



# 2024-2025 学年度春季



## 课程名称：《自动控制原理（一）》

### 第3讲 控制系统的传递函数

**课程学时：**共56学时

**课程性质：**专业基础课

**学生对象：**自动化2305班  
(26人)

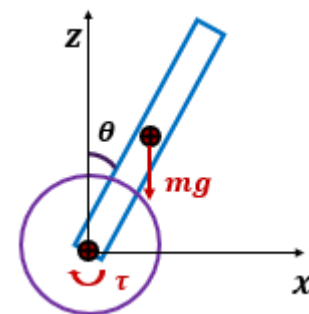
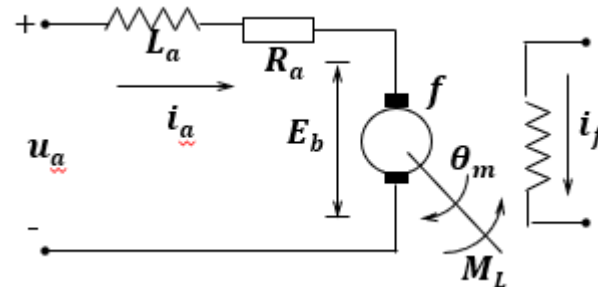
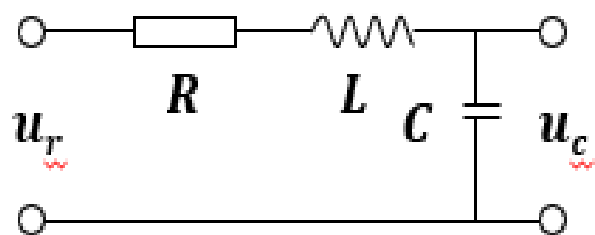
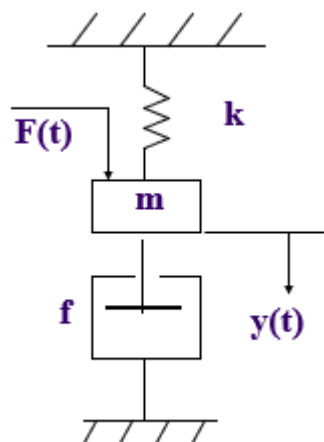
**授课教师：**刘骁康

**课程目标：**掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

# 回顾

## ■ 控制系统的微分方程

机械系统、电路系统、电动机系统、轮式机器人平衡系统



## ■ 非线性系统的线性化

- 工作点处线性化 (泰勒展开)
- 建立偏差与偏差之间的关系

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

## ■ 案例：轮式机器人平衡系统

## ? 微分方程模型的优缺点?

- ✓ 比较**直观**：微分方程是时间域描述系统动态性能的数学模型，在给定外作用以及初始条件下，求解微分方程可以得到系统的输出响应。
- ✓ 借助于电子计算机可以迅速而准确的求得结果。
- X 如果系统的结构改变或某个参数变化时，就要重新列写并求解微分方程，不便于系统的分析和设计。

因此，微分方程的方法，对研究参数或结构改变对性能的影响具有**局限性**。

□ 用拉氏变换求解线性系统的微分方程时，可以得到控制系统在复域的数学模型——**传递函数**。

- 既可表征系统的动态特性，还可用以研究结构参数的变化对系统性能的影响。



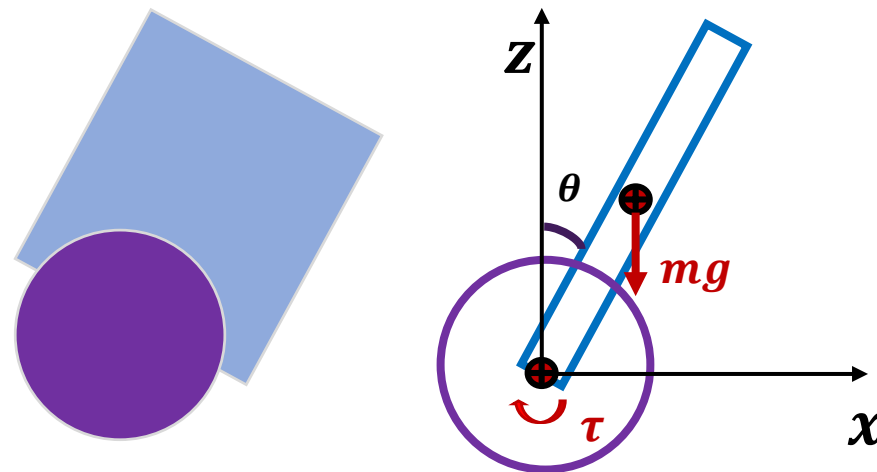
## 第二章：控制系统的数学模型

# 第3讲 控制系统的传递函数

### Transfer Function of Control System

#### 本讲内容

- 一、传递函数的基本概念
- 二、传递函数的性质与求解
- 三、案例：轮式机器人平衡控制系统的改进设计



# 一、传递函数的基本概念

## ? 什么叫传递函数?

**线性定常系统**的传递函数为**零初始条件**下系统输出量的拉氏变换与系统输入量的拉氏变换之比。

### ◆ 几点说明:

#### ? 不是线性定常的系统是否有传递函数?

零初始条件的含义:

- 1. 系统的输入在 $t > 0$ 时才作用于系统。即在 $t = 0^-$ 时系统输入及其各项导数均为零。
- 2. 输入量在加于系统之前, 系统为稳态, 即在 $t = 0^-$ 时输出及其所有导数项为零。

#### ? 不满足零初始条件的系统是否有传递函数?

**传递函数**摒弃了非零初始状态对响应的影响, 来考察系统的特性。

# 一、传递函数的基本概念

## ■ 传递函数的计算

- ◆ 设线性定常系统由下述n阶线性常微分方程描述：

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

式中 $c(t)$ 是系统输出量， $r(t)$ 是系统输入量， $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $b_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是与系统结构和参数有关的常系数。

- ◆ 设 $r(t)$ 和 $c(t)$ 及其各阶导数在 $t = 0$ 时的值为0，即满足**零初始条件**，则对上式中各项分别求拉氏变换，并令 $C(s) = L[c(t)]$ ， $R(s) = L[r(t)]$ ，可得 $s$ 的代数方程为：

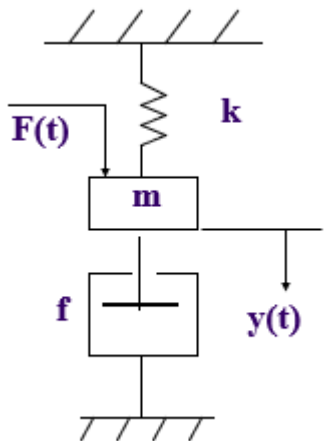
$$\left[ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 \right] C(s) = \left[ b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0 \right] R(s)$$

由定义得系统的传递函数的标准形式为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

# 一、传递函数的基本概念

## 例1.1：机械位移系统



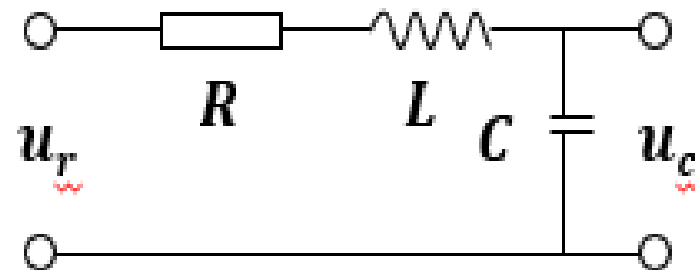
微分方程为

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{k} F(t)$$

传递函数为：

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

## 例1.2：电路系统



微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c = u_r(t)$$

其传递函数为：

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# 一、传递函数的基本概念

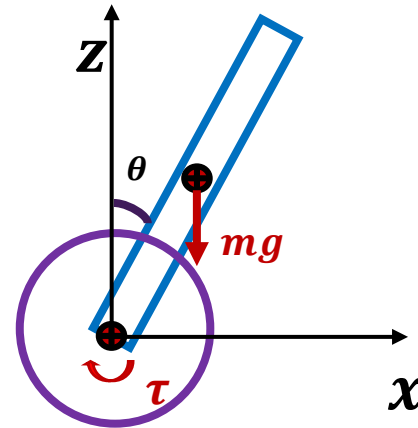
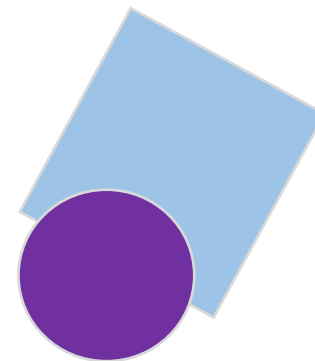
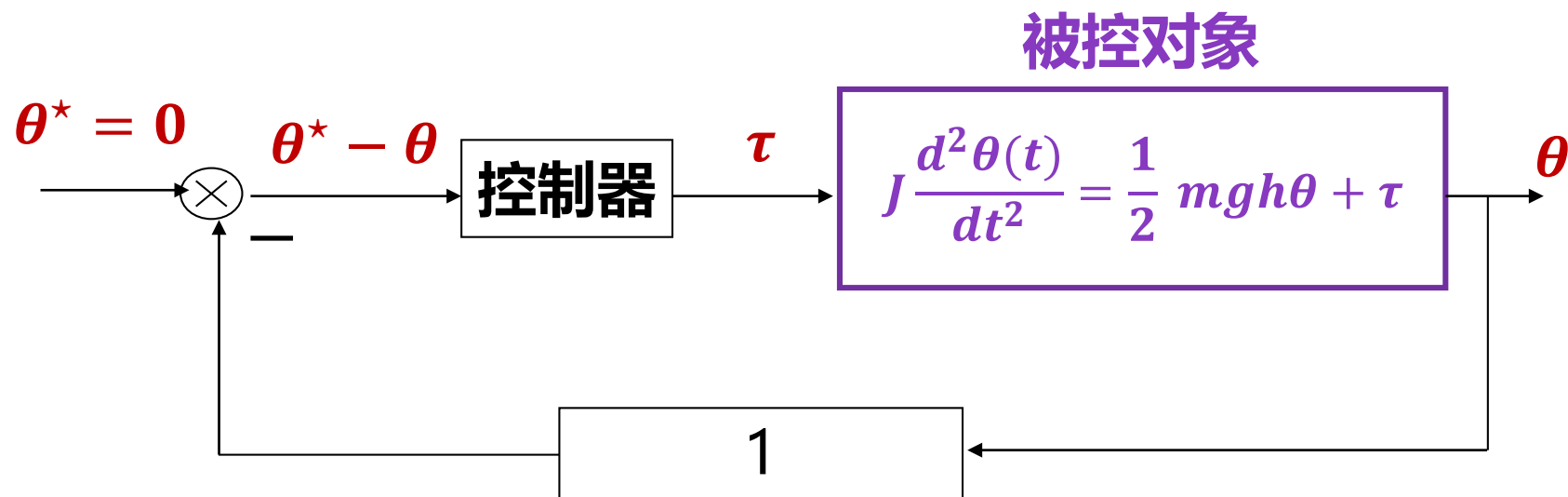
【测试】：求轮式机器人平衡控制系统的传递函数

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} m g h \theta + \tau$$

其中俯仰角为 $\theta$ , 机器人主体质量为 $m$ , 高度为 $h$ 转动惯量为 $J$

机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 $\tau$

设计控制量 $\tau = f(\theta^* - \theta) = k * (-\theta)$





# 一、传递函数的基本概念

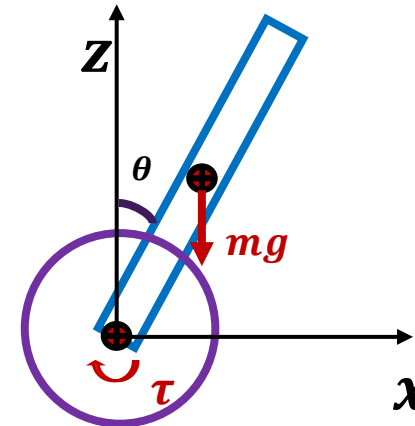
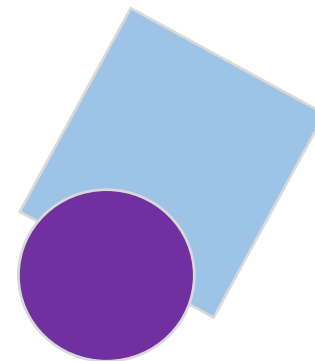
【测试】：轮式机器人平衡控制系统的传递函数

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

其中俯仰角为 $\theta$ , 机器人主体质量为 $m$ , 高度为 $h$ 转动惯量为 $J$   
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 $\tau$

【解】

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + k - \frac{1}{2}mgh}$$



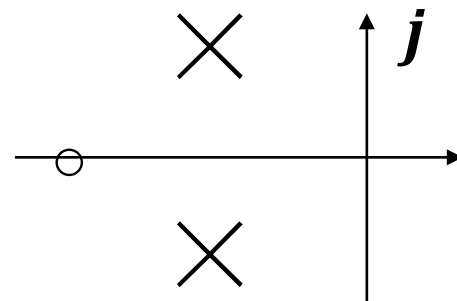
# 一、传递函数的基本概念

## ■ 传递函数的基本概念

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

其中,  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $b_j (j = 1, 2, \dots, m)$  是与系统结构和参数有关的常系数。

- $M(s)$  为分子多项式,  $N(s)$  为分母多项式。对于实际的物理系统,  $a_i$  和  $b_j$  为实数。
- 系统的**特征多项式**: 分母多项式。
- 系统的**特征方程**:  $N(s) = 0$
- 系统的**极点 (特征根)**:  $N(s) = 0$  的根。
- 系统的**零点**:  $M(s) = 0$  的根。
- 系统的**阶次**: 分母多项式的阶次。
- **零极点分布图**: 在复数平面上, 用  $\circ$  表示零点, 用  $\times$  表示极点。



零极点分布图示意图

# 一、传递函数的基本概念

## ■ 传递函数的三种呈现形式

### ◆1. 有理分式形式:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

### ◆2. 零极点形式: 传递函数的分子和分母多项式可经因式分解后可写成如下形式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

- $z_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为传递函数的**零点**
- $p_j (j = 1, 2, \dots, n)$  为传递函数的**极点**。
- $k$ 称为**根轨迹增益**。

■ 传递函数的零极点完全取决于系统参数。且如果是复数，必共轭成对出现。

# 一、传递函数的基本概念

## ■ 传递函数的三种呈现形式

◆3. 时间常数形式：将传递函数的分子、分母多项式变为**尾一多项式**，然后在实数范围内因式分解，得

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{s^l (\tau_1 s + 1) (\tau_2^2 s^2 + 2\xi_2 \tau_2 s + 1) \dots (\tau_{m'} s + 1)}{s^v (T_1 s + 1) (T_2^2 s^2 + 2\xi_2' T_2 s + 1) \dots (T_{n'} s + 1)}$$

式中一次因子对应于实数零极点，二次因子对应于共轭复数零极点；

- $\tau_i$  和  $T_j$  称为**时间常数**。
- $K$  为**传递系数**或**静态放大系数**，即系统状态保持不变( $s=0$ )时输入与输出之比。
- 放大系数  $K$  和根轨迹增益  $k$  之间的关系为

$$K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

# 一、传递函数的基本概念

**测试：试求传递函数的零点、极点、传递系数和根轨迹增益。**

$$G(s) = \frac{s + 2}{2s^2 + 10s + 8}$$

**【解】** 将传递函数化为零极点形式

$$G(s) = \frac{s + 2}{2(s^2 + 5s + 4)} = \frac{0.5(s + 2)}{(s + 1)(s + 4)}$$

零点为  $z = -2$

极点为  $p_1 = -1, p_2 = -4$

根轨迹增益为  $k^* = 0.5$

传递系数为  $K = 0.25$

$$G(s) = \frac{2(0.5s + 1)}{8(0.25s^2 + 1.25s + 1)} = \frac{0.25(0.5s + 1)}{(0.25s^2 + 1.25s + 1)}$$

## 二、传递函数的性质与求解

? 传递函数具有什么性质?

◆1. 传递函数与微分方程：将微分方程算符 $d/dt$ 用复数 $s$ 置换可以得到传递函数。反之亦然。



- ◆2. 传递函数反映系统自身固有特性，与输入和初始条件无关。
- ◆3. 不同的物理系统可能有相同的传递函数，而同一系统可以有不同的传递函数。
- ◆4. 一个传递函数只能表示一个输入对一个输出的函数关系，如果是多输入多输出系统，可以用**传递函数阵**表示。

对于  $m$  个输入、 $n$  个输出的线性定常系统，传递函数矩阵是一个  $n \times m$  阶矩阵。

## 二、传递函数的性质与求解

### 例1.3：直流电机模型

已知某电枢控制直流电动机系统的微分方程模型如下，求系统的传递函数。

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_1 u_a + K_2 M_L$$

**【解】**系统有两个输入、一个输出，因此需要求两个传递函数。

首先对方程两边求拉氏变换得

令负载转矩为0，则求得电枢电压和输出间的传递函数：
$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{Ts + 1}$$

令电枢电压为0，则求得负载转矩和输出间的传递函数：
$$\frac{\Omega(s)}{M_L(s)} = \frac{K_2}{Ts + 1}$$

写成矩阵的形式，传递函数矩阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{Ts + 1} & \frac{K_2}{Ts + 1} \end{bmatrix} \quad \text{满足} \quad \Omega(s) = G(s) \begin{bmatrix} U_a(s) \\ M_L(s) \end{bmatrix}$$

## 二、传递函数的性质与求解

◆5. 传递函数与单位脉冲响应之间是拉氏变换与拉氏反变换的关系。

✓ 单位脉冲响应：零初始条件下单位脉冲输入作用下的输出响应。类似的定义还有“单位阶跃响应”。

【证明】设线性定常系统的传递函数为 $G(s)$ ，输入的拉氏变换为 $R(s)$ ，在零初始条件下，系统的输出为

$$C(s) = G(s)R(s)$$

由于单位脉冲输入信号的拉氏变换为  $R(s) = L(\delta(t)) = 1$

所以  $C(s) = G(s)$

则  $c(t) = L^{-1}(G(s))$

证毕。



## 二、传递函数的性质与求解

◆6. 一般情况下, 传递函数分子的阶数 $m$ 与分母的阶数 $n$ 满足  $n \geq m$  (称为物理现实性条件)。

? 为什么 $m > n$ 在实际中不可实现?

因为能量有限, 系统具有惯性。

假设存在 $G(s) = s$ ,

当输入信号为单位阶跃信号 $1(t)$ 时,

系统的输出 $c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)] = L^{-1}[s/s] = \delta(t)$ ,

即为单位脉冲函数。这在现实世界是不可能的。

## 二、传递函数的性质与求解

❓ 传递函数有哪些局限性？

- 只适于线性定常系统的表达。
- 不反映初始状态的信息。
- 不反映系统内部的任何信息。

## 二、传递函数的性质与求解

**例2.1：**已知某系统在零初始条件下，在输入信号 $r(t) = 1(t)$ 作用下，测得输出响应为

$$c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, t \geq 0,$$

求系统的传递函数。

**【解】**系统满足零初始条件，因此，只要分别求出系统输入和输出的拉氏变换，求二者之比即得。

系统输入的拉氏变换  $R(s) = \frac{1}{s},$

输出的拉氏变换  $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

则系统的传递函数  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$

**【思考】**有无其它求解方法？

## 二、传递函数的性质与求解

? 当不满足零初始条件时，如何求传递函数？

【例2.2】已知某系统初始条件为  $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。在  $t = 0^+$  给系统施加输入  $r(t) = 1(t)$ ，得到输出响应为

$$c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, t \geq 0$$

求系统的传递函数。

↓  
需要求出：零初始条件下当前输入所产生的输出

↓  
能否求出“非零初始条件”所产生的输出？

↓  
初始条件有两个，尝试待定系数法

↓  
如何获得待定表达式？

## 二、传递函数的性质与求解

### 【知识点】非0初始条件下传递函数的求解

重点

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + \cdots + b_0 r(t)$$

如果初始条件不为0,

根据拉氏变换的微分定理:

$$L\left[\frac{d^n c(t)}{dt^n}\right] = s^n C(s) - \sum_{k=1}^n \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} c(0) s^{n-k}$$

对微分方程模型求拉氏变换可得

$$C(s) = \frac{f(s, a_i, \frac{d^{n-1} c(0)}{dt^{n-1}}, \cdots, c(0)) + g(s, b_j, \frac{d^{m-1} r(0)}{dt^{m-1}}, \cdots, r(0))}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} + \frac{(b_m s^m + \cdots + b_0) R(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

其中  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  分别是 输出及其各阶导数在零时刻的值和  $a_i$ 、输入及其各阶导数在零时刻的值和  $b_j$ 、以及  $s$  的函数。

## 二、传递函数的性质与求解

### 【知识点】非0初始条件下传递函数的求解

重点

●当与输入有关的初始条件为0时，仅由**输出的初始条件**和**传递函数的分母多项式 $N(s)$** 决定。

●由**初始条件**产生，与输入无关，称为**零输入响应**。  
●改变输入不会改变零输入响应。

$$C(s) = \frac{f(s, a_i, \frac{d^{n-1}c(0)}{dt^{n-1}}, \dots, c(0)) + g(s, b_j, \frac{d^{m-1}r(0)}{dt^{m-1}}, \dots, r(0))}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} + \frac{(b_m s^m + \dots + b_0)R(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = C_1(s) + C_2(s)$$

微分方程模型

对应的传递函数

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + \dots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + \dots + b_0 r(t) \quad G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

## 二、传递函数的性质与求解

### 【知识点】非0初始条件下传递函数的求解

重点

●当与输入有关的初始条件为0时，仅由输出的初始条件和传递函数的分母多项式 $N(s)$ 决定。

●由初始条件产生，与输入无关，称为零输入响应。  
●改变输入不会改变零输入响应。

$$C(s) = \frac{f(s, a_i, \frac{d^{n-1}c(0)}{dt^{n-1}}, \dots, c(0)) + g(s, b_j, \frac{d^{m-1}r(0)}{dt^{m-1}}, \dots, r(0))}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$+ \frac{(b_m s^m + \dots + b_0)R(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = C_1(s) + C_2(s) \quad \text{传递函数 } G(s) = \frac{C_2(s)}{R(s)}$$

由于线性系统满足叠加原理，系统的响应等于零输入响应和零状态响应之和。

●由输入信号产生，与初始条件无关，称为零状态响应。

## 二、传递函数的性质与求解

✓ 当与输入有关的初始条件为0时

$$\text{令 } R(s) = \frac{R_m(s)}{R_n(s)} = \frac{R_m(s)}{\prod_{k=1}^l (s - q_k)}$$

$$C(s) = \frac{f\left(s, a_i, \frac{d^{n-1}c(0)}{dt^{n-1}}, \dots, c(0)\right)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} + \frac{(b_m s^m + \dots + b_0) R(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = C_1(s) + C_2(s)$$

以无重根的情况为例，利用留数定理对 $C(s)$ 进行部分分式展开得

重根的情况  
类似可得

零输入响应:

$$C_1(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\text{Res}[C_1(s)]_{s=p_j}}{s - p_j}$$

零状态响应:

$$C_2(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\text{Res}[C_2(s)]_{s=p_j}}{s - p_j} + \sum_{k=1}^l \frac{\text{Res}[C_2(s)]_{s=q_k}}{s - q_k}$$

◆  $p_j$ 为 $N(s) = 0$ 的根(系统的特征根),  $q_k$ 为输入象函数分母=0的解。

◆ 据此可以由输出的拉氏变换分母 = 0的根确定传递函数的特征根, 进而得到零输入响应的拉氏变换分母 = 0的根。



## 二、传递函数的性质与求解

【例2.2】已知某系统初始条件为 $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ 。在 $t = 0^+$ 给系统施加输入 $r(t) = 1(t)$ ，得到输出响应为

$$c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, t \geq 0$$

求系统的传递函数。

【解】由  $R(s) = \frac{1}{s}$  时  $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$

? 为什么没有0?

可以判断出：系统有两个特征根，分别为-1和-2。因此，设系统的零输入响应为

$$C_1(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} \quad c_1(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$$

由初始条件得  $\begin{cases} c_1(0) = a + b = -1, \\ \dot{c}_1(0) = -a - 2b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = -2, \\ b = 1 \end{cases}$  则系统的零状态响应

$$c_2(t) = c(t) - c_1(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

则系统的传递函数为  $G(s) = \frac{C_2(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$

## 二、传递函数的性质与求解

**【测试】** 已知系统的传递函数为  $G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$  设系统的初始条件为

$$c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0。$$

试求输入为单位阶跃函数时系统的响应。

**【解】方法一：**由传函得到系统的微分方程，然后在非零初始条件下求拉氏变换，将初始条件和输入的拉氏变换代入，得到输出的拉氏变换，最后求拉氏反变换。

**方法二：**系统响应 = 零状态响应 + 零输入响应

$$\text{零状态响应} = L^{-1} [G(s)R(s)] = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

零输入响应的求法:由特征方程得特征根为-1和-2，则可得到零输入响应的形式为

$$\text{则 } c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} + a_1e^{-t} + a_2e^{-2t}$$

利用初始条件，用待定系数法求出 $a_i$ ，得 $a_1 = -2$ ， $a_2 = 1$ ，即

$$c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, t \geq 0$$

■ 输入形式的改变不改变系统的零输入响应。

### 三、轮式机器人平衡控制系统的改进设计

#### 【例3.1】：轮式机器人平衡控制系统的传递函数

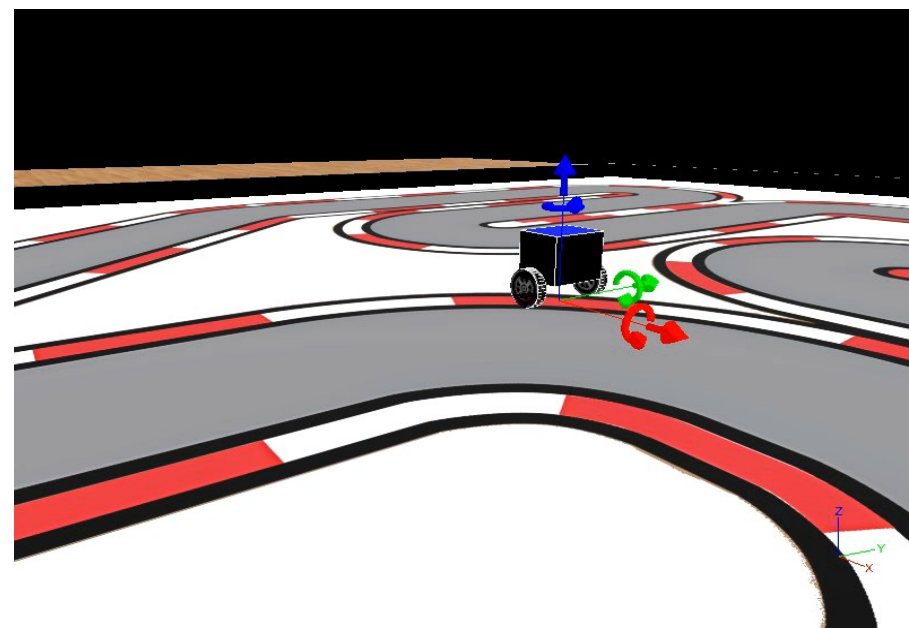
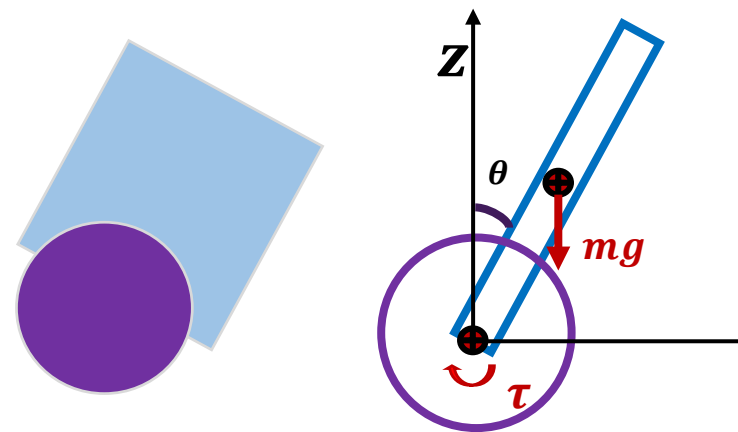
$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

其中俯仰角为 $\theta$ , 机器人主体质量为 $m$ , 高度为 $h$ 转动惯量为 $J$   
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 $\tau$

【解】

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + k - \frac{1}{2}mgh}$$

若设置参考输入 $R(s)$ 为0, 为什么车还动了?



### 三、轮式机器人平衡控制系统的改进

#### 分析：轮式机器人平衡控制系统

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

【如何设计控制量 $\tau$ 】

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\tau = k * (-\theta),$$

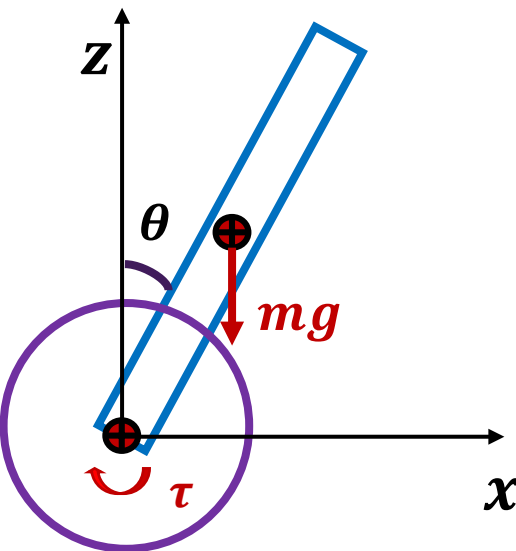
◆ 拉氏变换

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \left( \frac{1}{2} mgh - k \right) \theta$$

$$Js^2 \theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) + \left( k - \frac{1}{2} mgh \right) \theta(s) = 0,$$

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \left( k - \frac{1}{2} mgh \right) \theta = 0$$

$$\text{得到 } \theta(s) = \frac{\theta(0)s + \dot{\theta}(0)}{Js^2 + (k - \frac{1}{2} mgh)}$$



零输入响应

### 三、轮式机器人平衡动力学分析

#### 分析：轮式机器人平衡控制系统

##### ◆ 拉氏变换

$$\theta(s) = \frac{\theta(0)s + \dot{\theta}(0)}{Js^2 + (k - \frac{1}{2}mgh)}$$

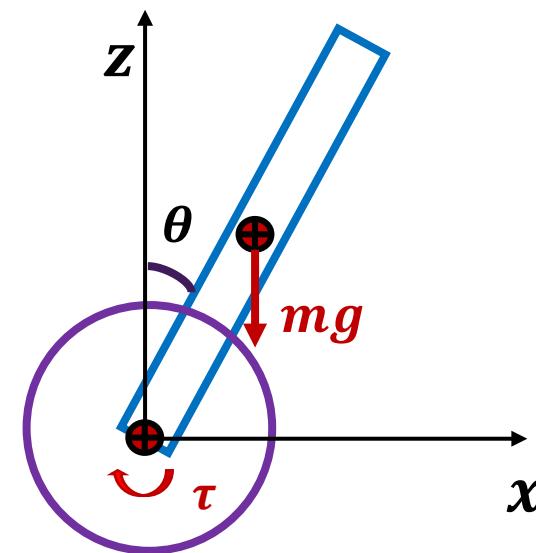
$$\alpha = k - \frac{1}{2}mgh$$

✓ 若  $\alpha > 0$ , 则  $\theta(s) = \frac{\theta(0)}{J} \frac{s}{s^2 + \frac{\alpha}{J}} + \frac{\dot{\theta}(0)}{J} \frac{1}{s^2 + \frac{\alpha}{J}}$

➔  $\theta(t) = \frac{\theta(0)}{J} \cos(\sqrt{\theta(0)\alpha}t) + \frac{\dot{\theta}(0)}{J} \sin(\sqrt{\dot{\theta}(0)\alpha}t)$   $\theta(t)$  随时间在振荡

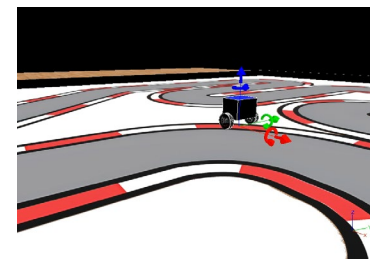
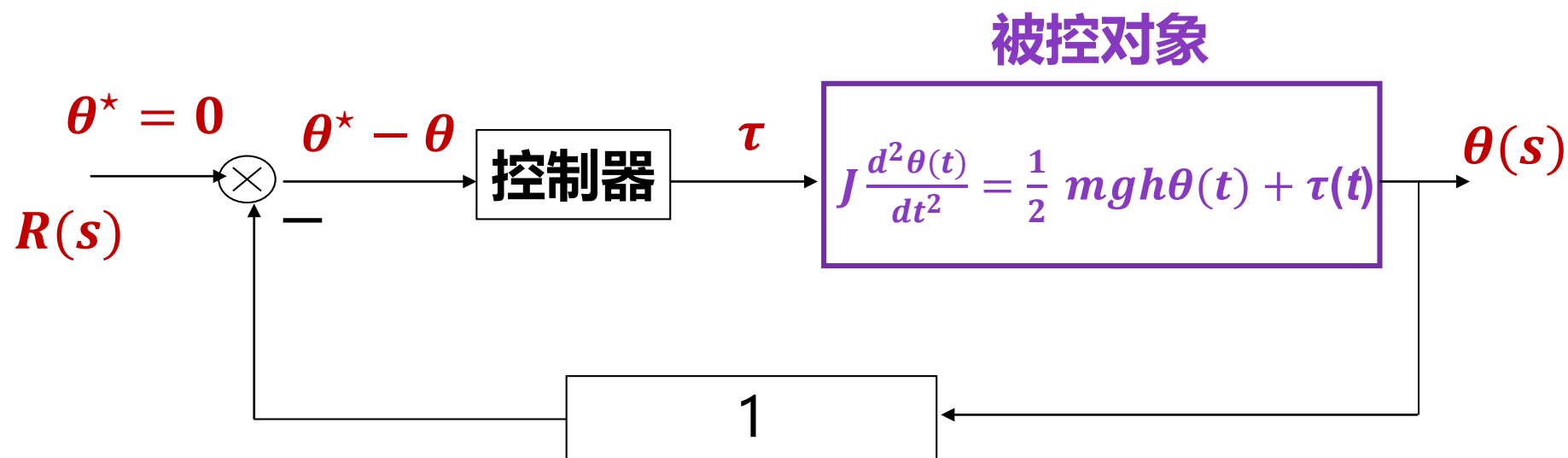
✓ 若  $\alpha < 0$ , 则  $\theta(s) = \frac{1}{J} \left( \frac{c_1}{s + \sqrt{\frac{\alpha}{J}}} + \frac{c_2}{s - \sqrt{\frac{\alpha}{J}}} \right)$

➔  $\theta(t) = \frac{c_1}{J} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{J}}t} + \frac{c_2}{J} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{J}}t}$   $\theta(t)$  随时间趋向无穷



### 三、轮式机器人平衡控制系统的改进

【分组讨论】：定制方案如何克服等幅摇摆？



传递函数  $G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + k - \frac{1}{2}mgh}$

# 小结

- **控制系统传递函数：**
  - **基本概念：微分方程->传递函数**
  - **传递函数的求解：零状态响应+零输入响应**
  - **案例分析：轮式机器人稳定控制的改进设计**
- **作业：**
  - **参考书 2.5**
  - **学习典型环节的传递函数。**