2024-2025 学年度春季

课程名称：《自动控制原理（一）》
第10讲 控制系统的动态性能-Part 2

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象： 自动化2305班

(32人)

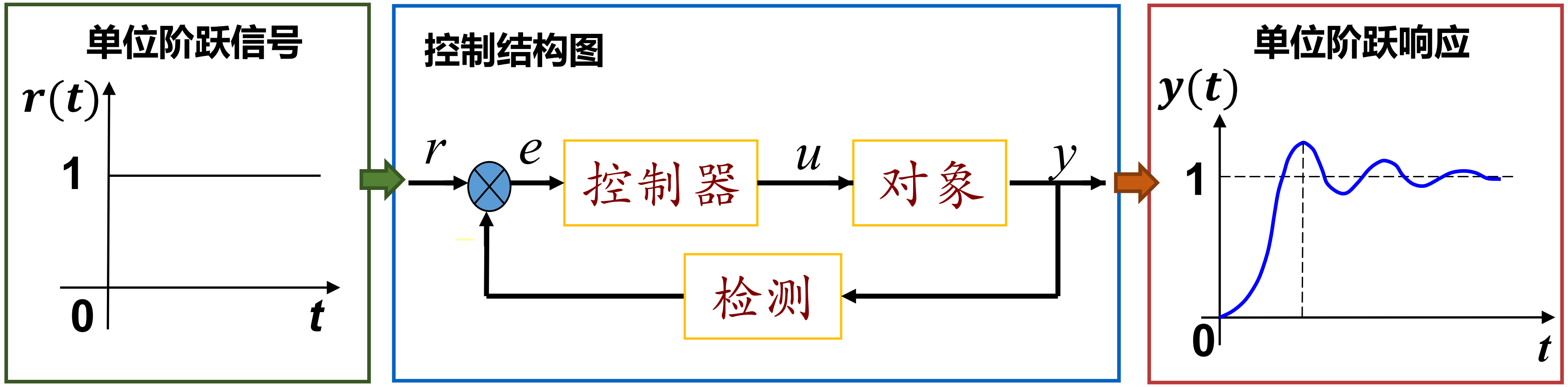
授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

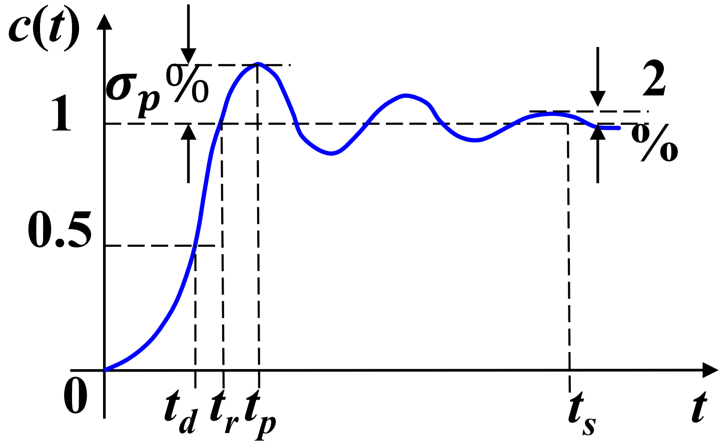
回顾-第9讲

■ 控制系统的动态性能

动态性能分析: 零初始条件下对系统的单位阶跃响应的动态过程进行分析。

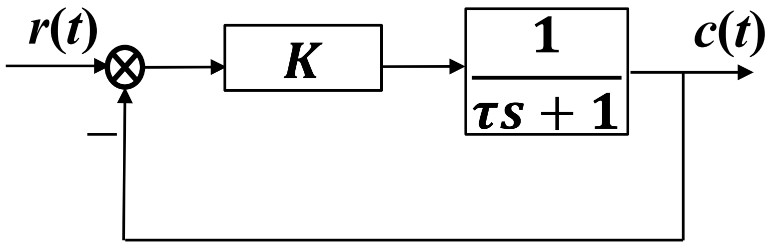


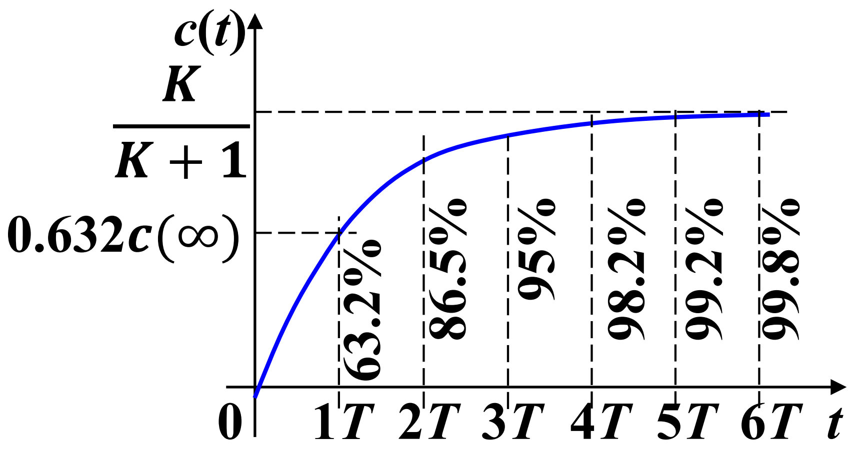
- 延迟时间t_d
- 上升时间t_r
- 峰值时间t_p
- 调整时间（调节时间）t_s
- 最大超调量σ_p
- 振荡次数
- 衰减比



■ 控制系统的动态性能

❑ 一阶系统：





该一阶系统的闭环传递函数为 $G_B(s) = \frac{K_B}{Ts+1}$

✓ 延迟时间： $t_d = 0.69T$。

✓ 调整时间： $t_s = \begin{cases} 3T, \Delta = 5\%, \\ 4T, \Delta = 2\%. \end{cases}$

✓ 上升时间： $t_r = 2.2T$。

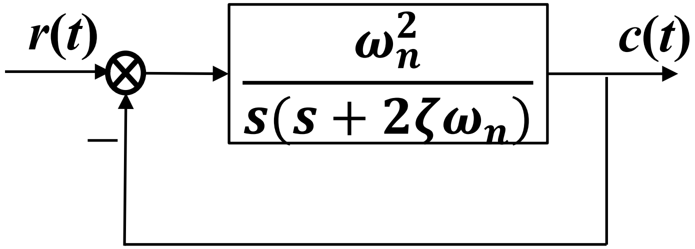
❑ 结论：闭环时间常数T完全反映了一阶系统的动态性能。

T反映系统惯性，T减小，惯性减小，响应速度加快。

■ 控制系统的动态性能

❑ 二阶系统性能指标分析

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t)$$

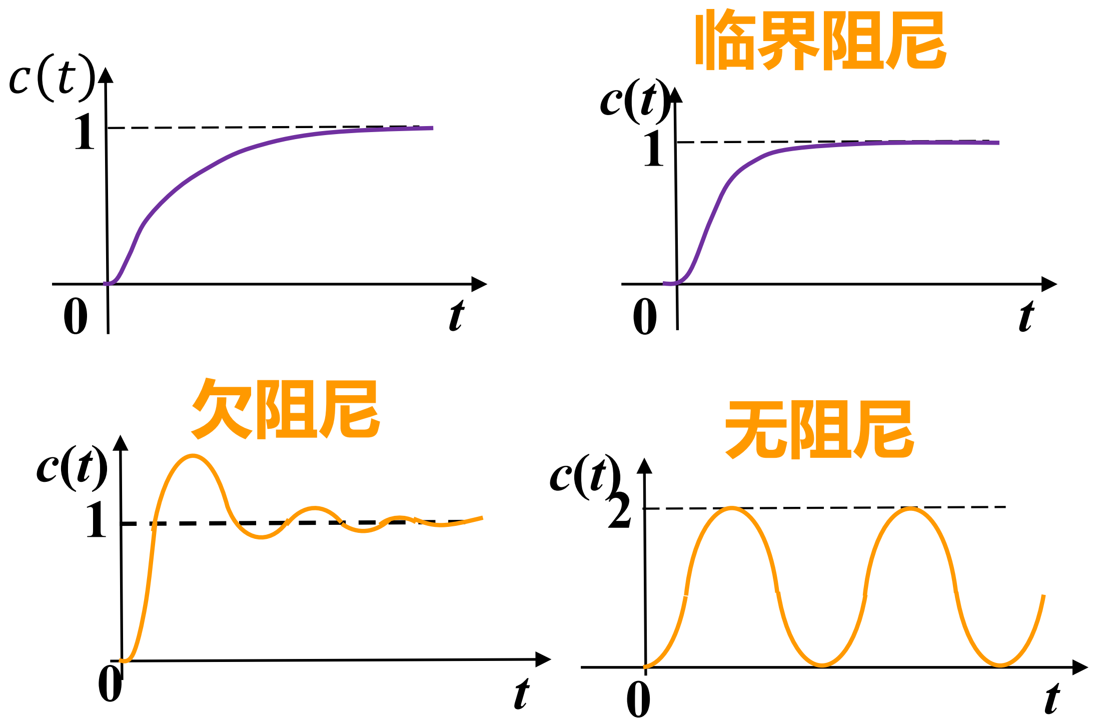


- 对$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$进行分析可判断系统的稳定性：
  - $\zeta < 0$为负阻尼，系统不稳定。
  - $\zeta = 0$为无阻尼，特征根为共轭纯虚根$s_{1,2} = \pm j\omega_n$，临界稳定。
  - $0 < \zeta < 1$为欠阻尼，系统稳定。
  - $\zeta = 1$为临界阻尼，特征根为实数重根$s_{1,2} = -\omega_n$，稳定。
  - $\zeta > 1$为过阻尼，系统稳定。

回顾-第9讲

【总结】

- 从振荡程度看，ζ越小振荡越厉害；ζ增大到一定程度时单调上升。
- 从过渡过程时间看，无振荡时，以临界阻尼时过渡过程时间最短。欠阻尼状态的过渡过程时间比临界阻尼时更短。



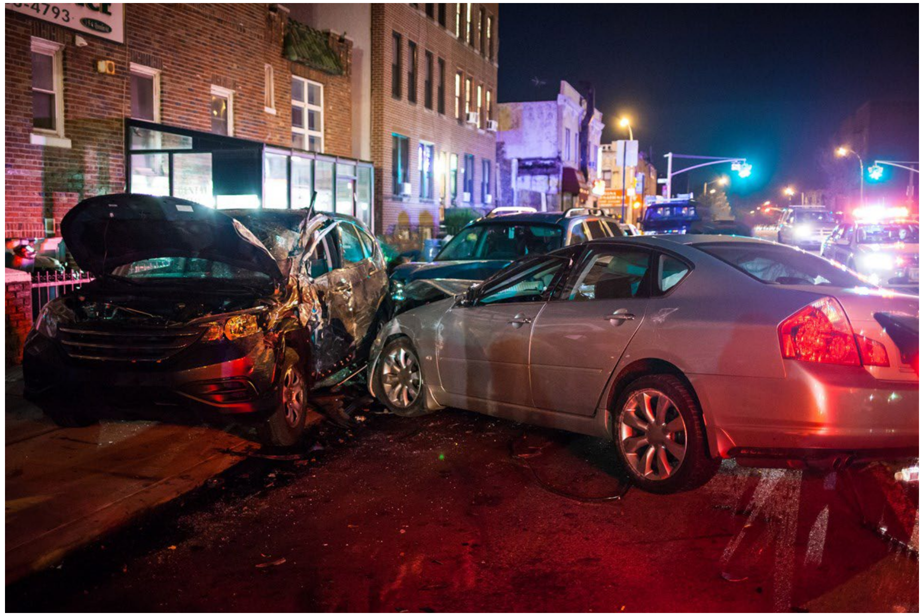
◆ 结论：ζ增大，振荡程度减小，过渡过程时间增长。

综合过渡过程时间和振荡程度，一般希望二阶系统工作在$\zeta = 0.4\sim0.8$的欠阻尼状态，此时过渡过程时间和振荡特性均可接受。

工程中常取$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$。

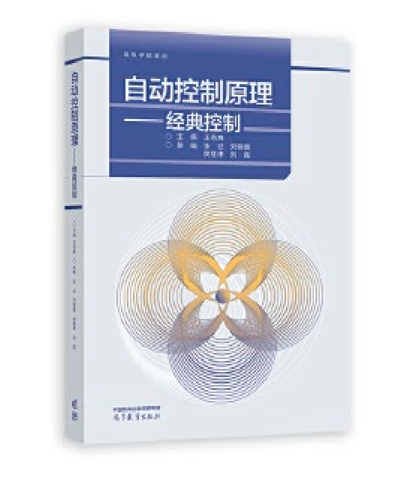
导入

■ 车辆跟驰事故(Uber无人车的碰撞事故)



约90%车辆追尾都是因为与前车没有保持安全距离

如何在车辆跟驰控制中跟前车始终维持安全距离?



第三章：控制系统的时域分析

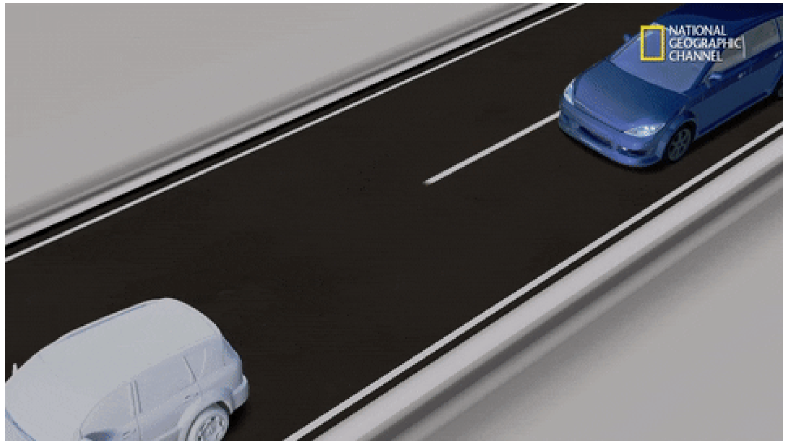
第10讲 控制系统的动态性能分析-Part 2

Transient Stability Analysis of Control Systems – Part 2

本讲内容

一、欠阻尼系统的性能指标

二、案例：车辆跟驰控制

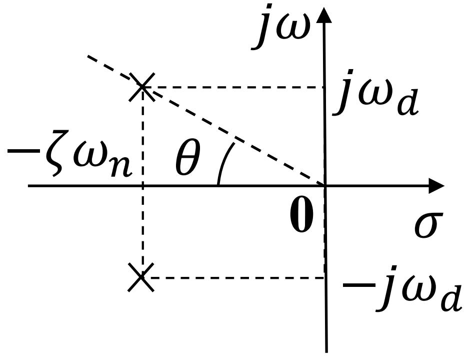


一、欠阻尼系统的性能指标

重点

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

1、上升时间t_r：即单位阶跃响应从0上升到第一个稳态值所需要的时间。



令$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1,$

则$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0,$

单位阶跃响应第一次到达1时$\omega_d t_r + \theta = \pi,$ **?能否为**$k\pi$**?**

因此$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}$。 **记**

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \theta = \arccos\zeta$$

结论：要使响应速度加快，即减小t_r，须使阻尼比ζ减小，自然振荡角频率ω_n增大。

一、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta)\,, t \geq 0,$$

2、**峰值时间** $\frac{dc(t)}{dt} = 0$**的时间即为所求。**

$$\boxed{\omega_d = \cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}$$

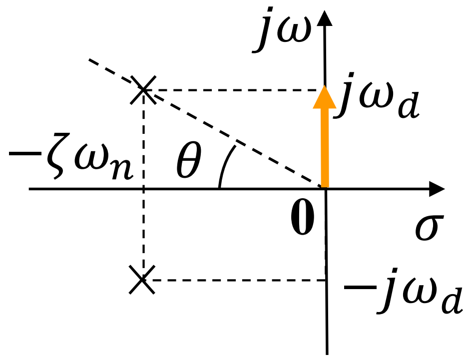
令$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\zeta\omega_n - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t + \theta)\omega_d = 0$

即$\sin(\omega_d t + \theta)\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_d t + \theta) = 0$, $\boxed{\theta = \arccos\zeta}$

得$\sin\omega_d t = 0$,

峰值时间是输出到达第一个最大值时对应的时间，

因此令$\omega_d t = \pi$**得**$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$。 **记**



结论：要使响应速度加快，即t_p减小，须使阻尼比ζ减小，自然振荡角频率ω_n增大。

一、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),t\geq 0,$$

$$\boxed{t_p=\frac{\pi}{\omega_d}}$$

3、**超调量** $\sigma_p=\dfrac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\%$

$$c(t_p)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}sin(\pi+\theta),$$

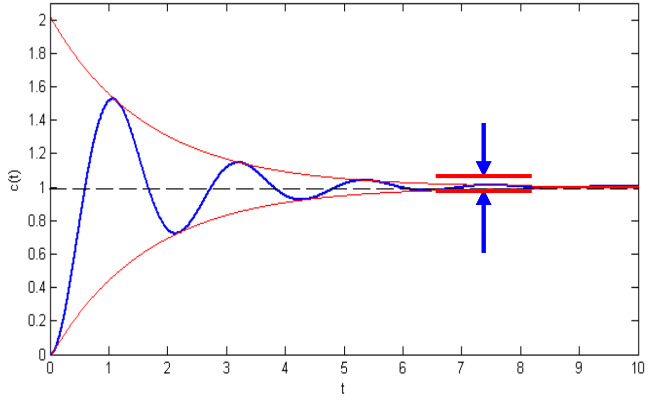
由$sin(\pi+\theta)=-sin\,\theta=-\sqrt{1-\zeta^2}$,

得$c(t_p)=1+e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, 而$c(\infty)=1$，则$\sigma_p=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$。 **记**

结论：超调量只与阻尼比有关。要想超调量减小，需阻尼比ζ增大。

一、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$



4、调整时间

利用包络线来求。定义上下包络线

$$c_1(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad c_2(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

➢ **可行性分析：取其中较大者与$c(t)$比较大小。由于**

$$c_1(t) - c(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}(1 + \sin(\omega_d t + \theta)) \geq 0,$$

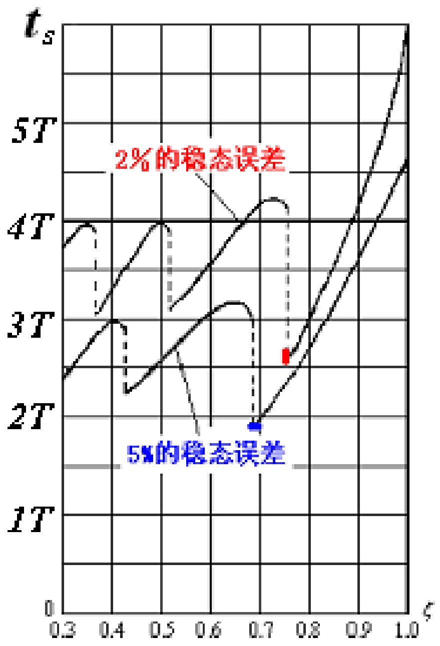
因此用包络线来求调整时间，最大误差为一个周期的时间。

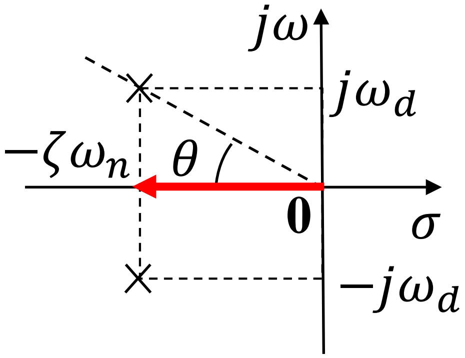
➢ **求解：令$c_1(t) - 1 = \Delta$，即$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta$，则$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$。**

一、欠阻尼系统的性能指标

$t_s=\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$，**如图所示。**

由图知，在ζ=0.69(Δ= 5%)或ζ =0.77 (Δ= 2%)时，t_s达到最小值。此后随ζ的增大几乎线性上升。





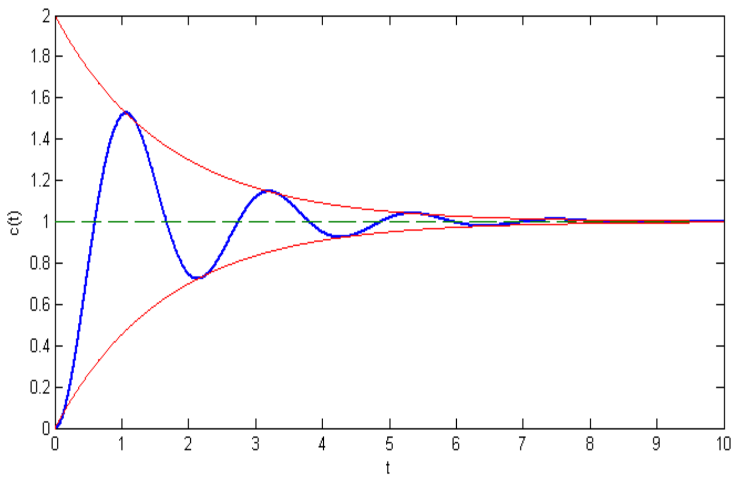
工程中常取

$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{4}{\zeta\omega_n},\Delta=2\% & \text{记}\\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\% & \text{记}\end{cases}$$

结论：要t_s减小，须使阻尼比ζ增大，自然振荡角频率ω_n增大。

一、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)\,,t\geq 0,$$



4、调整时间

?可否利用峰值时间来求?

由$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$**带入得**$c(t_p)=1\pm e^{-\zeta\omega_n t_p}$**，**

定义光滑曲线 $c_1(t)=1+e^{-\zeta\omega_n t}$，$c_2(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}$。

令$c_1-1=\Delta$**得**$t_s'=\frac{1}{\zeta\omega_n}ln\frac{1}{\Delta}$**，则**$t_s\approx\begin{cases}\frac{4}{\zeta\omega_n},\Delta=2\% \\ \frac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\%\end{cases}$。

➢ **误差分析：由于**$c_1-c=e^{-\zeta\omega_n t}(1+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta))$

曲线$c_1(t)$**存在小于**$c(t)$**的值。而包络线求出的**t_s**比真实值大。**

一、欠阻尼系统的性能指标

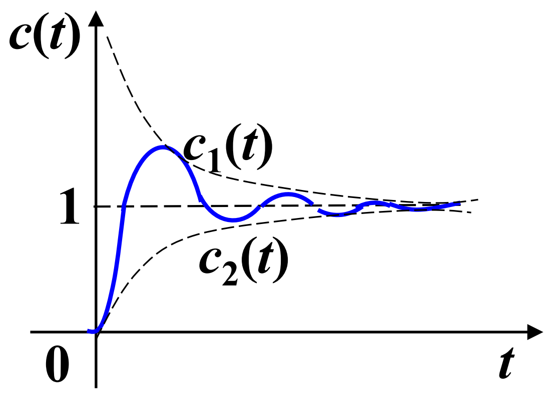
$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)\,,t\ge 0,$$

5、 **振荡次数N：在调节时间内响应曲线穿越其稳态值次数的一半。**

响应曲线振荡周期为$T_d=\dfrac{2\pi}{\omega_d}=\dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$，

由$t_s\approx\dfrac{4}{\zeta\omega_n},\Delta=2\%$或$\dfrac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\%$

则振荡次数$N=\dfrac{t_s}{T_d}\approx\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta},\Delta=2\%,\\[2ex]\dfrac{3\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta},\Delta=5\%。\end{cases}$



结论：振荡次数N只与阻尼比ζ有关，ζ越大，振荡次数越小。

一、欠阻尼系统的性能指标

重点

$$t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}\quad t_p=\frac{\pi}{\omega_d}\quad \sigma_p=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%\qquad \frac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\%$$

【总结】

- **当ω_n一定时，要减小t_r和t_p，须减少ζ；而要减小t_s，须使ζ增大，即响应初期速度与总体响应速度相互矛盾。**
- **当ζ一定时，增大ω_n可使t_r、t_p和 t_s都减少，提高快速性。**
- **σ_p和N只取决于ζ。ζ越小，σ_p越大，振荡次数N越大。**

在设计控制系统时，一般根据σ_p的要求选择ζ的值（一般$\zeta=0.4\sim0.8$）。再调节ω_n来满足时间指标要求。

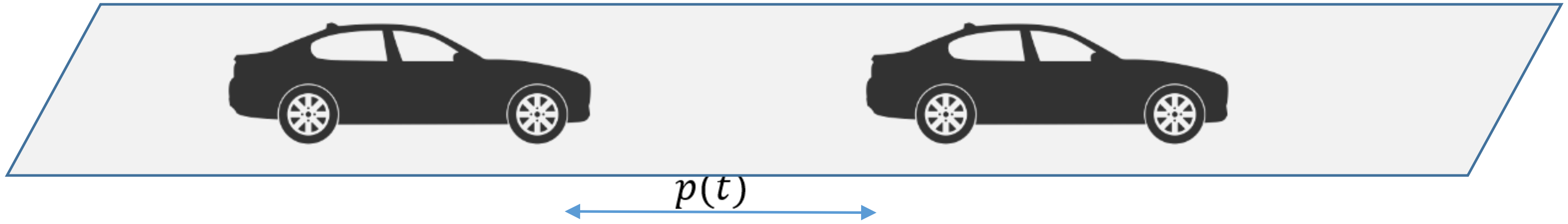
?其他阻尼下系统的动态性能指标能否套用欠阻尼的公式?

二、车辆跟驰控制案例

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^\star$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^\star$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时

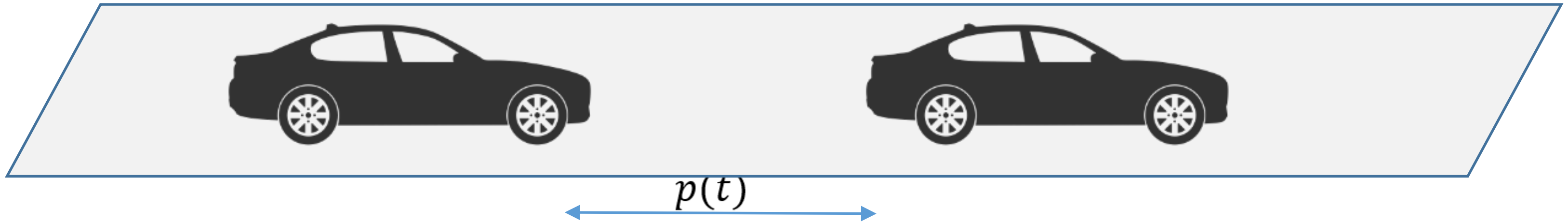
1）车辆跟驰动态过程中，相对距离不能小于4.5 m;

2）要求调节时间$t_s \le 2$秒(Δ =2%)。



二、车辆跟驰控制案例

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^\star$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^\star$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时



设$y(t) = 10 - p(t)$, $x(t) = v(t) - v^\star$, $y(0) = 0$, $x(0) = 0$

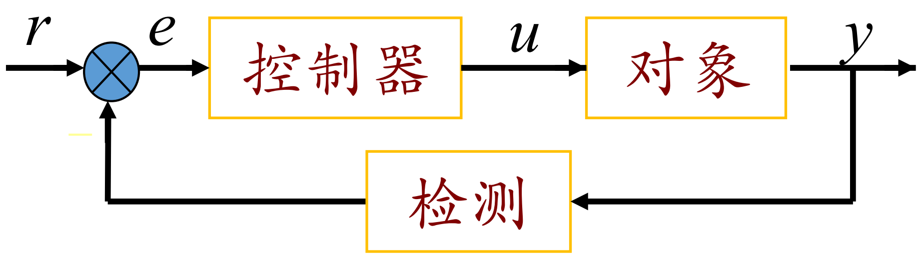
求导

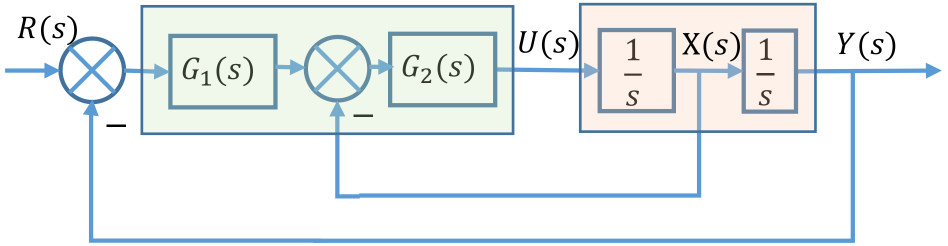
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\dot{p}(t) = v(t) - v^\star = x(t) \\ \dot{x}(t) = \dot{v}(t) = u(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{拉式变换}} \begin{cases} sY(s) = X(s) \\ sX(s) = U(s) \end{cases}$$

二、车辆跟驰控制案例

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^\star$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^\star$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时

设$y(t) = 10 - p(t)$，$x(t) = v(t) - v^\star$





期望输出: $y_{ref} = 10 - 5 = 5$

参考输入：$r(t) = 5l(t)$

最大超调量：

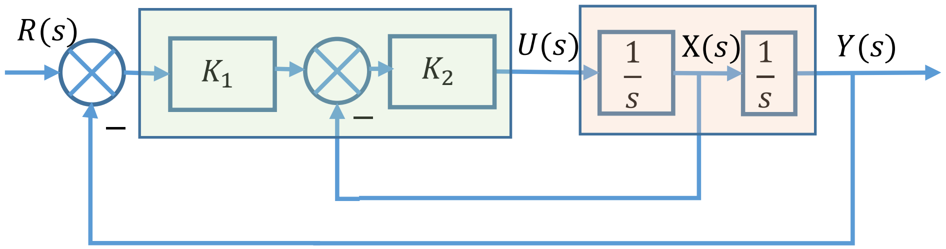
$$\sigma_p \le \frac{(10-4.5)-5}{5} \times 100\% = 10\%$$

调节时间：$t_s \le 2$ s

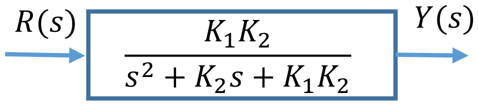
$G_1(s) = K_1 \quad G_2(s) = K_2$

如何结合欠阻尼二阶系统性能指标设计控制器参数K_1和K_2呢?

二、车辆跟驰控制案例



结构图化简



最大超调量： $\sigma_p \le 10\%$

调节时间： $t_s \le 2\ \mathrm{s}$

$$\begin{cases} \sigma_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \le 0.1 \\ t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1K_2 = \omega_n^2 \\ K_2 = 2\xi\omega_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi \ge 0.59 \\ \xi\omega_n \ge 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 0.7 \\ \omega_n = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} K_2 = 4.2 \\ K_1 = 2.2 \end{cases}$$

控制器: S域 $U(S) = K_2\left(K_1\left(R(s) - Y(s)\right) - X(s)\right)$

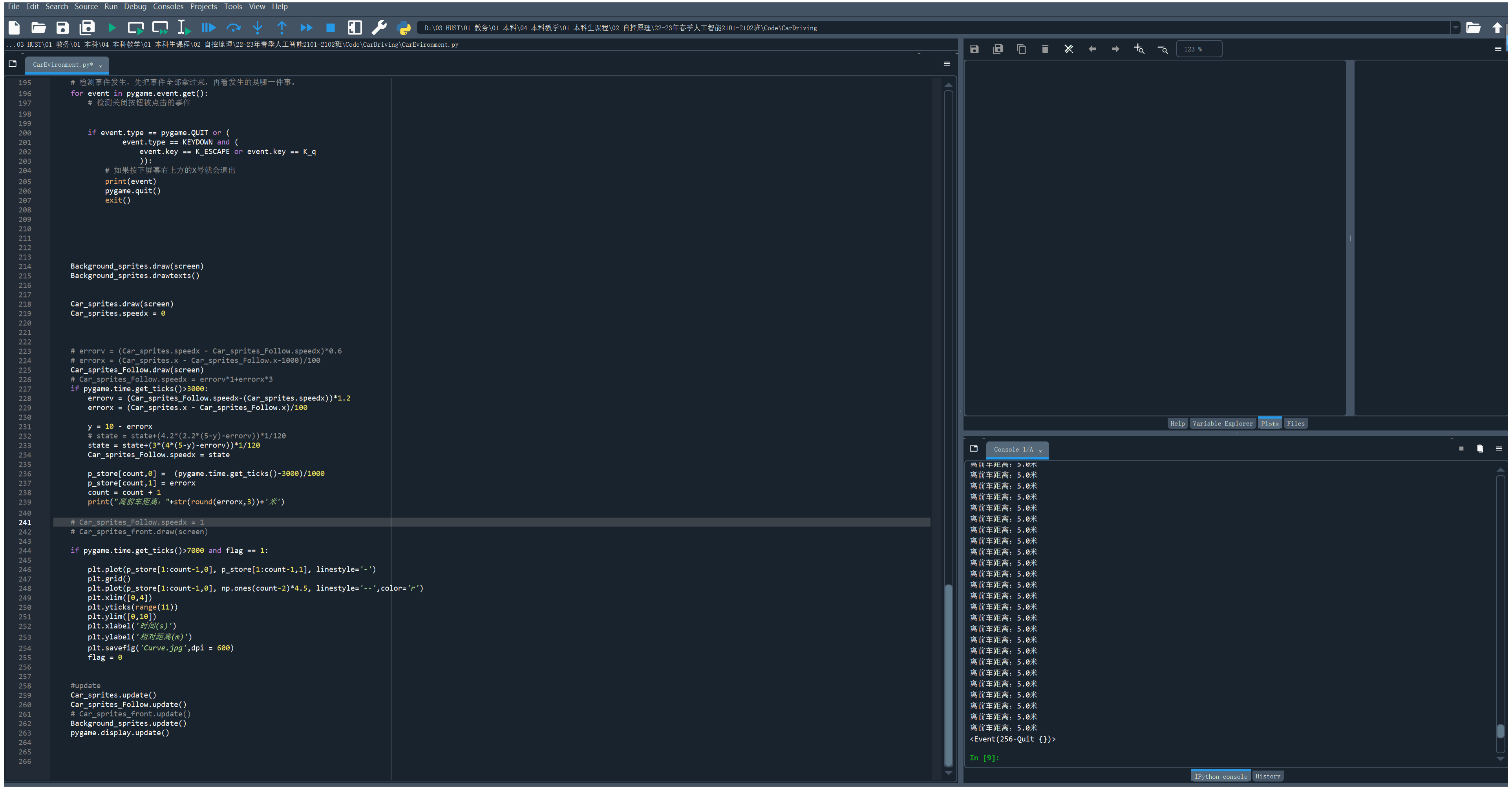
时域 $u(t) = 4.2 \times \left(2.2 \times \left(5l(t) - y(t)\right) - x(t)\right)$

$v(t) - v^{\star}$

$10 - p(t)$

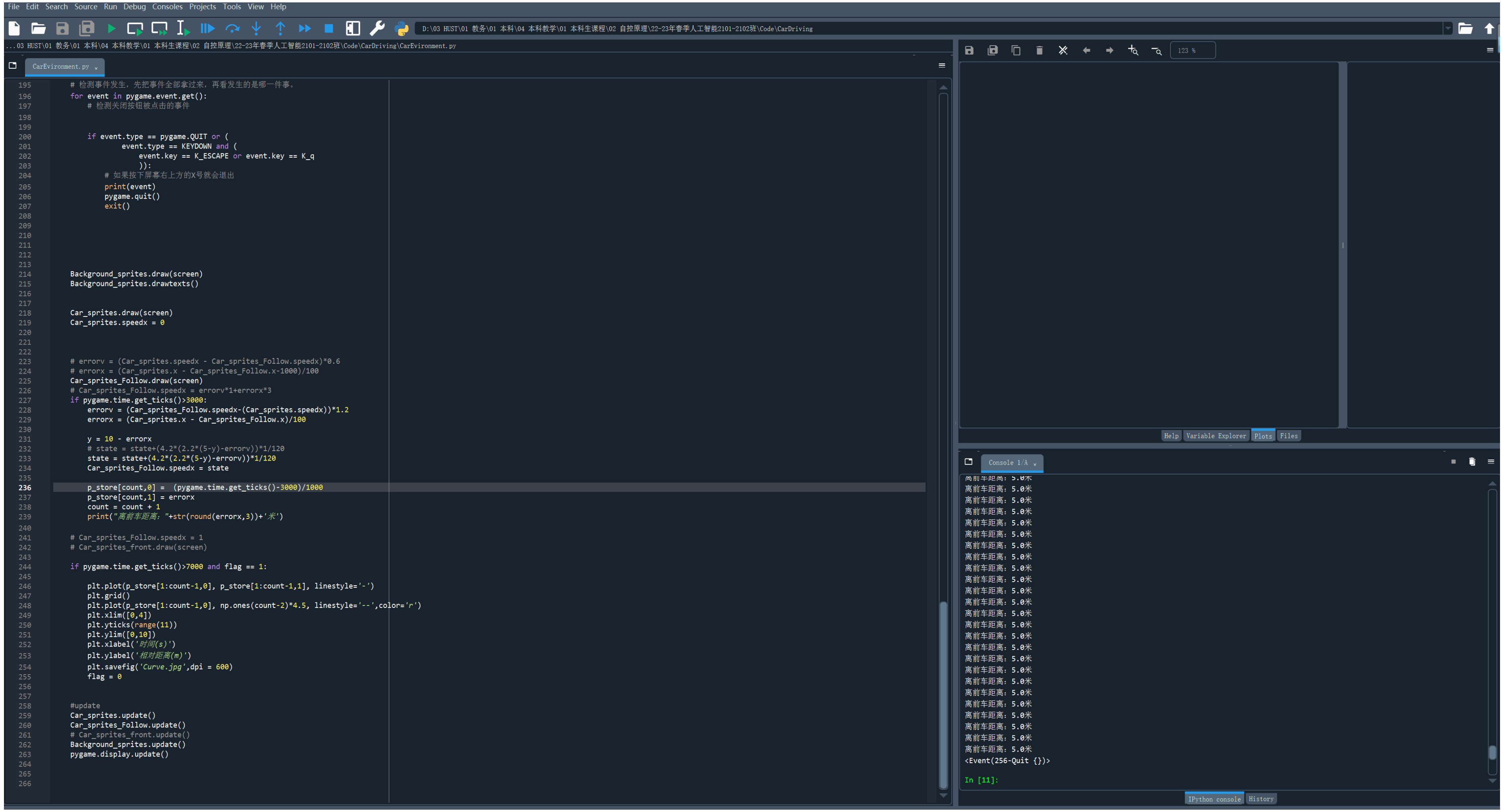
二、车辆跟驰控制案例

【案例：车辆跟驰】 仿真算例1：控制参数 $K_1 = 4\,, K_2 = 3$



二、车辆跟驰控制案例

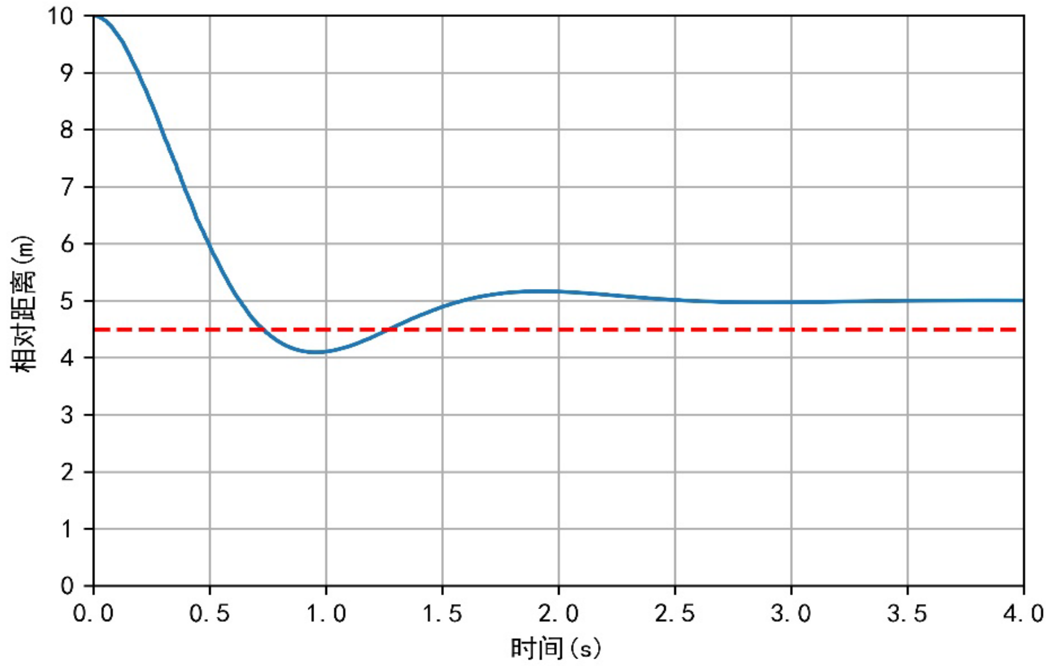
【案例：车辆跟驰】 仿真算例2：控制参数 $K_1 = 2.2, K_2 = 4.2$



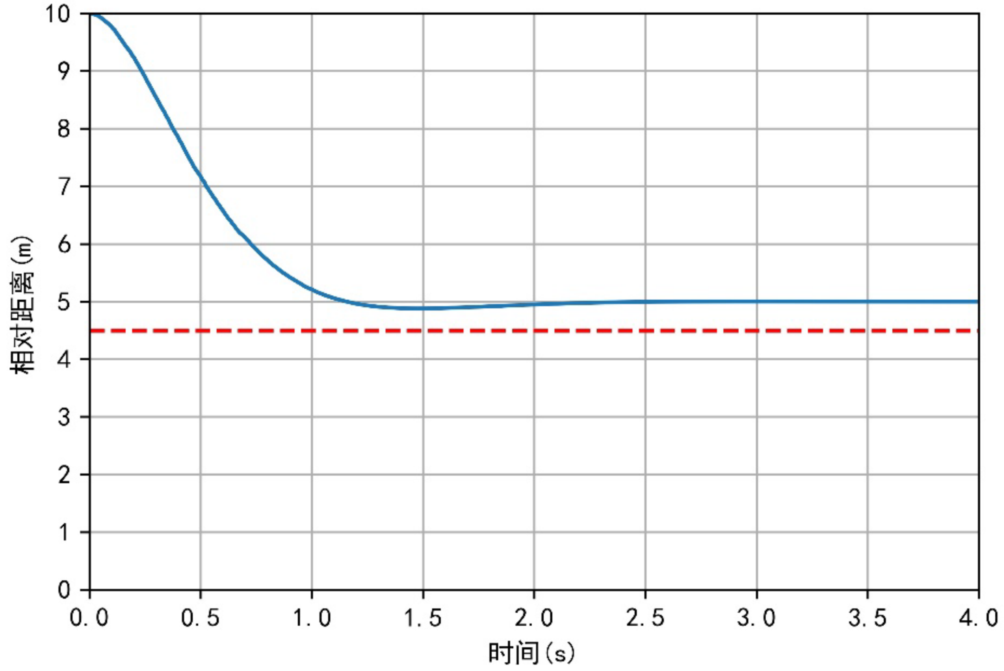
二、车辆跟驰控制案例

【案例：车辆跟驰】

算例1: 参数 $K_1 = 4 \;\; K_2 = 3$



算例2: 参数 $K_1 = 2.2 \;\; K_2 = 4.2$



- 算例1的相对距离超过警戒线，调节时间超过2秒
- 算例2的相对距离并未超过警戒线，调节时间在2秒之内

思考：如果后车的初始速度不为v^*的时候，该如何设计呢?

小结

- 控制系统的暂态性能：
  - 暂态性能指标：7个
  - 一阶系统的性能指标
  - 二阶系统的性能指标
  - 案例：车辆跟驰控制
- 作业：
  - 作业3.3和3.5
- 大作业：

  第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad的偏置下，1秒内稳定到平衡点±0.01 rad附近。