad (1)$$

根据激励信号 $e(t) = u(t)$, 特解形式为 $r_p(t) = B$, 代入原式得到 $2B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$, 从而有完全解

$$r(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \frac{3}{2} \quad (2)$$

因系统为二阶, 必然用到 $r'(0_+)$ 作边界条件, 所以对式 (2) 两侧求导 “备用”。

$$\frac{d}{dt} r(t) = -A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-2t} \quad (3)$$

根据提示用冲激函数匹配法确定初始状态。将 $e(t) = u(t)$ 代入原式, 得到

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) + 3 \frac{d}{dt} r(t) + 2r(t) = \delta(t) + 3u(t)$$

明显左侧最高阶 $\frac{d^2}{dt^2} r(t)$ 中含有 $\delta(t)$ 分量, 所以

$$r'(0_+) = r'(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 2 + 1 = 3$$

第二高阶 $\frac{d}{dt} r(t)$ 中不含 $\delta(t)$ 分量, 只含有 $u(t)$ 分量, 参考题 2-5(1), $r(0)$ 不发生跳变, 所以 $r(0_+) = r(0_-) = 1$, 和 $r'(0_+) = 3$ 分别代入式 (2) 和式 (3) 有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{3}{2} = 1 \\ -A_1 - 2A_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

将 A_1 、 A_2 代回式 (2) 得到完全响应为

$$r(t) = \left(2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \right) u(t)$$

再求零输入响应, 即将 $r(0_-) = 1, r'(0_-) = 2$ 分别代入式 (1) 及其两侧求导的结果, 得到

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -A_1 - 2A_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 4 \\ A_2 = -3 \end{cases}$$

所以零输入响应为

$$r_{zi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t}) u(t)$$

最后根据定义求零状态响应。系统无储能条件下, 输入导致的跳变即系统的 0_+ 状态, 根据前述冲激函数匹配的结果有 $r(0_+) = 0, r'(0_+) = 1$, 代入式 (2) 和式 (3) 有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{3}{2} = 0 \\ -A_1 - 2A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

将 A_1 、 A_2 代回式 (2) 得到零状态响应

$$r_{zs}(t) = \left(-2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \right) u(t)$$

最终写出

$$\begin{aligned} r(t) &= \underbrace{2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{4e^{-t} - 3e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(-2)e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}}_{\text{零状态响应}} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

本题重在介绍由定义计算零状态响应的方法, 实际计算中只要用完全响应减去零输入响应即可得到零状态响应。

2-9 求下列微分方程描述的系统冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 。

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 2\frac{d}{dt}e(t)$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + \frac{d}{dt}r(t) + r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + e(t)$$

$$(3) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 3\frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$$

2-9 (1)、(2) 作业, (3) 选做

2-9 (答)

解: 冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 定义为零状态条件下分别以 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 激励系统得到的输出。特别的, $\delta(t)$ 只有 $0_- < t < 0_+$ 时刻非零, $t > 0$ 时并无输入, 因而 $h(t)$ 的特解为零, 齐次解即完全解。所以求 $h(t)$ 的步骤是先用冲激函数匹配法确定初始状态, 再代入齐次解确定系数。

对于阶跃响应, 由于 $u(t)$ 在 $t > 0$ 时为常数, 所以特解为常数。因而需先求出特解, 再将初始状态代入完全解确定待定系数。

此外, 由于 $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, 根据 LTI 系统的微分特性, $h(t) = \frac{d}{dt}g(t)$, 或者 $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$, 因而只要求出两者中的一个即可用微分或积分确定另一个。

(1) 将 $e(t) = \delta(t)$ 代入求冲激响应 $r(t) = h(t)$

$$\frac{d}{dt}h(t) + 3h(t) = 2\frac{d}{dt}\delta(t) \quad (1)$$

根据冲激函数匹配法, 为保证最高阶平衡, $\frac{d}{dt}h(t)$ 内有一定的 $\frac{d}{dt}\delta(t)$ 分量, 即 $h(t)$ 内有 $\delta(t)$ 分量, 同时为保证次高阶平衡, $h(t)$ 内还必须要有相当的 $u(t)$ 分量 [以便求导后产生的 $\delta(t)$ 分量抵消掉 $h(t)$ 中的 $\delta(t)$ 分量], 所以定义

$$h(t) = a\delta(t) + bu(t) \quad (0_- < t < 0_+)$$

并代入式 (1) 得到

$$a\delta'(t) + b\delta(t) + 3a\delta(t) + 3bu(t) = 2\delta'(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b + 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

所以

$$h(0_+) = h(0_-) + h(t)\Big|_{0_-}^{0_+} = 0 - 6 = -6$$

2-9答 (续)

注意 $h(t)\Big|_{0-}^{0+}$ 中发挥作用的是 $-6u(t)$ 分量。由特征方程 $\alpha + 3 = 0$ 写出齐次解 $h(t) = Ae^{-3t}$, 代入 $h(0_+) = -6$ 解得 $A = -6$, 所以最终得到

$$h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

注意不要忘记由冲激函数匹配法计算出的 $2\delta(t)$ 分量。下面用积分和直接计算两种方法求阶跃响应 $g(t)$ 。

方法一: 积分。

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [2\delta(\tau) - 6e^{-3\tau}u(\tau)] d\tau \\ &= 2u(t) + \int_{0+}^t -6e^{-3\tau} d\tau = 2u(t) + 2e^{-3\tau}\Big|_{0+}^t = 2e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

方法二: 直接计算。将 $e(t) = u(t)$ 和 $r(t) = g(t)$ 代入得到

$$\frac{d}{dt}g(t) + 3g(t) = 2\delta(t) \quad (2)$$

根据冲激函数匹配法, $\frac{d}{dt}g(t)$ 内有 $2\delta(t)$, 所以

$$g(0_+) = g(0_-) + \int_{0-}^{0+} 2\delta(t) dt = 0 + 2 = 2$$

将特解 $g_p(t) = B$ 代入式 (2) 解得 $B = 0$, 齐次解即完全解。所以将 $g(0_+) = 2$ 代入 $g(t) = Ae^{-3t}u(t)$ 解得 $A = 2$, 所以最终有

$$g(t) = 2e^{-3t}u(t)$$

和对 $h(t)$ 直接积分得到的结果相同。

(2) 将 $e(t) = \delta(t)$ 和 $r(t) = h(t)$ 代入求冲激响应

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + \frac{d}{dt}h(t) + h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + \delta(t)$$

由冲激函数匹配法可知 $\frac{d^2}{dt^2}h(t)$ 含有 $\frac{d}{dt}\delta(t)$ 分量以保证最高阶平衡, 即 $\frac{d}{dt}h(t)$ 中含有 $\delta(t)$ 分量, 显见次高阶也平衡, 所以 $\frac{d^2}{dt^2}h(t)$ 内不含 $\delta(t)$ 分量。

$$h(0_+) = h(0_-) + \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 0 + 1 = 1$$

$$h'(0_+) = h'(0_-) = 0$$

2-9答 (续)

由特征方程 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 解出 $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得到齐次解

$$\begin{aligned} h(t) &= A_1 e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})t} + A_2 e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})t} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(A_1 e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + A_2 e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

两侧求导得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + \\ &\quad e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}B_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \\ &\quad e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}B_1 - \frac{1}{2}B_2 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned} \quad (4)$$

将 $h(0_+) = 1$ 和 $h'(0_+) = 0$ 分别代入式 (3) 和式 (4) 得到

$$\begin{cases} B_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

再代回式 (3) 写出冲激响应

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] u(t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) u(t) \end{aligned}$$

下面也用两种方法求解阶跃响应。

方法一: 积分。

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) u(\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) d\tau = \frac{4}{3} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} d\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) \Big|_0^t + \frac{2}{3} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} d\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) \Big|_0^t - \\
 &\quad \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \frac{\pi}{6}\right) d\tau \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3} g(t)
 \end{aligned}$$

解出

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \left\{ 1 + e^{-\frac{1}{2}t} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) \right] \right\} u(t) \\
 &= \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \right] u(t)
 \end{aligned}$$

方法二: 直接计算。将 $e(t) = u(t)$ 和 $r(t) = g(t)$ 代入得到

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t) + \frac{d}{dt}g(t) + g(t) = \delta(t) + u(t) \quad (5)$$

根据冲激函数匹配法, $\frac{d^2}{dt^2}g(t)$ 内有 $\delta(t)$, 即 $\frac{d}{dt}g(t)$ 内有 $u(t)$ 且不含 $\delta(t)$, 两侧配平。所以

$$g(0_+) = g(0_-) = 0$$

$$g'(0_+) = g'(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 0 + 1 = 1$$

将特解 $g_p(t) = B$ 代入式 (5) 解得 $B = 1$, 完全解为

$$g(t) = 1 + e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \quad (6)$$

两侧求导得到 [参考式 (4)]

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}g(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \\
 &\quad e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}B_1 - \frac{1}{2}B_2 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)
 \end{aligned} \quad (7)$$

2-9答 (续)

将 $g(0_+) = 0$ 和 $g'(0_+) = 1$ 分别代入式 (6) 和式 (7) 解得

$$\begin{cases} 1 + B_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -1 \\ B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

代回式 (6) 最终得到

$$\begin{aligned} g(t) &= \left\{ 1 + e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \right\} u(t) \\ &= \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \right] u(t) \end{aligned}$$

和对 $h(t)$ 积分得到的结果相同。可见无论求积分, 还是确定完全解的待定系数, 处理衰减指数函数形式的表示式都是非常复杂和繁琐的。所以在同时求解冲激响应和阶跃响应的要求下, 先求阶跃响应, 再对其求导肯定容易些。请读者自行练习。

(3) 注意右侧微分阶数高于左侧一阶, 所以冲激响应中必含 $\delta(t)$ 的一阶导数, 配平更困难。所以考虑先求阶跃响应 $g(t)$, 再求导得到 $h(t)$ 。将 $e(t) = u(t)$ 和 $r(t) = g(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}g(t) + 2g(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 3\delta(t) + 3u(t) \quad (8)$$

下面不用待定系数, 直接用逻辑推理确定初始状态: 为使最高阶平衡, $\frac{d}{dt}g(t)$ 中一定含有 $\frac{d}{dt}\delta(t)$ 分量, 即 $g(t)$ 中含有 $\delta(t)$, 这样右侧还多余一个 $\delta(t)$, 它一定含在左侧的最高阶 $\frac{d}{dt}g(t)$ 中, 即 $g(t)$ 还含有一个 $u(t)$

$$g(t) = \delta(t) + u(t) \quad (0_- < t < 0_+)$$

从而有初始状态

$$g(0_+) = g(0_-) + g(t) \Big|_{0_-}^{0_+} = 0 + 1 = 1$$

由特征方程 $\alpha + 2 = 0$ 推出齐次解 $g_h(t) = Ae^{-2t}$ 。特解 B 代入式 (8) 得到 $2B = 3$ 即 $B = \frac{3}{2}$, 写出完全解表达式

$$g(t) = Ae^{-2t} + \frac{3}{2}$$

2-9答 (续)

代入 $g(0_+) = 1$ 得到 $A = -\frac{1}{2}$, 即有

$$g(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \right) u(t) + \delta(t)$$

注意不要忘记配平时求出的 $\delta(t)$ 。

对 $g(t)$ 求导计算 $h(t)$, 有

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-2t}u(t) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \right) \delta(t) + \delta'(t) \\ &= \delta'(t) + \delta(t) + e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

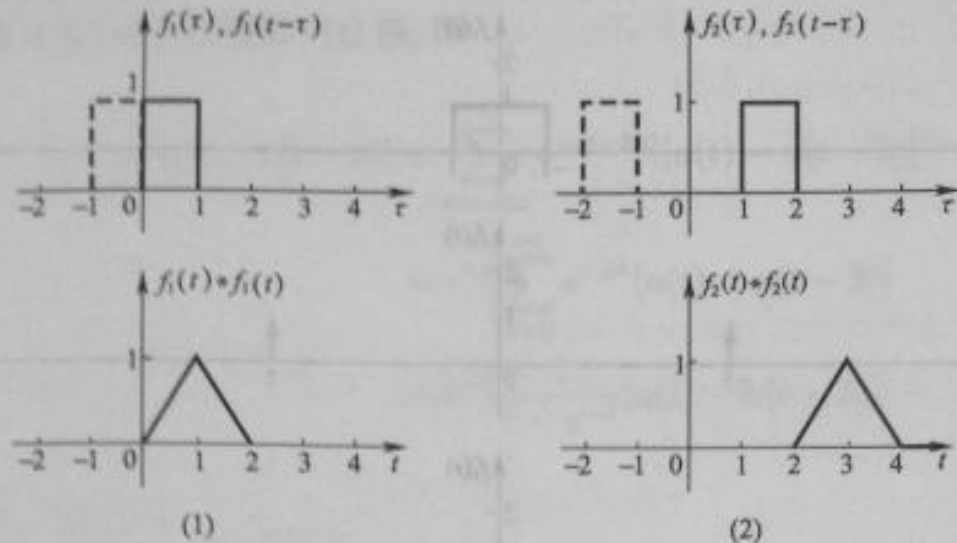
可见冲激函数中确实有 $\delta'(t)$, 验证了解题之初的推断。

2-14 求下列两组卷积, 并注意相互间的区别。

(1) $f(t) = u(t) - u(t-1)$, 求 $s(t) = f(t) * f(t)$;

(2) $f(t) = u(t-1) - u(t-2)$, 求 $s(t) = f(t) * f(t)$ 。

解: 用绘图法完成卷积运算, 如解图 2-14 所示。



解图 2-14

本题考查 $f(t)$ 移位后自身卷积的变化, 本质是卷积的交换律和 $\delta(t)$ 函数的性质。定义

$$f_1(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$s_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

$$s_2(t) = f_2(t) * f_2(t)$$

注意到 $f_2(t) = f_1(t) * \delta(t-1)$, 所以

$$s_2(t) = f_1(t) * \delta(t-1) * f_1(t) * \delta(t-1)$$

$$= f_1(t) * f_1(t) * \delta(t-1) * \delta(t-1)$$

$$= s_1(t) * \delta(t-2)$$

$$= s_1(t-2)$$

即 $s_2(t)$ 可由 $s_1(t)$ 右移 2 得到。

2-15 已知 $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$, $f_2(t) = \delta(t+5) + \delta(t-5)$, $f_3(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$, 画出下列各卷积波形。

$$(1) s_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$(2) s_2(t) = f_1(t) * f_2(t) * f_2(t)$$

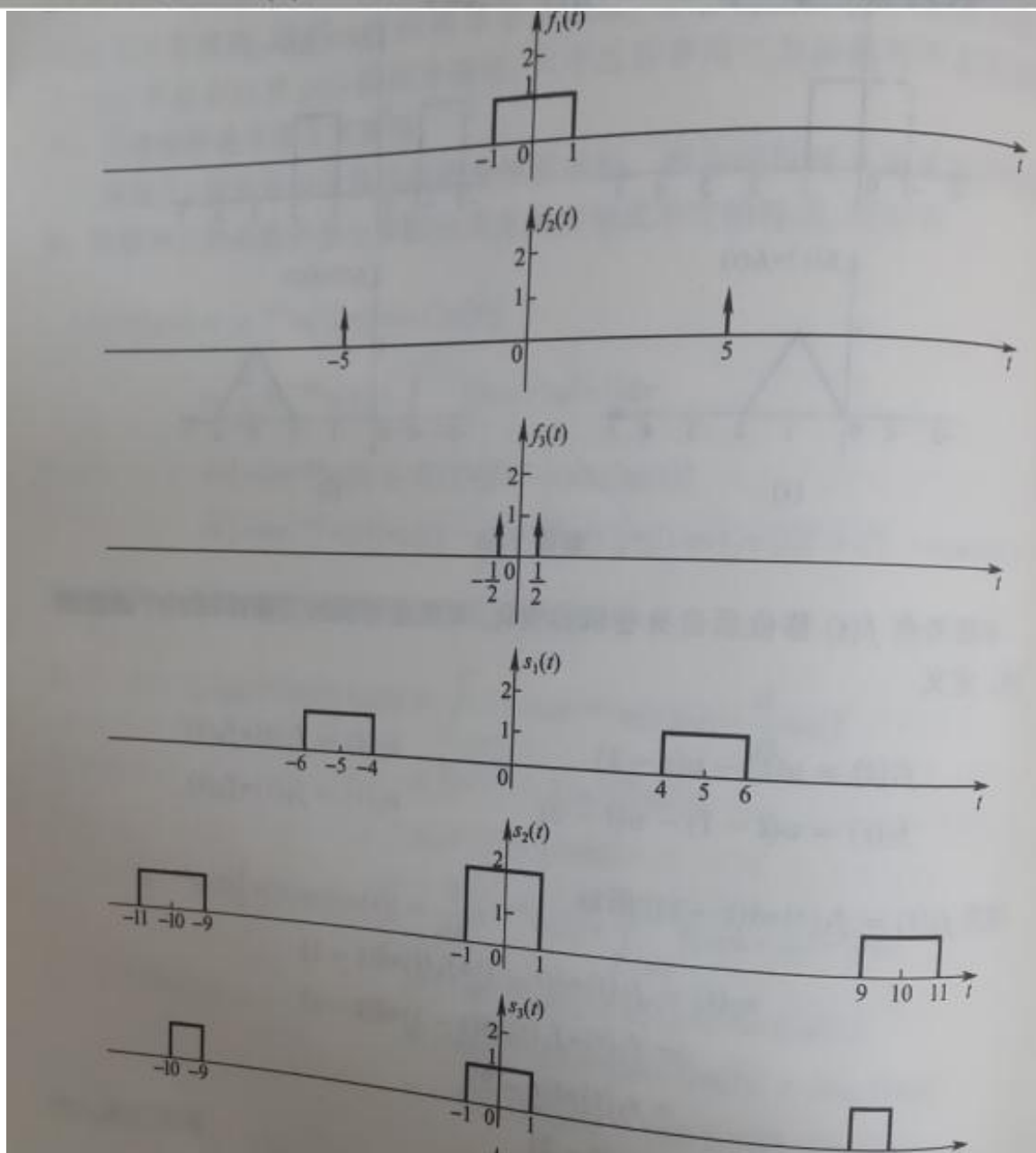
$$(3) s_3(t) = \{[f_1(t) * f_2(t)][u(t+5) - u(t-5)]\} * f_2(t)$$

$$(4) s_4(t) = f_1(t) * f_3(t)$$

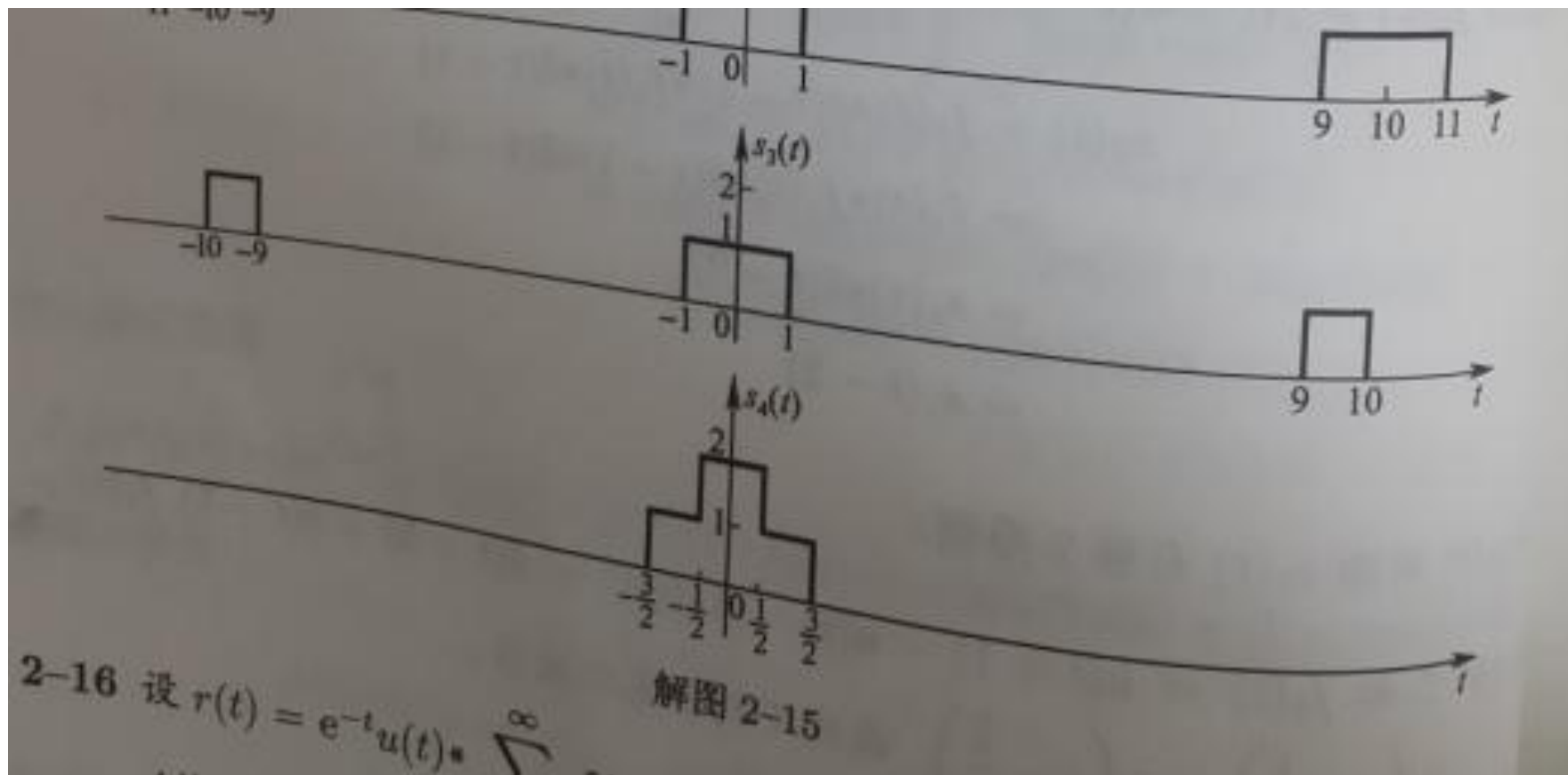
解: 本题考查 $\delta(t)$ 的筛选特性。无需列写公式, 直接绘图求解, 如解图 2-15

作业必做2-15(1)(4), 其他的自己练习

解: 本题考查 $\delta(t)$ 的筛选特性。无需列写公式, 直接绘图求解, 如解图 2-15



2-15答 (续)



解图 2-15

2-16 设 $r(t) = e^{-t}u(t)$ *

2-16 设 $r(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k)$, 证明 $r(t) = Ae^{-t}, 0 \leq t \leq 3$, 并求出 A 值。

解: 根据卷积的定义、线性性质和 $\delta(t)$ 函数的性质

2-16 设 $r(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k)$, 证明 $r(t) = Ae^{-t}, 0 \leq t \leq 3$, 并求出 A 值。

解: 根据卷积的定义、线性性质和 $\delta(t)$ 函数的性质

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3k)}u(t-3k)$$

欲求 $0 \leq t \leq 3$ 区间的 $r(t)$ 值, 即

$$\begin{aligned} r(t)[u(t) - u(t-3)] &= \sum_{k=-\infty}^0 e^{-(t-3k)}[u(t) - u(t-3)] \\ &= e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k}[u(t) - u(t-3)] \\ &= e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-3}}[u(t) - u(t-3)] \end{aligned}$$

题设得证, 且知 $A = \frac{1}{1 - e^{-3}}$ 。

2-21 已知系统的冲激响应 $h(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

(1) 若激励信号为

$$e(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)] + \beta\delta(t-2)$$

式中 β 为常数, 试决定响应 $r(t)$;

(2) 若激励信号表示为

$$e(t) = x(t)[u(t) - u(t-2)] + \beta\delta(t-2)$$

式中 $x(t)$ 为任意 t 函数, 若要求系统在 $t > 2$ 的响应为零, 试确定 β 值应等于多少?

解: 本题考查卷积的定义和计算, 以及冲激函数的筛选特性。注意卷积公式对 τ 进行积分, t 作为常量可提出。

(1) 将 $e(t)$ 和 $h(t)$ 代入卷积公式, 逐步推导化简 $r(t)$ 。

$$\begin{aligned}
 r(t) &= e(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) e^{-\tau} [u(\tau) - u(\tau-2)] d\tau + \beta e^{-2(t-2)} u(t-2) \\
 &= e^{-2t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau) u(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(t-\tau) u(\tau-2) d\tau + \beta e^4 u(t-2) \right] \\
 &= e^{-2t} \left[u(t) \int_0^t e^{\tau} d\tau - u(t-2) \int_2^t e^{\tau} d\tau + \beta e^4 u(t-2) \right] \\
 &= e^{-2t} [u(t) e^{\tau} \Big|_0^t - u(t-2) e^{\tau} \Big|_2^t + \beta e^4 u(t-2)] \\
 &= e^{-2t} [(e^t - 1)u(t) - (e^t - e^2)u(t-2) + \beta e^4 u(t-2)] \\
 &= e^{-2t} (e^t - 1)u(t) + e^{-2t} (\beta e^4 + e^2 - e^t)u(t-2)
 \end{aligned}$$

(2) 本题 $e(t)$ 和第 (1) 小题中激励信号的差异仅是把 e^{-t} 换成了 $x(t)$, 重复上述推导过程, 并重点关注 $t > 0$ 时响应的表达式。

$$\begin{aligned}
 r(t) &= e(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) x(\tau) [u(\tau) - u(\tau-2)] d\tau + \beta e^{-2(t-2)} u(t-2) \\
 &= e^{-2t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau} x(\tau) u(t-\tau) u(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau} x(\tau) u(t-\tau) u(\tau-2) d\tau + \right.
 \end{aligned}$$

2-21答案 (续)

$$\begin{aligned} & \beta e^4 u(t-2) \Big] \\ &= e^{-2t} \left[u(t) \int_0^t e^{2\tau} x(\tau) d\tau - u(t-2) \int_2^t e^{2\tau} x(\tau) d\tau + \beta e^4 u(t-2) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

当 $t > 2$ 时, 式 (1) 右侧方括号内三项都存在, 即

$$\begin{aligned} r(t)u(t-2) &= e^{-2t} \left[\int_0^t e^{2\tau} x(\tau) d\tau - \int_2^t e^{2\tau} x(\tau) d\tau + \beta e^4 \right] u(t-2) \\ &= e^{-2t} \left[\int_0^2 e^{2\tau} x(\tau) d\tau + \beta e^4 \right] u(t-2) \quad (2) \end{aligned}$$

注意式 (2) 右侧方括号内积分为常数。若要 $r(t)u(t-2) = 0$, 应有

$$\beta = -e^{-4} \int_0^2 e^{2\tau} x(\tau) d\tau.$$