试卷 A 对偶性质（15 分）已知线性规划问题如下：

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \le 50 \\ 2x_1 \;+\; x_2 \ge 2 \\ x_1 \qquad\quad \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

已知该问题的最优解为$(4,3)$，利用对偶性质求出对偶问题的最优解。

解：原问题化简并标准化为

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ -2x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 \qquad \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其对偶问题为：

$$\min \quad w = 10y_1 - 2y_2 + 4y_3$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 2y_1 - y_2 \qquad \ge 3 \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$ 。。。。（**5 分**）

将 $x^* = (4,3)$ 代入原问题可知，原问题的第 2 个约束 $-2x_1 - x_2 < -2$ 为严格不等式约束。由对偶性质中的互补松弛性知，$y_2^* = 0$。 。。。。（4 分）

又，原问题的最优解 $x^* = (4,3)$ 中 2 个变量均大于 0，同样由互补松弛性知，对偶问题达到最优时的 2 个约束均为等式约束：

$$\begin{cases} y_1^* + y_3^* = 2 \\ 2y_1^* \qquad = 3 \end{cases}$$ 。。。。（**4 分**）

解之得：$y_1^* = 3/2$，$y_3^* = 1/2$。

所以，对偶问题的最优解是 $y^* = (3/2, 0, 1/2)$，最优值 $\min \quad w = 17$。

。。。。（**2 分**）

试卷 A 灵敏度分析（15 分）如下为某线性规划问题的最优单纯形表

C_j			−1	−1	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−1	x_1	1	1	−1	0	1	0	−2
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
4	x_3	3	0	2	1	3	0	1
σ_j			0	−10	0	−11	0	−6

将原问题中的C_3由 4 变为 5，在上述最优单纯形表的基础上求新问题的最优解。

解：C_3由 4 变为 5 后，上表将变为

C_j			−1	−1	**5**	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−1	x_1	1	1	−1	0	1	0	−2
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
5	x_3	3	0	2	1	3	0	1
σ_j			0	−10	**1**	−11	0	−6

。。。。**（5 分）**

通过行变换将检验数行中基变量x_3所对应的 1 变换为 0，得到如下单纯形表

C_j			−1	−1	5	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	1	1	-1	0	1	0	-2
0	x_5	6	0	2	0	0	1	1
5	x_3	3	0	2	1	3	0	1
σ_j			**0**	**−12**	**0**	**−14**	**0**	**-7**

。。。。（5 分）

由于上面单纯表中所有等号右端项已非负，所有检验数已非正，所有非基变量的检验数均为负数，因此，已找到新问题的唯一最优解。 。。。。（3 分）

新问题的最优解为$x^* = (1, 0, 3, 0, 6, 0)$，最优值 max $z^* = (-1)*1 + 5*3 = 14$。

。。。。（2 分）

试卷 B 运输问题（20 分）某公司的甲、乙、丙三个产地，分别向 A、B、C 三个销地提供产品，请给出总运费最小的运输方案。
其中，产量、销量及产地到销地的单位运价如下表所示：

销地 产地	A	B	C	产量
甲	2	3	3	2
乙	4	9	3	4
丙	6	4	5	6
销量	2	5	4	

解：原问题产销不平衡，增加一个虚拟销地 D 变换为如下产销平衡问题。

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	3	3	0	2
乙	4	9	3	0	4
丙	6	4	5	0	6
销量	2	5	4	1	

。。。。（4 分）

首先，用 Vogel 法确定初始解

销地 产地	A	B	C	D	行差
甲	2	3	3	0	2
乙	4	9	3	0	3
丙	6	4	5	0	4
列差	2	1	0	0	

第一步

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲					2
乙					4
丙				1	6
销量	2	5	4	1	

调整行差、列差

销地 / 产地	A	B	C	D	行差
甲	2	3	3	0	2，1
乙	4	9	3	0	3，1
丙	6	4	5	0	4，1
列差	2	1	0	0	

第二步：

销地 / 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	0			2
乙					4
丙				1	6
销量	2	5	4	1	

由于第二步中同时满足了产销，需要划 2 条线。在可选择的空格中选运价最低（下标较小）的甲地到 B 处填入运量 0。

调整行差、列差

销地 / 产地	A	B	C	D	行差
甲	2	3	3	0	2，1
乙	4	9	3	0	3，1，6
丙	6	4	5	0	4，1，1
列差	2	1，5	0，2	0	

第三步：

销地 / 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	0			2
乙			4		4
丙			0	1	6
销量	2	5	4	1	

由于第三步中同时满足了产销，需要划 2 条线。在可选择的空格中选运价最低的丙地到 C 处填入运量 0。

第四步，在未被划线覆盖剩余的唯一空格中填入运量 5，完成 Vogel 法，找到如下初始解。

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	0			2
乙			4		4
丙		5	0	1	6
销量	2	5	4	1	

。。。。（4 分）

接着，用位势法判断是否为最优解。
令数字最多的第 3 行所对应的位势u_3=0，如下所示，可得其他位势并进而得到所有空格处的检验数。

销地 产地	A	B	C	D	u_i
甲	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{3}$ (−1)	$\boxed{0}$ (+1)	−1
乙	$\boxed{4}$ (+3)	$\boxed{9}$ (+7)	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{0}$ (+2)	−2
丙	$\boxed{6}$ (+3)	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 1	0
v_j	3	4	5	0	

由于甲地到 C 处的检验数为负数，因此，上述解并非最优解，还需调整。
。。。。（4 分）

接着，用闭回路法在运量表中进行调整。

销地 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	0			2
乙			4		4
丙		5	0	1	6
销量	2	5	4	1	

换基时将待选换出基变量中运价最高的丙地到 C 处的数字 0 换出基变量，换成如下所示的由甲地到 C 处的换入基变量 0。

销地 / 产地	A	B	C	D	产量
甲	2	0	0		2
乙			4		4
丙		5		1	6
销量	2	5	4	1	

。。。。（4 分）

继续用位势法判断是否为最优解。
令数字最多的第 1 行所对应的位势u_1=0，如下所示，可得其他位势并进而得到所有空格处的检验数。

销地 / 产地	A	B	C	D	u_i
甲	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{0}$ (+1)	0
乙	$\boxed{4}$ (+2)	$\boxed{9}$ (+6)	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{0}$ (+1)	0
丙	$\boxed{6}$ (+3)	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{5}$ (+1)	$\boxed{0}$ 1	1
v_j	2	3	3	−1	

所有空格处的检验数都为正数，得到最优解。

。。。。（2 分）

最优方案为，甲地到 A 处的运量为 2 个单位，甲地到 B 和 C 处的运量为 0，乙地到 C 处的运量为 4 个单位，丙地到 B 处的运量为 5 个单位，丙地剩余 1 个单位的产量留在原地。其余各产地到各销处的运量均为 0。
最优运费为：

z = 2*2 + 3*0 + 3*0 + 3*4 + 4*5 + 0*1 = 36（单位运价）

。。。。（2 分）