2024-2025 学年度春季

课程名称：《自动控制原理（一）》

第8讲 控制系统的稳定性分析-Part 2

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象： 自动化2305班 (32人)

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

回顾-第7讲

■ 控制系统的稳定性

系统受到一扰动偏离了平衡状态，当撤销扰动后：

若系统能够重新恢复到原始平衡状态，则称系统是稳定的；

若扰动消失后不能恢复原始平衡状态，而偏差越来越大．则称系统是不稳定的。

若扰动消失后，系统输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于临界稳定状态。

回顾-第7讲

■ 控制系统的稳定性

判别方法1：(线性定常系统)

设系统初始条件为零，输入一个理想的单位脉冲函数，若输出响应$c(t)$满足

$\lim\limits_{t\to\infty} c(t) = 0$，则该系统是稳定的。

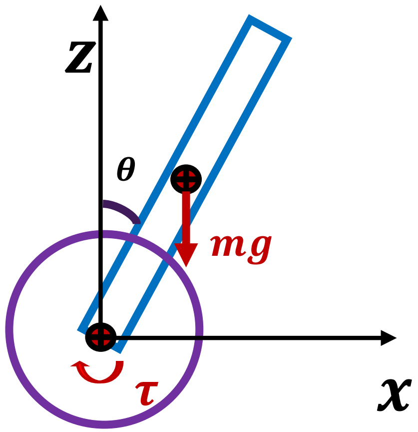
判别方法2：(线性定常系统)　S域的判别方法

传递函数$\Phi(s)$的所有极点均在根平面(S平面)的左半部分。

回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

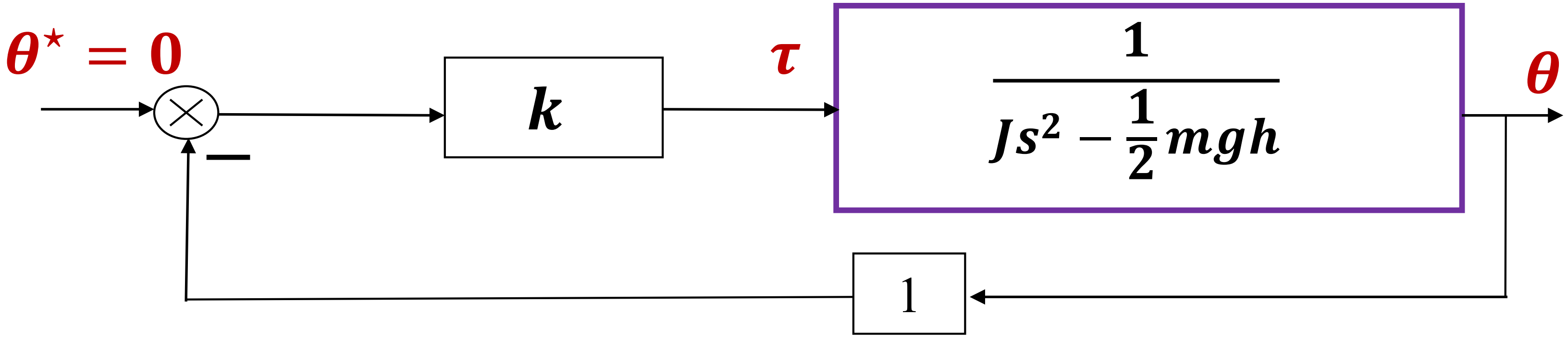
$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{1}{2}mgh\theta+\tau$$

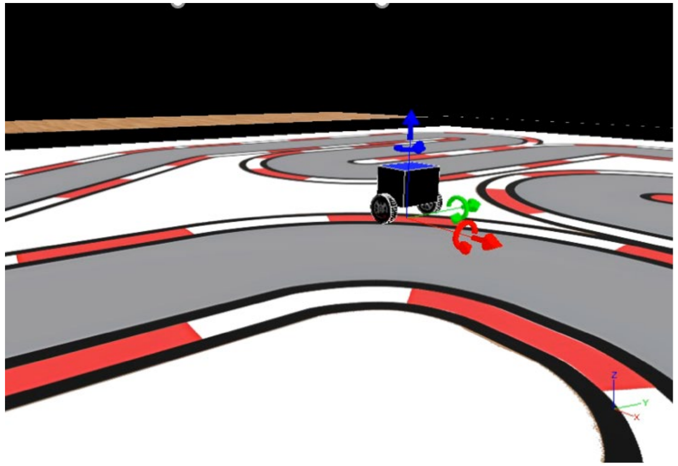


其中俯仰角为θ, 机器人主体质量为m, 高度为h转动惯量为J

机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩τ

设计控制量$\tau=-k\theta$



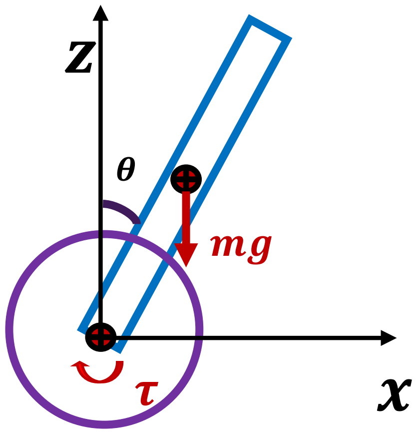


$$G(s)=\frac{\theta(s)}{R(s)}=\frac{k}{Js^2+k-\frac{1}{2}mgh}$$

回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{1}{2}mgh\theta+\tau$$

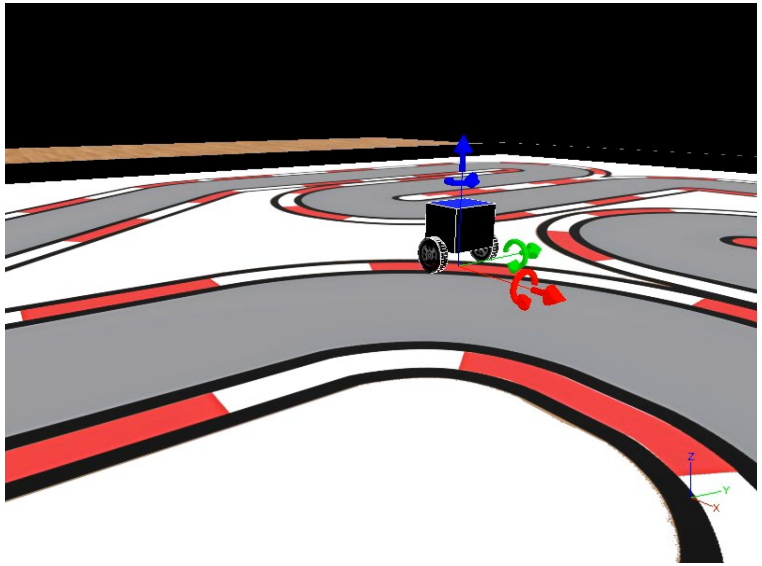


其中俯仰角为θ, 机器人主体质量为m, 高度为h转动惯量为J

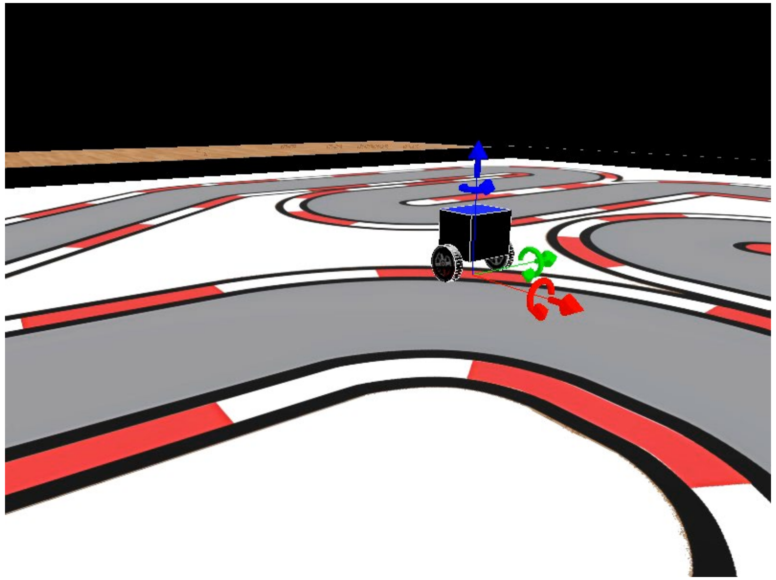
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩τ

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{R(s)}=\frac{k}{Js^2+k-\frac{1}{2}mgh}$$

【 $k>\frac{1}{2}mgh$ 时】

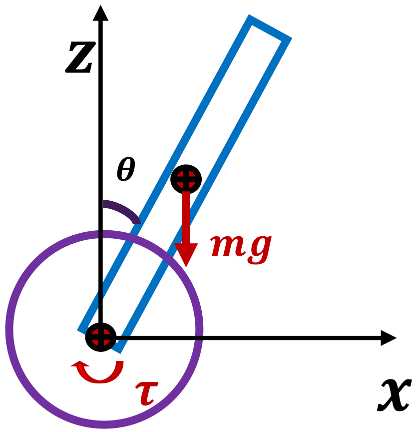


【 $k<\frac{1}{2}mgh$时】



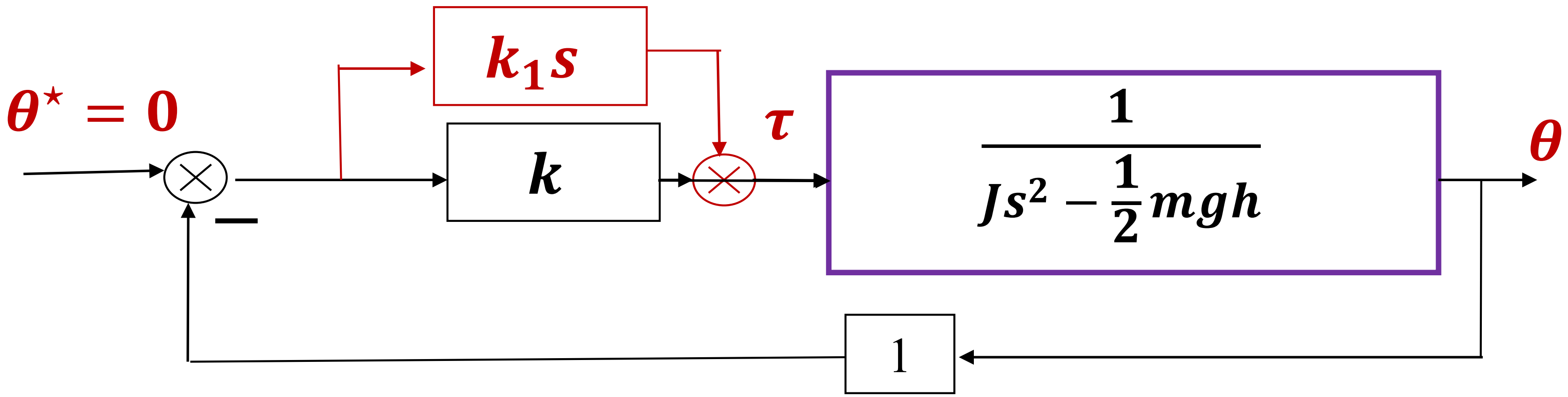
前测

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图



$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{1}{2}mgh\theta+\tau$$

设计控制量$\tau=-k\theta-k_1\dot{\theta}$

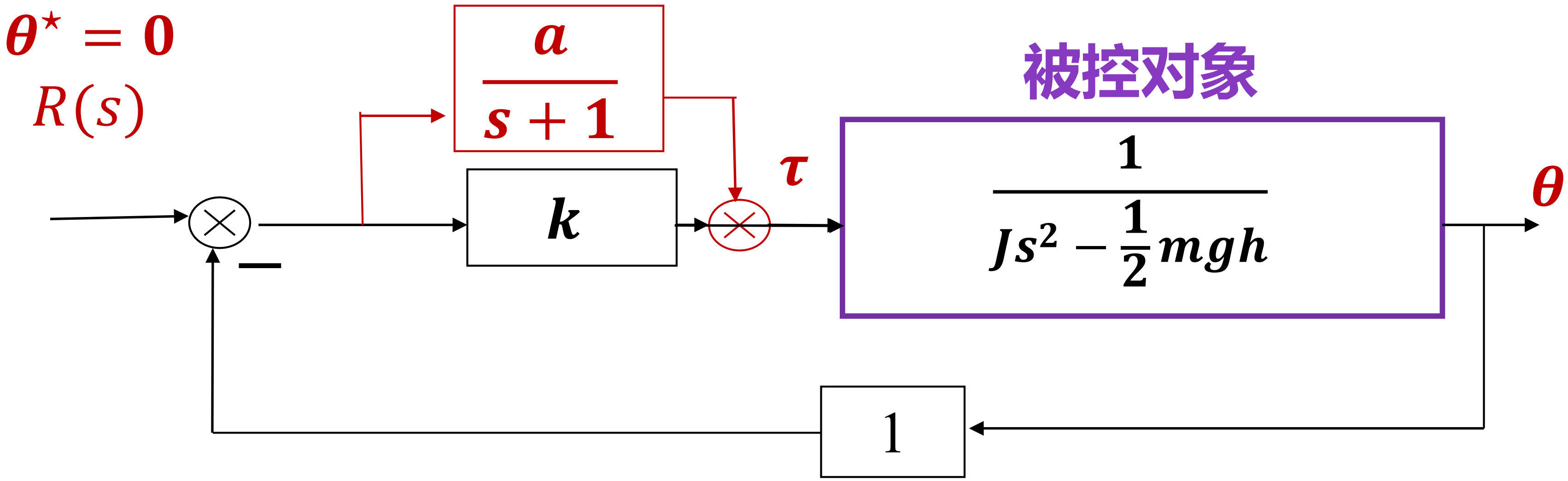


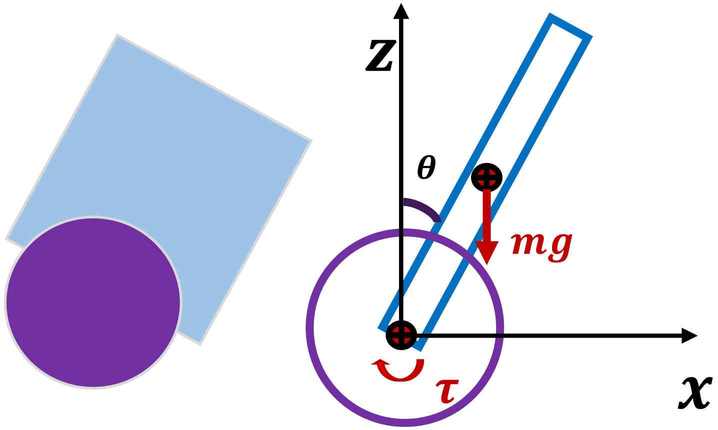
如何设计k和k_1使得偏转时不会发生来回摆动?

传递函数$G(s)=\frac{\theta(s)}{R(s)}=\frac{k_1s+k}{Js^2+k_1s+k-\frac{1}{2}mgh}$

导入

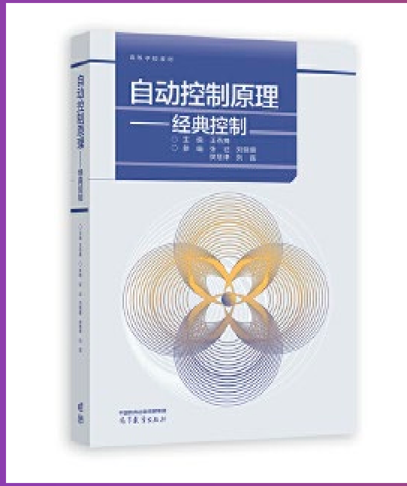
【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图





$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$

如何判断系统稳定性呢?



第三章：控制系统的时域分析

第8讲 控制系统的稳定性分析-Part 2

Stability of Control Systems – Part 2

本讲内容

一、劳斯判据

二、劳斯判据的应用

三、案例：车辆平衡控制系统

一、劳斯判据

❑ **稳定的前提条件：已知系统的闭环特征方程**

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

系统稳定的必要条件是：特征方程各项系数为正，且不缺项。

注：如果同时为负，左右同乘以-1 **。**

证明】设想方程全部为负实根或实部为负的共轭复数，则一定可以分解成下面一些因式的乘积：

$$(s+\alpha)(s+\beta+j\gamma)(s+\beta-j\gamma),$$

其中$\alpha, \beta > 0$**。上面因式等价于**$(s+\alpha)(s^2+2\beta s+\beta^2+\gamma^2)$

展开后可以得到方程的系数全部为正。因此有上面结论。

【测试】判断具有下面特征方程的系统的稳定性。

$5s^3 + 6s^2 + 3s - 5 = 0$　　一项为负，不稳定

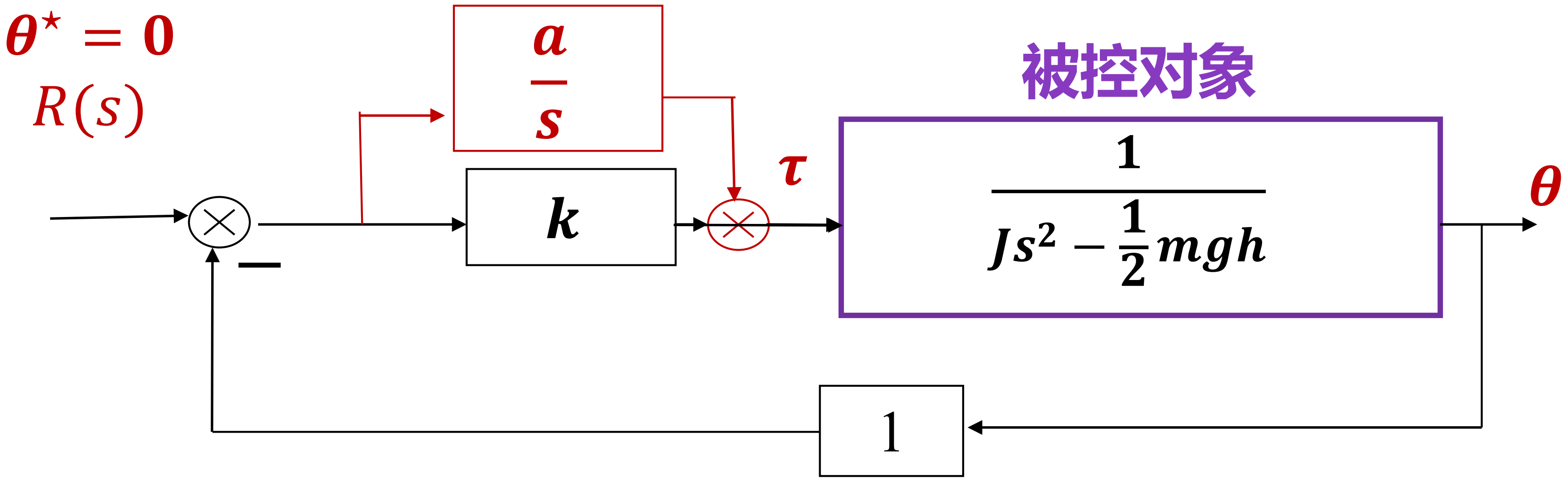
$5s^3 + 6s^2 + 5 = 0$　　缺项，不稳定

$5s^3 + 6s^2 + 3s + 5 = 0$　　满足必要条件，

可能稳定

一、劳斯判据

【测试】判断具有下面特征方程的系统的稳定性。



一、劳斯判据

若闭环系统的特征方程是$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

假设闭环特征方程所有系数均为实数，且$a_n > 0$**。按特征方程的系数构建Routh阵列表：**

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6}\cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7}\cdots \\
s^{n-2} & \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_{n-1}a_{n-6}-a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} & \\
s^{n-3} & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^0 & \cdots & & &
\end{array}
$$

$$= -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\times |a_{n-1}|$$

- **每一行都须计算到其余项均为0。**
- **某一行中各值同乘一个正数不影响稳定性结论。**
- **并非只有系数全正时才可以应用劳斯判据。**

一、劳斯判据

判别方法3：（线性定常系统）劳斯判据

- 系统稳定的**充要条件**是Routh表中第一列各项元素均为正。
- 特征方程具有**正实部根的个数**等于Routh表第一列中系数改变符号的次数。

✓ 适用于判断线性定常系统的稳定性。

✓ 适用于系统的闭环特征方程。

一、劳斯判据

【例1.1】已知某控制系统的闭环特征方程，判断其稳定性。

$$2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+15s+7=0$$

s^6	2	3	6	7
s^5	5	4	15	
s^4	$\dfrac{5\times3-2\times4}{5}=\dfrac{7}{5}$	$\dfrac{30-30}{5}=0$	$\dfrac{35-0}{5}=7$	
s^3	4	-10		
s^2	$\dfrac{7}{2}$	7		
s^1	-18			
s^0	7			

该系统不稳定，且有两个正实部的根。

?若第一列元素为0怎么办?

- **如果系统为偶数阶，如果每一行的计算都不乘以某个系数，则s的偶数次幂行最后一个系数相同。**

一、劳斯判据

【特殊情况1】：

劳斯阵列表中某一行的第一个系数为0，其余各系数不全为0或没有其余项。

此时，用一个小正数ε代替，并继续计算下去。

- ✓ 如果劳斯阵列第一列元素为正数，则有一对纯虚根(或0根)存在，系统处于临界稳定。
- ✓ 如果第一列有变号，则系统不稳定，不稳定根（右半平面的根）的个数由符号改变的次数决定。

一、劳斯判据

【例1.2】某闭环控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\frac{s^2+s+2}{s^4+s^3+s^2+s+3}$，试判断系统的稳定性

【解】由$1+G(s)H(s)=0$ 得到闭环系统的特征方程为$s^4+s^3+2s^2+2s+5=0$

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 2 & 5 \\
s^3 & 1 & 2 & \\
s^2 & 0\ (\varepsilon) & 5 & \text{由于后面系数不为0} \\
s^1 & 2-\dfrac{5}{\varepsilon}\ \boxed{<0} & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

故系统不稳定，且有两个具有正实部的根。

一、劳斯判据

【测试】已知某控制系统的闭环特征方程为

$$s^4+5s^3+10s^2+20s+24=0,$$

判断其稳定性。

【解】

s^4	1	10	24
s^3	5	20	
s^2	6	24	
s^1	$0\ (\varepsilon)$		
s^0	24		

由于后面没有其余项

ε上下元素为正数，表示有一对纯虚根（或0根）存在，系统临界稳定。

一、劳斯判据

【特殊情况2】：Routh表中某一行全为零（设为s的k次幂行，k一般情况下为奇数）则说明有成对的关于原点对称的根，系统不稳定。此时

- ➢ 利用第k行的上一行构成辅助多项式。
- ➢ 求辅助多项式关于s的导数，并将其系数作为第k行的值。然后继续计算劳斯阵列表。

□ 结论：

- ✓ 如果劳斯阵列表第一列不变号，则系统临界稳定；
- ✓ 若第一列系数变号，则系统不稳定，第一列系数符号改变的次数等于在右半平面的根的个数。
- ✓ 关于原点对称的根可以从辅助多项式解出，令辅助多项式等于0，求解方程即得。

一、劳斯判据

【例1.3】已知某控制系统的闭环特征方程为$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$，**判断其稳定性，并求系统的特征根**

【解】

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	$0\ (8)$	$0(96)$	
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

s^4 行 $\Rightarrow 2s^4+48s^2-50$

求导 $\downarrow$

$8s^3+96s$ $\rightarrow$ s^3 行 $0(8)$、$0(96)$

一次变号说明有一个正的实根，系统不稳定。全0行说明有关于原点对称的根。

由辅助方程$2s^4+48s^2-50=0$，**解得**±1，$\pm j5$，**进一步得**$(s^4+24s^2-25)(s+2)=0$，**5个闭环特征根分别为**-2，±1，$\pm j5$。

一、劳斯判据

【测试】已知某控制系统的闭环特征方程为

$$s^6+s^5+2s^4+2s^3+s^2+s=0$$

判断其稳定性，并求解特征根。

闭环特征根有0根时

【解】

s^6	1	2	1	0
s^5	1	2	1	
s^4	0 (5)	0 (6)	0 (1)	
s^3	$\frac{4}{5}$ (4)	$\frac{4}{5}$ (4)		
s^2	1	1		
s^1	0 (2)			
s^0	1			

s^5 行 → 辅助多项式 s^5+2s^3+s ⇒ $5s^4+6s^2+1$

求解 $s^5+2s^3+s=0$

得：$0,\pm j,\pm j$。

s^2 行 → $s^2+1 \Rightarrow 2s$

=0求根?

!特殊情况1中，如果劳斯阵列表中某一行的第一个系数为0，且没有其余项，也适用特殊情况2。

一、劳斯判据

【例1.4】某反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^3+as^2+2s+1}$，若系统以2 rad/s的频率做等幅振荡，试确定此时的参数$K,a>0$。

【解】系统处于等幅振荡，说明系统是临界稳定的；

等幅振荡频率为2 rad/s，说明系统具有一对共轭虚根$\pm j2$。

闭环特征方程为$s^3+as^2+(2+K)s+1+K=0$，列劳斯阵列，

$$
\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 2+K \\
s^2 & a & 1+K \\
s^1 & 2+K-\dfrac{1+K}{a} & \\
s^0 & 1+K &
\end{array}
$$

临界稳定条件$2+K-\frac{1+K}{a}=0$，

由辅助多项式求关于原点对称的根，

求解$as^2+1+K=0$得

$$s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{1+K}{a}}=\pm j2,$$

联立得$K=2, a=0.75$。

二、劳斯判据的应用

❑ 应用1：稳定裕量的检验

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

◆ **相对稳定性**：是指在稳定的情况下有多少**稳定裕量**。

特征方程的左半平面的根**越靠近虚轴**稳定性越差，稳定裕量越小，相对稳定性越差；

◆ 用劳斯判据检验系统的相对稳定性的方法是：

1. 令$s = z - \sigma$，相当于将S平面左移了σ，

特征方程变为$a_n(z-\sigma)^n + a_{n-1}(z-\sigma)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$，

2. 对**以z为变量**的新的方程应用劳斯判据，判断新的方程有几个根位于新的虚轴的右边

3. 如果所有根位于新的虚轴的左边，则说明系统具有**稳定裕量**σ。

二、劳斯判据的应用

【例2.1】某控制系统的闭环特征方程为$2s^3+10s^2+13s+4=0$，判断其稳定性，并检验有几个特征根在直线$s=-1$的右边。

【解】劳斯阵列表为

$$\begin{array}{lll} s^3 & 2 & 13 \\ s^2 & 10 & 4 \\ s^1 & 12.2 & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} z^3 & 2 & -1 \\ z^2 & 4 & -1 \\ z^1 & -1/2 & \\ z^0 & -1 & \end{array}$$

第一列无符号改变，故该系统稳定。

令$s=z-1$，则$2(z-1)^3+10(z-1)^2+13(z-1)+4=0$，

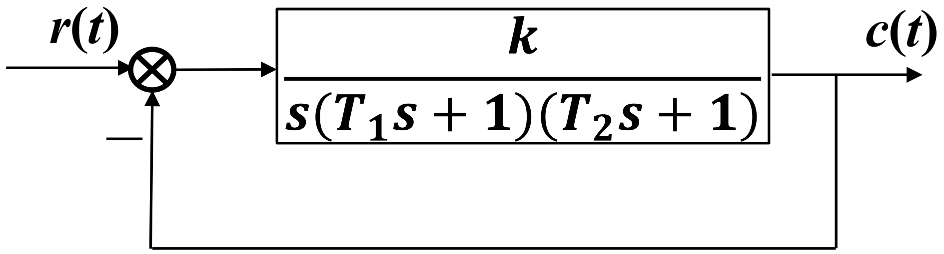
整理得$2z^3+4z^2-z-1=0$，则新的劳斯阵列表为

第一列变号一次，说明有一个根在直线s=-1的右边。稳定裕量不到1。

二、劳斯判据的应用

❑应用2：应用劳斯判据判断使系统稳定的参数变化范围

【例2.2】已知系统方块图，判断使系统稳定的参数范围。



【解】闭环特征方程为

$$T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+k=0,$$

列劳斯阵列

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & T_1T_2 & 1 \\
s^2 & T_1+T_2 & k \\
s^1 & \dfrac{(T_1+T_2)-kT_1T_2}{T_1+T_2} & 0 \\
s^0 & k &
\end{array}$$

要系统的稳定，需使

$$\begin{cases} T_1+T_2>kT_1T_2>0, \\ k>0, \end{cases}$$

即$\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}>k>0$。

?如何判断使系统具有一定稳定裕度的参数范围?

❑ 应用3：应用劳斯稳定判据判断时滞（延迟）系统的稳定性

?时滞系统是线性系统吗?

需要首先对延滞环节$e^{-\tau s}$近似处理。方法有：

1、用有限项简单有理函数的乘积近似。

$$e^{-\tau s}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{\tau s}{n}}\right]^n$$

取n为有限值。

2、用有理分式近似。

$$e^{-\tau s}=1-\tau s+\frac{(\tau s)^2}{2!}-\frac{(\tau s)^3}{3!}+\cdots,$$

因此可利用有理分式近似，参见pade(派德)近似式。

二、劳斯判据的应用

【例2.3】已知某系统的闭环特征方程$s(s+1)+Ke^{-\tau s}=0$，判断使系统稳定的K的范围。

【解】选派德近似式$e^{-\tau s}=\dfrac{1-\frac{3}{4}\tau s+\frac{2}{4}\frac{(\tau s)^2}{2!}-\frac{1}{4}\frac{(\tau s)^3}{3!}}{1+\frac{1}{4}\tau s}$

带入并整理得到近似的特征方程为

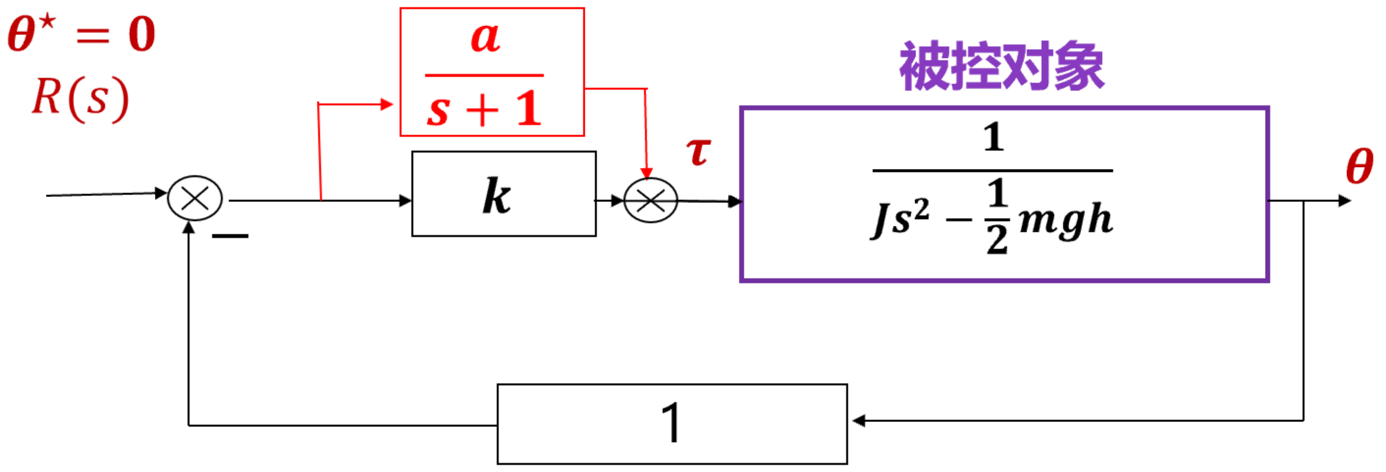
$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}K\right)s^3+\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}K\right)s^2+\left(1-\frac{3}{4}K\right)s+K=0,$$

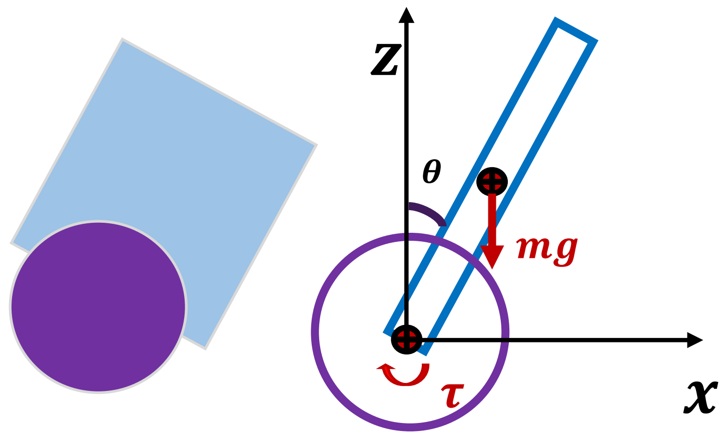
应用劳斯判据得系统稳定的K的范围为$0<K<1.1335$。

对比没有时滞环节的情形，当$\tau=0$时只要$K>0$系统就稳定，可见时滞环节导致该系统的稳定性变差。

- 应用劳斯判据分析延滞系统的稳定性只能得到近似结果，要提高近似程度，多项式的阶次就要增加，分析就越复杂。

【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图





如何设计参数k、a使得系统稳定?

要求：请小组讨论，给出方案，并在Webots平台演示

小结

- 控制系统的稳定性：
  - 劳斯判据：列劳斯表；特殊情况1；特殊情况2
  - 劳斯判据的应用：稳定裕度；辨识参数；迟滞环节
  - 案例分析：轮式机器人案例
- 作业：
  - 作业3.4