2024-2025 学年度春季

课程名称：《自动控制原理（一）》

第9讲 控制系统的动态性能-Part 1

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象：自动化2305班（32人）

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

回顾-第7讲

■ 控制系统的稳定性

判别方法1：(线性定常系统)

设系统初始条件为零，输入一个理想的单位脉冲函数，若输出响应$c(t)$满足

$\lim_{t\to\infty} c(t) = 0$，则该系统是稳定的。

判别方法2：(线性定常系统) S域的判别方法

传递函数$\Phi(s)$的所有极点均在根平面(S平面)的左半部分。

回顾-第8讲

■ 控制系统的稳定性

判别方法3：（线性定常系统）劳斯判据

- 系统稳定的**充要条件**是Routh表中第一列各项元素均为正。
- 特征方程具有**正实部根的个数**等于Routh表第一列中系数改变符号的次数。

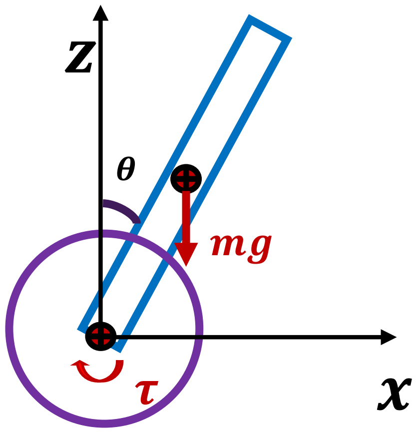
特殊情况1：劳斯阵列表中某一行的第一个系数为0，其余各系数不全为0或没有其余项

特殊情况2： Routh表中某一行全为零

回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

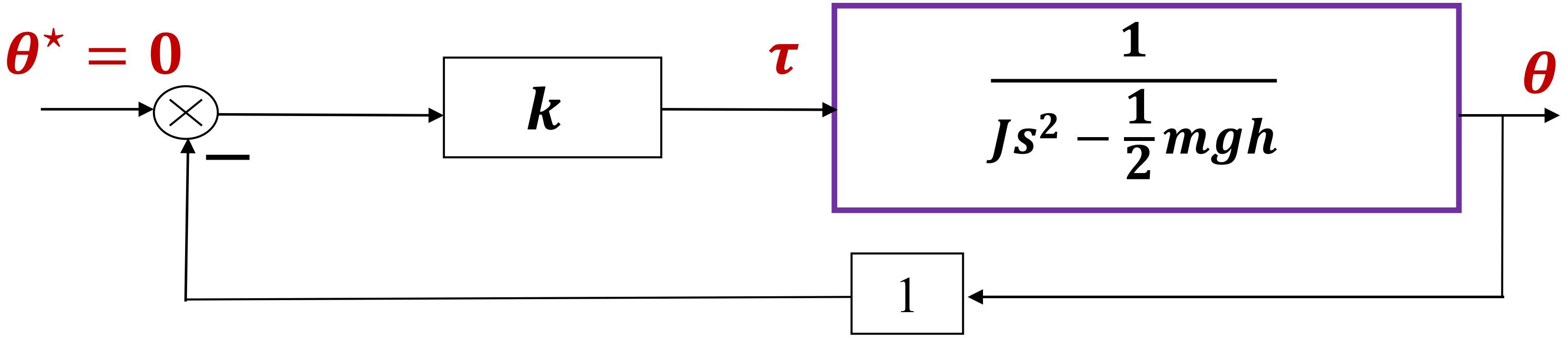
$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=\frac{1}{2}mgh\theta+\tau$$

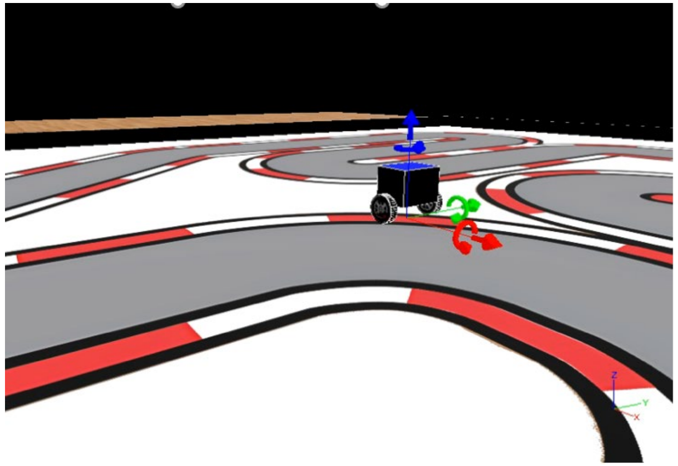


其中俯仰角为θ, 机器人主体质量为m, 高度为h转动惯量为J

机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩τ

设计控制量$\tau=-k\theta$

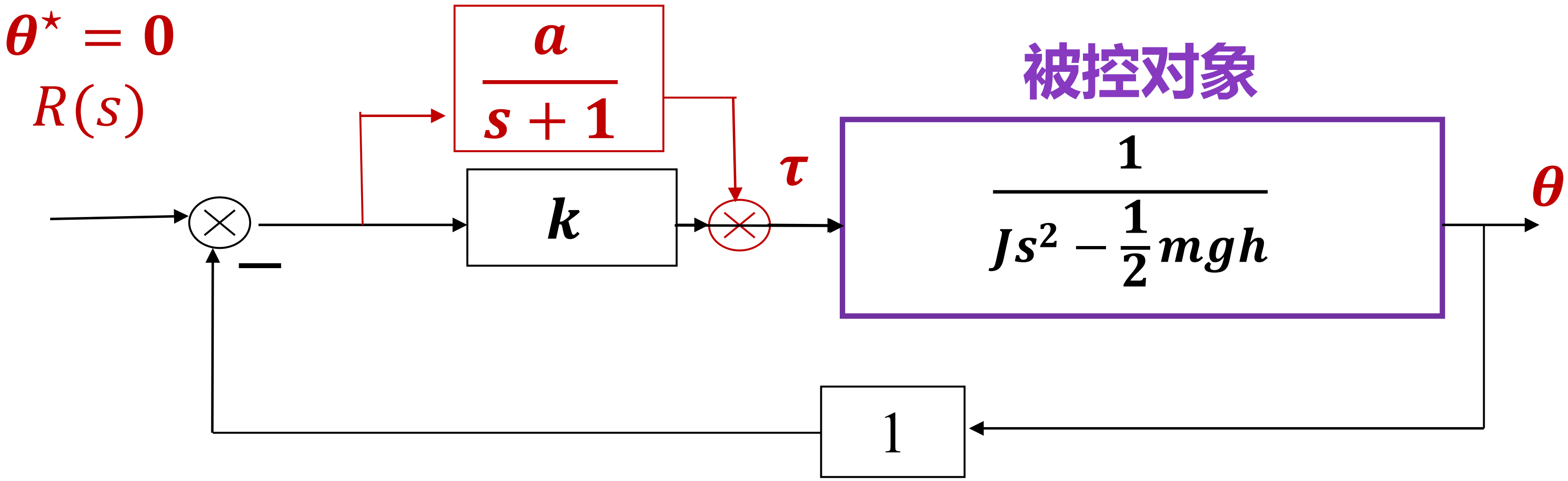


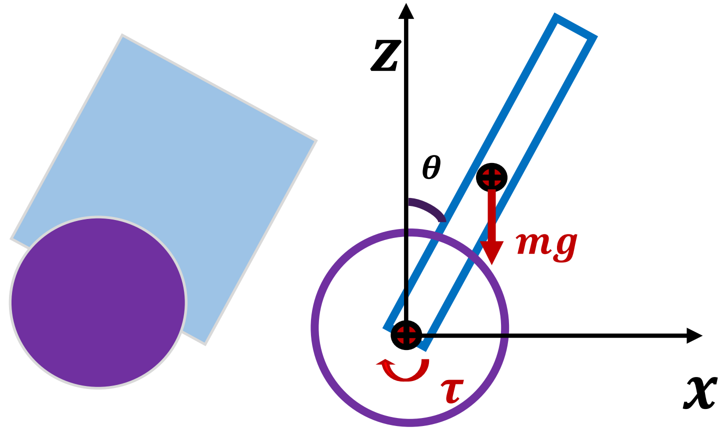


$$G(s)=\frac{\theta(s)}{R(s)}=\frac{k}{Js^2+k-\frac{1}{2}mgh}$$

回顾-案例

【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

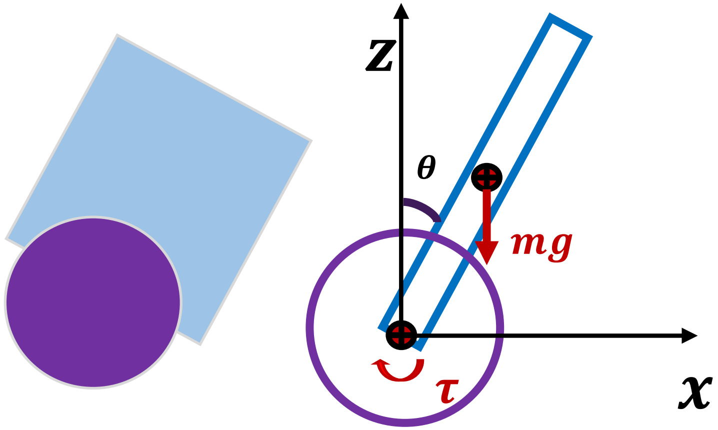




$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$

回顾-案例

【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图



$$G(s)=\frac{\theta(s)}{R(s)}=\frac{ks+k+a}{Js^3+Js^2+ks-\frac{1}{2}mghs+k+a-\frac{1}{2}mgh}$$

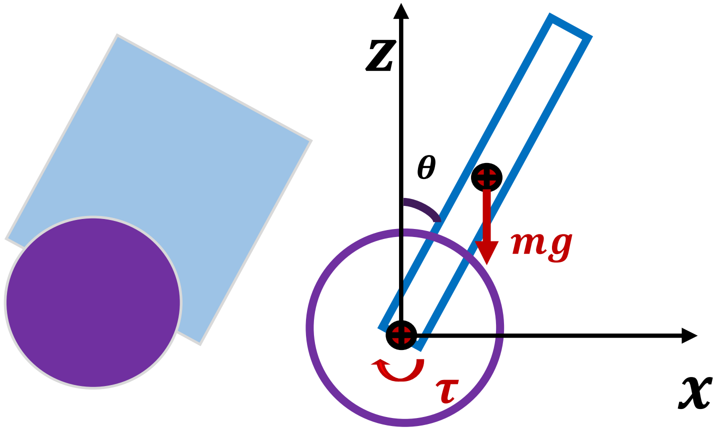
s^3	J	$k-\frac{1}{2}mgh$
s^2	J	$k+a-\frac{1}{2}mgh$
s^1	$-a$	
s^0	$k+a-\frac{1}{2}mgh$	

若$a<0$且$k+a-\frac{1}{2}mgh>0$，则平衡车能够平衡

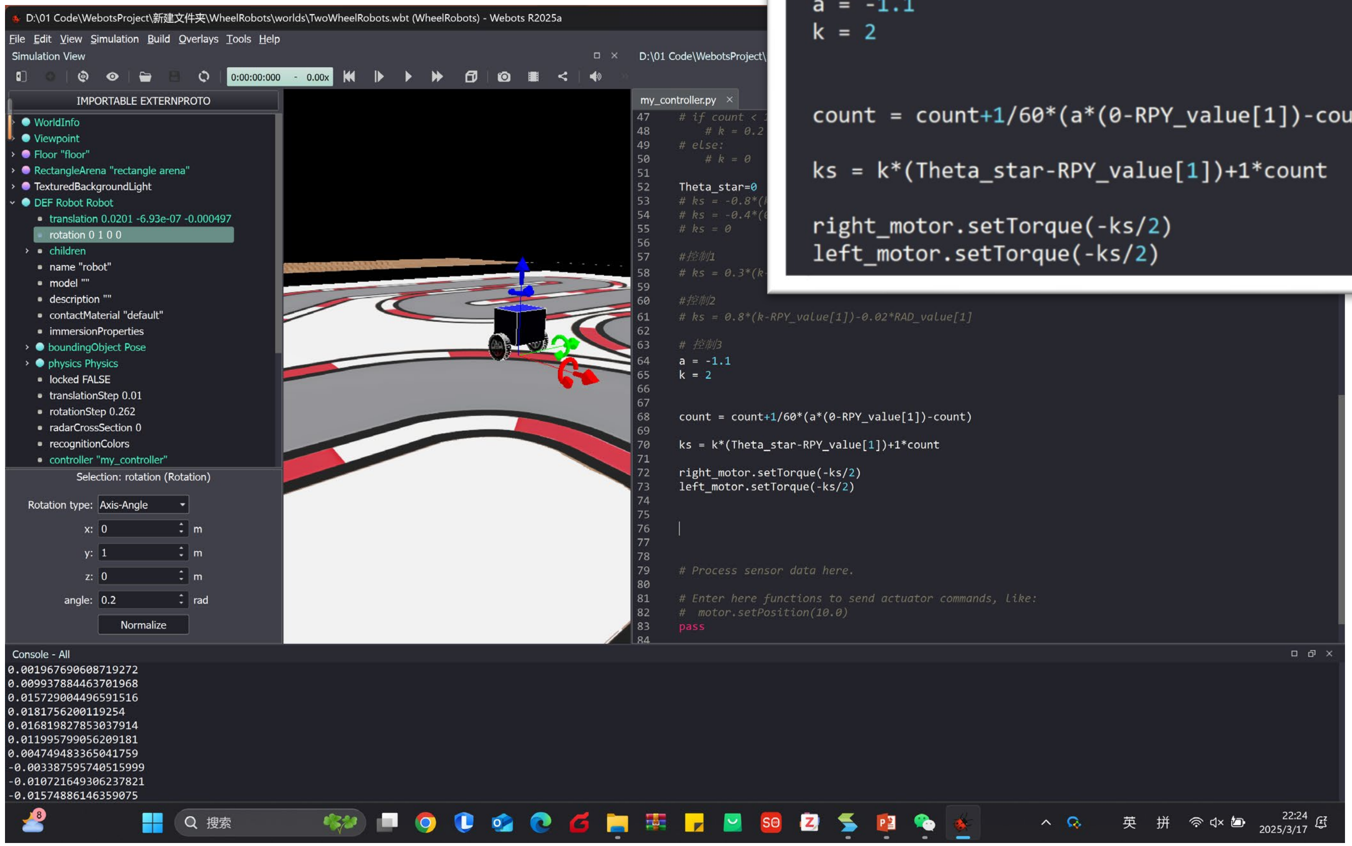
回顾-案例

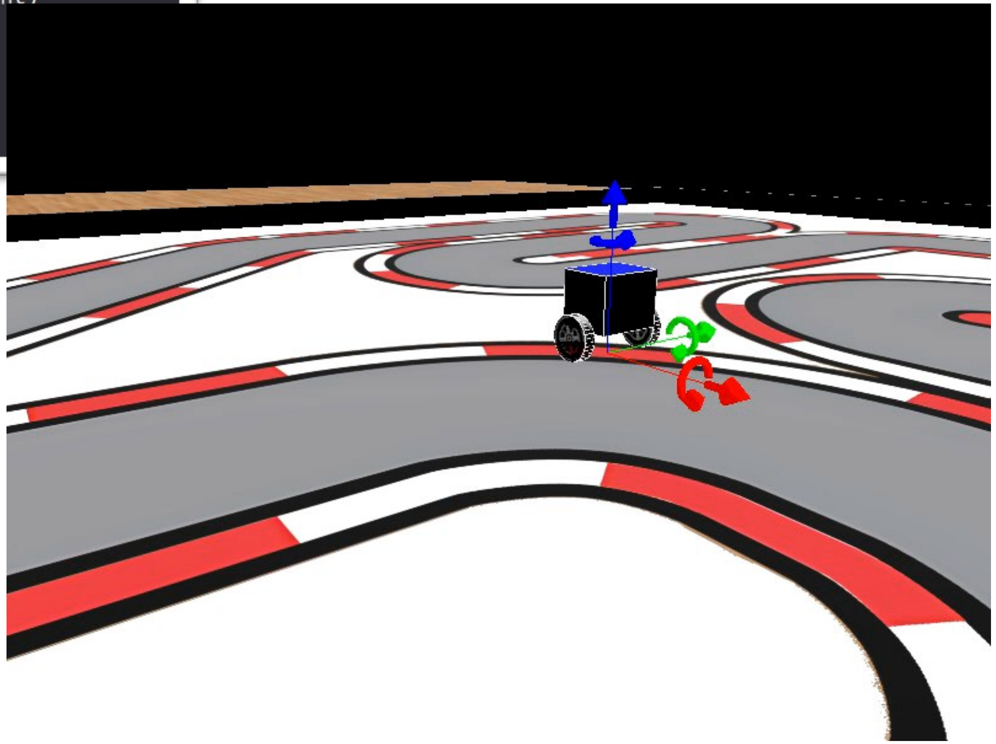
【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

若$a<0$且$k+a-\frac{1}{2}mgh>0$，则平衡车能够平衡



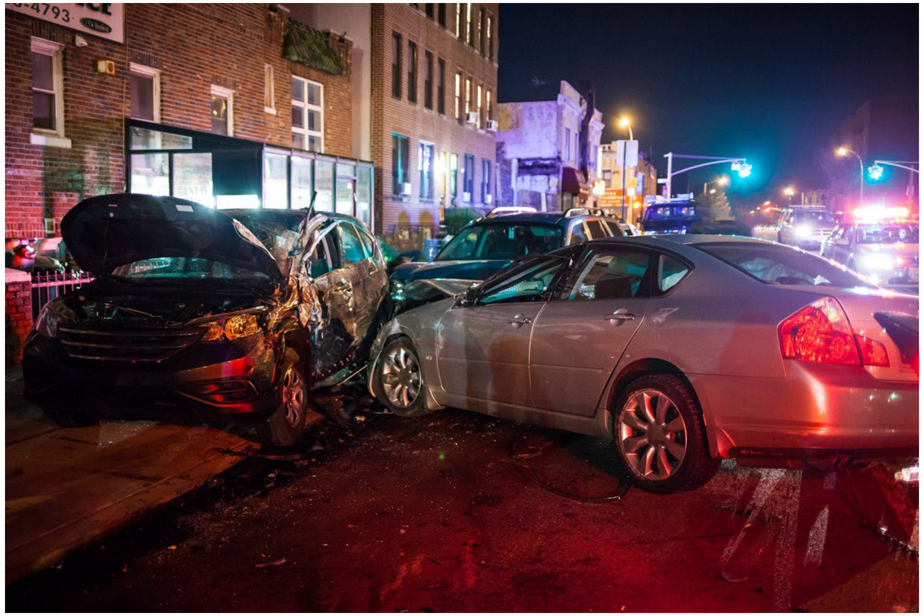

```
# 控制3
a = -1.1
k = 2

count = count+1/60*(a*(0-RPY_value[1])-count)

ks = k*(Theta_star-RPY_value[1])+1*count

right_motor.setTorque(-ks/2)
left_motor.setTorque(-ks/2)
```





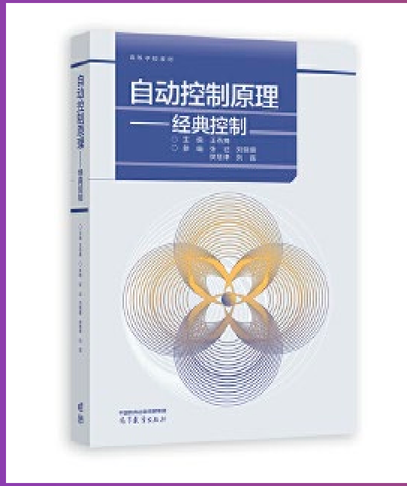
导入

■ 车辆跟驰事故(Uber无人车的碰撞事故)



约90%车辆追尾都是因为与前车没有保持安全距离

如何在车辆跟驰控制中跟前车始终维持安全距离?



第三章：控制系统的时域分析

第9讲 控制系统的动态性能分析-Part 1

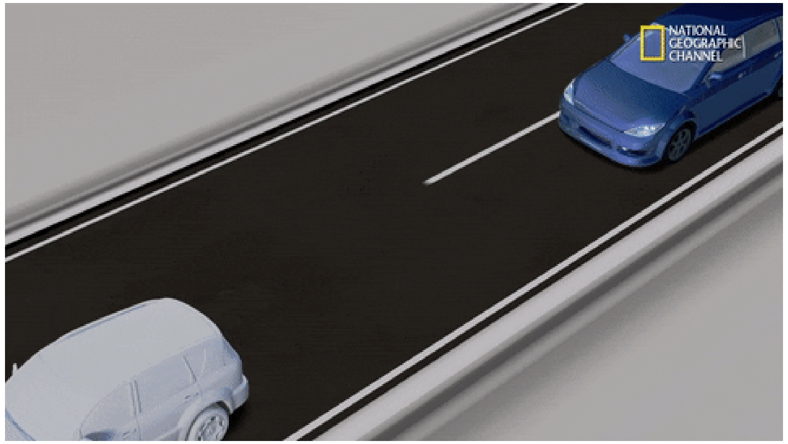
Transient Stability Analysis of Control Systems – Part 1

本讲内容

一、动态性能分析与性能指标

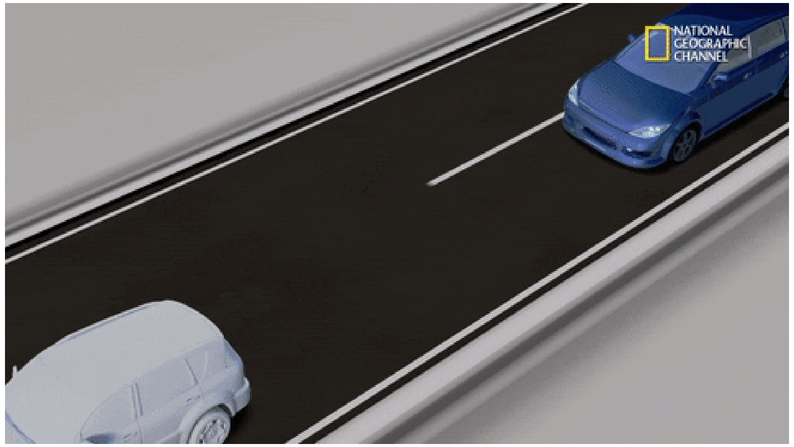
二、一阶系统的时域响应

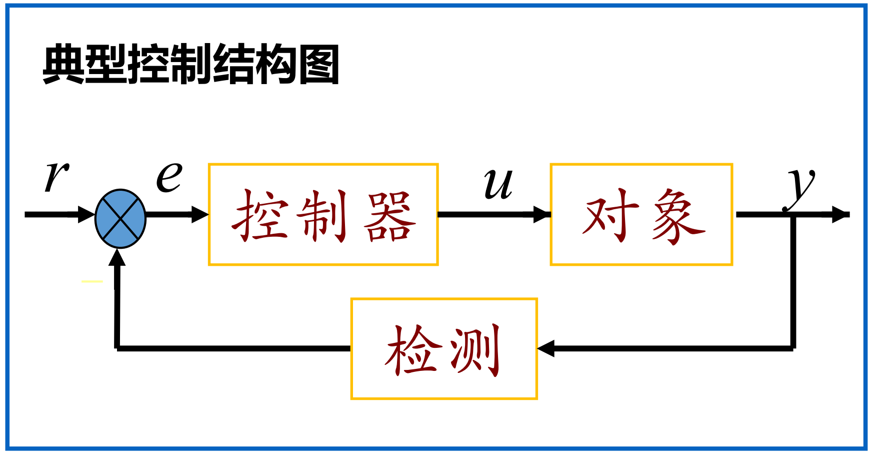
三、二阶系统的时域响应



一、动态性能分析与性能指标

❑ 动态过程





动态过程：输入信号作用在系统的时刻起，到输出达到稳态为止，系统输出随时间变化的过程。

不同初始状态、不同控制器、不同控制参考指令都会出现不同的动态过程

一、动态性能分析与性能指标

◆动态过程(瞬态响应、动态响应)：从输入信号作用在系统的时刻起，到输出达到稳态为止，系统输出随时间变化的过程。

Q1: 动态性能是否与输入有关?

是的。

Q2: 为何采用典型输入信号作用来考察动态性能?

瞬态响应与输入信号形式有关，输入信号不同，系统响应不同。考察典型输入信号，使对系统性能分析有一个统一的标准。

Q3: 通常采用哪个典型输入信号?

单位阶跃信号。

Q4: 初始条件对动态响应过程是否有影响?

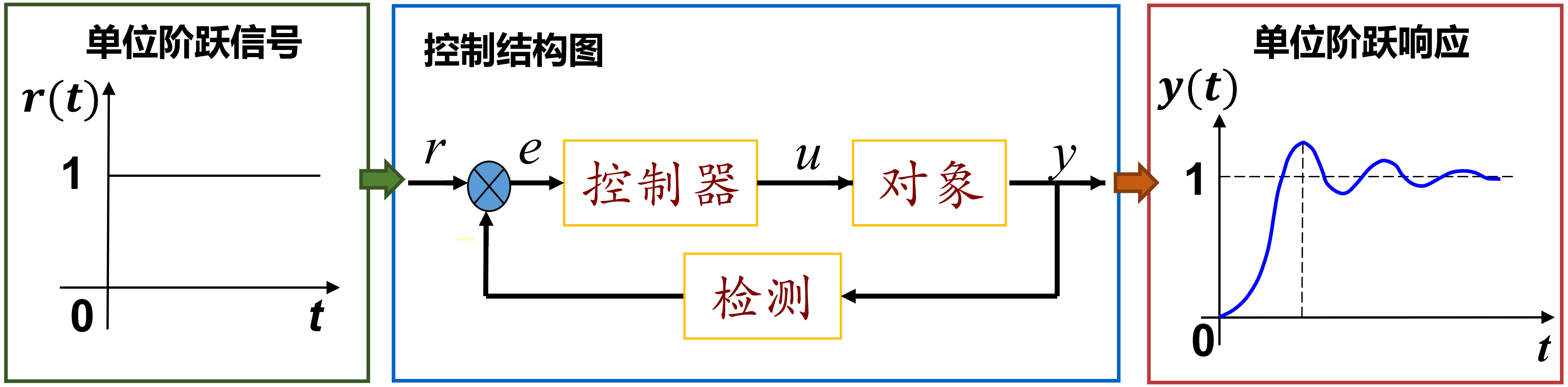
有影响。为考察输入信号的作用，设为零初始条件。

◆总结：动态性能分析是以系统在零初始条件下，对单位阶跃输入信号的响应来描述。

一、动态性能分析与性能指标

动态性能的分析方法有哪些?

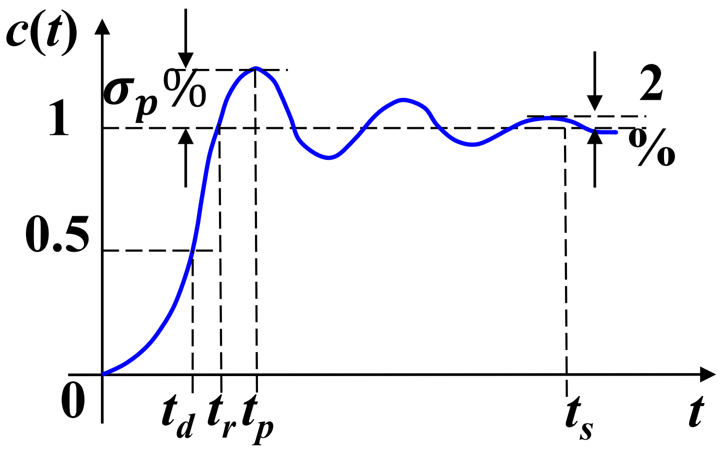
- ✓ 解析法(直接求解法)——得到系统输出$c(t)$表达式。
- ✓ 计算机仿真法——可对复杂高阶的、多变量的系统求解$c(t)$，直接得到各种指标。
- ✓ 间接评价法——通过与系统的结构、参数有联系的性能指标来评价系统的品质。广泛使用。



动态性能分析: 零初始条件下对系统的单位阶跃响应的动态过程进行分析。

一、动态性能分析与性能指标

❑ 动态性能指标



?衡量动态性能的指标有哪些?

线性系统时域响应性能指标包括：

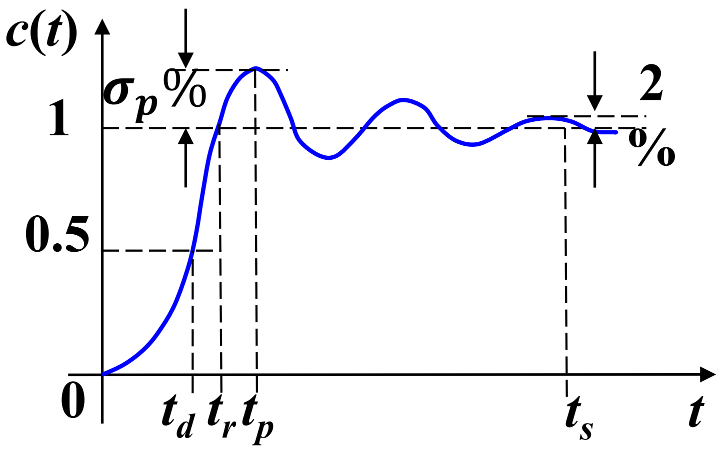
- **延迟时间**t_d：**指系统的单位阶跃响应从0上升到稳态值的50%所需要的时间。**

- **上升时间**t_r：
  - **对有振荡的系统，为单位阶跃响应从0开始至第一次到达稳态值所需时间**
  - **对无振荡的系统，为单位阶跃响应从稳态值的10%到达90%所需时间。**

- **峰值时间**t_p：**指系统的单位阶跃响应从0到达第一个超过其稳态值的峰值所需时间。**

一、动态性能分析与性能指标

❑ 动态性能指标



- **最大超调量σ_p**：指系统的单位阶跃响应偏离稳态值的最大值，常以百分比表示，即

$$\sigma_p=\frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\%。$$

- **调整时间（调节时间）t_s**：指系统的单位阶跃响应从0开始到进入稳态值的95%~105%（或98%~102%）误差带时所需要的时间。
- **振荡次数**：指在调节时间t_s内系统的单位阶跃响应穿越其稳态值次数的一半。
- **衰减比**：指系统的单位阶跃响应的第一个峰值与第二个峰值之比。

一、动态性能分析与性能指标

❑ 性能指标的表征：

- 延迟时间、上升时间、峰值时间：用于评价系统在响应初期的初始快速性。
- 调整时间：用于评价系统总体快速性。
- 超调量、振荡次数、衰减比：用于评价系统的平稳性。

二、一阶系统的时域响应

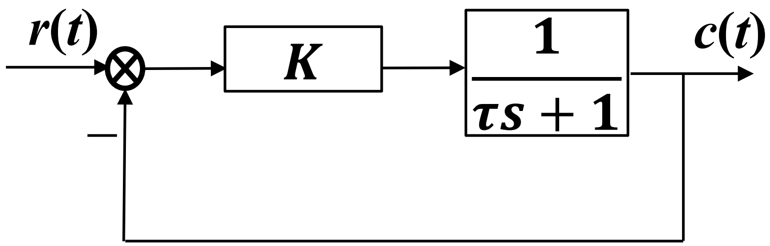
- **一阶系统**：可用一阶微分方程描述其动态过程的系统。

如图所示一阶系统，其中τ是**开环时间常数**，K为**开环放大系数**。

该一阶系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{1+s\tau+K}=\frac{K/\tau}{s+(K+1)/\tau}=\frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{\tau}{K+1}s+1}$$

$$=\frac{K_B}{Ts+1},$$



其中$T=\frac{\tau}{K+1}$为**闭环时间常数**。

$K_B=\frac{K}{K+1}$为**闭环放大系数**。

二、一阶系统的时域响应

❑ 一阶系统的动态性能分析

$$G_B(s)=\frac{K_B}{Ts+1}$$

零初始条件下输入单位阶跃信号时，输出为：

$$C(s)=\frac{\frac{K_B}{T}}{s+\frac{1}{T}}\cdot\frac{1}{s}=\frac{K_B}{s}-\frac{K_B}{s+\frac{1}{T}},$$

拉氏反变换得一阶系统的单位阶跃响应为$c(t)=K_B(1-e^{-\frac{t}{T}}),t\geq 0$。

◆ 响应特征分析：

- **一阶系统的单位阶跃响应为一条初始值为0，以指数规律上升到终值的曲线。**
- **稳态值：当**$t\to\infty$**时输出响应稳态值为**$c(\infty)=K_B=\frac{K}{K+1}$，

K**越大，**$c(\infty)$**越接近于1。总存在稳态误差：**

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-c(t)]=1-c(\infty)=\frac{1}{K+1}。$$

二、一阶系统的时域响应

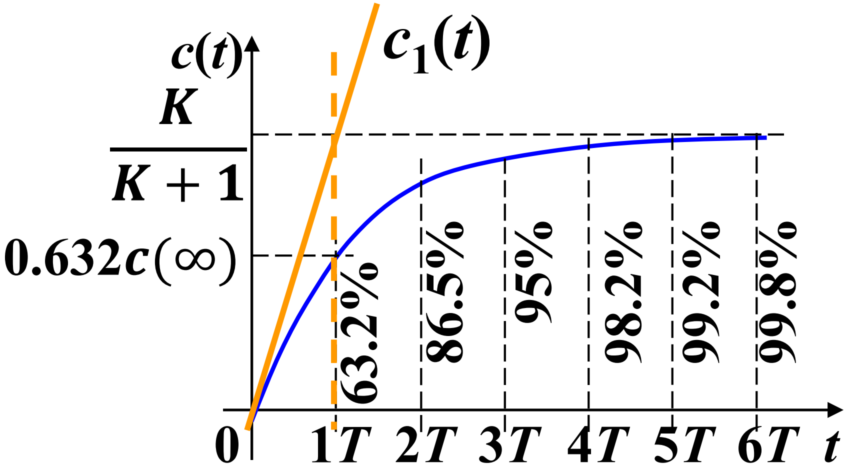
重点

❑ 一阶系统性能指标分析

◆ 响应特征分析：

$$c(t)=\frac{K}{K+1}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

系统的时间常数为$T=\frac{\tau}{K+1}$



➢ 当$t=T$时，$c(t)=c(\infty)(1-e^{-1})=0.632c(\infty)$，即输出达到稳态值的63.2%时对应的时间就是闭环时间常数T。

➢ 对$c(t)$求导：$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{K}{\tau}e^{-(K+1)t/\tau}$关于$t$单调下降，

在$t=0$时$c(t)$的变化率最大，此时斜率为$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=\frac{K}{\tau}$。

以$\frac{K}{\tau}$为斜率定义曲线$c_1(t)$，则$c_1(t)=\frac{K}{\tau}t$，当$t=T$时$c_1(t)$到达稳态值$\frac{K}{K+1}$。

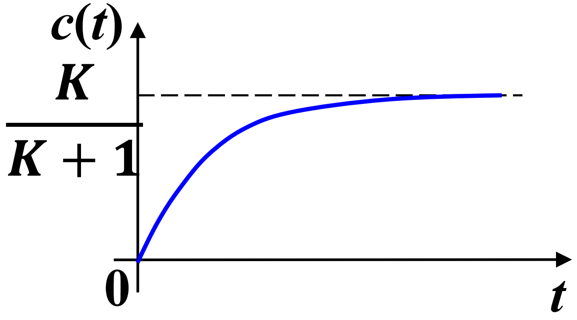
二、一阶系统的时域响应

- **一阶系统性能指标分析** $c(t)=K_B(1-e^{-\frac{t}{T}}), t\geq 0$。

✓ **延迟时间**：令$c(t)=50\%\times c(\infty)=0.5K_B$，得延迟时间$t_d=0.69T$。

✓ **上升时间**：令$1-e^{-\frac{t_1}{T}}=0.1$, $1-e^{-\frac{t_2}{T}}=0.9$,

得$t_r=t_2-t_1=2.2T$。



➢ **调整时间**t_s：$t=3T$时$c(3T)=0.950c(\infty)$，

$t=4T$时$c(4T)=0.982c(\infty)$。则$t_s=\begin{cases}3T,\Delta=5\%,\\4T,\Delta=2\%.\end{cases}$

➢ **峰值时间**t_p：为无穷大。

- **结论：闭环时间常数**T**完全反映了一阶系统的动态性能。**

T反映系统惯性，T减小，惯性减小，响应速度加快。

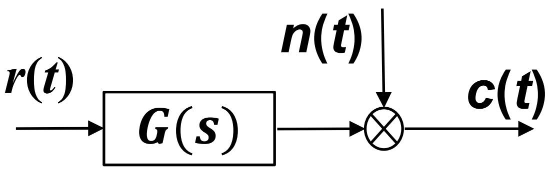
二、一阶系统的时域响应

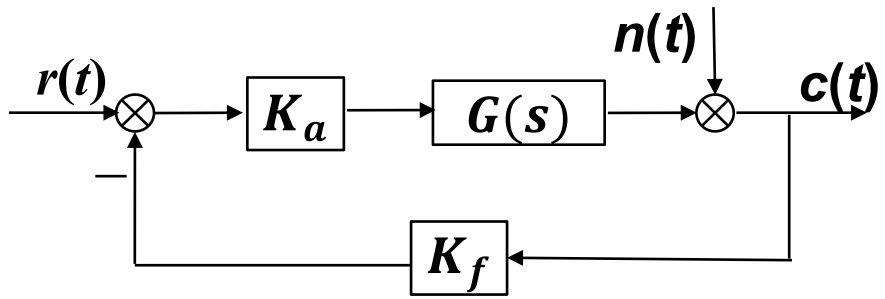
【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数

$G(s)=\frac{1}{10s+1}$，放大器$K_a=100$，温度传感器$K_f=1$。

1) 若$r(t)=1(t)$，$n(t)=0$，两种系统从开始达到稳态温度值的63.2%各需多长时间?

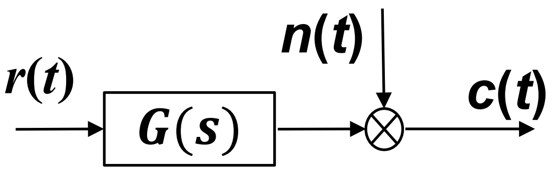
2) 2) 当$n(t)=0.1(t)$阶跃扰动时求扰动对两种系统温度的影响。



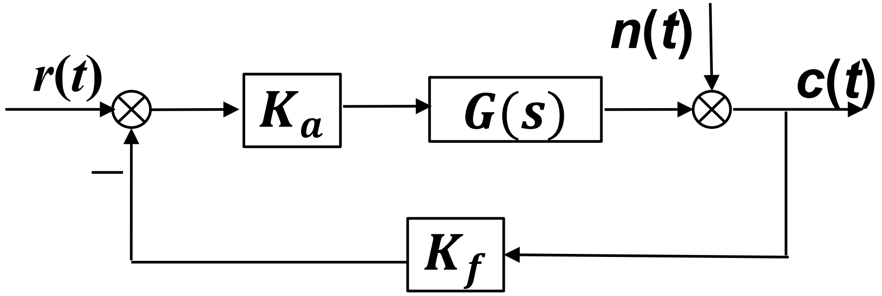


二、一阶系统的时域响应

【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数



(a)



(b)

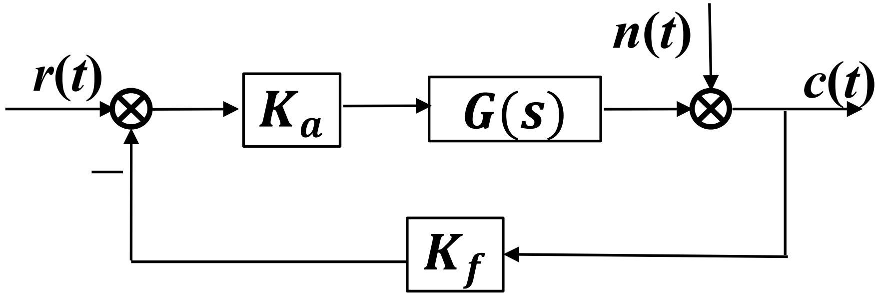
【解】 1)对(a)系统有$G_a(s)=\frac{1}{10s+1}$，时间常数$T_a=10$，从开始达到稳态温度值的63.2%需$t=10$时间单位。

对(b)系统有$G_b(s)=\frac{100}{10s+101}$，时间常数$T_b=\frac{10}{101}=0.099$，则从开始达到稳态温度值的63.2%需$t=0.099$时间单位。

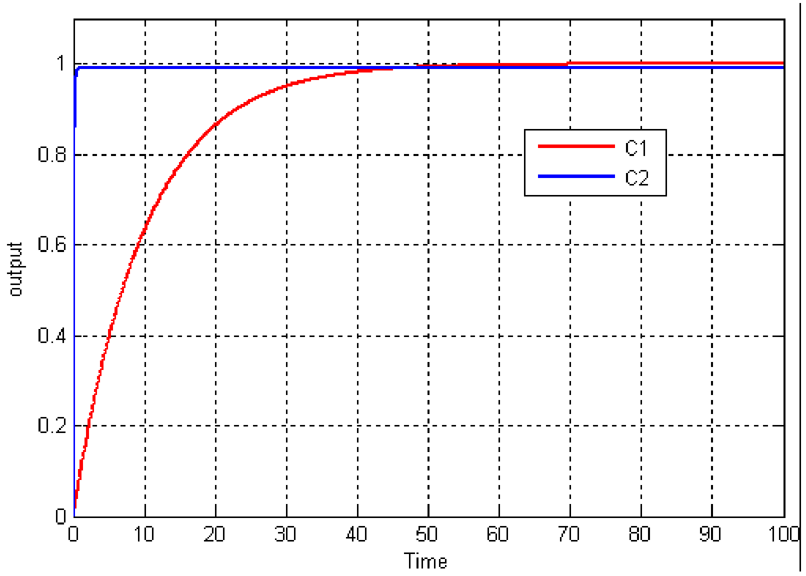
二、一阶系统的时域响应

$$G_a(s) = \frac{1}{10s+1}, \quad t = 10$$

$$G_b(s) = \frac{100}{10s+101}, \quad t = 0.099$$



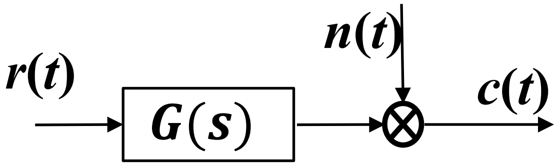

```
t=[0:0.1:100];
n1=[1];d1=[10 1];sys1=tf(n1,d1)
C1=step(sys1,t)
n2=[100];d2=[10 101];sys2=tf(n2,d2)
C2=step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'), ylabel('output')
```



二、一阶系统的时域响应

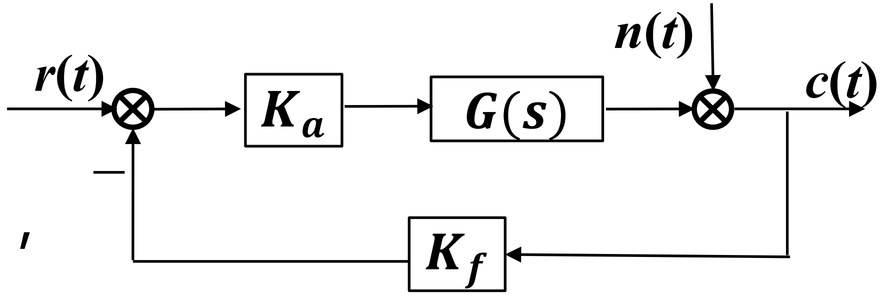
【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数

2)当有$n(t)=0.1(\mathrm{t})$阶跃扰动时求扰动对两种系统温度的影响。



对(a)系统， $G_{na}(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=1$，

$n(t)=0.1(\mathrm{t})$**作用下输出**$c_{na}(t)=0.1$。



对(b)系统， $G_{nb}(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{10s+1}{10s+101}$，

$n(t)=0.1(\mathrm{t})$**作用下输出**

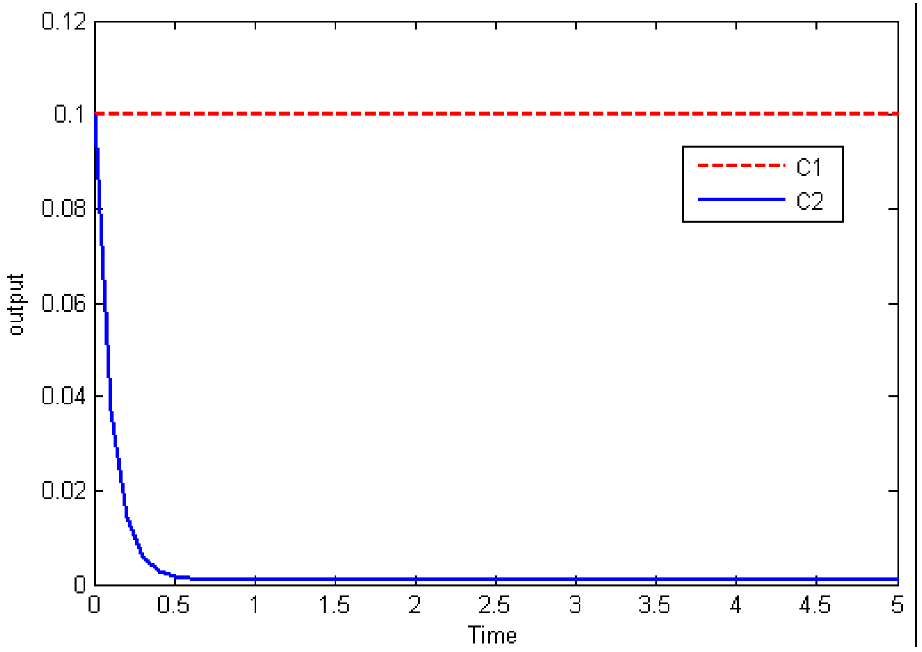
$$C_{nb}(s)=\frac{10s+1}{10s+101}\times\frac{0.1}{s}=\frac{0.1}{101}\left(\frac{1}{s}+\frac{100}{s+10.1}\right),$$

则$c_{nb}(t)=9.9\times10^{-4}(1+100e^{-10.1t})$。

二、一阶系统的时域响应

$$n(t) = 0.1(\mathrm{t}) \qquad c_{na}(t) = 0.1 \qquad c_{nb}(t) = 9.9 \times 10^{-4}(1 + 100e^{-10.1t})$$

```
t=[0:0.1:5];
n1=[1];d1=[1];sys1=tf(n1,d1)
C1=0.1*step(sys1,t)
n2=[10 1];d2=[10 101];
sys2=tf(n2,d2)
C2=0.1*step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'), ylabel('output')
```

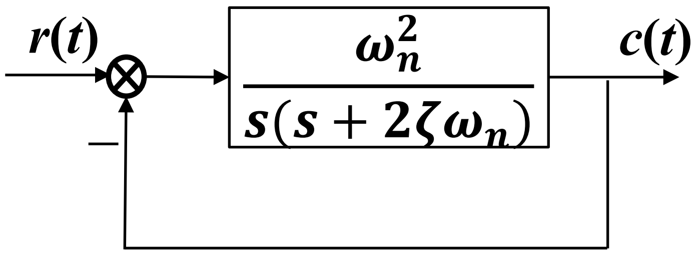


可见，闭环系统比开环系统动态过程加快，抗扰动性能增强。

三、二阶系统的时域响应

二阶系统性能指标分析

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t)$$



- ζ为**阻尼比**，又称阻尼系数，
- ω_n为**无阻尼自然振荡频率**。
- **闭环传递函数**

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

为二阶系统闭环传递函数的标准形式。闭环特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

闭环特征根为 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$。

三、二阶系统的时域响应

- 对$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$进行分析可判断系统的稳定性：

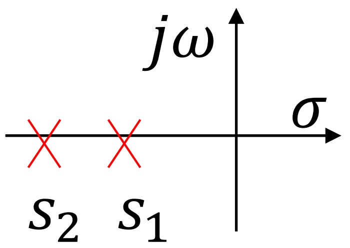
- $\zeta < 0$为负阻尼，系统不稳定。
- $\zeta = 0$为无阻尼，特征根为共轭纯虚根$s_{1,2} = \pm j\omega_n$，临界稳定。
- $0 < \zeta < 1$为欠阻尼，系统稳定。
- $\zeta = 1$为临界阻尼，特征根为实数重根$s_{1,2} = -\omega_n$，稳定。
- $\zeta > 1$为过阻尼，系统稳定。

不同工作状态的单位阶跃响应特性不同，下面分别讨论。

三、二阶系统的时域响应

【1 过阻尼】$\zeta > 1$时：考察单位阶跃响应。令

$$s_1 = -\omega_n\zeta + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1},\quad s_2 = -\omega_n\zeta - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1},$$



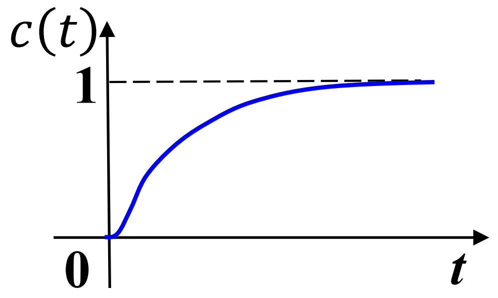
则系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right),\quad t \geq 0,$$

稳态分量　　瞬态分量

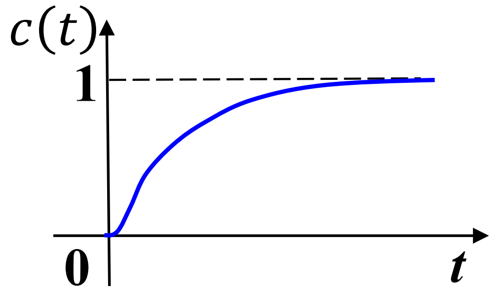
对$c(t)$求导得$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right)$

- $\dot{c}(0) = 0$，
- $\dot{c}(t)$从0逐渐增大，$t = \frac{\ln|s_2| - \ln|s_1|}{s_1 - s_2}$时最大，
- 随后减小，$t \to \infty$时$\dot{c}(t)$减小至0。因此$c(t)$如图，是一条单调递增的S形曲线。



$$s_1=-\omega_n\zeta+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1},\quad s_2=-\omega_n\zeta-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1},$$

$$c(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_1t}}{s_1}-\frac{e^{s_2t}}{s_2}\right),\quad t\geq 0$$



❑ **响应曲线特征：**

- **过渡过程**为单调递增，既无超调，也无振荡。
- $\zeta\gg 1$**时**，s_1靠近虚轴， s_2远离虚轴，

靠近虚轴的极点s_1起**主导作用**，

s_2 对应的瞬态分量衰减很快，可忽略不计，把二阶系统近似为一阶系统来处理。

- **稳态误差** $e(\infty)=r(\infty)-c(\infty)=0$。

【例3.1】已知两个控制系统的传递函数分别为$G_1(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}$和$G_2(s)=\frac{1}{s+1}$，绘制这两个系统的单位阶跃响应曲线，分析二者的相似之处。

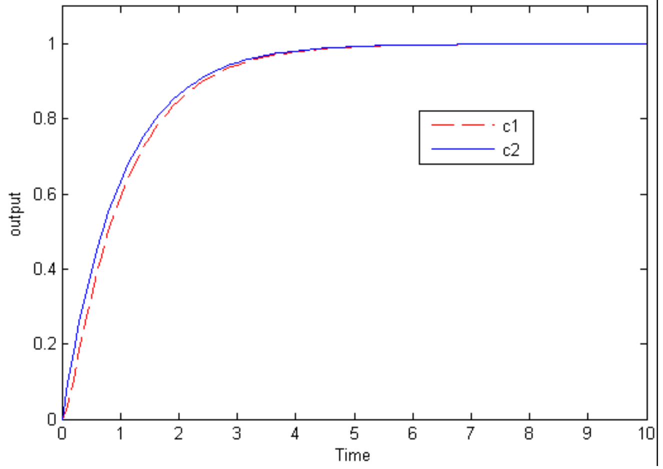
```
P=[-1 -10];
sys1=zpk([],P,10)
C1=step(sys1,t)
n2=[1];d2=[1 1];
sys2=tf(n2,d2)
C2=step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'),
ylabel('output')
```

【解】设两个系统的单位阶跃响应分别为$c_1(t)$和$c_2(t)$，如图。二者单位阶跃响应非常近似，

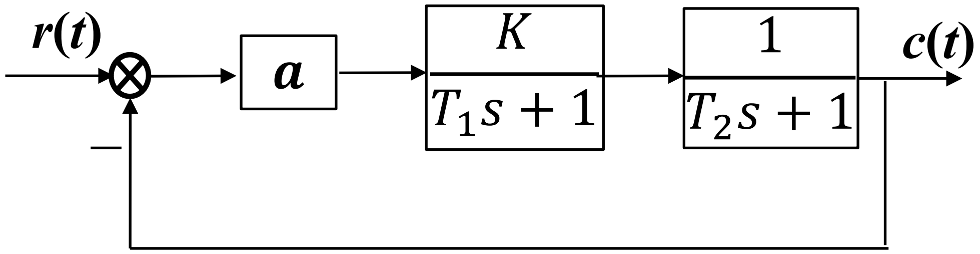
分析动态特性时，近似有$G_1(s)\approx G_2(s)$。

◆ 一般当两个极点间距7~10倍或$\zeta\ \geq 1.5$时，可将二阶系统近似为一阶系统来处理。

注：近似是在保证稳态值不变的情况下进行。



【例3.2】已知控制系统的结构图如图，且单位阶跃响应曲线单调递增到稳态值，$T_1, T_2, K > 0$，试确定a的范围。



【解】闭环特征方程为$T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + Ka + 1 = 0$，

特征根为$s_{1,2} = \frac{-(T_1+T_2)\pm\sqrt{(T_1+T_2)^2-4T_1T_2(Ka+1)}}{2T_1T_2}$，

响应曲线单调递增到稳态值，说明系统稳定，且特征根为两个负实根。则

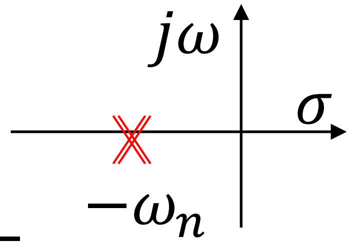
$$Ka + 1 > 0,$$
$$(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2(Ka + 1) \geq 0,$$

整理得$-\frac{1}{K} < a \leq \frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2K} - \frac{1}{K}$。

【2 临界阻尼】

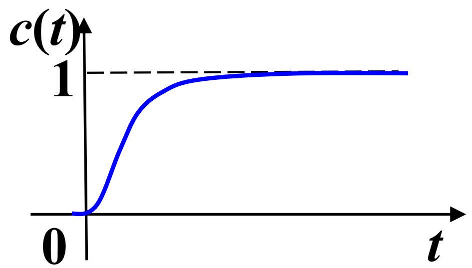
$\zeta = 1$时$s_{1,2} = -\omega_n$，单位阶跃响应

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2},$$



则$c(t) = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}, t \geq 0$。

此时输出响应曲线形如图。



- 响应曲线特征：
  - 过渡过程为单调递增。既无超调，也无振荡。
  - $\zeta = 1$是系统输出响应为单调还是振荡过程的分界，称为临界阻尼状态。
  - 在ω_n一定的情况下，其动态过程比过阻尼快。
  - 稳态误差$e(\infty) = 0$。

为什么?

【3 欠阻尼】$0<\zeta<1$时，记系统的两个特征根为

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\sigma\pm j\omega_d,$$

负实部$\sigma=\zeta\omega_n$，**虚部**$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

$\omega_n=|s_{1,2}|$为**特征根的模**。单位阶跃响应为

$$\boxed{\frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2},$$

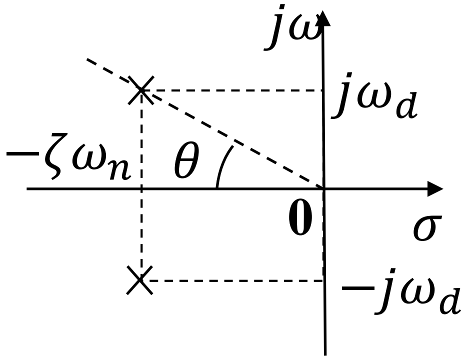
则$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$，

令$\theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=\arccos\zeta$，则

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),$$

稳态分量

瞬态分量

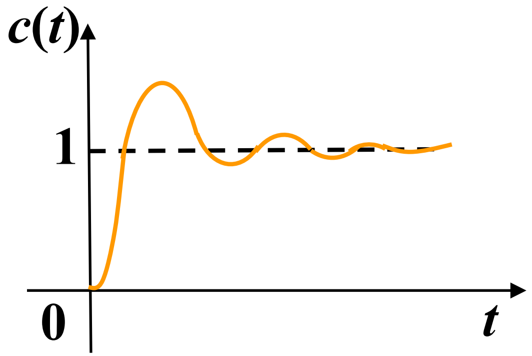


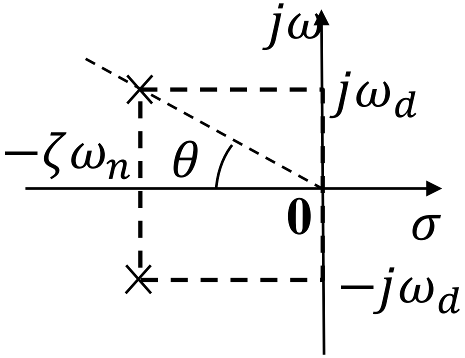
- $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$为**有阻尼振荡频率**。
- $\theta=\arccos\zeta$为**初始相角**。

三、二阶系统的时域响应

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

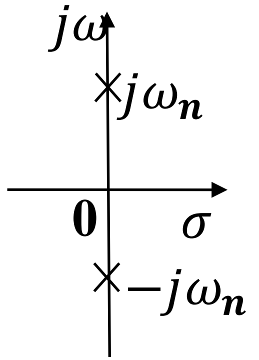




❑ 响应曲线特征：

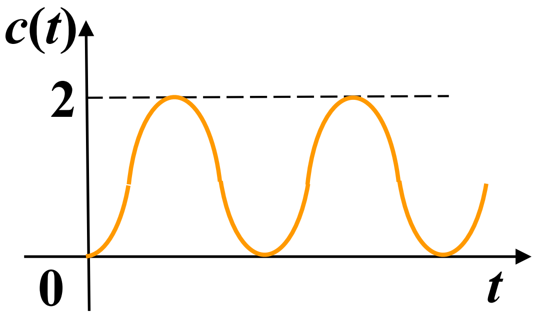
- **振荡频率为特征根的虚部ω_d。ω_d增大则振荡频率增大。**
- **振荡幅值按指数衰减，速度取决于负实部$\zeta\omega_n$。$\zeta\omega_n$大则衰减速度快。**
- **初始相角由阻尼比ζ决定，$\theta = \arccos\zeta$。**
- **误差：$e(t) = r(t) - c(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$，**
- $t \to \infty$**时**$e(t) \to 0$。

【4 无阻尼】 $\zeta = 0$时两个特征根为 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$



单位阶跃响应为$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, t \geq 0$。

此时输出响应曲线如图。



❑ 响应曲线特征：

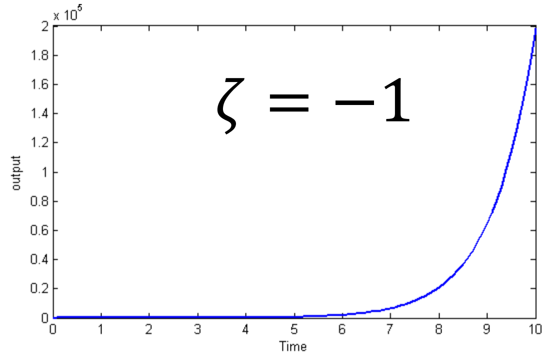
- 等幅振荡。振荡频率就是无阻尼自然振荡频率ω_n。
- 没有稳态，为临界稳定。

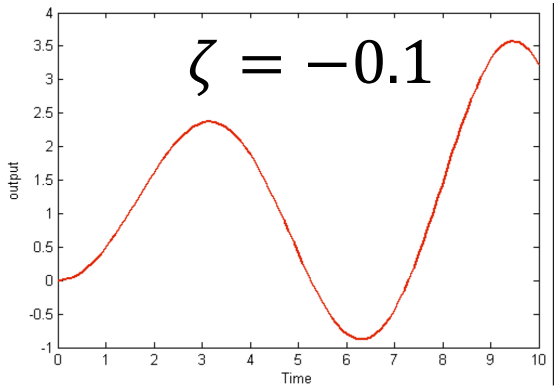
◆ ω_d与ω_n的关系：

ω_d是欠阻尼时衰减振荡过程的振荡频率。

显然$\omega_d < \omega_n$且随着ζ的增大，ω_d的值减小。

【5 负阻尼】 $\zeta<0$时，系统具有实部为正的极点，输出响应是发散的，此时系统无法正常工作。





- 当$-1<\zeta<0$时，系统的单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),$$

- 当$\zeta\le -1$时，系统的单位阶跃响应为

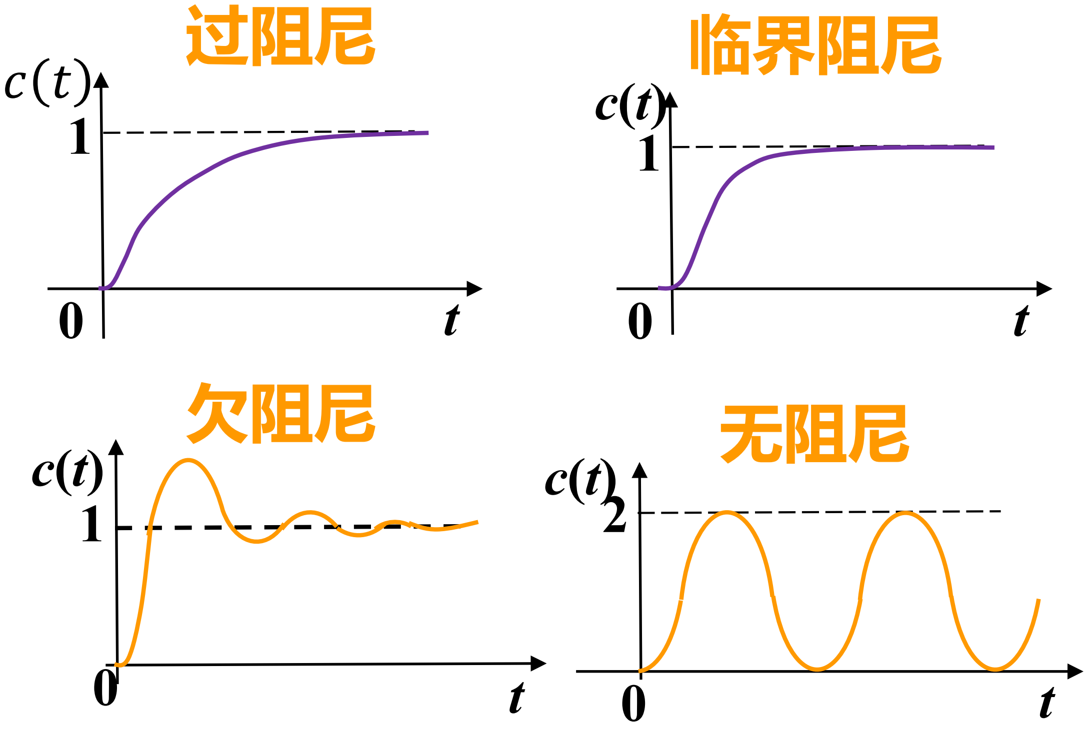
$$c(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{s_2 t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right),$$

图示是当$\omega_n=1$时不同阻尼比的单位阶跃响应曲线。

三、二阶系统的时域响应

【总结】

- 从振荡程度看，ζ越小振荡越厉害；ζ增大到一定程度时单调上升。
- 从过渡过程时间看，无振荡时，以临界阻尼时过渡过程时间最短。欠阻尼状态的过渡过程时间比临界阻尼时更短。



◆ 结论：ζ增大，振荡程度减小，过渡过程时间增长。

综合过渡过程时间和振荡程度，一般希望二阶系统工作在$\zeta = 0.4 \sim 0.8$的欠阻尼状态，此时过渡过程时间和振荡特性均可接受。

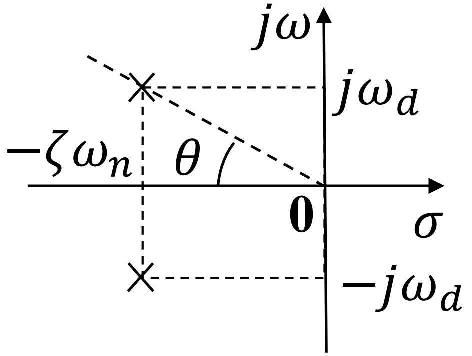
工程中常取$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$。

四、欠阻尼系统的性能指标

重点

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

1、上升时间t_r：即单位阶跃响应从0上升到第一个稳态值所需要的时间。



令$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1,$

则$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0,$

单位阶跃响应第一次到达1时$\omega_d t_r + \theta = \pi,$ **?能否为**$k\pi$**?**

因此$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d}$。 **记**

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \theta = \arccos\zeta$$

结论：要使响应速度加快，即减小t_r，须使阻尼比ζ减小，自然振荡角频率ω_n增大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

2、峰值时间 $\frac{dc(t)}{dt} = 0$**的时间即为所求。**

$$\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

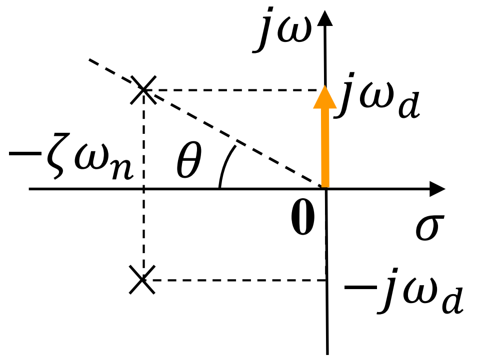
令$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta)\zeta\omega_n - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t + \theta)\omega_d = 0$

即$\sin(\omega_d t + \theta)\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_d t + \theta) = 0$, $\boxed{\theta = \arccos\zeta}$

得$\sin\omega_d t = 0$,

峰值时间是输出到达第一个最大值时对应的时间，

因此令$\omega_d t = \pi$**得**$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$。 **记**



结论：要使响应速度加快，即t_p**减小，须使阻尼比**ζ**减小，自然振荡角频率**ω_n **增大。**

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),\ t\geq 0,$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$$

3、**超调量** $\sigma_p=\dfrac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\%$

$$c(t_p)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}sin(\pi+\theta),$$

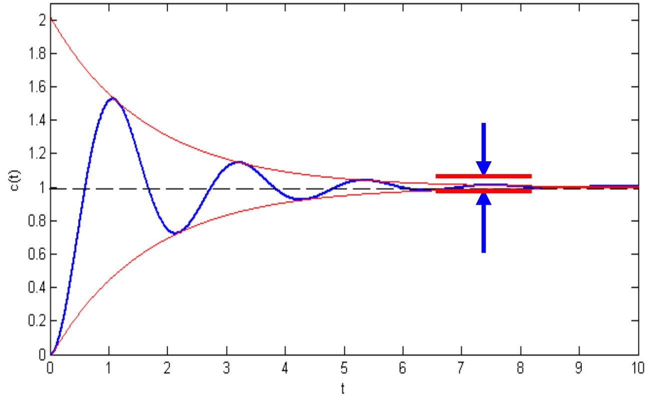
由 $sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\sqrt{1-\zeta^2}$，

得 $c(t_p)=1+e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$，而 $c(\infty)=1$，则 $\sigma_p=e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$。 **记**

结论：超调量只与阻尼比有关。要想超调量减小，需阻尼比ζ增大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),t\geq 0,$$



4、**调整时间**

利用包络线来求。定义上下包络线

$$c_1(t)=1+\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad c_2(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

➢ **可行性分析：取其中较大者与$c(t)$比较大小。由于**

$$c_1(t)-c(t)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}(1+\sin(\omega_d t+\theta))\geq 0,$$

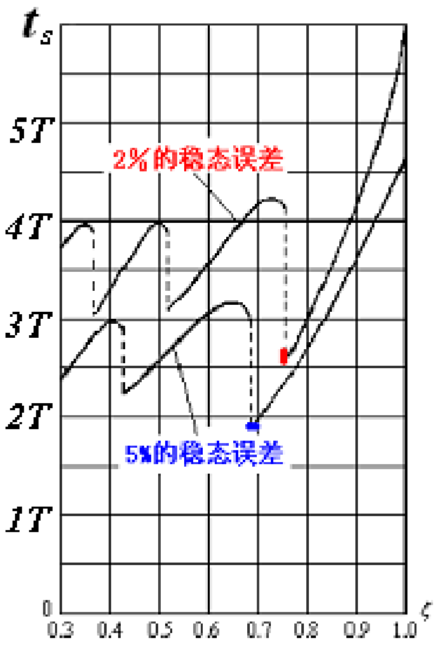
因此用包络线来求调整时间，最大误差为一个周期的时间。

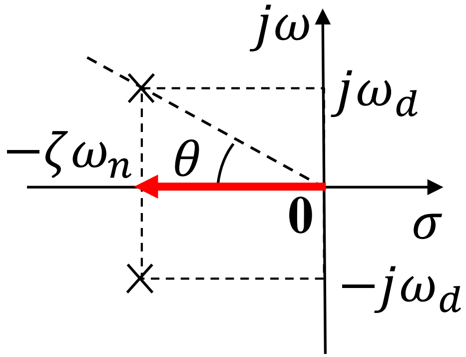
➢ **求解：令$c_1(t)-1=\Delta$，即$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\Delta$，则$t_s=\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$。**

四、欠阻尼系统的性能指标

$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$，**如图所示。**

由图知，在ζ=0.69(Δ= 5%)或ζ =0.77 (Δ= 2%)时，t_s达到最小值。此后随ζ的增大几乎线性上升。





工程中常取

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{4}{\zeta\omega_n}, \Delta = 2\% \\ \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5\% \end{cases}$$

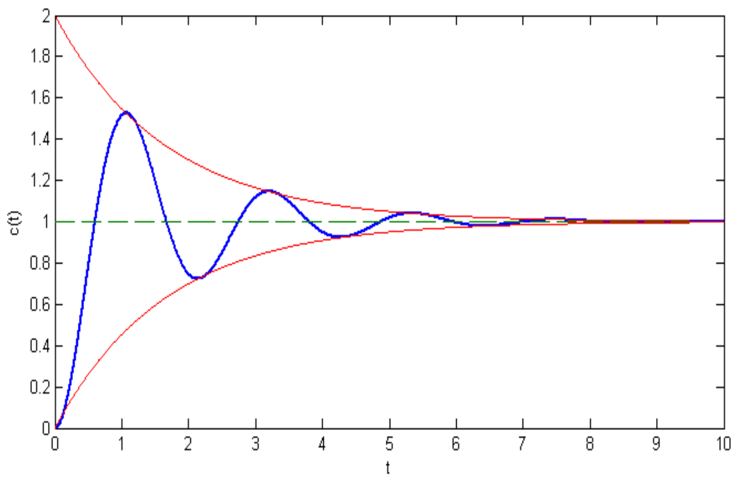
记

记

结论：要t_s减小，须使阻尼比ζ增大，自然振荡角频率ω_n增大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),\ t\geq 0,$$



4、调整时间

?可否利用峰值时间来求?

由$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}$带入得$c(t_p)=1\pm e^{-\zeta\omega_n t_p}$，

定义光滑曲线 $c_1(t)=1+e^{-\zeta\omega_n t}$，$c_2(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}$。

令$c_1-1=\Delta$得$t_s'=\dfrac{1}{\zeta\omega_n}ln\dfrac{1}{\Delta}$，则$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{4}{\zeta\omega_n},\Delta=2\%\\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\%\end{cases}$。

- 误差分析：由于$c_1-c=e^{-\zeta\omega_n t}(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta))$

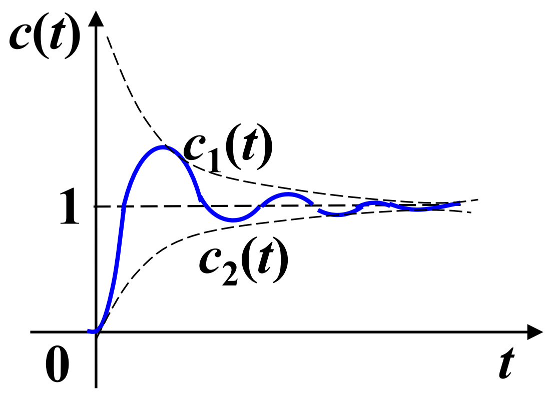
曲线$c_1(t)$存在小于$c(t)$的值。而包络线求出的t_s比真实值大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta),\ t\geq 0,$$

5、 **振荡次数N：在调节时间内响应曲线穿越其稳态值次数的一半。**

响应曲线振荡周期为$T_d=\dfrac{2\pi}{\omega_d}=\dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$，



由$t_s\approx\dfrac{4}{\zeta\omega_n},\Delta=2\%$或$\dfrac{3}{\zeta\omega_n},\Delta=5\%$

则振荡次数$N=\dfrac{t_s}{T_d}\approx\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta},\Delta=2\%,\\ \dfrac{3\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta},\Delta=5\%。\end{cases}$

结论：振荡次数N只与阻尼比ζ有关，ζ越大，振荡次数越小。

四、欠阻尼系统的性能指标

重点

$$t_r = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5\%$$

【总结】

- 当ω_n一定时，要减小t_r和t_p，须减少ζ；而要减小t_s，须使ζ增大，即响应初期速度与总体响应速度相互矛盾。
- 当ζ一定时，增大ω_n可使t_r、t_p和 t_s都减少，提高快速性。
- σ_p和N只取决于ζ。ζ越小，σ_p越大，振荡次数N越大。

在设计控制系统时，一般根据σ_p的要求选择ζ的值（一般$\zeta = 0.4$~0.8）。再调节ω_n来满足时间指标要求。

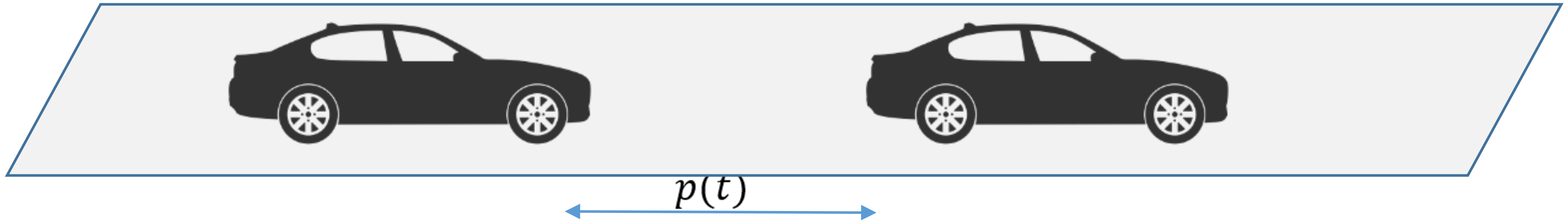
?其他阻尼下系统的动态性能指标能否套用欠阻尼的公式?

四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^\star$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^\star$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时

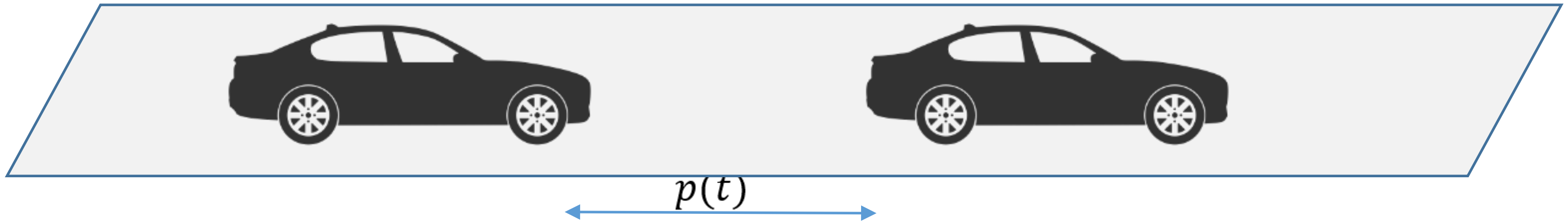
1）车辆跟驰动态过程中，相对距离不能小于4.5 m;

2）要求调节时间$t_s \le 2$秒(Δ =2%) 。



四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^\star$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^\star$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时



设$\boldsymbol{y(t) = 10 - p(t)}$, $\boldsymbol{x(t) = v(t) - v^\star}$, $y(0) = 0, x(0) = 0$

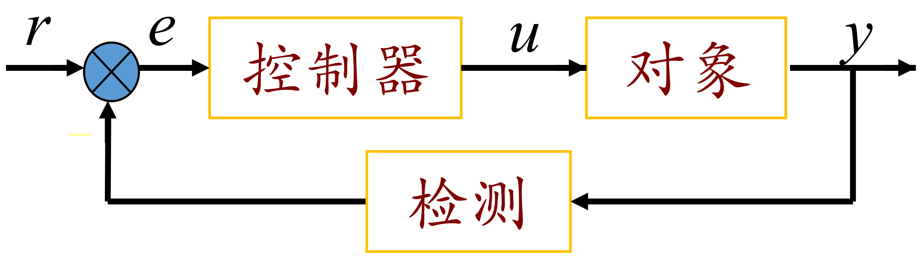
求导

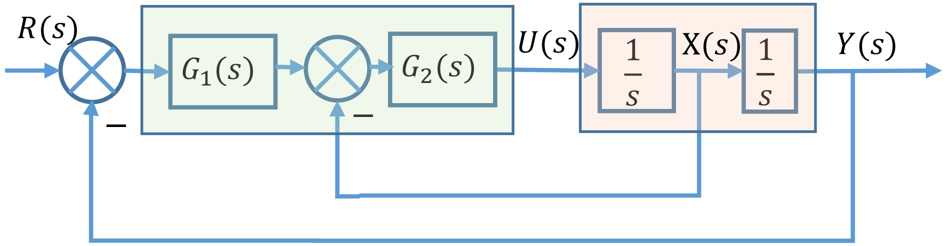
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\dot{p}(t) = v(t) - v^\star = x(t) \\ \dot{x}(t) = \dot{v}(t) = u(t) \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{拉式变换}} \quad \begin{cases} sY(s) = X(s) \\ sX(s) = U(s) \end{cases}$$

四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为$v^{\star}$ (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照$v^{\star}$ (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度$v(t)$和相对距离$p(t)$。请设计后车加速度$u(t)$实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时

设$y(t)=10-p(t)$，$x(t)=v(t)-v^{\star}$





期望输出: $y_{ref}=10-5=5$

参考输入：$r(t)=5l(t)$

最大超调量：

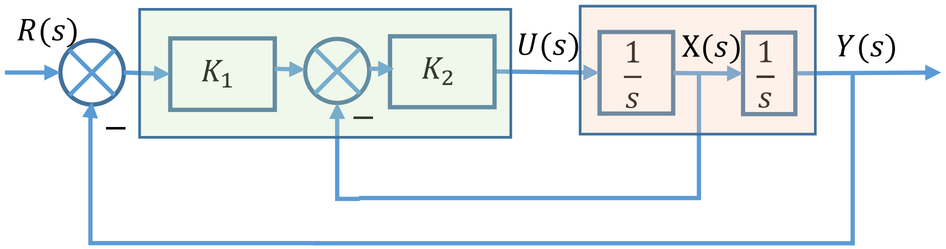
$$\sigma_p \le \frac{(10-4.5)-5}{5} \times 100\% = 10\%$$

调节时间：$t_s \le 2$ s

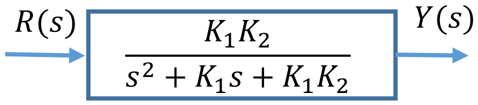
$G_1(s)=K_1 \quad G_2(s)=K_2$

如何结合欠阻尼二阶系统性能指标设计控制器参数K_1和K_2呢?

四、欠阻尼系统的性能指标



结构图化简



最大超调量： $\sigma_p \le 10\%$

调节时间： $t_s \le 2\ \mathrm{s}$

$$\begin{cases} \sigma_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \le 0.1 \\ t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1K_2 = \omega_n^2 \\ K_2 = 2\xi\omega_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi \ge 0.59 \\ \xi\omega_n \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.7 \\ \omega_n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 4.2 \\ K_1 = 2.2 \end{cases}$$

控制器: S域 $U(S) = K_2\left(K_1\left(R(s) - Y(s)\right) - X(s)\right)$

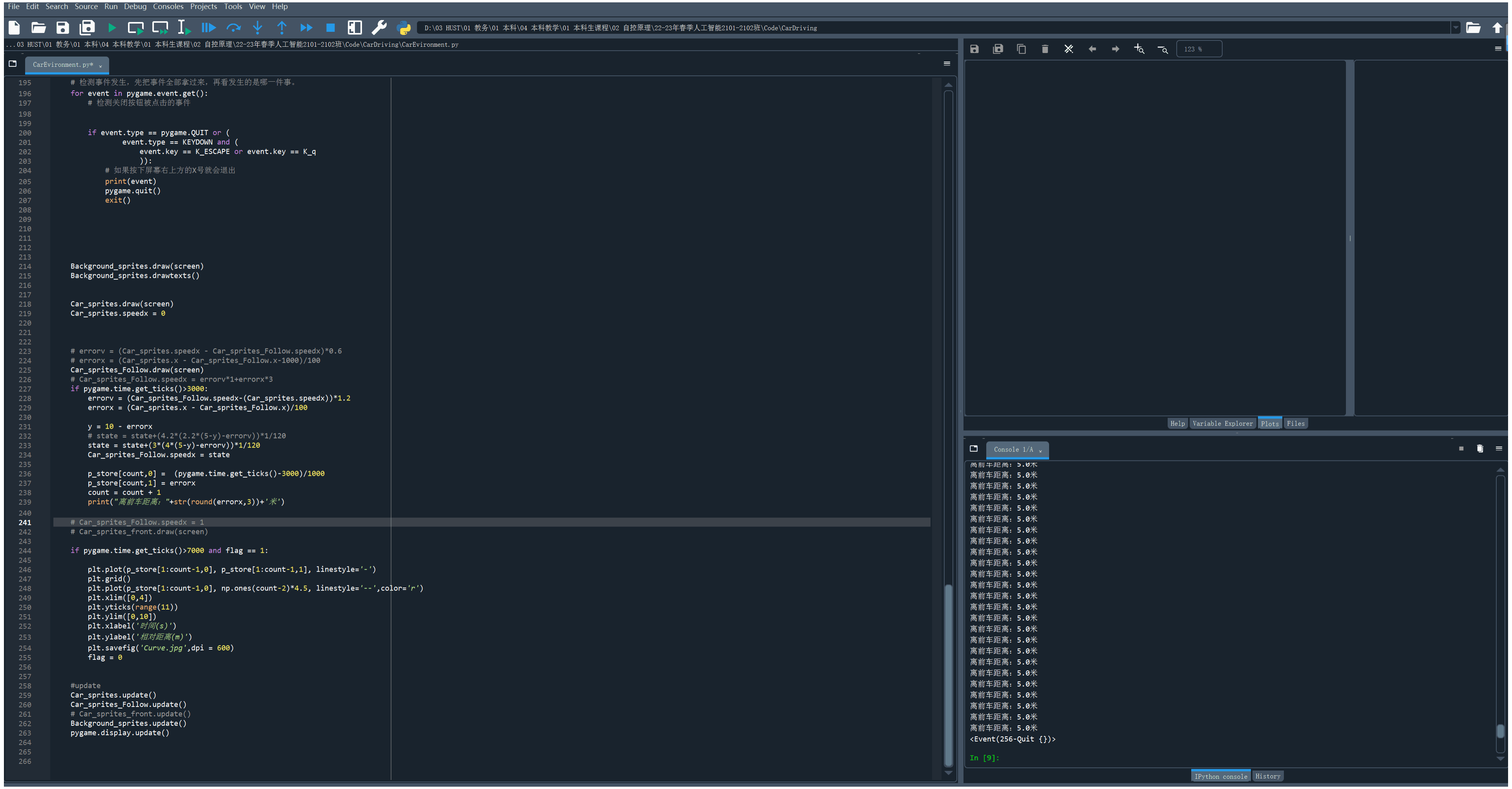
时域 $u(t) = 4.2 \times \left(2.2 \times \left(5l(t) - y(t)\right) - x(t)\right)$

$v(t) - v^{\star}$

$10 - p(t)$

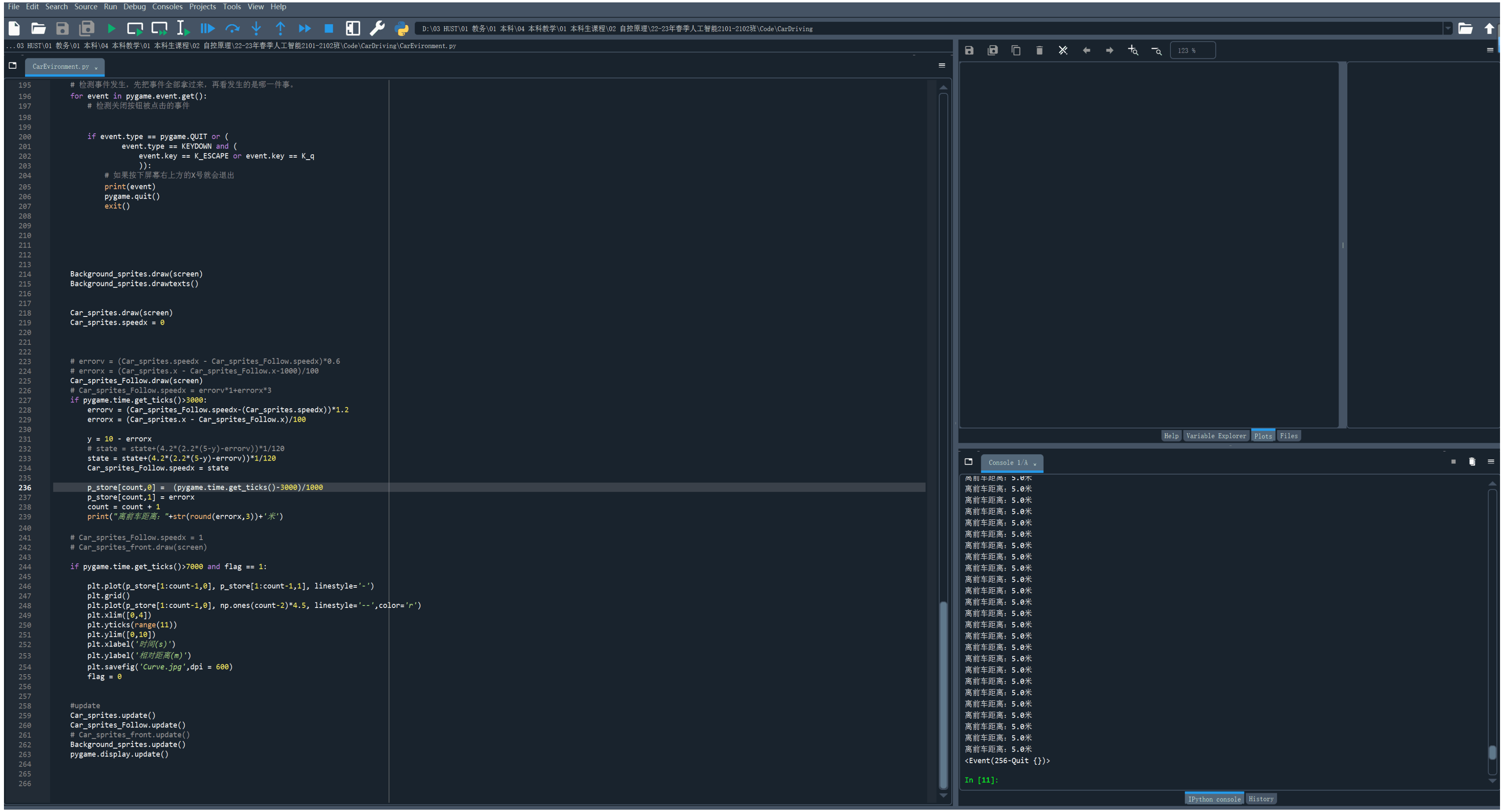
四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】 仿真算例1：控制参数 $K_1 = 4 , K_2 = 3$



四、欠阻尼系统的性能指标

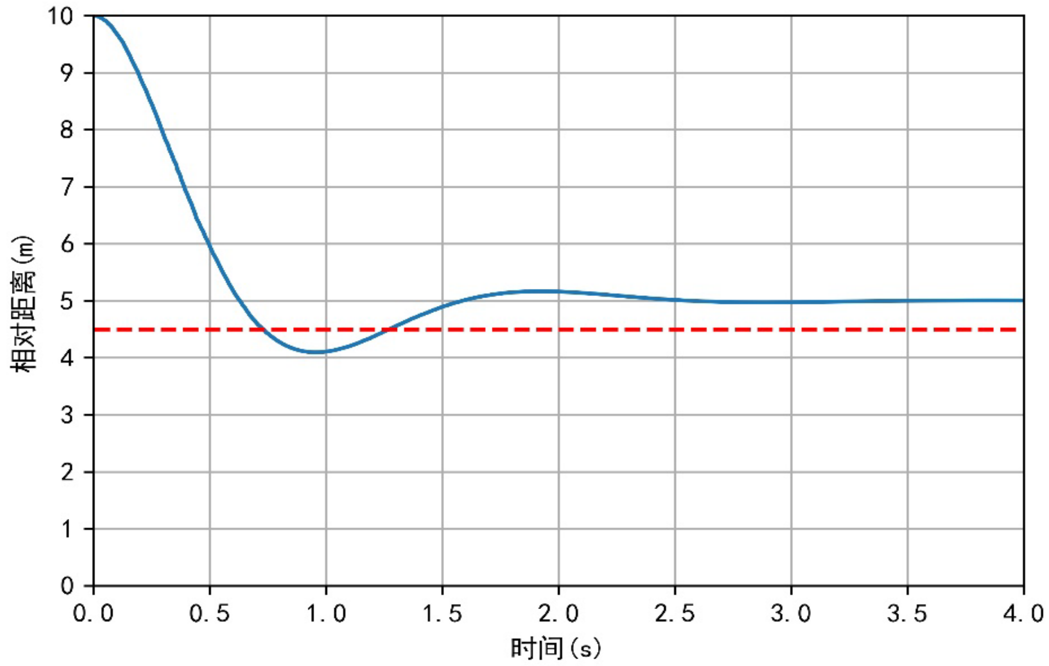
【案例：车辆跟驰】 仿真算例2：控制参数 $K_1 = 2.2\,, K_2 = 4.2$



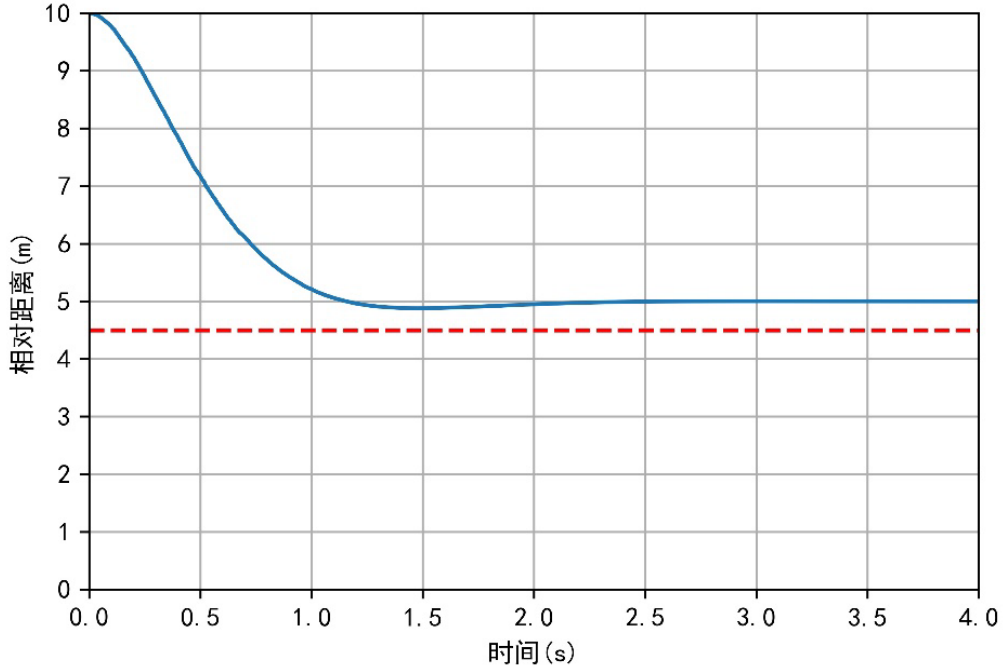
四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】

算例1: 参数 $K_1 = 4 \quad K_2 = 3$



算例2: 参数 $K_1 = 2.2 \quad K_2 = 4.2$



- **算例1的相对距离超过警戒线，调节时间超过2秒**
- **算例2的相对距离并未超过警戒线，调节时间在2秒之内**

思考：如果后车的初始速度不为v^*的时候，该如何设计呢?

小结

- 控制系统的暂态性能：
  - 暂态性能指标：7个
  - 一阶系统的性能指标
  - 二阶系统的性能指标
  - 案例：车辆跟驰控制
- 作业：
  - 作业3.3和3.5
- 大作业：

  第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad的偏置下，1秒内稳定到平衡点±0.01 rad附近。