

# 2024-2025 学年度春季



## 课程名称：《自动控制原理（一）》 第14-16讲 根轨迹

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象：自动化2305班  
(32人)

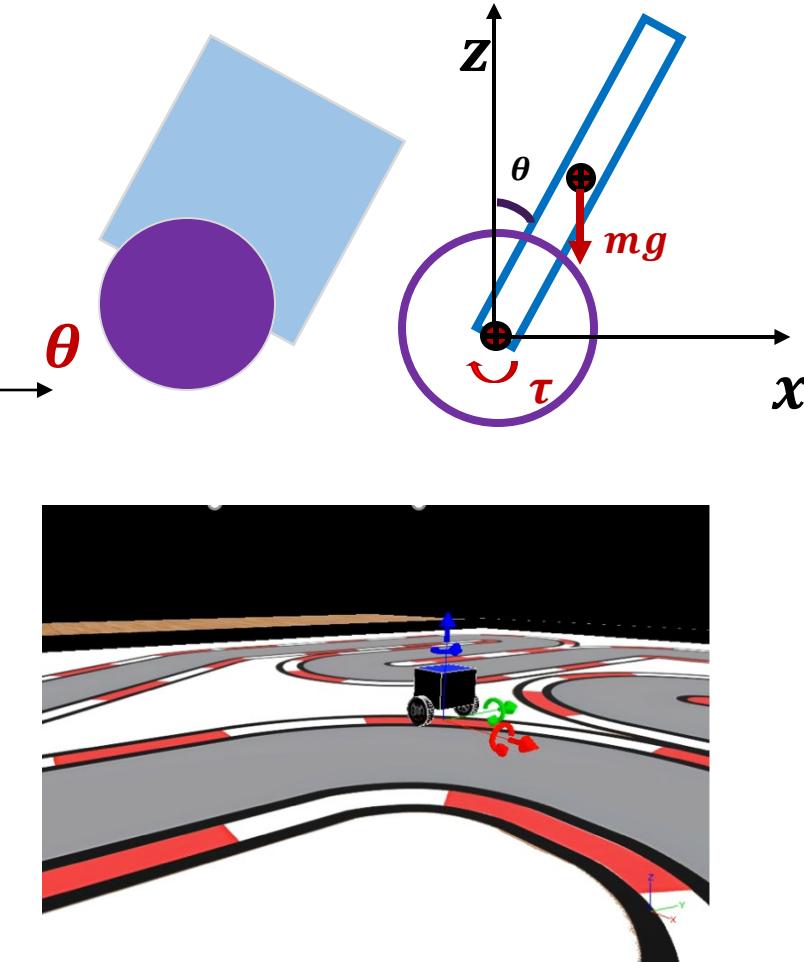
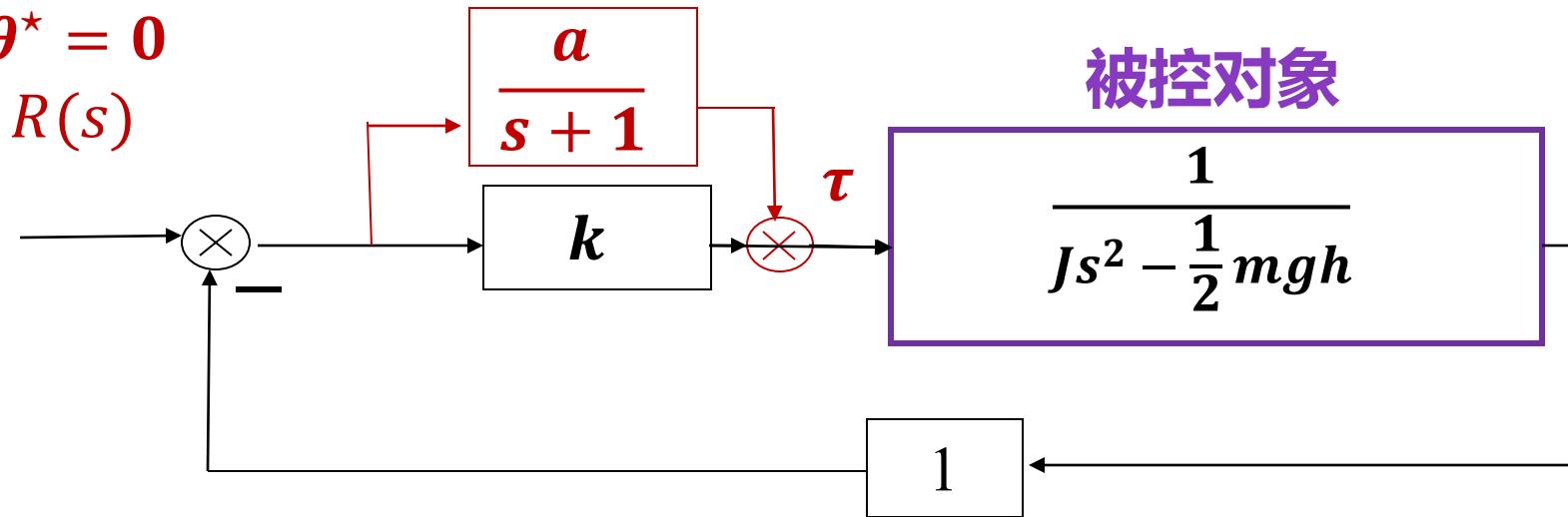
授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

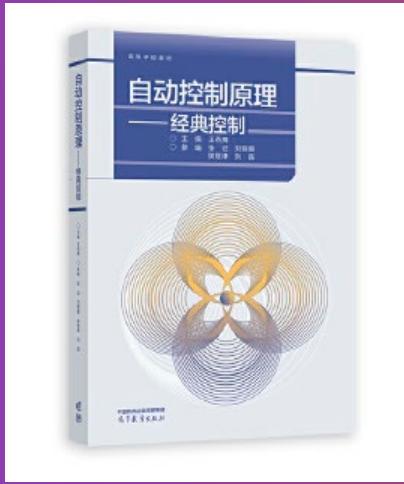
## 【思考题】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$\theta^* = 0$$

$$R(s)$$



大作业第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad 的偏置下，1 秒内稳定到平衡点  $\pm 0.01$  rad 附近。



# 第四章：根轨迹

## 第14讲 根轨迹-Part 1

### Root Locus-Part 1

#### 本讲内容

- 一、根轨迹的基本概念
- 二、绘制根轨迹的规则

# 一、根轨迹的基本概念

? 问题的提出：为什么要分析特征根与参数之间的关系？

闭环系统的特征根在S平面上的位置直接决定了其**稳定性及动态特性**，因此下面两方面问题均需分析系统参数与闭环系统特征根的关系：

- ✓ 系统**分析**问题：如何通过闭环特征根的分布来全面了解闭环系统的特性
- ✓ 系统**设计**问题：如何根据对闭环系统动态特性的要求来决定闭环特征根的合理分布，进而确定控制器的结构和参数。

? 特征根与参数之间关系的求解方法？

☒**解析方法**：代数方程求解。当系统阶次增高时解析方法难以实现或求解工作量巨大。

☒**根轨迹分析方法**：W.R. Evans 在1948 年的论文“控制系统的集合分析”中提出特征根求解的**几何图示方法**。它直接根据开环传递函数求出闭环极点，给系统分析与设计带来极大便利。

# 一、根轨迹的基本概念

•**根轨迹图**：是闭环系统的特征根（即闭环极点）随**开环传递函数某参数由零变化到无穷大时在S平面上的变化轨迹。**

**【例1.1】**已知一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$

试分析该系统的闭环特征根随参数 $K_r$ 的变化在s平面上的分布情况。

**【解】**系统闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_r}{s^2 + 2s + K_r}$$

特征方程为  $s^2 + 2s + K_r = 0$

特征方程的根是  $s_1 = -1 + \sqrt{1 - K_r}$ ,  $s_2 = -1 - \sqrt{1 - K_r}$

# 一、根轨迹的基本概念

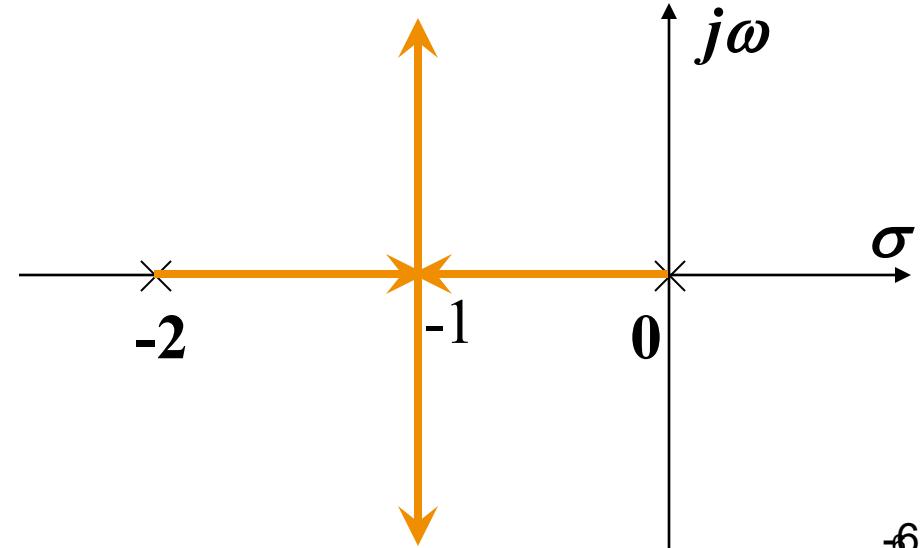
设 $K_r$ 的变化范围是 $[0, \infty)$ ,

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - K_r}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - K_r}$$

- $K_r=0$ 时,  $s_1=0, s_2=-2$ 。
- $0 < K_r < 1$ 时,  $s_1$ 与 $s_2$ 为不相等的两个负实根; 且随着 $K_r$ 的增大,  $s_1$ 减小,  $s_2$ 增大, 即 $s_1$ 沿负实轴向左移,  $s_2$ 沿负实轴向右移。
- $K_r=1$ 时,  $s_1=s_2=-1$ 为等实根;
- 当 $1 < K_r < \infty$ 时,  $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K_r - 1}$ 为一对共轭复根, 其实部都等于-1, 虚部随 $K_r$ 值的增加而增加。

将系统特征根随参数 $K_r$ (开环增益)从0到无穷大变化的曲线在复平面上绘制出来, 就形成了**根轨迹**。

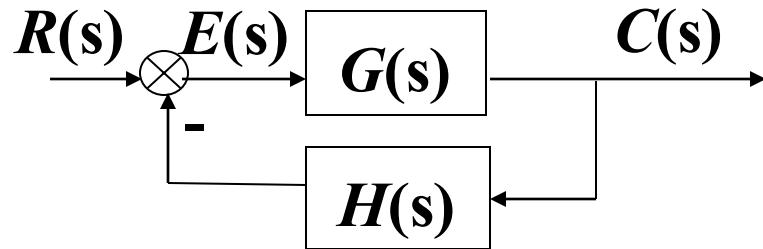
对于阶次较高的系统, 这种绘制方法过于繁琐。下面通过一些分析获得绘制根轨迹的方法。



# 一、根轨迹的基本概念

- 通常系统的开环零极点已知，建立开环零极点与闭环零极点之间的关系，有助于闭环系统根轨迹的绘制。

设控制系统如图。其闭环传递函数为



前向通路传递函数为

反馈通路传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{j=1}^f (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^e (T_i s + 1)} = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^e (s - p_i)}$$

$$H(s) = K_2 \frac{\prod_{k=1}^h (\tau_k s + 1)}{\prod_{l=1}^g (T_l s + 1)} = K_{2r} \frac{\prod_{k=1}^h (s - z_k)}{\prod_{l=1}^g (s - p_l)}$$

其中  $K_1$  和  $K_2$  分别是前向通路增益和反馈通路增益， $K_{1r}$  和  $K_{2r}$  分别为前向通路和反馈通路根轨迹增益。

# 一、根轨迹的基本概念

系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)}$$

其中K为开环放大系数， $K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\nu G(s)H(s)$

$\nu$ 是开环传递函数中积分环节的个数， $K_r$ 为开环根轨迹增益。

二者的关系为：

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\nu G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-\nu} (-p_i)}$$

开环根轨迹增益 $K_r$ 与开环放大系数K之间仅相差一个比例常数，该常数只与开环传递函数的零点和极点有关。

# 一、根轨迹的基本概念

$$G(s) = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^e (s - p_i)}$$
$$H(s) = K_{2r} \frac{\prod_{k=1}^h (s - z_k)}{\prod_{l=1}^g (s - p_l)}$$
$$G(s)H(s) = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_{1r} \prod_{j=1}^f (s - z_j) \prod_{l=1}^g (s - p_l)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

结论：

✓ 闭环零点由前向通路的零点和反馈通路的极点组成。对于单位反馈，闭环零点就是开环零点。

✓ 闭环极点与开环零点、开环极点以及开环根轨迹增益  $K_r$  有关。

➤ 根轨迹法的任务是在已知开环零、极点分布的情况下，通过图解法求出闭环极点。

# 一、根轨迹的基本概念

负反馈系统的特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

当系统有m个开环零点和n个开环极点时，特征方程可写成

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

s的系数为正

称为根轨迹方程。

- 根轨迹方程是一个复数方程，令方程两边的幅值和相角相等，可得到满足系统特征方程的幅值条件和相角条件。

# 一、根轨迹的基本概念

幅值条件：

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

结论：

- ✓ 满足相角条件和幅值条件的s值，就是对应给定参数的闭环特征根(系统的闭环极点)。
- ✓ 幅值条件与开环根轨迹增益 $K_r$ 值的大小有关。即 $K_r$ 值的变化会改变系统闭环极点在s平面上的位置。
- ✓ 相角条件与开环根轨迹增益 $K_r$ 值的大小无关。把满足相角条件的s值带入幅值条件必可求出与之对应的 $K_r$ 。故满足相角条件的点必满足幅值条件，而满足幅值条件的点未必满足相角条件，即相角条件是判断根轨迹上一点的充分必要条件。

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$
$$K_r \in [0, \infty)$$

# 一、根轨迹的基本概念

已知闭环控制系统的开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{2K}{(s+2)^2}$

试证明复平面上点  $s_1 = -2 + j4$ ,  $s_2 = -2 - j4$  是该系统的闭环极点。

【证明】该系统的开环极点  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -2$ 。

若系统闭环极点为  $s_1$  和  $s_2$ , 它们应满足相角条件

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

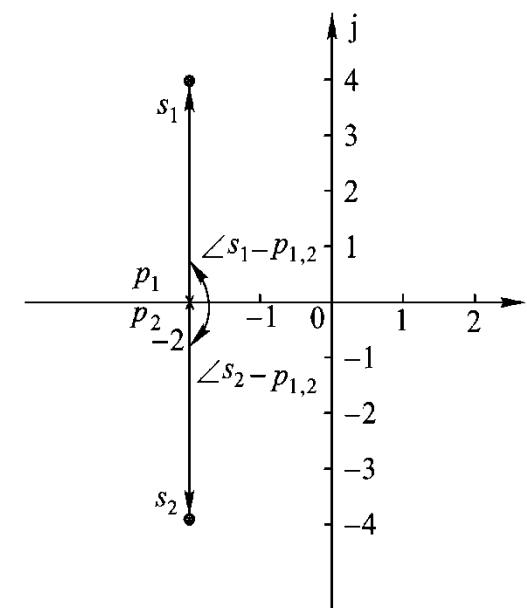
由  $-\angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) = -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$

即  $k = -1$  时满足相角条件。

由  $-\angle(s_2 - p_1) - \angle(s_2 - p_2) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

即  $k = 0$  时满足相角条件。

而当选择合适的  $K$  时, 幅值条件可以满足。因此  $s_1$  和  $s_2$  是闭环极点。



# 一、根轨迹的基本概念

已知闭环控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)^4}$$

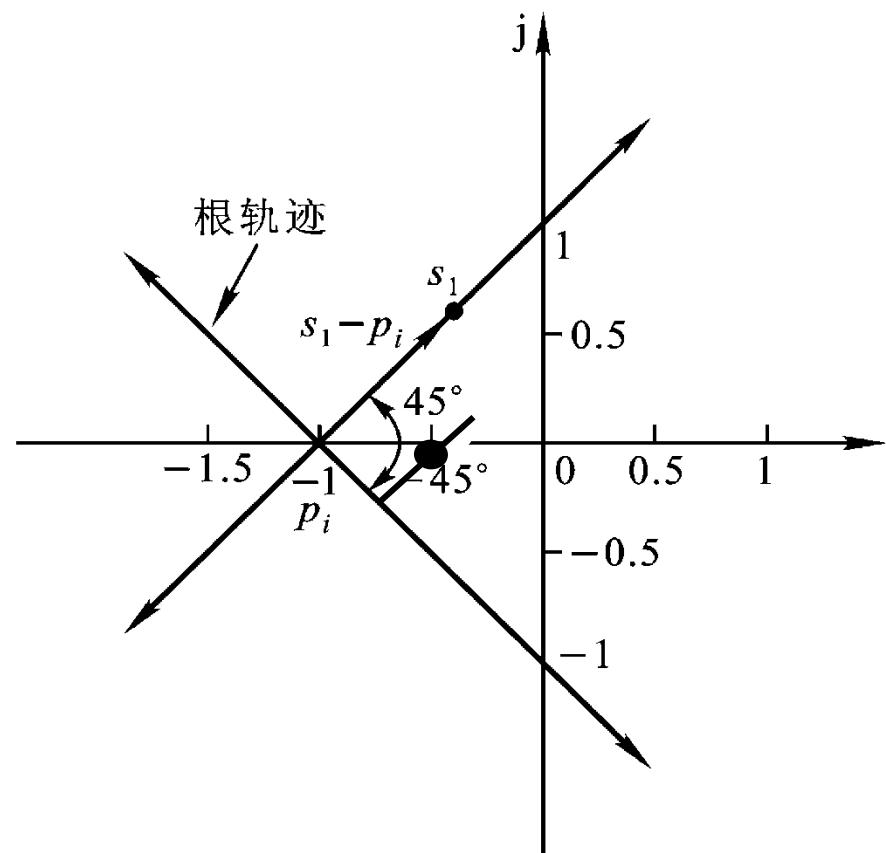
当  $K=0 \rightarrow \infty$  变化时其根轨迹如图所示。求根轨迹上点  $s_1=-0.5+j0.5$  所对应的  $K$  值。

【解】根据幅值条件求对应的  $K$  值。

由  $\frac{K}{|s_1 - p|^4} = \frac{K}{|-0.5 + j0.5 + 1|^4} = 1$

$$K(\sqrt{2})^4 = 1$$

则  $K = \frac{1}{4}$



# 一、根轨迹的基本概念

幅值条件：

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

◆ 定义：

- **180°根轨迹**：在开环传递函数分子和分母中s的最高次幂系数为正的前提下，相角条件对应的角度为 $(2k+1)\pi$ ，称对应的根轨迹为180°根轨迹。
- **普通根轨迹**：以开环根轨迹增益 $K_r$ 为可变参数绘制的根轨迹称为普通根轨迹（或一般根轨迹）。

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$
$$K_r \in [0, \infty)$$

## 二、绘制根轨迹的规则

◆绘制180°根轨迹的基本规则主要有：

- 根轨迹的分支数、连续性和对称性；
- 根轨迹的起点与终点；
- 实轴上的根轨迹；
- 根轨迹的渐近线；
- 根轨迹的分离点和分离角；
- 根轨迹的起始角和终止角；
- 根轨迹与虚轴的交点；
- 根之和与根之积。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则1：根轨迹的分支数、连续性和对称性

【规则1】**分支数**：根轨迹的分支数即根轨迹的条数。

由于根轨迹是描述闭环系统特征方程的根（即闭环极点）在S平面上的分布，所以根轨迹的分支数就等于系统**特征方程的阶数**。而系统特征方程为

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

因此根轨迹的分支数等于m和n中的较大者。

【规则1】**连续性**：即考察参变量K<sub>r</sub>的无限小增量对应特征方程的根的增量情况。

由幅值条件

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

参变量K<sub>r</sub>的无限小增量与s平面上的长度|s-p<sub>i</sub>|和|s-z<sub>j</sub>|的无限小增量相对应，即与根轨迹上的无穷小位移相对应。

因此当K<sub>r</sub>=0→∞连续变化时，根轨迹在s平面上是连续的。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则1：根轨迹的分支数、连续性和对称性

#### 【规则1】对称性：

由于根轨迹是描述闭环系统特征方程的根（即闭环极点）在S平面上的分布，而闭环特征方程是实系数多项式方程，因此，闭环特征方程的根只可能有实根、纯虚根和共轭复根三种情况。

根轨迹是特征根的集合，因此根轨迹对称于实轴。

根据根轨迹的对称性，可以只绘制出上半S平面的根轨迹部分，然后利用对称性就可以得到下半S平面的根轨迹部分。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则2：根轨迹的起点与终点

由根轨迹的幅值条件：

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

- 当  $K_r=0$  时，有  $s=p_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ，即开环极点是根轨迹的起点。此时，系统的闭环极点与开环极点相同。
- 当  $K_r=\infty$  时，有  $s=z_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$ ，即开环零点是根轨迹的终点。此时，系统的闭环极点与开环零点相同。
- 由上面分析知，根轨迹的起点有  $n$  个起始于开环极点，有  $m$  个终止于开环零点。
- 当  $n=m$  时，根轨迹的起点与终点均有确定的值。
- 当  $n>m$  时，除有  $m$  条根轨迹终止于开环零点(称为有限零点)外，还有  $n-m$  条根轨迹将终止于哪里呢？

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则2：根轨迹的起点与终点

【规则2】根轨迹的起点有n个起始于开环极点，有m个终止于开环零点。

?  $n > m$  时其余  $n - m$  条根轨迹将终止 ( $K_r = \infty$ ) 于哪里？

由幅值条件

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

$$\frac{1}{K_r} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{|s|^{n-m}} = 0$$

因此，有  $n - m$  条根轨迹终止于无穷远处 (称为无限零点)。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则2：根轨迹的起点与终点

【规则2】根轨迹的起点有n个起始于开环极点，有m个终止于开环零点。

?当n<m时，除有n条根轨迹起始于( $K_r=0$ )开环极点(称为**有限极点**)外，还有m-n条根轨迹起始于哪里呢？

由幅值条件 
$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$
 
$$\frac{1}{K_r} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \lim_{s \rightarrow \infty} |s|^{m-n} = \infty$$

因此，有m-n条根轨迹起始于无穷远处(称为**无限极点**)。

◆结论：

- ✓ 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。
- ✓ 如果开环极点数n大于开环零点数m，则有n-m条根轨迹终止于s平面的无穷远处(无限零点)；
- ✓ 如果开环零点数m大于开环极点数n，则有m-n条根轨迹起始于s平面的无穷远处(无限极点)。

? 实轴上的点在满足什么条件时属于根轨迹的一部分呢?

开环零点和极点可以是实根、纯虚根、或共轭复根。

由相角条件，

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

相角条件考察的是闭环系统的特征根到开环零点和极点的向量的相角情况。

下面考察实轴上的点到开环零点和极点的向量的相角情况。

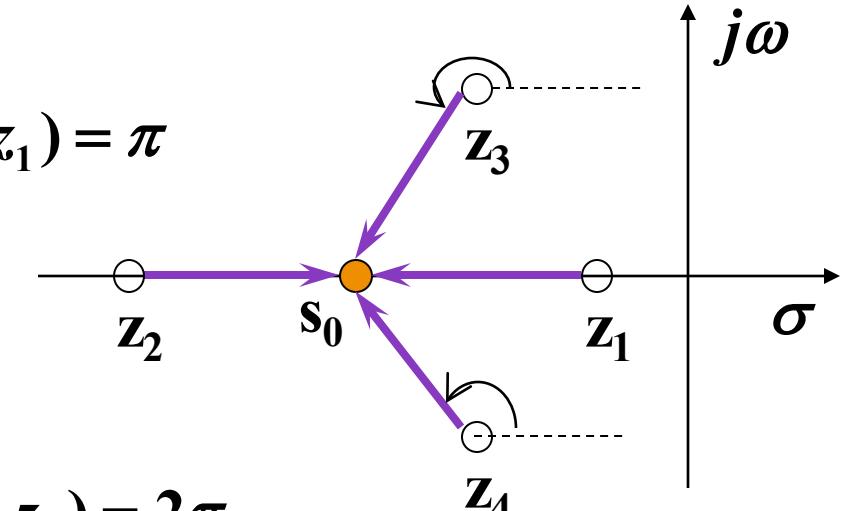
## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则3：实轴上的根轨迹

考察实轴上某点 $s_0$ 到开环零点和极点的向量的相角。

• **开环零点是实根时，若该开环零点位于 $s_0$ 的右侧，**  $\angle(s_0 - z_1) = \pi$

若该开环零点位于 $s_0$ 的左侧或二者重叠，则  $\angle(s_0 - z_2) = 0$



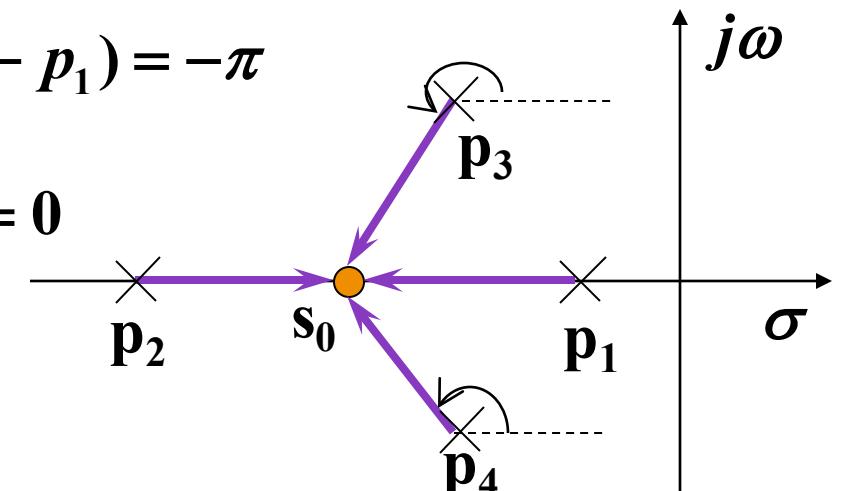
• **开环零点是共轭复根或成对纯虚根时，**  $\angle(s_0 - z_3) + \angle(s_0 - z_4) = 2\pi$

• **开环极点是实根时，若该开环极点位于 $s_0$ 的右侧，**  $-\angle(s_0 - p_1) = -\pi$

若该开环极点位于 $s_0$ 的左侧或二者重叠，则  $-\angle(s_0 - p_2) = 0$

• **开环极点是共轭复根或成对纯虚根时，**

$$-\angle(s_0 - p_i) - \angle(s_0 - p_{i+1}) = -2\pi$$



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则3：实轴上的根轨迹

因此，若系统共有n个开环极点、m个开环零点，其中，

- ✓  $r_1$ 对共轭开环极点、 $l_1$ 个实开环极点、
- ✓  $r_2$ 对共轭开环零点、 $l_2$ 个实开环零点， $(2r_1+l_1=n, 2r_2+l_2=m)$
- ✓ 而在实轴上某点 $s_0$ 的右侧有 $h_1$ 个开环极点， $h_2$ 个开环零点，则 $s_0$ 到开环零点和极点的向量的相角

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \angle(s_0 - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s_0 - p_i) &= \sum_{i=1}^{r_2} 2\pi + \sum_{i=1}^{h_2} \pi - \sum_{i=1}^{r_1} 2\pi - \sum_{i=1}^{h_1} \pi \\ &= 2(r_2 - r_1)\pi + (h_2 - h_1)\pi\end{aligned}$$

要满足相角条件，需要 $h_2-h_1$ 为奇数，亦即 $h_1+h_2$ 为奇数。

【规则3】若实轴上某线段右侧的开环零、极点的个数之和为奇数，则该线段是实轴上的根轨迹。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则3：实轴上的根轨迹

【例】设一单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = K(s+1)/[s(0.5s+1)]$ ，求  $K_r = 0 \rightarrow \infty$  时的闭环根轨迹。

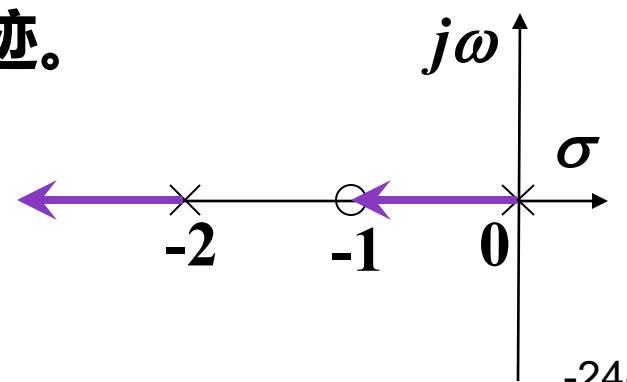
【解】将开环传递函数写成零、极点形式

$$G(s) = \frac{2K(s+1)}{s(s+2)}$$

由规则二，有两条根轨迹。

由规则一，两条根轨迹分别起始于开环极点 0、-2，一条终于有限零点 -1，另一条趋于无穷远处。

由规则三，在负实轴上，0到 -1 区间和 -2 到负无穷区间是根轨迹。

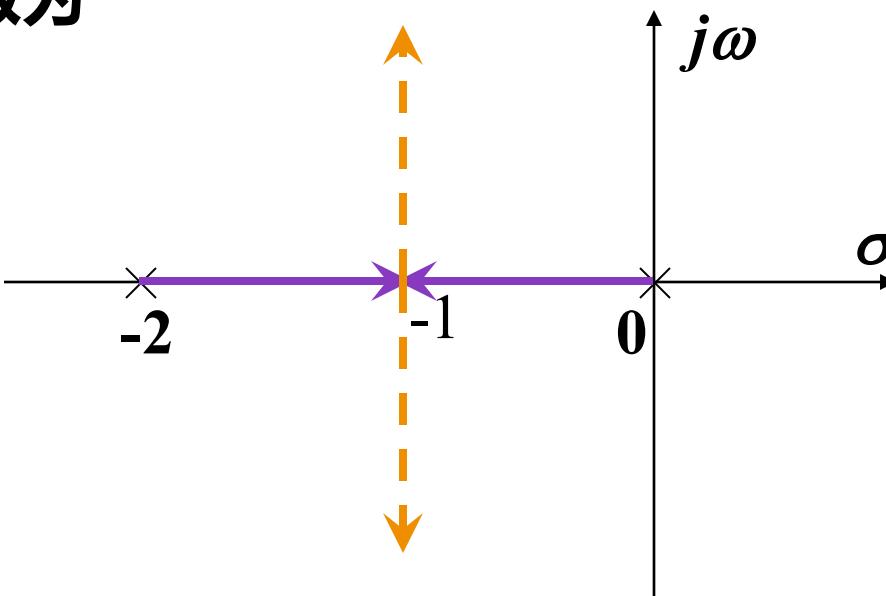


## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则3：实轴上的根轨迹

【例】已知一单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$



开环极点数n=2，开环零点数m=0。

- ◆ 根轨迹共有2个分支。分别起始于开环极点0和-2，终止于s平面的无穷远处。
- ◆ 实轴上2个开环极点之间的线段右侧的开环零、极点的个数之和为1，因此该线段是根轨迹。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

?  $n \neq m$  时有  $|n-m|$  条根轨迹终止/起始于无穷远，但具体位置如何？

◆ 渐近线：根轨迹趋向于无穷远处的切线方向的射线。

◆ 当开环有限极点数  $n$  大于有限零点数  $m$  时，有  $n-m$  条根轨迹分支沿着  $n-m$  条渐近线趋向无穷远处。

◆ 渐近线的倾角：正实轴方向逆时针旋转到渐近线的角度。

因此其范围为  $[0^\circ, 360^\circ]$ 。

◆ 注：渐近线是  $s$  值趋于无穷大时的根轨迹，因此渐近线也对称于实轴。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

◆ 规则四：当  $n-m > 0$  时， $n-m$  条渐近线在实轴上相交于一点，  
交点坐标为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

$n-m$  条渐近线的倾角为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi, k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

证明思路：

- ◆ 方法1：渐近线是  $s$  趋于无穷大时的根轨迹的近似射线，因此需要将根轨迹方程近似处理，得到渐近线方程。
- ◆ 方法2：找出  $s$  趋于无穷大时近似的开环传递函数，由此得到的根轨迹就是对应的渐近线。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

【证明】将系统的根轨迹方程

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 \quad \text{改写成}$$

$$\frac{s^n + \sum_{i=1}^n (-p_i)s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n (-p_i)}{s^m + \sum_{j=1}^m (-z_j)s^{m-1} + \cdots + \prod_{j=1}^m (-z_j)} = -K_r$$

$n > m$  时终点在无穷远处，即根轨迹增益为 $\infty$  时  $s$  值趋于无穷大，此时上式左边用长除法并且忽略低次幂项，得

$$s^{n-m} - \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) s^{n-m-1} = -K_r$$

两边开  $n-m$  次方得，

$$s \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{s} \right)^{\frac{1}{n-m}} = (-K_r)^{\frac{1}{n-m}}$$

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

根据二项式定理，

$$(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{s})^{\frac{1}{n-m}}$$

$$s(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{s})^{\frac{1}{n-m}} = (-K_r)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{(n-m)s} - \frac{1}{2!} \frac{1}{n-m} \left( \frac{1}{n-m} - 1 \right) \left( \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{s} \right)^2 + \dots$$

渐近线要求s值趋于无穷大，因此忽略高阶次幂项，只保留前两项，并带入渐近线方程得

$$s(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{(n-m)s}) = (-K_r)^{\frac{1}{n-m}}$$

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

$$s\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{(n-m)s}\right) = (-K_r)^{\frac{1}{n-m}}$$

令 $s=\sigma+j\omega$ 带入，根据棣美弗定理将-1的次方项展开得

$$\sigma - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} + j\omega = (K_r)^{\frac{1}{n-m}} \left[ \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m} + j \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \right]$$
$$k = 0, 1, \dots, n-m-1$$

令两端实部和虚部分别相等，得

$$\sigma - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = (K_r)^{\frac{1}{n-m}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$
$$\omega = (K_r)^{\frac{1}{n-m}} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

## 二、绘制根轨迹的规则

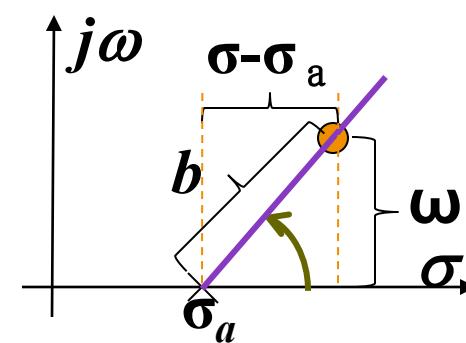
### 规则4：根轨迹的渐近线

$$\sigma - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = (K_r)^{\frac{1}{n-m}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$\omega = (K_r)^{\frac{1}{n-m}} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

令  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$      $\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi$      $b = (K_r)^{\frac{1}{n-m}}$

则  $b \geq 0$ ,  $\begin{cases} \sigma - \sigma_a = b \cos \varphi_a \\ \omega = b \sin \varphi_a \end{cases}$



这两个方程表示了一条射线，射线与实轴的交点为 $\sigma_a$ ，正实轴方向逆时针旋转到这条射线的角度是 $\varphi_a$ 。

证毕。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

【证明】将系统的开环传递函数

$$G(s) = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \text{ 改写为 } G(s) = \frac{K_r}{s^{n-m} - \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) s^{n-m-1} + \dots}$$

另有一开环传递函数  $G'(s) = \frac{K_r}{(s - \sigma_a)^{n-m}} = \frac{K_r}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_a s^{n-m-1} + \dots}$

显然，若  $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$

则在s值趋于无穷大时， $G(s)$ 的根轨迹可用 $G'(s)$ 的根轨迹近似。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

【证明】下面绘制 $G'(s)$ 的根轨迹

$$G'(s) = \frac{K_r}{(s - \sigma_a)^{n-m}}$$

根轨迹共有 $n-m$ 个分支，起点都是实轴上的点 $s=\sigma_a$ 。

由相角条件知，

$$(n-m)\angle(s - \sigma_a) = -(2k+1)\pi = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

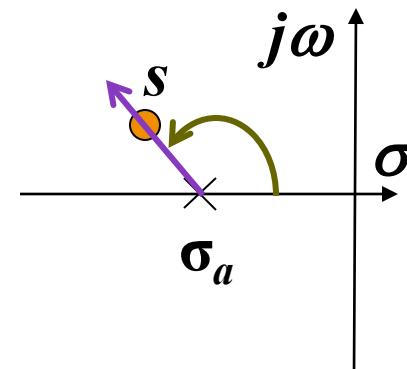
满足相角条件的点组成 $n-m$ 条射线，正实轴方

向逆时针旋转到射线的角度是

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi$$

即 $G'(s)$ 的根轨迹就是从 $\sigma_a$ 出发的 $n-m$ 条射线（如紫色所示），亦即在 $s$ 值趋于无穷大时 $G(s)$ 根轨迹的渐近线。

证毕。



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

【例】已知一单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$

开环极点数  $n=2$ , 开环零点数  $m=0$ ,  $n-m=2$ , 两条渐近线在实轴上的交点位置为

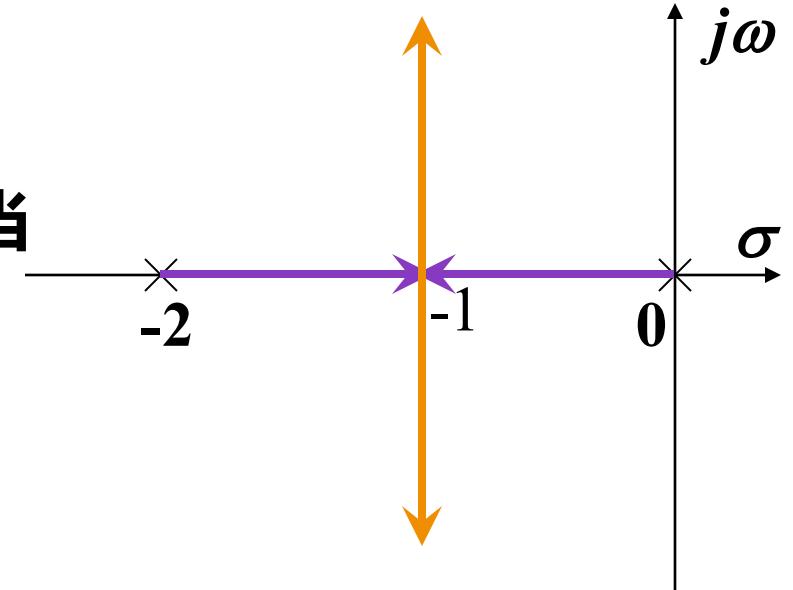
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2 - 0}{2} = -1$$

这2条渐近线的倾角分别为

$$\varphi_a = \frac{1}{2}\pi, k = 0 \quad \varphi_a = \frac{3}{2}\pi, k = 1$$

由相角条件易得直线  $\sigma = -1$  上的点都是根轨迹上的点。即当

$K_r \geq 1$  时的根轨迹正好与两条渐近线重合。



◆ 如果不想借助相角条件，还有没有别的判断办法呢？

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

【例】已知闭环控制系统的开环传递函数，试画出该系统根轨迹的渐近线。

【解】对于该系统有  $n=4$ ,  $m=1$ ,  $n-m=3$ ; 三条渐近线与实轴交点位置为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-1 - 4 + 2}{3} = -1$$

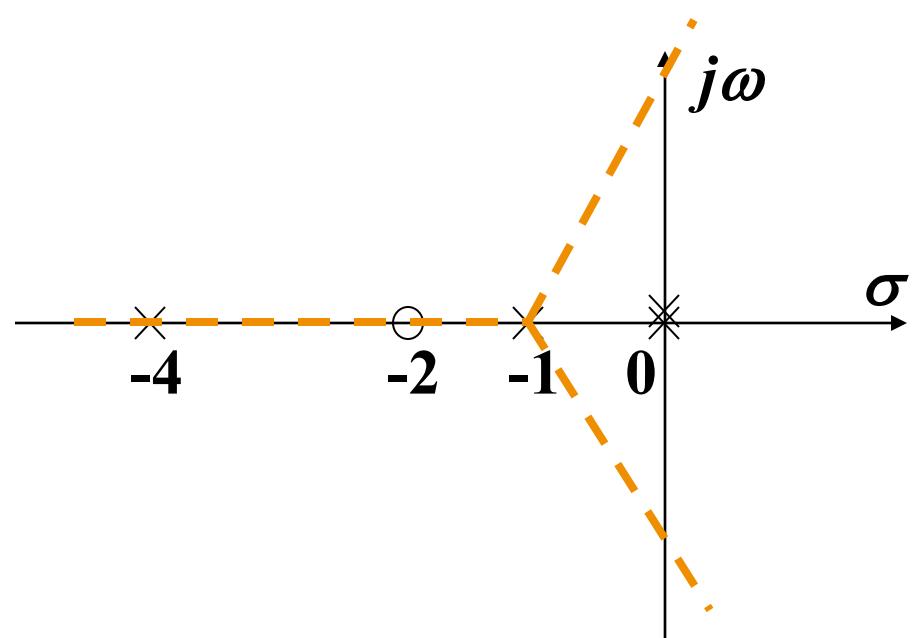
这3条渐近线的倾角分别为

$$k = 0 \text{ 时 } \varphi_a = \frac{\pi}{3} \quad k = 1 \text{ 时 } \varphi_a = \pi$$

$$k = 2 \text{ 时 } \varphi_a = \frac{5\pi}{3}$$

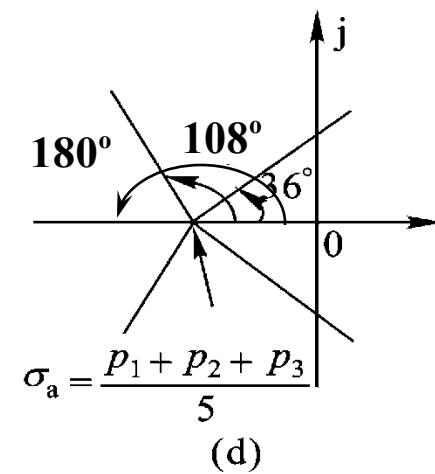
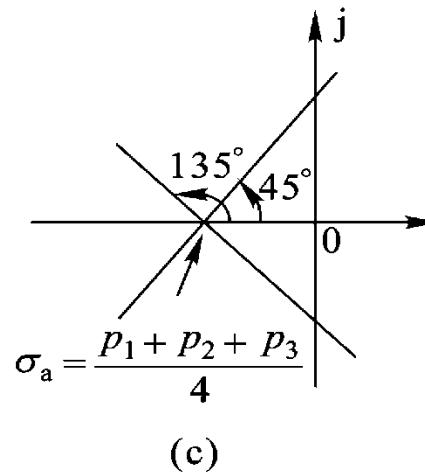
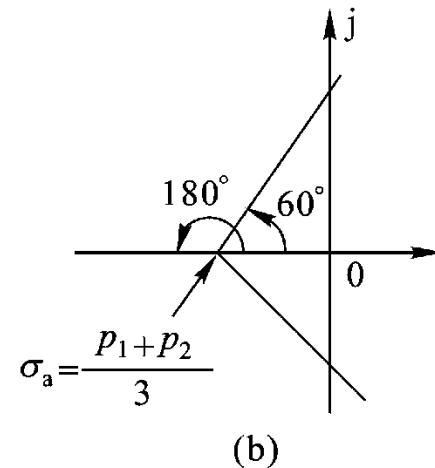
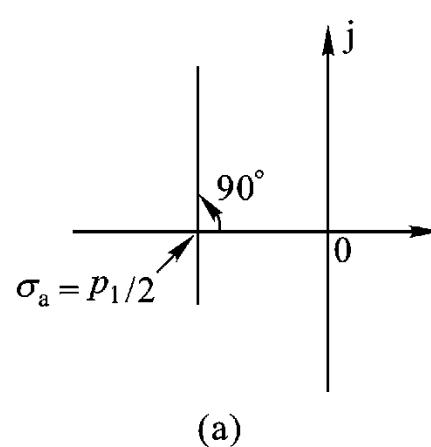
因此3条渐近线如图所示。

$$G(s) H(s) = \frac{K_r (s+2)}{s^2 (s+1)(s+4)}$$



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线



$$(a) = \frac{\mathbf{K}_r}{s(s - p_1)}$$

$$(b) = \frac{\mathbf{K}_r}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$(c) = \frac{\mathbf{K}_r}{s(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

$$(d) = \frac{\mathbf{K}_r}{s^2(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则4：根轨迹的渐近线

当开环有限零点数m大于有限极点数n时，有 $m-n$ 条根轨迹分支

沿着 $m-n$ 条渐近线（射线）趋向无穷远处。这 $m-n$ 条渐近线在实轴上相交于一点，交点坐标为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i}{m - n}$$

而正实轴方向逆时针旋转到这 $m-n$ 条渐近线的倾角分别为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{m-n}\pi, k = 0, 1, 2, \dots, m-n-1$$

证明思路：

◆与 $n-m>0$ 时的方法完全类似。

## 二、绘制根轨迹的规则

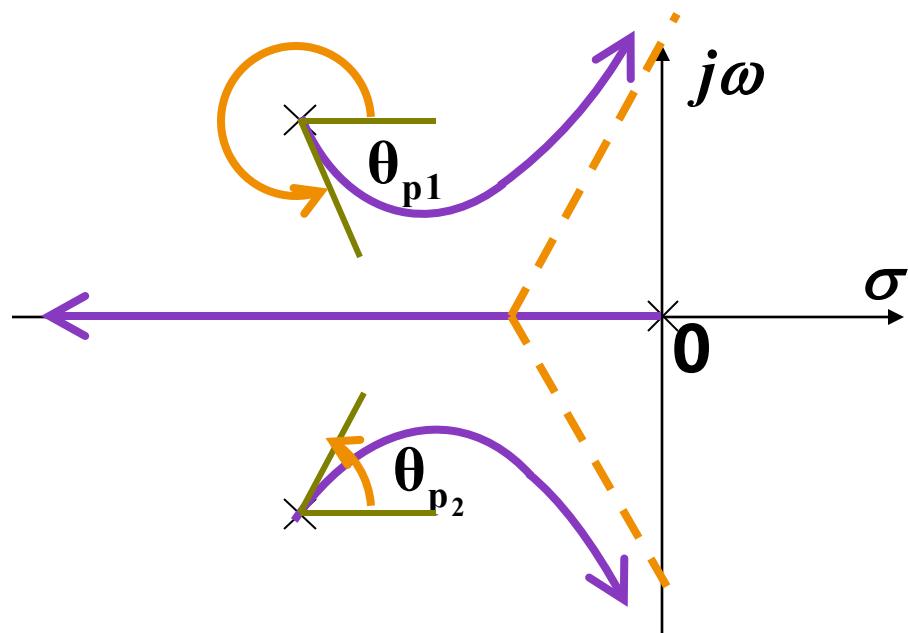
### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

当开环传递函数中有复数极点或零点时，根轨迹是沿着什么方向离开开环复数极点或进入开环复数零点的呢？

口 **起始角(出射角)**: 实轴正方向逆时针旋转到根轨迹离开开环极点的切线（射线）的角度。用 $\theta_{pl}$ 表示。

口 **终止角(入射角)**: 实轴正方向逆时针旋转到根轨迹进入开环零点处的切线（射线）的角度。用 $\theta_{zl}$ 表示。

从定义可以确定起始角和终止角的范围是[0°, 360°]。



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

若开环极点 $p_l$ 和开环零点 $z_l$ 均是单重根，根轨迹的起始角 $\theta_{p_l}$ 和终止角 $\theta_{z_l}$ 可根据下面公式计算：

$$\theta_{p_l} = (2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(p_l - p_i)$$
$$\theta_{z_l} = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \angle(z_l - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_l - p_i)$$

【证明】在十分靠近待求起始角的极点 $p_l$ 的根轨迹上，取一点 $s_1$ 无限接近于 $p_l$ 。则 $p_l$ 到 $s_1$ 的向量相角即为起始角。由 $s_1$ 满足相角条件

$$\sum_{j=1}^m \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - p_i) = (2k+1)\pi$$

由于 $s_1$ 无限接近于 $p_l$ ，除 $p_l$ 外，所有开环零极点到 $s_1$ 的向量相角都用它们到 $p_l$ 的向量的相角来代替，即

$$\sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(p_l - p_i) - \angle(s_1 - p_l) = (2k+1)\pi$$

则  $\theta_{p_l} = \angle(s_1 - p_l)$  即得上述公式。类似可得终止角公式。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

**!注：**当 $p_l$ 或 $z_l$ 是重根时，若将重根到 $s_1$ 点的向量的相角也用它们到 $p_l$ （或 $z_l$ ）的向量的相角来代替会产生很大误差。此时起始角或终止角如何来求？

**【例】**设开环传递函数有极点 $p_1$ ，它是 $v$ 重根，即 $p_1 = p_2 = \dots = p_v$ 。设 $s_1$ 是 $p_1$ 在根轨迹上邻域内的一点，此时求 $p_1$ 的起始角应满足相角条件：

起始角

$$\sum_{j=1}^m \angle(p_1 - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1, 2, \dots, v}}^n \angle(p_1 - p_i) - v \angle(s_1 - p_1) = (2k + 1)\pi$$

$$\theta_{p_1} = \frac{1}{v} \left[ (2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(p_1 - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1, 2, \dots, v}}^n \angle(p_1 - p_i) \right]$$

终止角情况类似。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

**【例】**已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制系统的根轨迹。

**【解】**开环极点数n=2，开环零点数m=2。

两条根轨迹分别起始于开环极点(-1-j2)和(-1+j2)，终于开环零点(-2-j)和(-2+j)。

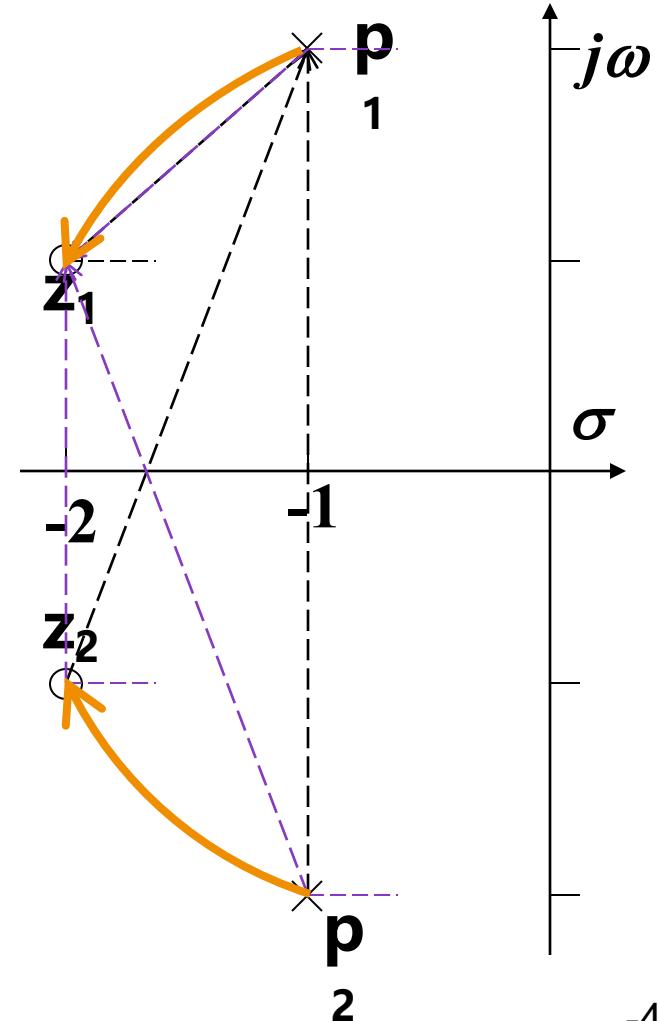
根轨迹的起始角

$$\theta_{p_1} = (2k+1)\pi + \sum_{j=1}^2 \angle(p_1 - z_j) - \angle(p_1 - p_2)$$
$$= 180^\circ + 45^\circ + 71.56^\circ - 90^\circ$$
$$= 206.56^\circ$$

终止角

$$\theta_{z_1} = (2k+1)\pi - \angle(z_1 - z_2) + \sum_{i=1}^2 \angle(z_1 - p_i)$$
$$= (2k+1)180^\circ - 90^\circ - 135^\circ + 108.45^\circ$$
$$= 180^\circ - 116.55^\circ = 63.45^\circ$$

p<sub>2</sub>的起始角和z<sub>2</sub>的终止角对称可得。



## 二、绘制根轨迹的规则

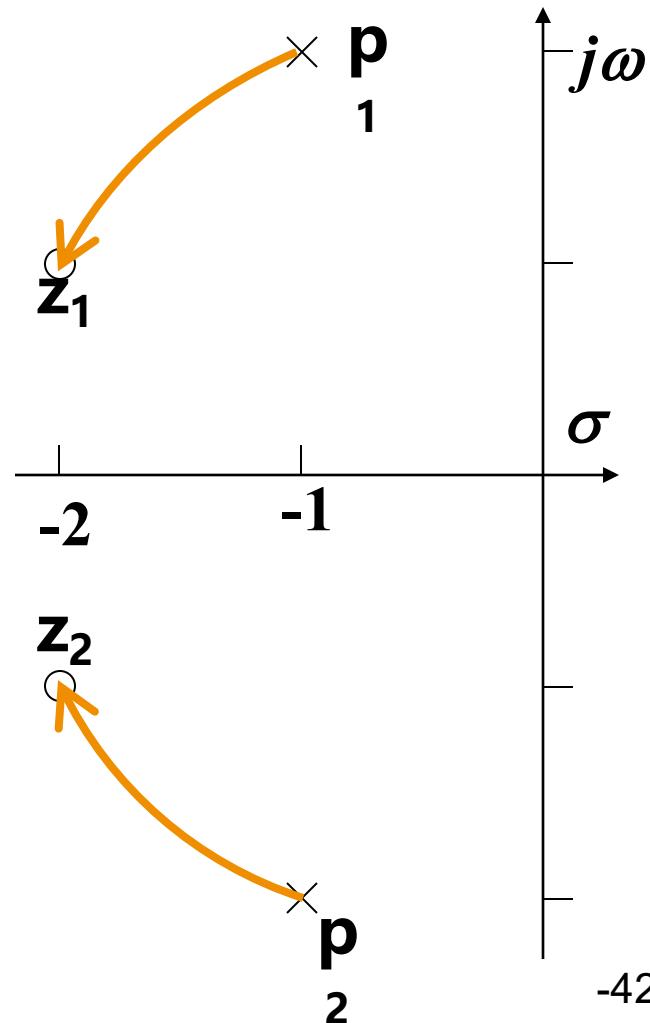
### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

【例】已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s) H(s) = \frac{K(s + 2 + j)(s + 2 - j)}{(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)}$$

?根轨迹会不会是从  $p_1$  到  $z_2$ 、从  $p_2$  到  $z_1$  呢？

不会。因为这样一来，根轨迹需要穿过实轴，而根据规则三，实轴上任何点都不是根轨迹。



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

【例】已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2+j)(s+2-j)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$$

?根轨迹是否是特殊曲线？

$$GH = \frac{K(s^2 + 4s + 5)}{s^2 + 2s + 5}$$

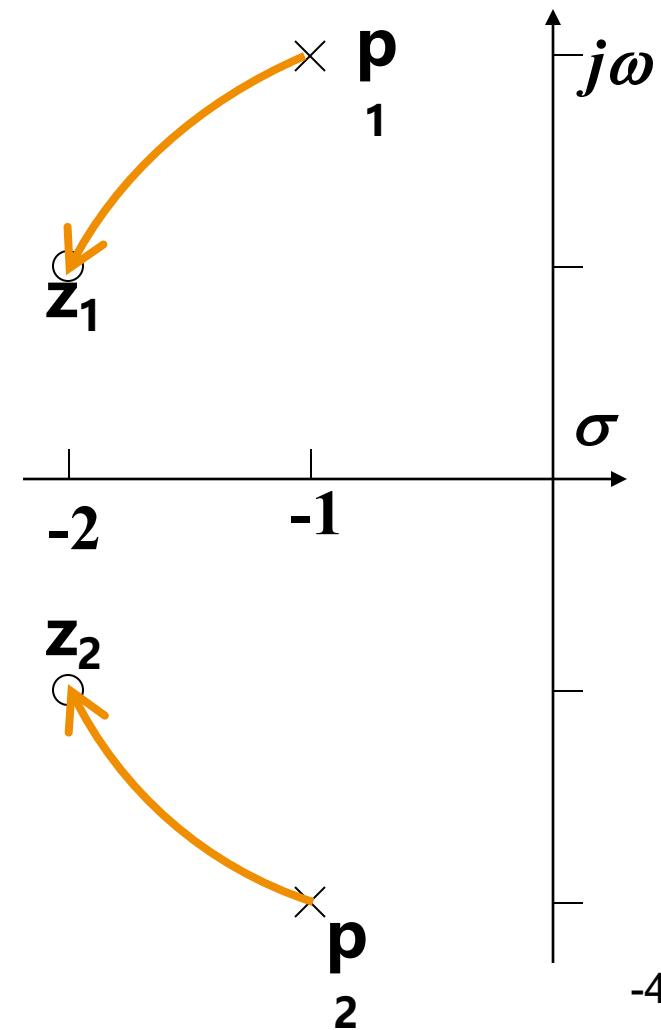
令  $s=u+jv$ ,

$$GH = \frac{K(u^2 - v^2 + 2uvj + 4u + 4vj + 5)}{u^2 - v^2 + 2uvj + 2u + 2vj + 5}$$

由相角条件得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2uv + 4v}{u^2 - v^2 + 4u + 5} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2uv + 2v}{u^2 - v^2 + 2u + 5} \\ = (2k + 1)\pi \end{aligned}$$

则  $u^2 + v^2 = 5$  是以原点为圆心、 $\sqrt{5}$ 为半径的圆。



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则5：根轨迹的起始角与终止角

已知闭环控制系统的开环传递函数，试确定该系统根轨迹图中复数部分的曲线形状。

$$G(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s^2 + cs + d}$$

【解】令  $s = u + jv$ ,  $G = \frac{K(u^2 - v^2 + 2uvj + au + avj + b)}{u^2 - v^2 + 2uvj + cu + cvj + d}$

由相角条件得

$$\frac{2u + a}{u^2 - v^2 + au + b} = \frac{2u + c}{u^2 - v^2 + cu + d}$$
$$(a - c)u^2 + (a - c)v^2 + 2(b - d)u + cb - ad = 0$$

若  $a \neq c$  则,

$$(u + \frac{b - d}{a - c})^2 + v^2 = (\frac{b - d}{a - c})^2 + \frac{ad - bc}{a - c}$$

即只要

$a \neq c$  且  $(\frac{b - d}{a - c})^2 > \frac{bc - ad}{a - c}$  则根轨迹的复数部分是一个圆。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

- **分离点**：两条或两条以上根轨迹分支在S平面上相遇又立即分开的点。
- 若有 $l$ 条根轨迹进入d点，必有 $l$ 条根轨迹离开d点。
- **分离角**：根轨迹进入分离点的切线(射线)与离开分离点的切线(射线)之间的夹角。因此其范围为 $[0^\circ, 180^\circ]$ 。

根轨迹的分离点的坐标d是下面方程的解： 
$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi$ ，其中 $l$ 为进入分离点的根轨迹的分支数。

证明思路：如果有两条或两条以上根轨迹相遇，说明在某个 $K_r$ 值上闭环特征方程有重根。

因此，可由代数方程存在重根的条件得到分离点的方程。

## 二、绘制根轨迹的规则

规则6：根轨迹的分离点

【证明】由闭环特征方程

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

有重根的条件是  $D(s) = 0$        $\dot{D}(s) = 0$

即

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0 \quad \frac{d}{ds} \left[ \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j) \right] = 0$$

消去  $K_r$  有

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

即

$$\frac{d \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{ds} = \frac{d \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{ds}$$

由于  $\ln \prod_{i=1}^n (s - p_i) = \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i)$

$$\ln \prod_{j=1}^m (s - z_j) = \sum_{j=1}^m \ln(s - z_j)$$

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

因此有  $\sum_{i=1}^n \frac{d \ln(s - p_i)}{ds} = \sum_{j=1}^m \frac{d \ln(s - z_j)}{ds}$

所以  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j}$

得证。

#### ◆说明：

✓ 因为根轨迹是实对称的，所以根轨迹的分离点或位于实轴上，或以共轭形式成对出现在复平面中。

✓ 如果根轨迹位于实轴上两个相邻开环极点(或零点)之间 (其中一个可以是无限极点(或零点))，则在这两个极点(或零点)之间至少存在一个分离点。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

#### ◆说明：

✓ 当开环传递函数无有限零点时，分离点方程中取  $\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = 0$   
分离点方程即为  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = 0$

✓ 求解分离点的方程的根并不一定都是分离点。

? 为何严格证明出来的结论会出现不是分离点的解？

◆ 两个方程变成比值相等时，未考虑  $K_r > 0$  及求比值时的约束条件，因此引入了新的根。

◆ 只有那些在根轨迹上的解才是根轨迹的分离点。

✓ 实轴上的分离点容易判断。

✓ 若在这些根中有共轭复根，如何判断是否在根轨迹上，是一个比较复杂的问题。由于只有当开环零、极点分布非常对称时，才会出现复平面上的分离点，因此，用观察法可大体上判断。如果不能确定，则可借助相角条件来判断。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

◆说明：

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

分离点方程 有时不便求解。

实际上，将开环传递函数写成  $G(s) = K_r \frac{B(s)}{A(s)}$

则闭环特征方程为  $D(s) = A(s) + K_r B(s) = 0$

有重根的条件是  $D(s) = 0$  且  $\dot{D}(s) = \dot{A}(s) + K_r \dot{B}(s) = 0$

将两式中的  $K_r$  消去得  $\dot{A}(s)B(s) = A(s)\dot{B}(s)$

即为分离点方程。

注：该分离点方程得到的根包含了下面两类根：

✓  $K_r$  为负时的根，应舍去。

✓  $A(s)$  及其一阶导数=0的根（或  $B(s)$  及其一阶导数=0的根）。如果有这二者的根，则必然是重根的开环极点（或开环零点），即根轨迹的起点（或终点），应舍去。

## 二、绘制根轨迹的规则

规则6：根轨迹的分离点

【证明】有开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

● 思路：

构造两个开环传递函数，

- 一个复现此根轨迹起点到分离点的部分
- 一个复现此根轨迹分离点到终点的部分

则分离角是它们的起始角与终止角的夹角。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

【证明】有开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

闭环特征方程  $D(s) = \prod(s - p_i) + K_r \prod(s - z_j) = 0$

已知该系统根轨迹有分离点 $d$ , 且是 $l$ 重根, 此时  $K_r = K_g$

● 另有开环传递函数

$$G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j)}$$

闭环特征方程  $D_1(s) = \prod(s - p_i) + (K_{r1} + K_g) \prod(s - z_j) = 0$

显然,  $K_{r1}=0$  时, 对应  $K_r = K_g$  时的闭环极点。

$K_{r1} = \infty$  时, 对应  $K_r = \infty$  时的闭环极点。

因此,  $G_1(s)$ 对应的根轨迹, 是原 $G(s)$ 根轨迹从分离点( $K_r$ 为 $K_g$ 时)往后( $K_r$ 从 $K_g$ 继续增大到 $\infty$ )的根轨迹。

则 $G_1(s)$ 根轨迹中开环极点 $d$ 的起始角, 即为原根轨迹离开分离点的切线方向的倾角。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

闭环特征方程  $D(s) = \prod(s - p_i) + K_r \prod(s - z_j) = 0$

已知该系统根轨迹有分离点 $d$ , 且是 $\ell$ 重根, 此时  $K_r = K_g$

● 另有开环传递函数

$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

闭环特征方程  $D_2(s) = \prod(s - p_i) + \frac{K_{r2}}{1+K_{r2}} K_g \prod(s - z_j) = 0$

显然,  $K_{r2}=0$  时, 对应  $K_r = 0$  时的闭环极点。

$K_{r2} = \infty$  时, 对应  $K_r = K_g$  时的闭环极点。

因此,  $G_2(s)$ 对应的根轨迹, 是原 $G(s)$ 根轨迹 $K_r$ 从0增大到 $K_g$ 时 (分离点) 的根轨迹。

则 $G_2(s)$ 根轨迹中开环零点 $d$ 的终止角, 即为原根轨迹进入分离点的切线方向的倾角。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$
$$G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j)}$$
$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

对于 $G_1(s)$ , 分离点d是开环极点, 是根轨迹起点, 是l重根, 因此其起始角为

$$\theta_d^q = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d)]$$

原开环传递函数的零点

$K_r$ 为 $K_g$ 时的闭环极点(d除外)

对于 $G_2(s)$ , 分离点d是开环零点, 是根轨迹终点, 是l重根, 因此其终止角为

$$\theta_d^z = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d) + \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i)]$$

$K_r$ 为 $K_g$ 时的闭环极点(d除外)

原开环传递函数的极点

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)} \quad G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j)}$$

$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) + K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

$$\theta_d^q = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d)]$$

$$\theta_d^z = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d) + \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i)]$$

综上,分离角即为 $G_1(s)$ 根轨迹中开环极点d的起始角减去 $G_2(s)$ 根轨迹中开环零点d的终止角:

$$\theta_d = \theta_d^z - \theta_d^q = \frac{1}{l} \left[ \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i) - \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) \right] = \frac{(2k+1)\pi}{l}$$

相角条件  
得证。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

离开分离点的切线倾角： $\theta_d^q = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d)]$

进入分离点的切线倾角： $\theta_d^z = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d) + \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i)]$

分离角： $\theta_d = \theta_d^z - \theta_d^q = \frac{(2k+1)\pi}{l}$

如何判断分离点的重数？

- 任一条进入d点的根轨迹与相邻的离开d点的根轨迹方向之间的夹角为 $\pi/l$ 。
- 两条相邻的离开分离点的切线的夹角为  $\theta_d^q|_{k=j+1} - \theta_d^q|_{k=j} = \frac{2\pi}{l}$   
两条相邻的进入分离点的切线的夹角同上。
- $l$ 条进入d点的根轨迹与 $l$ 条离开d点的根轨迹相间隔。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

已知开环传递函数  $G(s) = K_r \frac{B(s)}{A(s)}$

闭环特征方程  $D(s) = A(s) + K_r B(s) = 0$

◆ 若该系统根轨迹有分离点  $d$ , 且是  $l$  重根, 则  $s = d$  是  $\dot{D}(s)$  的  $l-1$  重根。

证明: 设  $D(s) = (s - d)^l Q(s) = 0$  其中  $Q(s)$  不含  $(s-d)$  因式。

有重根的条件是  $D(s) = 0$  且  $l(s - d)^{l-1}Q(s) + (s - d)^l \dot{Q}(s)$   
 $= (s - d)^{l-1}[lQ(s) + (s - d)\dot{Q}(s)] = 0$

考察  $lQ(s) + (s - d)\dot{Q}(s)$  是否含  $(s-d)$  因式,

即考察  $s = d$  是否是方程  $lQ(s) + (s - d)\dot{Q}(s) = 0$  的根。

显然不是。

因此  $s = d$  是方程  $\dot{D}(s) = 0$  的  $l-1$  重根。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

已知开环传递函数

$$G(s) = K_r \frac{B(s)}{A(s)}$$
 闭环特征方程  $D(s) = A(s) + K_r B(s) = 0$

若该系统根轨迹有分离点  $d$ , 则其重数/可以这样判断:

方程  $\frac{dD(s)}{ds} = 0$  的解  $s=d$  是  $l-1$  重根, 且  $s=d$  是  $D(s)$  的根。

或  $\frac{d^n D(s)}{d^n s} = 0$  对  $n=0, 1, 2, \dots, l-1$  共计  $l$  个方程

均有解  $s=d$ , 而对  $n=l$  无该解。

注: 分离点方程的根是闭环特征方程的  $1$  阶导数方程的根。若从分离点方程出发去求导, 则应到  $l-2$  阶导数时有解、 $l-1$  阶导数时无解。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则6：根轨迹的分离点

【例】已知一单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$

开环极点数  $n=2$ , 开环零点数  $m=0$ 。

两个根轨迹分支位于实轴上两个相邻开环极点之间，则在这两个极点之间存在一个分离点。

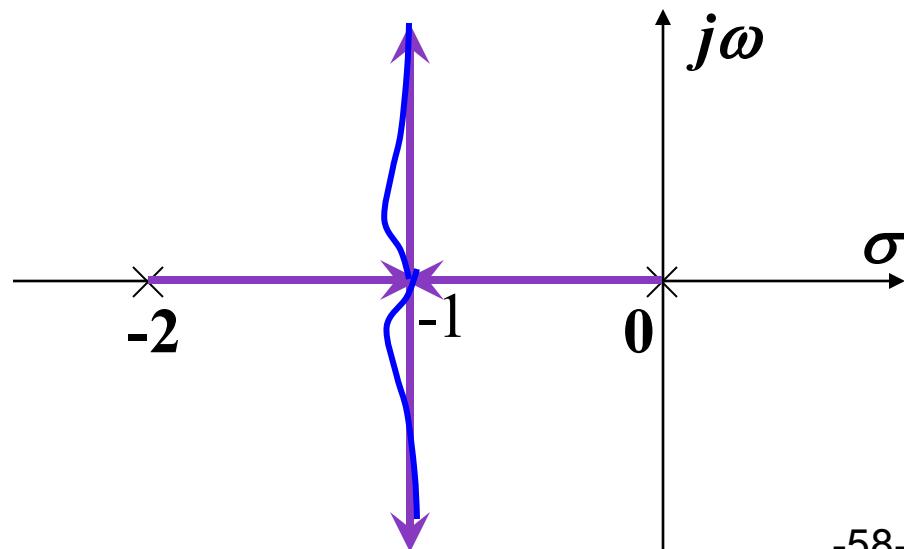
根轨迹分离点方程为  $\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$   
即

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = 0 \quad \frac{2d+2}{d(d+2)} = 0$$

分离点  $d = -1$

分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi = \frac{\pi}{2}$

? 根轨迹会不会是蓝色曲线的情况呢?



## 二、绘制根轨迹的规则

规则6：根轨迹的分离点

【例】已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

【解】开环极点数n=3，开环零点数m=0。实轴上的根轨迹为-1到-2线段和-3到-∞线段。

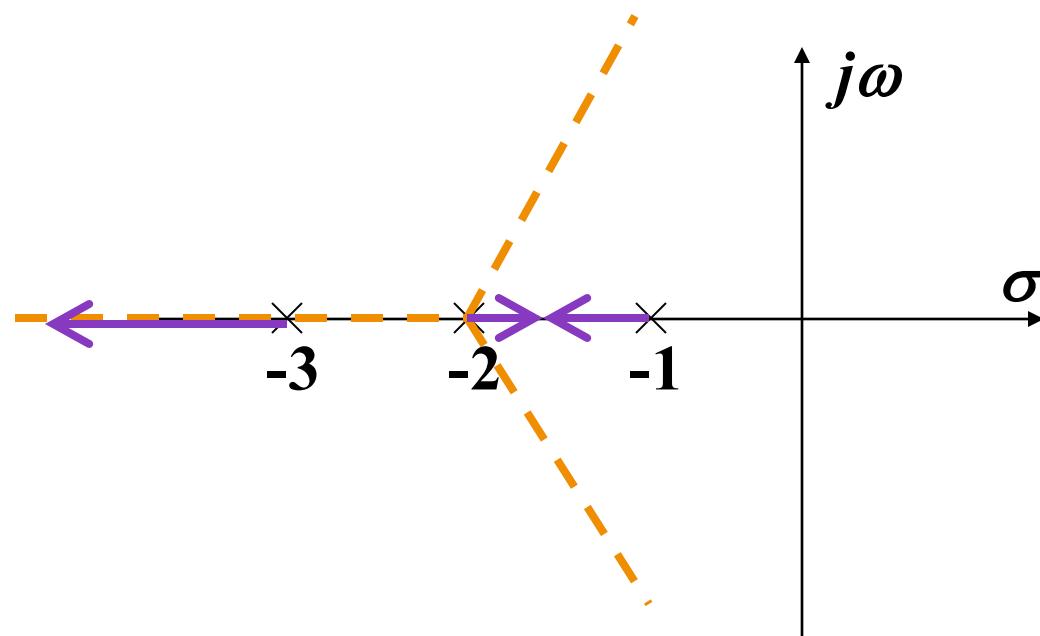
根轨迹的3个分支终止于无穷远处。

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-6}{3} = -2$$

这3条渐近线的倾角分别为

$$k = 0 \text{ 时 } \varphi_a = \frac{\pi}{3} \quad k = 1 \text{ 时 } \varphi_a = \pi \quad k = 2 \text{ 时 } \varphi_a = \frac{5\pi}{3}$$



## 二、绘制根轨迹的规则

规则6：根轨迹的分离点

根轨迹的分离点  $\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$   $G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

即  $\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = 0$   $3d^2 + 12d + 11 = 0$

或由  $A(s) = -(s+1)(s+2)(s+3)$

$$A(s) = -(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$$

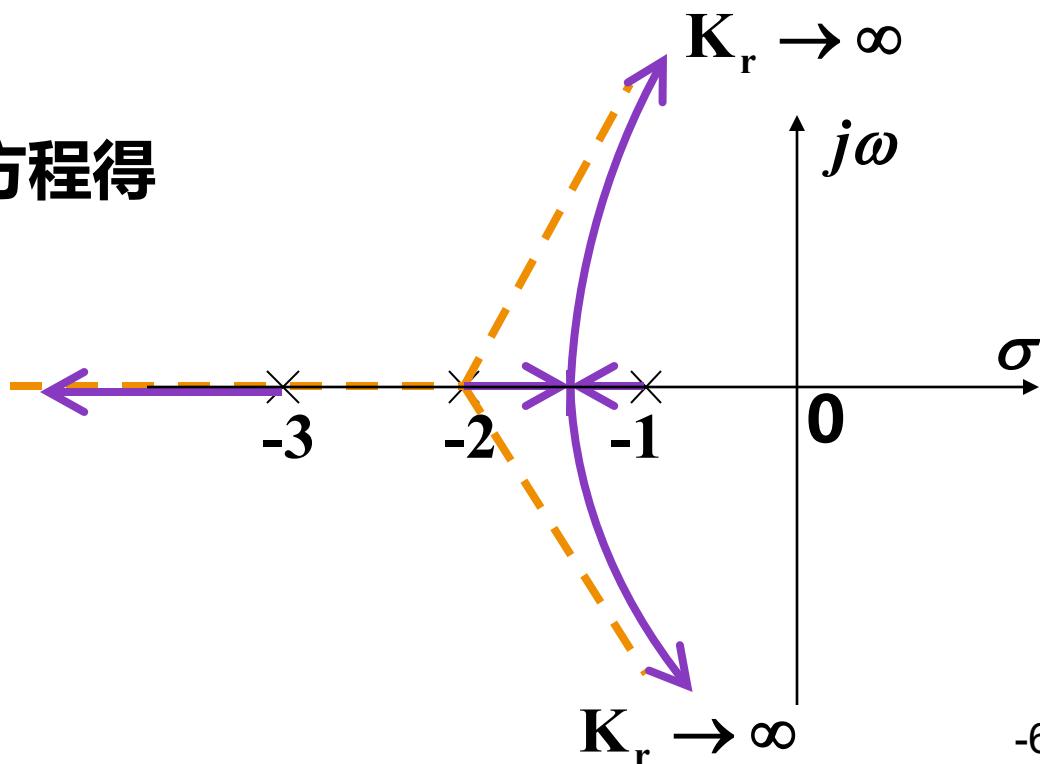
$B(s)=1$ , 则可得同样的分离点方程。求解分离点方程得

$$d_1 = -1.42 \quad d_2 = -2.58$$

$d_2$ 不在根轨迹上, 分离点只有 $d_1$ 。

分离角为  $\frac{\pi}{2}$

因此可概略绘制根轨迹。

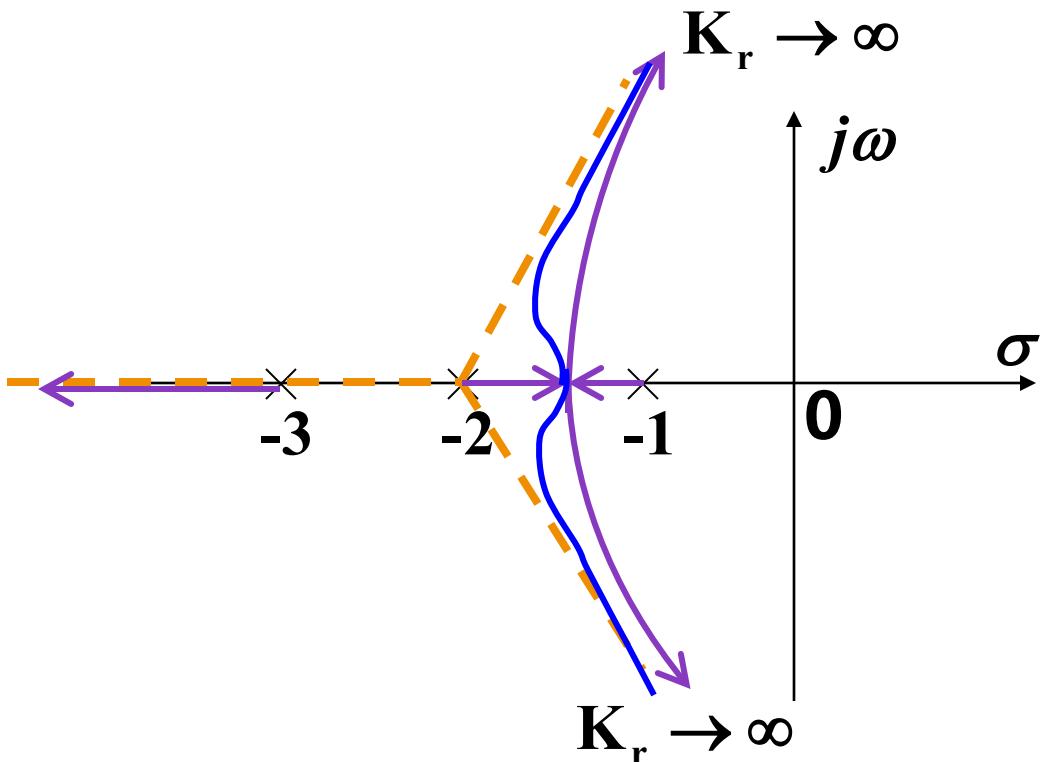


## 二、绘制根轨迹的规则

规则6：根轨迹的分离点

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

?根轨迹会不会是蓝色曲线的情况呢?



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则7：根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴的交点就是闭环系统特征方程的纯虚根（实部为零）。求解方法有二：

法1：由劳斯判据，存在纯虚根意味着劳斯阵列第一列系数有0，因此可令第一列含有 $K_r$ 的项为0，求出 $K_r$ ，并利用劳斯阵列全0行上一行的系数构成辅助方程，求得根轨迹与虚轴的交点 $\omega$ 。

法2：将 $s=j\omega$ 带入特征方程，即  $1+G(j\omega)H(j\omega)=0$

$$R_e[1+G(j\omega)H(j\omega)] + I_m[1+G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

由此求解虚部方程和实部方程即可得 $K_r$ 和与虚轴的交点坐标 $\omega$

$$I_m[1+G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$R_e[1+G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

注：该 $K_r$ 值是使系统由稳定(或不稳定)变为不稳定(或稳定)的开环根轨迹增益的临界值(通常用 $K_{rc}$ 表示)。它对如何选择合适的系统参数、使系统处于稳定的工作状态有重要意义。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则7：根轨迹与虚轴的交点

求该例中根轨迹与虚轴的交点及相应的开环根轨迹增益的临界值 $K_{rc}$ 。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

系统的特征方程为  $s^3 + 6s^2 + 11s + K_r + 6 = 0$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程得  $-j\omega^3 - 6\omega^2 + j11\omega + K_r + 6 = 0$

其虚部和实部方程分别为

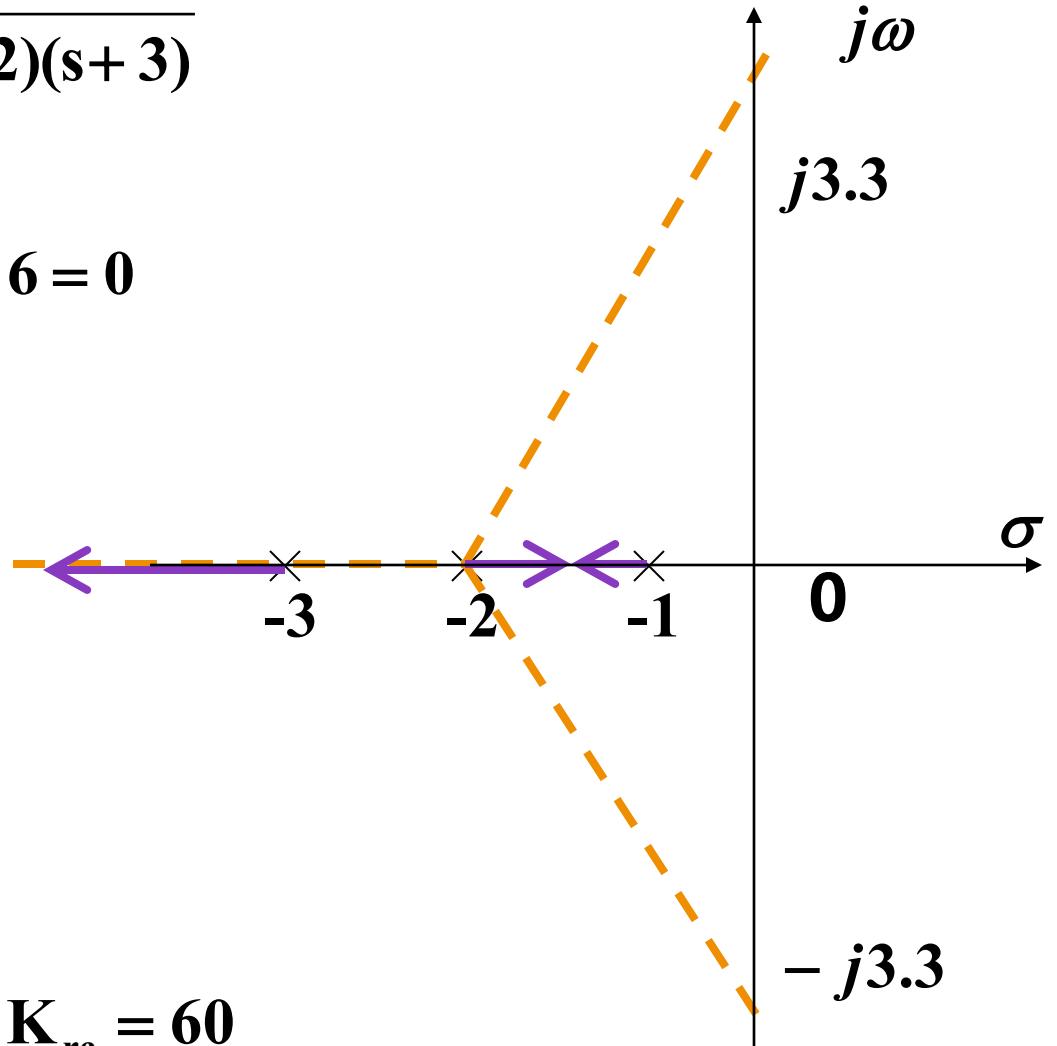
$$\begin{cases} 11\omega - \omega^3 = 0 \\ K_r + 6 - 6\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解虚部方程得  $\omega_1 = 0 \quad \omega_{2,3} = \pm\sqrt{11}$

$\omega_1 = 0$  不是根轨迹上的点，应舍去。

$\omega_{2,3} = \pm\sqrt{11} \approx \pm 3.3$  为根轨迹与虚轴的两个交点。

代入实部方程求出系统开环根轨迹增益的临界值  $K_{rc} = 60$



## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则8：根之和与根之积

系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i)}$$

系统特征方程  $s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^m (s - z_j) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$

$$= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n \quad a_i \text{随着 } K_r \text{ 而变。}$$

口闭环特征根之和等于 $-a_1$ 。闭环特征根之积乘以 $(-1)^n$ 等于 $a_n$ 。

?什么情况下 $a_1$ 不随开环根轨迹增益 $K_r$ 变化而变化？

口若 $n-m \geq 2$ ，则根之和与 $K_r$ 无关，为常值。此时，当增益 $K_r$ 的变动使某些闭环极点在s平面上向左移动时，则必有另一些极点向右移动。

?此时闭环特征根之和为多少？

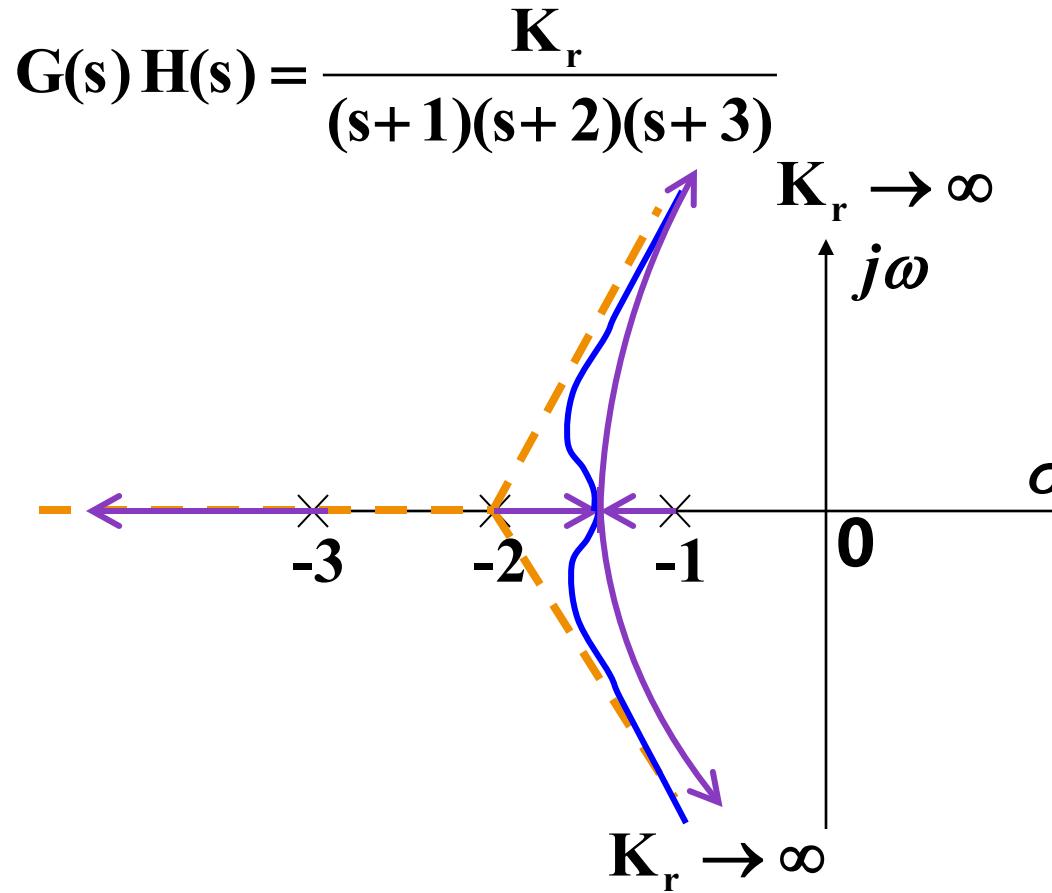
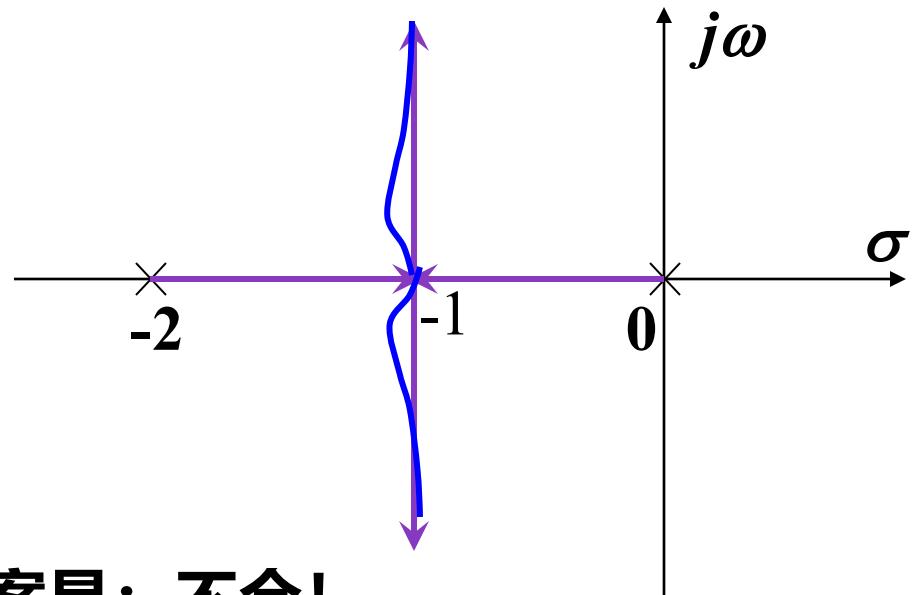
✓ 等于开环极点之和。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则8：根之和与根之积

?根轨迹会不会是蓝色曲线的情况呢?

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)}$$



答案是：不会！

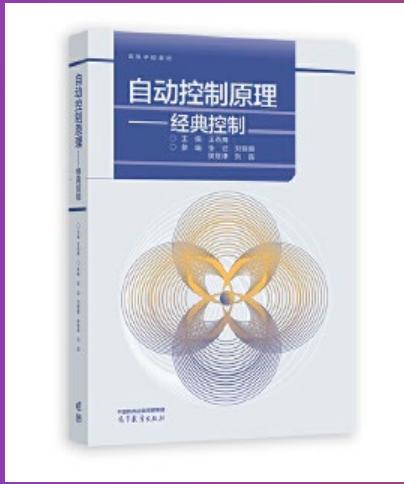
**判断方法：**当  $n-m \geq 2$  时，特征根之和为常数，当有根轨迹分支向左移动时，则必有另一些分支向右移动。

## 二、绘制根轨迹的规则

### 规则8：根之和与根之积

以上八条规则是绘制根轨迹图所要遵循的基本规则。另外还要注意：

- ☑ 根轨迹的起点(开环极点) $p_i$ 用符号“ $\times$ ”标示；根轨迹的终点(开环零点) $z_j$ 用符号“ $\circ$ ”标示。
- ☑ 根轨迹由起点到终点是随系统开环根轨迹增益 $K_r$ 值的增加而运动的，要用箭头标示根轨迹运动的方向。
- ☑ 要标出一些特殊点的 $K_r$ 值，主要包括起点( $K_r=0$ )，终点( $K_r \rightarrow \infty$ )；根轨迹在实轴上的分离点d；与虚轴的交点 $\omega_c$  ( $K_r=K_{rc}$ )。
- ☑ 有时要根据系统分析与综合的需要而在根轨迹上标出一些其它特殊的闭环极点及其对应的开环根轨迹增益。



## 第四章：根轨迹

# 第15讲 根轨迹-Part 2

### Root Locus-Part 2

本讲内容

三、根轨迹的绘制例题

四、广义根轨迹

### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统完整的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

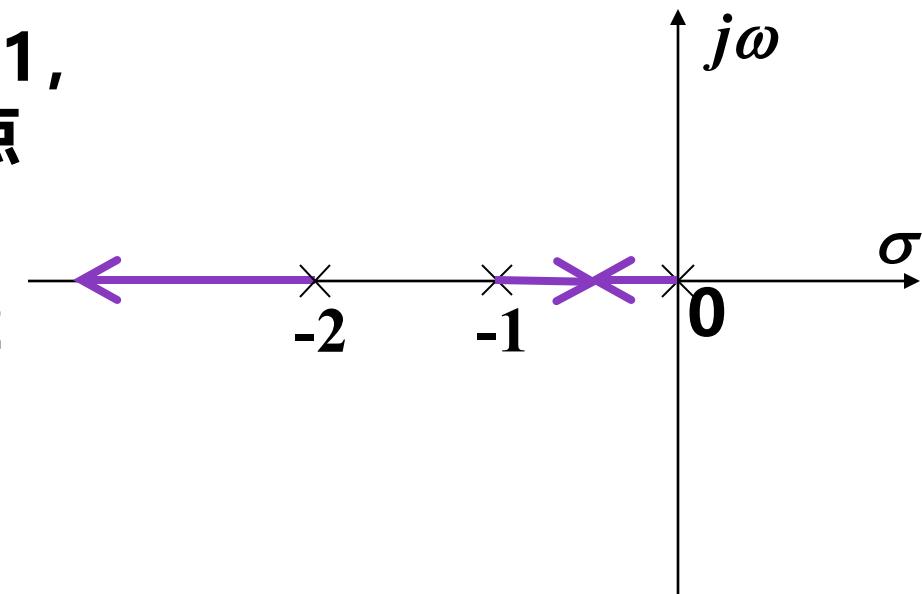
【解】

(1)由规则一知，该系统在s平面上有三条根轨迹，三条根轨迹连续且对称于实轴。

(2)由规则二知，起点是三个开环极点，即  $p_1=0$ ,  $p_2=-1$ ,  $p_3=-2$ ，由于没有开环零点( $m=0$ )，三条根轨迹的终点均在无穷远处。

(3)由规则三知，实轴上的根轨迹为0到-1的线段和由-2至实轴上负无穷远(即无限零点)。

此时可知一定存在一个分离点



### 三、根轨迹的绘制例题

(4)由规则四可求三条渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-3}{3} = -1 \quad k=0 \text{时 } \varphi_a = \frac{\pi}{3} \quad k=1 \text{时 } \varphi_a = \pi \quad k=2 \text{时 } \varphi_a = \frac{5\pi}{3}$$

(5)由规则六，根轨迹的分离点方程

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} \quad A(d) = d(d+1)(d+2) = d^3 + 3d^2 + 2d \\ \dot{A}(d) = 3d^2 + 6d + 2$$

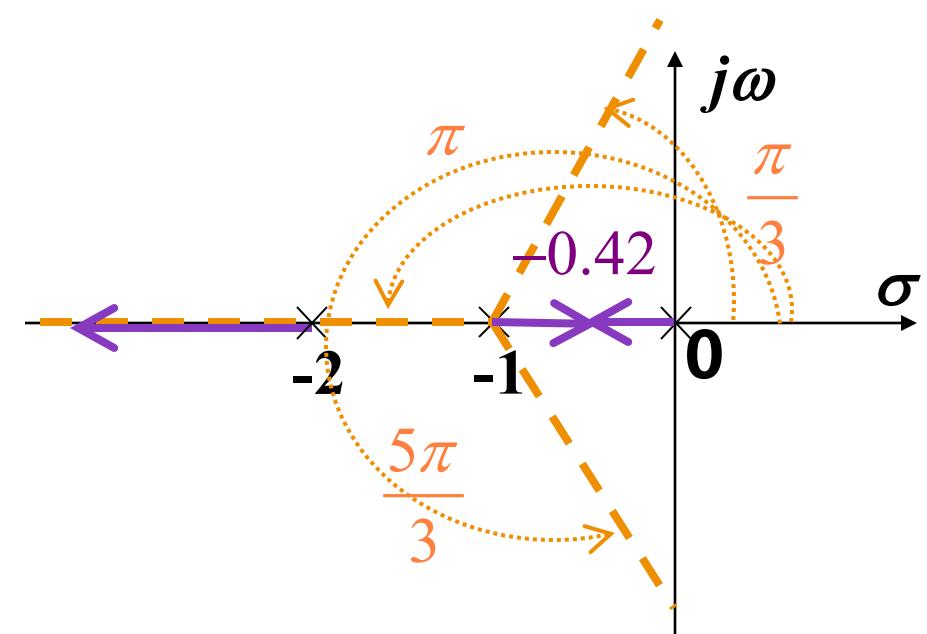
$$\text{即 } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$$

$$\text{整理得 } 3d^2 + 6d + 2 = 0$$

$$\text{解得 } d_1 = -0.42 \quad d_2 = -1.58$$

$d_2$ 不在实轴的根轨迹上，舍去。 $d_1$ 为分离点。

显然，该分离点重数为2，分离角为  $\frac{\pi}{2}$



### 三、根轨迹的绘制例题

(6)无复数开环极点和零点，不用求起始角和终止角。

(7)由规则七求出与虚轴的交点。将 $s=j\omega$ 带入特征方程，即

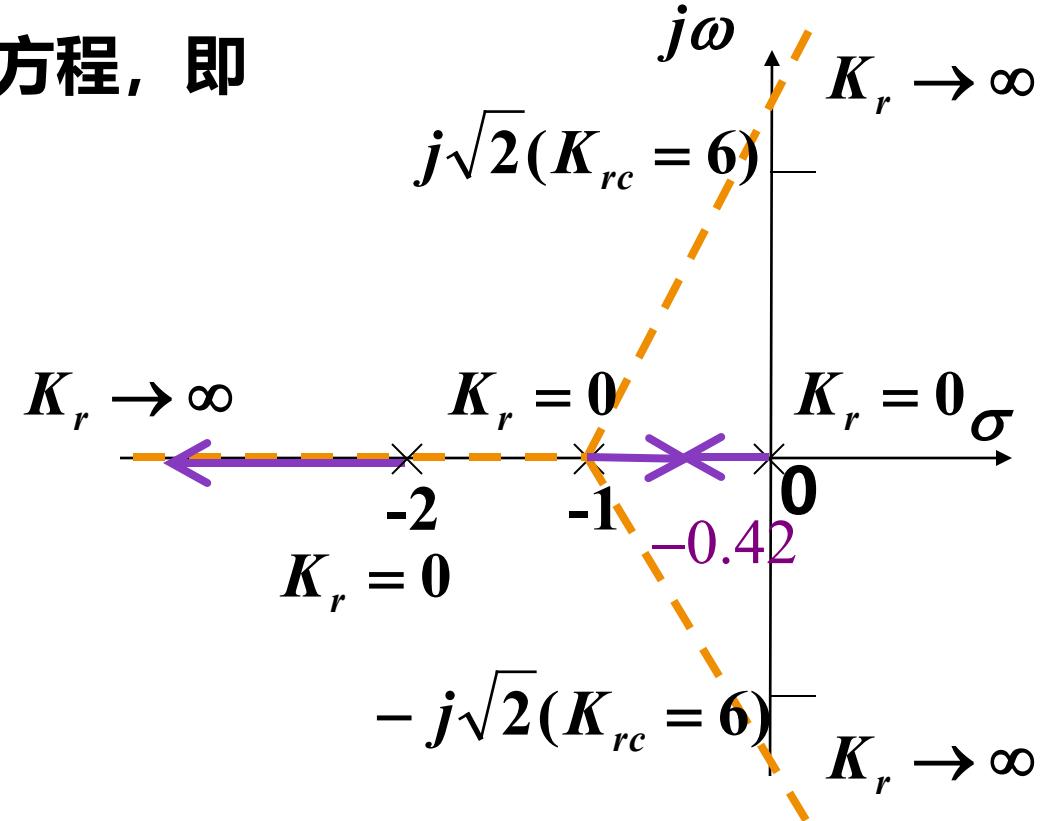
$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + K_r = 0$$

$$K_r - 3\omega^2 + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

由虚部方程得  $\omega_1 = 0$        $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

其中 $\omega_1$ 是根轨迹的起点之一。

由 $\omega_{2,3}$ 带入实部方程得  $K_{rc} = 6$



### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

【解】(1)该系统有一个开环零点 $z_1=-2$ 和一对开环极点 $p_{1,2}=-1 \pm j1$ ，由规则一知，该系统有2条根轨迹分支，

由规则二知，起点是2个开环极点，终点一个在-2，一个在无穷远处。

(2)由规则三知，实轴上的根轨迹为-2到 $-\infty$ （为无限零点）。

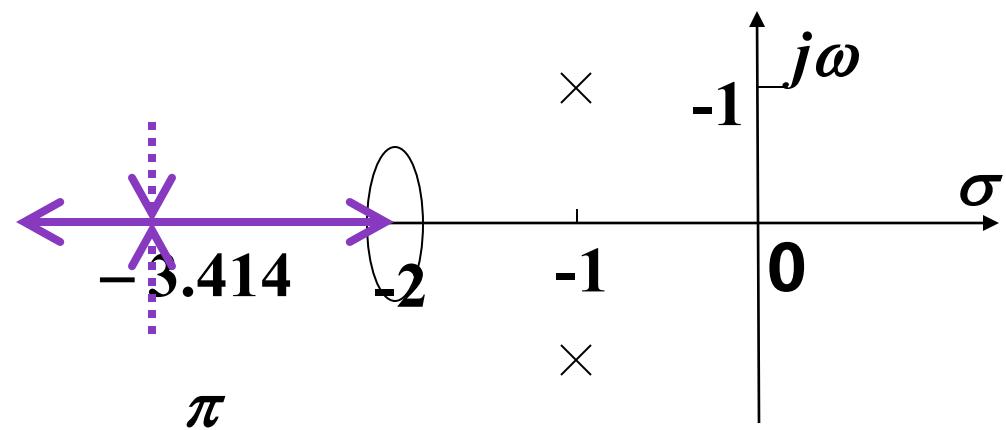
此时可知一定存在一个分离点。

(3)由规则六，根轨迹的分离点方程

$$\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j} \quad \text{即 } d^2 + 4d + 2 = 0$$

解得  $d_1 = -3.414$   $d_2 = -0.586$

显然， $d_1$ 是分离点，重数为2。 $d_2$ 不是分离点。分离角为  $\frac{\pi}{2}$



### 三、根轨迹的绘制例题

(4) 由规则五可求出开环复数极点(根轨迹的起点)的起始角:

$$\theta_{p_l} = 180^\circ + \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(s - p_i)$$

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2) \quad \theta_{p_1} = 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ = 135^\circ$$

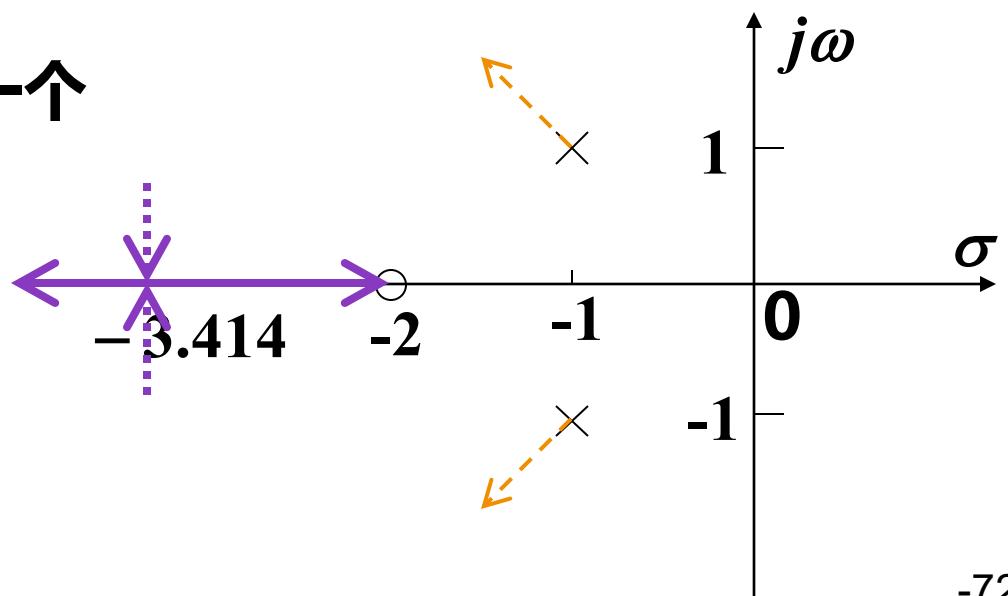
$$\theta_{p_2} = 180^\circ + \angle(p_2 - z_1) - \angle(p_2 - p_1) \quad \theta_{p_2} = 180^\circ - 45^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$

(5) 考察根轨迹是否是特殊形状, 例如圆弧。

运用相角条件可证明本系统在S平面上的根轨迹是一个

圆心位于点(-2,j0)、

半径为 $\sqrt{2}$  的圆弧。



### 三、根轨迹的绘制例题

(5) 考察根轨迹是否是特殊形状，例如圆弧。

证明方法1：令  $s=u+jv$  为根轨迹上的一点。由相角条件

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

可得  $\angle(u + jv + 2) - \angle(u + jv + 1 - j1) - \angle(u + jv + 1 + j1) = (2k+1)\pi$

即  $\tg^{-1} \frac{v}{u+2} - \tg^{-1} \frac{v-1}{u+1} - \tg^{-1} \frac{v+1}{u+1} = (2k+1)\pi$

$$\tg^{-1} x \pm \tg^{-1} y = \tg^{-1} \frac{x \pm y}{1 \mp x \cdot y}$$

应用三角公式整理得

$$\tg^{-1} \frac{\frac{v}{u+2} - \frac{2v(u+1)}{(u+1)^2 - (v^2 - 1)}}{1 + \frac{v}{u+2} \cdot \frac{2v(u+1)}{(u+1)^2 - (v^2 - 1)}} = (2k+1)\pi$$

两边取正切得  $u^2 + 4u + 2 + v^2 = 0$  即  $(u+2)^2 + v^2 = (\sqrt{2})^2$

该方程表示的是一个圆心位于点(-2, j0)半径为  $\sqrt{2}$  的圆弧。

### 三、根轨迹的绘制例题

证明方法2：令 $s=u+jv$ 。由相角条件  $G(s)H(s)=\frac{K_r(s+2)}{s^2+2s+2}$

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K_r(u+2+jv)}{u^2-v^2+2u+2+j2v(u+1)} = (2k+1)\pi$$

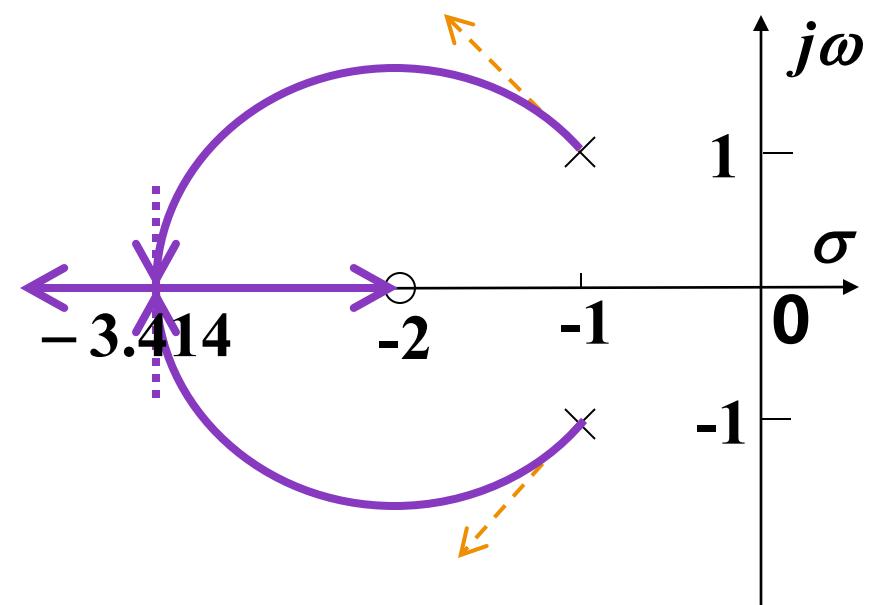
$$\arctan \frac{v}{u+2} - \arctan \frac{2v(u+1)}{u^2-v^2+2u+2} = (2k+1)\pi$$

两边取tan，则得

$$\frac{v}{u+2} = \frac{2v(u+1)}{u^2-v^2+2u+2} \quad u^2 + v^2 + 4u + 2 = 0$$

即  $(u+2)^2 + v^2 = (\sqrt{2})^2$

从而绘制出根轨迹的准确图形。



### 三、根轨迹的绘制例题

- 由两个开环极点（实极点或复数极点）和一个开环实零点组成的二阶系统，只要实零点没有位于两个实极点之间(P22-例1)，

当开环根轨迹增益 $K_r$ 由零变到无穷大时，根轨迹的复数部分，是以实零点为圆心，以实零点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环极点为两个实极点时）或圆的一部分（当开环极点为一对共轭复数极点时）。

- 由两个开环零点（实零点或复数零点）和一个开环实极点组成的二阶系统，只要实极点没有位于两个实零点之间，

当开环根轨迹增益 $K_r$ 由零变到无穷大时，根轨迹的复数部分，是以实极点为圆心，以实极点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环零点为两个实零点时）或圆的一部分（当开环零点为一对共轭复数零点时）。

该结论在数学上的严格证明可参照本例进行。

# 一、根轨迹的基本概念

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

【解】(1)该系统有4个开环极点  $p_1=0, p_2=-2, p_{3,4}=-1 \pm j1$ ，由规则一知，该系统在s平面上有4条根轨迹，

由规则二知，起点是4个开环极点，终点在无穷远处。

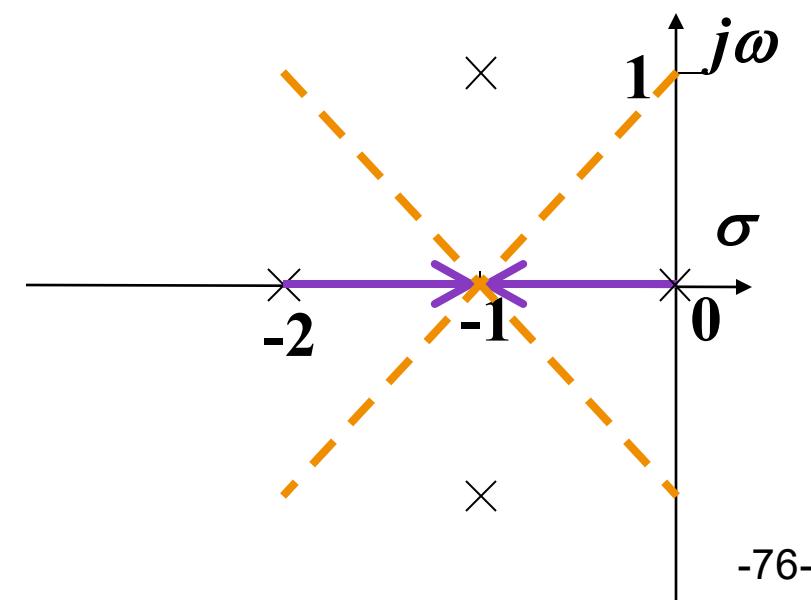
(2)由规则三知，实轴上由0到-2的线段是根轨迹。

(3)由规则四可求出4条根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-2 - 1 + j - 1 - j}{4 - 0} = -1$$

这4条渐近线的倾角分别为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \quad \text{即 } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



### 三、根轨迹的绘制例题

(4)由规则五可求出复数极点 $p_3$ 和 $p_4$ 的起始角     $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$

$$\theta_{p_3} = (2k+1)\pi - \angle(p_3 - 0) - \angle(p_3 + 2) - \angle(p_3 + 1 - j)$$

$$= 360^\circ + 180^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 270^\circ \quad \text{则 } p_4 \text{ 的起始角为 } 90^\circ.$$

(5)由规则六, 分离点方程是     $0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j}$

即  $d^3 + 3d^2 + 3d + 1 = 0$  解得  $d = -1$

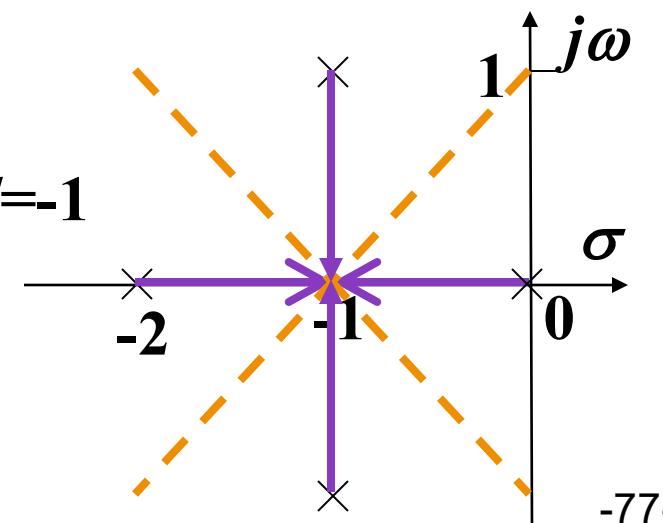
或  $A(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s \quad B(s) = 1$

由  $\dot{A}(s)B(s) = A(s)\dot{B}(s)$  得分离点方程, 求出解为  $d = -1$

再由  $D(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K_r \quad \dot{D}(s) \quad \ddot{D}(s) \quad \ddot{\dot{D}}(s)$  均有解  $d = -1$

而  $\frac{d^4 D(s)}{ds} = 0$  无解, 因此  $l = 4$

分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi \quad \text{即 } \frac{\pi}{4}$



### 三、根轨迹的绘制例题

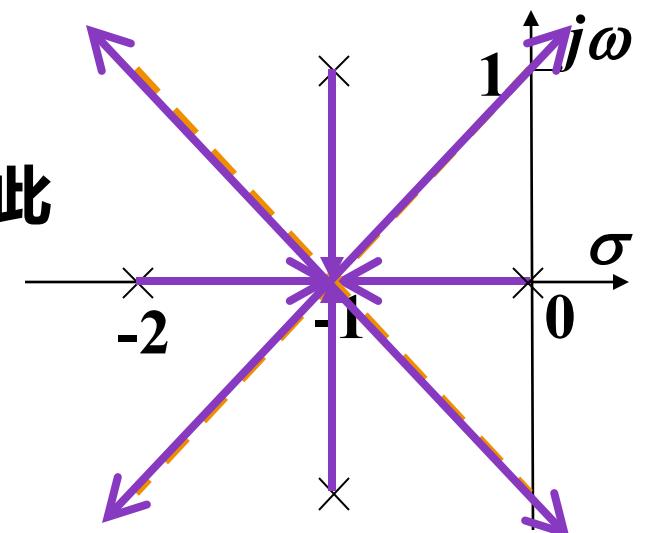
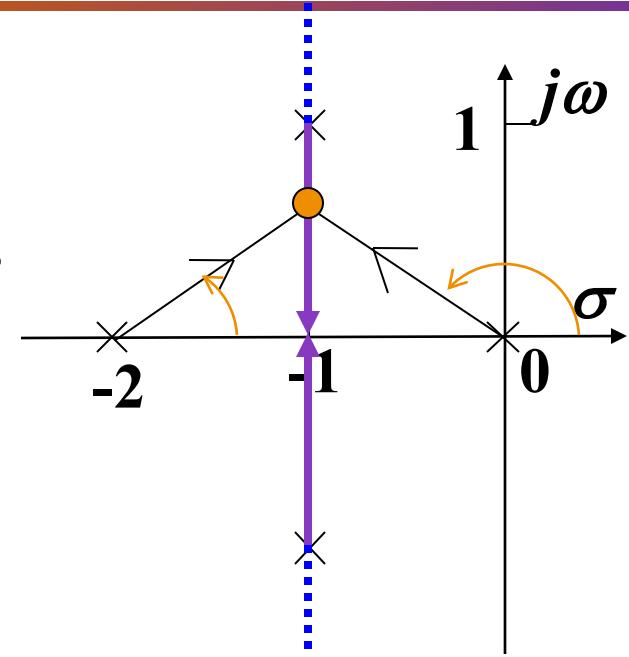
(6) 根据  $n-m \geq 2$  时根之和与开环根轨迹增益  $K_r$  无关，可确认两个以复数开环极点为起点的根轨迹分支将垂直于实轴到达分离点。

或者由相角条件

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) &= (2k+1)\pi \\ -\angle x - \angle(x+2) - \angle(x+1-j) - \angle(x+1+j) \\ &= -180^\circ + 90^\circ - 90^\circ = -180^\circ \end{aligned}$$

两个极点  $-1 \pm j1$  的连线构成的线段上的点都满足相角条件，因此这个线段是根轨迹。

而虚线部分不是根轨迹。



### 三、根轨迹的绘制例题

(7)由规则七求与虚轴的交点。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$$

系统的特征方程为  $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K_r = 0$

列出劳斯阵列:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 6 & K_r \\ s^3 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 5 & K_r \end{array}$$

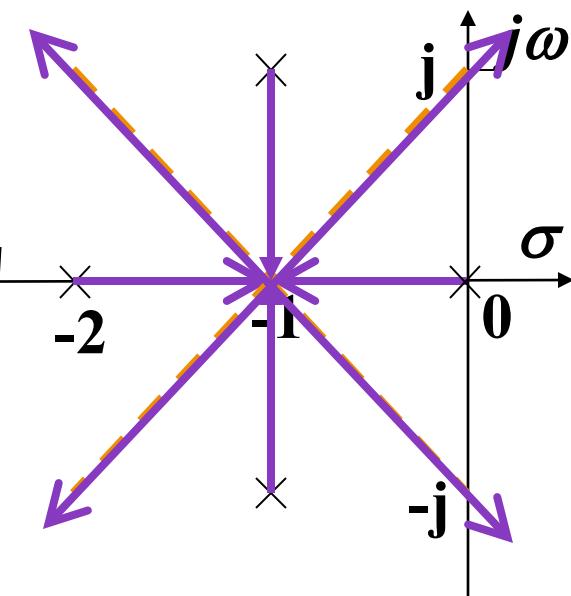
$$\begin{array}{ccc} s^1 & \frac{20-4K_r}{5} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} s^0 \\ K_r \end{array}$$

令劳斯阵列中S<sup>1</sup>行的首项系数为零得  $K_{rc}=5$ ，由S<sup>2</sup>行构成辅助方程为

$$5s^2 + K_r = 0$$

令  $s=j\omega$  并将  $K_{rc}=5$  带入得  $\omega_c=\pm 1$ 。即与虚轴交点坐标为  $\pm j1$ 。



### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

【解】(1)该系统有4个开环极点  $p_1=0, p_2=-4, p_{3,4}=-2 \pm j4$ ，由规则一知，该系统在s平面上有4条根轨迹，

由规则二知，起点是4个开环极点，终点在无穷远处。

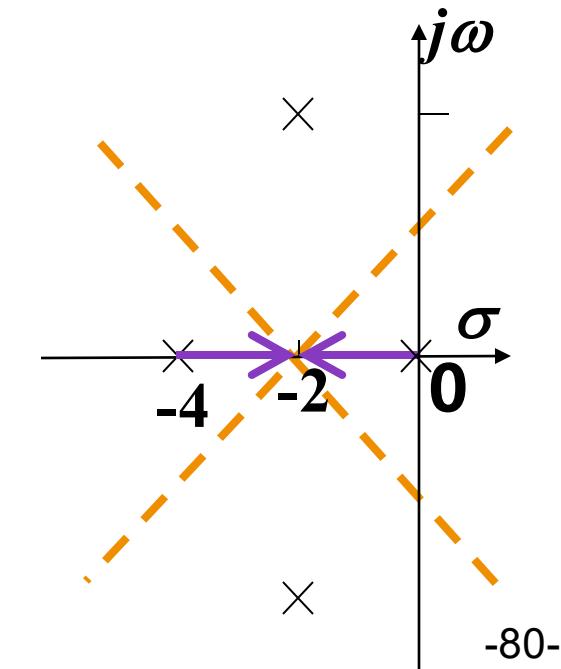
(2)由规则三知，实轴上由0到-4的线段是根轨迹。

(3)由规则四可求出4条根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-8}{4} = -2$$

这4条渐近线的倾角为分别为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \quad \text{即} \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



### 三、根轨迹的绘制例题

(4)由规则六求分离点方程:

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} \quad 0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2-4j} + \frac{1}{d+2+4j}$$

即  $(d+2)(d^2 + 4d + 10) = 0$  解得  $d_1 = -2$   $d_{2,3} = -2 \pm \sqrt{6}j$

或  $A(d) = d(d+4)(d^2 + 4d + 20) = d^4 + 8d^3 + 36d^2 + 80d$

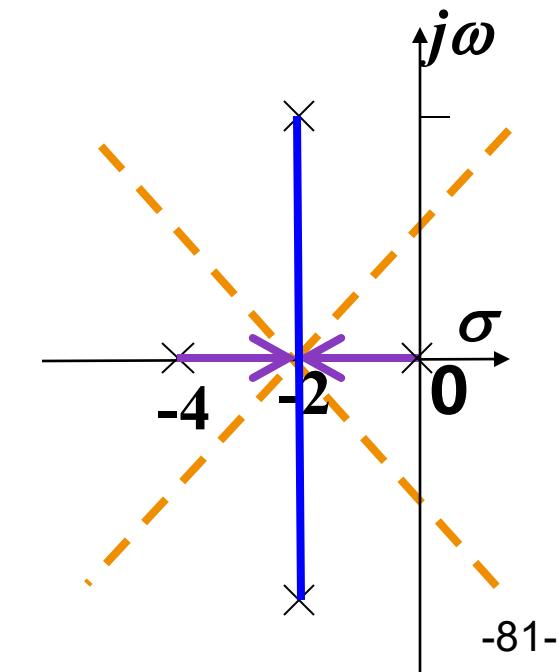
$$\dot{A}(d) = 4d^3 + 24d^2 + 72d + 80 = 0$$

$d_1$  在实轴上，为分离点。

根据相角条件，得蓝色垂线均在根轨迹上，因此  $d_2$  和  $d_3$  也是分离点。

三个分离点的分离角分别是  $\frac{\pi}{2}$

四条根轨迹分支，如何产生三次分离？



### 三、根轨迹的绘制例题

三次分离角分别是  $\frac{\pi}{2}$        $G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$

(5)由规则五可求出复数极点的起始角

$$\begin{aligned}\theta_{p_3} &= (2k+1)\pi - \angle(p_3 - 0) - \angle(p_3 + 4) - \angle(p_3 + 2 + 4j) \\ &= 360^\circ + 180^\circ - 180^\circ - 90^\circ \quad \underbrace{180^\circ}_{180^\circ} \\ &= 270^\circ\end{aligned}$$

$p_4$ 的起始角为 $90^\circ$ 。

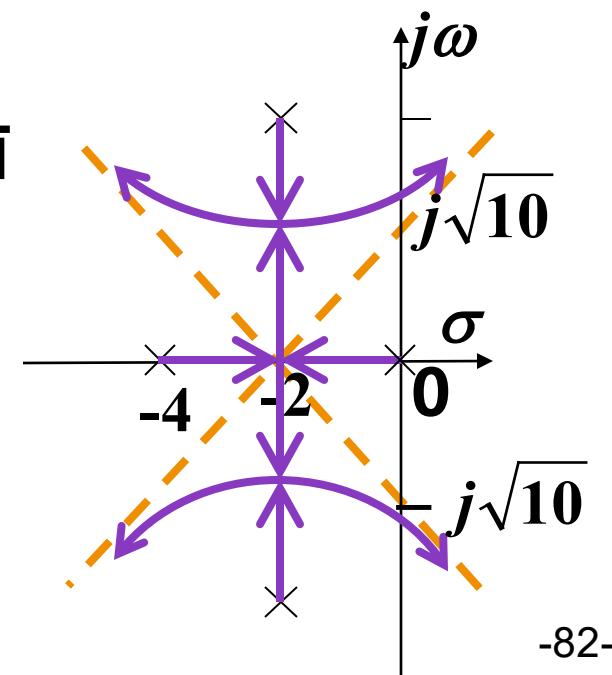
(6)结合刚才相角条件或规则八可知两个从复数极点出发的根轨迹首先沿垂直于实轴方向变化。

(7)由规则七可求根轨迹与虚轴的交点。

系统的特征方程为

$$s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + K_r = 0$$

将 $s=j\omega$ 带入得  $\omega_c = \pm\sqrt{10}$ ,  $K_{rc} = 260$



### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 5)}$$

【解】(1)该系统有4个开环极点  $p_1=0, p_2=-4, p_{3,4}=-2\pm j$ ，由规则一知，该系统在s平面上有4条根轨迹，

由规则二知，起点是4个开环极点，终点在无穷远处。

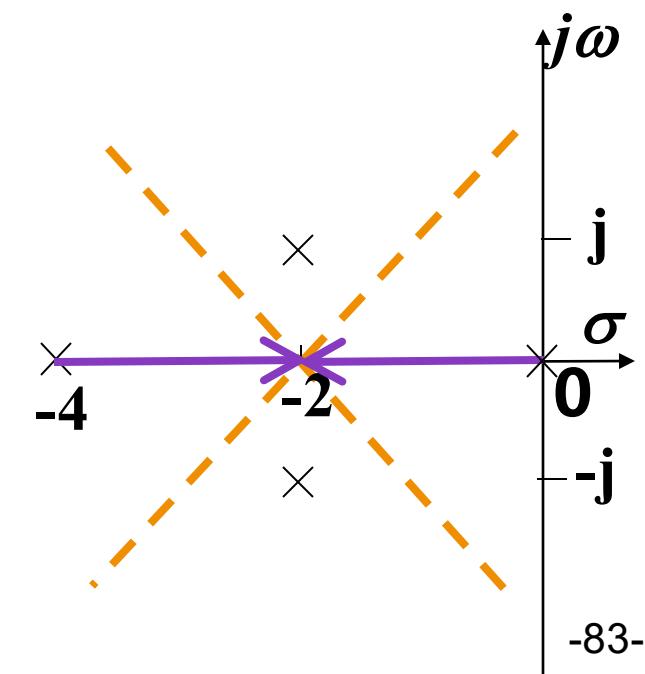
(2)由规则三知，实轴上由0到-4的线段是根轨迹。

(3)由规则四可求出4条根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-8}{4} = -2$$

这4条渐近线的倾角分别为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \quad \text{即} \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



### 三、根轨迹的绘制例题

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 5)}$$

(4)由规则六求分离点方程:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} \quad 0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d + 4} + \frac{1}{d + 2 - j} + \frac{1}{d + 2 + j}$$

即  $(d + 2)(2d^2 + 8d + 5) = 0$  得  $d_1 = -2$   $d_{2,3} = -2 \pm \sqrt{6}/2 = -0.775, -3.225$

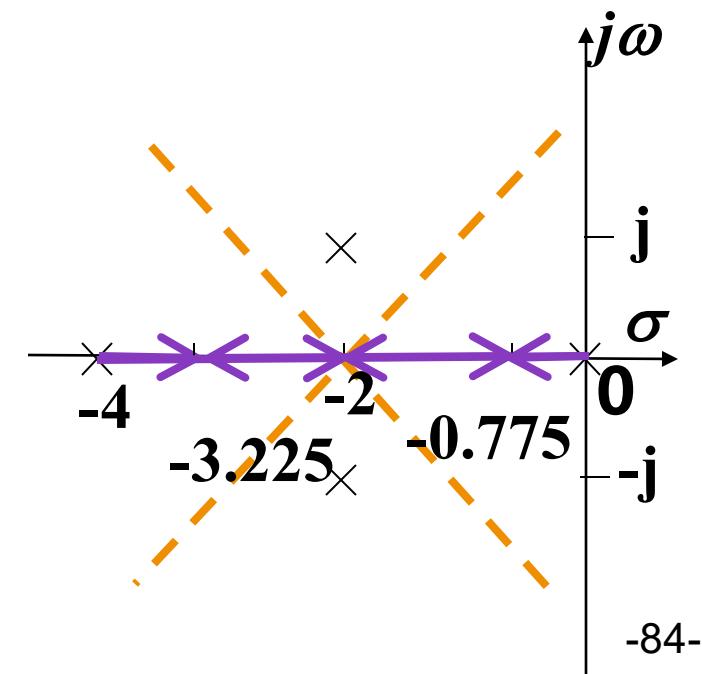
或  $A(d) = d(d + 4)(d^2 + 4d + 5) = d^4 + 8d^3 + 21d^2 + 20d$

$$\dot{A}(d) = 4d^3 + 24d^2 + 42d + 20 = 0$$

三个根均是分离点。

四条根轨迹分支，如何产生三次分离？

三个分离点的分离角分别是  $\frac{\pi}{2}$



### 三、根轨迹的绘制例题

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 5)}$$

三次分离角分别是  $\frac{\pi}{2}$

(5)由规则五可求出复数极点的起始角

$$\begin{aligned}\theta_{p_3} &= (2k+1)\pi - \angle(p_3 - 0) - \angle(p_3 + 4) - \angle(p_3 + 2 + 4j) \\ &= 360^\circ + 180^\circ - 180^\circ - 90^\circ \quad \underbrace{180^\circ}_{\text{ }} \\ &= 270^\circ\end{aligned}$$

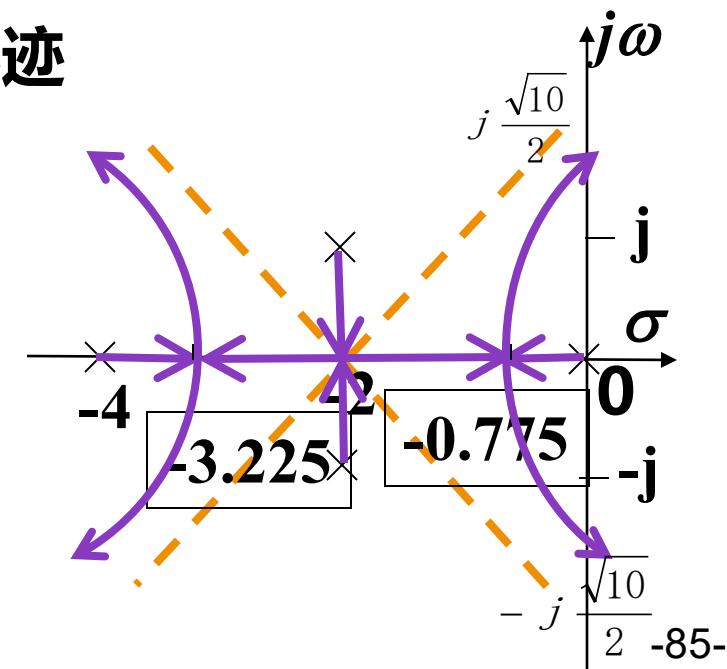
$p_4$  的起始角为  $90^\circ$ 。

(6)结合刚才相角条件或规则八可知两个从复数极点出发的根轨迹首先沿垂直于实轴方向变化。

(7)由规则七可求根轨迹与虚轴的交点。系统的特征方程为

$$s^4 + 8s^3 + 21s^2 + 20s + K_r = 0$$

将  $s=j\omega$  带入得  $\omega_c = \pm\sqrt{10}/2$ ,  $K_{rc} = 185/4$



### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

【解】(1)该系统有4个开环极点  $p_1=0, p_2=-3, p_{3,4}=-1 \pm j1$ ，由规则一知，该系统在s平面上有4条根轨迹，

由规则二知，起点是4个开环极点，终点在无穷远处。

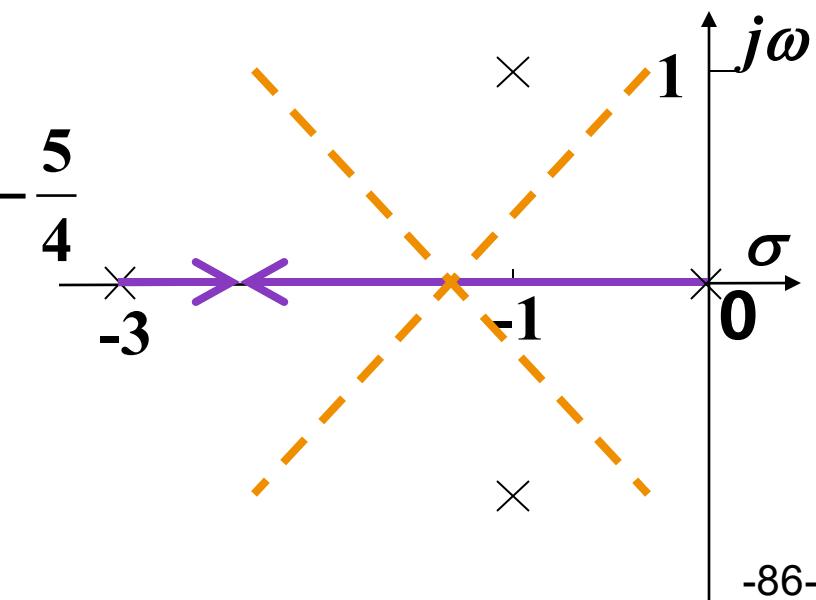
(2)由规则三知，实轴上由0到-3的线段是根轨迹。

(3)由规则四可求出4条根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-3 - 1 + j - 1 - j}{4 - 0} = -\frac{5}{4}$$

这4条渐近线的倾角为分别为

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi \quad \text{即 } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



### 三、根轨迹的绘制例题

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+3)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j}$$

$$\text{或 } A(d) = d^4 + 5d^3 + 8d^2 + 6d \\ B(d) = 1$$

即  $4d^3 + 15d^2 + 16d + 6 = 0$  解得  $d_1 = -2.3$   $d_{2,3} = -0.73 \pm 0.35j$

只有  $d_1$  为分离点。分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi$  即  $\frac{\pi}{2}$

**小贴士 求分离点方程的根**

(5)由规则五可求出复数极点的起始角

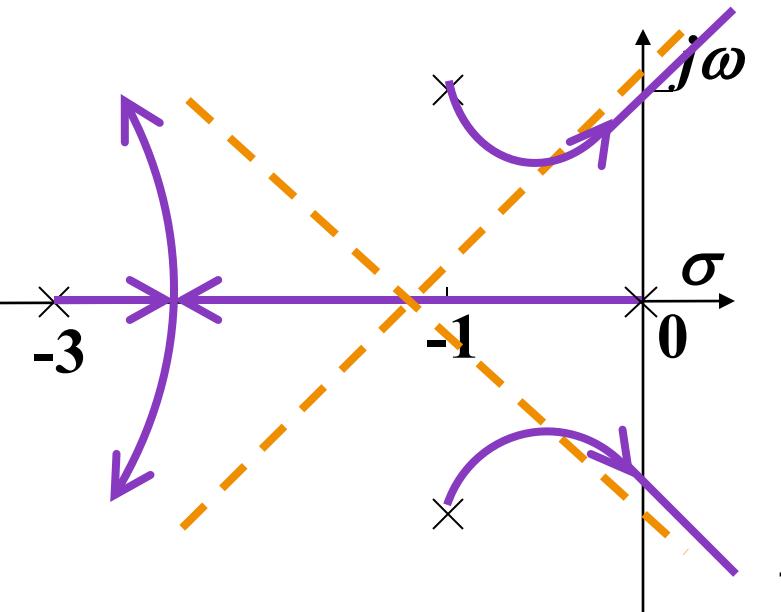
$$\begin{aligned}\theta_{p_3} &= (2k+1)\pi - \angle(p_3 - 0) - \angle(p_3 + 3) - \angle(p_3 + 1 + j) \\ &= 360^\circ + 180^\circ - 135^\circ - 26.57^\circ - 90^\circ = 288.43^\circ\end{aligned}$$

则  $p_4$  的起始角为  $71.57^\circ$ 。

(6)由规则七可求根轨迹与虚轴的交点。系统的特征方程为

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_r = 0$$

将  $s = j\omega$  带入得  $\omega_c = \pm 1.095$ ,  $K_{rc} = 8.16$



### 三、根轨迹的绘制例题

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+3)(s^2 + 2s + 2)}$$

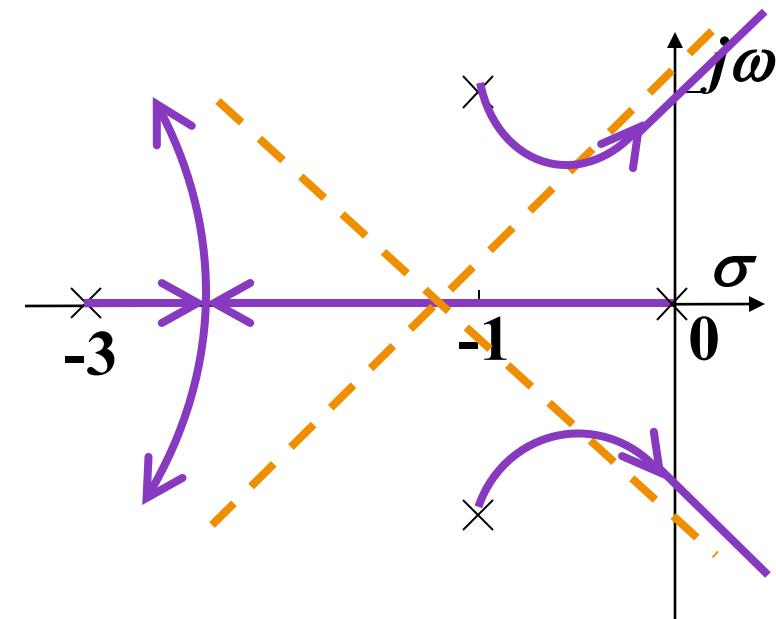
问题1：从复数极点出发的轨迹会不会穿过实轴趋向于另一端的渐近线？

不会！因为分离点为  $d_1 = -2.3$

实轴上其它点没有重根。

而  $d_1$  不可能是四重根，因为  $n-m>2$ ，四个极点之和为-5。

4个开环极点  $p_1=0, p_2=-3, p_{3,4}=-1\pm j1$



### 三、根轨迹的绘制例题

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 13)}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

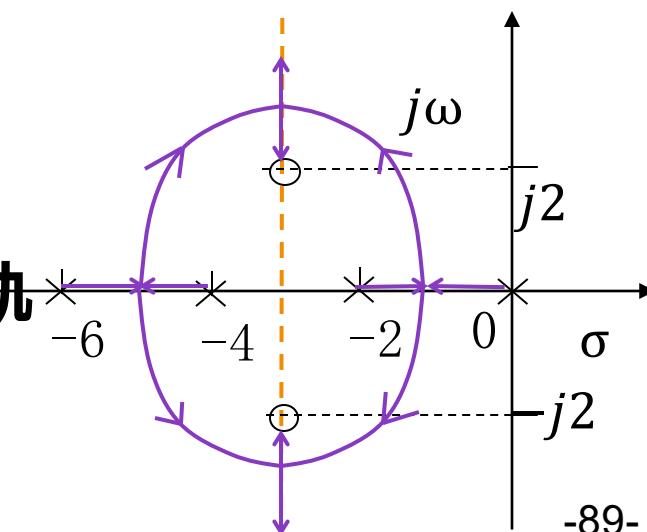
**【解】** 四个开环极点  $p_1 = 0$ 、 $p_2 = -2$ 、 $p_3 = -4$ 、 $p_4 = -6$ ，两个开环零点  $z_{1,2} = -3 \pm j2$ ，四条根轨迹分支。

实轴上  $[-6, -4]$ 、 $[-2, 0]$  是根轨迹。

两条渐近线与实轴交点  $\sigma_a = -3$ ，倾角  $\varphi_a = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 。

由分离点方程求解得  $d_1 = -3$ ， $d_2 = -5.0155$ ， $d_3 = -0.9845$ ，  
 $d_{4,5} = -3 \pm j3.4731$ 。除  $d_1$  外，其它 4 个根都是分离点。

根据相角条件，由于渐近线上开环零点向上和向下的部分均是根轨迹，因此  $d_{4,5}$  是分离点。



# 一、根轨迹的基本概念

已知系统的结构图，绘制该系统的根轨迹图。

【解】系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+3)(s+5)} = \frac{K}{s(s+3)}$$

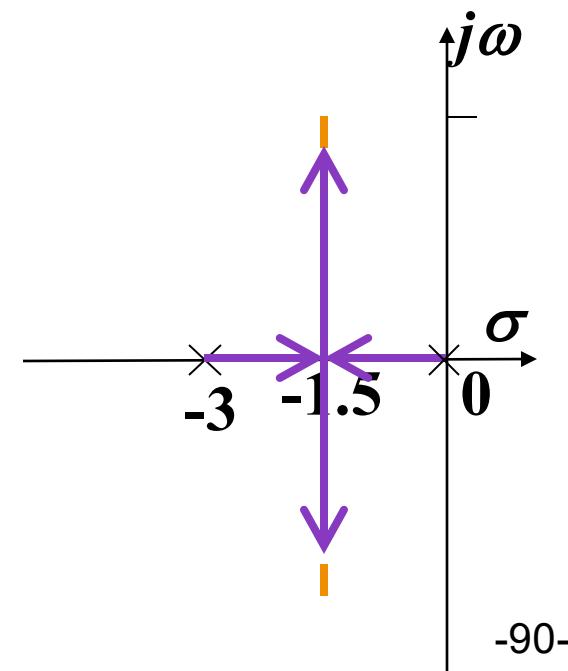
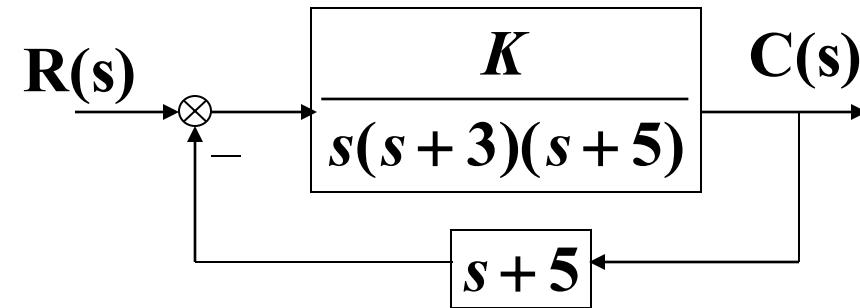
(1) 由规则三知，实轴上由0到-3的线段是根轨迹。

(2) 由规则四可求出根轨迹渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

(3) 由相角条件或规则八易得 $\sigma=-1.5$ 这条垂线是根轨迹。

?是否是完整的根轨迹？



### 三、根轨迹的绘制例题

已知系统的结构图，绘制该系统的根轨迹图。

【解】系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+3)(s+5)} = \frac{K}{s(s+3)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K}{s(s+3)(s+5)}}{1 + \frac{K(s+5)}{s(s+3)(s+5)}} = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

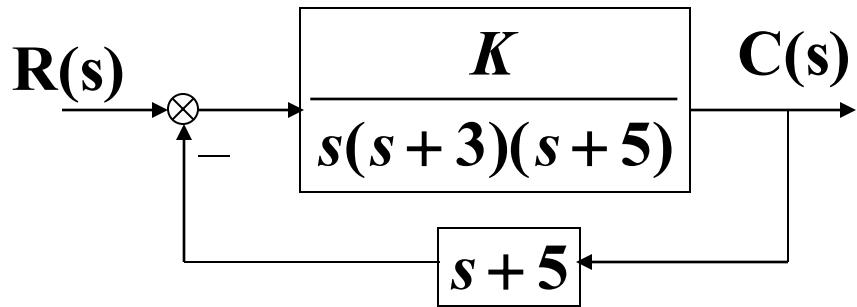
系统的闭环特征方程为

$$(s+5)(s^2 + 3s + K) = 0$$

$s=-5$ 这个特征根不随 $K$ 变化。开环传递函数中零极点相消后绘制的根

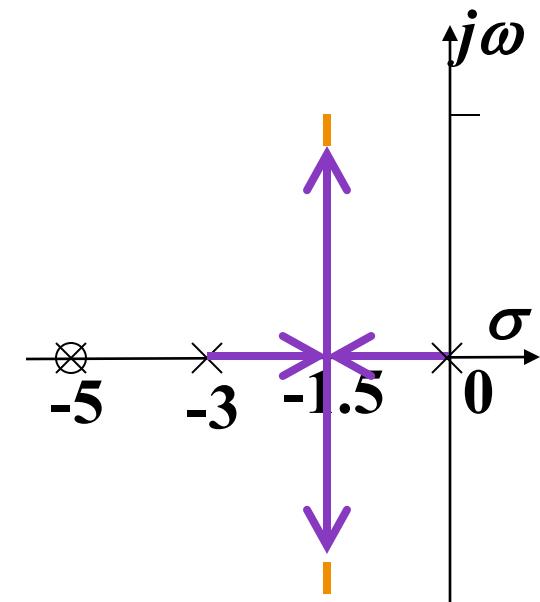
轨迹没有包含这个特征根。

前向通路传函中的分母不能被消掉。分子呢？



求闭环传函时无  
零点-5去相消

求开环传函时有  
零点-5导致相消



### 三、根轨迹的绘制例题

【解】系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)(s+4)} = \frac{K}{s(s+3)}$$

系统的闭环传递函数为

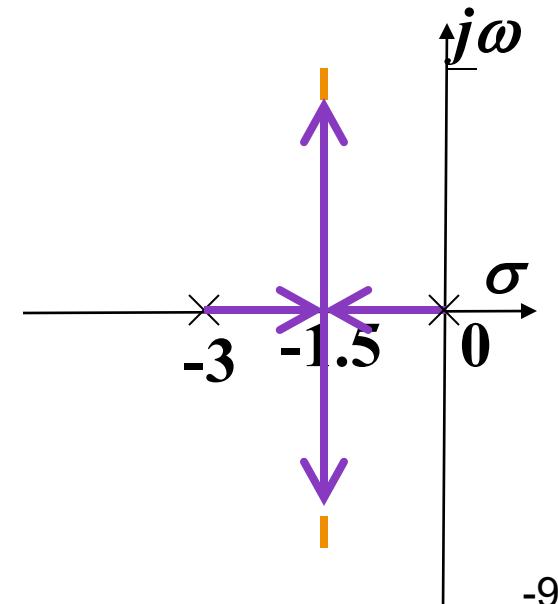
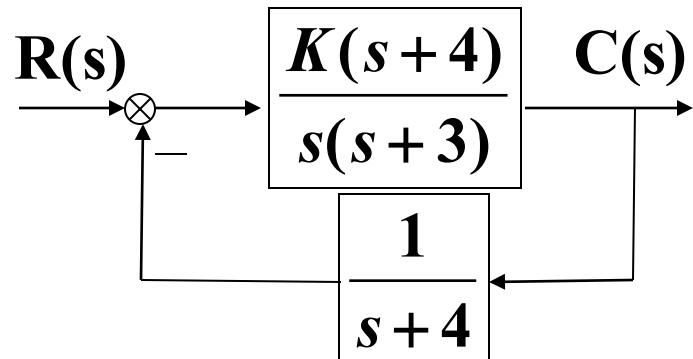
$$\Phi(s) = \frac{\frac{K(s+4)}{s(s+3)}}{1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)(s+4)}}$$

求闭环传函时有  
零点-4导致相消

求开环传函时有  
零点-4导致相消

分析：

- ✓ 闭环零点由前向通路零点和反馈通路极点构成。
- ✓ 上例中，开环极点-5与开环零点-5相消，但闭环零点无-5，因此由开环传递函数绘制的根轨迹图有误；
- ✓ 此例中，开环极点-4与开环零点-4相消，而闭环零点也有-4，因此相消不影响结果。



### 三、根轨迹的绘制例题

◆ 结论 (设前向通路传递函数为 $G(s)$ , 反馈通路传递函数为 $H(s)$ ) : 开环零极点存在相消时, 在绘制出根轨迹图后, 应检查是否有不应该消去的闭环极点。

方法是考虑闭环零极点是否存在对应的相消现象。

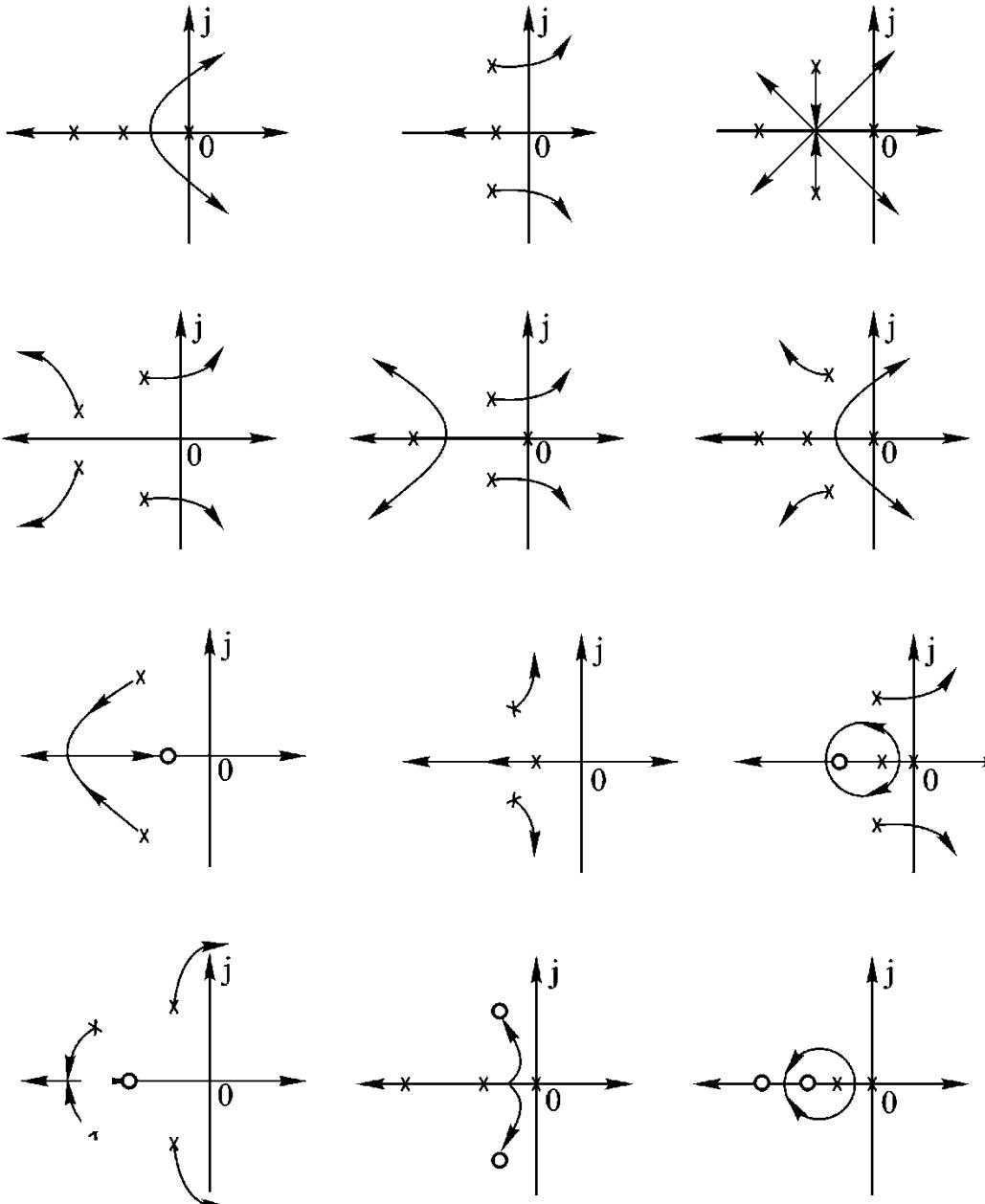
✓ 若存在对应的闭环零点与对应的闭环极点相消, 则此根轨迹图就是系统的根轨迹图。有三类相消现象属于此情况:  $G(s)$ 中的零点和极点相消;  $H(s)$ 中的零点和极点相消;  $G(s)$ 的零点和 $H(s)$ 的极点相消。

由于存在闭环零极点对消, 系统的闭环传递函数不再是系统的完全描述, 如果考虑局部干扰对系统的影响则应该具体分析。

✓ 若无闭环零点与对应的闭环极点相消, 则应在根轨迹图中增加一个根轨迹分支, 该分支从被消去的开环极点出发, 终止于对应的开环零点。有一类相消现象属于此情况:  $G(s)$ 中的极点和 $H(s)$ 中的零点相消。

### 三、根轨迹的绘制例题

常见闭环系统的根轨迹图



## 四、广义根轨迹

上述根轨迹的绘制是以开环根轨迹增益 $K_r$ 为变量、考虑 $K_r$ 由0到 $+\infty$ 变化时负反馈系统的根轨迹。其中，

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

- 1) 可变参数是 $K_r$ (0由变到 $+\infty$ );
- 2) 开环传递函数分子和分母中s的最高次幂系数为正;
- 3) 系统为负反馈。

实际系统中除开环根轨迹增益 $K_r$ 外，常常还要研究下列情况：

- ✓ 系统中其它参数变化对闭环特征根的影响；
- ✓ 开环传递函数分子或分母中s的最高次幂系数为负；
- ✓ 闭环控制系统是正反馈。
- ◆ 把其它这些根轨迹统称为**广义根轨迹**。
- ◆ 其中，以其它参数作为可变参数绘制的根轨迹叫**参数根轨迹**。

## 四、广义根轨迹

正反馈系统的特征方程是  $1 - G(s)H(s) = 0$

即  $G(s)H(s) = 1$

则s最高次幂为正时，正反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件分别为

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad \angle G(s)H(s) = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

•与负反馈系统根轨迹的幅值条件和相角条件相比：

✓ 正反馈系统和负反馈系统的幅值条件相同；

✓ 在开环传递函数分子和分母中s的最高次幂系数为正的前提下，负反馈系统的根轨迹遵循 $180^\circ$ 相角条件，正反馈系统的根轨迹遵循 $0^\circ$ 相角条件。分别称之为 $180^\circ$ 根轨迹和 $0^\circ$ 根轨迹。

✓ 对 $0^\circ$ 根轨迹，其绘制规则中与相角条件有关的三条规则需要作相应修改。

$$K_r \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 1$$

## 四、广义根轨迹

◆需要修改的规则包括：

**规则三：** **0°根轨迹**在实轴上的根轨迹是那些在其右侧的开环实零点和开环实极点之和为偶数的线段。

**规则四：**当开环极点数n大于开环零点数m时，**0°根轨迹**有n-m条根轨迹分支沿着n-m条渐近线趋向无穷远处，这n-m条渐近线在实轴上相交于一点，交点坐标 $\sigma_a$ 与180°根轨迹相同。

这n-m条渐近线的倾角为 $\varphi_a = \frac{2k}{n-m}\pi, k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$

**规则五：** **0°根轨迹**的起始角和终止角为

$$\theta_{p_l} = 2k\pi + \sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(p_l - p_i)$$

$$\theta_{z_l} = 2k\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \angle(z_l - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_l - p_i)$$

？分离角规则不变？

！虽然规则六没有改变，但在确定分离点时，应考虑规则三变化的影响。

## 四、广义根轨迹

【证明】有正反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

闭环特征方程  $D(s) = \prod(s - p_i) - K_r \prod(s - z_j) = 0$

已知该系统根轨迹有分离点d，且是l重根，此时  $K_r = K_g$

另有正反馈系统的开环传递函数

$$G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j)}$$

闭环特征方程  $D_1(s) = \prod(s - p_i) - (K_{r1} + K_g) \prod(s - z_j) = 0$

显然， $K_{r1}=0$  时，对应  $K_r = K_g$  时的闭环极点。

$K_{r1} = \infty$  时，对应  $K_r = \infty$  时的闭环极点。

因此， $G_1(s)$ 对应的根轨迹，是原 $G(s)$ 根轨迹从分离点( $K_r$ 为 $K_g$ 时)往后( $K_r$ 从 $K_g$ 继续增大到 $\infty$ )的根轨迹。

则 $G_1(s)$ 根轨迹中开环极点d的起始角，即为原根轨迹离开分离点的切线方向的倾角。

## 四、广义根轨迹

正反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$

闭环特征方程  $D(s) = \prod(s - p_i) - K_r \prod(s - z_j) = 0$

已知该系统根轨迹有分离点d，且是l重根，此时  $K_r = K_g$

另有负反馈系统的

开环传递函数

闭环特征方程

$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

$$D_2(s) = \prod(s - p_i) - \frac{K_{r2}}{1 + K_{r2}} K_g \prod(s - z_j) = 0$$

显然， $K_{r2}=0$  时，对应  $K_r = 0$  时正反馈系统的闭环极点。

$K_{r2} = \infty$  时，对应  $K_r = K_g$  时正反馈系统的闭环极点。

因此， $G_2(s)$ 对应的根轨迹，是原 $G(s)$ 根轨迹 $K_r$ 从0增大到 $K_g$ 时（分离点）的根轨迹。

则 $G_2(s)$ 根轨迹中开环零点d的终止角，即为原根轨迹进入分离点的切线方向的倾角。

## 四、广义根轨迹

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

$$G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j)}$$

$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

对于正反馈系统的 $G_1(s)$ , 分离点d是开环极点, 是根轨迹起点, 是l重根, 因此其起始角为

$$\theta_d^q = \frac{1}{l} [2k\pi + \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d)]$$

原开环传递函数的零点

$K_r$ 为 $K_g$ 时的闭环极点(d除外)

对于负反馈系统的 $G_2(s)$ , 分离点d是开环零点, 是根轨迹终点, 是l重根, 终止角为

$$\theta_d^z = \frac{1}{l} [(2k + 1)\pi - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d) + \sum_{i=1}^n \angle(d - n_i)]$$

$K_r$ 为 $K_g$ 时的闭环极点(d除外)

原开环传递函数的极点

## 四、广义根轨迹

$$G(s) = \frac{K_r \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$$

$$G_1(s) = \frac{K_{r1} \prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j)}$$

$$G_2(s) = \frac{K_{r2}(\prod(s - p_i) - K_g \prod(s - z_j))}{\prod(s - p_i)}$$

$$\theta_d^q = \frac{1}{l} [2k\pi + \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j) - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d)]$$

$$\theta_d^z = \frac{1}{l} [(2k+1)\pi - \sum_{i=1}^{n-l} \angle(d - p_i^d) + \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i)]$$

综上,分离角即为 $G_1(s)$ 根轨迹中开环极点d的起始角减去 $G_2(s)$ 根轨迹中开环零点d的终止角:

$$\theta_d = \theta_d^z - \theta_d^q$$

$$= \frac{1}{l} [(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^n \angle(d - p_i) - \sum_{j=1}^m \angle(d - z_j)] = \frac{(2k+1)\pi}{l}$$

得证。

## 四、广义根轨迹

已知正反馈系统的开环传递函数，试绘制  $K_r=0 \rightarrow \infty$  变化时该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)}$$

【解】该系统的开环传函与“根轨迹的绘制 例1(65页)”相同。

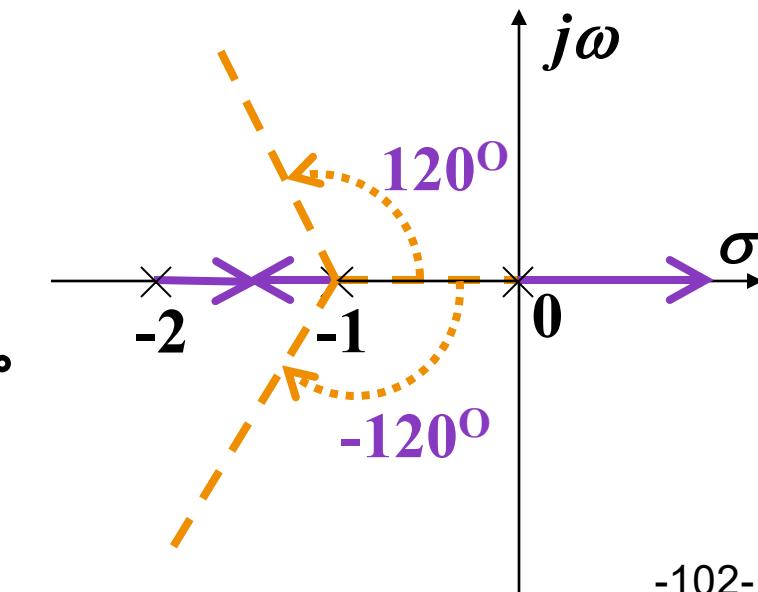
由修改后的规则三知，实轴上的根轨迹是由0至 $+\infty$ 线段和由-1至-2线段。

由修改后的规则四知，渐近线与实轴的交点是-1，渐近线的倾角分别是 $0^\circ(k=0)$ 、 $120^\circ(k=1)$ 和 $240^\circ(k=2)$ 。

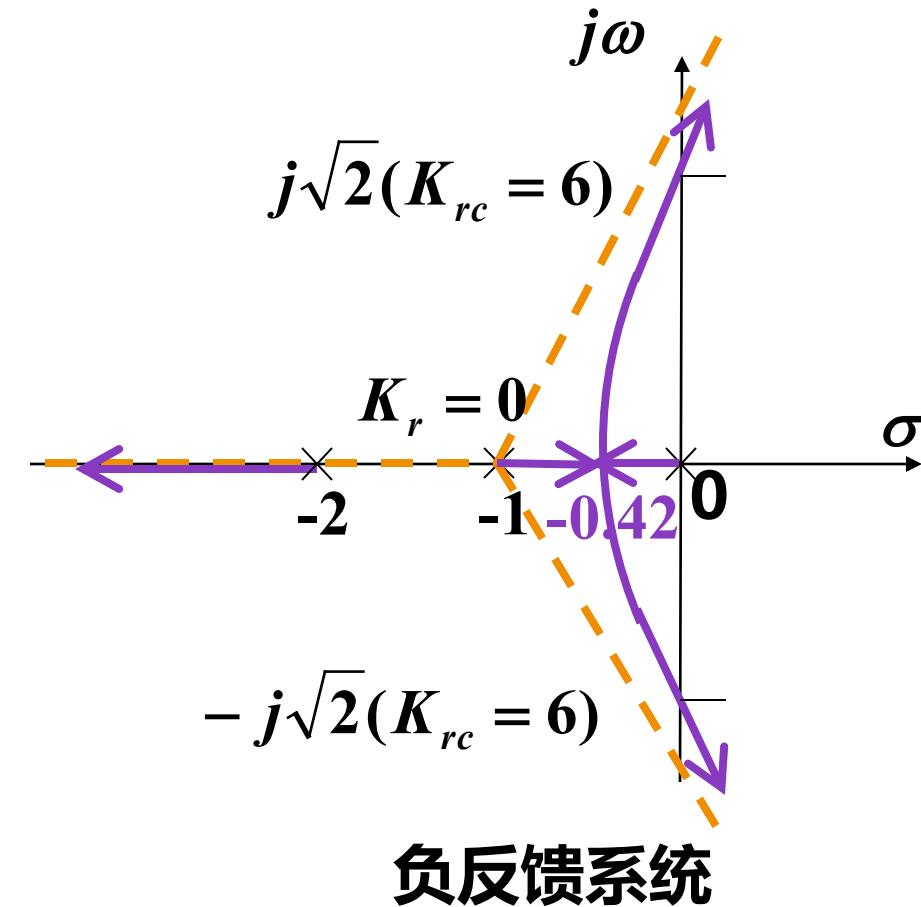
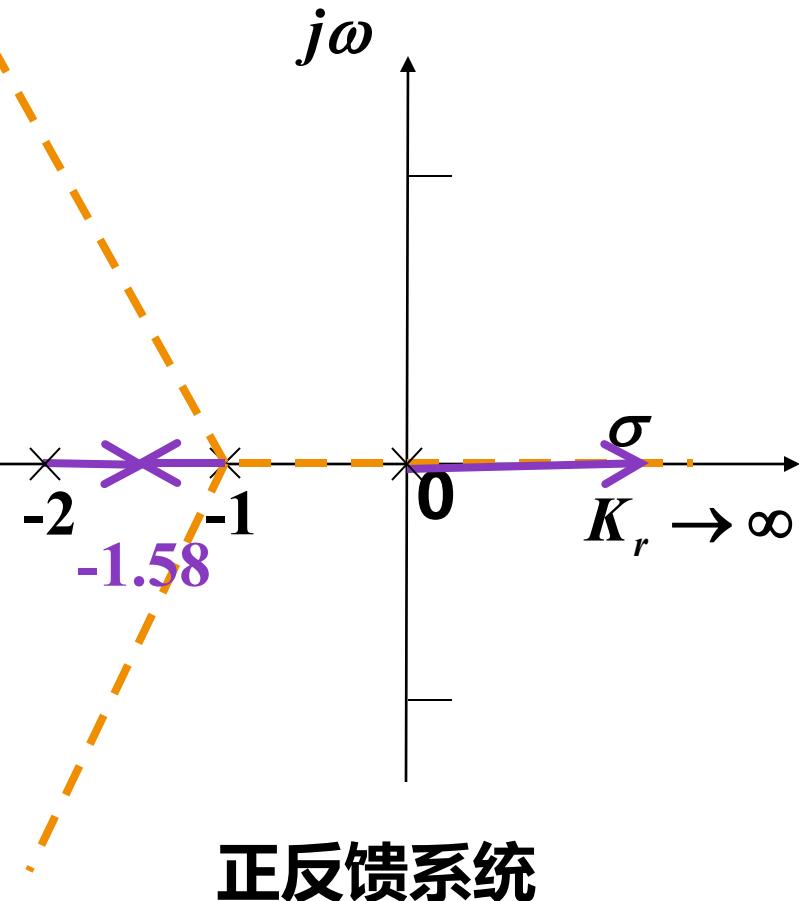
由规则五根轨迹的分离点方程求出分离点为

$$d_1 = -0.42 \quad d_2 = -1.58$$

与负反馈的例子不同的是，这里  $d_1$  不在实轴的根轨迹上，舍去。  
 $d_2$  为分离点。



## 四、广义根轨迹



## 四、广义根轨迹

已知正反馈系统的开环传递函数，绘制  $K=0 \rightarrow \infty$  变化时系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2 + 2s + 2)}$$

【解】该系统根轨迹方程为  $G(s)H(s)=1$ 。应利用  $0^\circ$  根轨迹绘制规则绘制。

- ✓ 由修改后的规则三知，实轴上的根轨迹是由 -3 至  $-\infty$  线段和由 -2 至  $+\infty$  线段。
- ✓ 由修改后的规则五知，两个复数极点的起始角为

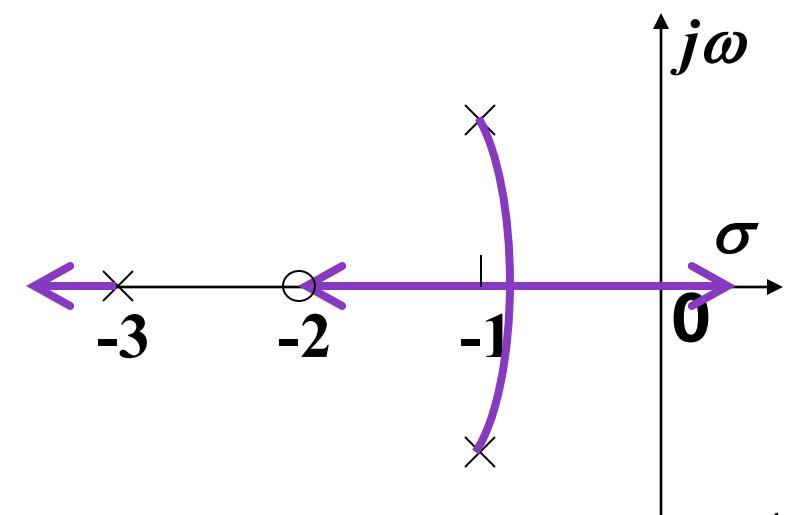
$$\begin{aligned}\theta_{p_1} &= 2k\pi + \angle(p_1 - z_1) - \sum_{i=2}^3 \angle(p_1 - p_i) \quad \theta_{p_2} = 71.57^\circ \\ &= 360^\circ + 45^\circ - 90^\circ - 26.57^\circ = 288.43^\circ\end{aligned}$$

- ✓ 分离点坐标

由  $2d^3 + 11d^2 + 20d + 10 = 0$

$$d_1 = -0.8026, d_{2,3} = -2.3487 \pm j0.8447$$

$d_1$  为分离点。分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi = \frac{\pi}{2}$



## 四、广义根轨迹

已知正反馈系统开环传递函数，绘制  $K_r = 0 \rightarrow \infty$  变化时系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+2)}{(3-s)(s^2+2s+2)}$$

【解】闭环特征方程  $\frac{K_r(s+2)}{(3-s)(s^2+2s+2)} = 1$ ，根轨迹方程  $\frac{K_r(s+2)}{(s-3)(s^2+2s+2)} = -1$ ，需采用  $180^\circ$  根轨迹绘制规则。

3个开环极点  $p_1 = 3$ ,  $p_{2,3} = -1 \pm j$ 。一个开环零点  $z_1 = -2$ 。

实轴上由3到-2的线段是根轨迹。

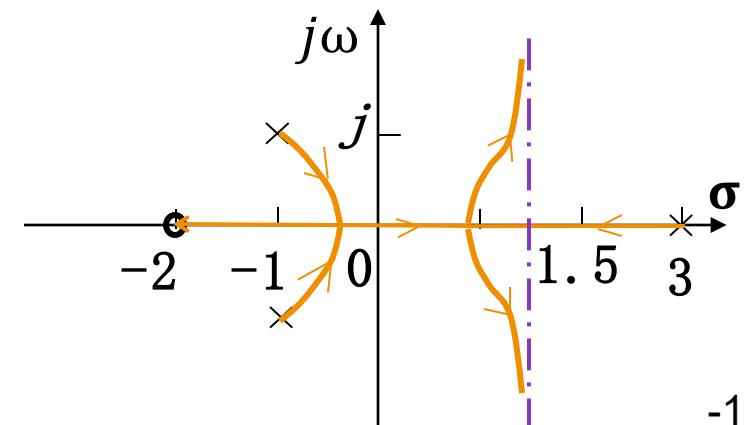
渐近线与实轴的交点  $\sigma_a = 1.5$ , 倾角  $\varphi_a = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 。

$p_2$  的起始角  $\theta_{p_2} = (2k+1)\pi + \angle(p_3 + 2) - \angle(p_3 - 3) - \angle(p_3 + 1 - j) = (2k+1)\pi + 45^\circ - 166^\circ - 90^\circ = 329^\circ$ ,

则  $\theta_{p_3} = 31^\circ$ 。由分离点方程  $2d^3 + 5d^2 - 4d - 2 = 0$

得  $d_1 = -3.0485$ ,  $d_2 = 0.9092$ ,  $d_3 = -0.3608$ ,

$d_2$  和  $d_3$  均是分离点。



## 四、广义根轨迹

◆ 绘制参数根轨迹首先要求出系统的等效开环传递函数。

设系统的闭环特征方程为  $1 \pm G(s)H(s) = 0$ , 参数  $A: 0 \rightarrow \infty$

将含有参数  $A$  的项合并得  $1 \pm G(s)H(s) = Q(s) \pm AP(s) = 0$

其中  $P(s)$  和  $Q(s)$  的最高次幂系数均为正。两边除以  $Q(s)$  得  $1 \pm A \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$ , 则  $A \frac{P(s)}{Q(s)}$  即为系统的等效开环传递函数。

$A \frac{P(s)}{Q(s)} = \pm 1$  为等效的根轨迹方程。

!  $1 \pm G(s)H(s)$  和  $Q(s) \pm AP(s)$  中的 “ $\pm$ ” 并非必需一一对应。

! 根轨迹方程取  $+1$ , 则用  $0^\circ$  根轨迹绘制规则; 取  $-1$ , 则用  $180^\circ$  根轨迹绘制规则。

! 等效开环传递函数描述的系统与原系统有相同的闭环极点, 但闭环零点一般并不相同。

## 四、广义根轨迹

已知闭环控制系统的开环传递函数，试绘制以时间常数T为可变参数的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 2)}$$

【解】(1)该系统的特征方程为  $s(Ts + 1)(s + 2) + 2 = 0$

$$Ts^2(s + 2) + s^2 + 2s + 2 = 0$$

用  $s^2 + 2s + 2$  除等式两边得  $1 + \frac{Ts^2(s + 2)}{s^2 + 2s + 2} = 0$

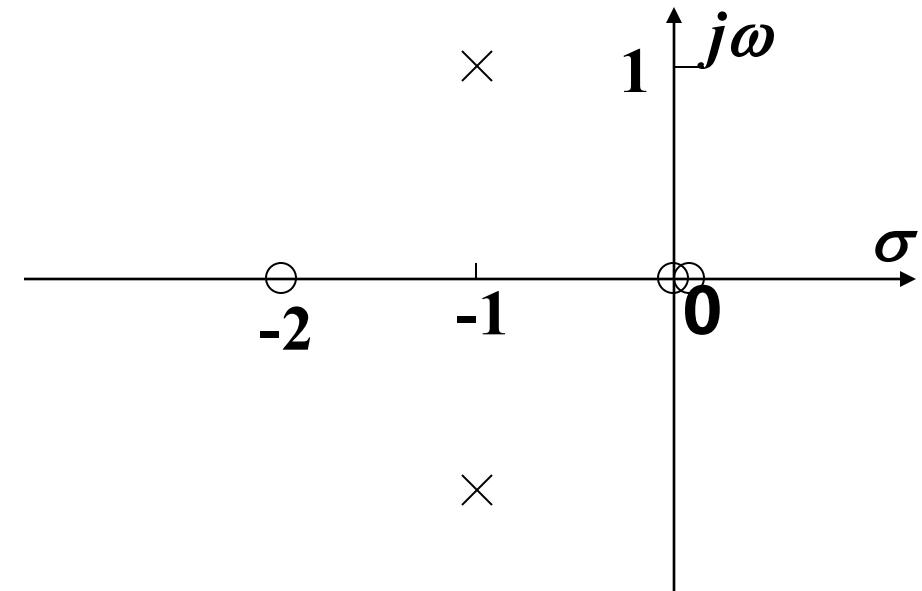
令系统的等效开环传递函数

$$G'(s)H'(s) = \frac{Ts^2(s + 2)}{s^2 + 2s + 2}$$

则有  $1 + G'(s)H'(s) = 0$

因此采用绘制  $180^\circ$  根轨迹的规则绘制。

(2) 等效系统有三个开环零点  $z_{1,2}=0, z_3=-2$  和 2 个开环极点  $p_{1,2}=-1 \pm j1$ 。



## 四、广义根轨迹

由规则一和二知系统在s平面上有3条根轨迹，起点有2个是开环极点，一个在无穷远处。  
终点在3个零点。

由规则三实轴上的根轨迹为 $-\infty$ 到 $-2$ 。  
(3)由规则五求两个起始角

$$\theta_{p_l} = 180^\circ + \sum_{j=1}^3 \angle(p_l - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^2 \angle(p_l - p_i)$$

$$\theta_{p_1} = 180^\circ + 45^\circ + 135^\circ + 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 360^\circ - \theta_{p_1} = 315^\circ$$

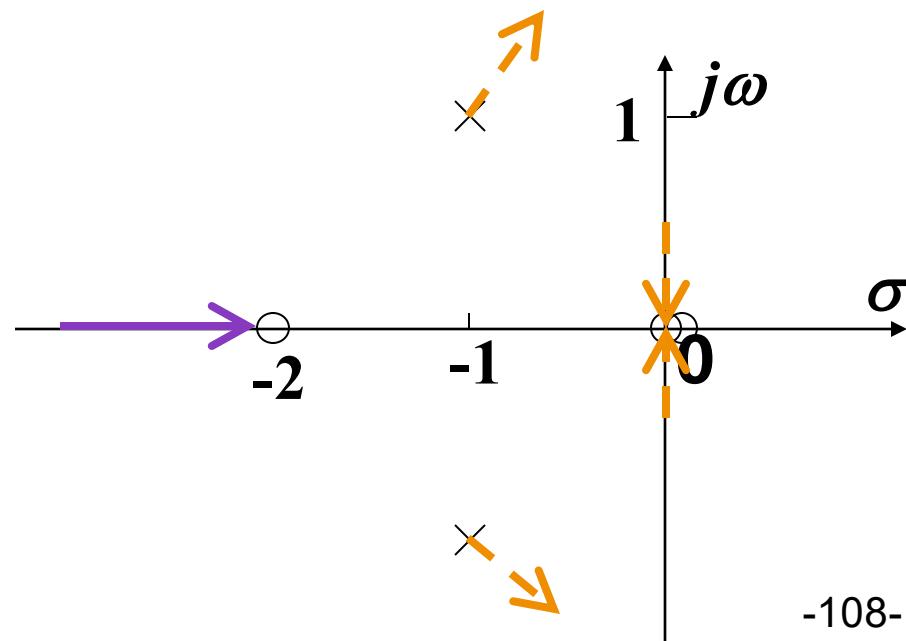
终止角

$$2\theta_{z_1} = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1, 2}}^3 \angle(z_1 - z_j) + \sum_{i=1}^2 \angle(z_1 - p_i)$$

$$\theta_{z_1} = \theta_{z_2}$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ, k = 0$$

$$\text{或 } = \frac{1}{2}(540^\circ - 45^\circ + 45^\circ) = 270^\circ, k = 1$$



## 四、广义根轨迹

(4)求与虚轴的交点。将 $s=j\omega$ 带入特征方程

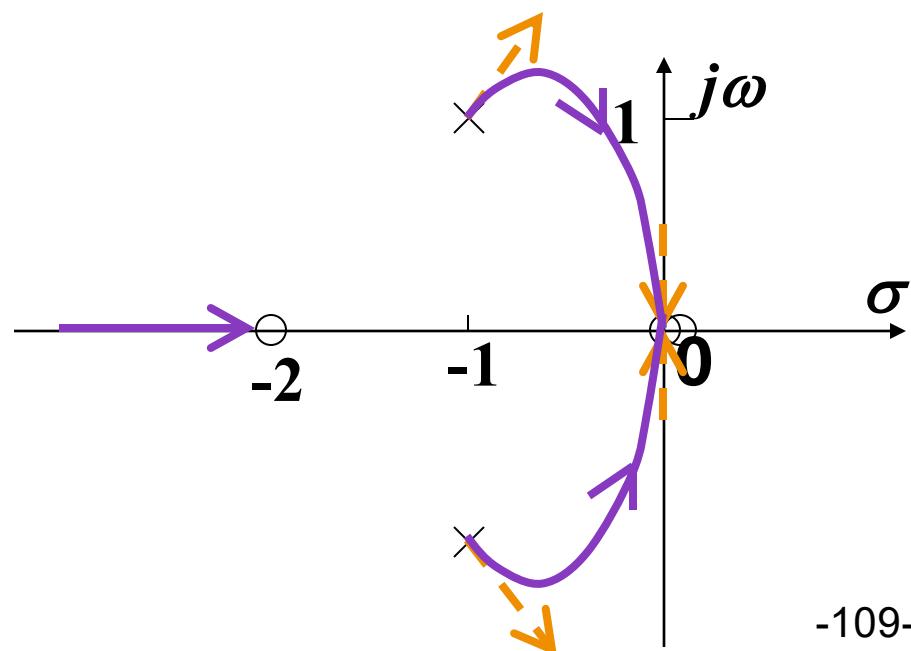
$$Ts^2(s+2)+s^2+2s+2=0$$

$$2-(2T+1)\omega^2+j(2\omega-T\omega^3)=0$$

分别列出实部和虚部方程  $2-(2T+1)\omega^2=0$   $2\omega-T\omega^3=0$

则  $T = \frac{2}{\omega^2} - 2 = \omega^2$  无解。说明与虚轴无交点。

因此可以绘制根轨迹如图。



## 四、广义根轨迹-非最小相位系统

所有开环零点和开环极点都位于S平面左半部的(负)反馈控制系统叫最小相位系统。

非最小相位系统指在S右半平面有开环零极点的(负)反馈控制系统。

最小相位系统一词源于对系统频率特性的描述，即在正弦信号的作用下，具有相同幅频特性的系统（或环节），最小相位系统的相位移最小，而非最小相位系统的相位移大于最小相位系统的相位移。

本章前面介绍的示例都是最小相位系统。

(负反馈) 非最小相位系统的绘制规则要根据特征方程来确定。方法是：

将系统的开环传递函数写成标准形式，为保证分子和分母中s的最高次幂系数为正，如果有负号提出，则按 $0^\circ$ 根轨迹的规则作图，否则按 $180^\circ$ 根轨迹规则作图。

## 四、广义根轨迹-非最小相位系统

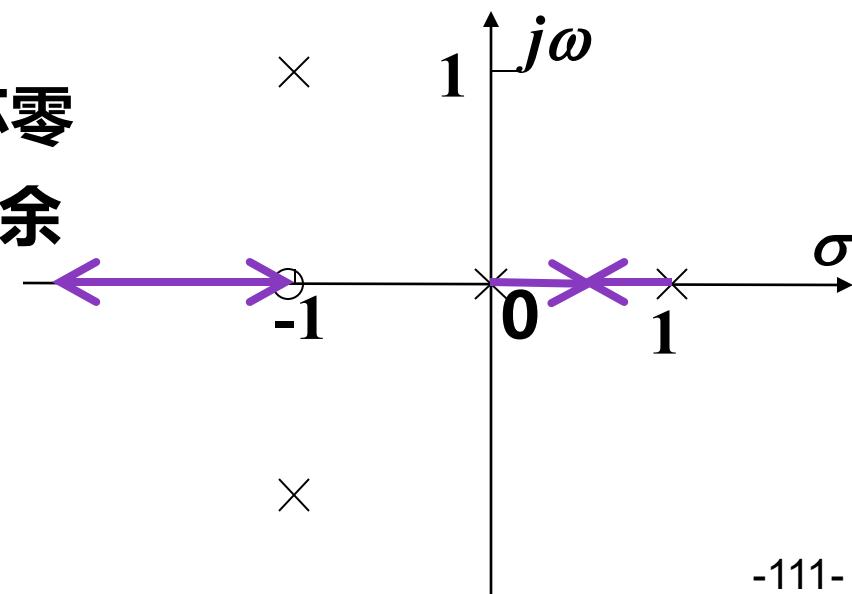
已知负反馈系统的开环传递函数，试绘制该系统的根轨迹图。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 2s + 2)}$$

【解】系统有一个位于s平面右半部的开环极点1，是非最小相位系统。

将分子和分母中s的最高次幂系数化为正，**不需要有负号提出**，闭环特征方程仍然是 $G(s)H(s)=-1$ 。因此按 $180^\circ$ 根轨迹规则作图。

(1) 系统有四个开环极点 $p_1=0, p_2=1, p_{3,4}=-1 \pm j1$ ，有一个开环零点 $z_1=-1$ ，由规则1，根轨迹的一个终点是有限开环零点，其余三个终点均在无穷远处(无限零点)。



(2) 由规则三，实轴上的根轨迹是0至1线段和-1至-∞线段。

## 四、广义根轨迹-非最小相位系统

(3)由规则四, 3条渐近线在实轴上相交于一点, 交点坐标为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = 0$$

这3条渐近线的倾角分别为  $\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi$

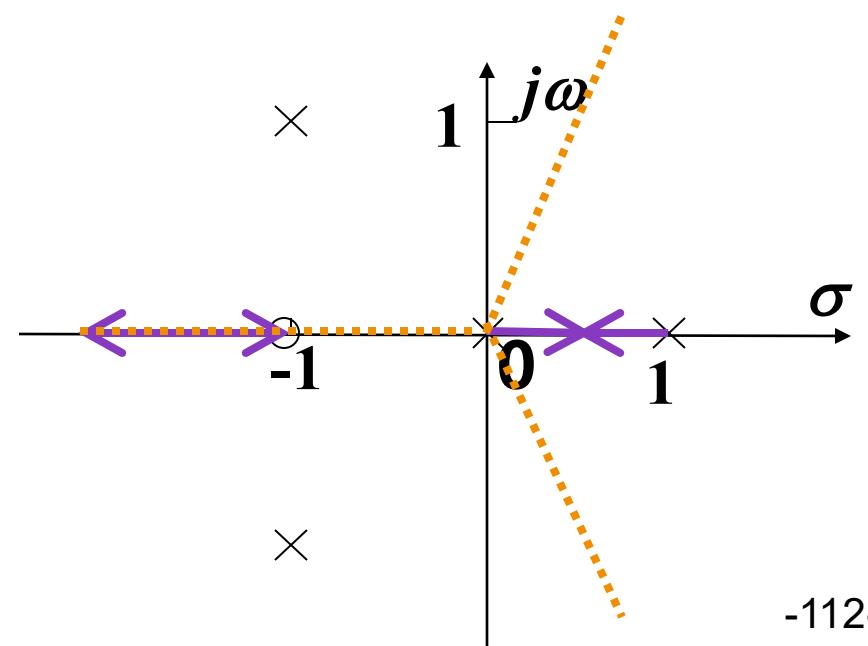
$$k=0 \text{时 } \varphi_a = \frac{\pi}{3} \quad k=1 \text{时 } \varphi_a = \pi \quad k=2 \text{时 } \varphi_a = \frac{5\pi}{3}$$

(4)根轨迹的分离点坐标是下列方程的解:

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i}$$

$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{1}{d+1-j1} + \frac{1}{d+1+j1}$$

$$\text{即 } 3d^4 + 6d^3 + 3d^2 - 2 = 0$$



## 四、广义根轨迹-非最小相位系统

(4)根轨迹的分离点  $3d^4 + 6d^3 + 3d^2 - 2 = 0$

解方程得到4个根分别为  $d_1 = 0.55 \quad d_2 = -1.55 \quad d_{3,4} = -0.5 \pm j0.75$

由图知  $d_1$  和  $d_2$  为根轨迹的分离点。

分离角为  $\frac{1}{l}(2k+1)\pi$  则四条根轨迹的分离角分别为  $\frac{\pi}{2}$

(5)根轨迹的起始角  $\theta_{p_l} = 180^\circ + \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \angle(s - p_i)$

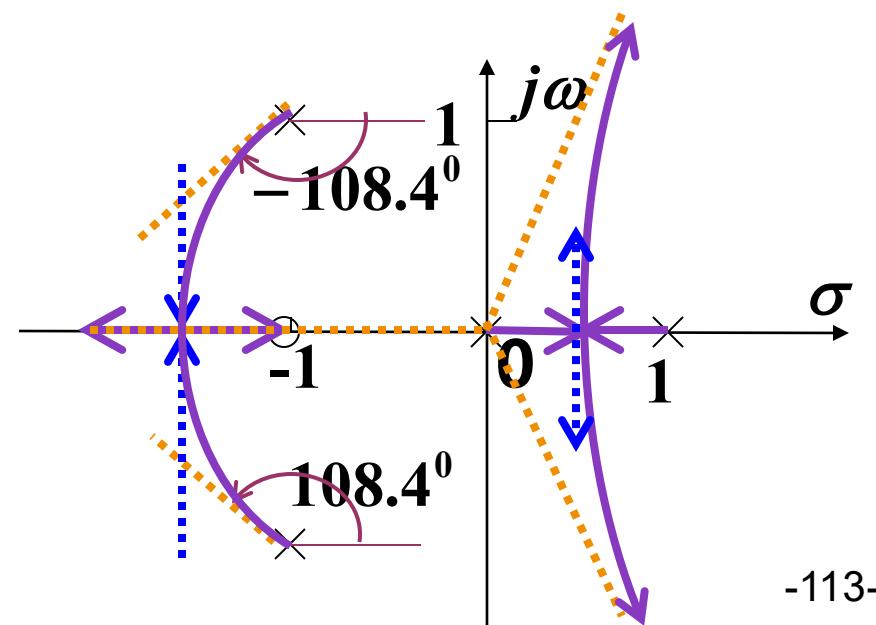
$$\theta_{p_3} = 360^\circ + 180^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 135^\circ - (180^\circ - \tan^{-1} 0.5)$$

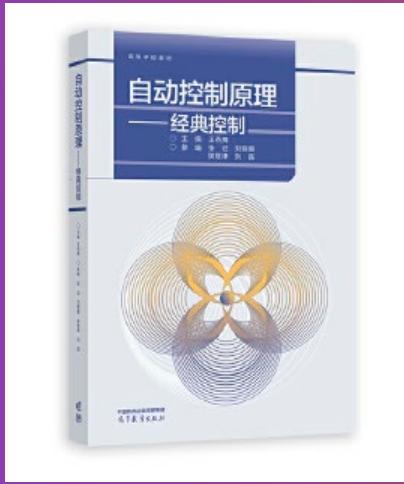
$$= 360^\circ + 180^\circ - 135^\circ - 153.4^\circ$$

$$= 251.6^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 108.4^\circ$$

因此绘制根轨迹如图。





## 第四章：根轨迹

# 第16讲 根轨迹-Part 3

### Root Locus-Part 3

本讲内容

五、根轨迹综合运用

## 五、根轨迹综合运用

- 绘制根轨迹图的第一步，就是判断采用哪套规则。

方法是：

- 根据系统是正反馈还是负反馈，写出特征方程的表达式。
- 将特征方程中分子和分母 $s$ 的最高次幂系数化为正，得到等效的开环传递函数。
- 如果根轨迹方程是：等效开环传递函数=1，则根据等效开环传递函数、按 $0^\circ$ 根轨迹的规则作图，

如果根轨迹方程是：等效开环传递函数=-1，则根据等效开环传递函数、按 $180^\circ$ 根轨迹绘制规则作图。

- 绘制根轨迹的规则只是指导性规则，有时可能无法准确判断。

## 五、根轨迹综合运用

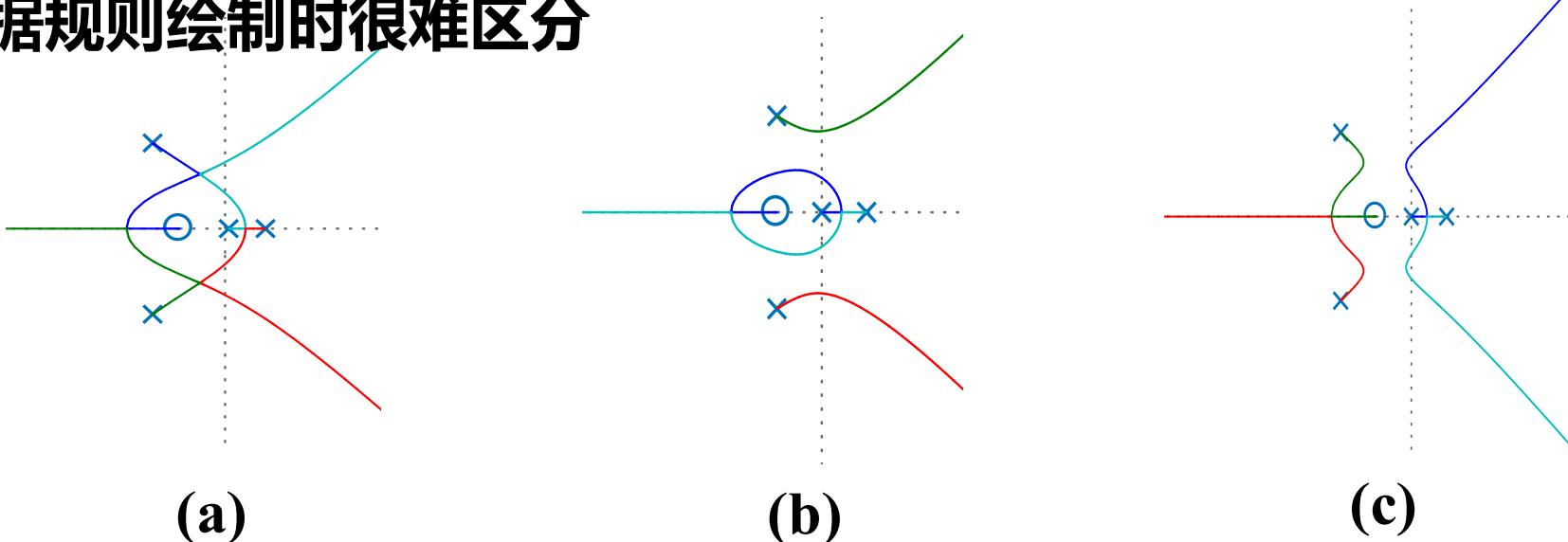
已知某控制系统的开环传递函数，试绘制以Kr为可变参数的根轨迹。

$$G(s) = \frac{K_r(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 2as + a^2 + 12)}$$

口 改变a的大小就会改变开环复数极点的实部。

- ✓ 当 $a=1.0618$ 时，如图(a)，存在复数分离点，该图可根据绘制规则概略绘制出来。
- ✓ 当 $a<1.0618$ 时，例如 $a=1$ ，如图(b)，
- ✓ 当 $a>1.0618$ 时，例如 $a=2$ ，如图(c)，

后两个图根据规则绘制时很难区分



# 五、根轨迹综合运用

◆ 根轨迹图分析系统性能

➤ 稳定性：与虚轴的交点

✓ 稳定；不稳定；有条件稳定。

➤ 动态性能：

□ 标准二阶系统：

✓ 阻尼比  $\zeta$  与闭环特征根的相角对应

✓ 自然振荡角频率  $\omega_n$  与闭环特征根的幅值对应

✓ 上升时间、峰值时间与闭环特征根的虚部  $\omega_d$  有关

✓ 调整时间与闭环特征根的实部  $\zeta \omega_n$  有关

□ 高阶系统：

✓ 主导极点法：满足主导极点条件时，误差很小。

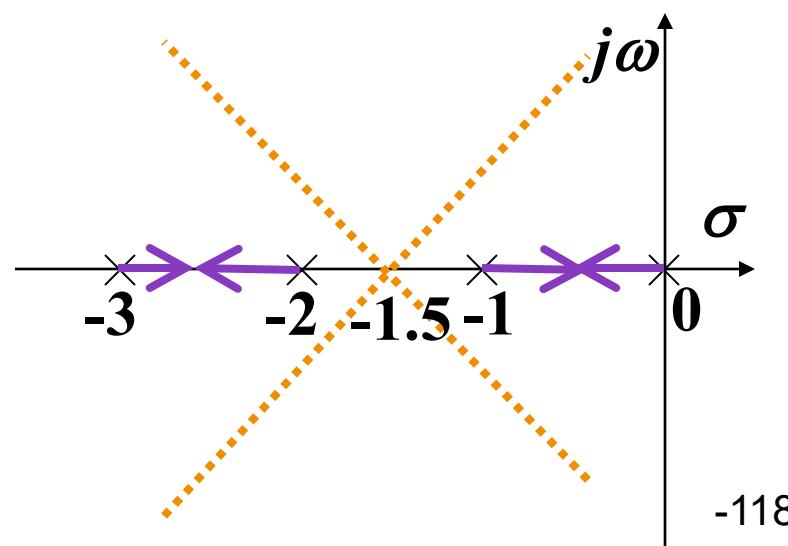
## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K_r}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ ，试根据系统的根轨迹分析系统的稳定性，计算闭环主导极点具有阻尼比  $\zeta = 0.5$  时系统的动态性能指标。

【解】(1) 绘制系统的根轨迹图。

起点分别是系统的四个开环极点。实轴上的根轨迹是由0至-1线段和由-2至-3线段；

四条根轨迹都趋向无穷远处，渐近线与实轴的交点为-1.5，渐近线的倾角分别是  $45^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $225^\circ$  和  $315^\circ$ 。



## 五、根轨迹综合运用

根轨迹在实轴的分离点为  $d_1 = -0.38, d_2 = -2.62$ 。

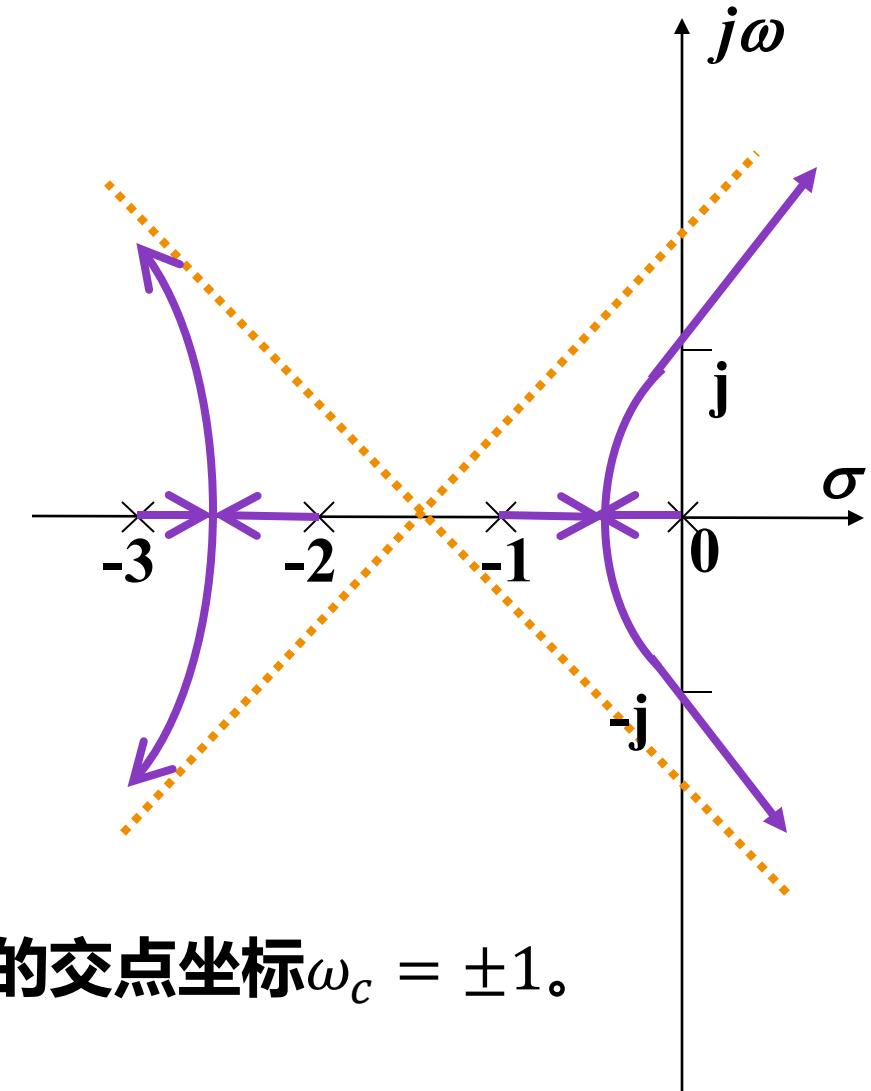
由劳斯判据求根轨迹与虚轴的交点，列出劳斯阵列：

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 11 & K_r \\ s^3 & 6 & 6 & K_r \\ s^2 & 10 & & K_r \\ s^1 & \frac{60 - 6K_r}{10} & & \\ s^0 & K_r & & \end{array}$$

由  $s^1$  行的首项系数为 0 求得  $K_{rc} = 10$ ,

由  $s^2$  行构成辅助方程  $10s^2 + K_r = 0$  求得根轨迹与虚轴的交点坐标  $\omega_c = \pm 1$ 。

从而绘制出根轨迹的大致图形。



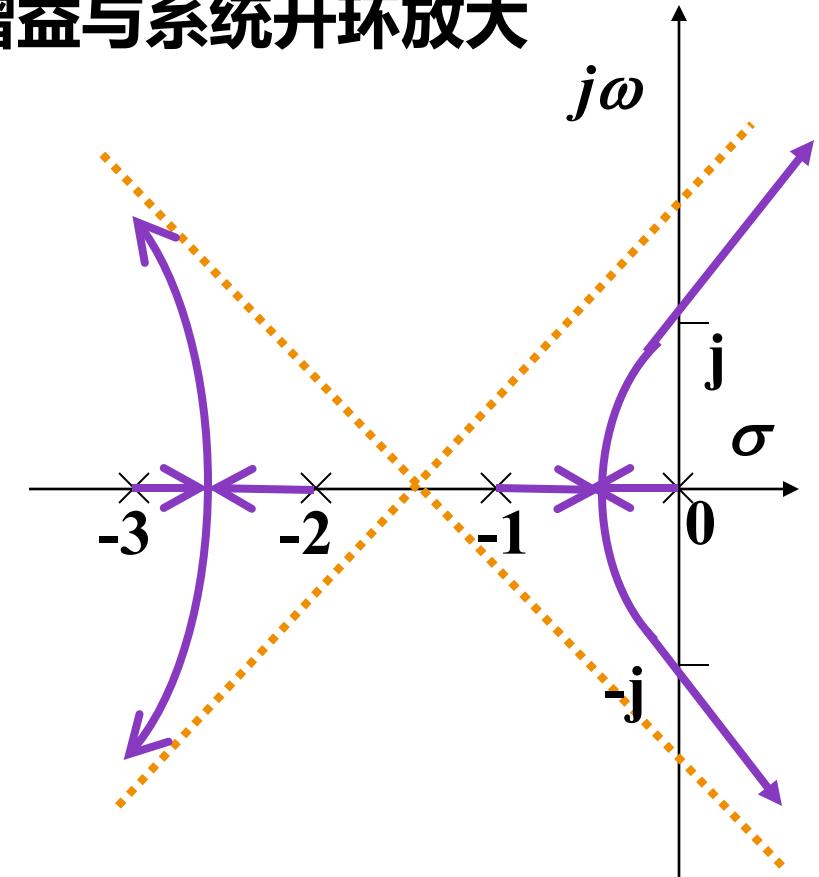
# 五、根轨迹综合运用

## (2) 分析系统的稳定性

由系统临界开环根轨迹增益  $K_{rc} = 10$ , 根据开环根轨迹增益与系统开环放大系数之间的关系可求出系统稳定的临界开环放大系数

$$K = K_r \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^{n-v} (-p_i)} = 10 \frac{1}{6} = 1.67$$

因此, 要使系统稳定, 开环增益  $K$  应该小于 1.67。



# 五、根轨迹综合运用

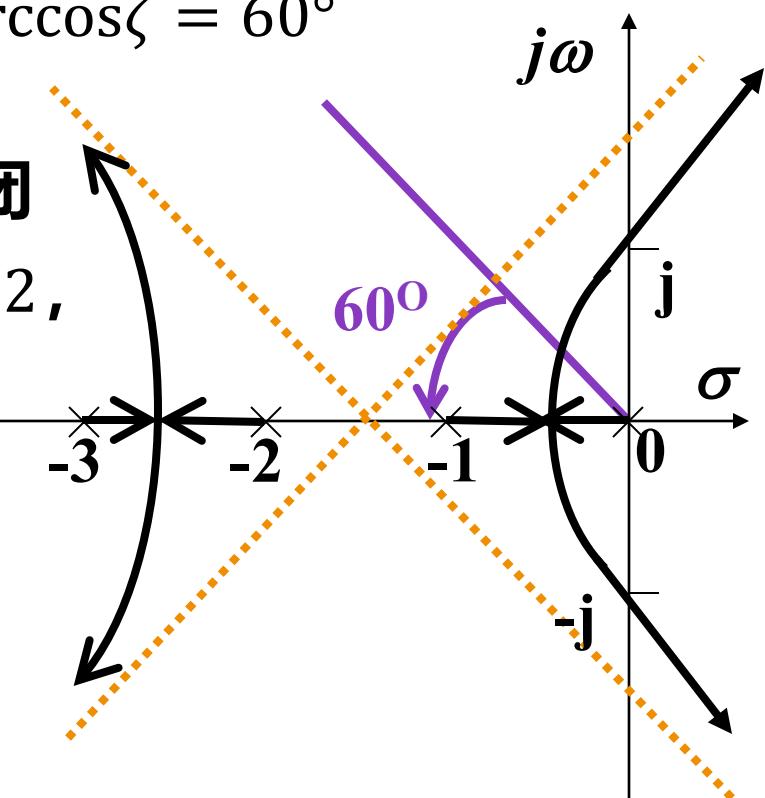
## (3) 系统动态性能指标

首先求出满足阻尼比 $\zeta=0.5$ 时系统的主导极点 $s_1$ 和 $s_2$ 的位置。

方法：作等阻尼比线 $OA$ ，使 $OA$ 与实轴负方向的夹角 $\theta = \arccos\zeta = 60^\circ$

等阻尼比线 $OA$ 与根轨迹的交点 即为满足系统要求的一个闭环极点。测得交点在 $s$ 平面上的坐标位置为 $s_1 = -0.3 + j0.52$ ，

由根轨迹的对称性，得到另一共轭复数极点为 $s_2 = -0.3 - j0.52$ 。



## 五、根轨迹综合运用

$$s_1 = -0.3 + j0.52, \quad s_2 = -0.3 - j0.52.$$

由幅值条件可求出闭环极点 $s_1$ 所对应的系统开环根轨迹增益为

$$K_{r1} = |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 2| |s_1 + 3| = 6.35.$$

将 $s_1$ 、 $s_2$ 和 $K_{r1}$ 代入特征方程，求得 $s_{3,4} = -2.7 \pm j3.37$ 。

或者由四个闭环极点之和为常数，等于 $-6$ ，如果另外两个闭环极点为共轭附属根，则其实部均为 $-2.7$ 。

共轭复数极点 $s_{3,4}$ 与虚轴的距离是共轭复数极点 $s_{1,2}$ 与虚轴的距离的9倍，且根据单位反馈易得 $s_{1,2}$ 附近无闭环零点，说明 $s_{1,2}$ 满足主导极点的条件。

因此系统可近似成由闭环主导极点构成的一个二阶系统，其闭环传递函数

$$\Phi(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{0.36}{s^2 + 0.6s + 0.36}$$

## 五、根轨迹综合运用

$$\Phi(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0.36}{s^2 + 0.6s + 0.36}$$

$\Delta = 5\%$ 时调整时间  $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 10.5$ (秒),

超调量  $\sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$ ,

峰值时间  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 6.04$ (秒)。

## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{K_r(s+4)}{s(s+2)}$ ，试根据系统的根轨迹分析  $K_r$  对系统动态过程的影响。

【解】(1) 绘制系统的根轨迹图

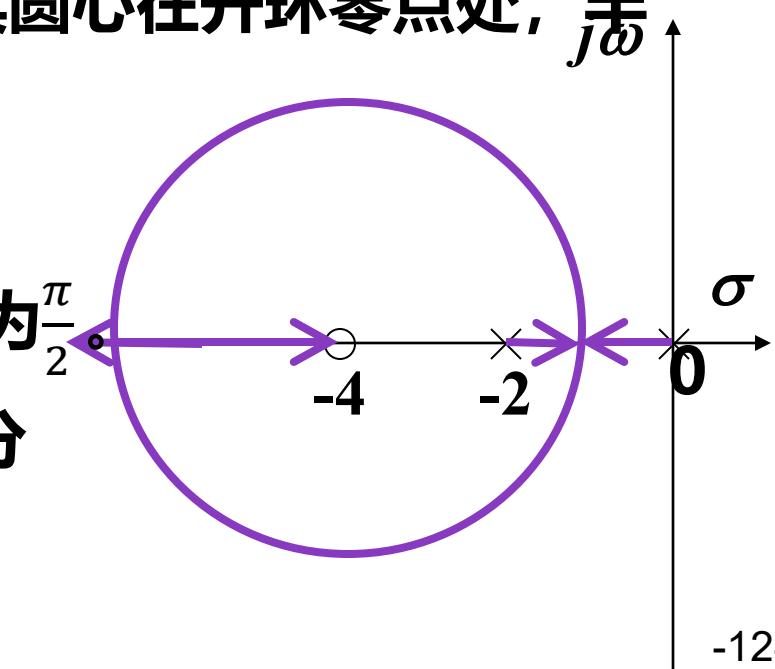
两个开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -2$ ；一个开环零点  $z_1 = -4$ 。

此类带零点的二阶系统的根轨迹，其复数部分为一个圆，其圆心在开环零点处，半径为零点到分离点的距离。

分离点方程  $d^2 + 8d + 8 = 0$ ，

两个根分别是  $-1.172$  和  $-6.828$ ，均为分离点。分离角分别为  $\frac{\pi}{2}$

复数部分为一个圆，圆心在开环零点  $-4$  处，半径为零点到分离点的距离。满足方程  $(u + 4)^2 + v^2 = (2\sqrt{2})^2$ 。

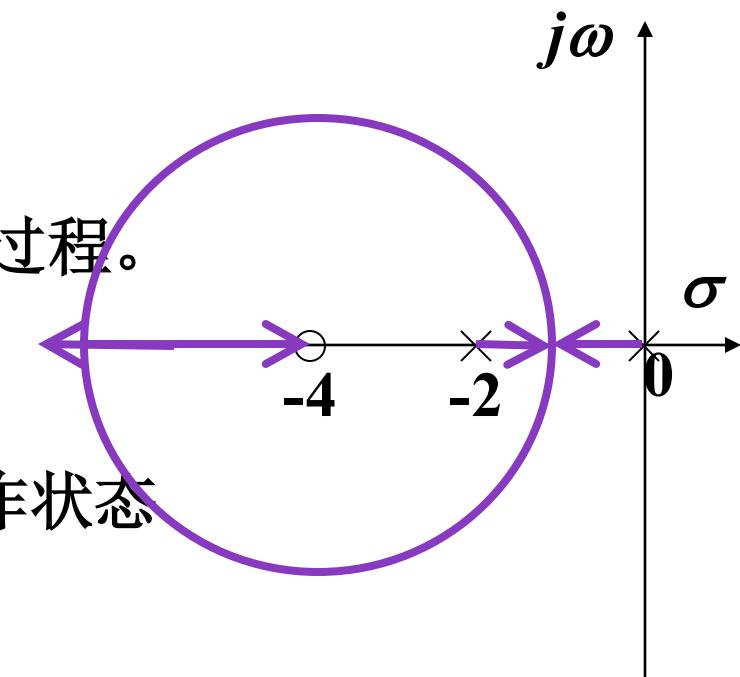


## 五、根轨迹综合运用

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+4)}{s(s+2)}$$

由于两个分离点分别是特征根为实根或共轭复根的分界点，因此求出分离点 $-1.172$ 和 $-6.828$ 分别对应的开环根轨迹增益， $K_{r1} = \frac{|d_1||d_1+2|}{|d_1+4|} = 0.343$ ， $K_{r2} = \frac{|d_2||d_2+2|}{|d_2+4|} = 11.7$ ，对应的开环增益 $K_1 = 2K_{r1} = 0.686$ ， $K_2 = 2K_{r2} = 23.4$ 。

- $K \in (0, 0.686) \cup (23.4, \infty)$ 时为过阻尼工作状态，单调的动态过程。
- $K \in (0.686, 23.4)$ 时为欠阻尼工作状态，为振荡衰减过程。
- $K = 0.686$ 或 $23.4$ 时，闭环极点为实数重根，为临界阻尼工作状态，单调的动态过程。



## 五、根轨迹综合运用

下面求系统最小阻尼比对应的闭环极点。

过原点做与根轨迹圆相切的直线，此切线与负实轴夹角的余弦即为系统的阻尼比。

由于 $4^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$ ，所以切线的倾角是 $45^\circ$ 。

因此最小阻尼比 $\zeta = \cos 45^\circ = 0.707$ 。

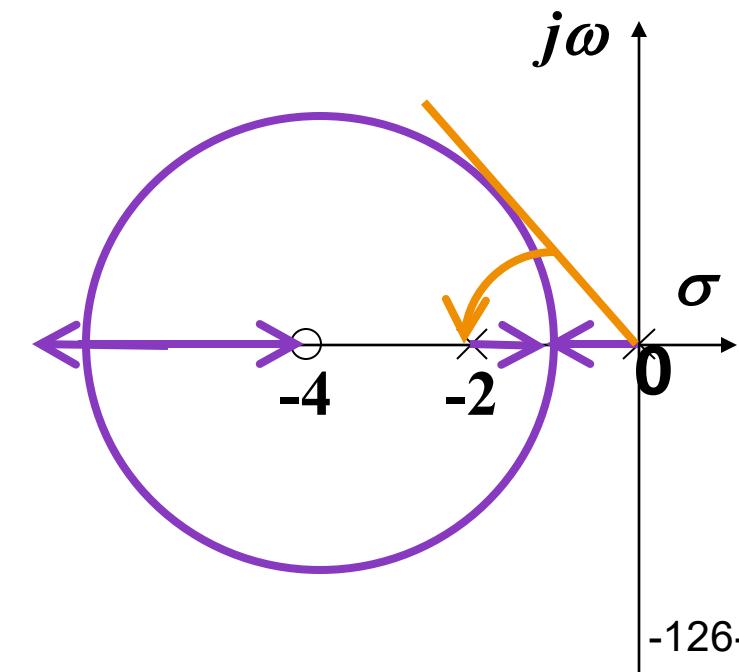
对应闭环极点 $s_{1,2} = -2 \pm j2$ 。

系统的阶跃响应具有较好的平稳性。

? 求该系统可能的最大超调量。

? 求系统处于欠阻尼工作状态时的参数范围。

? 求系统具有一定调整时间的参数范围。



## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数，求闭环超调量为54.6%时的 $K$ 值。

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(0.25s + 1)^3}$$

【解】(1) 绘制系统的根轨迹图

系统有3个开环极点 $p_{1,2,3} = -4$ 。

由规则三知，实轴上的根轨迹是区间 $(-\infty, -4]$ 。

由规则四可求出3条根轨迹渐近线与实轴的交点为 $\sigma_a = -4$ ，倾角分别为 $\varphi_a = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ 。

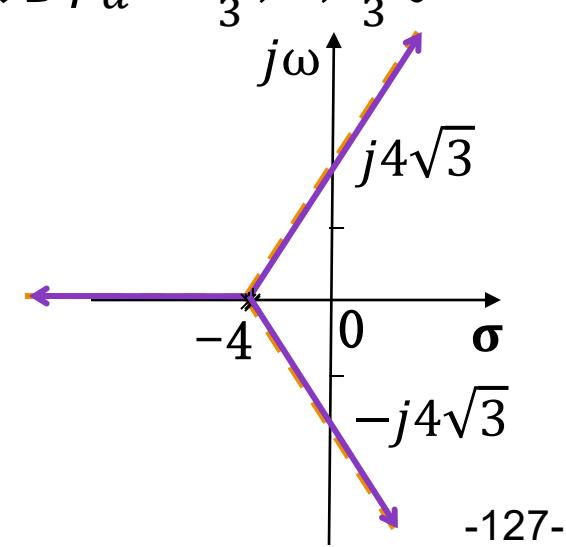
由相角条件，渐近线上的点满足

$$3\angle(x + 4) = -(2k + 1)\pi.$$

由规则七求根轨迹与虚轴的交点。

特征方程 $s^3 + 12s^2 + 48s + 64 + 64K = 0$ ,

将 $s = j\omega$ 代入解得 $\omega_{1,2} = \pm 4\sqrt{3}$ ,  $K_c = 8$ 。 $\omega_3 = 0$ 舍去。



## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数，求闭环超调量为54.6%时的K值。

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(0.25s + 1)^3}$$

【解】(2)求K值。由 $\sigma_p = 54.6\%$ 得 $\zeta = 0.189$ ，则该特征根对应的相角 $\theta = \arccos\zeta = 79.1^\circ$ 。

设该特征根为 $s_{1,2} = -x \pm jy$ ，则

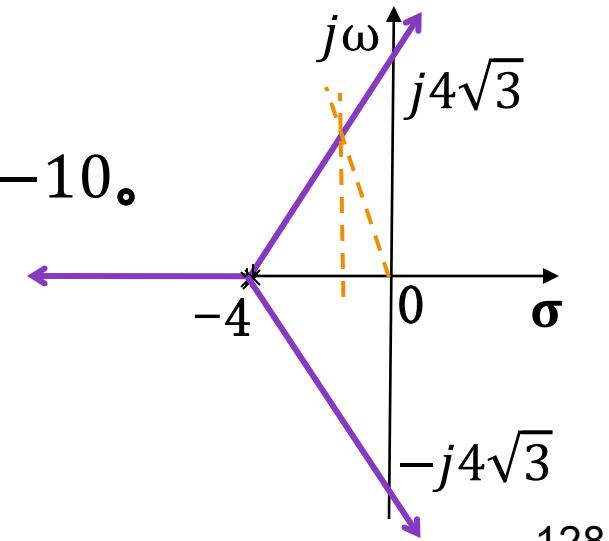
$$\begin{cases} \frac{y}{4-x} = \tan 60^\circ \\ \frac{y}{x} = \tan 79.1^\circ \end{cases}$$

得 $x = 1$ ， $y = 5.19$ ，对应两个闭环极点为 $s_{1,2} = -1 \pm j5.19$ 。

根据规则八，三个闭环极点之和为 $s_{1,2} + s_3 = -4 * 3$ ，因此 $s_3 = -10$ 。

实部相差9倍，满足主导极点要求。

由幅值条件 $\frac{|-1+j5.19+4|^3}{64K} = 1$ ，求解得 $K = 3.37$ 。



## 五、根轨迹综合运用

由上例可将用根轨迹分析自动控制系统的步骤归纳如下：

(1)根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则绘制出系统的根轨迹图。

(2)由根轨迹在s平面上的分布情况分析系统的稳定性。

若所有根轨迹分支都在S平面的左半平面，则系统是稳定的。

若有一条或一条以上的根轨迹分支在右半平面，则系统是不稳定的。

若有某条(或多条)根轨迹分支穿过虚轴，则系统为有条件稳定。此时，关键是求出开环根轨迹增益的临界值 $K_{rc}$ ，从而为设计系统的稳定性提供选择合适参数的依据。

## 五、根轨迹综合运用

(3)根据对系统的要求，分析系统的瞬态响应指标。

✓对于低阶系统，容易在根轨迹上确定对应参数的闭环极点，

✓对三阶以上的高阶系统，通常用简单的作图法（如作等阻尼比线等），求出系统的主导极点（如果存在），将高阶系统近似成由主导极点（通常是一对共轭复数极点）构成的二阶系统。

满足主导极点条件时，分析误差很小。

若不满足主导极点的条件，须进一步考虑相关闭环零、极点对系统瞬态响应性能指标的影响。

## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数，试用根轨迹法分析系统的稳定性。如果给该系统增加一个开环零点，试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s^2(s+a)}, a > 0$$

【解】原系统的根轨迹如图(a)。由于根轨迹的两条分支全部位于s平面的右半部，故无论 $K_r$ 为何值该系统都不稳定。

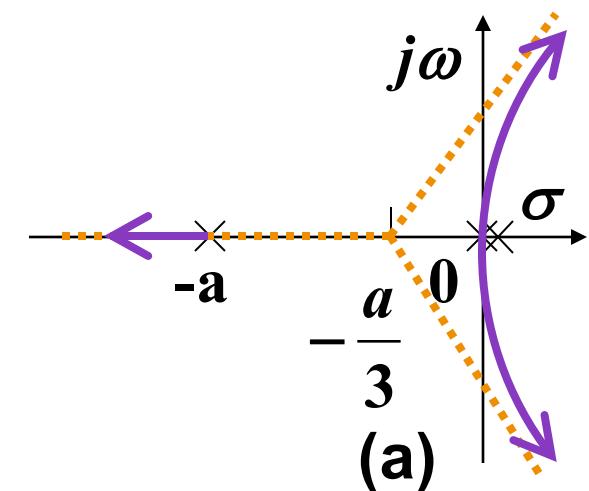
如果给系统增加一个负开环实零点 $z=-b(b>0)$ ，则开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+b)}{s^2(s+a)}$$

渐近线的倾角分别为 $90^\circ, 270^\circ$

渐近线与实轴的交点为  $-\frac{a-b}{2}$

$a$ 和 $b$ 的相对大小影响着渐近线的位置。下面分情况讨论。



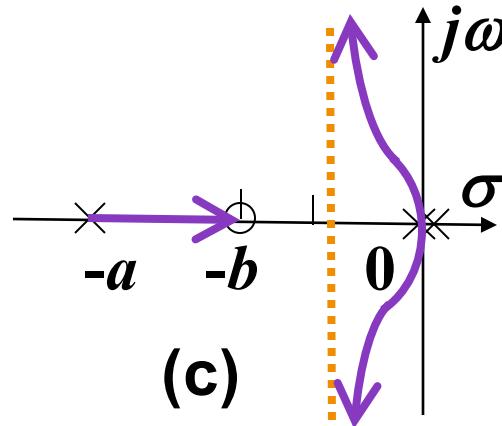
## 五、根轨迹综合运用

增加一个负开环实零点后根轨迹渐近线与实轴的交点为  $-\frac{a-b}{2}$

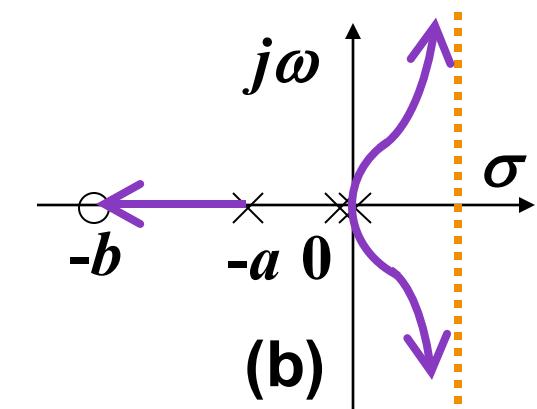
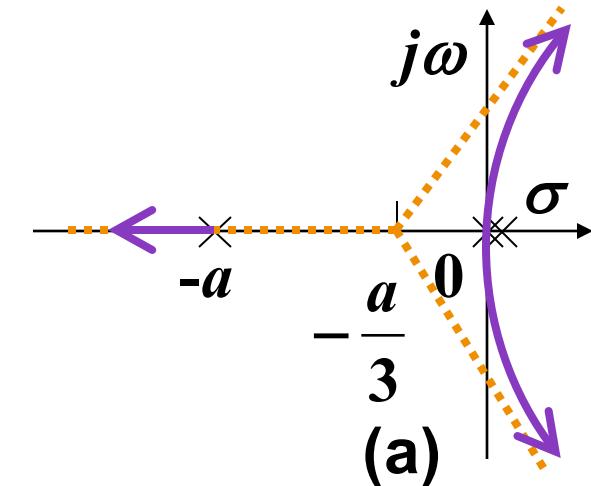
(1) 当  $b > a$  时, 渐近线与实轴的交点为正。根轨迹如图(b)。无论  $K_r$  为何值该系统都不稳定。

(2) 当  $b < a$  时(更靠近虚轴), 根轨迹渐近线与实轴的交点为负。根轨迹如图(c)。

三条根轨迹均在  $S$  平面的左半部。无论  $K_r$  取何值, 系统均稳定。



◆ 结论: 增加开环零点可使原来不稳定的系统变成稳定系统, 但零点的取值要适当, 否则便达不到预期的目的。



## 五、根轨迹综合运用

【例】已知单位反馈系统的开环传递函数，试分析附加开环零点对根轨迹的影响。

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s - p_2)(s - p_3)}, p_3 < p_2 < 0$$

【解】原系统的根轨迹如图所示。

由图可知，当系统开环根轨迹增益 $K_r > K_{rc}$ 时，该系统有两条根轨迹进入S平面右半部，此时为不稳定系统。

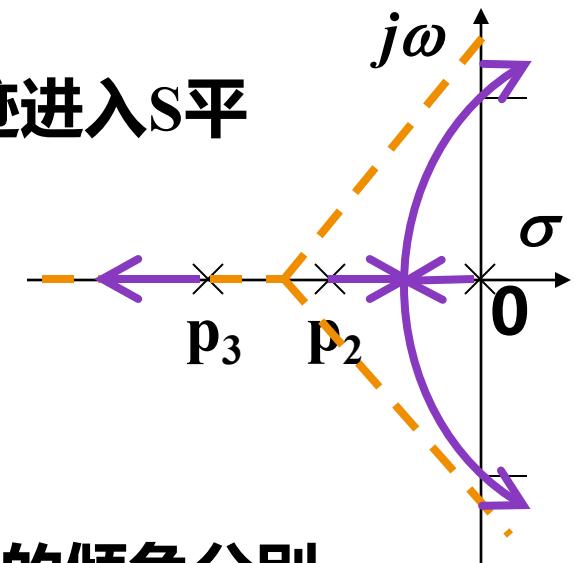
若原系统增加一负实零点 $z_1 < 0$ ，开环传递函数变为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s - z_1)}{s(s - p_2)(s - p_3)}$$

此时分子与分母的最高阶次分别为 $n=3$ ,  $m=1$ 。则 $n-m=2$ 。渐近线的倾角分别为 $90^\circ$ 和 $-90^\circ$ ，与实轴的交点坐标为

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}$$

因此附加零点的取值不同，交点位置也不同。下面分情况讨论。



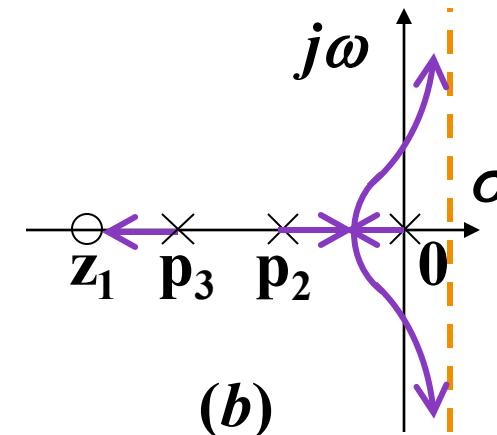
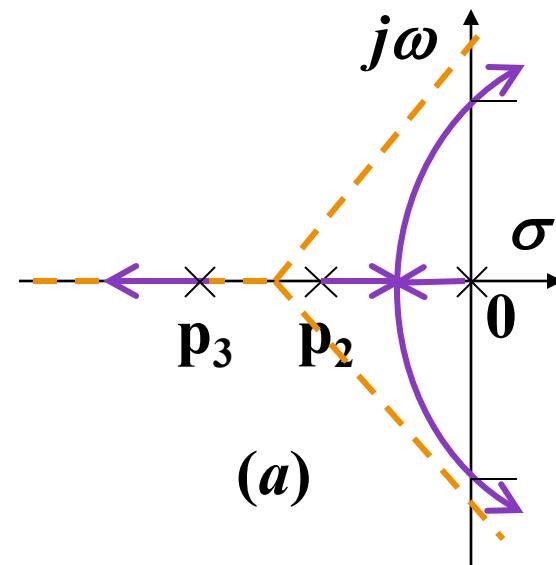
## 五、根轨迹综合运用

(1) 当  $z_1 < p_2 + p_3$  时, 渐近线与实轴的交点  $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} > 0$

渐近线位于S平面右半部。根轨迹如图(b)所示。

比较原系统的根轨迹(a), 右边两条根轨迹形状发生了变化,

当  $K_r > K'_{rc}$  时( $K'_{rc}$ 是增加了开环零点后的开环根轨迹与虚轴交点对应的临界值), 根轨迹进入s平面右半部, 系统不稳定。



## 五、根轨迹综合运用

(2) 当  $p_3 < z_1 < p_2$  时(更靠近虚轴)，渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} < 0 \quad \text{根轨迹如图(c)所示。}$$

(3) 当  $p_3 < p_2 < z_1 < 0$  时(更靠近虚轴)，渐近线与实轴的交点也小于零，  
根轨迹如图(d)所示。

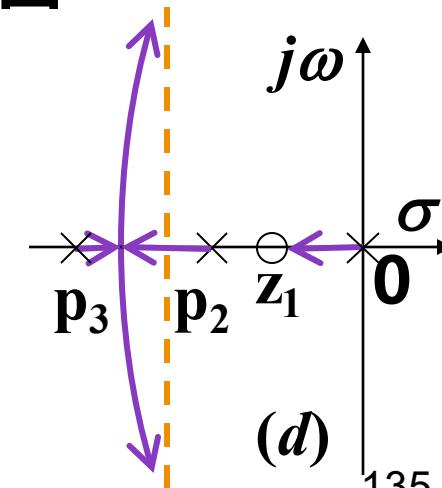
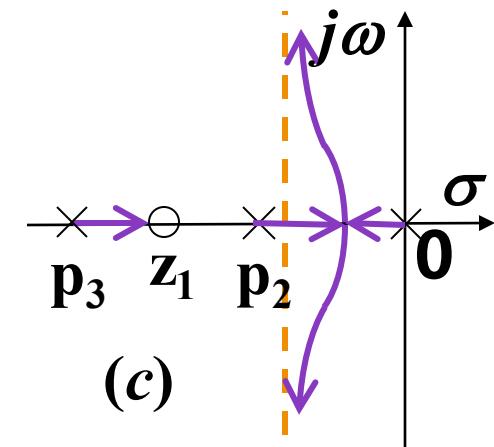
比较(c)和(d)：

口 稳定性：三条根轨迹分支均位于S平面左半部，无论  $K_r$  为何值，系统都稳定。

口 瞬态性能：从简化系统以便于分析系统的瞬态性能的角度看，图(c)优于图(d)。因为图(c)两条出现复数的根轨迹离虚轴较近，容易找到满足

主导极点条件的共轭复数极点，从而将系统简化成二阶系统。

若图(d)中实极点到虚轴的距离比共轭复数极点到虚轴的距离小五倍以上，  
也可将系统简化为由闭环实极点决定的一阶系统。



## 五、根轨迹综合运用

综上分析，可以得到如下两点结论：

◆ **附加负实零点**具有将S平面上的根轨迹向左“拉”的作用，且附加零点愈靠近虚轴，这种“拉力”愈强，反之亦然。

因此选择合适的附加零点有可能将系统的根轨迹从平面的右半部全部“拉”到S平面左半部，有利于改善系统的稳定性。

◆ **适当选择附加零点的大小**，不仅可改善系统的稳定性，还可改善系统的动态性能和简化系统分析。

如上例中满足条件(2)的附加零点可使三阶系统简化成由主导极点所确定的二阶系统，适当选择附加零点的大小，就可以使由主导极点所确定的二阶系统满足响应速度和阻尼比的要求，这在工程实践上是很有用的。

## 五、根轨迹综合运用

增加开环极点会使系统的阶次升高，一般这是不希望的。但有时为了改善系统的某项性能指标（如限制频带宽度或减小稳态误差），附加开环极点也不失为一种有效途径。

【例】已知系统的开环传递函数如下。其中 $p_4=-a$ 为附加开环极点，试分别绘制无附加开环极点的原系统的根轨迹和 $a=0.5$ 、 $a=2$ 和 $a=6$ 时系统的根轨迹。

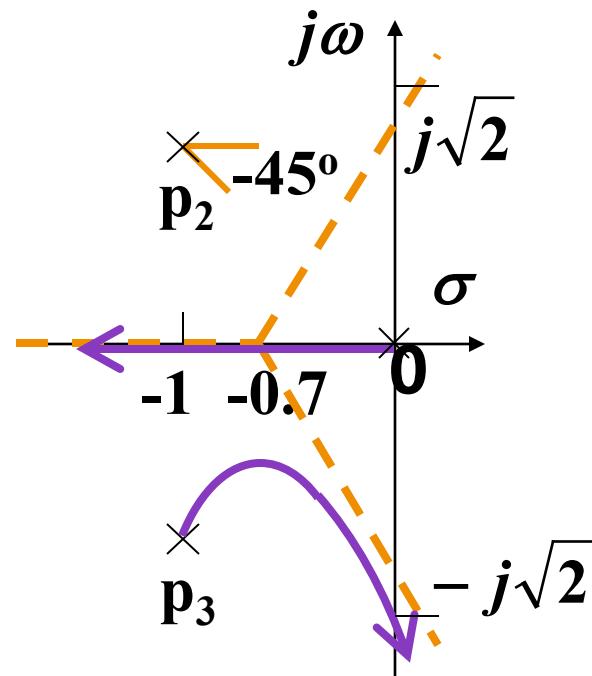
$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s^2 + 2s + 2)(s + a)}, a > 0$$

【解】根据系统的开环传递函数和绘制根轨迹的基本规则，将无附加开环极点的原系统和不同附加开环极点（不同 $a$ 值）所对应的根轨迹的有关数据的计算结果列入下表中。

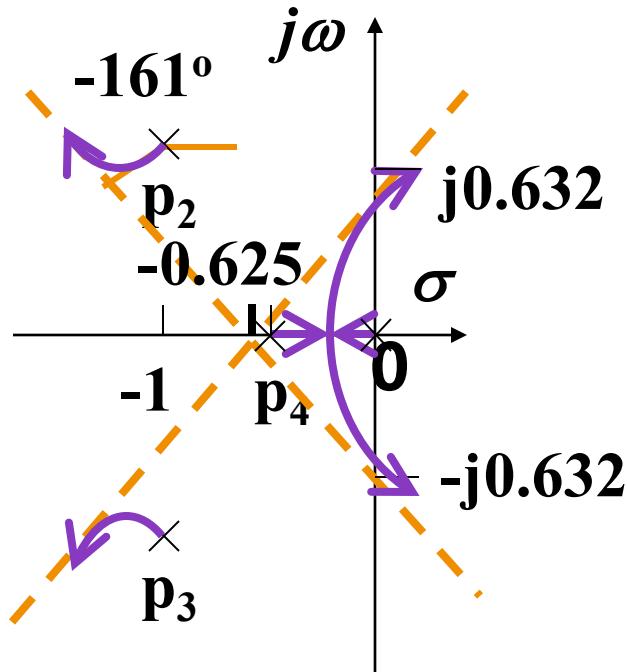
# 五、根轨迹综合运用

	原系统	$a=0.5$	$a=2$	$a=6$
起点 $n=3$ 或 $4$	$p_1=0, p_2=-1+j, p_3=-1-j$			
		$p_4=-0.5$	$p_4=-2$	$p_4=-6$
终点 $m=0$	$\rightarrow\infty$			
渐近线与实轴交点	-0.7	-0.625	-1	-2
渐近线的倾角	$60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$	$45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$		
分离点	无	-0.255	-1	-4.62
实轴上的根轨迹	$0 \rightarrow \infty$	$0 \rightarrow -0.5$	$0 \rightarrow -2$	$0 \rightarrow -6$
$p_2$ 的起始角	$315^\circ$	$198.4^\circ$	$270^\circ$	$303.7^\circ$
$p_3$ 的起始角	$45^\circ$	$161.6^\circ$	$90^\circ$	$56.3^\circ$
根轨迹与虚轴交点	$\pm j1.414$	$\pm j0.632$	$\pm j1$	$\pm j1.22$
$K_{rc}$	4	2.6	5	18.75

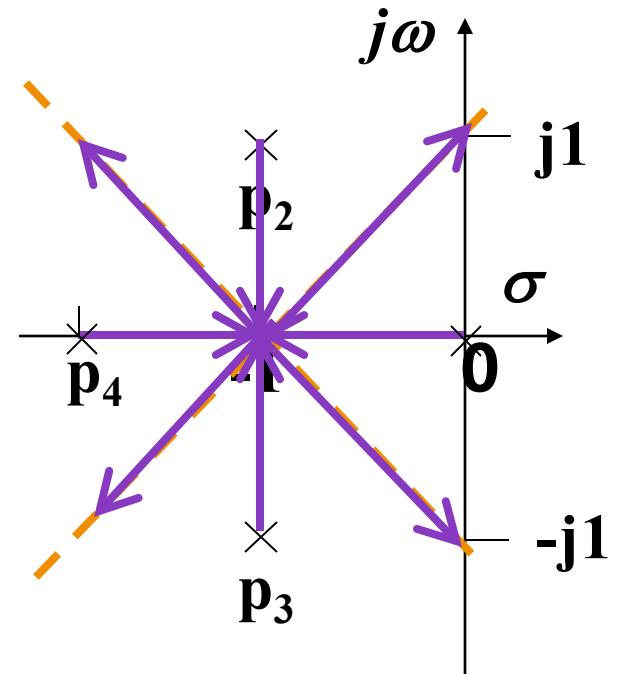
## 五、根轨迹综合运用



(a)无附加开环极点

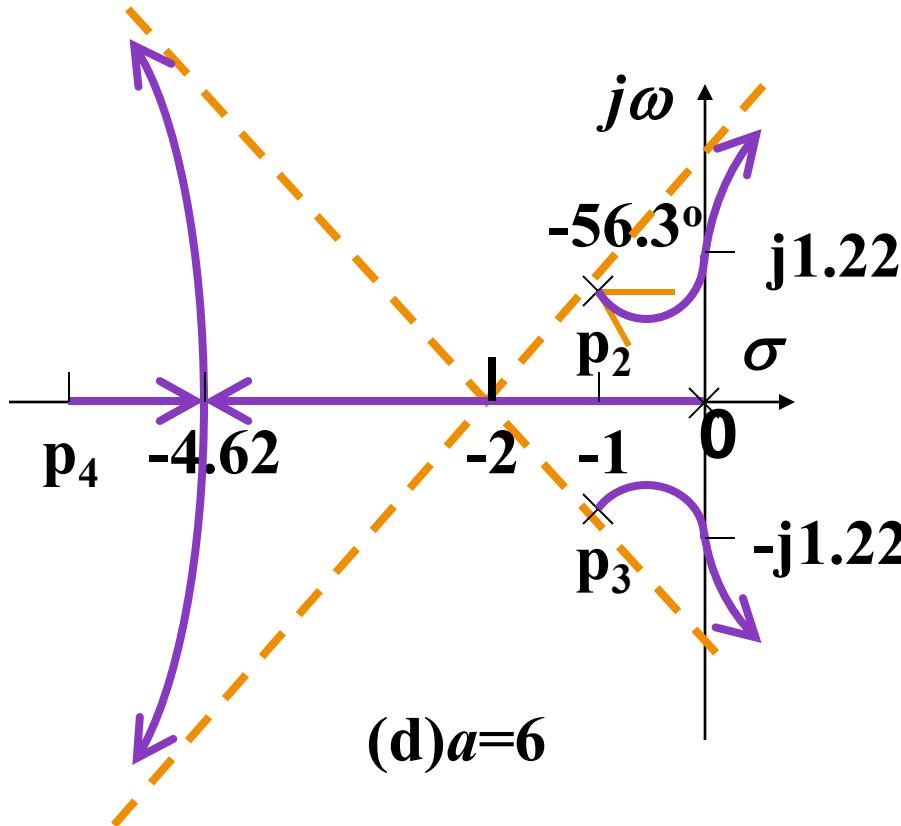


(b) $a=0.5$



(c) $a=2$

## 五、根轨迹综合运用



由四个根轨迹图可以看出，附加开环极点的大小不同（即不同的 $a$ 值）对根轨迹的形状会产生很大的影响，即开环极点在S平面上位置的微小变化，有可能引起根轨迹形状的重大变化。正是这种根轨迹形状的变化为系统的分析和设计提供了多种选择的可能。