

2024-2025 学年度春季



课程名称：《自动控制原理（一）》 第7讲 控制系统的稳定性分析-Part 1

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

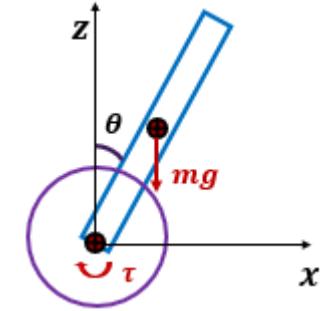
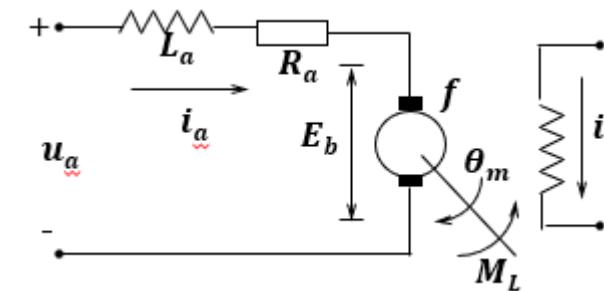
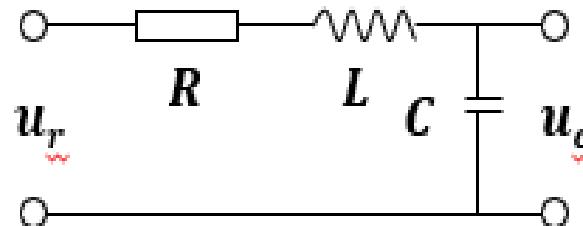
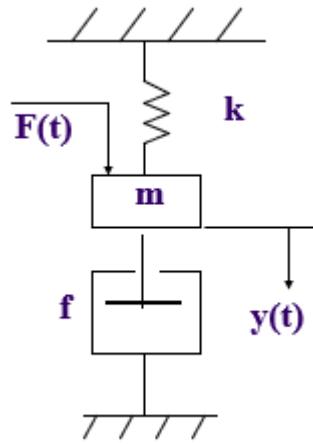
学生对象：自动化2305班
(32人)

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

■ 控制系统的微分方程

机械系统、电路系统、电动机系统、轮式机器人平衡系统



■ 非线性系统的线性化

- 工作点处线性化（泰勒展开）
- 建立偏差与偏差之间的关系

■ 案例：轮式机器人平衡系统

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

■ 第3讲 控制系统的传递函数

- 传递函数的定义
- 传递函数的性质
- 传递函数的求解

1. 零初始状态下响应+系统输入信号→传递函数

2. 非零初始状态下响应+系统输入信号→传递函数

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

■ 第4讲 控制系统的结构图-Part 1

➤ 传递函数的基本环节

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{s^l(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_{m'} s + 1)}{s^\nu(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta'_2 T_2 s + 1) \cdots (T_{n'} s + 1)}$$

K 、 τ_i 、 ζ_i 、 T_j 、 ζ'_j 为常数。非负整数 l 和 ν 不同时非零。

✓ 比例环节

✓ (理想)微分环节

✓ (理想)一阶微分环节

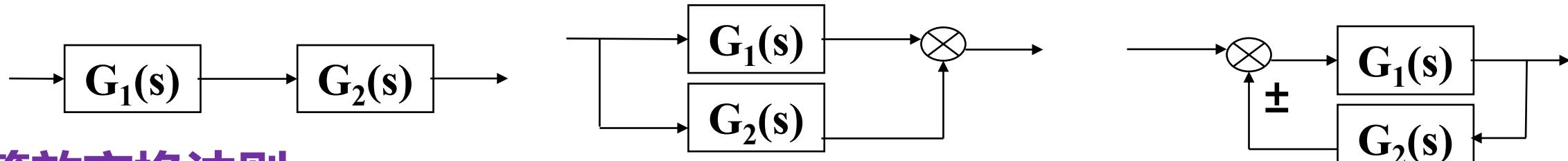
✓ (理想)二阶微分环节

✓ 积分环节

✓ 惯性环节

✓ 振荡环节(二阶环节)

■ 第4/5讲 控制系统的结构图



等效变换法则：

【法则1】串联连接的等效变换

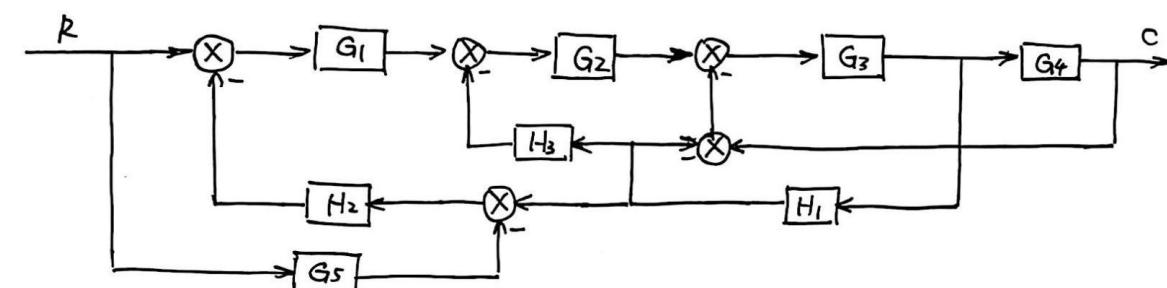
【法则2】并联连接的等效变换

【法则3】反馈连接的等效变换

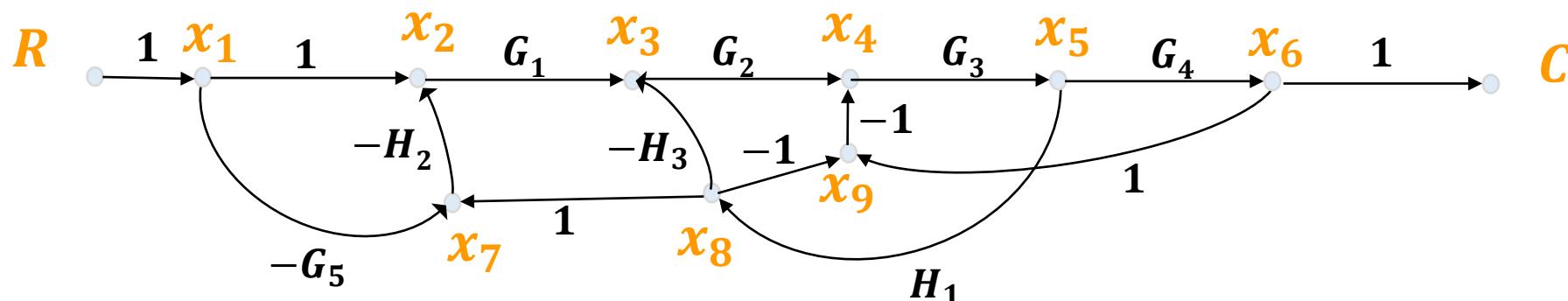
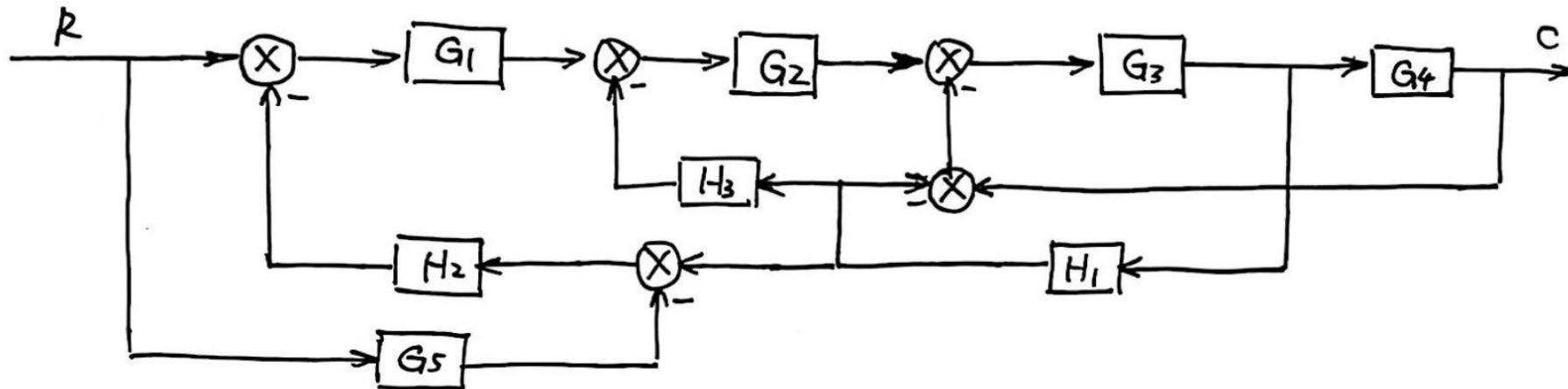
【法则4】综合点的前后移动

【法则5】引出点的前后移动

【法则6】相邻综合点的移动/相邻引出点的移动



■ 第6讲 控制系统的信号流图



■ 第6讲 控制系统的信号流图

- ◆ 梅逊公式的表达式为：

$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$

- $G(s)$: 待求的总传递函数。 $\Delta = 1 - \sum_1^n L_i + \sum_1^{n_2} L_i L_j - \sum_1^{n_3} L_i L_j L_k + \dots$
- Δ 称为特征式，
 $\sum L_i$: 所有回路(n 条)的回路增益之和。
- $\sum L_i L_j$: 所有两两互不接触回路(n_2 条)的回路增益乘积之和。
- $\sum L_i L_j L_k$: 所有三个互不接触回路(n_3 条)的回路增益乘积之和。
- P_k : 从输入节点到输出节点第 k 条前向通路的增益。
- Δ_k : 在 Δ 中，将与第 k 条前向通路相接触的回路除去后所余下的部分的 Δ ，称为余子式。
- m : 从输入节点到输出节点所有前向通路的条数。

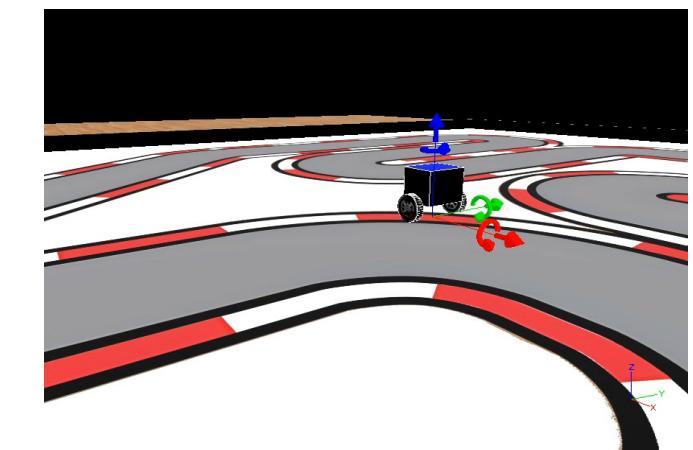
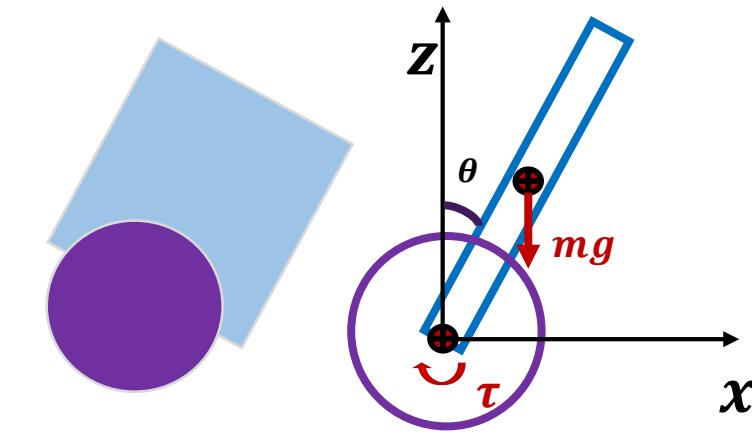
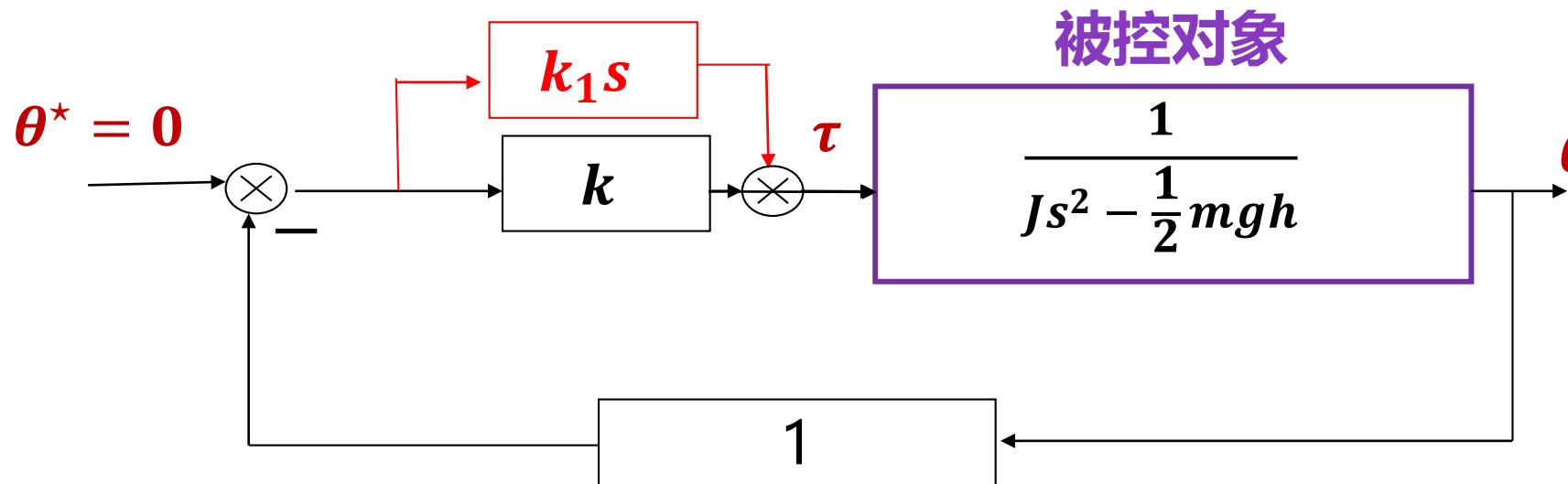
回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2}mgh\theta + \tau$$

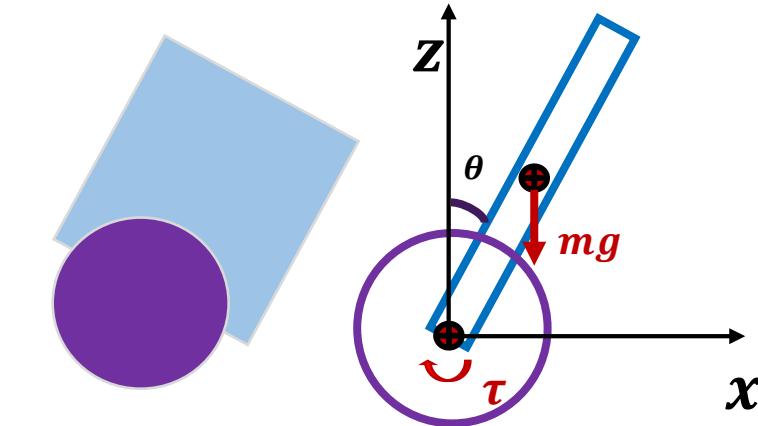
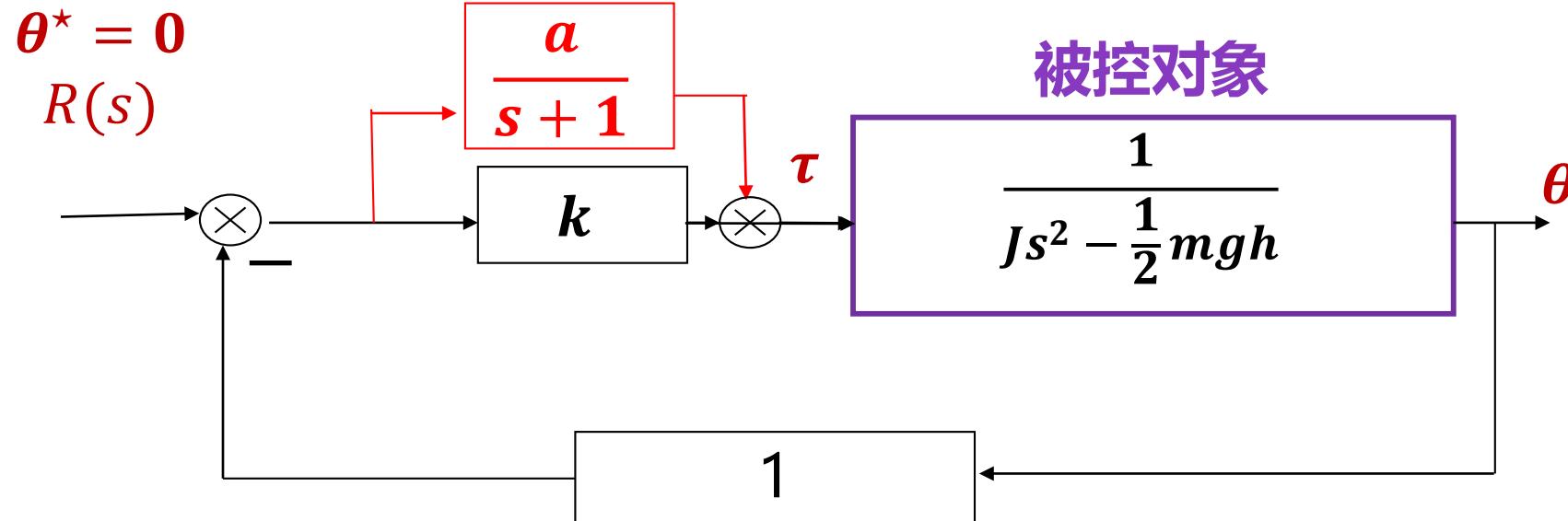
其中俯仰角为 θ , 机器人主体质量为 m , 高度为 h 转动惯量为 J
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 τ

设计控制量 $\tau = -k\theta - k_1\dot{\theta}$



试写出传递函数

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图



传递函数

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$

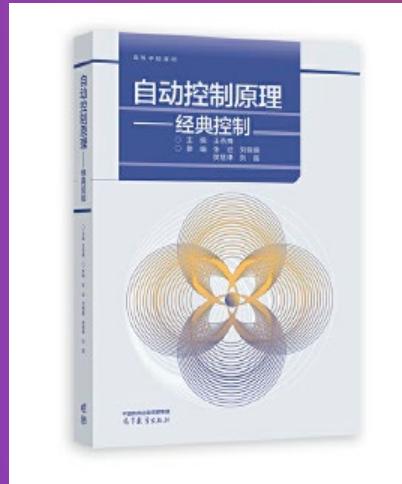
■ 液态硝酸货运车侧翻事故 (2023年, 亚利桑那州际公路)



为什么这些车辆更容易失稳呢?



约75%车辆侧翻事故与皮卡、货车、SUV类型的车辆有关



第二章：控制系统的数学模型

第7讲 控制系统的稳定性分析-Part 1

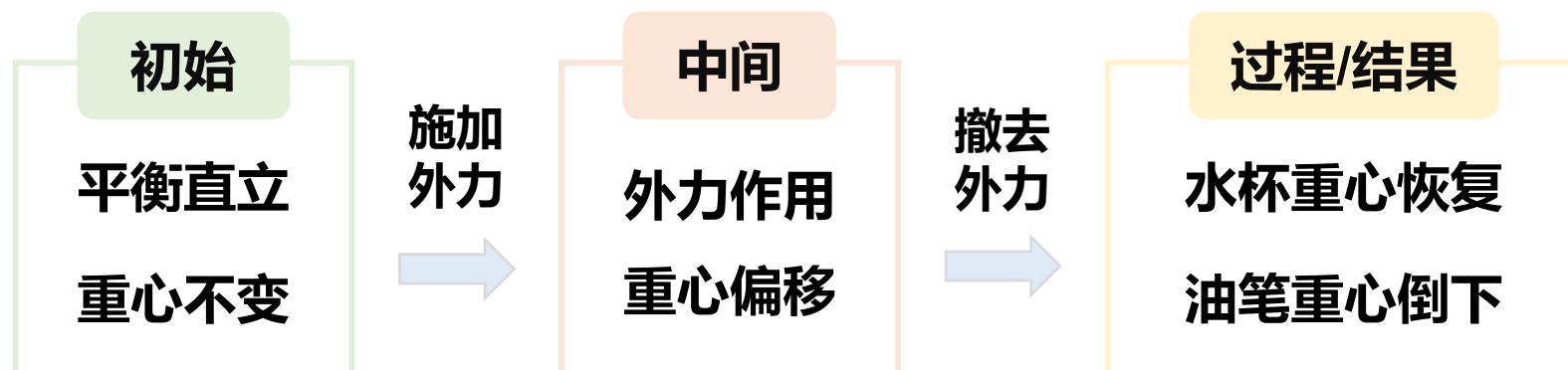
Stability of Control Systems – Part 1

本讲内容

- 一、稳定性的定义**
- 二、稳定性的判据**
- 三、案例：车辆侧翻案例**
- 四、习题课**

一、稳定性的概念

■ 稳定性的实验



一、稳定性概念

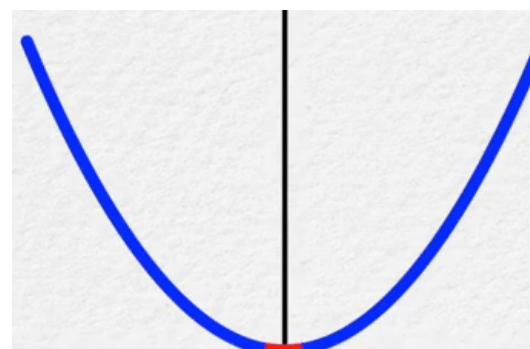
■ 稳定性的定义

系统受到一扰动偏离了平衡状态，当撤销扰动后：

若系统能够重新恢复到原始平衡状态，则称系统是**稳定的**；

若扰动消失后不能恢复原始平衡状态，而偏差越来越大。则称系统是**不稳定的**。

若扰动消失后，系统输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于**临界稳定状态**。



稳定

一、稳定性的概念

■ 稳定性的定义

系统受到一扰动偏离了平衡状态，当撤销扰动后：

若系统能够重新恢复到原始平衡状态，则称系统是稳定的；



如何从数学解析的角度理解系统稳定性呢？

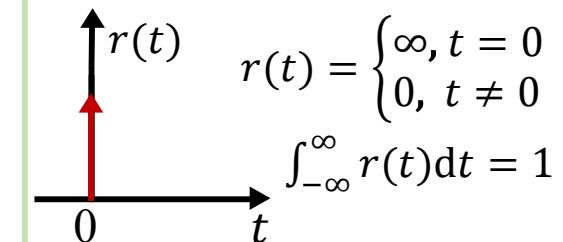
用什么信号来模拟扰动呢？

输入单位脉冲信号。

原来的平衡状态是多少呢？

以原始平衡状态为基准，设置平衡点为原点(设为0)。

单位脉冲信号



二、稳定性的判别方法

■ 稳定性判据

判别方法1：(线性定常系统)

设系统**初始条件为零**，输入一个理想的**单位脉冲函数**，若输出响应 $c(t)$ 满足

$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ，则该系统是稳定的。

如何求解单位脉冲输入下的输出响应呢？

二、稳定性的判别方法

【例2.1】已知系统的微分方程模型为 $T\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$, 判断该系统的稳定性。

【解】在零初始条件下对方程两边进行拉氏变换得 $TsC(s) + C(s) = R(s)$ 。

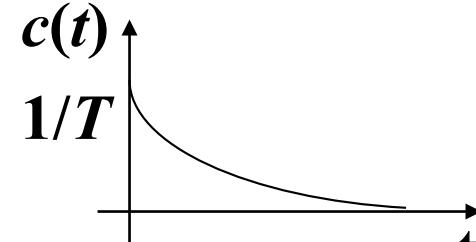
若 $r(t) = \delta(t), c(0) = 0$, 则

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{T} \frac{1}{s + 1/T},$$

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0,$$

因此该系统是稳定的。



?高阶系统? 太繁琐

二、稳定性的判别方法

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

若系统的输入为**单位脉冲**函数 $r(t) = \delta(t)$, 即 $R(s) = 1$,

则输出 $C(s) = G(s)R(s) = G(s)$, 拉氏反变换得

$$c(t) = L^{-1}(G(s)) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t},$$

其中 A_i 为极点 $s = p_i$ 处的留数。

设系统的**极点**有 k 个实根 $p_i, i = 1, 2, \dots, k$, 和 r 对共轭复数根 $p_j = \sigma_j + j\omega_j, j = 1, 2, \dots, r$,

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (B_j \cos \omega_j t + C_j \sin \omega_j t)$$

二、稳定性的判别方法

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (B_j \cos \omega_j t + C_j \sin \omega_j t)$$

- 若 $\forall p_i < 0$ 且 $\forall \sigma_j < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$, 则系统最终能恢复至平衡状态, 是稳定的。
若有复数根, 则为衰减震荡; 若皆为负实数, 则按指数衰减。
- 若 $\exists p_i > 0$ 或 $\exists \sigma_j > 0$, 则 $t \rightarrow \infty$ 时偏差越来越大, 系统不稳定;
- 若 $\exists p_i = 0$ (零根) 或 $\exists \sigma_j = 0$ (一对纯虚根), 而其余 $p_i < 0$ 且 $\sigma_j < 0$, 则系统输出或者为一常值(零特征根), 或者为等幅振荡(纯虚根), 不能恢复原平衡状态。则系统处于临界稳定状态。

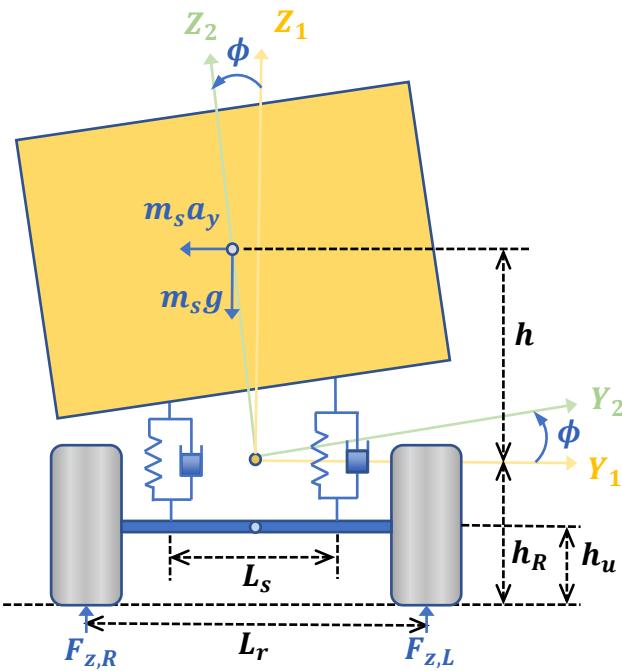
判别方法2: (线性定常系统) S 域的判别方法

传递函数 $\Phi(s)$ 的所有极点均在根平面(S 平面)的左半部分。

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？

车辆悬架原理图



变量定义	符号
x 轴转动惯量	J_x
簧上质量	m_s
连杆长度	h_s
倾斜角	ϕ
离心力加速度	a_y
连杆阻尼系数	C_ϕ
连杆弹簧系数	K_ϕ

转矩平衡方程

$$J_x \ddot{\phi} = M_a + M_g - M_r$$

离心力矩

$$M_a = m_s h a_y$$

重力矩

$$M_g = m_s g h \sin(\phi)$$

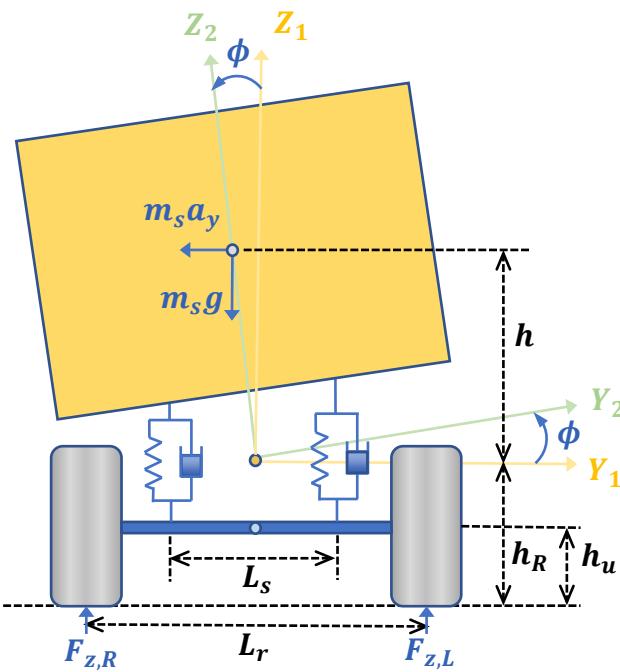
悬架回正力矩

$$M_r = \frac{1}{2} L_s^2 (K_\phi \phi + C_\phi \dot{\phi})$$

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？

车辆悬架原理图



变量定义	符号
x 轴转动惯量	J_x
簧上质量	m_s
连杆长度	h_s
倾斜角	ϕ
离心力加速度	a_y
连杆阻尼系数	C_ϕ
连杆弹簧系数	K_ϕ

传递函数

$$a_y(s) \xrightarrow{\frac{m_s h}{J_x s^2 + \frac{1}{2} L_s^2 C_\phi s + \frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h}} \phi(s)$$

单位脉冲响应

$$\phi(t) = \frac{m_s h}{J_x} (a_1 e^{p_1 t} + b_1 e^{p_2 t})$$

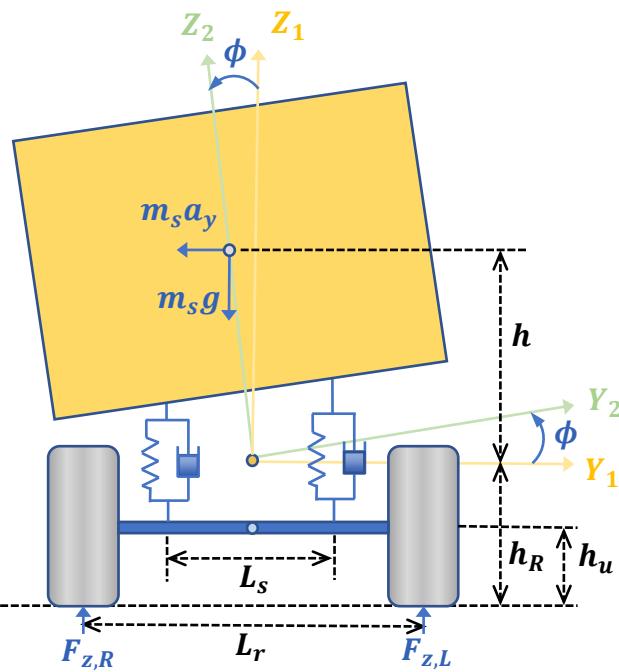
$$p_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} L_s^2 C_\phi \pm \sqrt{\frac{1}{4} L_s^4 C_\phi^2 - 4 J_x \left(\frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h \right)}}{2 J_x}$$

$$\frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h > 0$$

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？

车辆悬架原理图



变量定义	符号
x 轴转动惯量	J_x
簧上质量	m_s
连杆长度	h_s
倾斜角	ϕ
离心力加速度	a_y
连杆阻尼系数	c_ϕ
连杆弹簧系数	K_ϕ

$$\frac{1}{2}L_s^2K_\phi - m_sgh > 0$$

h : 载重重心高度

L_s : 车身悬架的宽度

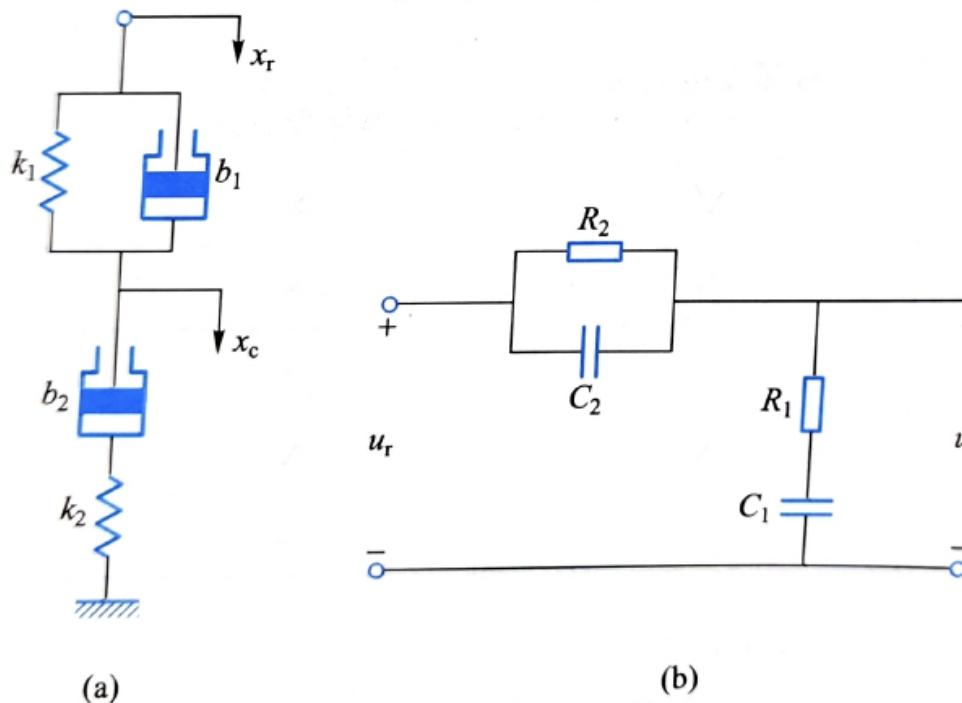
K_ϕ : 弹性元件的强度

m_s : 载重 (簧上质量)

- 控制系统的稳定性：
 - 稳定性的定义
 - 稳定性的判据
 - 案例分析：车辆侧翻案例
- 作业：
 - 作业3.4

习题课/第二章

2.1 试分别以 x_r 和 u_r 为输入, x_c 和 u_c 为输出, 求题图 2-1(a) 所示机械系统和题图 2-1(b) 所示电路系统的微分方程模型和传递函数, 并证明这两个系统是相似系统。其中 k_1 和 k_2 是弹簧的弹性系数, b_1 和 b_2 是阻尼器的阻尼系数, R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 分别是电阻器的电阻和电容器的电容。



题图 2-1 机械系统和电路系统

2.5 若某系统在单位阶跃输入作用 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统

(1) 在零初始条件下的输出响应为 $c(t) = 1 + e^{-t} - e^{-2t}$, $t > 0$ 。

(2) 在初始条件为 $c(0) = 0$, $\dot{c}(0) = 3$ 时的输出响应为 $c(t) = 1 + 4e^{-t} - 4e^{-2t}$, $t > 0$ 。

试求上述两种情况下系统的传递函数。

(3) 思考为何该系统的输出响应在 $t = 0$ 时发生了跳变。

(4) 求系统的单位脉冲响应, 并比较与系统的单位阶跃响应的关系。

习题课/第二章

2.7 已知某系统信号间的微分方程描述为

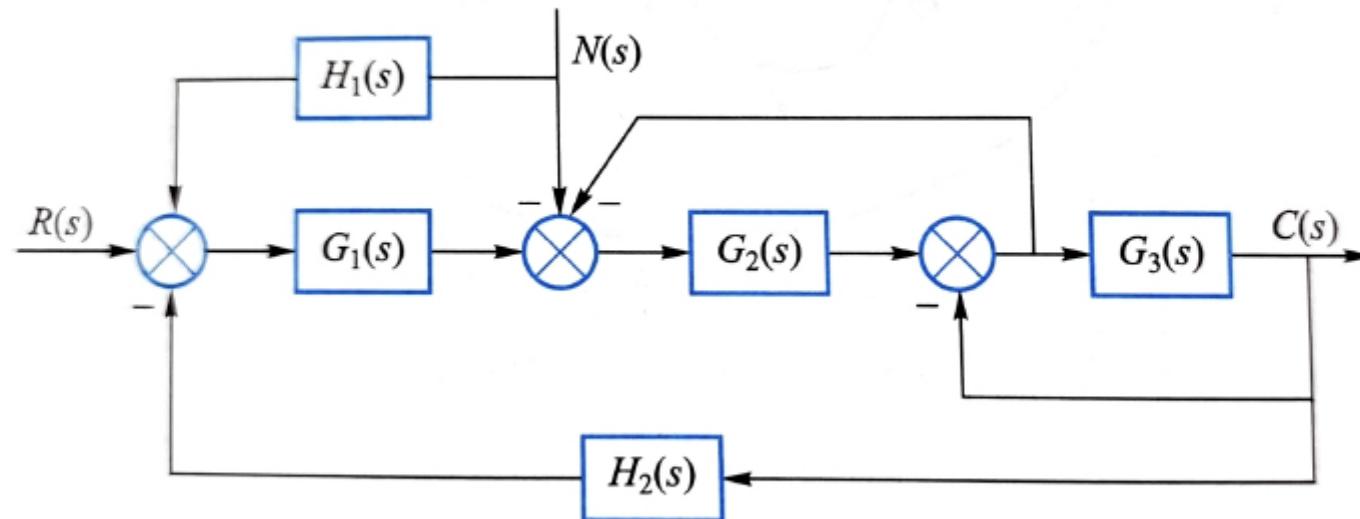
$$x_1(t) = r(t) - c(t), \quad x_2(t) = \tau \frac{dx_1(t)}{dt} + K_1 x_1(t)$$

$$x_3(t) = K_2 x_2(t), \quad x_4(t) = x_3(t) - x_5(t) - K_5 c(t)$$

$$\frac{dx_5(t)}{dt} = K_3 x_4(t), \quad K_4 x_5(t) = T \frac{dc(t)}{dt} + c(t)$$

其中 $\tau, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, T$ 均为常数。设输入为 $r(t)$, 输出为 $c(t)$, 试绘制系统的结构图, 并求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

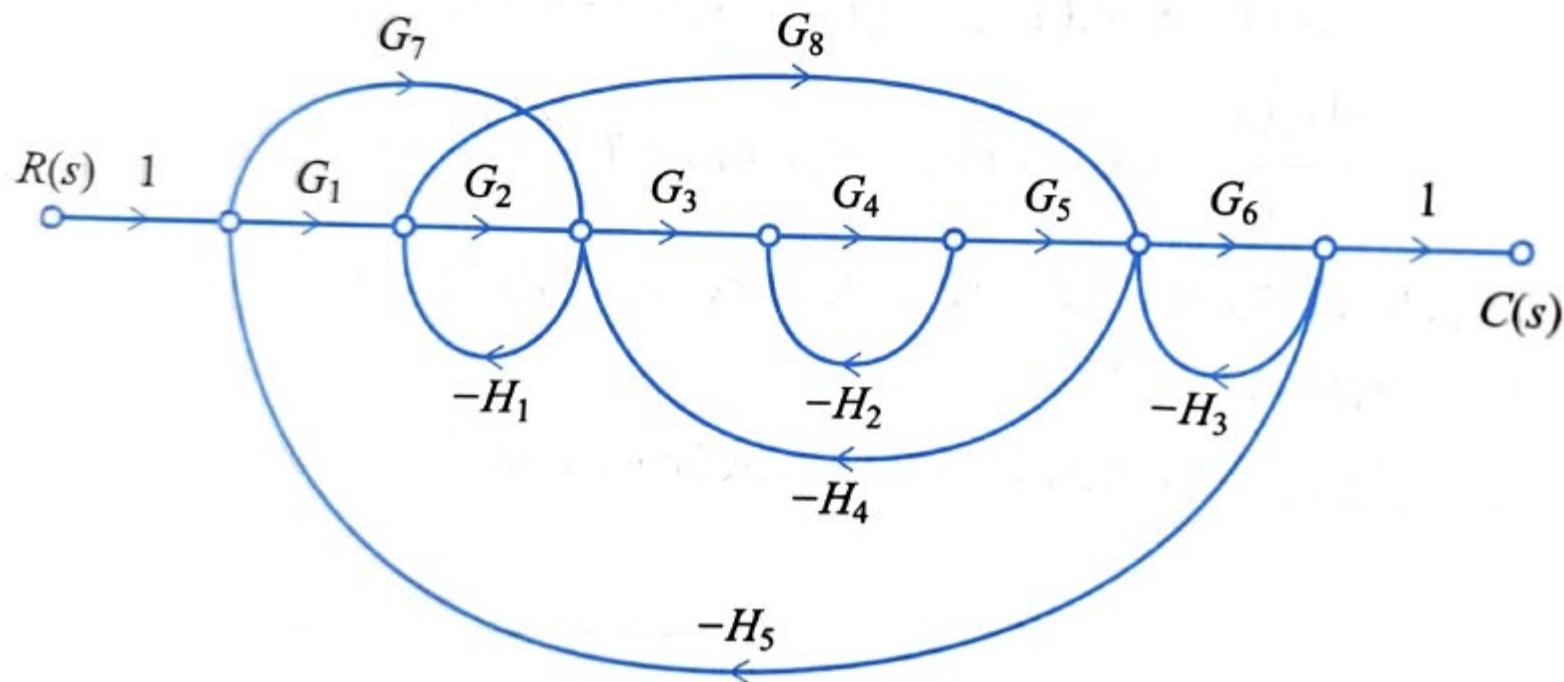
2.9 已知系统的结构图如题图 2-5 所示,试分别用结构图等效化简的方法和梅森公式的
方法求系统的传递函数。



题图 2-5 习题 2.9 系统的结构图

习题课/第二章

2.11 设系统信号流图如题图 2-7 所示。求传递函数 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。



题图 2-7 习题 2.11 系统的信号流图