



**2024-2025 学年度春季**



# **课程名称：《自动控制原理（一）》**

## **第5章 线性系统频率分析**

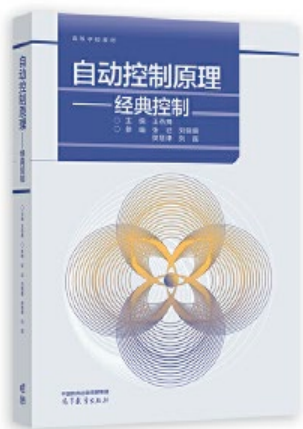
**课程学时：共56学时**

**课程性质：专业基础课**

**学生对象：自动化2305班  
(32人)**

**授课教师：刘骁康**

**课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法**



## 第五章：线性系统的频率分析

### 第17讲 开环系统频率特性

Frequency response of open-loop system

#### 本讲内容

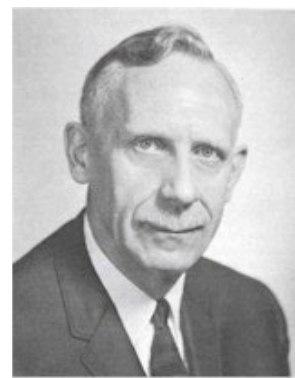
- 一、频率特性的基本概念
- 二、频率特性法
- 三、典型环节的频率特性

# 一、频率特性的基本概念



Harry Nyquist (1889–1976)

负反馈系统的频率域稳定性判据



Hendrik Wade Bode(1905-1982)

对数坐标图描述方法

? 什么是频率特性?

◆思想:

在**零初始条件**下，输入正弦信号，当其频率在**0到无穷大**的范围内连续变化时，系统**稳态**正弦输出与正弦输入的**幅值比与相位差**随输入频率变化会呈现怎样的变化规律呢？

假设  $r(t) = A \sin \omega t$  则  $R(s) = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$   $\xrightarrow{x}$   $\boxed{G(s)}$   $\xrightarrow{y}$

# 一、频率特性的基本概念

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{一般的, } G(s) = \frac{B(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n \text{ 为极点。}$$

$$\text{则 } Y(s) = G(s)R(s) = \frac{B(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

$$Y(s) = \frac{d_1}{s + j\omega} + \frac{d_2}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

稳态分量

瞬态分量

$$\therefore y(t) = \underbrace{d_1 e^{-j\omega t} + d_2 e^{j\omega t}}_{\text{稳态分量}} + \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}}_{\text{瞬态分量}}, t \geq 0$$

如果系统是稳定的，则极点均有负实部，则当  $t \rightarrow \infty$  时，系统的稳态输出

$$y_{ss}(t) = d_1 e^{-j\omega t} + d_2 e^{j\omega t}$$

# 一、频率特性的基本概念

系统的稳态输出

$$y_{ss}(t) = d_1 e^{-j\omega t} + d_2 e^{j\omega t}$$

$$r(t) = A \sin \omega t$$

$$d_1 = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)A}{2j}$$

$$d_2 = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)A}{2j}$$

由于  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$ ,  $\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)}$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\varphi} = |G(j\omega)|e^{-j\varphi},$$

则

$$y_{ss}(t) = |G(j\omega)|A \frac{-e^{-j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + \varphi)}}{2j} = |G(j\omega)|A \sin(\omega t + \varphi)$$

◆结论：稳定的线性定常系统在正弦输入信号的作用下，其稳态输出是同频率的正弦信号，但幅值和相角都改变了，这一改变依赖于 $G(j\omega)$ 。

# 一、频率特性的基本概念

? 什么是频率特性?

输入:  $r(t) = A \sin(\omega t)$

输出:  $y_{ss}(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \phi)$

$|G(j\omega)|$  ■ 为幅频特性

$\phi = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)}$  ■ 为相频特性

$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$  ◆ 为频率特性, 或称频率传递函数

➤ 频率特性是输出的Fourier变换与输入的Fourier变换之比。

➤ 频率特性可以反映在不同频率的正弦信号作用下, 系统的稳态输出与输入信号的关系。

? 已知闭环传递函数、输入为某正弦信号, 求稳态输出?

先判断稳定性, 若稳定, 则直接求出闭环幅频、相频特性, 即可求出稳态输出。

# 一、频率特性的基本概念

求一阶系统  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$  在正弦输入  $r(t) = X\sin\omega t$  作用下的稳态响应。  $T > 0$

【解】系统在  $T > 0$  时稳定，则由  $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$
$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$$

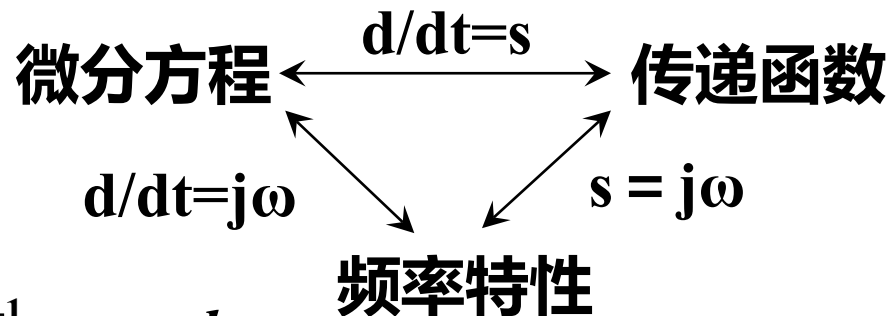
则稳态响应  $c_{ss}(t) = X|G(j\omega)|\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

$$= \frac{KX}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin[\omega t - \arctan \omega T]$$

# 一、频率特性的基本概念

## ◆ 频率特性与传递函数的关系

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$



已知传函  $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$

则  $G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0} \quad m \leq n$

? 不稳定的系统是否存在频率特性?

? 求频率特性是否要求零初始条件?



## 二、频率特性法



频率特性法有什么优势？

- 计算量小。
- 借助图形，很直观。
- 物理意义鲜明，有很强的实际意义。
- 适用范围广。稳定、不稳定；二阶、高阶；线性；且可推广到非线性、多变量系统。
- 对于稳定的系统，可通过实验的方法测出频率特性，具有工程实用价值。



对于不稳定的系统能否通过实验的方法测出频率特性？

## 二、频率特性法

? 频率特性有哪些表示方法?

◆ 解析表达式  $G(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$

■ 1. 实频特性  $u(\omega)$ , 虚频特性  $v(\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0}$$

分子和分母多项式中,  $j\omega$  的偶数次幂构成 **实部** ( $\omega$  的偶函数, 分别设为  $R_m(\omega)$  和  $R_d(\omega)$ ), 奇数次幂构成 **虚部** ( $\omega$  的奇函数, 分别设为  $I_m(\omega)$  和  $I_d(\omega)$ ), 则

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{R_m(\omega) + jI_m(\omega)}{R_d(\omega) + jI_d(\omega)} = \frac{(R_m(\omega) + jI_m(\omega))(R_d(\omega) - jI_d(\omega))}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)} \\ &= \frac{R_m(\omega)R_d(\omega) + I_m(\omega)I_d(\omega) + j[R_d(\omega)I_m(\omega) - R_m(\omega)I_d(\omega)]}{R_d^2(\omega) + I_d^2(\omega)} \end{aligned}$$

因此, 实频特性是  $\omega$  的偶函数, 虚频特性是  $\omega$  的奇函数。

## 二、频率特性法

? 频率特性有哪些表示方法?

◆ 解析表达式  $G(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi}$

■ 1. 实频特性  $u(\omega)$ , 虚频特性  $v(\omega)$

实频特性是  $\omega$  的偶函数, 虚频特性是  $\omega$  的奇函数。

■ 2. 幅频特性  $|G(j\omega)| = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} \longrightarrow$  偶函数

相频特性  $\angle G(j\omega) = \arctan \frac{v(\omega)}{u(\omega)} \longrightarrow$  奇函数

## 二、频率特性法

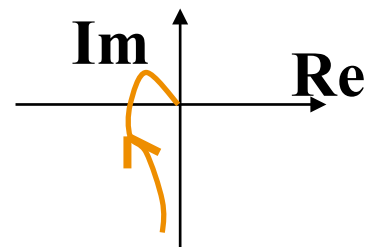
? 频率特性有哪些表示方法?

### ◆几何表示法

■1.幅相特性曲线：简称幅相曲线，又称极坐标图。以角频率 $\omega$ 为自变量， $\omega:0 \rightarrow +\infty$ ，把频率特性的幅值和相角同时表示在复平面上，并用箭头表示出 $\omega$ 的增大方向。

? 为何只绘制 $\omega:0 \rightarrow +\infty$ 的变化?

幅相曲线 $\omega:0 \rightarrow +\infty$ 与 $\omega:-\infty \rightarrow 0$ 关于实轴对称。



? 多个环节串联将会如何?

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\varphi_1 + \varphi_2]}$$

幅频相乘，相频相加

## 二、频率特性法

? 频率特性有哪些表示方法?

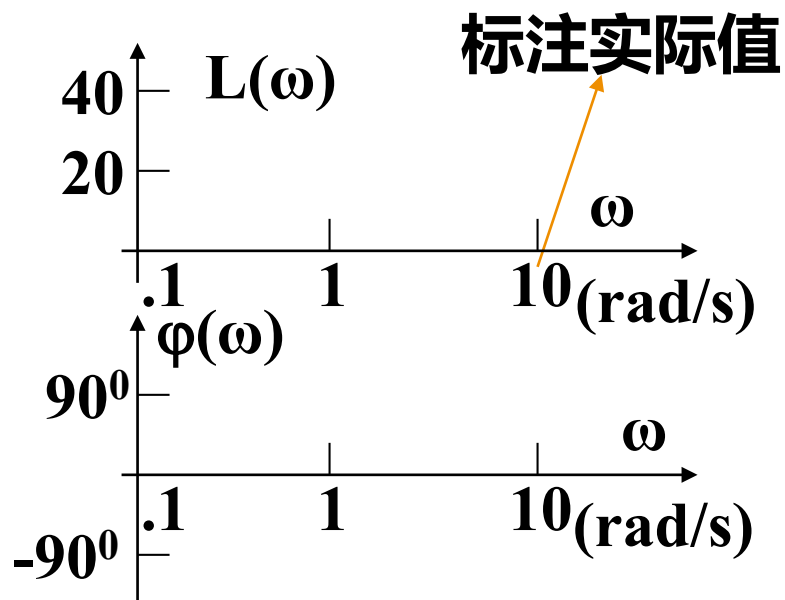
■ 2. **对数频率特性图**：对数坐标图、伯德图或**Bode图**，包括：对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线。

■ 两张图的**横坐标**均为 $\omega$ ，以对数分度，称为**十倍频程**，单位是rad/s(弧度/秒)。即频率每扩大10倍，横轴就变化一个单位长度。因此，对 $\omega$ 而言坐标分度不均匀，而对 $\lg \omega$ 则是均匀的。

■ 对数幅频特性的**纵坐标**为对数幅频特性的函数值，表示为 $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$ 。采用线性分度，单位是dB。

■ 对数相频特性的**纵坐标**为相频特性的函数值，单位是**度**。表示为 $\varphi(\omega)$ 。

■ 通常将对数幅频特性曲线画在上边，对数相频特性画在下边。



## 二、频率特性法

? 对数频率特性有何优势?

✓ 横坐标采用对数分度，拓宽了低频段。

? 多个环节串联图形会怎样?

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\varphi_1 + \varphi_2]}$$

$$20\lg|G_1G_2| = 20\lg|G_1| + 20\lg|G_2|$$

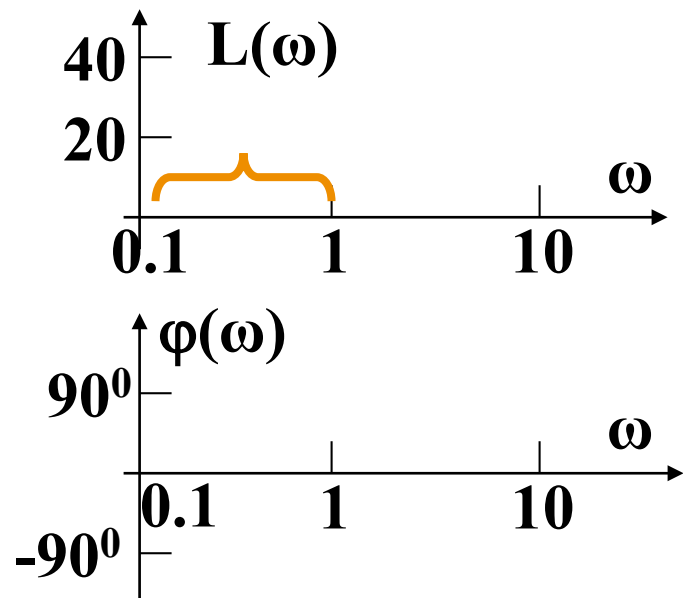
$$\angle G_1G_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

✓ 几个频率特性相乘，对数幅频、相频特性曲线相加。

? 两个频率特性互为倒数会怎样?

$$G_1 = \frac{1}{G_2} \quad |G_1| = \frac{1}{|G_2|} \quad 20\lg|G_1| = -20\lg|G_2|$$
$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

则对数幅频、相频特性反号，关于坐标轴对称。



### 三、典型环节的频率特性

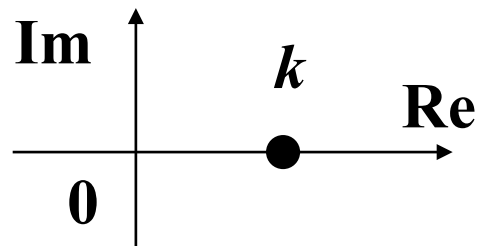
1. 比例环节
2. 积分环节
3. 微分环节
4. 惯性环节
5. 一阶微分(比例微分)环节
6. 振荡环节
7. 二阶微分环节
8. 延迟环节
9. 不稳定环节

### 三、典型环节的频率特性

#### 1. 比例环节:

传递函数  $G(s) = k \quad k > 0$

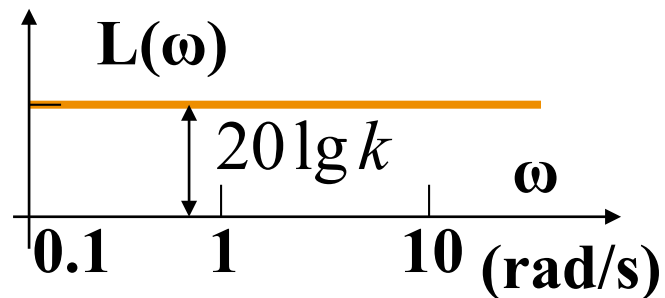
频率特性  $G(j\omega) = k$



#### ◆ 幅相曲线

幅频特性  $|G(j\omega)| = k$

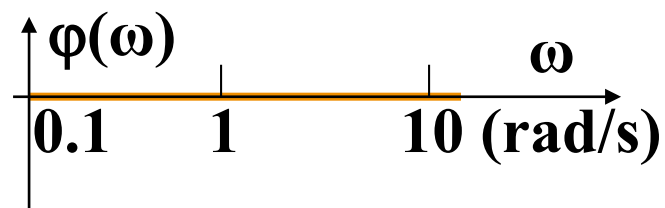
相频特性  $\angle G(j\omega) = 0^\circ$



#### ◆ Bode图:

对数幅频特性  $L(\omega) = 20 \lg k$

对数相频特性  $\varphi(\omega) = 0^\circ$



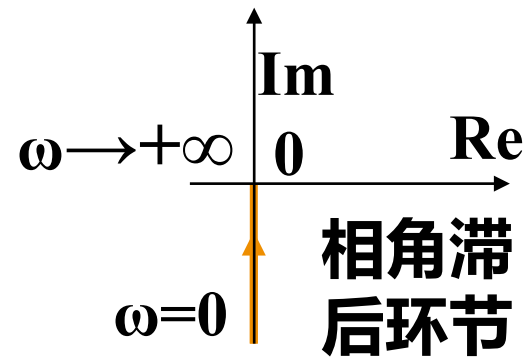


### 三、典型环节的频率特性

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-90^\circ}$$

◆ **幅相曲线**：幅频特性  $|G(j\omega)| = 1/\omega$

相频特性  $\angle G(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{0} = -90^\circ$



➤ 积分环节对正弦输入信号有 $90^\circ$ 的滞后作用。

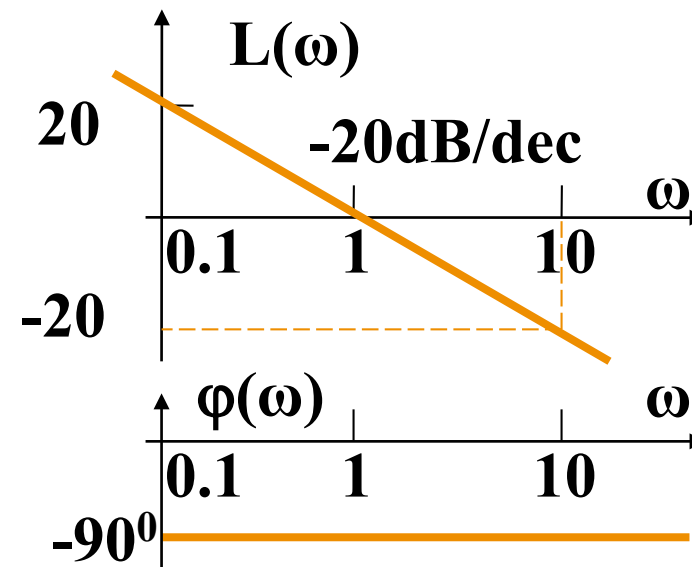
◆ **Bode图**

$$L(\omega) = 20 \lg(1/\omega) = -20 \lg \omega \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

$\omega=1$ 时,  $L(\omega)=0$ , 对数幅频特性是直线。

斜率:  $L(10\omega) - L(\omega) = -20 \lg 10\omega + 20 \lg \omega = -20 \text{ dB}$

其含义是：频率增加10倍，分贝变化-20，即斜率为-20dB/dec。



### 三、典型环节的频率特性

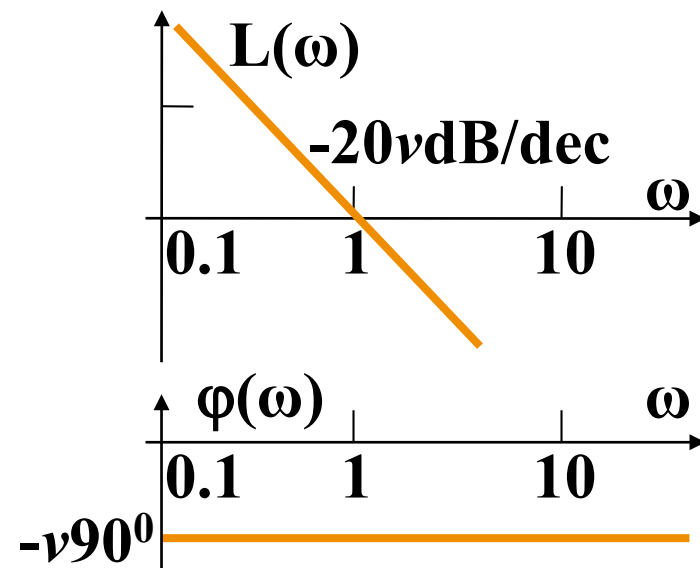
若有 $\nu$ 个积分环节串联,

$$G(s) = \frac{1}{s^\nu} \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu} = \frac{1}{\omega^\nu} e^{-\nu \cdot 90^\circ}$$

则其对数幅频特性为

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^\nu} \right| = -\nu \cdot 20 \lg \omega$$

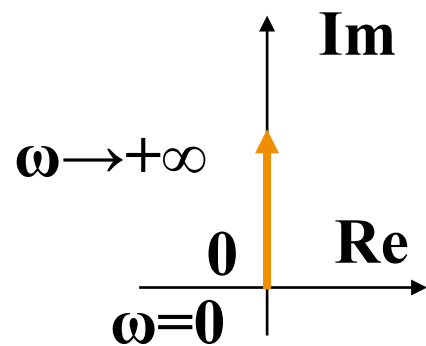
相频特性为  $\varphi(\omega) = -\nu \cdot 90^\circ$



### 三、典型环节的频率特性

$$G(s) = Ts, G(j\omega) = j\omega T$$

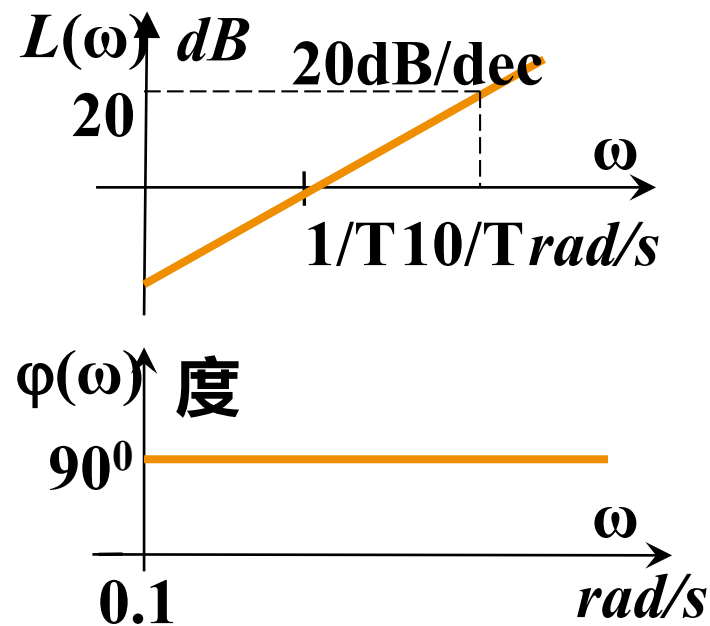
- ◆ **幅相曲线**: 幅频特性  $|G(j\omega)| = \omega T$   
相频特性  $\angle G(j\omega) = 90^\circ$



- ◆ **Bode图**:

对数幅频特性  $L(\omega) = 20 \lg \omega T$

对数相频特性  $\varphi(\omega) = 90^\circ$



### 三、典型环节的频率特性

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = x + jy$$

■幅频特性  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}}$  ■相频特性  $\angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$

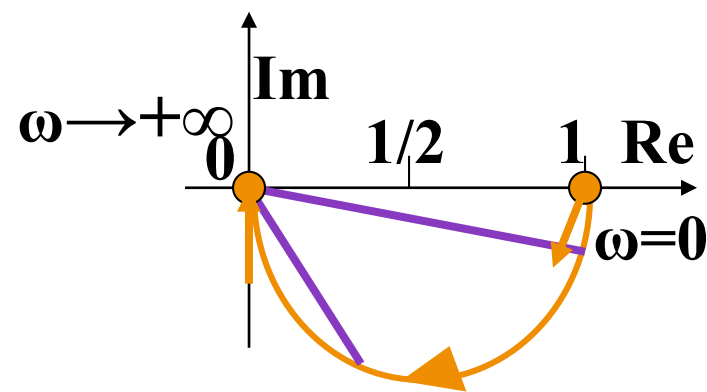
$$\omega = 0, \quad |G(j\omega)| = 1, \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

$$\omega = \infty, \quad |G(j\omega)| = 0, \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

$$x = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, y = -\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$x^2 + y^2 - x = 0, \text{ 即 } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$$

则幅相曲线的实部和虚部构成一个以 $(1/2, j0)$ 为圆心，以 $1/2$ 为半径的半圆。



? 幅值和相角随频率的变化情况?

? 分子是常数K时?

$(K/2, j0)$ 为圆心，以 $K/2$ 为半径

### 三、典型环节的频率特性

#### ▪对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

1、低频渐近线 当  $\omega \ll 1/T \Rightarrow L(\omega) = -20 \lg 1 = 0 \text{dB}$

2、高频渐近线 当  $\omega \gg 1/T \Rightarrow L(\omega) = -20 \lg \omega T$

渐近线在  $\omega = 1/T$  时,  $L(\omega) = 0 \text{dB}$ 。  $\omega = 1/T$  称为**转折频率**。

求高频渐近线的**斜率**: 即频率变化10倍时  $L(\omega)$  的增量。

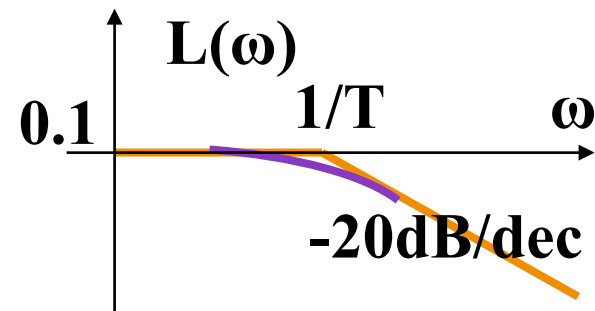
$$\Delta L(\omega) = -20 \lg 10\omega T - (-20 \lg \omega T) = -20$$

则斜率为  $-20 \text{dB/dec}$ 。

由渐近线得到的对数幅频特性曲线称**渐近对数幅频特性**。最大误差发生在  $\omega = 1/T$  处。

$$e_L = -20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} - 20 \lg \omega T = -20 \lg \sqrt{2} \approx -3 \text{dB}$$

即渐近对数幅频特性比真实值大  $3 \text{dB}$ 。



### 三、典型环节的频率特性

◆ 惯性环节渐近对数幅频特性曲线误差的进一步分析：

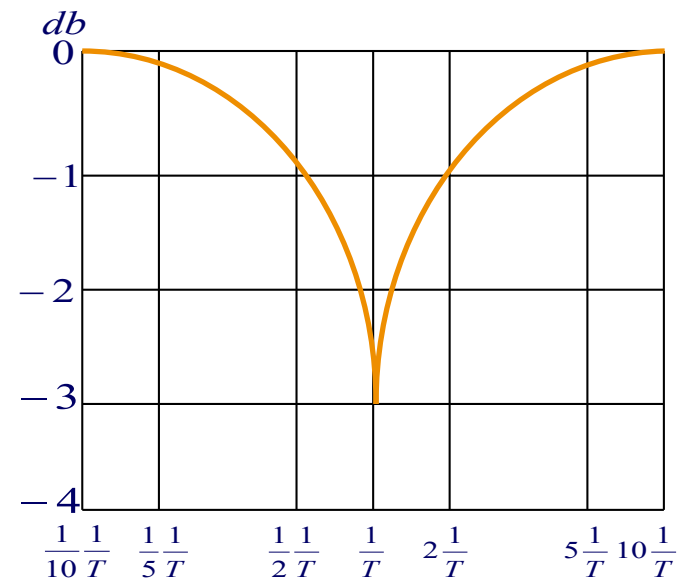
$\omega_1 = \frac{1}{KT}$ ，其中  $K > 1$  时的误差是

$$e_{L1} = \left( -20\lg\sqrt{\omega_1^2 T^2 + 1} \right) - 0 = -20\lg\sqrt{1 + \frac{1}{K^2}}$$

$\omega_2 = \frac{K}{T}$ ，其中  $K > 1$  时的误差是

$$e_{L2} = -20\lg\sqrt{\omega_2^2 T^2 + 1} - (-20\lg\omega_2 T) = -20\lg\sqrt{1 + \frac{1}{K^2}}$$

即距离  $1/T$  相等的位置误差相同，因此误差曲线对称于转折频率。



误差修正曲线

### 三、典型环节的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} = x + jy$$

▪ 对数相频特性  $\angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$

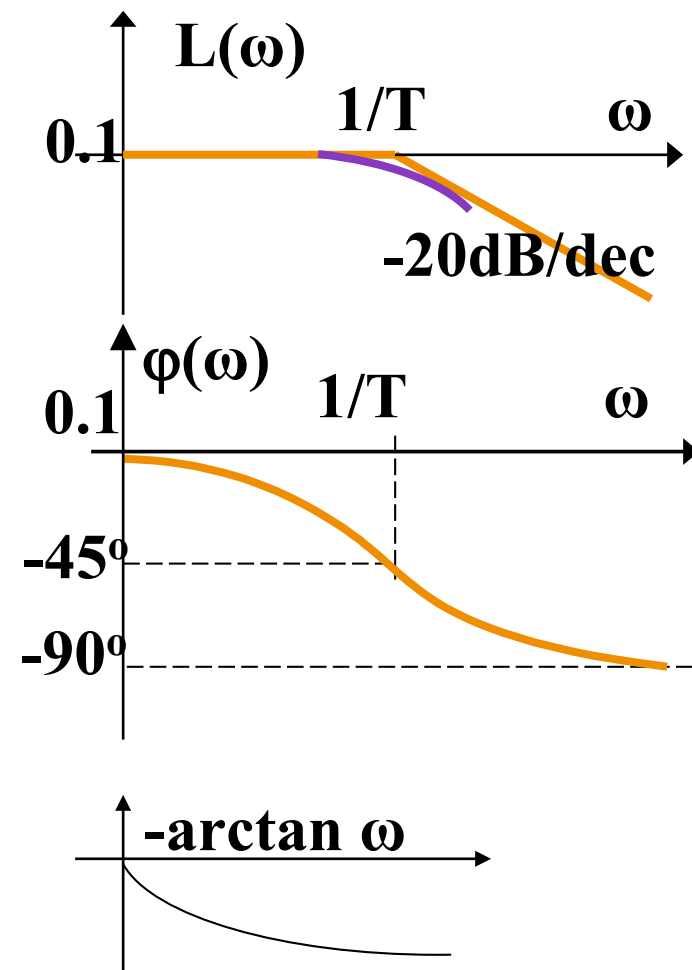
$\omega \ll 1/T, \varphi(\omega) \rightarrow 0^\circ$

$\omega = 1/T, \varphi(\omega) = -45^\circ$

$\omega \gg 1/T, \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$

◆ 特点:

▪ 惯性环节为低通滤波器。



### 三、典型环节的频率特性

◆特点:

? 对数相频特性曲线关于点 $\omega=1/T$ 和 $\varphi(\omega)=-45^\circ$ 斜对称。

$$\omega_1 = \frac{a}{T}, \omega_2 = \frac{1/a}{T}$$

$$\varphi_1 = -\arctan a, \quad \varphi_2 = -\arctan \frac{1}{a} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = -90^\circ$$

离 $1/T$ 左右相同距离的频率对应的相频之和为 $-90^\circ$ 度。

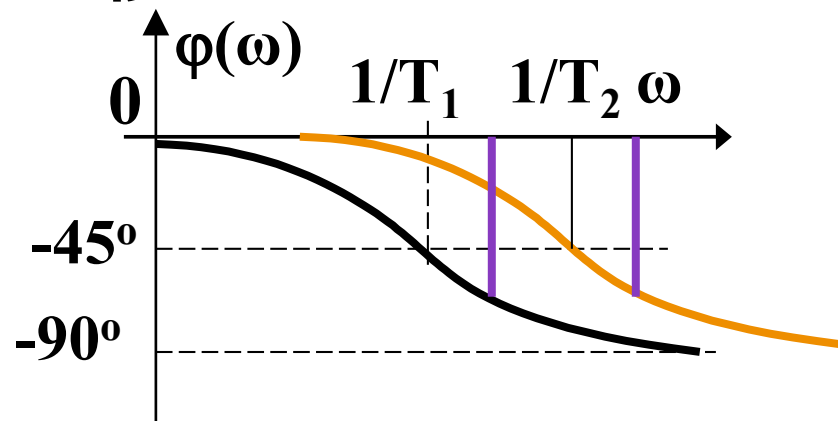
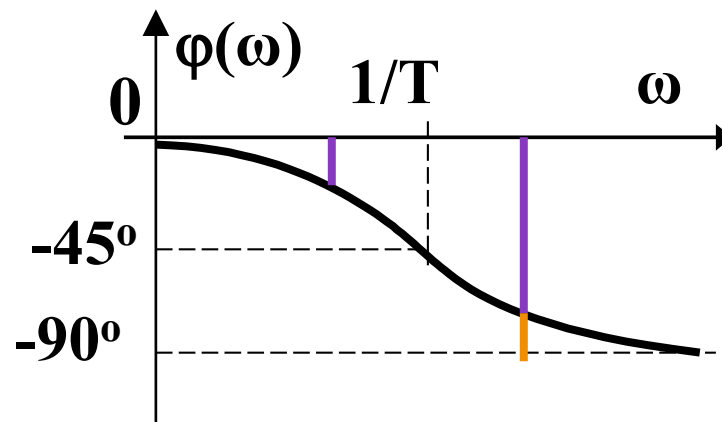
? 转折频率 $1/T$ 增大或减小时，幅频和相频特性曲线相应地左移

或右移，但形状不变。  $\omega_1 = \frac{a}{T_1}, \omega_2 = \frac{a}{T_2}$

$$\varphi_1 = -\arctan a, \quad \varphi_2 = -\arctan a$$

当 $T$ 改变时，离 $1/T$ 相同距离的频率对应的相频值相等。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$





### 三、典型环节的频率特性

$$G(s) = sT + 1 \quad G(j\omega) = j\omega T + 1$$

- ◆ **幅相曲线**: 幅频特性  $|G(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$   
相频特性  $\angle G(j\omega) = \arctan \omega T$

- ◆ **Bode图**: 对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

对数幅频特性的低频渐近线  $L=0\text{dB}$ ,

高频渐近线  $20\lg \omega T$ 。

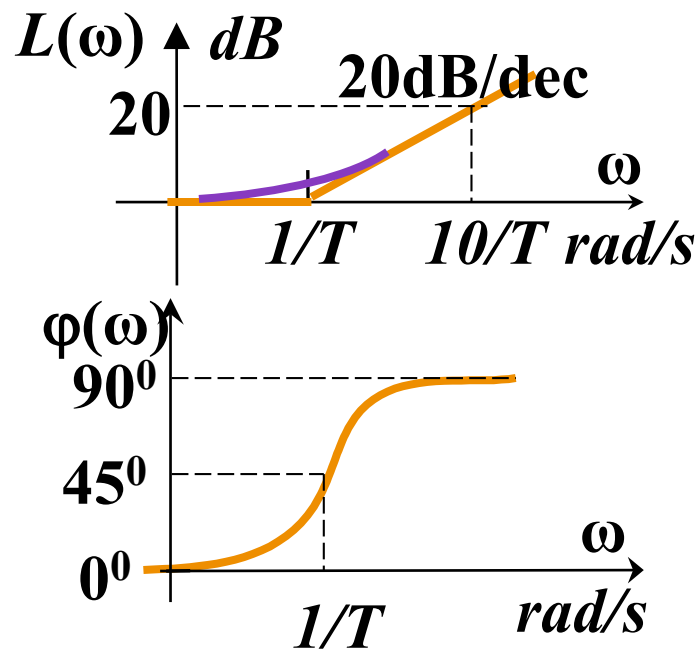
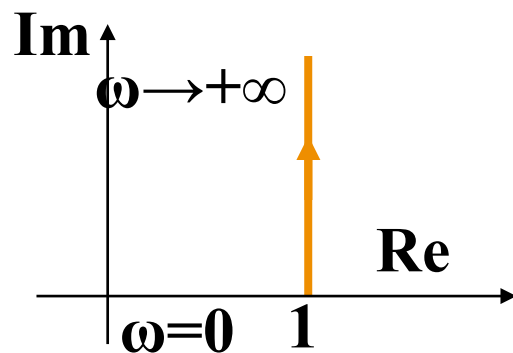
在转折频率  $\omega=1/T$  处误差为  $3\text{dB}$ 。

对数相频特性  $\varphi(\omega) = \arctan \omega T$

- ◆ 整个对数频率特性曲线与惯性环节关于横轴对称。

- ❓ 相频特性关于点  $(1/T, -45^\circ)$  斜对称。

- ❓  $T$  变化, 曲线形状不变。



# 一、根轨迹的基本概念

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j2\zeta\omega T}$$

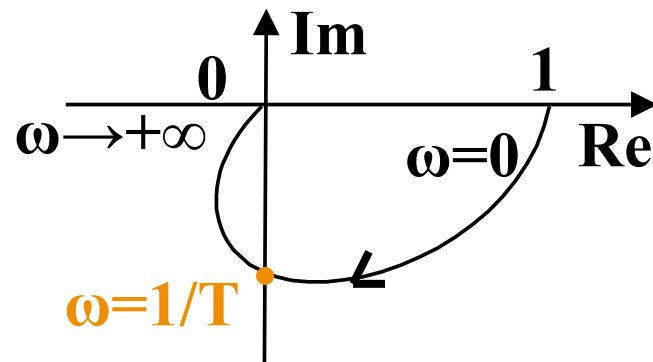
▪幅频特性  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$

▪相频特性 
$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -(180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}), & \omega T > 1 \end{cases}$$

相角滞  
后环节

◆分析幅相特性随频率的变化情况:

$\omega$	0	→增大	$\frac{1}{T}$	→增大	→∞
$ G(j\omega) $	1		$\frac{1}{2\zeta}$		→0
$\angle G(j\omega)$	0°	→减小	-90°	→减小	-180°

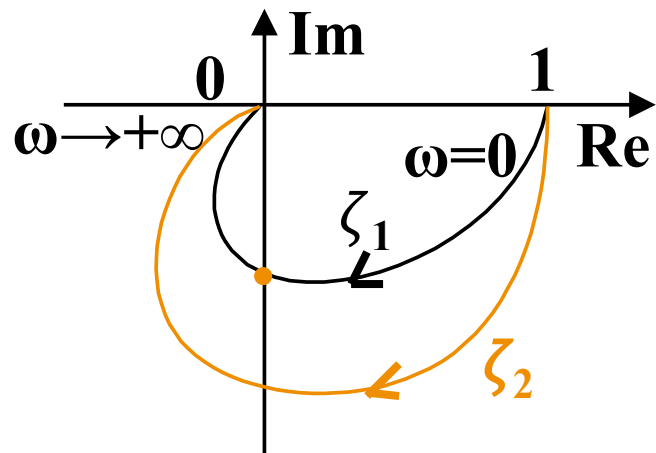


### 三、典型环节的频率特性

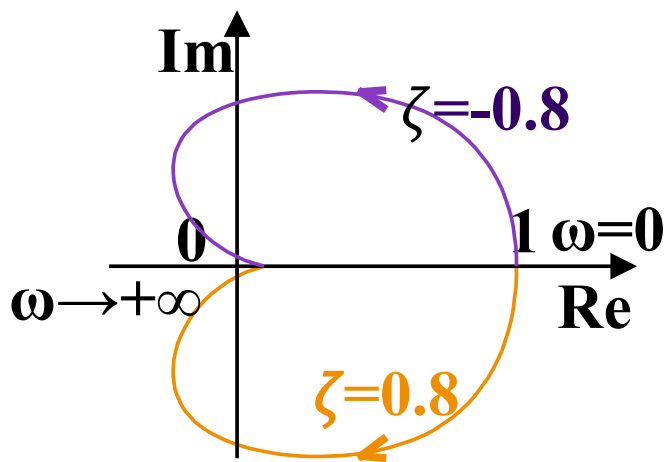
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j2\zeta \omega T}$$

◆关于振荡环节幅相曲线的进一步分析：

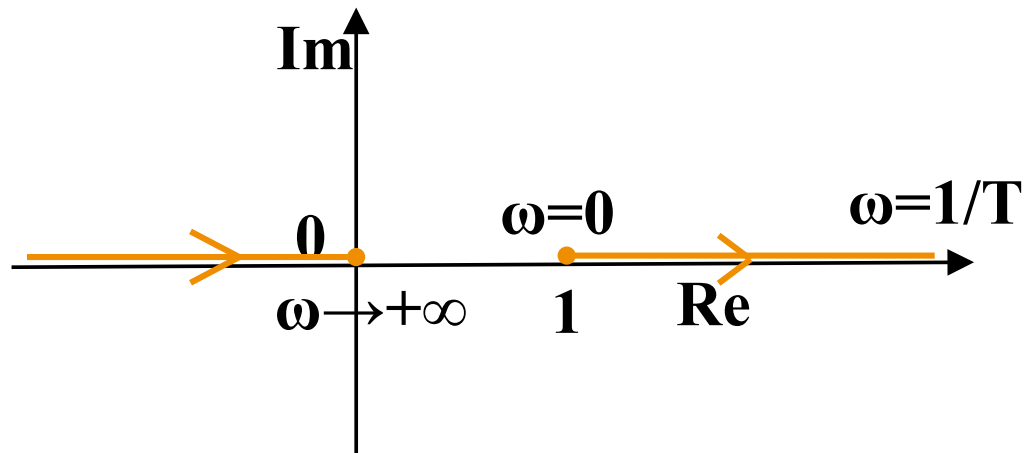
? 幅相曲线随 $\zeta$ 如何变化?  $\zeta_1 > \zeta_2$



?  $\zeta < 0$ 会如何? 幅值不变, 相角变号!



?  $\zeta = 0$ 会如何?



### 三、典型环节的频率特性

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j2\zeta\omega T}$$

◆关于振荡环节幅相曲线的进一步分析：

？频率增大时幅值的变化是否单调减小？

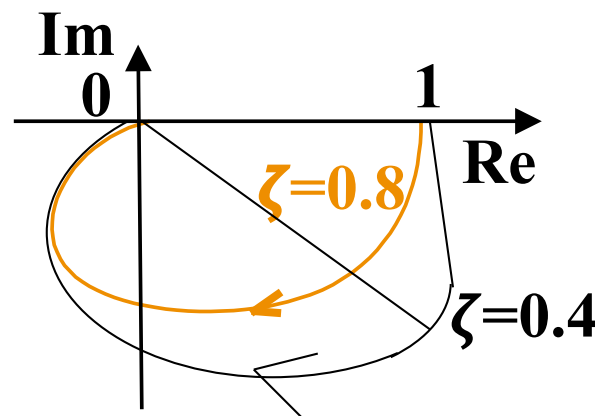
令  $\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| = 0$  求得，当  $\omega = \omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  时，幅频特性达到最大值：

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} > 1。条件：0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}。$$

■此时称系统的响应产生了谐振，此时的频率称为**谐振频率**，幅值称为**谐振峰值**，相角为**谐振相移**：

$$\varphi_r = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta}$$

■ $\zeta$ 不满足此条件的，幅值单调减小。

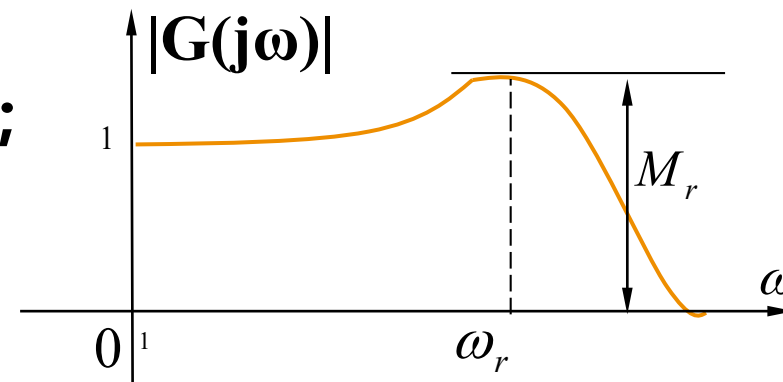


### 三、典型环节的频率特性

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}} \quad M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} > 1$$

当  $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$  时，振荡环节的幅值特性曲线如图所示。

- 在  $0 < \omega < \omega_r$  的范围内，随着  $\omega$  的增加， $|G(j\omega)|$  缓慢增大；
- 当  $\omega = \omega_r$  时， $|G(j\omega)|$  达到最大值  $M_r$ ；
- 当  $\omega > \omega_r$  时，输出幅值衰减很快。



振荡环节的频率响应

### 三、典型环节的频率特性

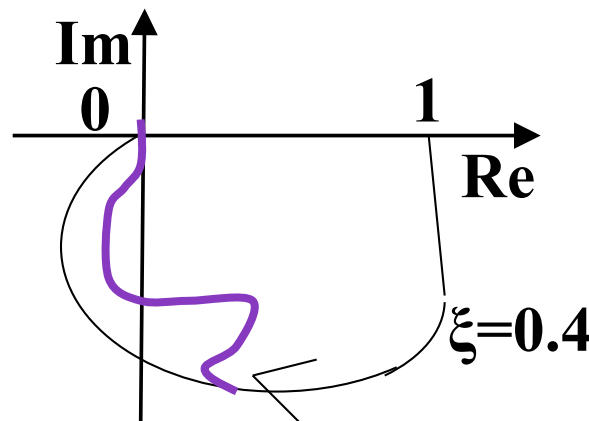
$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}), & \omega T > 1 \end{cases}$$

◆关于振荡环节幅相曲线的进一步分析：

？频率增大时相角的变化是否单调？

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \angle G(j\omega) &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right)^2} \frac{2\zeta T(1 - \omega^2 T^2) - 2\zeta\omega T(-2\omega T^2)}{(1 - \omega^2 T^2)^2} \\ &= -\frac{2\zeta T(1 + \omega^2 T^2)}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2} < 0 \end{aligned}$$

频率增大时相角的变化是单调递减的。



### 三、典型环节的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j2\zeta\omega T}$$

▪对数幅频特性:  $L(\omega) = -20\lg[(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2]^{\frac{1}{2}}$

▪对数相频特性:  $\varphi(\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}), & \omega T > 1 \end{cases}$

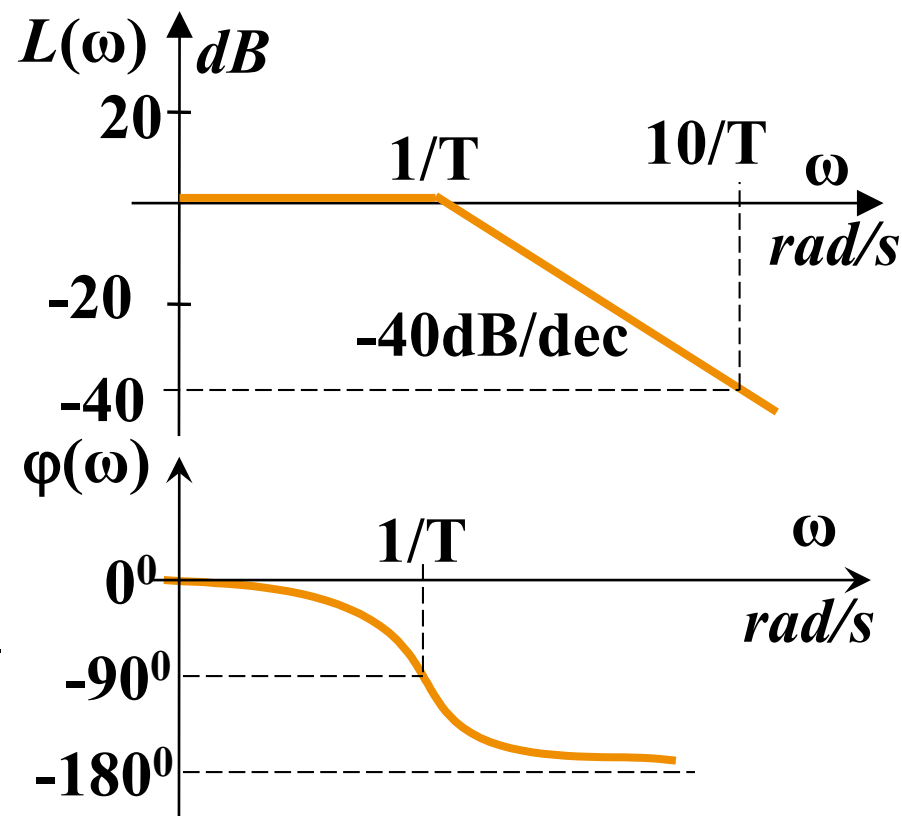
◆讨论:

▪低频渐近线  $\omega \ll 1/T$ ,  $L(\omega) = 0dB$ ,  $\varphi(\omega) = 0^\circ$

▪高频渐近线  $\omega \gg 1/T$ ,  $L(\omega) = -40\lg \omega T$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

高频渐近线的斜率为-40dB/dec, 与 $\omega$ 轴的交点为 $\omega=1/T$ 。

◆将低频和高频渐近线延长, 得到振荡环节的渐近对数幅频特性。



### 三、典型环节的频率特性

◆ **渐近对数幅频特性的误差(精确值减去近似值)**。  $L(\omega) = -20\lg[(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2]^{\frac{1}{2}}$

■ **低频段**( $\omega \ll 1/T$ )**误差**: 设  $\omega_1 = \frac{1}{KT}$ , 其中  $K > 1$ , 则

$$e_{L1} = -10 \lg[(1 - (1/K)^2)^2 + 4\zeta^2 (1/K)^2] - 0$$

$-\lg K$  是  $\omega$  离转折频率的距离。

■ **高频段**( $\omega \gg 1/T$ )**误差**: 设  $\omega_2 = \frac{K}{T}$ , 其中  $K > 1$ ,

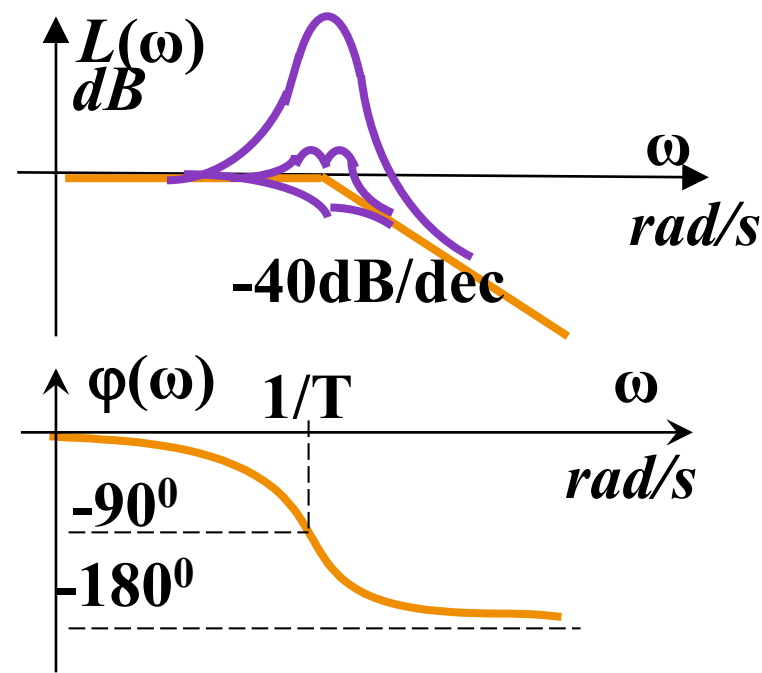
$$e_{L2} = -10 \lg[(1 - K^2)^2 + 4\zeta^2 K^2] + 40\lg K$$

■  $\omega = \frac{1}{T}$  时误差为  $e_L = -20 \lg 2\zeta$

即近似值比真值大  $20 \lg 2\zeta$ :  $\zeta = 1$  时  $e_L = -6\text{dB}$ 。

$\zeta = 0.5$  时  $e_L = 0\text{dB}$ 。

$\zeta = 0.05$  时  $e_L = 20\text{dB}$ 。





### 三、典型环节的频率特性

$$e_{L1} = e_{L2} = -10 \lg[(1 - K^2)^2 + 4\zeta^2 K^2] + 40 \lg K$$

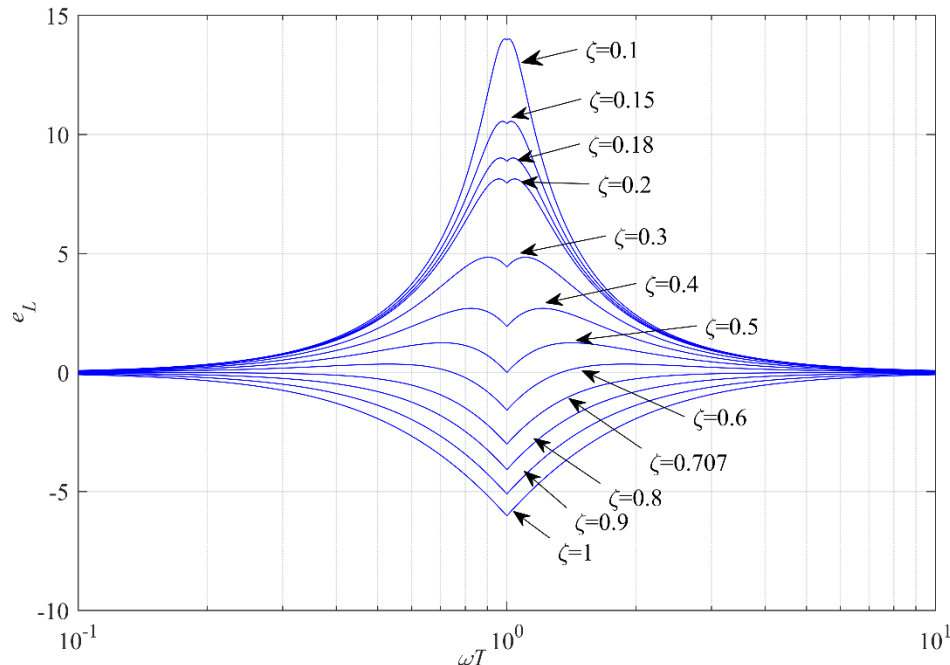
- ◆ 振荡环节渐近对数幅频特性曲线的误差，是阻尼比的函数，且关于转折频率 $\frac{1}{T}$ 对称。

- ◆ 通常大于（或小于）十倍转折频率时，误差可忽略不计。

误差曲线如图。

- 误差曲线关于 $\frac{1}{T}$ 对称；
- 曲线的峰值都有两个，  
一个在 $\frac{1}{T}$ 左边，另一个在 $\frac{1}{T}$ 右边；

? 何时两峰值趋于重合?



### 三、典型环节的频率特性

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -\left(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}\right), & \omega T > 1 \end{cases}$$

◆对数相频曲线特点:

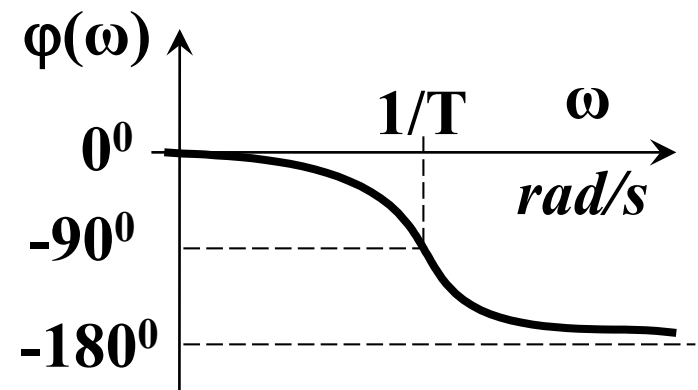
❓对数相频特性曲线关于点 $\omega = \frac{1}{T}$ 、 $\varphi(\omega) = -90^\circ$ 斜对称。

设 $\omega_1 = \frac{1}{KT}$ ,  $\omega_2 = \frac{K}{T}$ , 其中 $K > 1$ ,

则 $\varphi(\omega_1) = -tg^{-1} \frac{2\zeta \frac{1}{K}}{1 - \frac{1}{K^2}} = -tg^{-1} \frac{2\zeta K}{K^2 - 1}$

$$\varphi(\omega_2) = -180^\circ + tg^{-1} \frac{2\zeta K}{K^2 - 1}$$

$$\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) = -180^\circ$$



◆离 $1/T$ 左右相同距离的频率对应的相频之和为 $-180^\circ$ 。

### 三、典型环节的频率特性

#### ◆对数相频曲线特点：

❓转折频率 $1/T$ 增大或减小时，

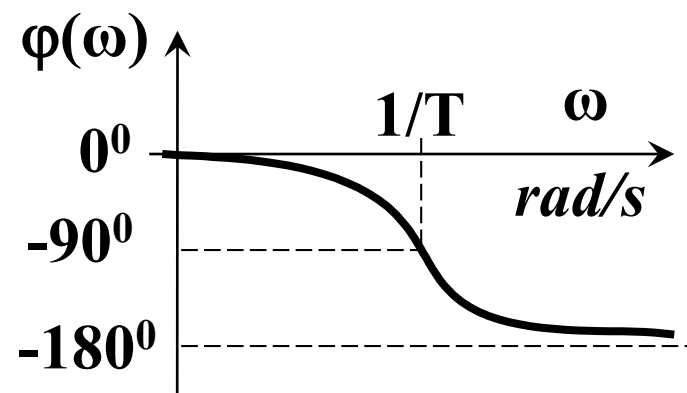
幅频和相频特性曲线相应地左移或右移，但形状不变。

设 $\omega_1 = \frac{a}{T_1}$ ， $\omega_2 = \frac{a}{T_2}$ ，其中 $a > 0$ ，则

$$\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta a}{1 - a^2}, & a \leq 1 \\ -\left(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta a}{a^2 - 1}\right), & a > 1 \end{cases}$$

◆当 $T$ 改变时，离 $1/T$ 相同距离的频率对应的相频值相等。

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -\left(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta \omega T}{\omega^2 T^2 - 1}\right), & \omega T > 1 \end{cases}$$



### 三、典型环节的频率特性

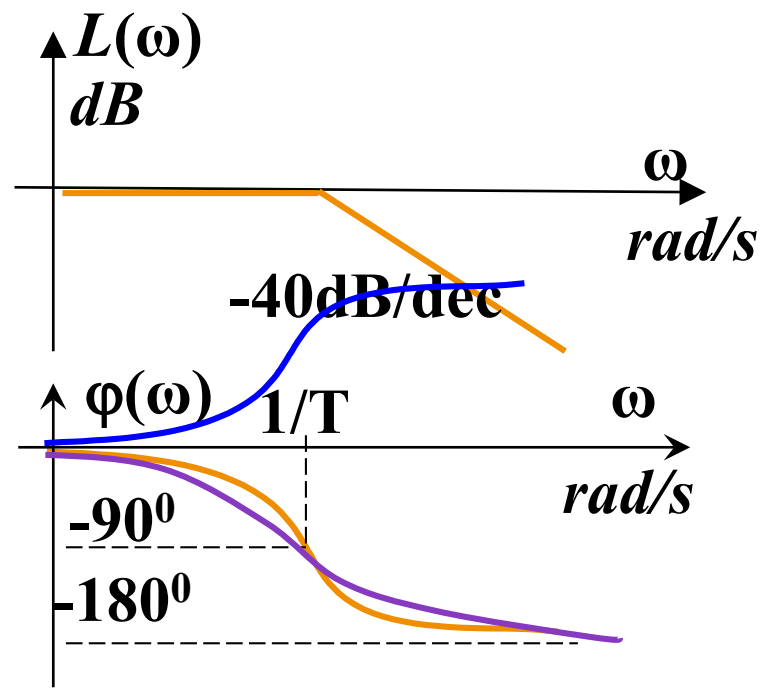
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1 \\ -\left(180^\circ - tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}\right), & \omega T > 1 \end{cases}$$

?  $\zeta$  对对数相频特性的影响?

$$\frac{d}{d\omega} \varphi(\omega) = -\frac{2\zeta T(1 + \omega^2 T^2)}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2} < 0$$

$\zeta$  越小，曲线在  $1/T$  处的变化速率越大，曲线越陡。  
即黄线对应的  $\zeta$  值小于紫线对应的值。

◆  $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 - 2\xi Ts + 1}$



### 三、典型环节的频率特性

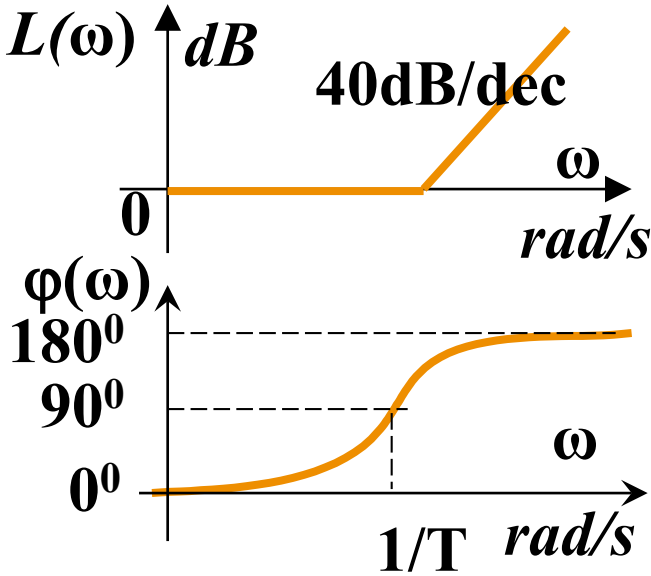
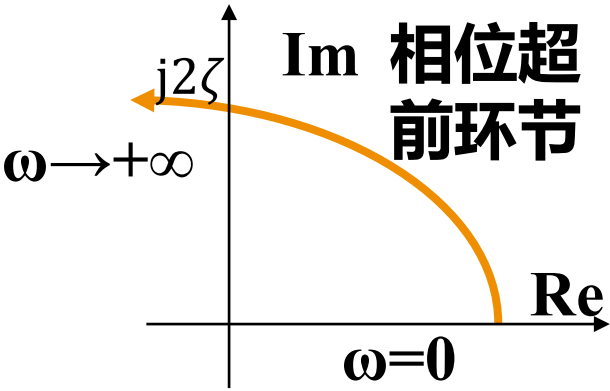
$G(s) = T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1 \quad G(j\omega) = 1 - \omega^2T^2 + j2\zeta\omega T$

◆幅相曲线:

幅频特性  $|G(j\omega)| = \sqrt{(1 - \omega^2T^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2T^2}$

相频特性  $\angle G(j\omega) = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2T^2}, & \omega T \leq 1, \\ 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2T^2 - 1}, & \omega T > 1. \end{cases}$

$\omega$	0	→增大	$\rightarrow \frac{1}{T}$	$\rightarrow \infty$
$ G(j\omega) $	1	→	$\rightarrow 2\zeta$	$\rightarrow \infty$
$\angle G(j\omega)$	$0^\circ$	→增大	$\rightarrow 90^\circ$	$\rightarrow 180^\circ$



◆ Bode图 与振荡环节对数频率特性关于横轴对称。

### 三、典型环节的频率特性

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad G(j\omega) = e^{-\tau j\omega} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

◆ **幅相曲线**：幅频特性  $|G| = 1$

相频特性  $\angle G(j\omega) = -\omega\tau$

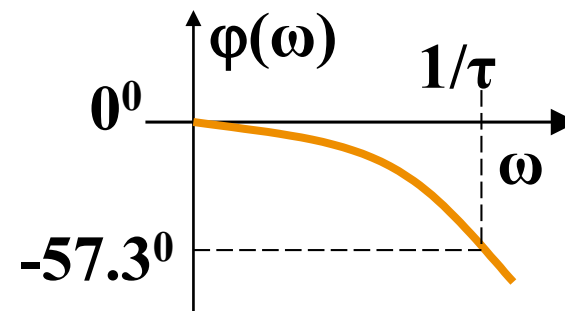
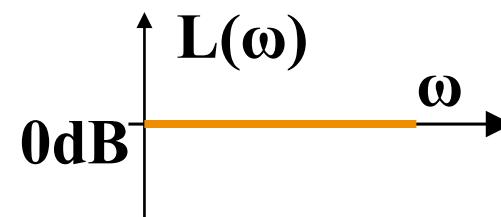
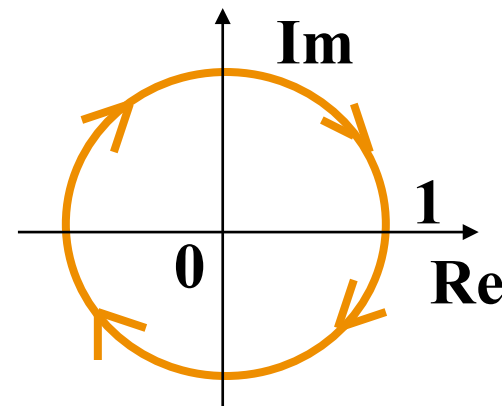
◆ **Bode图**：对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg 1 = 0$$

对数相频特性

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau \times$$

$$\varphi(\omega) = -57.3 \times \omega\tau \text{度}$$



### 三、典型环节的频率特性

对于  $G(s) = \frac{1}{-Ts+1}$  , 或  $G(s) = \frac{1}{Ts-1}$  ,

不稳定的惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1} ,$$

不稳定的振荡环节

$$G(s) = -Ts + 1, \text{ 或 } G(s) = Ts - 1,$$

不稳定的一阶微分环节

$$G(s) = T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1,$$

不稳定的二阶微分环节

- ◆ 它们与对应的稳定的各个环节相比, 幅频特性不变, 相频特性不同。

### 三、典型环节的频率特性

!原则：单个环节的相角 $-180^{\circ}\sim 180^{\circ}$ 。

$G(s) = \frac{1}{-Ts + 1}$	$\angle G(j\omega) = tg^{-1}\omega T$
$G(s) = \frac{1}{Ts - 1}$	$\angle G(j\omega) = -180^{\circ} + tg^{-1}\omega T$
$G(s) = \frac{1}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1}$	$\angle G(j\omega) = \begin{cases} tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1, \\ 180^{\circ} - tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}, & \omega T > 1. \end{cases}$
$G(s) = -Ts + 1$	$\angle G(j\omega) = -tg^{-1}\omega T$
$G(s) = Ts - 1$	$\angle G(j\omega) = 180^{\circ} - tg^{-1}\omega T$
$G(s) = T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1$	$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}, & \omega T \leq 1, \\ -180^{\circ} + tg^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{\omega^2 T^2 - 1}, & \omega T > 1. \end{cases}$

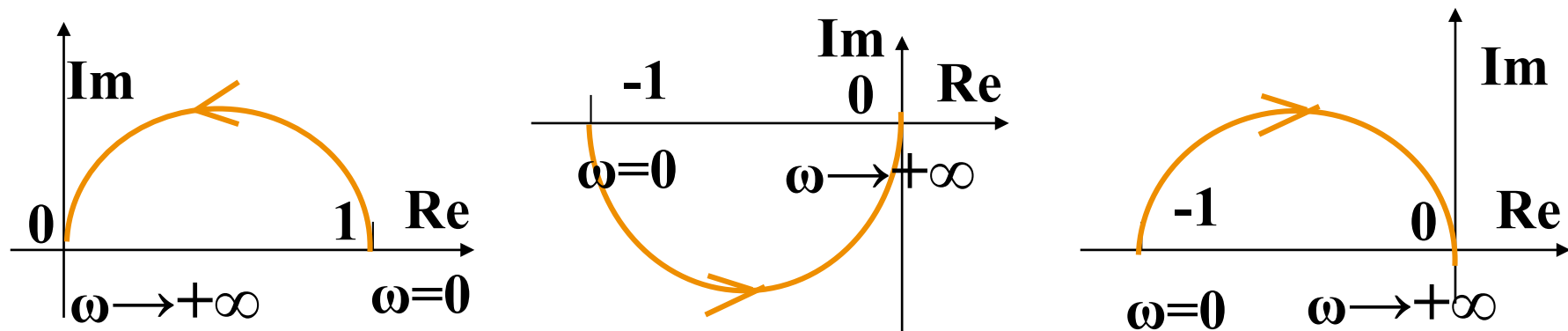


### 三、典型环节的频率特性

对比  $G_1(s) = \frac{1}{-Ts+1}$ 、 $G_2(s) = \frac{1}{Ts-1}$ 、 $G_3(s) = \frac{-1}{Ts+1}$  的幅相曲线

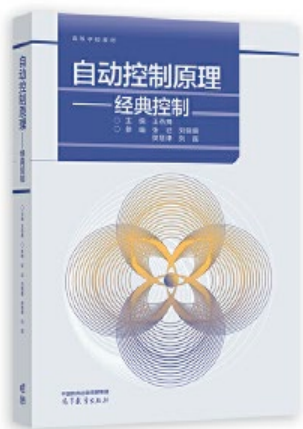
$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = |G_3(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G_1(j\omega) = \text{tg}^{-1} \omega T \quad \angle G_2(j\omega) = -180^\circ + \text{tg}^{-1} \omega T \quad \angle G_3(j\omega) = -180^\circ - \text{tg}^{-1} \omega T$$



与惯性环节  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$  关于实轴对称。

则对应的对数幅频特性相同，相频特性关于横轴对称。



# 第五章：线性系统的频率分析

## 第18讲 幅相曲线的绘制

### Polar plots

#### 本讲内容

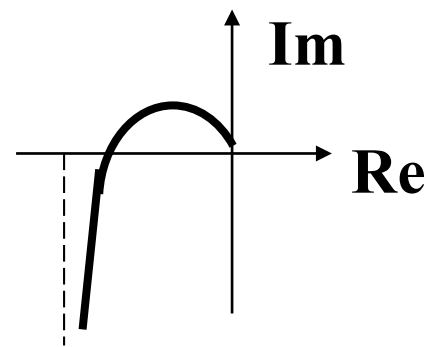
- 一、绘制幅相曲线方法
- 二、绘制幅相曲线例题
- 三、总结

# 一、绘制幅相曲线方法

◆一般通过**开环系统**的幅相频率特性曲线来分析系统的稳定性。

## ? 绘制幅相曲线的步骤?

- 由频率特性得到实频特性和虚频特性，根据它们的符号确定频率特性曲线会经过哪些象限。
- 由 $\omega$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ ，计算起点和终点的幅频和相频特性，分析 $\omega$ 变化的趋势，绘出相应的幅相曲线。
- 求出幅相曲线与坐标轴的交点的值并标注在图上。
- 用箭头标出 $\omega$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化的方向。
- 如果存在渐近线，则应标出渐近线的值。



# 一、绘制幅相曲线方法

对于**最小相位系统**(开环传递函数**没有**右半平面的零点和极点的系统)，设积分环节的个数为r，

$$G(s) = \frac{K \prod(\tau s + 1) \prod(\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1)}{s^r \prod(Ts + 1) \prod(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)}$$

◆ 幅频特性：各环节乘积

◆ 相频特性：各环节相加

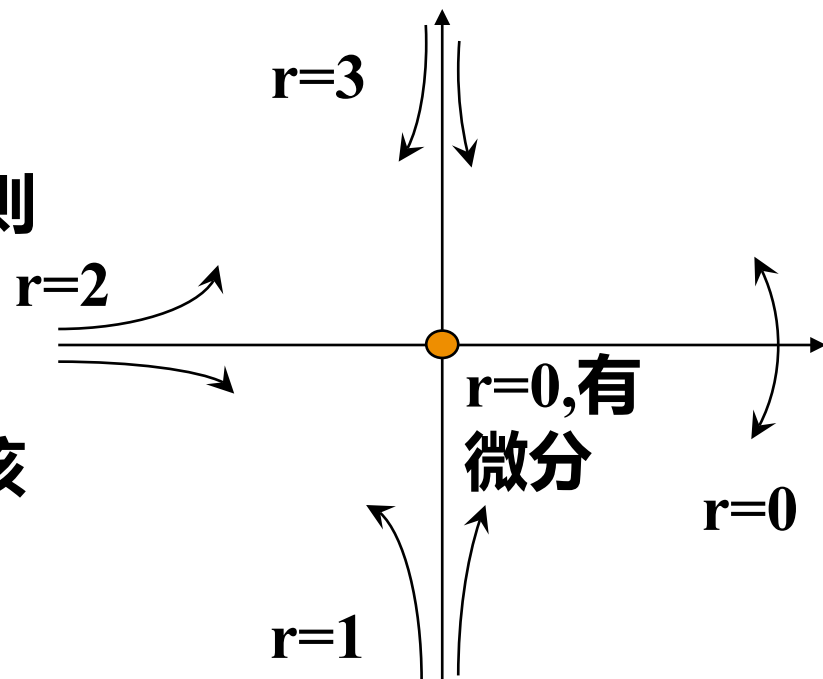
		比例	积分	微分	惯性	振荡	一阶微分	二阶微分
起点	幅频	K	$\infty$	0	1	1	1	1
	相频	0	-90	90	0	0	0	0
终点	幅频	K	0	$\infty$	0	0	$\infty$	$\infty$
	相频	0	-90	90	-90	-180	90	180

# 一、绘制幅相曲线方法

		比例	积分	微分	惯性	振荡	一阶微分	二阶微分
起点	幅频	K	$\infty$	0	1	1	1	1
	相频	0	-90	90	0	0	0	0
终点	幅频	K	0	$\infty$	0	0	$\infty$	$\infty$
	相频	0	-90	90	-90	-180	90	180

## 最小相位系统幅相曲线的起点:

- ◆ **起点**的位置与积分环节有关，设积分环节的个数为 $r$ ，则
  - 若 $r < 0$ 有微分环节，则起始于原点。
  - 若 $r = 0$  (也无微分环节时)，则起始于正实轴上某点，且该点距原点的距离为开环增益 $K$ 值。
  - 若 $r > 0$ ，则起始于无穷远处，相角为 $-r90^\circ$ 。



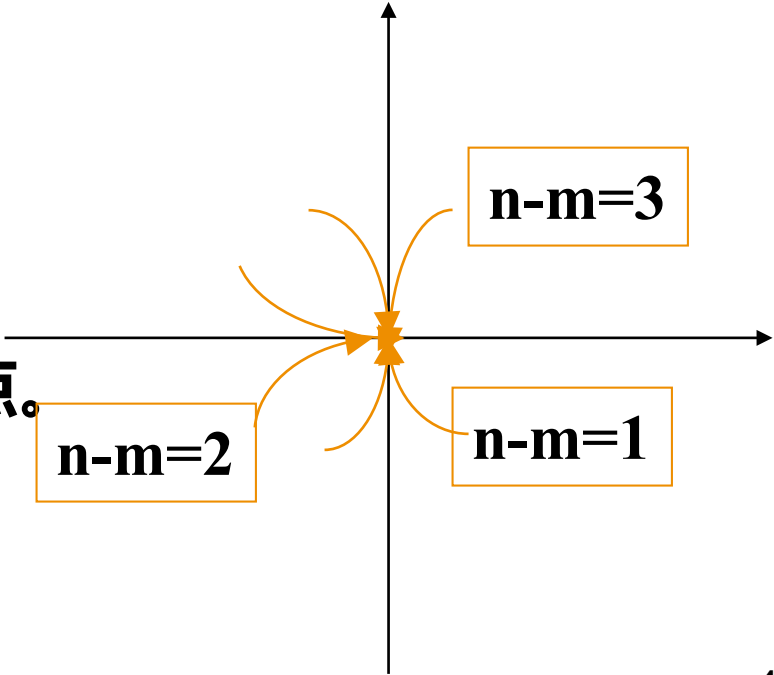
# 一、绘制幅相曲线方法

		比例	积分	惯性	振荡	微分	一阶微分	二阶微分
起点	幅频	K	$\infty$	1	1	0	1	1
	相频	0	-90	0	0	90	0	0
终点	幅频	K	0	0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	相频	0	-90	-90	-180	90	90	180

对于最小相位系统，幅相曲线的终点规律如下：

- ◆**终点**：设分母的阶次为 $n$ ，分子的阶次为 $m$ ，则
  - 当 $n=m$ 时，曲线终止于正实轴上某点。
  - 当 $n>m$ 时，终点在原点，且以 $(n-m) \times (-90^\circ)$ 的角度进入原点。

注：以下例题，不特别声明时参数都大于0。



## 二、绘制幅相曲线例题

已知开环传函  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ ,  $K, T > 0$  绘制开环幅相曲线图。

【解】

1、写出实频、虚频、幅频、相频特性

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T + 1)} = -\frac{KT}{\omega^2 T^2 + 1} - j \frac{K}{(\omega^2 T^2 + 1)\omega} = u + jv$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega T$$

2、分析变化趋势： $\omega: 0 \rightarrow \infty$  时， $u: -KT \rightarrow$  单调增大  $\rightarrow 0$

$v: -\infty \rightarrow$  单调增大  $\rightarrow 0$

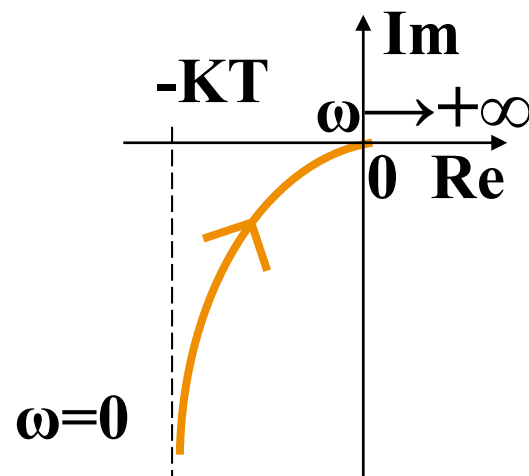
$|G|: \infty \rightarrow$  单调减小  $\rightarrow 0$

$\angle G: -90^\circ \rightarrow -180^\circ$

与实轴相切到达原点。

3、判断是否具有特殊形状。

4、标注箭头和特殊的频率值。



1个积分环节且  $n-m=2$

## 二、绘制幅相曲线例题

【解】 1、写出各频率特性。

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts+1}, T > 0 \quad G(j\omega) = \frac{j\omega T}{j\omega T + 1} = \frac{\omega^2 T^2}{\omega^2 T^2 + 1} + j \frac{\omega T}{\omega^2 T^2 + 1} = u + jv$$

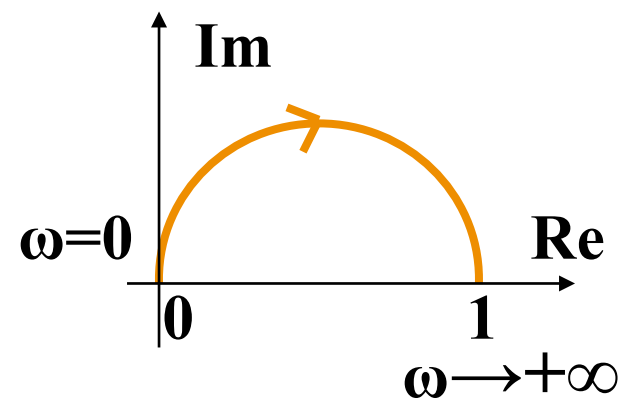
$$|G(j\omega)| = \frac{\omega T}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \quad \varphi(\omega) = 90^\circ - \arctan \omega T$$

2、分析变化趋势： $\omega: 0 \rightarrow \infty$ 时， $u: 0 \rightarrow$ 单调增大 $\rightarrow 1$   
 $v: 0 \rightarrow$ 先增后减 $\rightarrow 0$   
 $|G|: 0 \rightarrow$ 单调增大 $\rightarrow 1$   
 $\angle G: 90^\circ \rightarrow$ 单调减小 $\rightarrow 0$

3、判断是否具有特殊形状。

$$u^2 - u + v^2 = 0 \quad \text{即} \quad \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

4、标注箭头和特殊的频率值。



1个微分环节且 $n=m$



## 二、绘制幅相曲线例题

已知开环传递函数  $G(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$ ，概略绘制开环幅相曲线。

【解】  $G(j\omega) = \frac{1 + T_1 T_2 \omega^2 + (T_1 - T_2) \omega j}{T_2^2 \omega^2 + 1} \quad |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}$

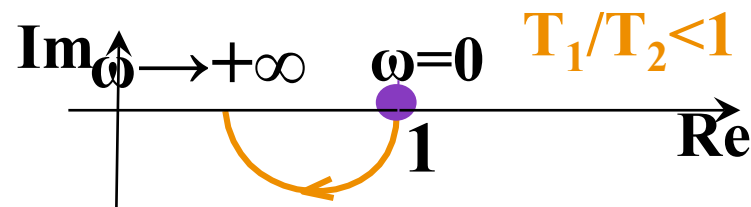
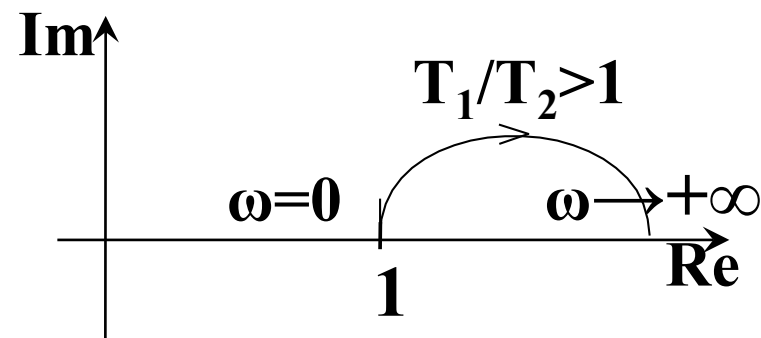
$$\omega = 0, |G| = 1, \angle G = 0^\circ, \quad \phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(T_1 \omega) - \operatorname{tg}^{-1}(T_2 \omega)$$

$$\omega \rightarrow \infty, |G| = \frac{T_1}{T_2}, \angle G = 0^\circ$$

1)  $T_1 > T_2, T_1 / T_2 > 1, \phi > 0$      $\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: 1 \rightarrow T_1/T_2$ ,  
 $v: 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0$

2)  $T_1 < T_2, T_1 / T_2 < 1, \phi < 0$      $\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: 1 \rightarrow T_1/T_2$ ,  
 $v: 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

3)  $T_1 = T_2, u=1, v=0$



无积分/微分且  $m=n$

## 二、绘制幅相曲线例题

已知开环传函，概略绘制开环幅相曲线。  $G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$

【解】  $|G| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$ ,  $\angle G = -\operatorname{tg}^{-1} \omega T_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_2$ ,

$$u(\omega) = \frac{K[1 - \omega^2 T_1 T_2]}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}, \quad v(\omega) = \frac{-K\omega(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,

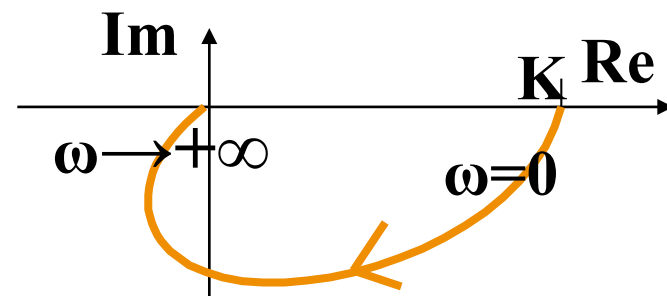
$u: K \rightarrow 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$ ,

$v: 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G|: K \rightarrow 0$

$\angle G: 0^\circ \rightarrow \text{单调减小} \rightarrow -180^\circ$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$  时,  $u=0$ ,  $v = -\frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$



无积分环节且  $n > m$

与虚轴的交点法2: 令  $\angle G(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega = -90^\circ$

## 二、绘制幅相曲线例题

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

已知开环传函，概略绘制开环幅相曲线。

【解】  $G(j\omega) = \frac{K[1 - \omega^2(T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2))] + j\omega(\tau - T_1 - T_2 - T_1 T_2 \tau \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \omega \tau - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_2 \quad |G(j\omega)| = \frac{K \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

1. 若  $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} > \tau$ ，则  $\tau < T_1 + T_2$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: K \rightarrow \text{正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$v: 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G|: K \rightarrow 0$

$\angle G: 0^\circ \rightarrow -90^\circ \rightarrow \text{负} \rightarrow -90^\circ$

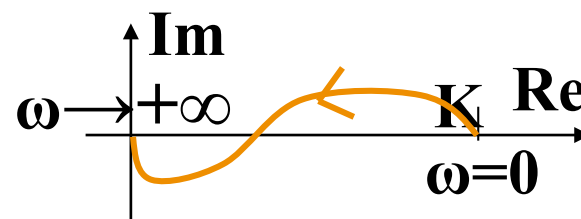
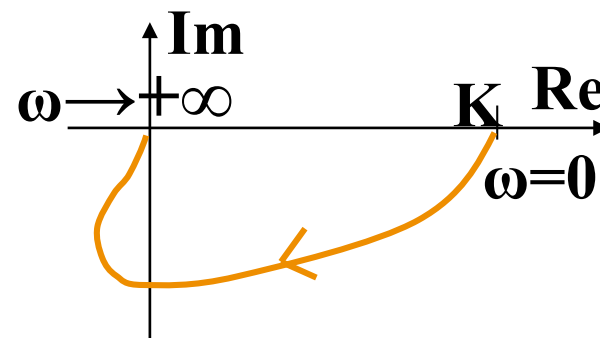
2. 若  $\tau > T_1 + T_2$ ，则  $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} < \tau$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: K \rightarrow \text{正} \rightarrow 0$

$v: 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G|: K \rightarrow 0$

$\angle G: 0^\circ \rightarrow \text{正} \rightarrow 0^\circ \rightarrow \text{负} \rightarrow -90^\circ$  交点坐标自求



# 一、根轨迹的基本概念

已知开环传函，概略绘制开环幅相曲线。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

【解】  $G(j\omega) = \frac{K[1 - \omega^2(T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2))] + j\omega(\tau - T_1 - T_2 - T_1 T_2 \tau \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \omega \tau - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_2$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

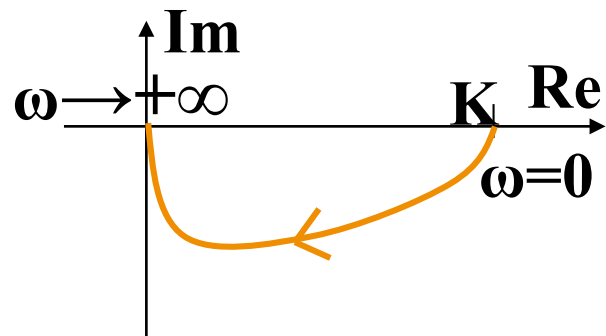
3. 若  $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \leq \tau \leq T_1 + T_2$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: K \rightarrow \text{正} \rightarrow 0$

$v: 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G|: K \rightarrow 0$

$\angle G: 0^\circ \rightarrow -90^\circ$



## 二、绘制幅相曲线例题

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad \tau, T_1, T_2 > 0,$$

【解】

$$|G| = \frac{K\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\omega\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}, \quad \angle G = \operatorname{tg}^{-1} \omega \tau - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega T_2,$$

$$u = -\frac{K(T_1 + T_2 - \tau + T_1 T_2 \tau \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}, \quad v = -\frac{K[1 - \omega^2(T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2))]}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)},$$

$\omega$	0	$\rightarrow$ 增大	$\rightarrow \infty$
$ G(j\omega) $	$\infty$	$\rightarrow$ 减小	$\rightarrow 0$
$\angle G(j\omega)$	$-90^\circ$	$\rightarrow$	$\rightarrow -180^\circ$
$u(\omega)$	$-K(T_1 + T_2 - \tau)$	$\rightarrow$	$\rightarrow 0$
$v(\omega)$	$-\infty$	$\rightarrow$	$\rightarrow 0$

$\tau, T_1, T_2$ 三个参数的大小关系决定了实频和虚频特性的符号，需分情况讨论。

## 二、绘制幅相曲线例题

$$u = -\frac{K(T_1 + T_2 - \tau + T_1 T_2 \tau \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}, \quad v = -\frac{K[1 - \omega^2(T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2))]}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)},$$

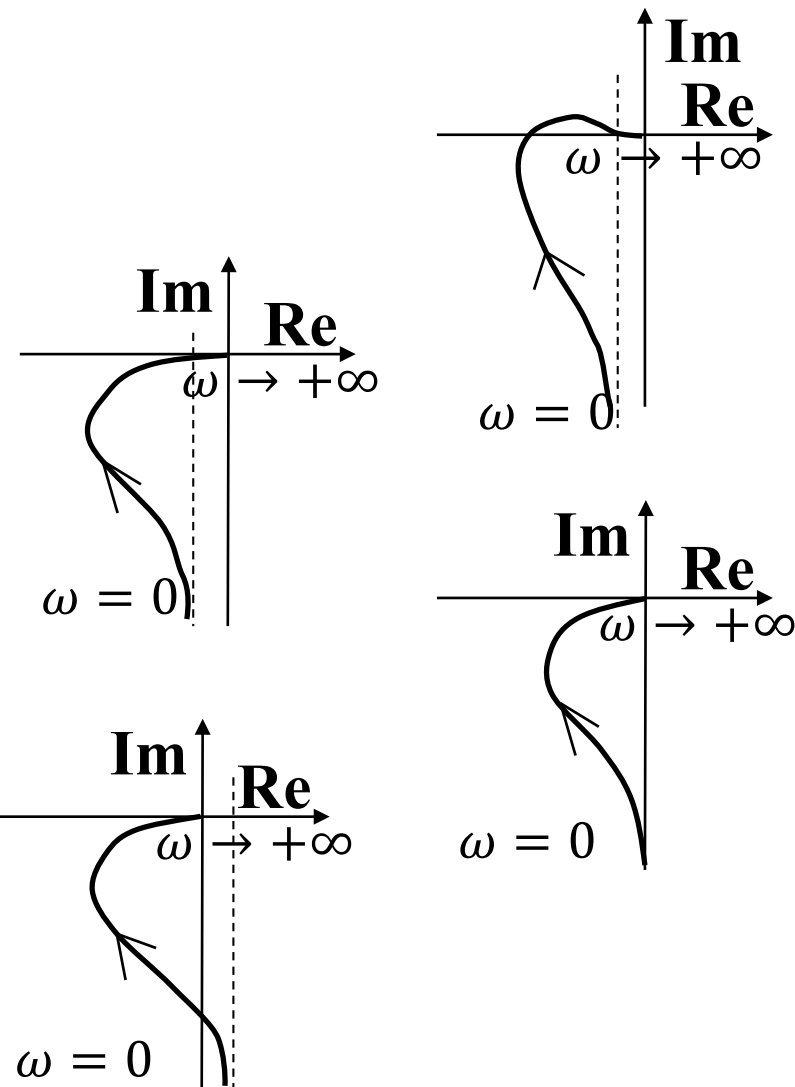
- $\tau < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ ,  $u$ : 负  $\rightarrow 0$ ,  $v$ : 负  $\rightarrow 0 \rightarrow$  正  $\rightarrow 0$ ,

$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2)}}$  时,  $v(\omega) = 0$ , 与实轴相交。

- $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \leq \tau < T_1 + T_2$ ,  $u$ : 负  $\rightarrow 0$ ,  $v$ : 负  $\rightarrow 0$ , 与实轴不相交。

- $\tau = T_1 + T_2$ ,  $u$ : 0  $\rightarrow$  负  $\rightarrow 0$ ,  $v$ : 负  $\rightarrow 0$ , 起点在虚轴上无穷远处, 与实轴不相交。

- $\tau > T_1 + T_2$ ,  $u$ : 正  $\rightarrow 0 \rightarrow$  负  $\rightarrow 0$ ,  $v$ : 负  $\rightarrow 0$ , 起点在虚轴右侧, 与实轴不相交。



## 二、绘制幅相曲线例题

【解】 已知开环传函，概略绘制开环幅相曲线。

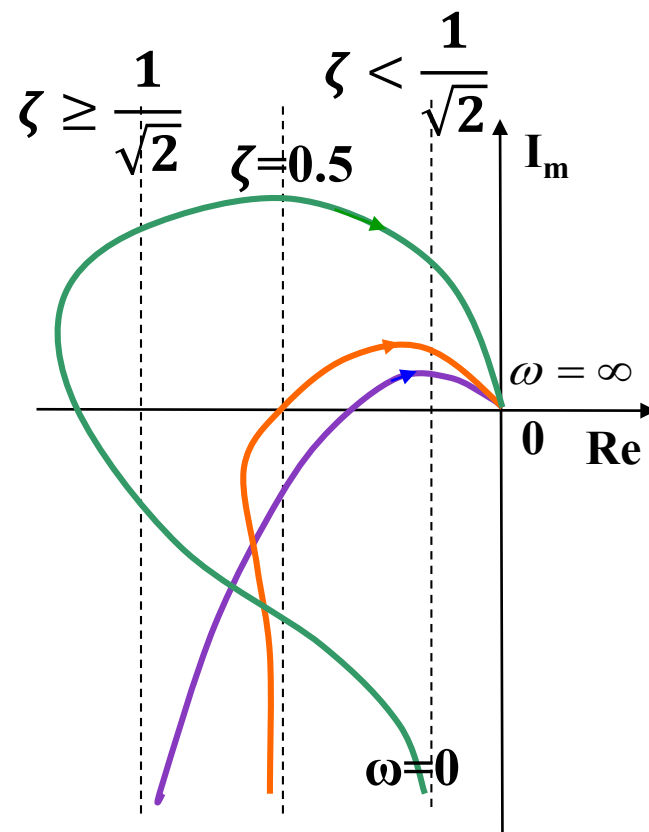
$$G(s) = \frac{K}{s(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-2K\zeta T\omega - K(1 - T^2\omega^2)j}{\omega[(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2]} \quad |G| = \frac{K}{\omega\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}}$$

$$\angle G = -90^\circ - \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}, & \omega \leq \frac{1}{T} \\ 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta T\omega}{T^2\omega^2 - 1}, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $u: -2\zeta KT \rightarrow 0$   
 $v: -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0$   
 $|G| = \infty \rightarrow 0$   
 $\angle G = -90^\circ \rightarrow -180^\circ \rightarrow -270^\circ$

$\omega = \frac{1}{T}$  时,  $v=0$ ,  $u = -\frac{KT}{2\zeta}$ ,  $\angle = -180^\circ$



求  $u$  关于  $\omega$  的导数得若  $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则  $\frac{du}{d\omega} > 0$ ; 若  $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 则实频先减小后增大。

## 二、绘制幅相曲线例题

### 非最小相位系统

已知开环传函，概略绘制开环幅相曲线。  $G(s) = \frac{10(\tau s + 1)}{s(s - 10)}$

【解】  $|G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 100}}$   $\angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1}\tau\omega - 90^\circ - (180^\circ - \text{tg}^{-1}(\omega/10))$

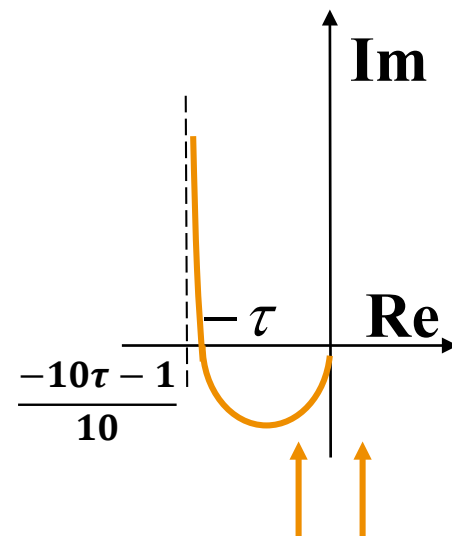
$$G(j\omega) = \frac{-10\omega(10\tau + 1) - j10(\tau\omega^2 - 10)}{\omega(100 + \omega^2)}$$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时,  $\text{Re}: -(10\tau + 1)/10 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$ ,

$\text{Im}: +\infty \rightarrow 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G| = \infty \rightarrow 0$

$\angle G = -270^\circ \rightarrow -90^\circ$



与实轴的交点: 令  $\text{Im } G(j\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{10/\tau} \Rightarrow \text{Re } G(j\omega) = -\tau$

与虚轴的交点: 无!



## 二、绘制幅相曲线例题

### 非最小相位系统

已知开环传函，绘制开环幅相曲线。

$$G(s) = \frac{20}{(s-1)(s+2)(s+5)}$$

【解】  $|G(j\omega)| = \frac{20}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}\sqrt{\omega^2+25}}$  ,

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{5} - (180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \omega),$$

$$u(\omega) = \frac{-20[10 + 6\omega^2]}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 25)}, \quad v(\omega) = \frac{-20\omega(3 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 25)},$$

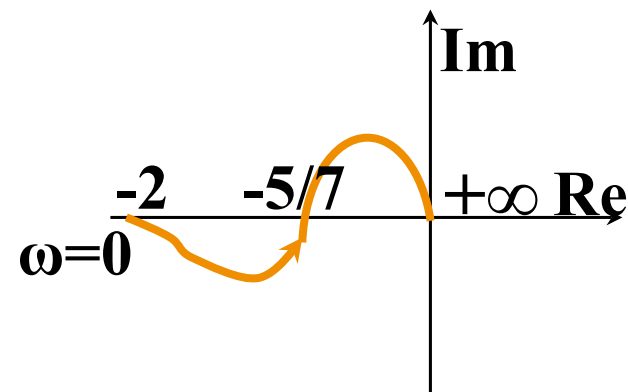
$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时, Re:  $-2 \rightarrow 0$ ,

Im:  $0 \rightarrow$  负  $\rightarrow 0 \rightarrow$  正

$|G| = 2 \rightarrow 0$

$\angle G = -180^\circ \rightarrow -270^\circ$

当  $\omega = \sqrt{3}$  时  $v(\omega) = 0$ ,  $u(\omega) = -\frac{5}{7}$ 。



## 二、绘制幅相曲线例题

### 带纯虚根的最小相位系统

已知开环传函，绘制开环幅相曲线。

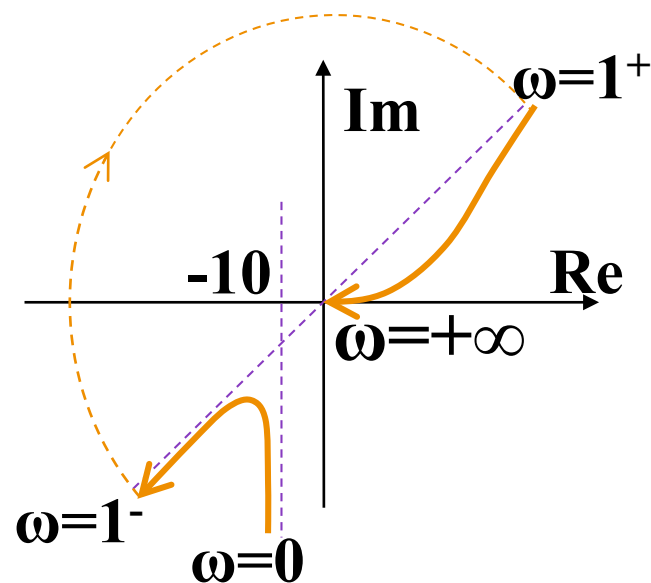
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s^2+1)}$$

【解】  $G(j\omega) = \frac{-10}{(1-\omega^4)} - \frac{10}{\omega(1-\omega^4)}j$

$$|G| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}|1-\omega^2|}$$

$$\angle G = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\omega - \begin{cases} 0^\circ, \omega \leq 1 \\ 180^\circ, \omega > 1 \end{cases}$$

$\omega$	0		$1^-$	$1^+$	$\infty$
$u$	-10	减小	$-\infty$	$+\infty$	0
$v$	$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$	0
$ GH $	$+\infty$	减小	$+\infty$	$+\infty$	0
$\angle G$	$-90^\circ$		$-135^\circ$	$-315^\circ$	$-360^\circ$



## 二、绘制幅相曲线例题

已知开环传函，绘制开环幅相曲线。

$$G(s) = \frac{K_v e^{-\tau s}}{s(Ts + 1)}$$

【解】  $G(j\omega) = \frac{K_v e^{-j\omega\tau}}{j\omega(j\omega T + 1)}$  ,  $|G(j\omega)| = \frac{K_v}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$  ,

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega T - 57.3^\circ\omega\tau,$$

$$G(j\omega) = \frac{-K_v(\omega T \cos\omega\tau + \sin\omega\tau)}{\omega(1 + T^2\omega^2)} - \frac{K_v(\cos\omega\tau - \omega T \sin\omega\tau)}{\omega(1 + T^2\omega^2)}j$$

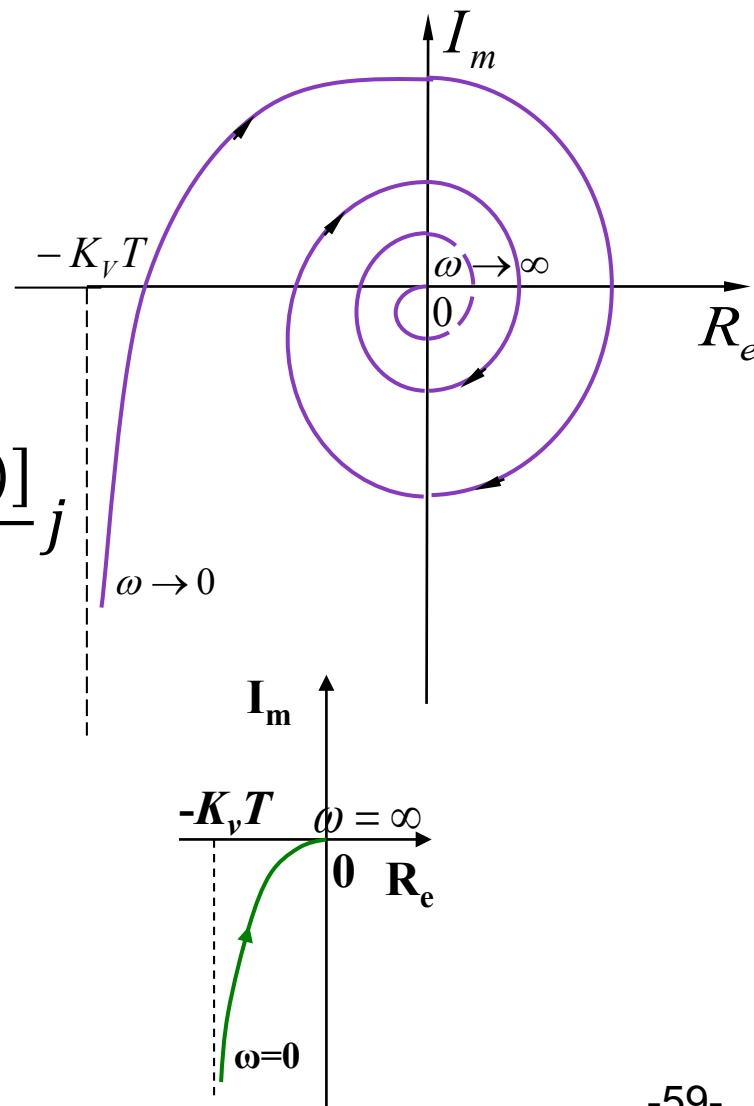
$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时

$u: -K_v T \rightarrow \text{负} \rightarrow 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{负}(\text{循环})$

$v: -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{负}(\text{循环})$

$|G|: \infty \rightarrow 0$  (单调减小)

$\angle G: -90^\circ \rightarrow -\infty$  (单调负增长)



## 三、小结

### ◆ 注意事项

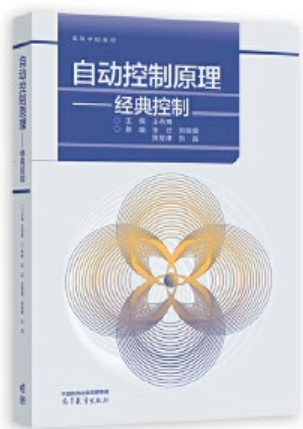
! 借助实频和虚频特性判断相频特性以及曲线的位置

! 起点和终点的角度

! 如果存在渐近线，则应标出渐近线的值

! 用箭头标出 $\omega$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化的方向

! 求出幅相曲线与坐标轴的交点，与负实轴的交点



## 第五章：线性系统的频率分析

### 第19讲 波特图的绘制

Bode diagrams: Log-Magnitude-versus-Phase Plots

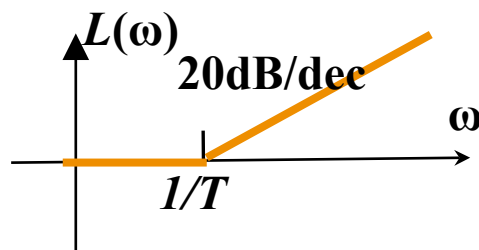
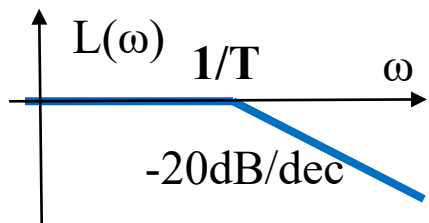
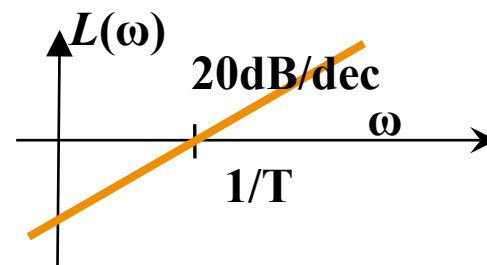
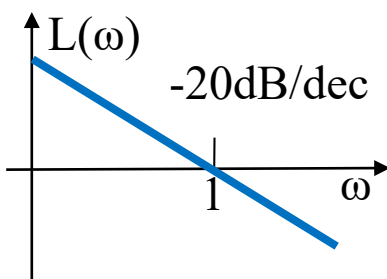
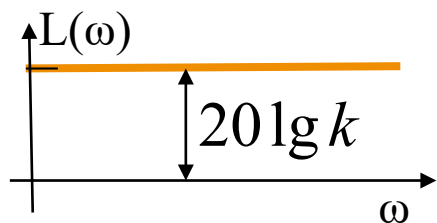
#### 本讲内容

- 一、绘制Bode图方法
- 二、绘制Bode图例子
- 三、总结

# 一、绘制Bode图方法

◆ 系统的对数频率特性图可由典型环节**叠加**。

$$20\lg|G_1 G_2| = 20\lg|G_1| + 20\lg|G_2| \quad \angle G_1 G_2 = \angle G_1 + \angle G_2$$

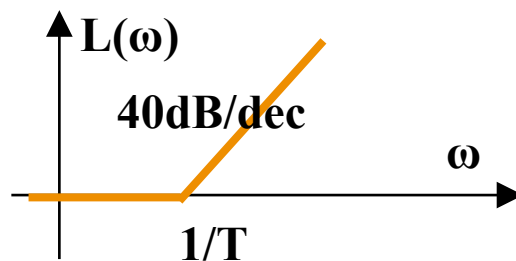
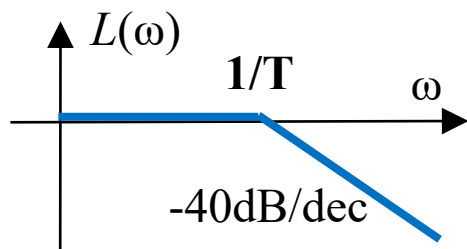


? 叠加时有何特点?

曲线形状?

起始段?

遇到转折频率时?



# 一、绘制Bode图方法

## ◆ 对数幅频特性曲线：

- **结论1**：控制系统的开环对数幅频特性由典型环节的对数幅频特性曲线**叠加**而成。对数**幅频特性**的**渐近线**由直线段组成。
- **结论2**：对数幅频特性渐近线**起始段**的斜率和位置由比例环节和积分(微分)环节决定：

▪ 因 $\omega \ll 1$ 时,  $L(\omega) = 20 \lg \left| \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) \right| = 20 \lg K - 20 \lg |j\omega|^r = 20 \lg K - r 20 \lg \omega$

$s^r G(s)$ 并令 $s=0$ 得到

其中 $K$ 为开环放大系数,  $r$ 为积分环节的个数。

故渐近线起始段过 $\omega=1$ ,  $L(\omega)=20 \lg K$ 点, 斜率为 $-r 20 \text{dB/dec}$ 。

! 若系统有 $p$ 个微分环节, 则起始段的斜率应 $+p 20 \text{dB/dec}$ 。

# 一、绘制Bode图方法

➤ **结论3**：对数幅频特性的渐近线从低频段向高频段延伸时，每经过一个转折频率，直线段的斜率就相应地改变 $\Delta_s$ 。

经过一个一阶微分环节的转折频率， $\Delta_s = +20\text{dB/dec}$ ,

经过一个二阶微分环节的转折频率， $\Delta_s = +40\text{dB/dec}$ ,

经过一个惯性环节的转折频率， $\Delta_s = -20\text{dB/dec}$ ,

经过一个振荡环节的转折频率， $\Delta_s = -40\text{dB/dec}$ ,

? 若有相同的转折频率，则 $\Delta_s = ?$

➤ **结论4**：渐近对数幅频特性曲线的修正：

惯性环节的幅频应 $-3\text{dB}$ ，一阶微分环节的幅频应 $+3\text{dB}$ 。振荡环节的幅频应修正  $-20 \lg 2\zeta$ 。

? 对数幅频特性曲线的形状确定了，位置呢？



# 一、绘制Bode图方法

- **结论5：剪切频率**：对数幅频特性曲线（折线）过0分贝(即开环幅值等于1)的频率。也叫幅值穿越频率。记为 $\omega_c$ 。

## 求剪切频率的方法：

- **精确求解**：令幅频特性 $|G(j\omega)| = 1$ 或者对数幅频特性 $L(\omega) = 0$ 。
- **近似求解**：由渐近对数幅频特性曲线列写方程求解。若剪切频率位于 $\omega_1 < \omega_2$ 这两个转折频率之间，则写出 $L(\omega)$ 的近似式，令 $L(\omega) = 0$ 来求。
  - ✓ 转折频率低于 $\omega_1$ 的环节，采用高频渐近线表达式，
  - ✓ 转折频率高于 $\omega_2$ 的环节，采用低频渐近线表达式，

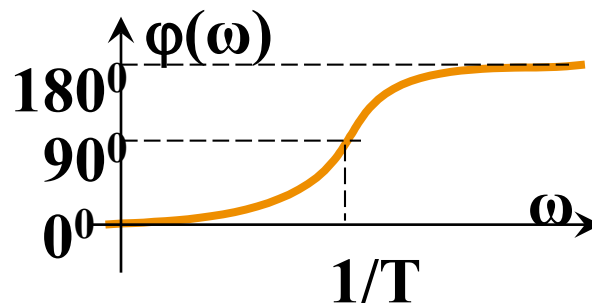
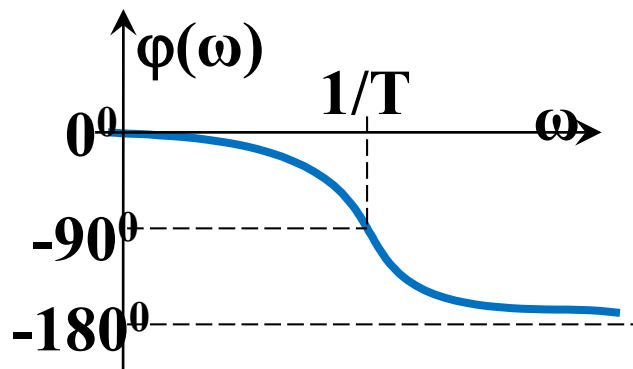
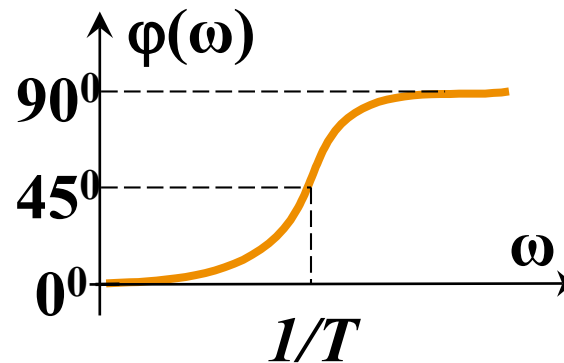
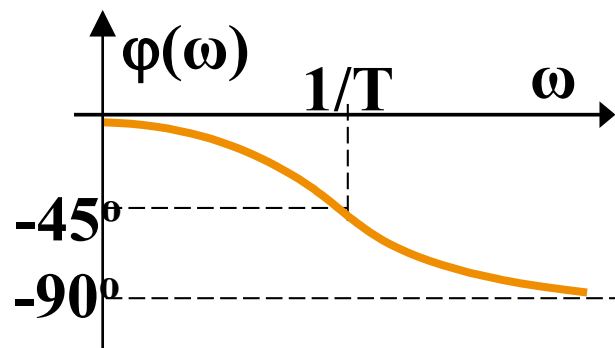
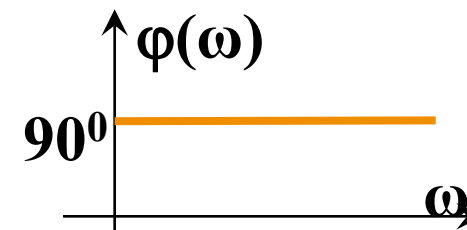
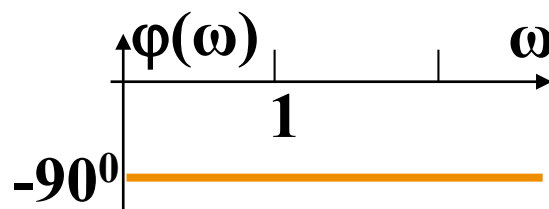
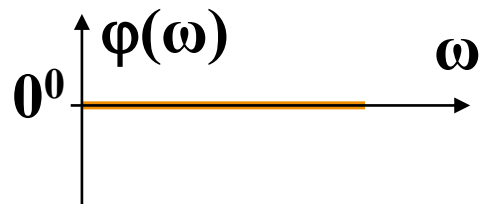
# 一、绘制Bode图方法

## ◆分段作图法：五步曲

- 确定各典型环节的转折频率并标注在横轴上。
- 确定对数幅频特性渐近线起始段的斜率和位置，画出渐近线起始段，
  - 向左延伸到低频段(直到 $\omega=0$ )，
  - 向右一直画到第一个转折频率处为止。
- 将 $L(\omega)$ 向高频段(向右)延伸，且每过一个转折频率，渐近线的斜率就相应地改变  $\Delta_s$ 。
- 标出剪切频率。
- (根据题目要求) 计算转折频率处的幅频特性误差，绘制较为精确的曲线。

# 一、绘制Bode图方法

## ◆对数相频特性的作图方法：叠加法



? 叠加时有何特点?

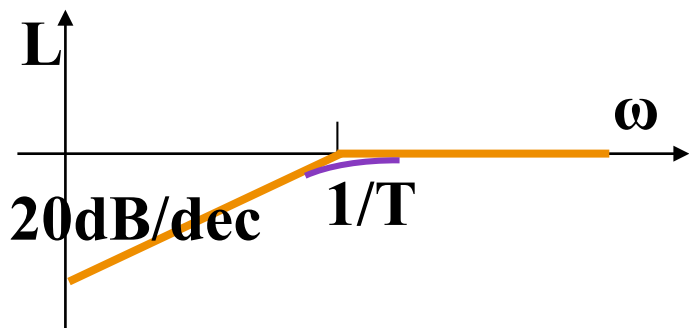
曲线形状?

# 一、绘制Bode图方法

- ◆ **对数相频特性的作图方法：叠加法**
  - **写出对数相频特性表达式；**
  - **绘制各典型环节的对数相频特性；**
  - **叠加；**
  - **根据对数相频特性表达式检查图形的终点位置。**

## 二、绘制Bode图例子

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}, T > 0$$

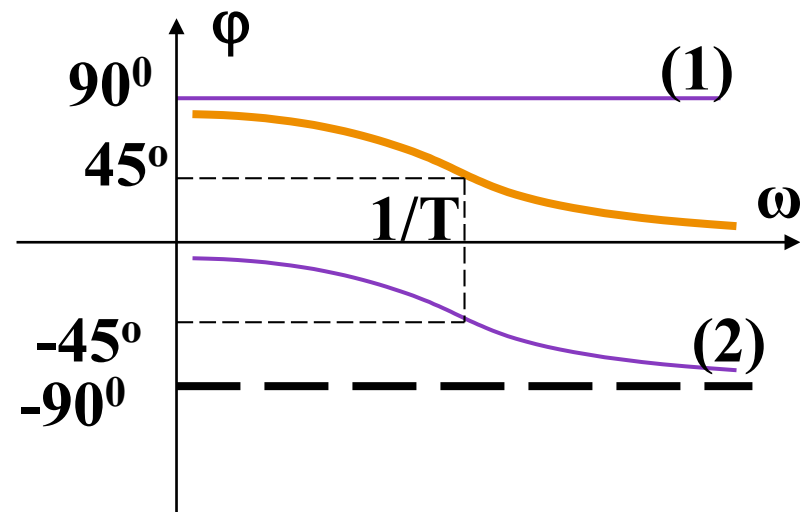
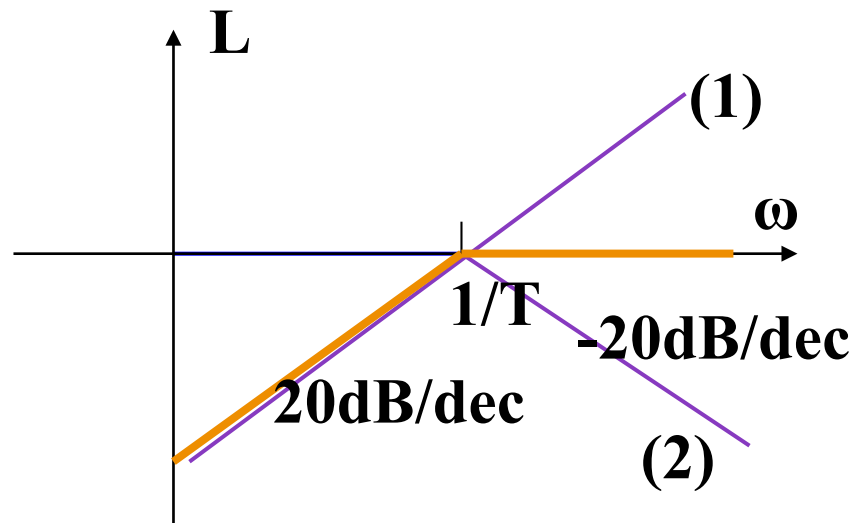


起始段:  $20\lg K - r20\lg \omega$

$\omega=1$ 时  $L(\omega)=20\lg T$ ,

$\omega=1/T$ 时  $L(\omega)=20\lg 1$ ,

则可过  $(1/T, 0)$  画斜率为 20dB/dec 的直线并延伸到第一个转折频率。



## 二、绘制Bode图例子

已知开环传函，大致绘制Bode图。  $G(s) = \frac{7.5(1/3 \cdot s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$

(1)比例  $20 \lg k = 20 \lg 7.5 = 17.5 \text{dB}$

(2)积分：  $\longrightarrow$  **一个积分环节**  $\Delta_s = +20 \text{dB/dec}$

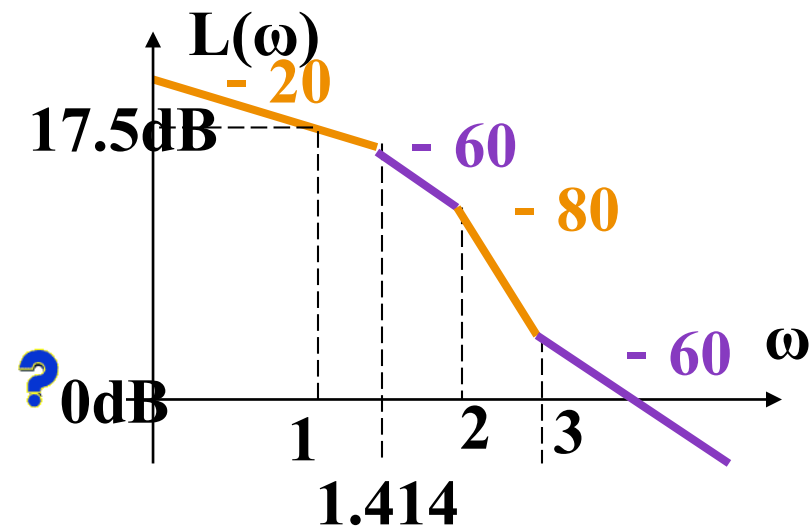
(3)一阶微分：转折频率  $\omega = 1/T = 3$

(4)惯性：转折频率  $\omega = 1/T = 2$   $\Delta_s = -20 \text{dB/dec}$

(5)振荡：转折频率  $\omega = 1/T = \sqrt{2}$   $\Delta_s = -40 \text{dB/dec}$

✓ 首先画起始段，由于转折频率均大于1，则过  $\omega=1$ ,  $L(\omega) = 20 \lg k$  点画一条斜率为  $-20 \text{dB/dec}$  的直线并延伸到第一个转折频率处为止。

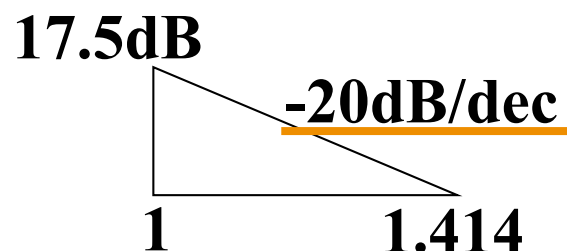
✓ 然后依次画转折频率以后的部分，增减斜率  $\Delta_s$ 。



## 二、绘制Bode图例子

$$G(s) = \frac{7.5(1/3 \cdot s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$$

- ◆求剪切频率：依次计算转折频率处的 $L(\omega)$ ，直到符号变化。



频率为1.414时的对数幅频值为多少？

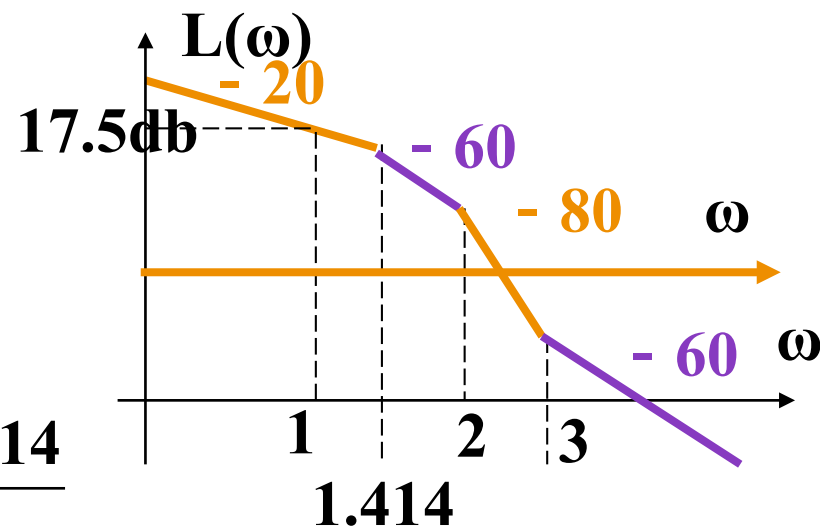
需要考察从1到1.414频率究竟增加了几个10倍。  $\lg \frac{1.414}{1}$

$$20 \lg 7.5 - 20 \lg 1.414 = 14.5(dB)$$

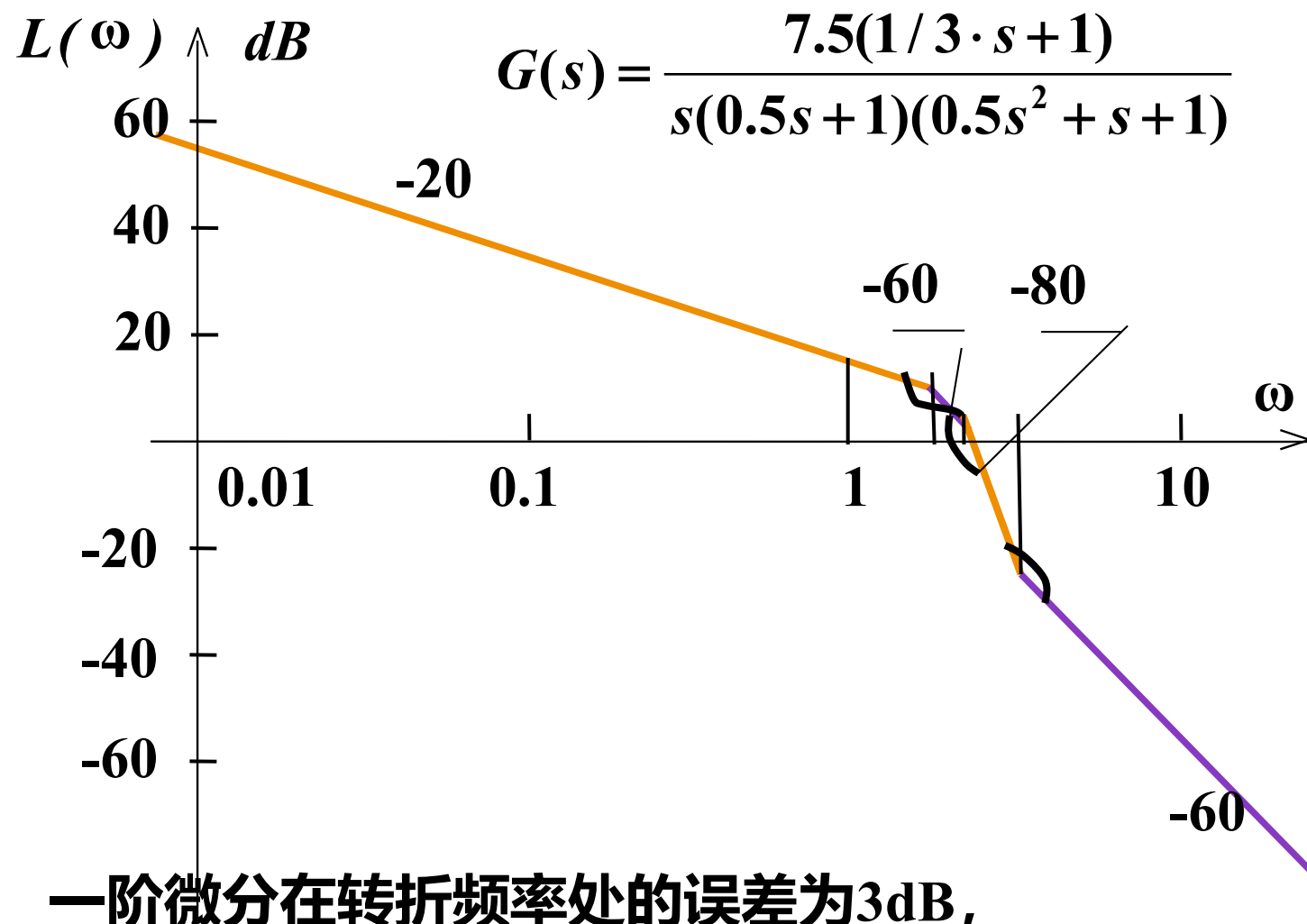
频率为2时对应的对数幅频值为  $14.5 - 60 \lg \frac{2}{1.414} = 5.465$

频率为3时对应的对数幅频值为  $5.465 - 80 \lg(3/2) = -8.622$

因此，图示有误，穿越频率为  $5.465 - 80 \lg \frac{\omega_c}{2} = 0 \Rightarrow \omega_c = 2.344$



## 二、绘制Bode图例子



(1)比例 (2)积分(3)一阶微分  
(4)惯性(5)振荡

一阶微分在转折频率处的误差为3dB,

惯性在转折频率处的误差为-3dB。

振荡环节的误差:  $\xi = 1/(2\sqrt{0.5})$   $\Delta L(\omega) = -20 \lg 2\xi = 10 \lg 0.5 = -3$

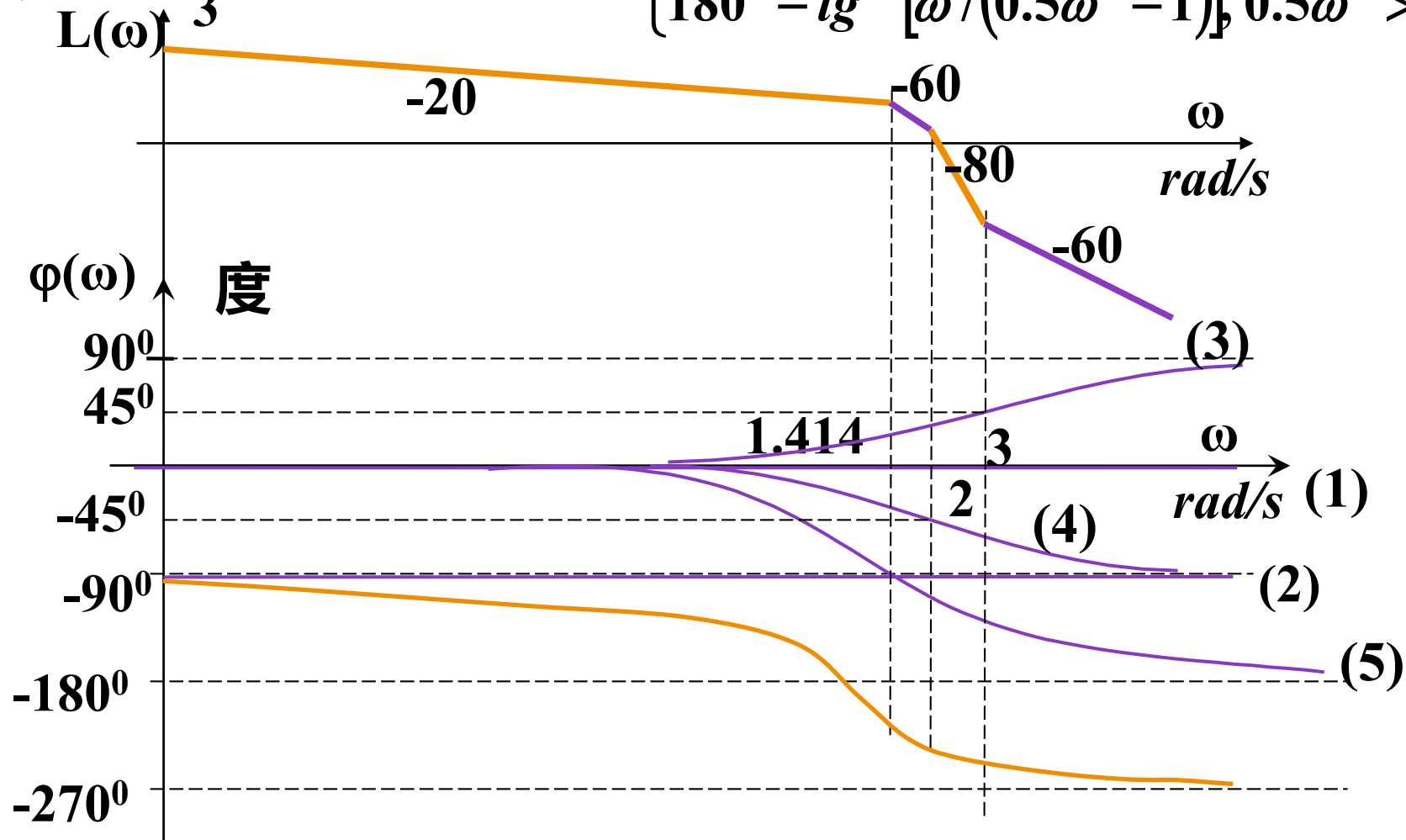


## 二、绘制Bode图例子

$$G(s) = \frac{7.5(1/3 \cdot s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.5s^2 + s + 1)}$$

(1)比例 (2)积分 (3)一阶微分(转折频率3) (4)惯性(转折频率2) (5)振荡(转折频率1.414)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{3} - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.5\omega - \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \omega / (1 - 0.5\omega^2) \right], & 0.5\omega^2 \leq 1 \\ 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \omega / (0.5\omega^2 - 1) \right], & 0.5\omega^2 > 1 \end{cases}$$



## 二、绘制Bode图例子

已知系统的开环传函，绘制大致的Bode图。  $G(s) = \frac{40(s+1)}{(20s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$

(1)比例  $20 \lg k = 20 \lg 40 \approx 32$

(2)一阶微分：转折频率  $\omega=1/T=1$   $\Delta_S = +20\text{dB/dec}$

(3)惯性1：转折频率  $\omega=1/T=0.05$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

(4)惯性2：转折频率  $\omega=2$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

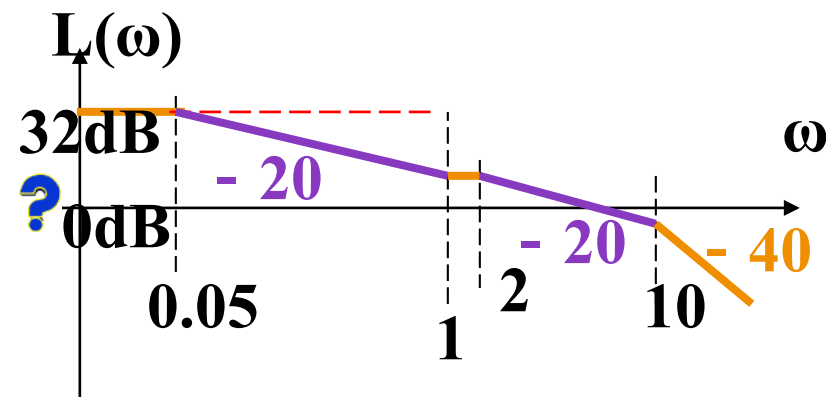
(5)惯性3：转折频率  $\omega=10$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

▪ 首先画起始段，**没有积分环节**

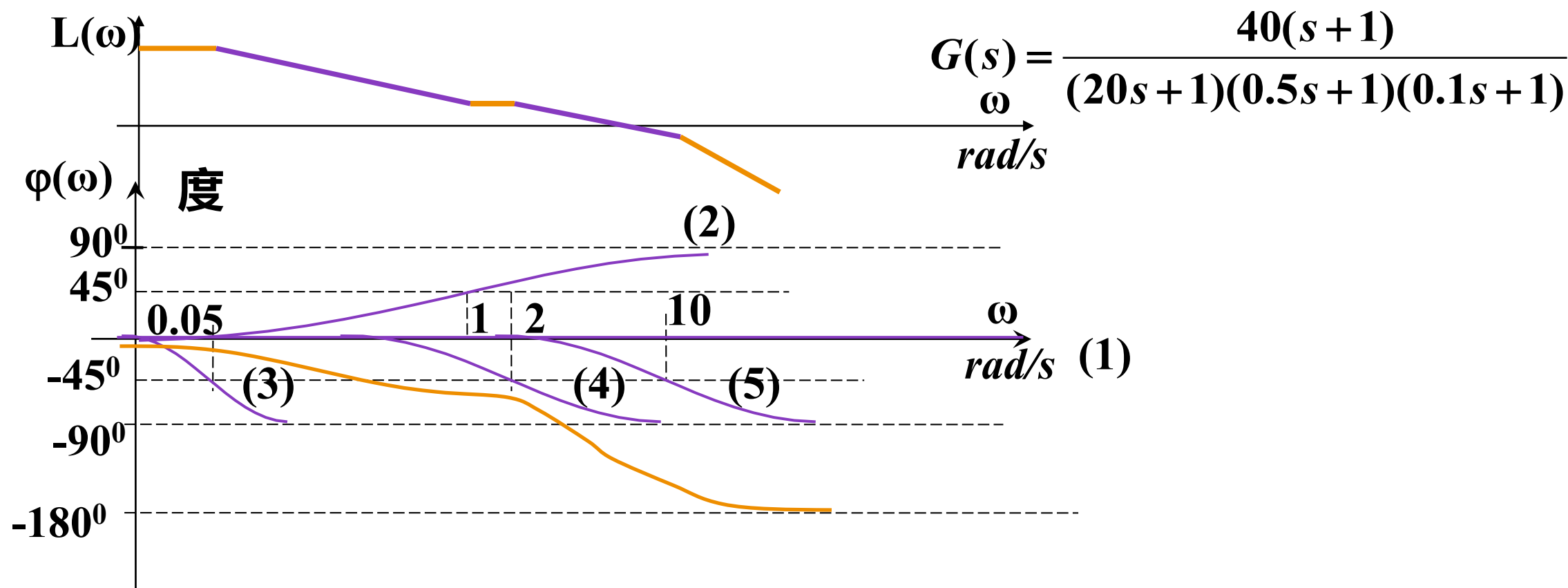
过 $\omega=1$ ,  $L(\omega)=32\text{dB}$ 点画一条斜率为 $0\text{dB/dec}$ 的直线并延伸到第一个转折频率处为止。

▪ 然后依次画转折频率以后的部分，增减斜率  $\Delta_S$ 。

▪ 令幅频特性=1得到剪切频率为4。或  $20 \lg 40 - 20 \lg \frac{1}{0.05} - 20 \lg \frac{\omega_c}{2} = 0 \Rightarrow \omega_c = 4$   
近似值!



## 二、绘制Bode图例子



◆ **最小相位系统**的对数幅频与相频特性曲线间的关联:

- ✓ 对数幅频特性曲线的负斜率加大时，对数相频特性负相角增加。
- ✓ 对数相频特性向正相角方向变化时，对数幅频特性斜率增加。

## 二、绘制Bode图例子

已知系统的开环传函，绘制大致的Bode图。

$$G(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

(1)比例  $20\lg k = 20\lg 100 = 40\text{dB}$

(2)积分：穿越频率  $\omega=1$  → 一个积分环节

(3)一阶微分：转折频率  $\omega=1/T=2$   $\Delta_S = +20\text{dB/dec}$

(4)惯性1：转折频率  $\omega=1/T=0.1$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

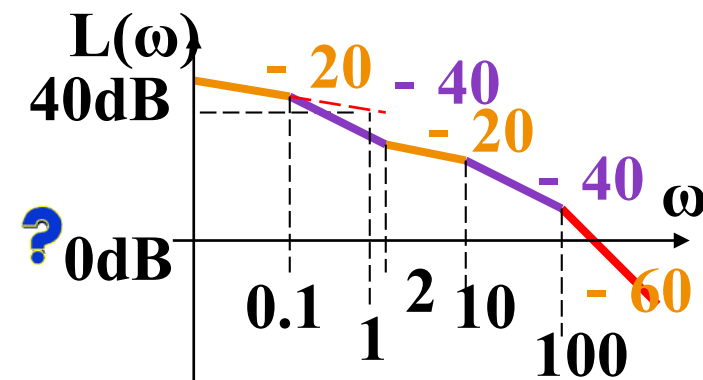
(5)惯性2：转折频率  $\omega=1/T=10$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

(6)惯性3：转折频率  $\omega=1/T=100$   $\Delta_S = -20\text{dB/dec}$

▪ 首先画起始段，

过 $\omega=1$ ， $L(\omega)=20\lg k$ 点画一条斜率为 $-20\text{dB/dec}$ 的直线并延伸到第一个转折频率处为止。

▪ 然后依次画转折频率以后的部分，增减斜率 $\Delta_S$ 。



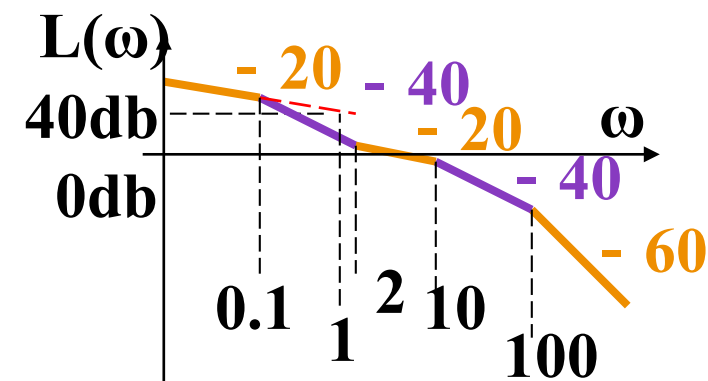
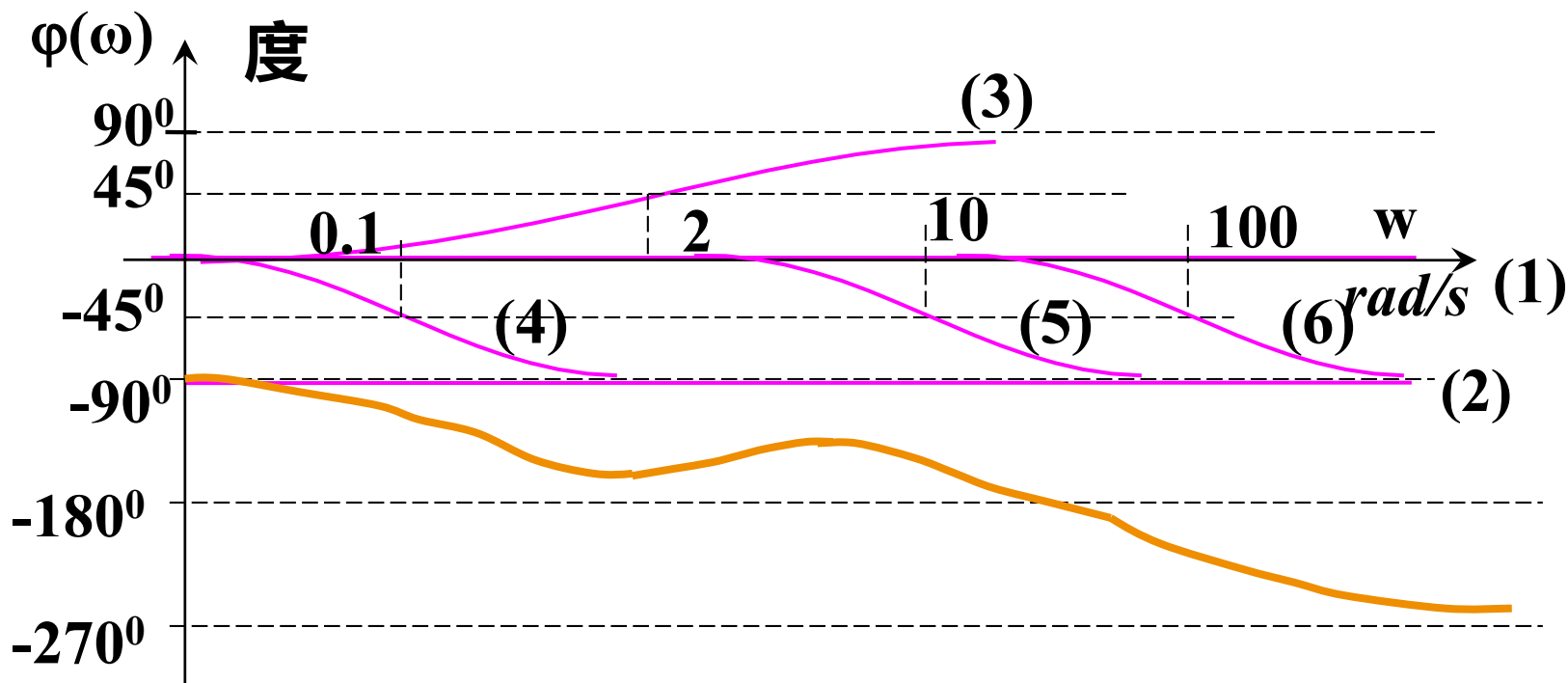
## 二、绘制Bode图例子

### ■求剪切频率

$$G(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

$$\frac{100\sqrt{0.5^2\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{10^2\omega^2 + 1}\sqrt{0.1^2\omega^2 + 1}\sqrt{0.01^2\omega^2 + 1}} = 1$$

$$\text{或 } 20\lg 100 - 20\lg \frac{0.1}{1} - 40\lg \frac{2}{0.1} - 20\lg \frac{\omega_c}{2} = 0 \quad \therefore \omega_c \approx 5$$



## 二、绘制Bode图例子

已知开环传函，绘制对数相频特性曲线。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

【解】  $\varphi = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega + \operatorname{tg}^{-1} \tau \omega$

两个惯性环节、一个一阶微分环节，相角增减的速度难以判断。

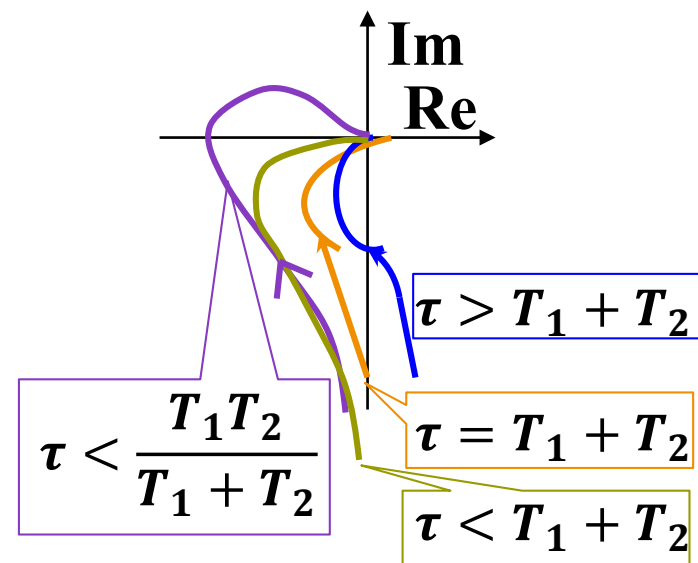
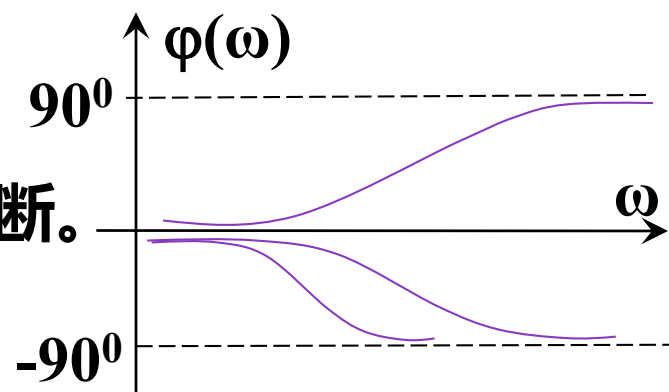
◆ 方法：将滞后（或超前）相角合并。

◆ 判断起始渐近线的位置：即 $\omega$ 非常小时

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{(T_1 + T_2)\omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2} + \operatorname{tg}^{-1} \tau \omega$$

$$\approx -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} (T_1 + T_2)\omega + \operatorname{tg}^{-1} \tau \omega$$

- 若 $\tau > T_1 + T_2$ ，则起始于 $-90^\circ$ 线上方；
- 若 $\tau \leq T_1 + T_2$ ，则起始于 $-90^\circ$ 线下方。



## 二、绘制Bode图例子

已知开环传函，绘制对数相频特性曲线。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

【解】  $\varphi = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega + \operatorname{tg}^{-1} \tau \omega$

◆ 判断终止渐近线位置：即 $\omega$ 非常大时，

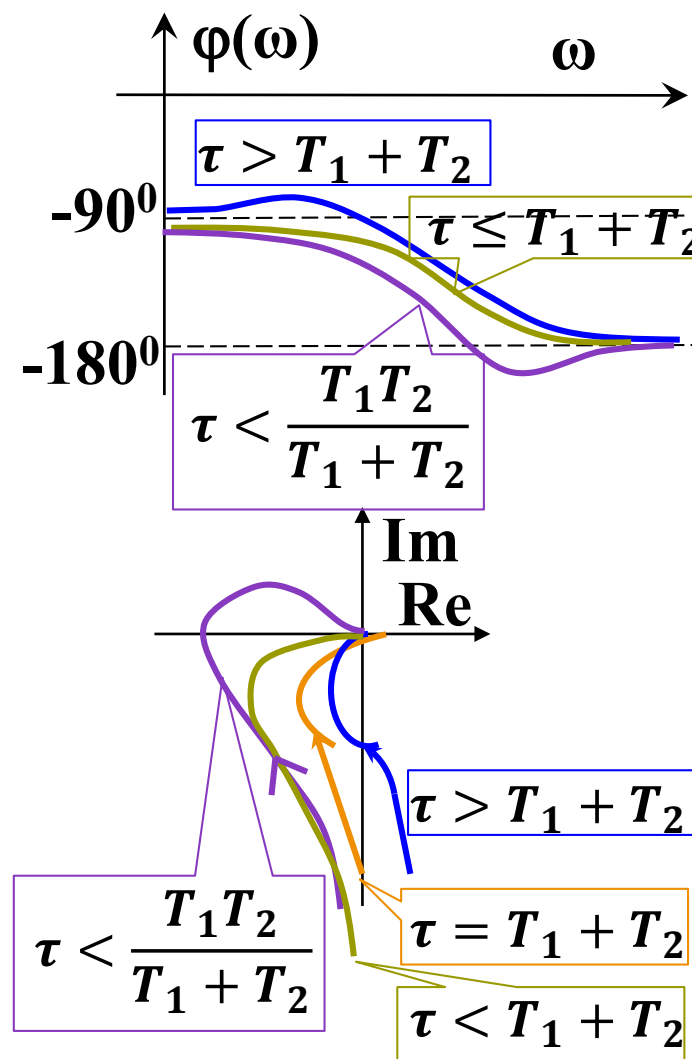
$$\varphi \approx -90^\circ - 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1} \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 \omega} + \operatorname{tg}^{-1} \tau \omega$$

➤  $\tau < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$  时  $\varphi = -270^\circ + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 \omega} + \tau \omega}{1 - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \tau}$

终止于 $-180^\circ$ 线下方。

➤  $\tau > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$  时  $\varphi = -270^\circ + 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 \omega} + \tau \omega}{\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \tau - 1}$

终止于 $-180^\circ$ 线上方。



## 二、绘制Bode图例子

最小相位系统命名的来历:

- ◆幅频特性确定后，其对应的最小相位系统是唯一的。
- ◆幅频特性相同的系统中最小相位系统的相位变化最小。

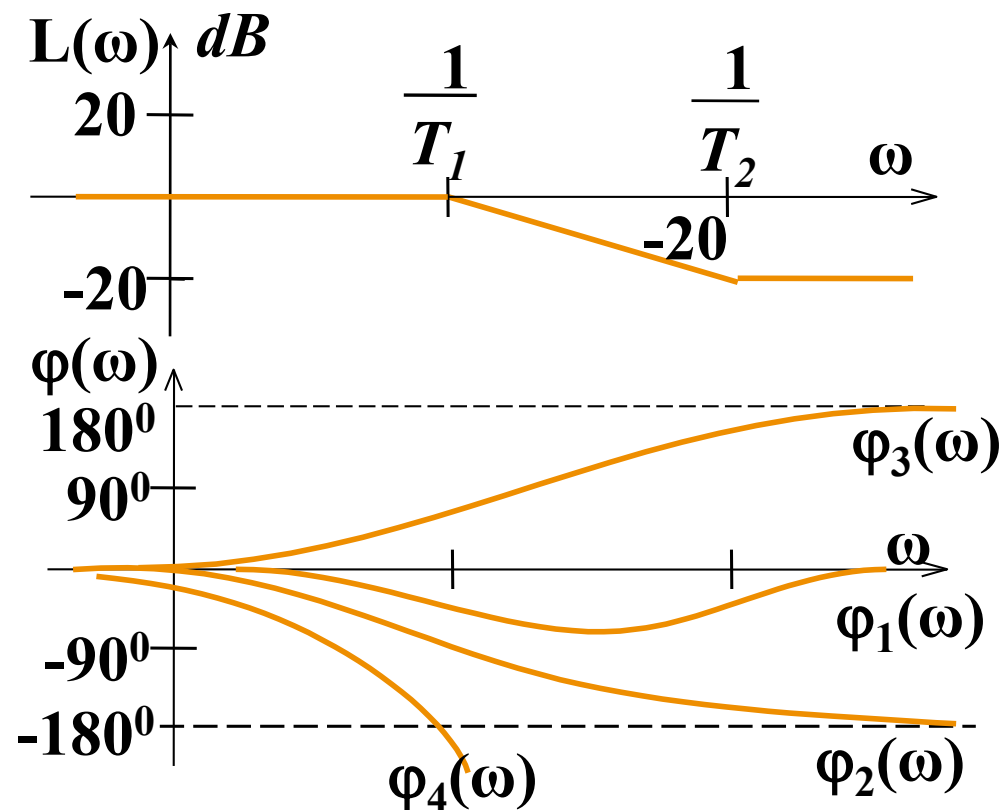
$$(1)G_{01}(s) = \frac{T_2s + 1}{T_1s + 1}$$

$$(2)G_{02}(s) = \frac{1 - T_2s}{T_1s + 1}$$

$$(3)G_{03}(s) = \frac{T_2s + 1}{1 - T_1s}$$

$$(4)G_{04}(s) = \frac{T_2s + 1}{T_1s + 1} e^{-\tau s}$$

$$T_1 = 10T_2$$

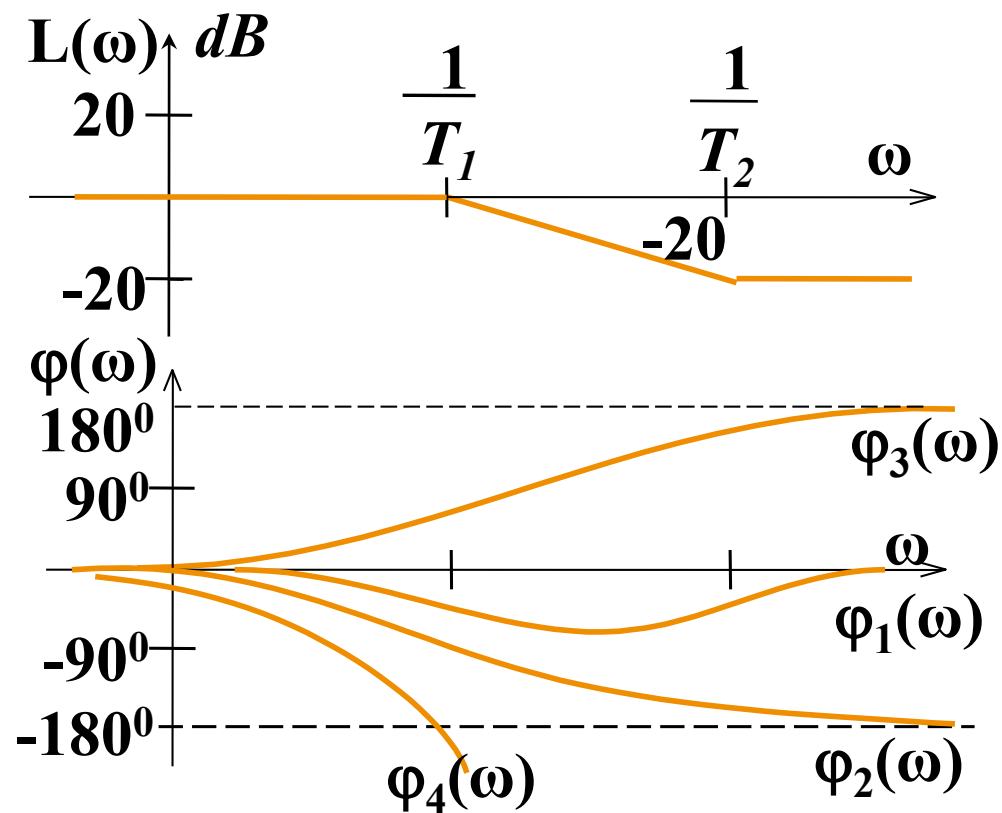




## 二、绘制Bode图例子

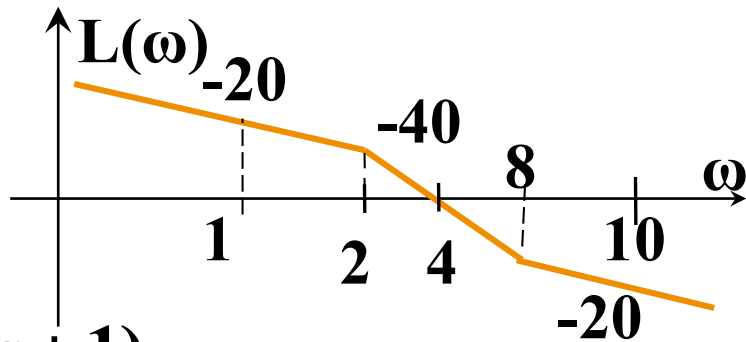
◆对于最小相位系统，其幅频特性和相频特性一一对应，某频率段的相角主要由该频率段的幅频特性斜率所决定，也受相邻频段的影响。一般地，

若对数幅频特性的斜率为 $-k20\text{dB/dec}$ ，对应的相角为 $-k\pi/2$ 。



## 二、绘制Bode图例子

已知某系统为**最小相位系统**(开环传递函数在右半平面没有零极点的系统)，根据幅频特性曲线写开环传递函数。



①传递函数形式  $G(s) = \frac{k(T_2s + 1)}{s(T_1s + 1)}$

②求时间常数  $T_1 = \frac{1}{2} = 0.5, T_2 = \frac{1}{8} = 0.125$

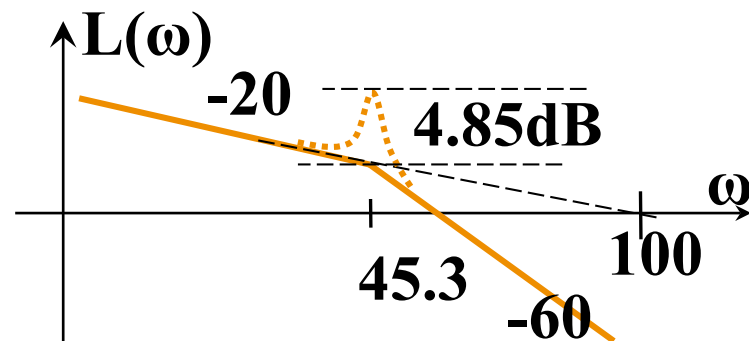
③求 $k$   $20 \lg k - 20 \lg 2 - 40 \lg \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow k = 8$

$$\therefore G(s) = \frac{8(0.125s + 1)}{s(0.5s + 1)}$$

■对数幅频特性确定后，其对应的最小相位系统是唯一的。

## 二、绘制Bode图例子

已知某系统为**最小相位系统**，根据幅频特性曲线写开环传递函数。



**【解】**1. 起始段斜率-20，有一个积分环节。

$$20\lg K - 20\lg \frac{100}{1} = 0 \quad \text{开环放大系数 } K=100.$$

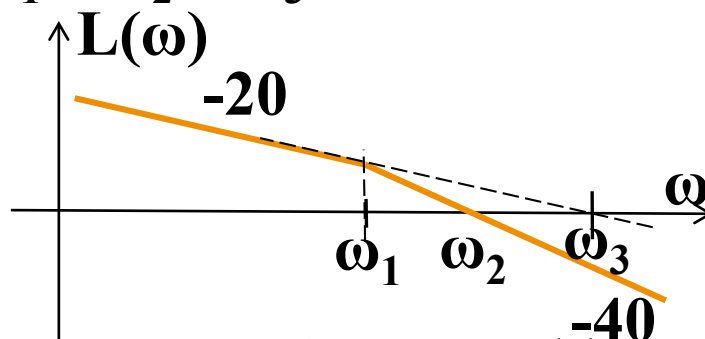
2. 转折频率45.3，因此  $T = \frac{1}{45.3}$  斜率变化-40，为振荡环节

3. 估算阻尼比  $-20\lg 2\zeta = 4.85 \quad \zeta=0.286$

$$\text{开环传递函数 } G(s) = \frac{100}{s\left(\frac{1}{45.3^2} s^2 + \frac{0.572}{45.3} s + 1\right)}$$

## 二、绘制Bode图例子

已知某单位反馈系统为**最小相位系统**，其幅相曲线和渐近对数幅频特性曲线如图所示，其中A点的频率为2， $a=1$ 。求 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 和 $\omega_3$ ，以及闭环系统的阻尼比和无阻尼自振频率。



**【解】** 由渐近对数幅频特性曲线得开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \omega_1)}$$

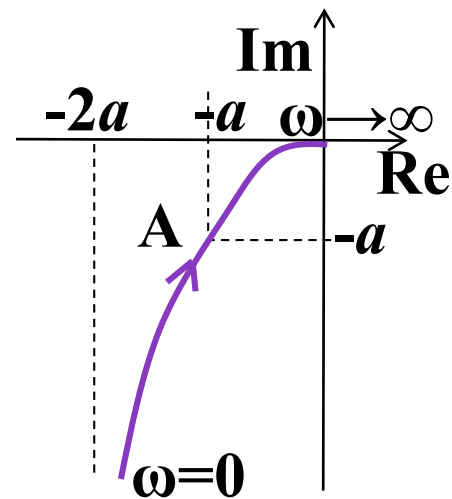
则频率特性为  $G(j\omega) = \frac{-K}{(\omega_1^2 + \omega^2)} - j \frac{K\omega_1}{\omega(\omega_1^2 + \omega^2)}$

由幅相曲线知  $\frac{-K}{(\omega_1^2 + 0^2)} = -2a$  得  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{2a}}$

$$\frac{-K}{(\omega_1^2 + 2^2)} = \frac{-K\omega_1}{2(\omega_1^2 + 2^2)} = -a \quad \text{得} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{K-4a}{a}} \quad \text{则} \quad K=8a=8, \quad \omega_1 = 2$$

$$\text{由 } 20\lg \frac{K}{\omega_1} - 20\lg \frac{\omega_1}{1} - 40\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0 \quad 20\lg \frac{K}{\omega_1} - 20\lg \frac{\omega_3}{1} = 0$$

$$\text{得} \quad \omega_2 = 2\sqrt{2}, \quad \omega_3 = 4. \quad \text{与标准传函对照可得} \quad \omega_n = 2\sqrt{2}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



## 二、绘制Bode图例子

实验法测得某控制系统的Bode图如图，试确定该系统的开环传函。

**【解】** 起始段过 $\omega = 1, L(\omega) = 20 \lg K$ 这一点，斜率为 $-20\text{dB/dec}$ 。含积分环节。

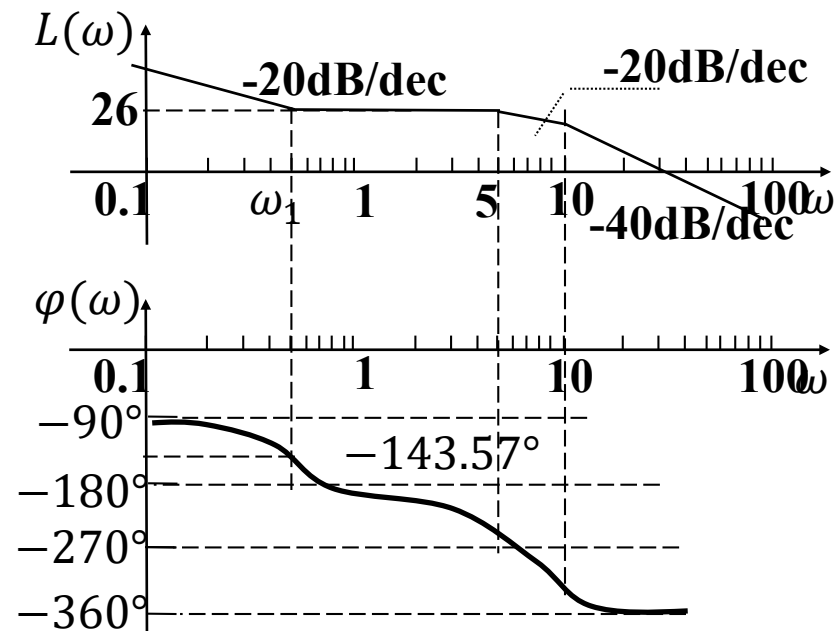
转折频率分别为 $\omega_1, 5, 10$ ,

斜率依次变化 $\Delta_s = +20, -20, -20$ 。相频特性

$\varphi(\omega): -90^\circ \rightarrow -360^\circ$ ，因此含有不稳定环节：

$\frac{1}{-Ts+1}$ 、 $\frac{1}{Ts-1}$ 、或 $-Ts+1$ 、 $Ts-1$ 。这四者的相频特性值分别为 $\text{tg}^{-1}\omega T$ 、 $-180^\circ + \text{tg}^{-1}\omega T$ 、 $-\text{tg}^{-1}\omega T$ 、 $180^\circ - \text{tg}^{-1}\omega T$ 。

**相频特性起始值为 $-90^\circ$ ，可以排除 $-180^\circ + \text{tg}^{-1}\omega T$ 和 $180^\circ - \text{tg}^{-1}\omega T$ （二者同时存在的可能性由终止值排除）。终止值为 $-360^\circ$ ，可以排除 $\text{tg}^{-1}\omega T$ 和 $180^\circ - \text{tg}^{-1}\omega T$ 。**



## 二、绘制Bode图例子

实验法测得某控制系统的Bode图如图，试确定该系统的开环传函。

**【解】**

不稳定环节是 $-Ts + 1$ ，此时开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1 - \frac{1}{\omega_1}s)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)},$$

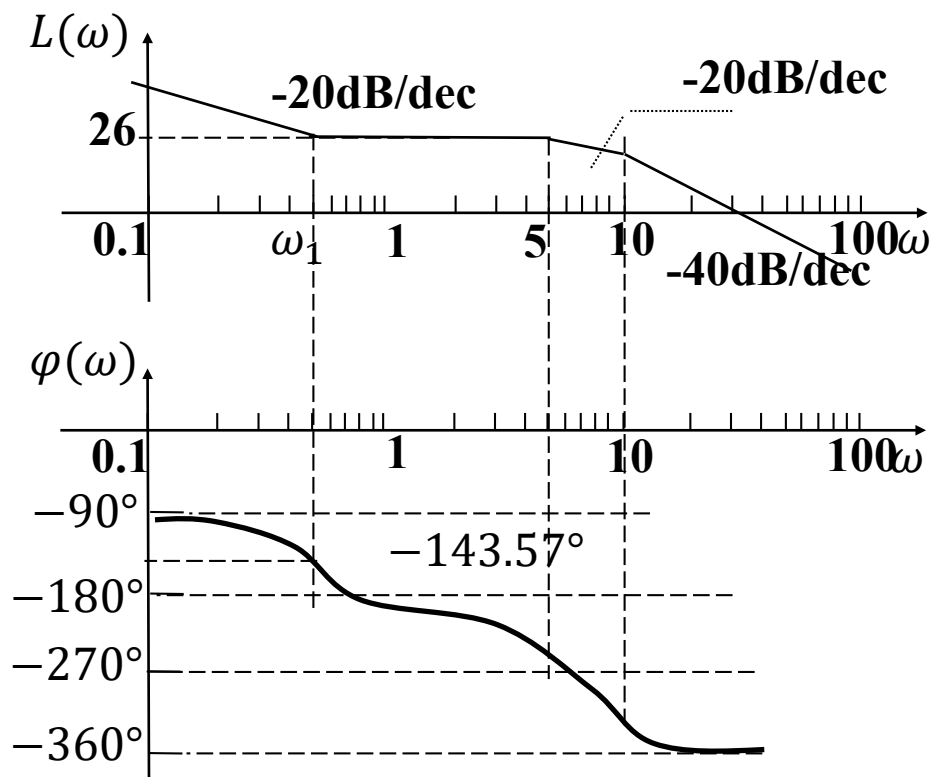
对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.1\omega - \operatorname{tg}^{-1} 0.2\omega - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\omega_1}$$

由 $\varphi(\omega_1) = -143.57^\circ$ 可得 $\omega_1 = 0.5$ ，由

$$20 \lg K - 20 \lg \frac{\omega_1}{1} = 26 \text{ 可得 } K = 10。$$

$$\text{则开环传递函数为 } G(s) = \frac{10(1-2s)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}。$$





## 第五章：线性系统的频率分析

### 第20讲 奈氏稳定判据

Nyquist Stability Criterion

#### 本讲内容

一、奈氏判据原理

二、奈氏判据例题

三、总结

# 一、奈氏稳定判据原理

## ◆ 奈奎斯特(Nyquist, 简称奈氏)稳定判据优点:

- ✓ 作图分析, 计算量小, 信息量大。
- ✓ 不但可以判断稳定性, 也能给出不稳定根的个数和稳定裕度 (即稳定程度的高低)。
- ✓ 系统中含有延迟环节时, 利用奈氏判据很方便。
- ✓ 奈氏判据可推广到一类非线性系统和多变量系统。



# 一、奈氏稳定判据原理

- 幅角原理：设复数平面上的回路 $\Gamma_s$ 的内部为 $I(\Gamma_s)$ 。若函数 $F(s)$ 在回路 $\Gamma_s$ 的内部 $I(\Gamma_s)$ 中除有限个极点外处处解析，且 $F(s)$ 在 $\Gamma_s$ 上解析且在 $\Gamma_s$ 上处处不为零，则

$$P(F, \Gamma_s) - Z(F, \Gamma_s) = \frac{1}{2\pi} \Delta(\angle F(s)),$$

其中 $P(F, \Gamma_s)$ 和 $Z(F, \Gamma_s)$ 分别为 $F(s)$ 在 $I(\Gamma_s)$ 中的极点和零点个数， $\Delta(\angle F(s))$ 是 $s$ 沿顺时针方向环绕回路 $\Gamma_s$ 一周时，函数 $F(s)$ 幅角的增量。

!说明：

1.  $F(s)$ 在 $\Gamma_s$ 上解析且处处不为零： $\Gamma_s$ 不经过 $F(s)$ 的极点和零点。
2. 幅角的增量是绕原点逆时针旋转的角度。
3.  $F(s)$ 在 $I(\Gamma_s)$ 中的极点和零点个数：对于 $m$ 重极点（或零点），算作 $m$ 个极点（或零点）。

# 一、奈氏稳定判据原理

◆ 若函数  $F(s) = \frac{KM(s)}{N(s)}$ ,  $M(s)$  和  $N(s)$  是关于  $s$  的尾一多项式, 设  $z_i$  和  $p_j$  分别是  $F(s)$  的零点和极点。

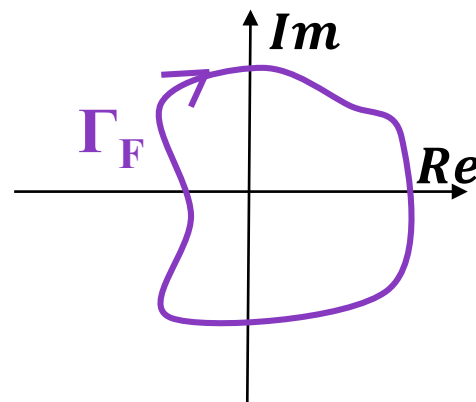
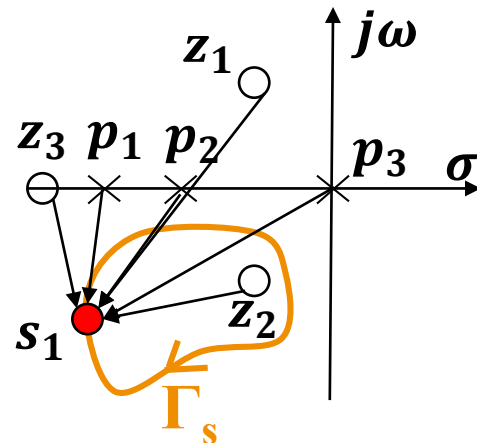
◆ 在  $S$  平面任选一条不通过  $F(s)$  的零点和极点的封闭曲线, 记为  $\Gamma_s$ 。则该曲线在  $F$  平面上的映射曲线也是一条封闭曲线, 记为  $\Gamma_F$ 。

在  $\Gamma_s$  上取一点  $s_1$ , 其函数  $F(s)$  对应的相角是

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s_1 - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_1 - p_j)$$

➤ 当  $s_1$  沿  $\Gamma_s$  顺时针旋转1周时, 封闭曲线外的零极点指向  $s_1$  的向量旋转了  $0^\circ$ , 封闭曲线内的零极点指向  $s_1$  的向量旋转了  $-2\pi$ ,

即  $\Delta\{\angle F(s)\} = -2\pi(Z - P)$ ,  $Z$  和  $P$  为  $\Gamma_s$  内的  $F(s)$  零极点数



# 一、奈氏稳定判据原理

$$\Delta\{\angle F(s)\} = -2\pi(Z - P)$$

即：

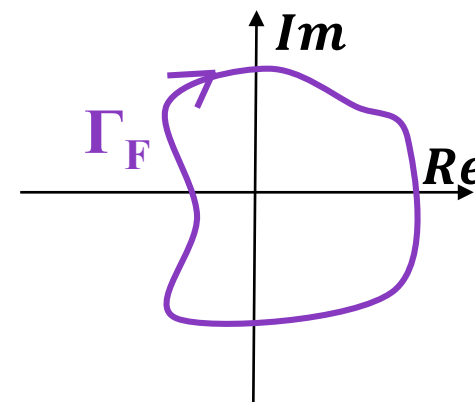
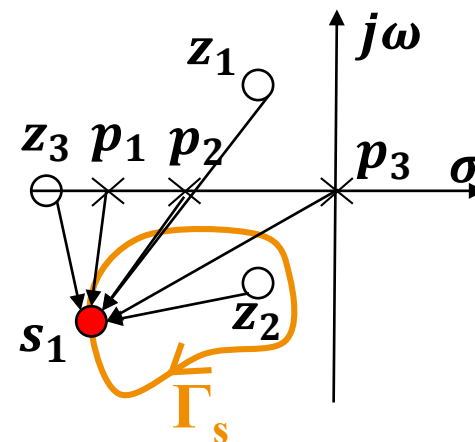
当解析点 $s$ 在 $S$ 平面上沿 $\Gamma_s$ 顺时针方向转一周时，

在 $F$ 平面上 $\Gamma_F$ 绕原点逆时针旋转的周数 $N$ 等于 $S$ 平面上 $\Gamma_s$ 包含 $F(s)$ 的极点数 $P$ 和零点 $Z$ 之差，即

$$N = P - Z$$

? 稳定性与此的关联？

?  $F(s)$ 如何选取？ 闭环传递函数？ 开环传递函数？



# 一、奈氏稳定判据原理

? 开环频率特性与闭环系统稳定性的联系？

已知开环传函 $G(s)H(s)$ ，则闭环特征方程式为 $1+ G(s)H(s)=0$ 。

引入**辅助函数** $F(s)= 1+ G(s)H(s)$ 。

设 
$$G(s)H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

则 
$$F(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

- $F(s)$ 的分子和分母阶次均为 $n$ 。
- $F(s)$ 的**零点**即为闭环传递函数的极点， $F(s)$ 的**极点**即为开环传递函数的极点。
- 稳定性判断转变为：闭环系统稳定的充要条件是 $F(s)$ 的**零点**均在 $s$ 平面的左半平面。

# 一、奈氏稳定判据原理

? 开环频率特性与闭环系统稳定性的联系?

◆ 幅角原理：在F平面上 $\Gamma_F$ 绕原点逆时针旋转的周数 $N$ ，等于S平面上 $\Gamma_s$ 包含 $F(s)$ 的极点数 $P$ 和零点数 $Z$ 之差： $N=P-Z$ 。

✓  $\Gamma_s$  是任意的曲线→包围右半平面的一个封闭曲线

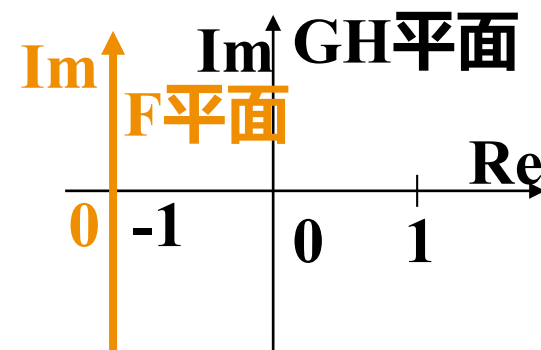
✓ 已知开环传递函数 $GH$ ，则知 $\Gamma_s$ 内的 $P$ 值(开环极点数)

✓  $F(s)$ 和 $GH$ 只相差1。则曲线的形状不变，坐标轴平移。 $\Gamma_F$ 绕原点逆时针旋转→  
GH曲线绕 $(-1, j0)$ 逆时针旋转→  $N$ 值

✓ 则 $\Gamma_s$ 内 $Z$ 值= $P-N$ ，即对应 $\Gamma_s$ 右半平面内闭环系统极点数。

! 说明：逆时针时 $N > 0$ ，顺时针时 $N < 0$ 。

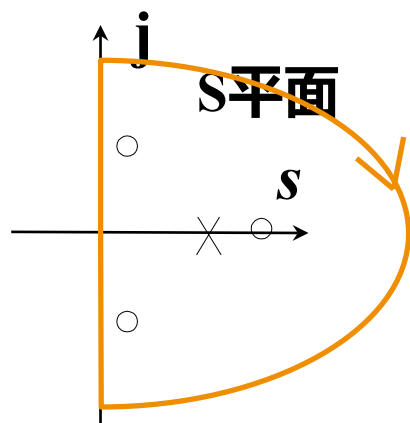
$N=0$ 说明 $\Gamma_F$ 不包围F平面的坐标原点，即 $G(s)H(s)$ 不包围 $(-1, j0)$ 。



# 一、奈氏稳定判据原理

? 开环频率特性与闭环系统稳定性的联系?

闭环系统极点

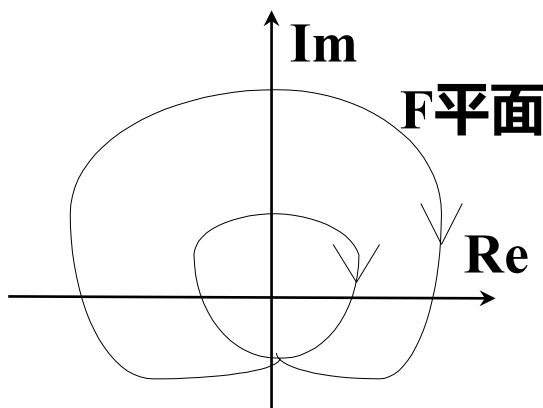


开环极点

$s$ 平面上 $\Gamma_s$ 包含 $F(s)$ 的极点数 $P$ 和零点数 $Z$ 之差  $(P-Z)$

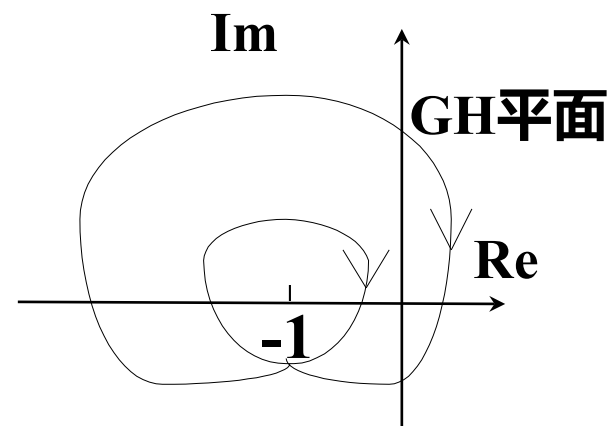
闭环极点

辅助函数 $F=1+GH$



$F$ 平面上 $\Gamma_F$ 绕原点逆时针旋转的周数 $N$

开环传递函数 $GH$

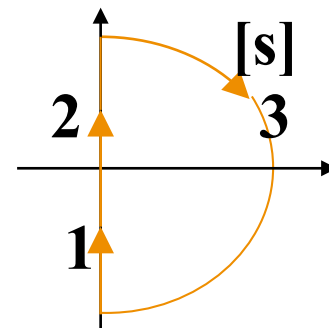


$GH$ 平面上 $\Gamma_{GH}$ 绕 $(-1, j0)$ 逆时针旋转的周数 $N$

?  $s$ 顺时针包围右半平面时, 映射到 $GH$ 是怎样的?

# 一、奈氏稳定判据原理

◆当S平面在原点和虚轴上**没有开环极点**时：取 $\Gamma_s$ 为沿虚轴顺时针包围右半平面的闭曲线，称**D形围线**。



将 $\Gamma_s$ 分为三段：直线中从 $-\infty \rightarrow 0$ 为第1段， $0 \rightarrow +\infty$ 为第2段，圆弧为第3段。

分析映射到GH平面的曲线：

➤ 第1段  $s = -j\omega$  ,  $G(s)H(s)|_{s=-j\omega} = |G(j\omega)H(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$

➤ 第2段  $s = j\omega$  , 则  $G(s)H(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$

这两部分是 $\omega$ 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 完整的**奈氏曲线**。

➤ 第3段是半径 $\infty$  半圆：  $s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\theta}$  ,  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 。 则

$$G(s)H(s)|_{s=\lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\theta}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \Big|_{s=\lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\theta}}$$
$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} R^{m-n} e^{j(n-m)\theta} = \begin{cases} \frac{b_m}{a_n}, n = m, \\ 0, n > m. \end{cases} \quad \text{不影响稳定性分析。}$$

◆结论1：开环极点没有虚根和0根时，S平面上 $\Gamma_s$ 曲线映射到GH平面即为奈氏曲线。

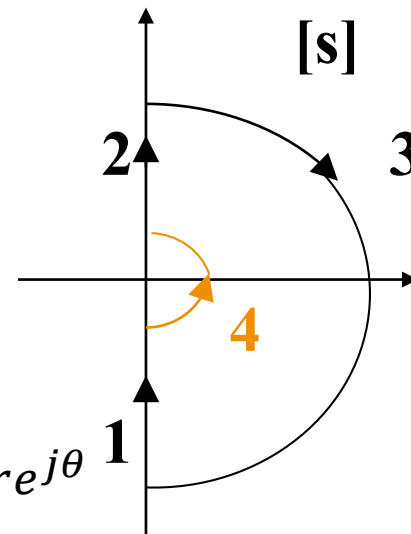
# 一、奈氏稳定判据原理

◆当S平面坐标原点有开环极点时，即开环传递函数包含 $\nu$ 个积分环节时， $\Gamma_s$  曲线在原点处增加一个半径为无穷小的半圆绕过原点（为增补段），将此半圆定义为第4段。则

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

则映射到GH平面的曲线

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}} = \frac{K(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}{s^\nu (a_{n-\nu} s^{n-\nu} + a_{n-\nu-1} s^{n-\nu-1} + \dots + a_0)} \Big|_{s=\lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}} \\ = \infty e^{-j\nu\theta}$$



◆结论2：若开环传递函数包含 $\nu$ 个积分环节(开环极点有0根)，除了画 $\omega: -\infty \rightarrow +\infty$ 完整的开环频率特性外，还需要增加 $\omega: 0^- \rightarrow 0^+$ 时顺时针绕原点转 $\nu\pi$ 角度的无穷大的圆弧。



# 一、奈氏稳定判据原理

◆当虚轴上有开环极点时， $\Gamma_s$  曲线在纯虚根极点处增加一个半径为无穷小的半圆绕过开环极点（为增补段），设开环极点 $\pm jd$ ，重数为 $v$ 。以 $jd$ 为例进行分析。则增补段

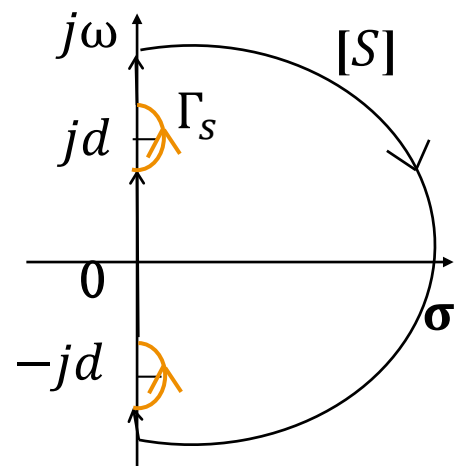
$$s = jd + \lim_{r \rightarrow 0} re^{j\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$G(s)H(s)|_{s=\lim_{r \rightarrow 0}(jd+re^{j\theta})}$$

$$= \frac{K(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)}{(s - jd)^v(a_{n-v}s^{n-v} + a_{n-v-1}s^{n-v-1} + \dots + a_0)} \Big|_{s=\lim_{r \rightarrow 0}(jd+re^{j\theta})}$$

因增补段上 $\frac{K(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)}{(a_{n-v}s^{n-v} + a_{n-v-1}s^{n-v-1} + \dots + a_0)}$ 是有限值，

所以 $G(s)H(s)|_{s=\lim_{r \rightarrow 0}(jd+re^{j\theta})} = \infty e^{-jv\theta}$ 。开环极点 $-jd$ 类似可得。



◆结论3：若开环传递函数包含共轭虚极点，除了画 $\omega: -\infty \rightarrow +\infty$ 完整的开环频率特性外，还需要增加 $\omega: d^- \rightarrow d^+$ 以及 $\omega: -d^+ \rightarrow -d^-$ 时顺时针绕原点转 $v\pi$ 角度的无穷大的圆弧。

# 一、奈氏稳定判据原理

◆ Nyquist稳定判据：对于反馈控制系统，设 $P$ 为位于 $S$ 平面右半平面的开环极点数， $N$ 为其开环传递函数对应的奈氏曲线（包括增补段）逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的次数，若奈氏曲线不穿过 $(-1, j0)$ 点，则有以下结论：

- ✓ 闭环系统稳定的充分必要条件是 $P = N$ 。
- ✓ 若 $P - N > 0$ ，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z = P - N$ 。

◆ 推论：当奈氏曲线不穿过 $(-1, j0)$ 点时，

- ✓ 若奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点，则系统不稳定；
- ✓ 若系统的开环传递函数在 $S$ 平面右半平面没有极点，则奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点时系统稳定。

# 一、奈氏稳定判据原理

◆ 推论：反馈控制系统的闭环极点存在**纯虚根（或零根）**，当且仅当其开环传递函数对应的**奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点**。

【证明】**必要性**：设开环传递函数为 $G(s)H(s)$ ，则闭环特征方程为 $1 + G(s)H(s) = 0$ 。

若闭环极点存在纯虚根，则存在 $s_1 = j\omega_1$ 使得 $1 + G(j\omega_1)H(j\omega_1) = 0$ ，即

$$G(j\omega_1)H(j\omega_1) = -1;$$

若存在零根，则 $G(j0)H(j0) = -1$ ，即**幅相曲线的起点在 $(-1, j0)$ 点**。

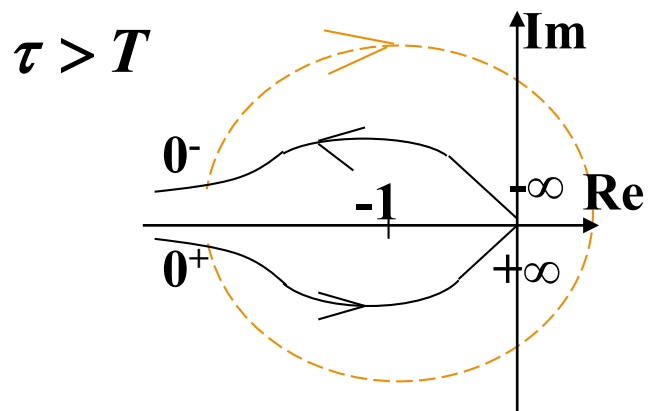
**充分性**：若奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点，显然存在 $\pm\omega_1$ ， $\omega_1 \geq 0$ ，使得频率特性满足 $G(j\omega_1)H(j\omega_1) = -1$ ，易得剩余推导。此时， $s_1 = \pm j\omega_1$ 就是闭环极点。

? 奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点时，幅角原理是否成立？能否直接用这个奈氏曲线围绕 $(-1, j0)$ 所转圈数判断不稳定根的个数？

# 一、奈氏稳定判据原理

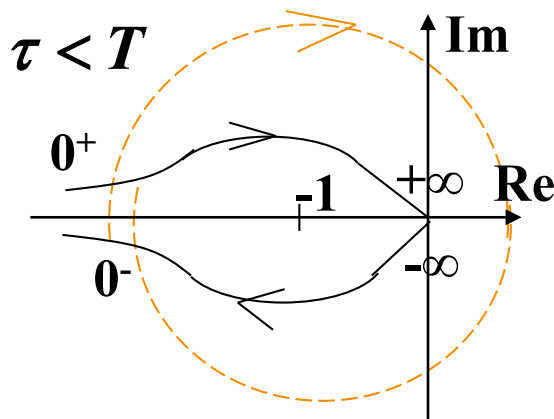
$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)} \quad |G(j\omega)| = \frac{K\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\omega^2\sqrt{\omega^2T^2 + 1}} \quad \varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan \omega\tau - \arctan \omega T$$

$$G(j\omega) = \frac{K[-1 - \tau T\omega^2 + j(T - \tau)\omega]}{\omega^2(1 + T^2\omega^2)}$$

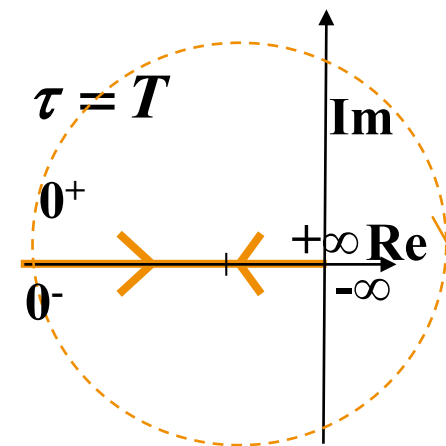


两个积分环节，增补段 $\omega:0_- \rightarrow 0_+$ 顺时针绕原点转 $2\pi$ 。

$P=0$ ，且曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，则闭环系统稳定。



曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点两周，闭环系统不稳定。  
右半平面根的个数为 $Z = P - N = 0 - 2 = -2$



不稳定。闭环系统有虚轴上的闭环极点。是否是临界稳定？

## 二、奈式判据例题

已知最小相位系统的开环幅相曲线如图所示。分析开环增益对闭环系统稳定性的影响。

【解】由于是最小相位系统，则 $P=0$ 。

? 增补段怎样画?

起点位置相角为 $-270^\circ$ ，则积分环节的个数为3，增补段应顺时针旋转 $3\pi$ 度。

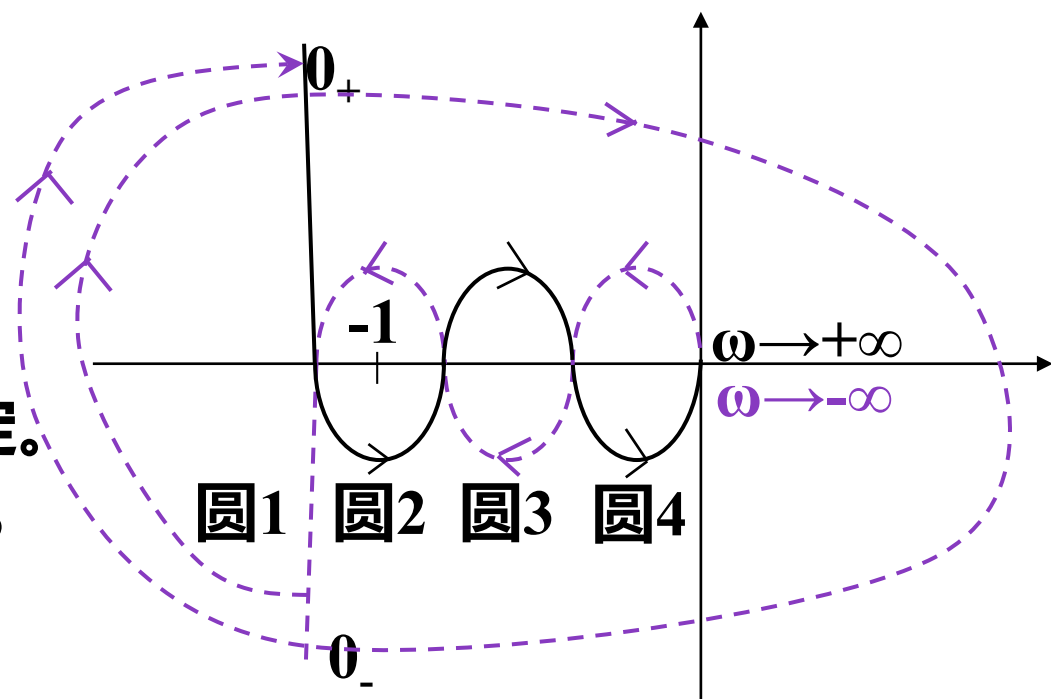
1) 当前位置：圆2逆时针包围 $(-1, j0)$ 一周，大圆顺时针包围 $(-1, j0)$ 一周，等效于不包围 $(-1, j0)$ 。闭环系统稳定。

2) 若 $K$ 增大， $(-1, j0)$ 进入圆3内怎样？进入圆4内怎样？

3) 若 $K$ 减小， $(-1, j0)$ 进入圆1内怎样？

则顺时针包围 $(-1, j0)$ 二周，闭环系统不稳定。

4) 若 $K$ 变化过程中奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ ，则系统临界稳定。



## 二、奈式判据例题

已知开环增益 $K=500$ 时单位负反馈系统的开环幅相曲线，右半平面极点数 $P=0$ ，积分环节数 $r=1$ 。求使该闭环系统稳定的 $K$ 的取值范围。

**【解】** 设开环传函为 $G(s) = KG_1(s)$ ，其中 $G_1(s)$ 的开环增益为1。

当 $K=500$ 时，设与实轴的交点处频率从小到大依次为 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$ ，则

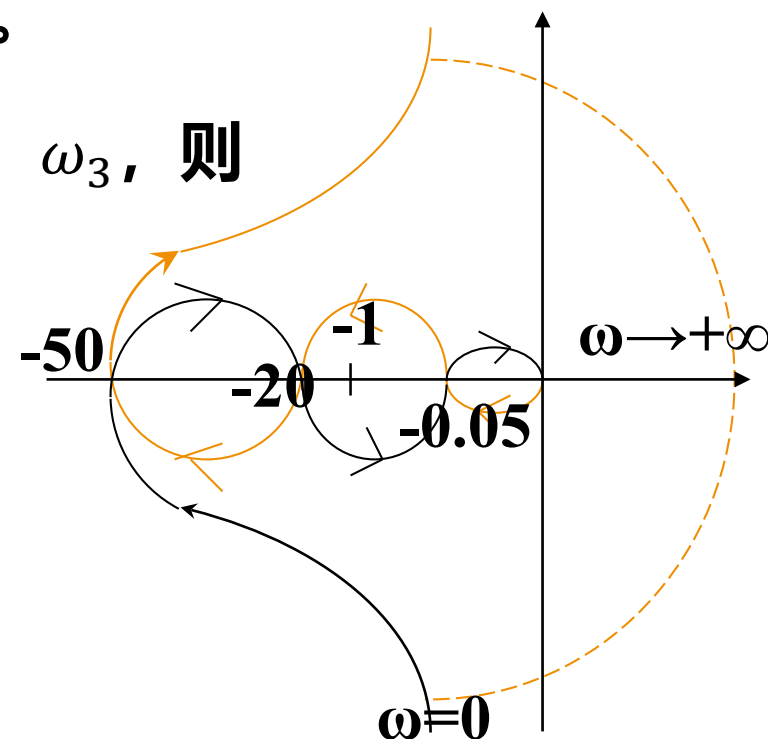
$$|G(j\omega_1)| = 500|G_1(j\omega_1)| = 50,$$

$$|G(j\omega_2)| = 500|G_1(j\omega_2)| = 20,$$

$$|G(j\omega_3)| = 500|G_1(j\omega_3)| = 0.05,$$

则 $|G_1(j\omega_1)| = \frac{1}{10}$ ， $|G_1(j\omega_2)| = \frac{1}{25}$ ， $|G_1(j\omega_3)| = \frac{1}{1000}$ 。

当 $\frac{K}{1000} < 1 < \frac{K}{25}$ 或 $\frac{K}{10} < 1$ 时，即 $25 < K < 1000$ 或 $0 < K < 10$ 时，闭环稳定。



## 二、奈氏判据例题

已知闭环特征方程  $s^3 + 5Ks^2 + (2K + 3)s + 10 = 0$ ，应用奈氏判据确定使闭环系统稳定的  $K$  的范围。

【解】设开环传函为  $G(s) = \frac{Ks(5s+2)}{s^3+3s+10}$

$$G(j\omega) = \frac{-K\omega^2(44 + 2\omega^2) + j5K\omega(4 + 3\omega^2 - \omega^4)}{100 + (3\omega - \omega^3)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K\omega\sqrt{25\omega^2 + 4}}{\sqrt{100 + (3\omega - \omega^3)^2}}$$

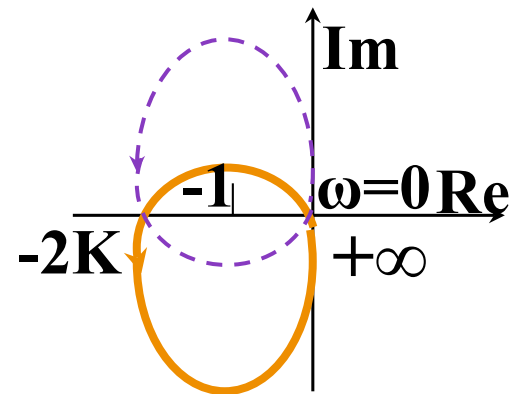
$$\angle G(j\omega) = 90^\circ + \tan^{-1} \frac{5\omega}{2} + \begin{cases} -\tan^{-1} \frac{\omega(3 - \omega^2)}{10}, & \omega \leq \sqrt{3} \\ \tan^{-1} \frac{\omega(\omega^2 - 3)}{10}, & \omega > \sqrt{3} \end{cases}$$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$  时

$u: 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$        $v: 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0 \rightarrow \text{负} \rightarrow 0$

$|G|: 0 \rightarrow \text{正} \rightarrow 0$        $\angle G: 90^\circ \rightarrow 270^\circ$

当  $\omega=2$  时，实部  $= -2K$ ，虚部  $= 0$ 。



判断开环传函有几个右半平面的极点。

用劳斯判据：

$S^3$	1	3
$S^2$	$\varepsilon$	10
$S^1$	$-10/\varepsilon$	0
$S^0$	10	

开环传函有2个右半平面的极点，  
则需  $K > 1/2$ 。

## 二、奈氏判据例题

已知单位反馈系统开环传递函数  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(\frac{1}{4}s^2+1)}$ ，用奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

【解】选  $\Gamma_s$  如图所示。

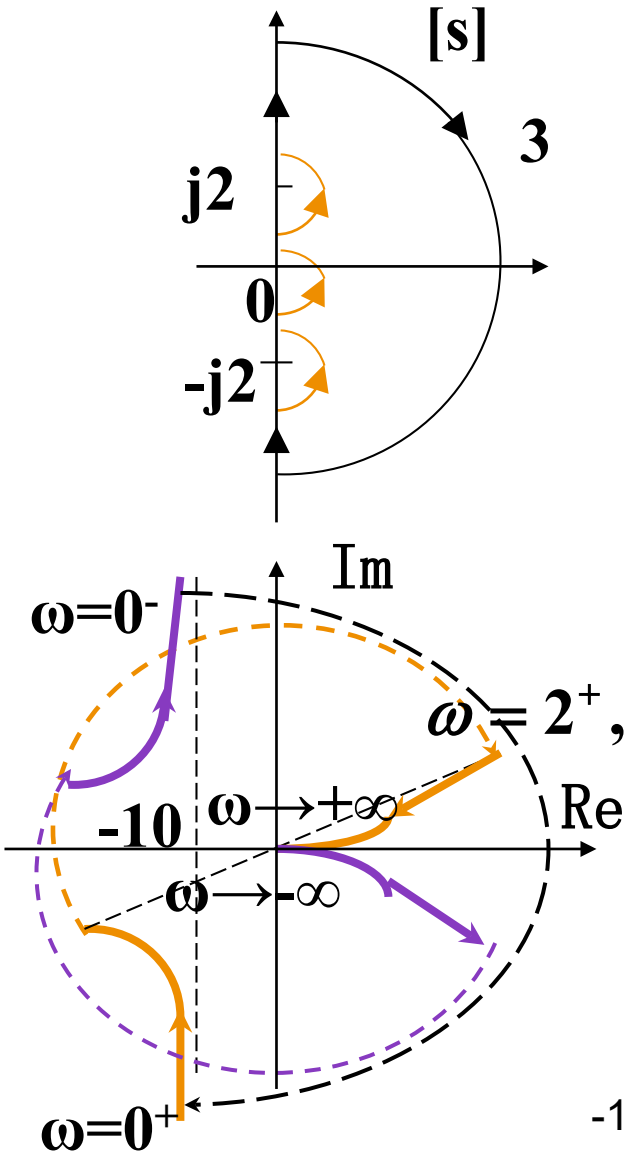
$$G(j\omega) = \frac{10(\omega+j1)}{\omega(\frac{1}{4}\omega^2-1)(\omega^2+1)}, \quad |G(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\left|1-\frac{1}{4}\omega^2\right|},$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\omega, & \omega \leq 2 \\ -270^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\omega, & \omega > 2 \end{cases}$$

$\omega$	0	→ 增大	→ $2^-$	→ $2^+$	→ $\infty$
$ G(j\omega) $	$\infty$	→ 正			→ 0
$\angle G(j\omega)$	$-90^\circ$	→	$-153.4^\circ$	$-333.4^\circ$	→ $-360^\circ$
$u(\omega)$	-10	→	$-\infty$	$+\infty$	→ 0
$v(\omega)$	$-\infty$	→	$-\infty$	$+\infty$	→ 0

$\omega = 2^-$ ,

顺时针包围(-1,j0)2周，系统不稳定。





## 二、奈式判据例题

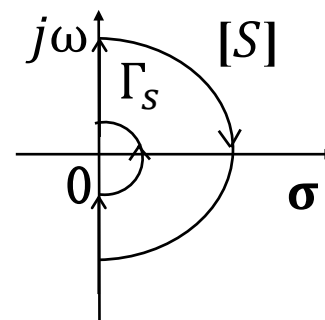
- ◆ 此时幅角原理不成立。需在D形围线（包括原点处和虚轴上开环极点的增补段）上增加 $F(s)$ 零点的增补段，修正奈氏曲线。

【命题5.3】若幅相曲线起点在 $(-1, j0)$ 点，则系统有闭环极点位于原点处。设原点处闭环极点重数为 $v$ ，选择原点处闭环极点的增补段为以半径无穷小的圆弧逆时针旋转绕过原点的半个圆弧。

则奈氏曲线修正为：当 $\omega: 0^- \rightarrow 0^+$ 时，以半径无穷小的圆弧逆时针绕 $(-1, j0)$ 点转 $v\pi$ 角度。

？如何确定原点处的闭环极点重数？

令 $u(\omega) = -1, v(\omega) = 0$ 联立，其解 $\omega$ 的重数，就是原点处或虚轴上闭环极点的重数。

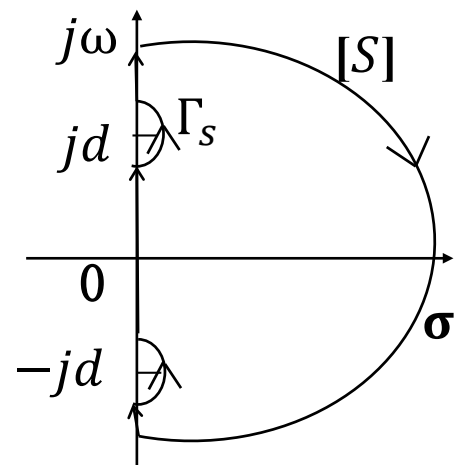


- 若只对幅相曲线修正，则增补段是一半，即从 $\omega = 0$ 绕 $(-1, j0)$ 点的顺时针 $v90^\circ$ 处，以无穷小半径绕 $(-1, j0)$ 点逆时针旋转 $v90^\circ$ 角度至 $\omega = 0$ 处。

## 二、奈式判据例题

【命题5.4】若幅相曲线除起点外穿过 $(-1, j0)$ 点，则系统有闭环极点位于虚轴上，设虚轴上闭环极点为 $\pm jd$ ，且重数为 $v$ ，选择虚轴上闭环极点的增补段为以半径无穷小的圆弧逆时针旋转绕过该闭环极点的半个圆弧，如图。则奈氏曲线修正为：

- 当 $\omega: d^- \rightarrow d^+$ 时（幅相曲线上），以半径无穷小的圆弧逆时针绕 $(-1, j0)$ 点转 $v\pi$ 角度。
- 当 $\omega: -d^+ \rightarrow -d^-$ 时，以半径无穷小的圆弧逆时针绕 $(-1, j0)$ 点转 $v\pi$ 角度。



## 二、奈氏判据例题

**【命题5.5】修正的奈氏判据：**若控制系统开环传递函数所对应的奈氏曲线穿过 $(-1, j0)$ 点，则系统临界稳定或不稳定。设按照【命题5.3】和【命题5.4】绘制的修正的奈氏曲线逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的次数为 $N$ ，而系统位于右半平面的开环极点个数为 $P$ ，则有以下结论：

- 闭环系统临界稳定的充分必要条件是 $P = N$ 。
- 若 $P - N > 0$ ，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z = P - N$ 。

## 二、奈式判据例题

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K[-1 - \tau T\omega^2 + j(T - \tau)\omega]}{\omega^2(1 + T^2\omega^2)}$$

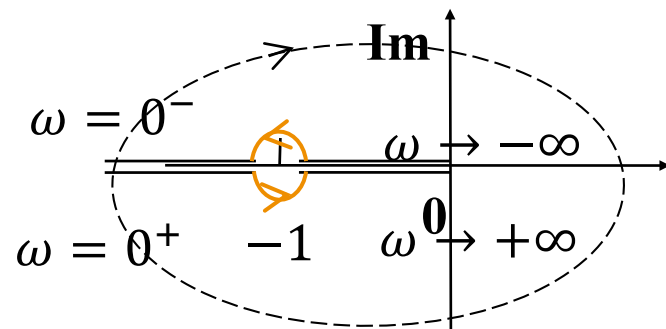
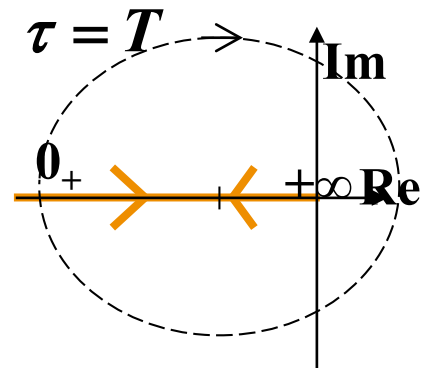
$$|G(j\omega)| = \frac{K\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}{\omega^2\sqrt{1 + \omega^2T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ + \tan^{-1}\omega\tau - \tan^{-1}\omega T$$

$\tau = T$ 时由 $u(\omega) = -1, v(\omega) = 0$ 求解得 $\omega = \pm\sqrt{K}$ ，奈氏曲线在 $\omega = \pm\sqrt{K}$ 时穿过 $(-1, j0)$ 点，系统闭环极点有纯虚根 $\pm j\sqrt{K}$ ，且是单重根。

$\omega: \sqrt{K}^- \rightarrow \sqrt{K}^+$ 时，闭环极点 $j\sqrt{K}$ 的增补段的映射曲线为半径无穷小的圆弧，逆时针绕 $(-1, j0)$ 点转 $\nu\pi$ 角度。 $\omega: -\sqrt{K}^+ \rightarrow -\sqrt{K}^-$ 时对称可得。

修正后的奈氏曲线逆时针方向和顺时针方向各包围 $(-1, j0)$ 点1次，而右半平面的开环极点个数为0，因此闭环系统临界稳定。



### 三、奈氏判据推广

◆ 奈氏判据中“穿越”的概念(只绘制 $\omega:0 \sim \infty$ 的幅相曲线)

➤ 穿越：指开环幅相曲线穿过 $(-1, j0)$ 点左边实轴时的情况。

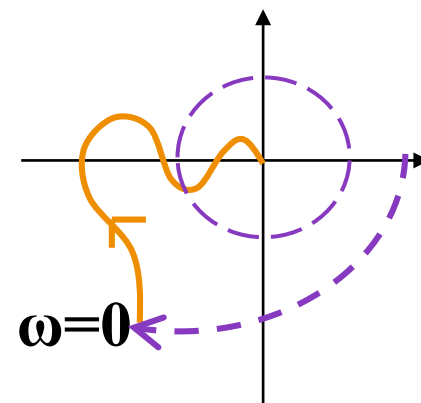
➤ 正穿越： $\omega$ 增大时，幅相曲线由上而下穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴。正穿越次数用 $N^+$ 表示。  
正穿越时，相角增加，相当于奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈。

➤ 负穿越： $\omega$ 增大时，幅相曲线由下而上穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴。负穿越相当于奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈。负穿越次数用 $N^-$ 表示。

• 则奈氏曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 的圈数 $N=2(N^+ - N^-)$

! 幅频特性起点在 $(-1, j0)$ 左边实轴时，记半次穿越。

! 原点处开环极点的增补段应从 $\omega=0$ 的逆时针 $\nabla 90^\circ$ 处以无穷大半径顺时针旋转至 $\omega=0$ 处。



### 三、奈式判据推广

- 【幅相曲线上的奈氏判据】 设 $P$ 为位于 $S$ 平面右半平面的开环传递函数极点数， $N^+$ 和 $N^-$ 分别为幅相曲线（含原点处和虚轴上开环极点增补段）正负穿越的次数，
  - 若幅相曲线不穿过 $(-1, j0)$ 点，则闭环系统稳定的充分必要条件是 $P = 2(N^+ - N^-)$ 。
  - 若幅相曲线不穿过 $(-1, j0)$ 点，且 $P > 2(N^+ - N^-)$ ，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z = P - 2(N^+ - N^-)$ 。
  - 若幅相曲线起点在 $(-1, j0)$ 点上或穿过 $(-1, j0)$ 点，闭环系统稳定性的判断需要在修正的幅相曲线上进行。此时，
    - 若 $P = 2(N^+ - N^-)$ ，则闭环系统临界稳定；
    - 若 $P > 2(N^+ - N^-)$ ，则闭环系统不稳定，不稳定的根（右半平面的根）的个数为 $Z = P - 2(N^+ - N^-)$ 。

### 三、奈式判据推广

已知开环传递函数，判断闭环系统的稳定性。

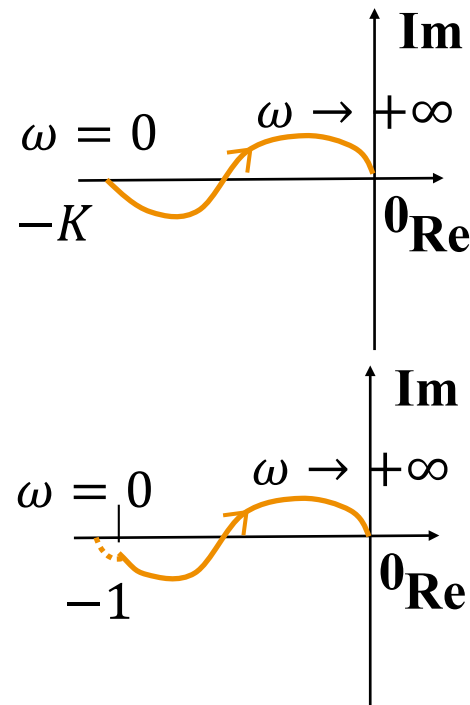
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s - 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}, T_1 > T_2 + T_3 > T_2 > T_3 > 0$$

【解】一个右半平面的开环极点， $P=1$ ，

$$u(\omega) = \frac{K[\omega^2(T_2T_3 - T_1T_2 - T_1T_3) - 1]}{(\omega^2T_1^2 + 1)(\omega^2T_2^2 + 1)(\omega^2T_3^2 + 1)}$$

$$v(\omega) = \frac{K\omega[\omega^2T_1T_2T_3 - (T_1 - T_2 - T_3)]}{(\omega^2T_1^2 + 1)(\omega^2T_2^2 + 1)(\omega^2T_3^2 + 1)}$$

由于 $T_1 > T_2 > T_3$ ， $u(\omega) \leq 0$ 总成立。由于 $T_1 > T_2 + T_3$ ， $v(\omega)$ 先变负后变正。



➤ 若 $K < 1$ ，无穿越，系统不稳定，有1个右半平面闭环极点。

➤ 若 $K = 1$ ，起点在 $(-1, j0)$ 点，绘制修正的幅相曲线。

有半次正穿越， $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 0$ ，系统临界稳定。

### 三、奈式判据推广

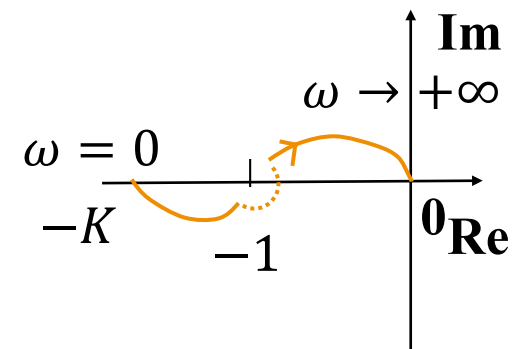
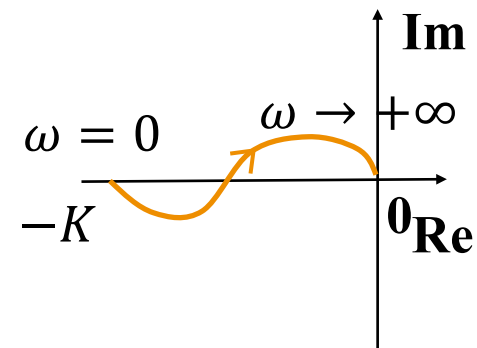
已知开环传递函数，判断闭环系统的稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s - 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}, T_1 > T_2 + T_3 > T_2 > T_3 > 0$$

➤ 若  $K > 1$ ，由  $v(\omega) = 0$  求得  $\omega_1 = \sqrt{\frac{T_1 - T_2 - T_3}{T_1 T_2 T_3}}$ ，带入得  $u(\omega_1)$ 。

- ✓  $|u(\omega_1)| < 1$  时，有半次正穿越，系统稳定。
- ✓  $|u(\omega_1)| > 1$  时，有半次正穿越和1次负穿越， $Z = 2$ ，系统不稳定，有2个右半平面的闭环极点。
- ✓  $|u(\omega_1)| = 1$  时，幅相曲线穿过  $(-1, j0)$  点，绘制修正的幅相曲线，

有半次正穿越， $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 0$ ，系统临界稳定。





# 三、奈式判据推广

◆ [GH]平面与对数坐标平面的关系:

GH平面上的单位圆  
单位圆内  
单位圆外

对数幅频特性0dB线  
0dB线以下  
0dB线以上

负实轴

对数相频特性 -  $\pi$ 线

顺时针绕  $(-1, j0)$  点

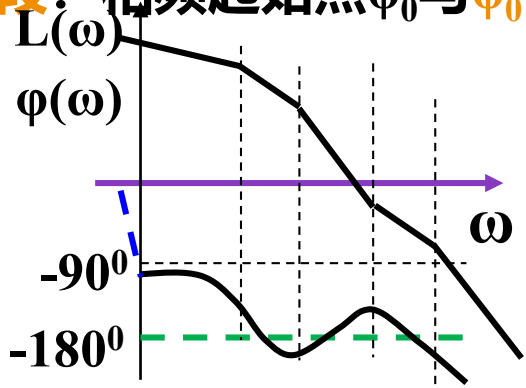
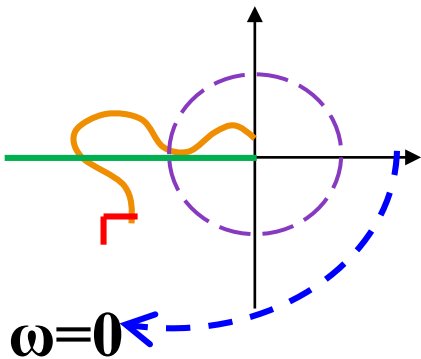
对数幅值大于0dB时, 相频特性曲线由上至下穿越  $-\pi$  线 (负穿越, 相角减少)

逆时针绕  $(-1, j0)$  点

对数幅值大于0dB时, 相频特性曲线由下至上穿越  $-\pi$  线 (正穿越, 相角增加)

增补段

设相频特性曲线的起始角度为  $\varphi_0$ , 则增加一段: 相频起始点  $\varphi_0$  与  $\varphi_0 + v90^\circ$  的连线

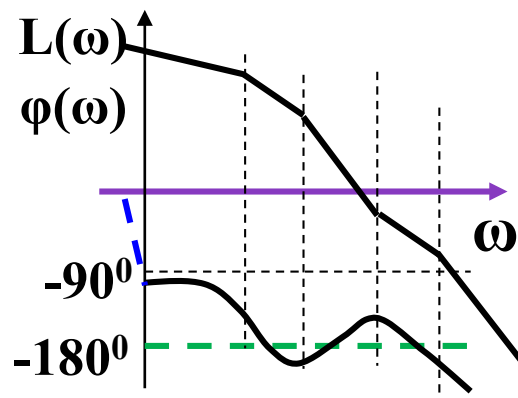
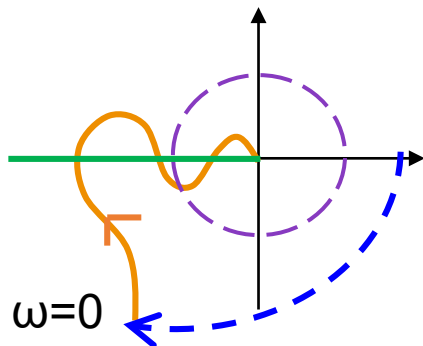


### 三、奈氏判据推广

◆ 利用Bode图判断系统稳定性的奈氏判据为：

- 在**对数幅频特性大于0的频段**内，记正穿越次数为 $N^+$ ，**负穿越次数为 $N^-$** ，则相频特性曲线穿越 $-\pi$ 线的次数 $N^+-N^-$ ，
- 由于对数频率特性只考虑了 $\omega=0 \rightarrow +\infty$ ，因此奈氏曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 的圈数 $N=2(N^+-N^-)$
- 则若 $Z=P-2(N^+-N^-)=0$ ，则系统稳定。

! 幅频特性起点在 $(-1, j0)$ 左边实轴，对应相频特性起始角度为 $-180^\circ$ (0dB线以上)，记**半次穿越**。



### 三、奈式判据推广

已知开环传递函数，用Bode图判断闭环系统的稳定性。

【解】

$G(s)$  无右半平面极点， $P=0$ 。

在对数幅频特性大于0 的频段内，相频特性曲线负穿越 $-\pi$ 线1次，则

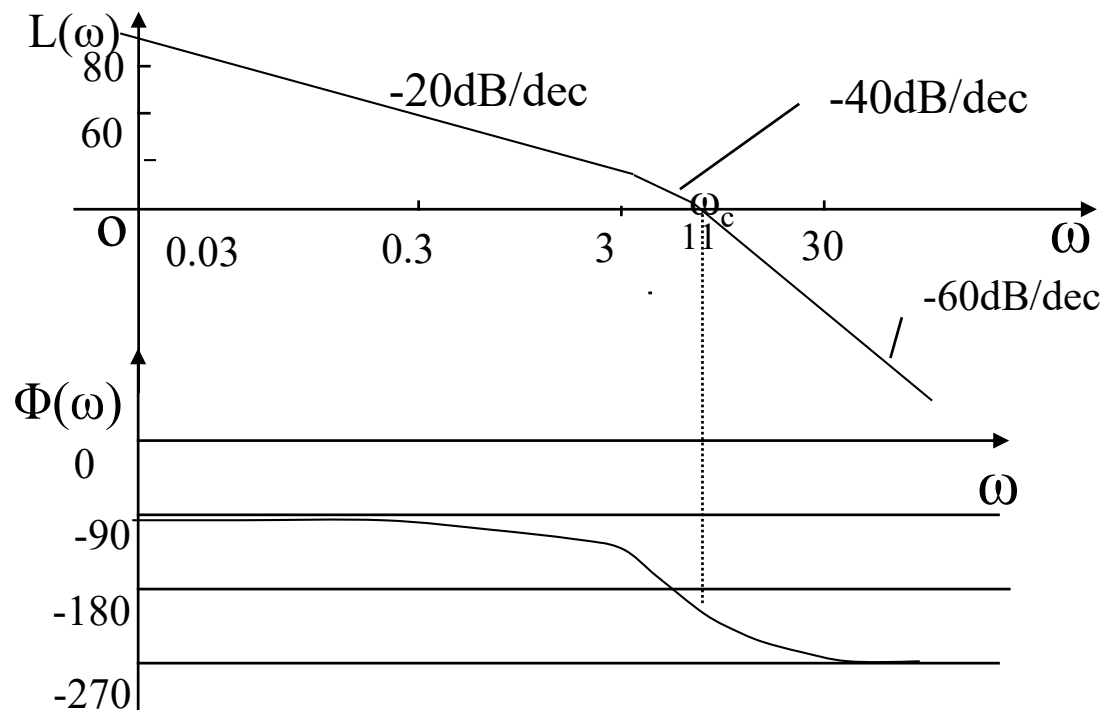
$$N=N^+-N^-=0-1=-1,$$

$$Z=P-2N=2,$$

系统不稳定。

◆ 绘图需准确！

$$G(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$



### 三、奈式判据推广

已知开环传递函数，判断闭环系统的稳定性。

【解】

$$G(s)H(s) = \frac{500(s+1)(0.5s+1)}{s^2(10s+1)(5s+1)(0.1s+1)(0.025s+1)}$$

系统没有位于右半s平面的开环特征根， $P=0$

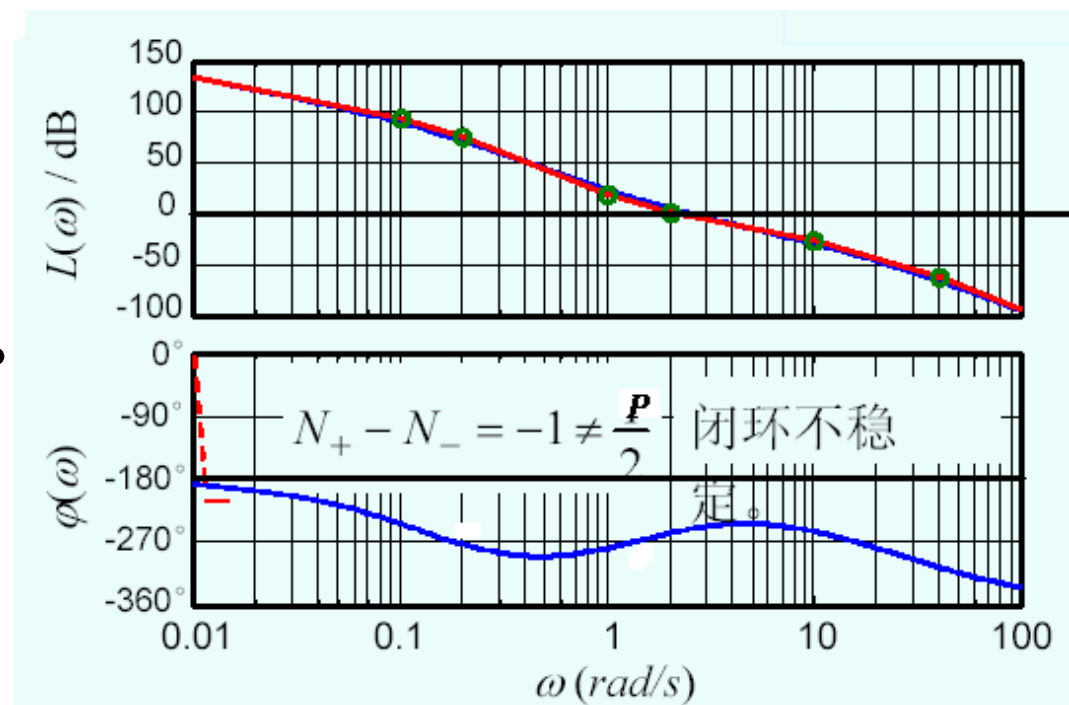
有两个积分环节，在对数相频特性曲线上增加增补段：起始角度 $-180^\circ$ 与 $-180^\circ + 2*90^\circ$ 相连。

如图。

则 $N^- = 1$ ， $N^+ = 0$

则 $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 2$

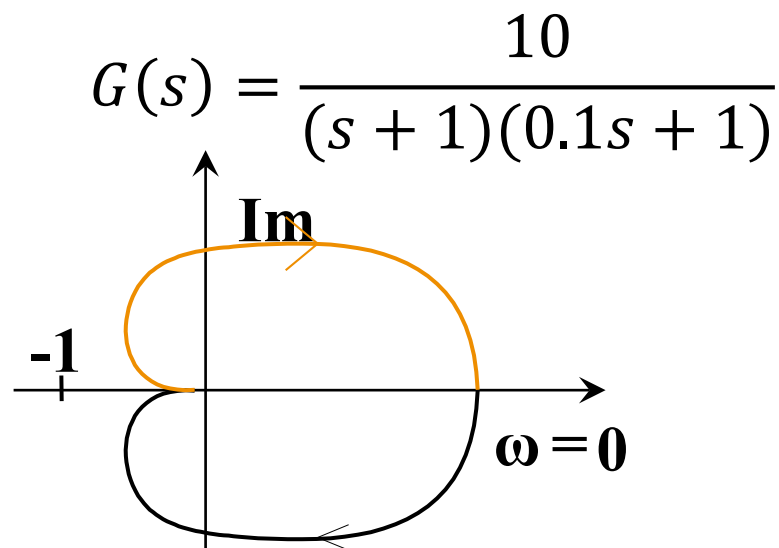
系统不稳定。



### 三、奈氏判据推广

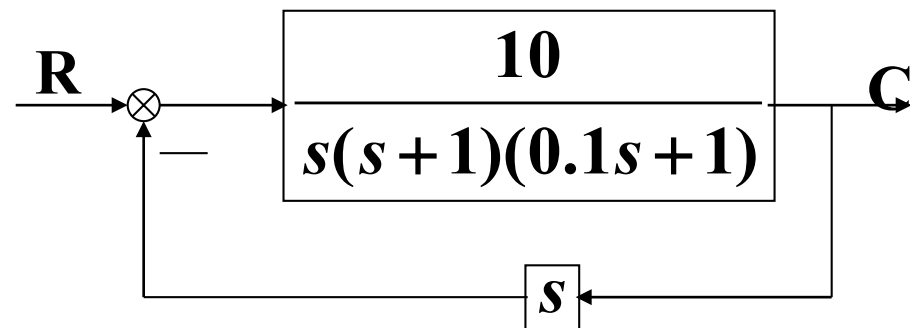
已知系统结构图如下，试判断系统的稳定性。

【解】 1、利用奈氏判据：



则奈氏判据得到的结论是系统稳定。

◆结论：当求开环传函出现 **$G(s)$ 中的极点和 $H(s)$ 中的零点相消**时，需检查奈氏判据的有效性。

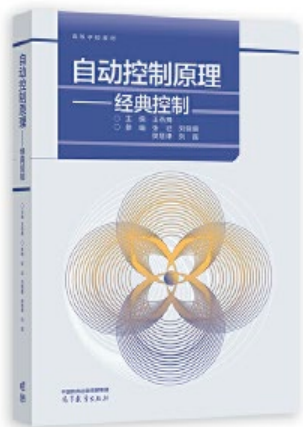


2、求闭环特征根：

$$G_b(s) = \frac{10}{s[(s+1)(0.1s+1)+10]}$$

可见存在极点为0，因此闭环系统不稳定。

! 由于在求开环传函时，存在 $G(s)$ 中的极点和 $H(s)$ 中的零点相消，导致奈氏判据出错。



## 第五章：线性系统的频率分析

### 第21讲 相对稳定性

Bode plots

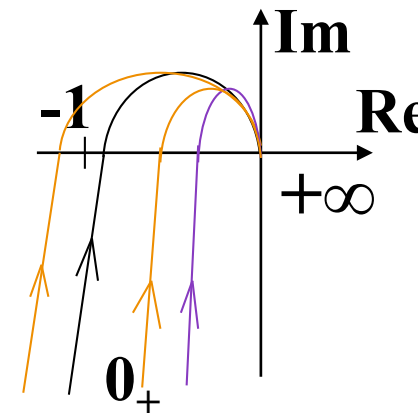
#### 本讲内容

- 一、相对稳定性的定义
- 二、相对稳定性的计算
- 三、小结

# 一、相对稳定性的定义

## ◆相对稳定性:

- 时域分析: 用特征根靠近虚轴的远近来衡量。
- 频域分析: 用开环Nyquist曲线与 $(-1, j0)$ 点的接近程度来衡量。



## ? 什么是稳定裕度?

衡量系统相对稳定性或系统的稳定程度。

## ? 衡量稳定裕度的指标有哪些?

频域分析中包括相角裕度和幅值裕度。

# 一、相对稳定性的定义

◆相角裕度 $\gamma$ :

▪**剪切频率**: 开环幅相曲线与单位圆的交点对应的频率(即开环幅值等于1的频率), 或称为**幅值穿越频率**, 记为 $\omega_c$ 。

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1, \quad 0 \leq \omega_c \leq +\infty。$$

▪**相角裕度 $\gamma$** : 剪切频率所对应的相角与 $-180^\circ$ 角的差值, 即

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

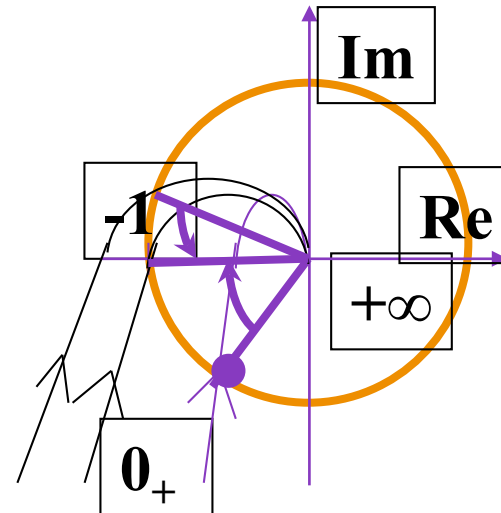
▪**顺时针旋转到达负实轴为正!**

◆ 对于最小相位系统,

若 $\gamma > 0^\circ$ , 则可能稳定, 还要进一步判断。

若 $\gamma < 0^\circ$ , 则系统不稳定。

若 $\gamma = 0^\circ$ , 穿过 $(-1, j0)$ 点。





# 一、相对稳定性的定义

◆幅值裕度 $K_g$ :

■相位穿越频率: 开环幅相曲线与负实轴的交点对应的频率(开环相角等于 $-180^\circ$ 的频率), 记为 $\omega_g$ 。

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ, \quad 0 \leq \omega_g \leq +\infty.$$

■幅值裕度 $K_g$ : 相位穿越频率所对应的开环频率特性的倒数,

即

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

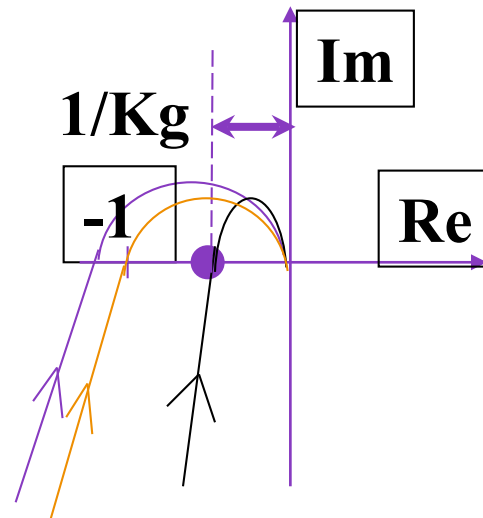
◆对于最小相位系统,

若 $K_g > 1$ 且 $\gamma > 0^\circ$ , 系统**稳定**, 且 $K_g$ 和 $\gamma$ 越大, 相对稳定性越好。

若 $K_g < 1$ , 则系统不稳定。

若 $K_g = 1$ , 穿过 $(-1, j0)$ 点。

■幅值裕度也可以用分贝数来表示, 即  $K_g = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = -L(\omega_g) \text{ dB}$



# 一、相对稳定性的定义

❓ 能否仅从相角裕度或幅值裕度来衡量系统的相对稳定性的好坏？

不能！

❗ 通常要求控制系统相角裕度  $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$ ，幅值裕度  $K_g \geq 2$ 。

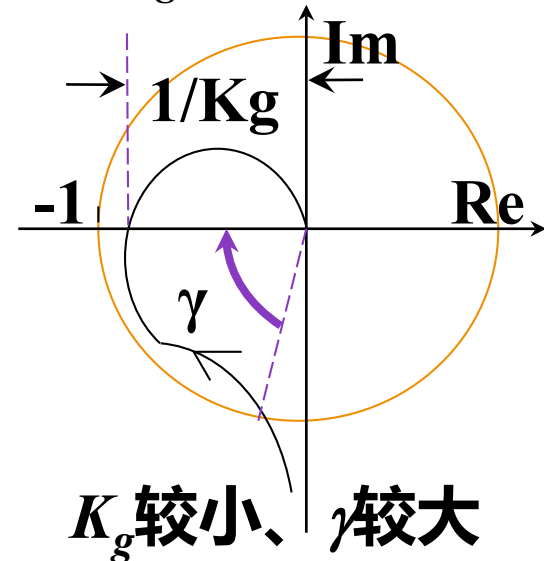
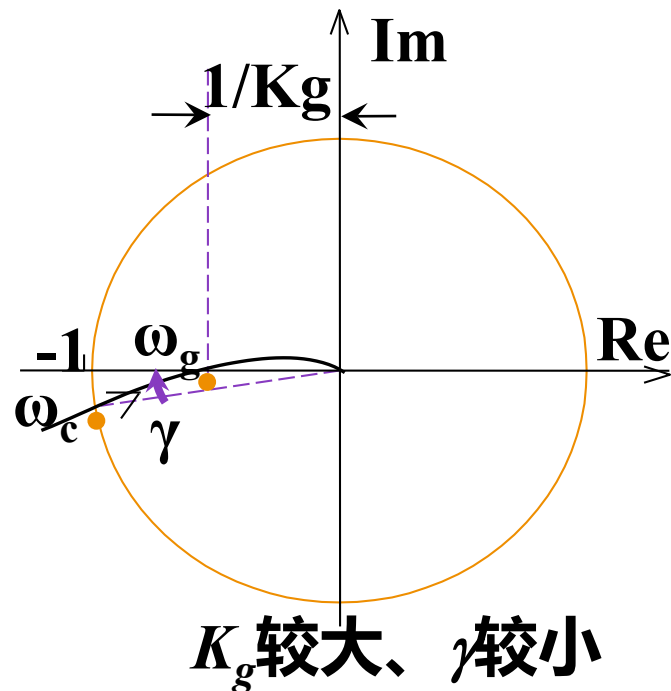
❓ 若有多个交点怎么办？

以最小的作为性能指标。

❓ 不稳定的系统能否讨论稳定裕度？

◆ 系统设计中若要求有一定的稳定裕度，则首先要求系统要稳定。

❓ 稳定裕度如何求解？



# 一、相对稳定性的定义

◆**解析法**：利用定义，根据系统的开环频率特性求解。

◆**极坐标图法**：由开环幅相曲线，

▪**相角裕度**：做**单位圆**，绘制与幅相曲线的交点与坐标原点的连线，该连线与负实轴的夹角

▪**幅值裕度**：幅相曲线与负实轴交点的幅值的倒数。

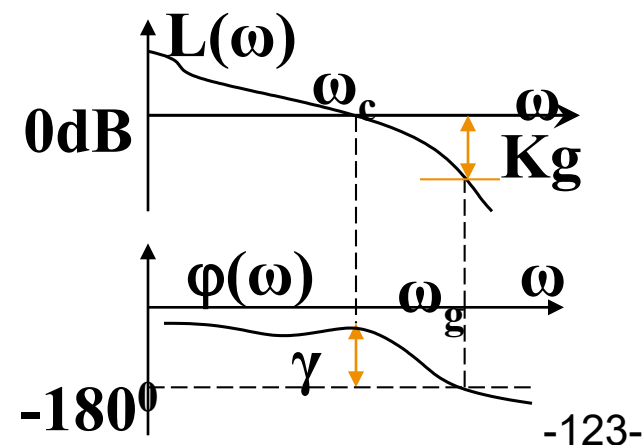
◆**Bode图法**：由开环Bode图，

▪**相角裕度**：由对数幅频特性与0dB线的交点频率 $\omega_c$ ，求出对应的开环对数相频特性与-180°线之间的距离。

若对应的相频特性在-180°线上方，则 $\gamma > 0$ ，在下方则 $\gamma < 0$ 。

▪(分贝值的)**幅值裕度**：由对数相频特性与-180°线的交点频率 $\omega_g$ ，求出对应的开环对数幅频特性与0dB线的差值。

若对应的幅频特性在0dB下方，则 $K_g > 0\text{db}$ ，若在上方，则 $K_g < 0\text{db}$ 。



## 二、相对稳定性的计算

已知最小相位系统开环传函，求相角裕度和幅值裕度。

$$G(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

【解】系统开环频率特性为： $G(j\omega) = \frac{40}{j\omega(-\omega^2 + 2j\omega + 25)}$

$$\text{则 } |G(j\omega)| = \frac{40}{\omega \sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$
$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -90^\circ - \arctan \frac{2\omega}{25 - \omega^2}, & \omega \leq 5 \\ -90^\circ - \left( 180^\circ - \arctan \frac{2\omega}{\omega^2 - 25} \right), & \omega > 5 \end{cases}$$

令 $|G(j\omega)| = 1$  得 $\omega_c = 1.82$ ，则

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$
$$= 90^\circ - \arctan \frac{2 \times 1.82}{25 - 1.82^2} = 80.5^\circ$$

令 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$

得 $\omega_g = 5$ ，则

$$k_g = 1 / |G(j\omega_g)| = 1.25$$

$$\text{或 } k_g \text{ dB} = -20 \lg |G(j\omega_g)| = 1.94 \text{ dB}$$

## 二、相对稳定性的计算

已知最小相位系统开环传函( $k=5$ 和 $k=20$ ) 利用Bode图判断系统的稳定性。

【解】1、画Bode图。

1) 低频段:  $\omega = 1$ 时 $k=5$ 则 $L(1) = 20\lg 5 = 14\text{dB}$

$k=20$ 则 $L(1) = 20\lg 20 = 26\text{dB}$

2) 转折频率:  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 10$

2、计算相角裕度: 求穿越0dB线的 $\omega_c$ 和

对应的 $\varphi(\omega_c)$   $20\lg K - 40\lg \frac{\omega_c}{1} = 0$

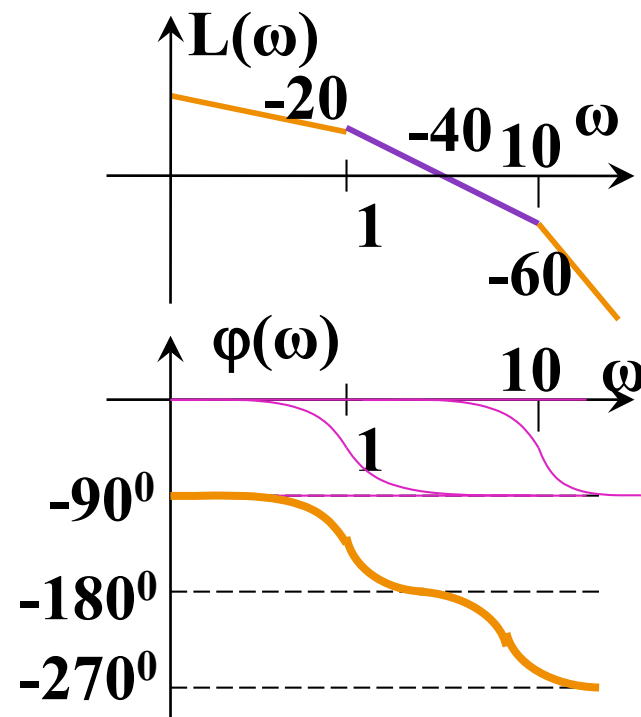
$\Rightarrow k = 5$ 时,  $\omega_{c1} = 2.24$

$\Rightarrow k = 20$ 时,  $\omega_{c2} = 4.47$

$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \text{tg}^{-1}\omega_c - \text{tg}^{-1}(0.1\omega_c)$

$\Rightarrow k = 5$ 时,  $\gamma = 11.4^\circ$

$\Rightarrow k = 20$ 时,  $\gamma = -11.5^\circ$



? 用渐近线求 $\omega_c$ 误差如何? 对应相角裕度误差如何?

## 二、相对稳定性的计算

$$k = 5 \text{ 时, } \gamma = 11.4^\circ \quad k = 20 \text{ 时, } \gamma = -11.5^\circ \quad G_0(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

### 3、计算幅值裕度:

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}(\omega_g) - \operatorname{tg}^{-1}(0.1\omega_g) = -180^\circ$$

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1.1\omega_g}{1-0.1\omega_g^2}\right) = 90^\circ \Rightarrow \omega_g = \sqrt{10} \approx 3.2$$

则由渐近线得

$$K_g = -L(\omega_g) = -(20 \lg K - 40 \lg \frac{\omega_g}{1})$$

$$k = 5 \quad K_{g1} = 6.2 \text{ dB} \quad \text{系统稳定}$$

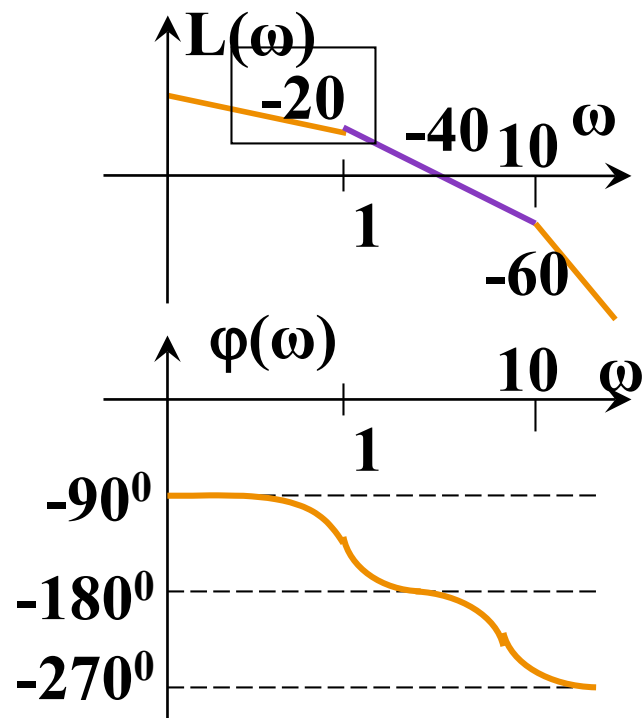
$$k = 20 \quad K_{g2} = -5.8 \text{ dB} \quad \text{系统不稳定}$$

? 用渐近线来求  $K_g$  误差如何?

$K_g$  的准确表达式为

$$K_g = -20 \lg k + 20 \lg \omega_g + 20 \lg \sqrt{1 + \omega_g^2} + 20 \lg \sqrt{1 + 0.01 \omega_g^2}$$

$\omega_g = 3.2$  时渐近线忽略了圆圈中的两项。



## 二、相对稳定性的计算

已知系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{k}{s(0.5s + 1)(0.1s + 1)}$$

①求相角裕度 $\gamma = 60^\circ$ 时的 $k$ 值。

②绘制此时系统的开环对数频率特性曲线。

【解】由  $\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \tan^{-1}0.5\omega_c - \tan^{-1}0.1\omega_c$   
 $= \gamma - 180^\circ = -120^\circ$

求解得到 $\omega_c = 0.9214$ ，代入幅频特性表达式

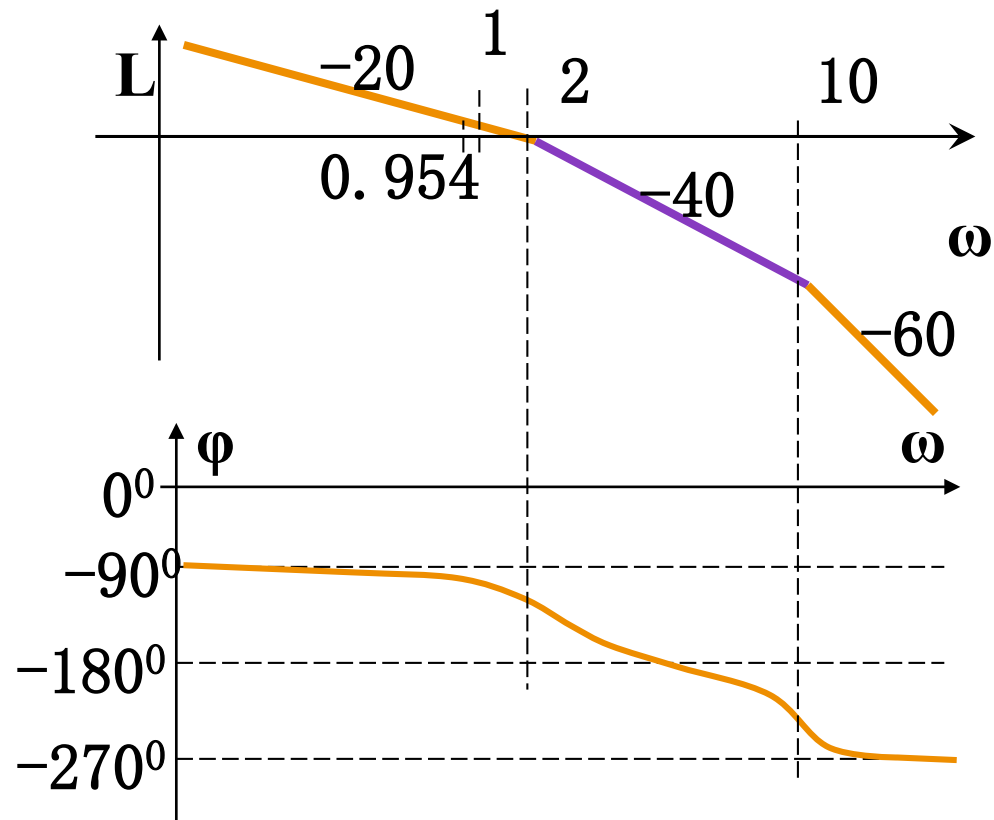
$$\frac{k}{\omega_c \sqrt{(0.5\omega_c)^2 + 1} \sqrt{(0.1\omega_c)^2 + 1}} = 1$$

解得 $k = 1.02$ 。

用渐近线近似式求 $\omega_c$ 得

$$20\lg k - 20\lg \frac{\omega}{1} = 0 \quad \text{得} \quad \omega_c = 1.02$$

？用渐近线求 $\omega_c$ 误差大小？



## 二、相对稳定性的计算

已知开环传函，用奈氏判据判断闭环系统稳定性，并考察与稳定裕度间的关系

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts - 1)}$$

【解】系统开环频率特性为： $G(j\omega) = \frac{K(1 + j\tau\omega)}{j\omega(j\omega T - 1)}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= \arctan \omega\tau - 90^\circ - 180^\circ + \arctan \omega T \\ &= -270^\circ + \arctan \omega\tau + \arctan \omega T\end{aligned}$$

$$\omega = 0, |G(j\omega)| \rightarrow \infty, \angle G(j\omega) = -270^\circ$$

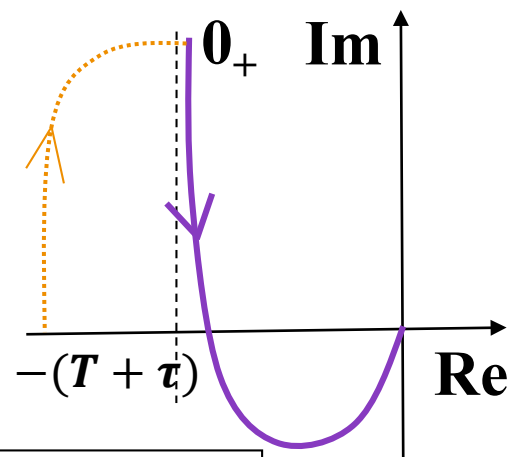
$$\omega \rightarrow \infty, |G(j\omega)| \rightarrow 0, \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

由实频知起点渐近线为 $-(T + \tau)$ 。

要判断稳定性，需求出与实轴的交点。

$$-270^\circ + \arctan \omega_g \tau + \arctan \omega_g T = -180^\circ$$

$$\therefore \omega_g = 1 / \sqrt{\tau T} \quad \text{带入幅值表达式得 } |G(j\omega_g)| = K\tau$$





## 二、相对稳定性的计算

$$\therefore \omega_g = 1/\sqrt{\tau T} \quad |G(j\omega_g)| = K\tau \quad G(j\omega) = \frac{K(1+j\tau\omega)}{j\omega(j\omega T-1)}$$

➤ 若 $K\tau > 1$ ，1次正穿越，半次负穿越，闭环系统稳定。

➤ 若 $K\tau = 1$ ，幅相曲线穿过 $(-1, j0)$ ，

绘制修正后的幅相曲线。

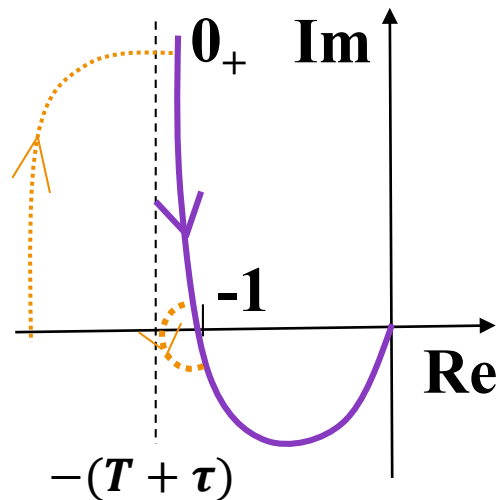
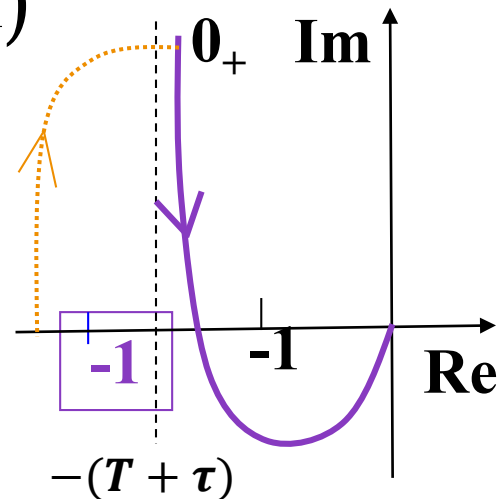
1次正穿越，半次负穿越，闭环系统临界稳定。

➤ 若 $K\tau < 1$ ，半次负穿越，闭环系统不稳定。

? 稳定性与幅值裕度 $>1$ 或相角裕度 $>0$ 的关系？

本例中，幅值裕度  $K_g = 1/|G(j\omega_g)| = 1/K\tau$

稳定时 $K_g < 1$ 。



## 二、相对稳定性的计算

已知系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}$  , 求相角裕度和幅值裕度。

【解】  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$  ,  $\angle G(j\omega) = -90^\circ - 57.3^\circ \omega \tau$  ,

由幅频特性易知  $\omega_c=1$  , 则

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - 57.3^\circ \tau$$

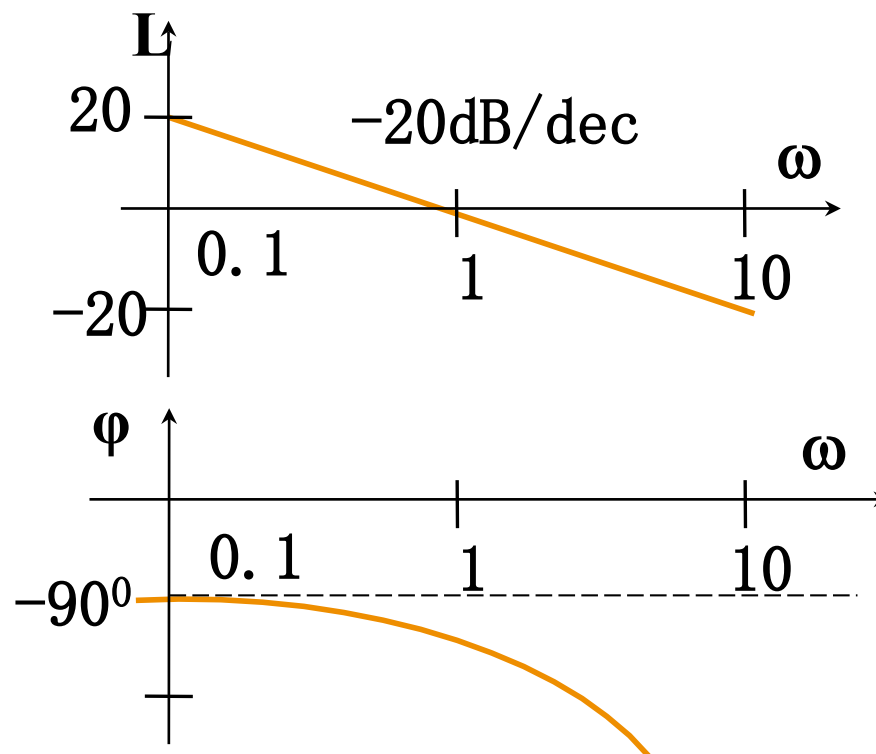
由  $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$  , 得

$$\omega_g = \frac{1.57}{\tau}$$

则幅值裕度

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{1.57}{\tau}$$

可见, 该系统  $\tau$  越小, 相对稳定性越好。



### 三、小结

#### ◆ 稳定裕度的三种解法比较：

- 根据定义直接计算。先求 $\omega_c$ 和 $\omega_g$ ，再求幅值和相角裕度。此法比较精确，但计算复杂。
- 以Bode图求稳定裕度。不仅具有幅相曲线求解的优点，而且可直接在图上求取 $\omega_c$ 和 $\omega_g$ ，同时做图比幅相曲线方便，因而得到广泛地应用。
  - ! 如果 $\omega_c$ 和 $\omega_g$ 离某个转折频率很近，则若直接用高频、低频渐近线来求稳定裕度可能会带来比较大的误差。
- 以幅相曲线求稳定裕度。使用图解，具有简便、直观的优点，对于高阶系统尤为方便，但是有一定误差。