



2024-2025 学年度春季



课程名称：《自动控制原理（一）》

第7讲 控制系统的稳定性分析-Part 1

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

**学生对象：自动化2305班
(32人)**

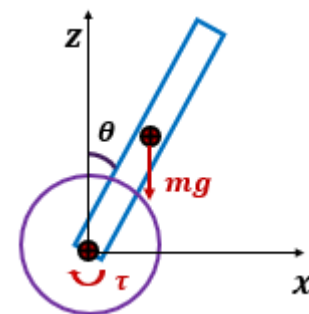
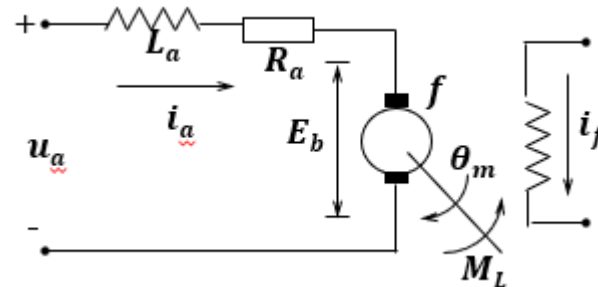
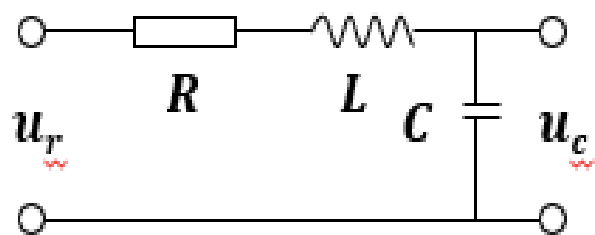
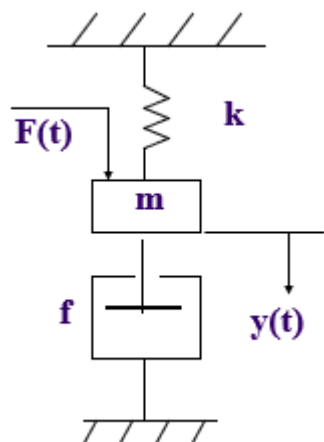
授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

回顾-第2讲

■ 控制系统的微分方程

机械系统、电路系统、电动机系统、轮式机器人平衡系统



■ 非线性系统的线性化

- 工作点处线性化 (泰勒展开)
- 建立偏差与偏差之间的关系

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

■ 案例：轮式机器人平衡系统

回顾-第3讲

■ 第3讲 控制系统的传递函数

➤ 传递函数的定义

➤ 传递函数的性质

➤ 传递函数的求解

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

1. 零初始状态下响应+系统输入信号→传递函数

2. 非零初始状态下响应+系统输入信号→传递函数

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

回顾-第4讲/第5讲

■ 第4讲 控制系统的结构图-Part 1

➤ 传递函数的基本环节

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \frac{s^l (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_{m'} s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta'_2 T_2 s + 1) \cdots (T_{n'} s + 1)}$$

K 、 τ_i 、 ζ_i 、 T_j 、 ζ'_j 为常数。非负整数 l 和 v 不同时非零。

✓比例环节

✓(理想)微分环节

✓(理想)一阶微分环节

✓(理想)二阶微分环节

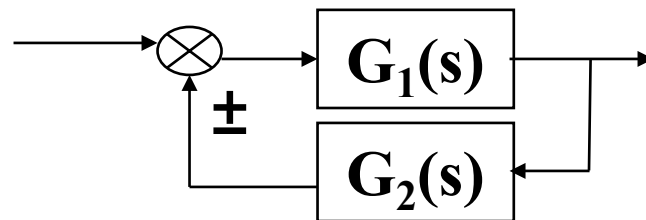
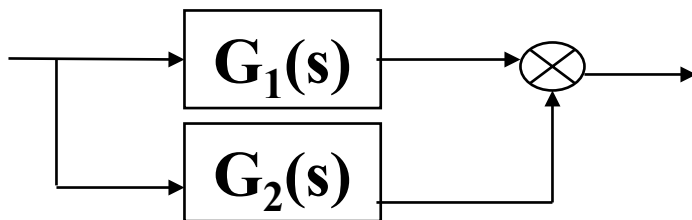
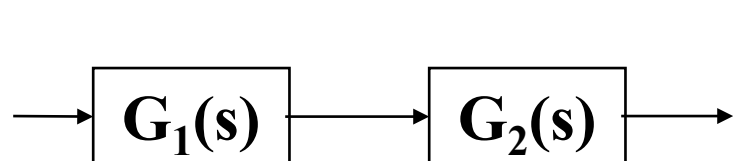
✓积分环节

✓惯性环节

✓振荡环节(二阶环节)

回顾-第4讲/第5讲

■ 第4/5讲 控制系统的结构图



等效变换法则：

【法则1】 串联连接的等效变换

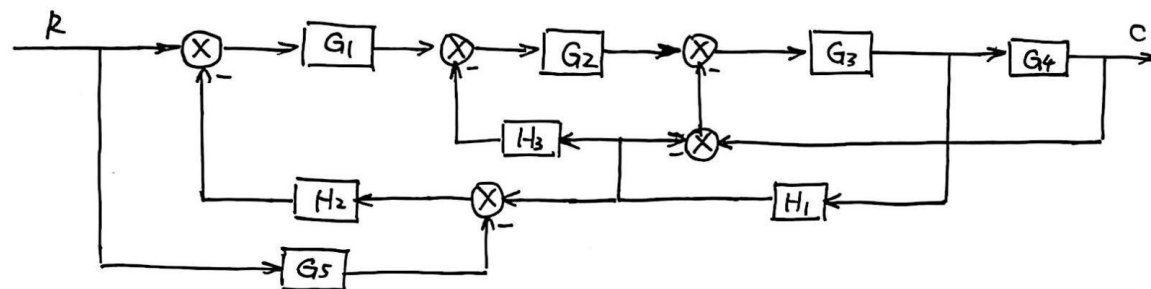
【法则2】 并联连接的等效变换

【法则3】 反馈连接的等效变换

【法则4】 综合点的前后移动

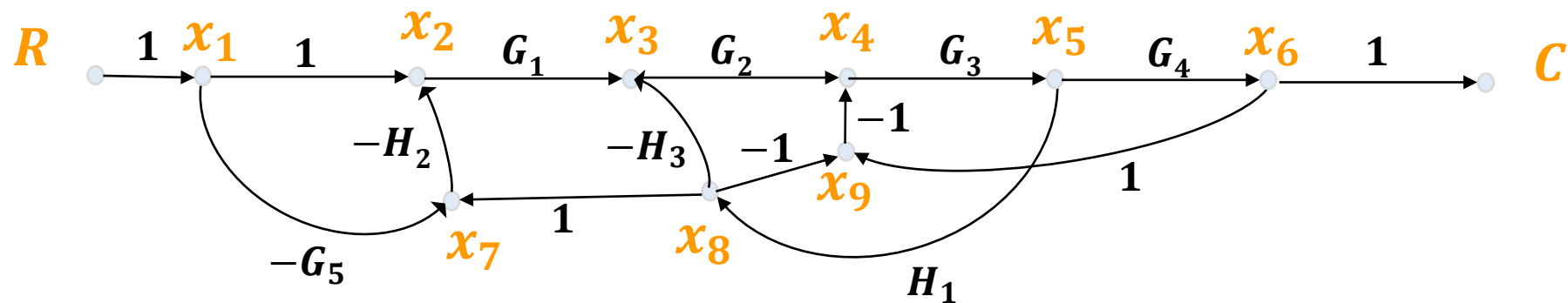
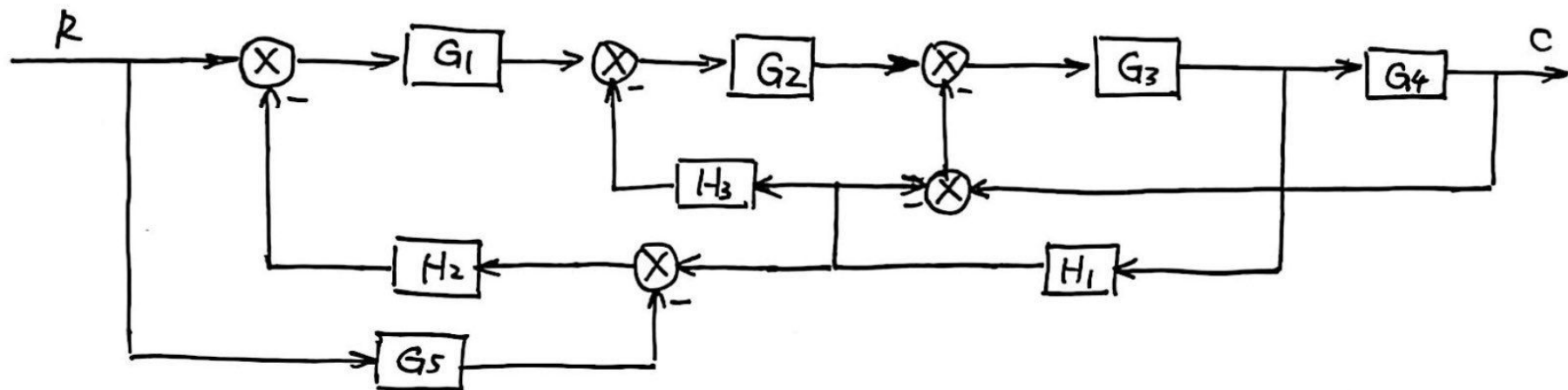
【法则5】 引出点的前后移动

【法则6】 相邻综合点的移动/相邻引出点的移动



回顾-第6讲

■ 第6讲 控制系统的信号流图



回顾-第6讲

■ 第6讲 控制系统的信号流图

- ◆ 梅逊公式的表达式为：
$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$
- $G(s)$: 待求的总传递函数。
- Δ 称为**特征式**,
$$\Delta = 1 - \sum_1^n L_i + \sum_1^{n_2} L_i L_j - \sum_1^{n_3} L_i L_j L_k + \cdots$$
- $\sum L_i$: 所有**回路**(n 条)的回路增益之和。
- $\sum L_i L_j$: 所有**两两互不接触回路**(n_2 条)的回路增益乘积之和。
- $\sum L_i L_j L_k$: 所有**三个互不接触回路**(n_3 条)的回路增益乘积之和。
- P_k : 从输入节点到输出节点**第 k 条前向通路**的增益。
- Δ_k : 在 Δ 中, 将与**第 k 条前向通路相接触的回路**除去后所余下的部分的 Δ , 称为**余子式**。
- m : 从输入节点到输出节点**所有前向通路的条数**。

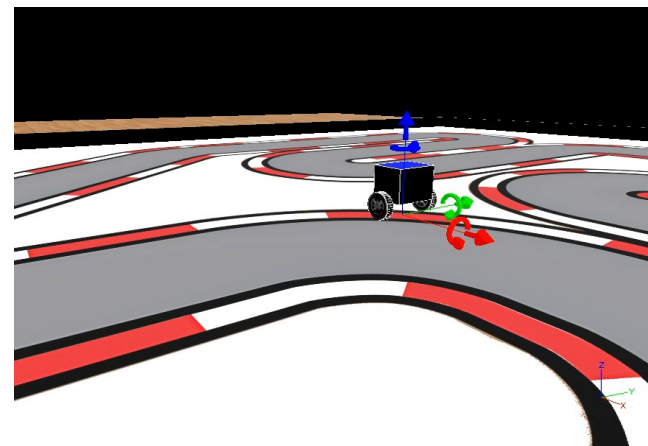
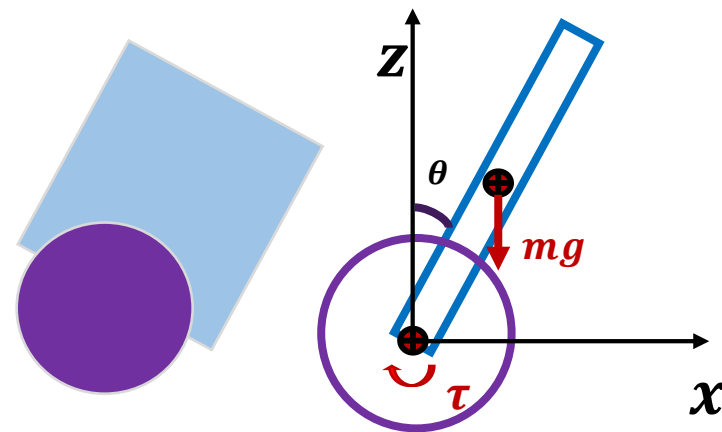
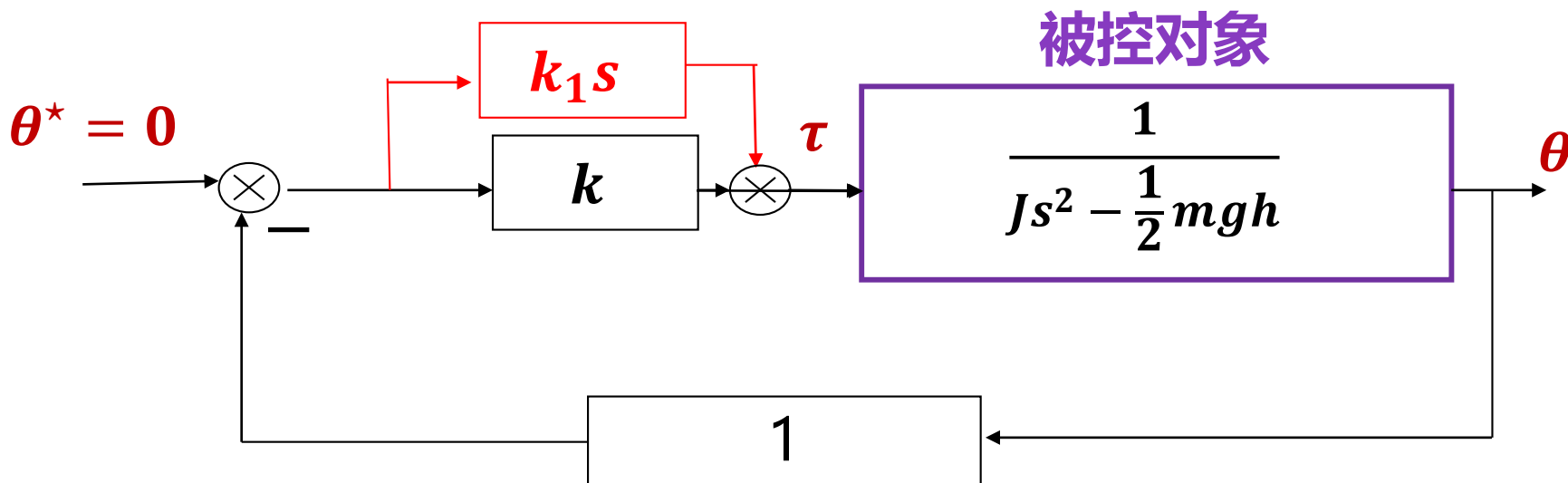
回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

其中俯仰角为 θ , 机器人主体质量为 m , 高度为 h 转动惯量为 J
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 τ

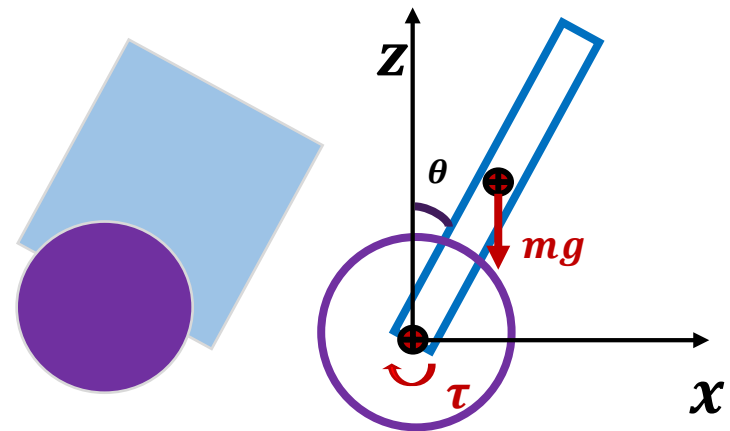
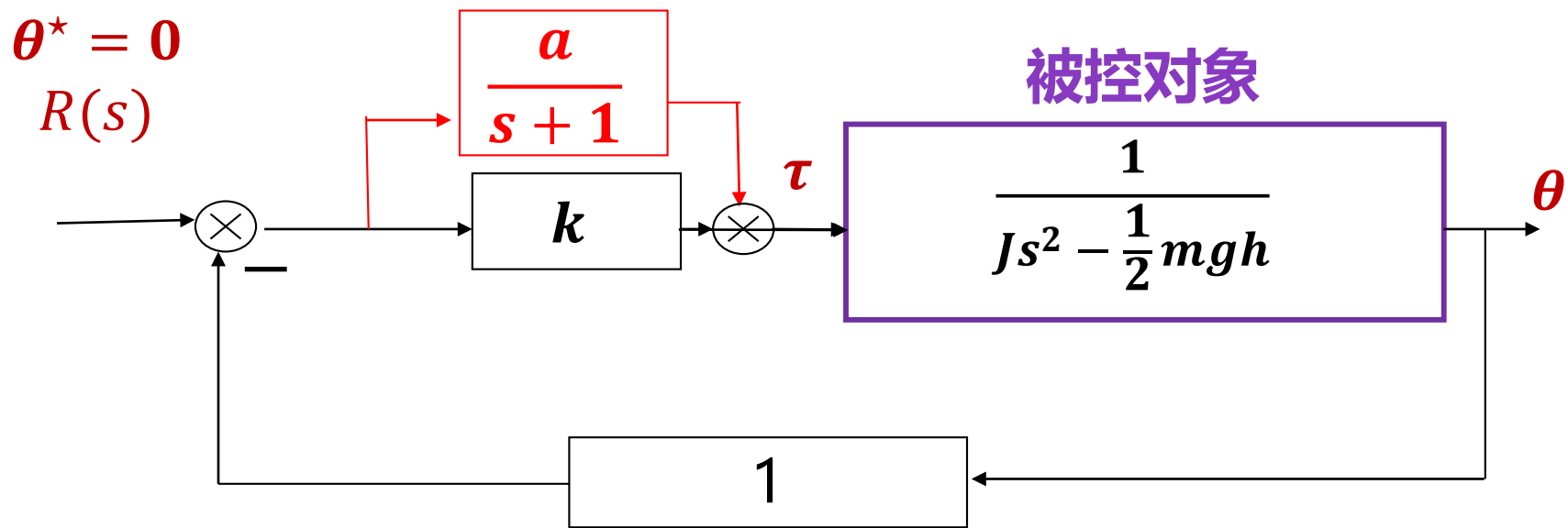
设计控制量 $\tau = -k\theta - k_1\dot{\theta}$



试写出传递函数

回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图



传递函数

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$

■ 液态硝酸货运车侧翻事故（2023年，亚利桑那州际公路）



为什么这些车辆更容易失稳呢？



约75%车辆侧翻事故与皮卡、货车、SUV类型的车辆有关



第二章：控制系统的数学模型

第7讲 控制系统的稳定性分析-Part 1

Stability of Control Systems – Part 1

本讲内容

一、稳定性的定义

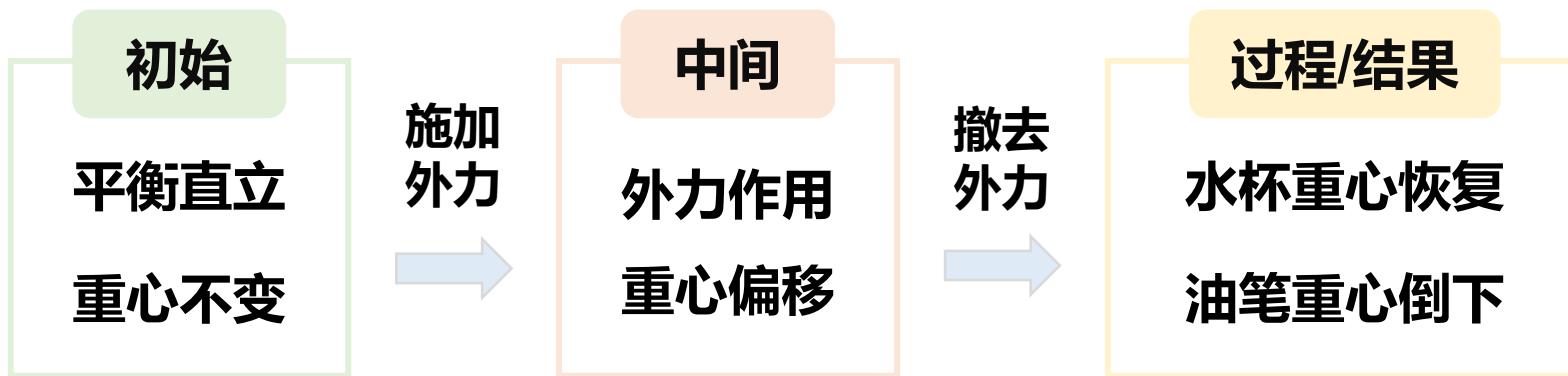
二、稳定性的判据

三、案例：车辆侧翻案例

四、习题课

一、稳定性的概念

■ 稳定性的实验



一、稳定性的概念

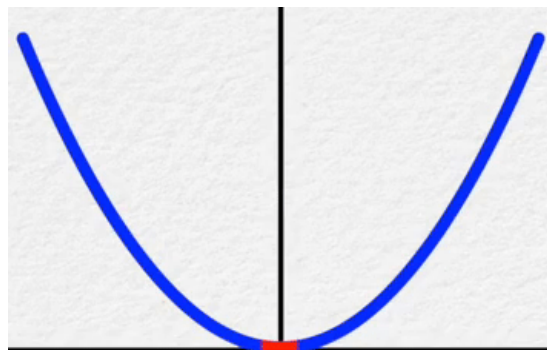
■ 稳定性的定义

系统受到一扰动偏离了平衡状态，当撤销扰动后：

若系统能够重新恢复到原始平衡状态，则称系统是**稳定的**；

若扰动消失后不能恢复原始平衡状态，而偏差越来越大，则称系统是**不稳定的**。

若扰动消失后，系统输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于**临界稳定状态**。



稳定

一、稳定性的概念

■ 稳定性的定义

系统受到一扰动偏离了平衡状态，当撤销扰动后：

若系统能够重新恢复到原始平衡状态，则称系统是**稳定的**；



如何从数学解析的角度理解系统稳定性呢？

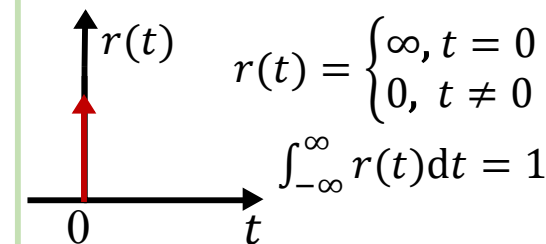
用什么信号来模拟扰动呢？

输入**单位脉冲信号**。

原来的平衡状态是多少呢？

以原始平衡状态为基准，设置平衡点为原点(设为0)。

单位脉冲信号



二、稳定性的判别方法

■ 稳定性判据

判别方法1：(线性定常系统)

设系统**初始条件为零**，输入一个理想的**单位脉冲函数**，若输出响应 $c(t)$ 满足

$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ，则该系统是稳定的。

如何求解单位脉冲输入下的输出响应呢？

二、稳定性的判别方法

【例2.1】 已知系统的微分方程模型为 $T\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$ ，判断该系统的稳定性。

【解】 在零初始条件下对方程两边进行拉氏变换得 $TsC(s) + C(s) = R(s)$ 。

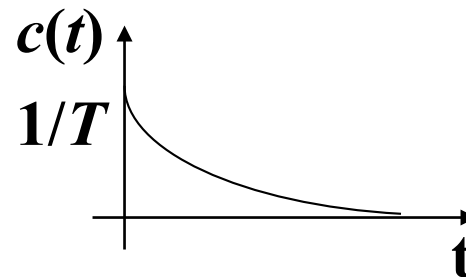
若 $r(t) = \delta(t)$, $c(0) = 0$, 则

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1}{T} \frac{1}{s + 1/T},$$

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0,$$

因此该系统是稳定的。



? 高阶系统? 太繁琐

二、稳定性的判别方法

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

若系统的输入为**单位脉冲函数** $r(t) = \delta(t)$, 即 $R(s) = 1$,

则输出 $C(s) = G(s)R(s) = G(s)$, 拉氏反变换得

$$c(t) = L^{-1}(G(s)) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t},$$

其中 A_i 为极点 $s = p_i$ 处的留数。

设系统的**极点**有 k 个实根 $p_i, i = 1, 2, \dots, k$, 和 r 对共轭复数根 $p_j = \sigma_j + j\omega_j, j = 1, 2, \dots, r$,

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (B_j \cos \omega_j t + C_j \sin \omega_j t)$$

二、稳定性的判别方法

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (B_j \cos \omega_j t + C_j \sin \omega_j t)$$

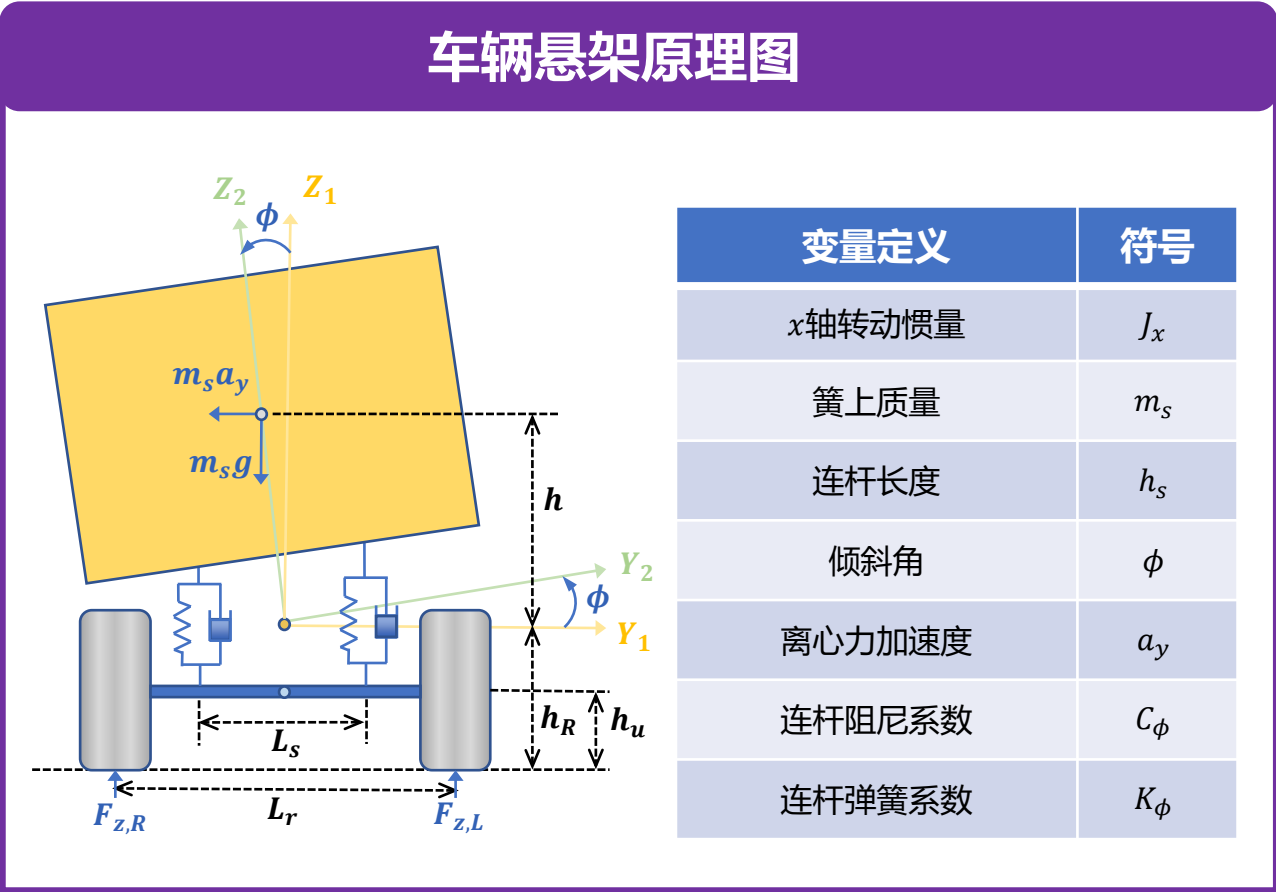
- 若 $\forall p_i < 0$ 且 $\forall \sigma_j < 0$ ，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ，则系统最终能恢复至平衡状态，是**稳定的**。
若有复数根，则为**衰减振荡**；若皆为负实数，则按**指数衰减**。
- 若 $\exists p_i > 0$ 或 $\exists \sigma_j > 0$ ，则 $t \rightarrow \infty$ 时偏差越来越大，系统**不稳定**；
- 若 $\exists p_i = 0$ （零根）或 $\exists \sigma_j = 0$ （一对纯虚根），而其余 $p_i < 0$ 且 $\sigma_j < 0$ ，则系统输出或者为一**常值**（零特征根），或者为**等幅振荡**（纯虚根），不能恢复原平衡状态。则系统处于**临界稳定状态**。

判别方法2：(线性定常系统) **S域的判别方法**

传递函数 $\Phi(s)$ 的所有极点均在根平面(S 平面)的左半部分。

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？



转矩平衡方程

$$J_x \ddot{\phi} = M_a + M_g - M_r$$

离心力矩

$$M_a = m_s h a_y$$

重力矩

$$M_g = m_s g h \sin(\phi)$$

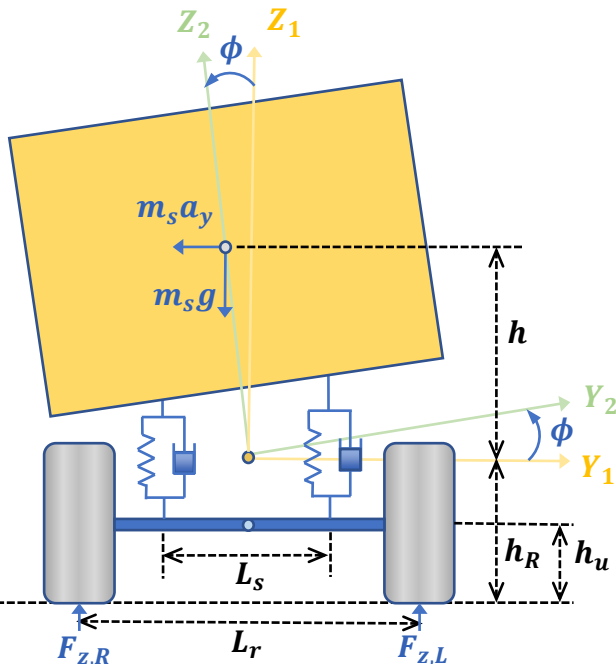
悬架回正力矩

$$M_r = \frac{1}{2} L_s^2 (K_\phi \phi + C_\phi \dot{\phi})$$

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？

车辆悬架原理图



变量定义	符号
x轴转动惯量	J_x
簧上质量	m_s
连杆长度	h_s
倾斜角	ϕ
离心力加速度	a_y
连杆阻尼系数	C_ϕ
连杆弹簧系数	K_ϕ

传递函数

$$a_y(s) \rightarrow \frac{m_s h}{J_x s^2 + \frac{1}{2} L_s^2 C_\phi s + \frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h} \rightarrow \phi(s)$$

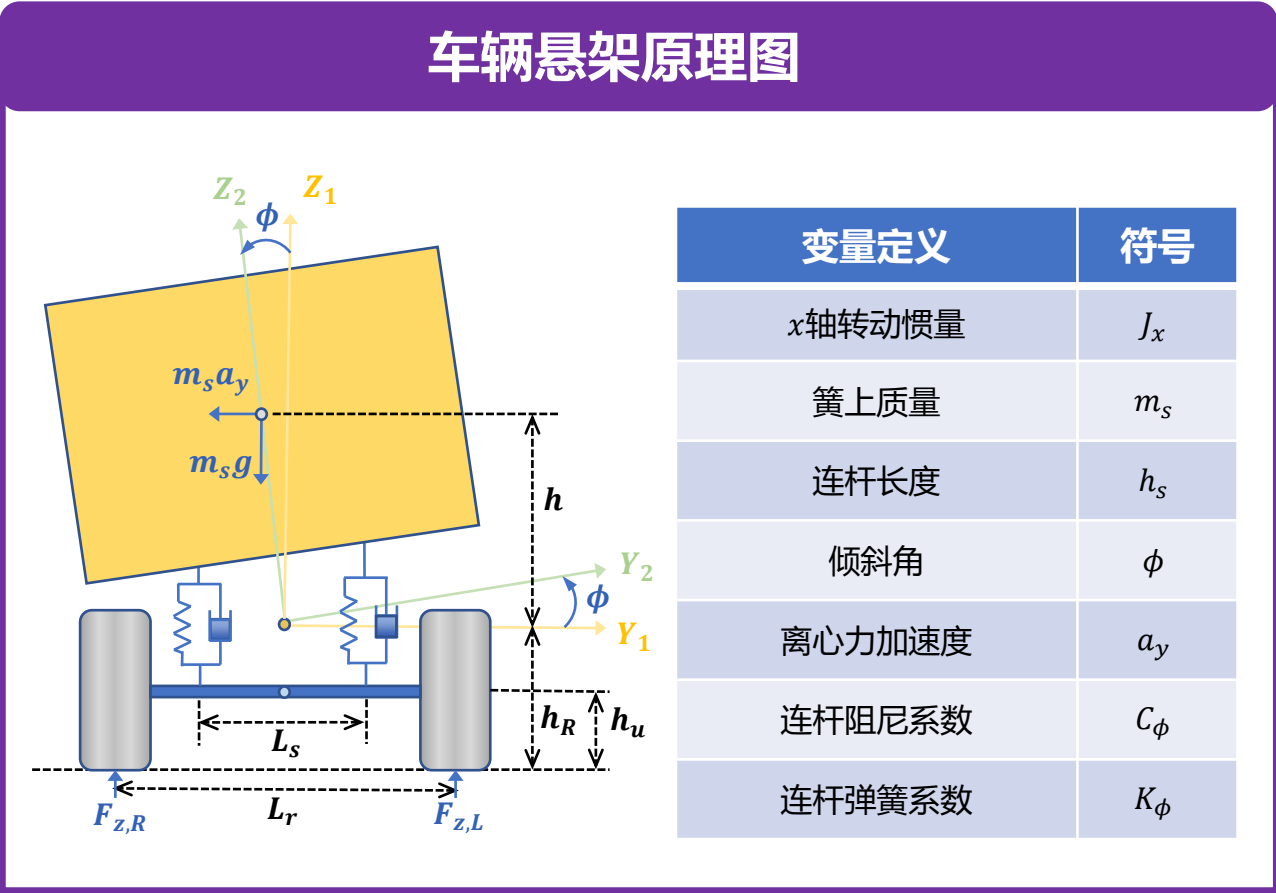
单位脉冲响应

$$\phi(t) = \frac{m_s h}{J_x} (a_1 e^{p_1 t} + b_1 e^{p_2 t})$$
$$p_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} L_s^2 C_\phi \pm \sqrt{\frac{1}{4} L_s^4 C_\phi^2 - 4 J_x \left(\frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h \right)}}{2 J_x}$$

$$\frac{1}{2} L_s^2 K_\phi - m_s g h > 0$$

三、车辆侧翻的稳定性分析与计算

哪些因素会影响车辆的失稳呢？



$$\frac{1}{2}L_s^2K_\phi - m_sgh > 0$$

h ：载重重心高度

L_s ：车身悬架的宽度

K_ϕ ：弹性元件的强度

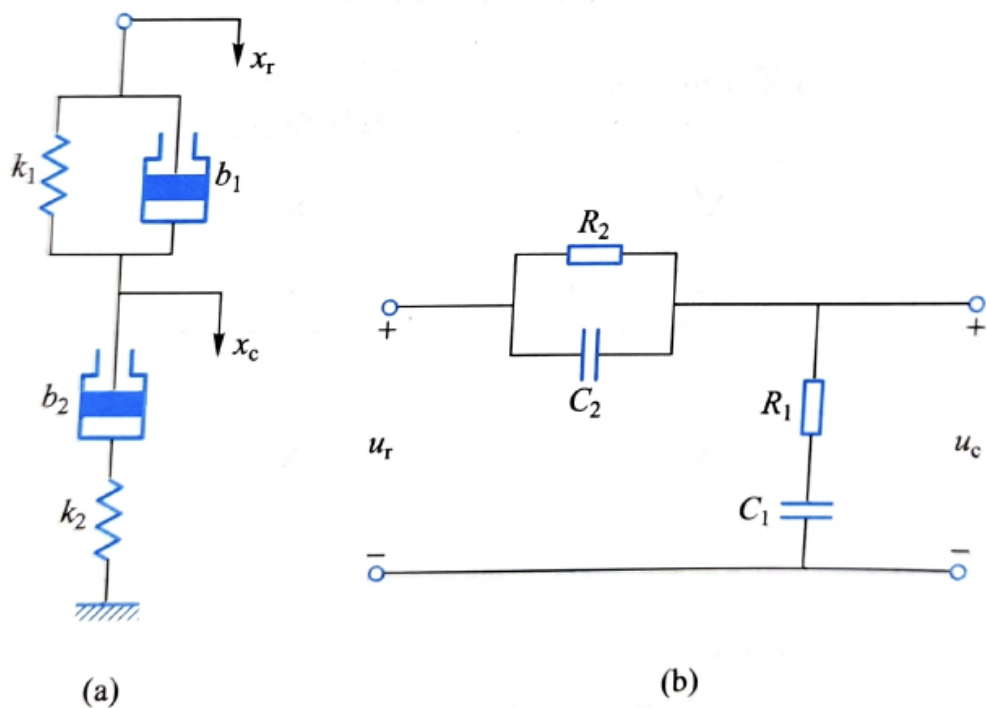
m_s ：载重（簧上质量）

小结

- 控制系统的稳定性：
 - 稳定性的定义
 - 稳定性的判据
 - 案例分析：车辆侧翻案例
- 作业：
 - 作业3.4

习题课/第二章

2.1 试分别以 x_r 和 u_r 为输入, x_c 和 u_c 为输出, 求题图 2-1(a) 所示机械系统和题图 2-1(b) 所示电路系统的微分方程模型和传递函数, 并证明这两个系统是相似系统。其中 k_1 和 k_2 是弹簧的弹性系数, b_1 和 b_2 是阻尼器的阻尼系数, R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 分别是电阻器的电阻和电容器的电容。



题图 2-1 机械系统和电路系统

2.5 若某系统在单位阶跃输入作用 $r(t) = 1(t)$ 时, 系统

(1) 在零初始条件下的输出响应为 $c(t) = 1 + e^{-t} - e^{-2t}, t > 0$ 。

(2) 在初始条件为 $c(0) = 0, \dot{c}(0) = 3$ 时的输出响应为 $c(t) = 1 + 4e^{-t} - 4e^{-2t}, t > 0$ 。

试求上述两种情况下系统的传递函数。

(3) 思考为何该系统的输出响应在 $t = 0$ 时发生了跳变。

(4) 求系统的单位脉冲响应, 并比较与系统的单位阶跃响应的关系。

2.7 已知某系统信号间的微分方程描述为

$$x_1(t) = r(t) - c(t), \quad x_2(t) = \tau \frac{dx_1(t)}{dt} + K_1 x_1(t)$$

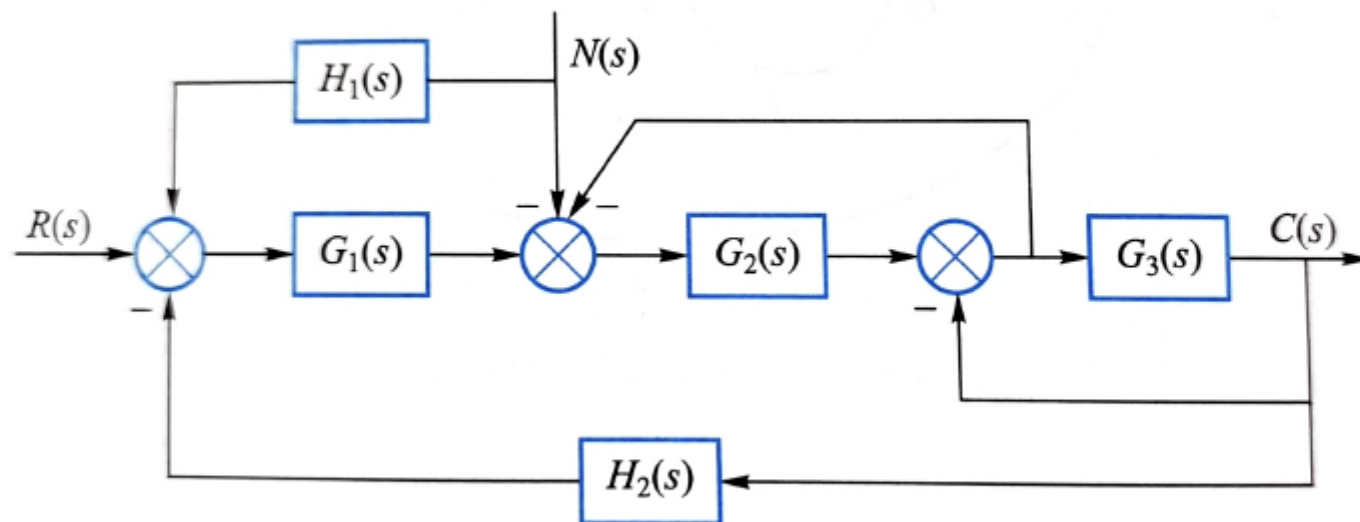
$$\dot{x}_3(t) = K_2 x_2(t), \quad x_4(t) = x_3(t) - x_5(t) - K_5 c(t)$$

$$\frac{dx_5(t)}{dt} = K_3 x_4(t), \quad K_4 x_5(t) = T \frac{dc(t)}{dt} + c(t)$$

其中 $\tau, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, T$ 均为常数。设输入为 $r(t)$, 输出为 $c(t)$, 试绘制系统的结构图, 并求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

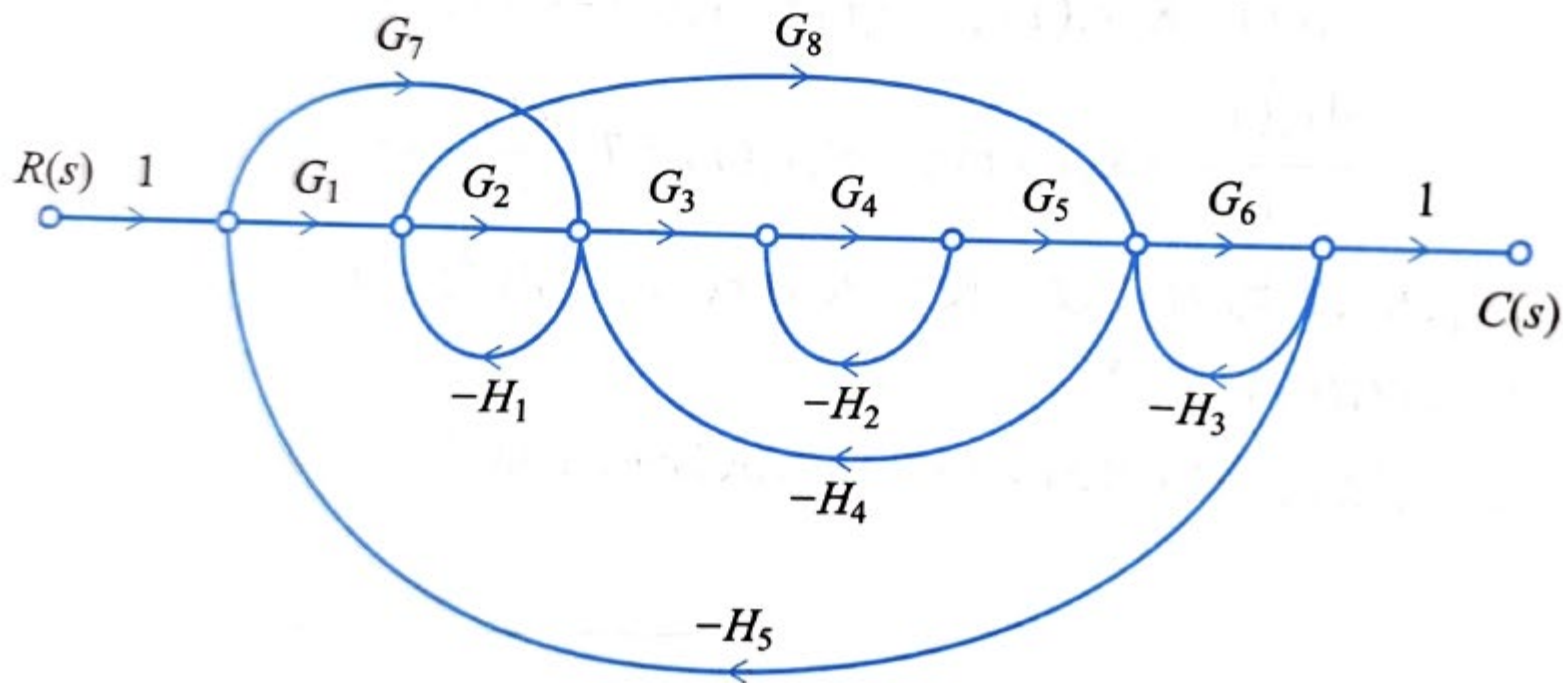
习题课/第二章

2.9 已知系统的结构图如题图 2-5 所示,试分别用结构图等效化简的方法和梅森公式的方法求系统的传递函数。



题图 2-5 习题 2.9 系统的结构图

2.11 设系统信号流图如题图 2-7 所示。求传递函数 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。



题图 2-7 习题 2.11 系统的信号流图