

2024-2025 学年度春季



课程名称：《自动控制原理（一）》 第11讲 控制系统的动态性能-Part 3

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

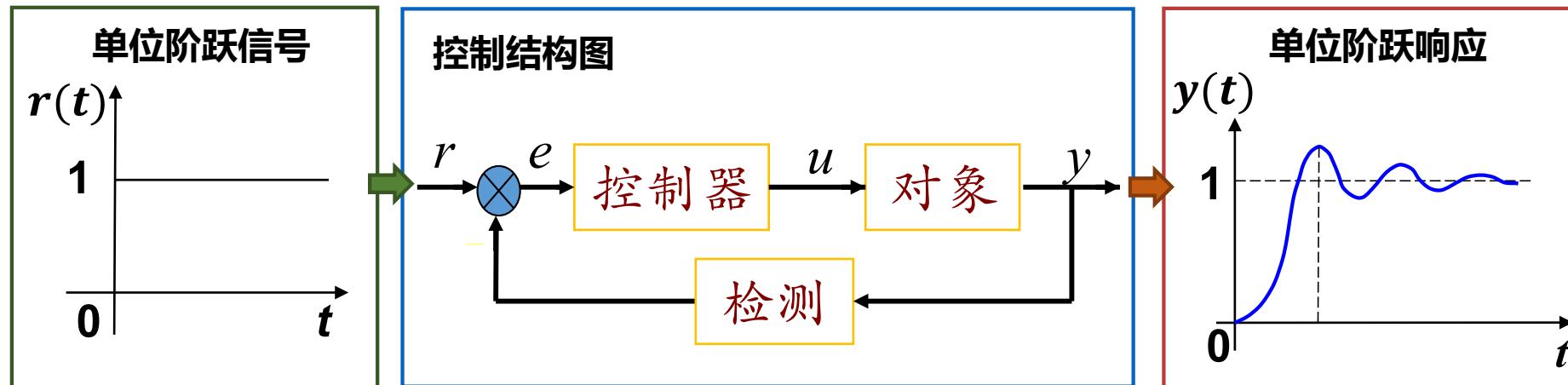
学生对象：自动化2305班
(32人)

授课教师：刘骁康

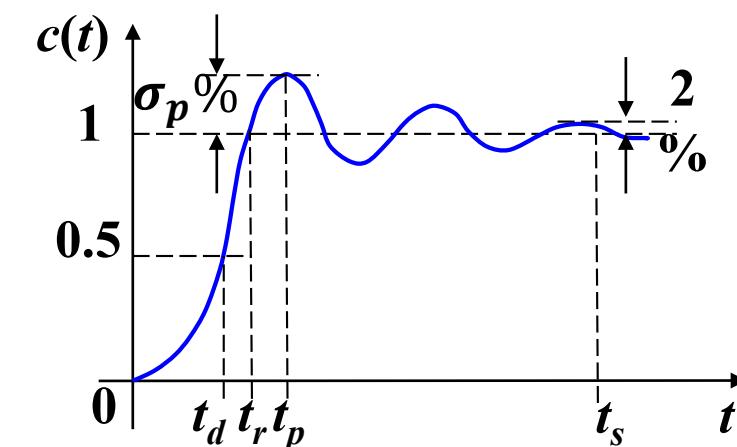
课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

■ 控制系统的动态性能

动态性能分析: 零初始条件下对系统的**单位阶跃响应**的动态过程进行分析。



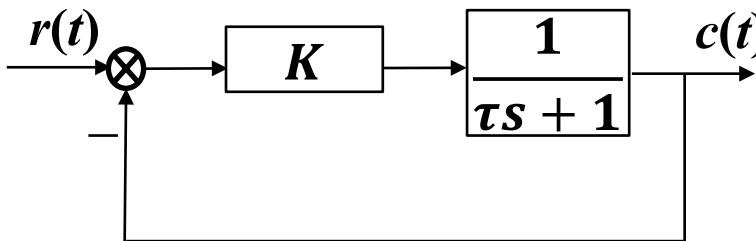
- 延迟时间 t_d
- 上升时间 t_r
- 峰值时间 t_p
- 调整时间 (调节时间) t_s
- 最大超调量 σ_p
- 振荡次数
- 衰减比



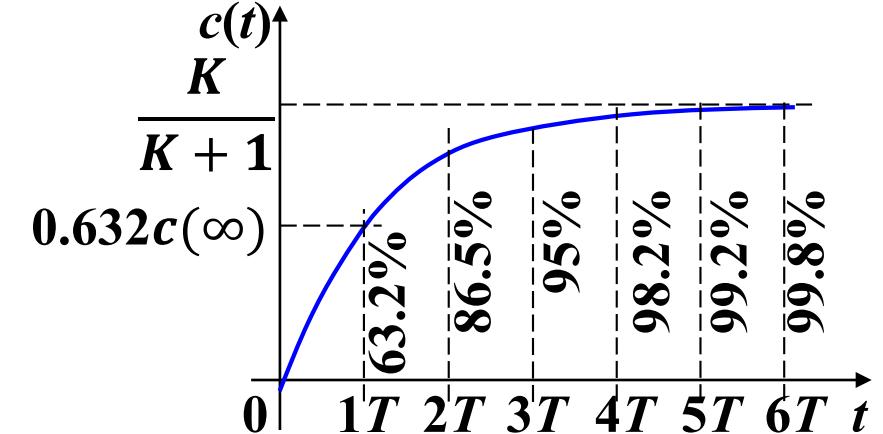
回顾-第9讲

■ 控制系统的动态性能

□ 一阶系统：



该一阶系统的闭环传递函数为 $G_B(s) = \frac{K_B}{Ts+1}$



- ✓ 延迟时间： $t_d = 0.69T$ 。
- ✓ 调整时间： $t_s = \begin{cases} 3T, \Delta = 5\% \\ 4T, \Delta = 2\% \end{cases}$.
- ✓ 上升时间： $t_r = 2.2T$ 。

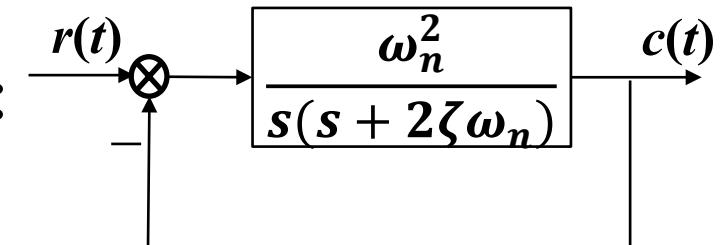
□ 结论：闭环时间常数 T 完全反映了一阶系统的动态性能。
 T 反映系统惯性， T 减小，惯性减小，响应速度加快。

■ 控制系统的动态性能

□ 二阶系统性能指标分析

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t)$$

◆ 对 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 进行分析可判断系统的稳定性：

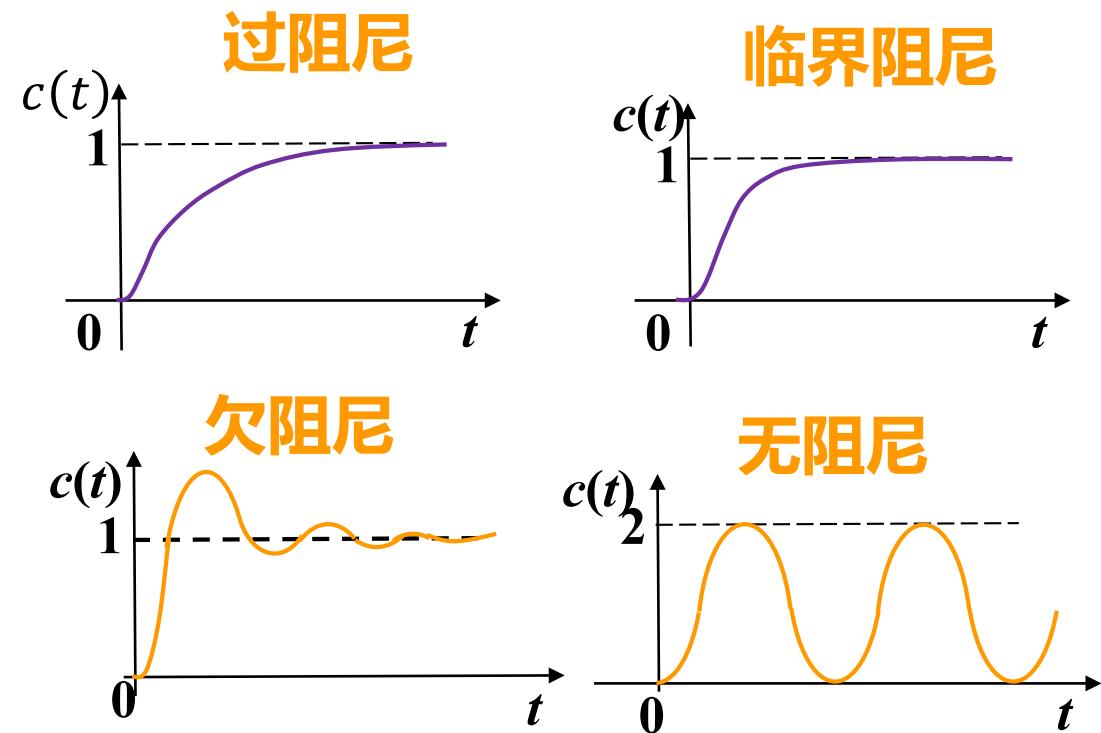


- $\zeta < 0$ 为**负阻尼**, 系统不稳定。
- $\zeta = 0$ 为**无阻尼**, 特征根为共轭纯虚根 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$, 临界稳定。
- $0 < \zeta < 1$ 为**欠阻尼**, 系统稳定。
- $\zeta = 1$ 为**临界阻尼**, 特征根为**实数重根** $s_{1,2} = -\omega_n$, 稳定。
- $\zeta > 1$ 为**过阻尼**, 系统稳定。

回顾-第9讲

【总结】

- 从振荡程度看， ζ 越小振荡越厉害； ζ 增大到一定程度时单调上升。
- 从过渡过程时间看，无振荡时，以临界阻尼时过渡过程时间最短。欠阻尼状态的过渡过程时间比临界阻尼时更短。



◆ 结论： ζ 增大，振荡程度减小，过渡过程时间增长。

综合过渡过程时间和振荡程度，一般希望二阶系统工作在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的欠阻尼状态，此时过渡过程时间和振荡特性均可接受。

工程中常取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 。

□ 欠阻尼二阶系统性能指标

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5\%$$

【总结】

- 当 ω_n 一定时，要减小 t_r 和 t_p ，须减少 ζ ；而要减小 t_s ，须使 ζ 增大，即响应初期速度与总体响应速度相互矛盾。
- 当 ζ 一定时，增大 ω_n 可使 t_r 、 t_p 和 t_s 都减少，提高快速性。
- σ_p 和 N 只取决于 ζ 。 ζ 越小， σ_p 越大，振荡次数 N 越大。

在设计控制系统时，一般根据 σ_p 的要求选择 ζ 的值（一般 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ ）。再调节 ω_n 来满足时间指标要求。

【测试1】对一个二阶系统，要求 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_s = 0.5$ ($\Delta = 2\%$),
求系统极点位置。

【解】由于 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

已知 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 由 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.5$ 得

$$\zeta\omega_n = 8, \text{ 则 } \omega_n = 8\sqrt{2}$$

$$\text{则 } s_{1,2} = -8 \pm j8$$

【测试2】系统结构图如下所示，若要求 $\sigma_p = 20\%$, $t_p = 1(s)$, 试确定参数 k 和 τ , 并计算上升时间 t_r 和调整时间 t_s 。

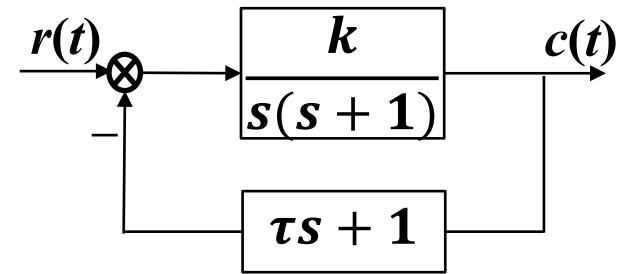
【解】闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + (1 + k\tau)s + k}.$$

据标准形式 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 知 $\omega_n = \sqrt{k}, \zeta = \frac{1+k\tau}{2\sqrt{k}}$ 。由 $\sigma_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.2$ 得 $\zeta = 0.456$,

由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$ 得 $\omega_n = 3.53$,

则 $k = \omega_n^2 = 12.46, \tau = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{k} = 0.178$ 。



$$\text{则 } t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 0.651,$$

$$\Delta = 0.05, t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 1.864$$

$$\Delta = 0.02, t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.485$$

【测试3】已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{5K}{s(s+34.5)}$, 试比较参数 $K = 13.5, 200, 1500$ 三个值时系统的动态性能。

【解】系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{5K}{s^2 + 34.5s + 5K}$,

$K = 13.5$ 时, $\zeta = 2.1 > 1$, 两闭环特征根 $s_1 = -32.4$ 和 $s_2 = -2.082$,

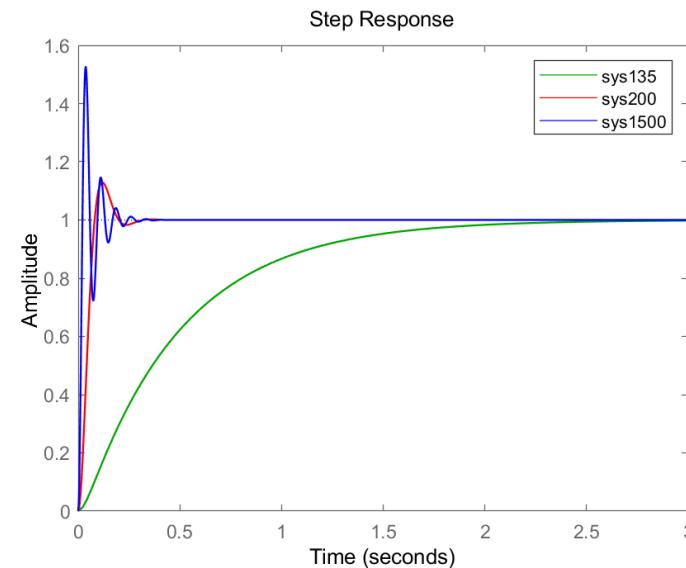
闭环传递函数近似为 $\Phi(s) \approx \frac{1}{\frac{1}{2.082}s + 1}$,

则借助一阶系统性能指标公式即可求得性能指标。

$K = 200$ 和 1500 时均是欠阻尼情况, 均可使用二阶系统欠阻尼时的性能指标求解。结果见下表。

【测试3】已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{5K}{s(s+34.5)}$, 试比较参数 $K = 13.5, 200, 1500$ 三个值时系统的动态性能。

K	13.5	200	1500
ω_n	8.22	31.6	86.2
ζ	2.1	0.546	0.2
t_p	∞	0.12	0.037
σ_p	0	13%	52.7%
t_s	1.44	0.174	0.174



表明 K 增大可以提高响应初期的快速性，超调量也随之增加；但仅靠调节放大器的增益，即比例调节，难以兼顾系统的快速性和平稳性。

K 增大， σ_p 增加， t_p 减小， t_s 不变（欠阻尼时，实部不变），

K 减小， σ_p 减小， t_p 增大；对于过阻尼时 t_s 增大，没有超调；

【测试4】 已知已知单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$, 在 S 平面上绘制满足下面要求的系统闭环特征根的分布区域。

- (1) $0.707 \leq \zeta < 1$ 且 $\omega_n \geq 2$;
- (2) $t_p \leq 0.5$ 且 $1 \leq t_s \leq 1.2$ ($\Delta = 2\%$) .

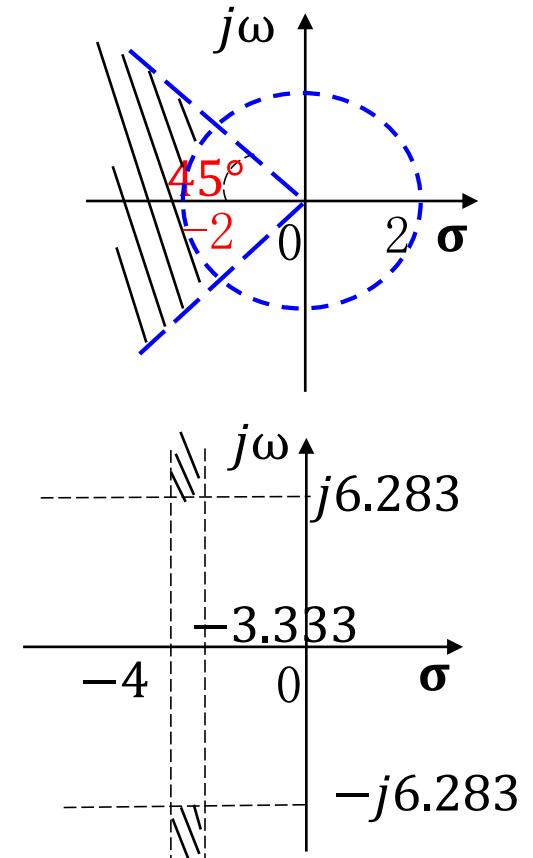
【解】 特征根 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,

(1) 由 $\theta = \arccos \zeta$ 得 $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$, 而 $\omega_n = |s_{1,2}|$,

满足(1)的区域如图中阴影除去实轴的部分。

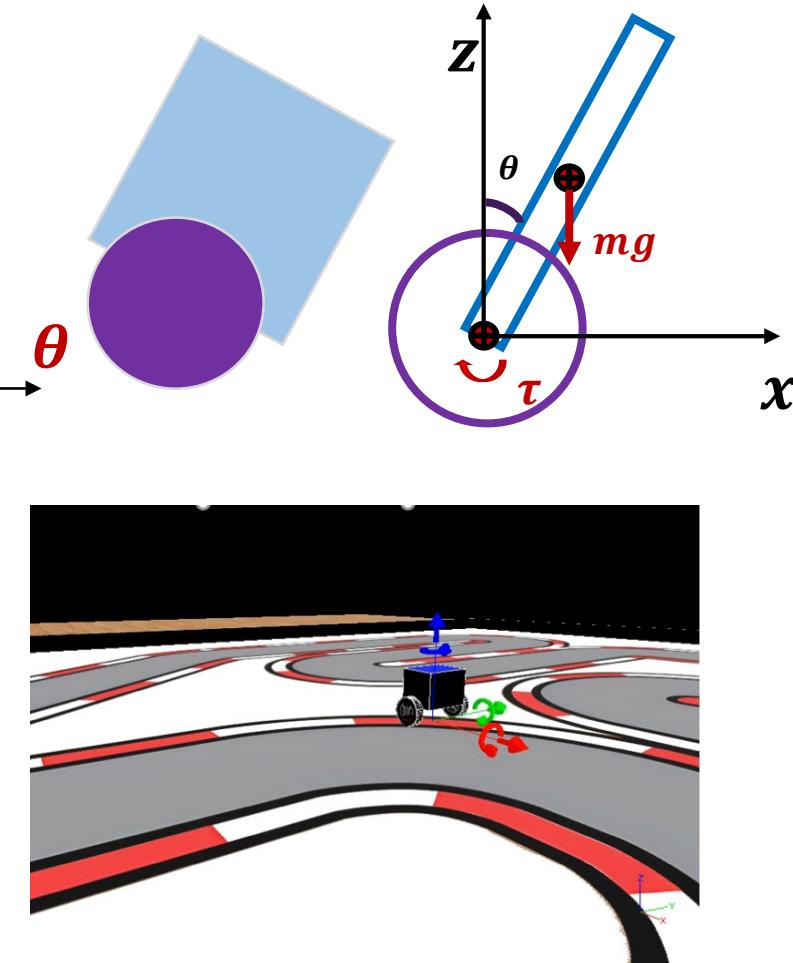
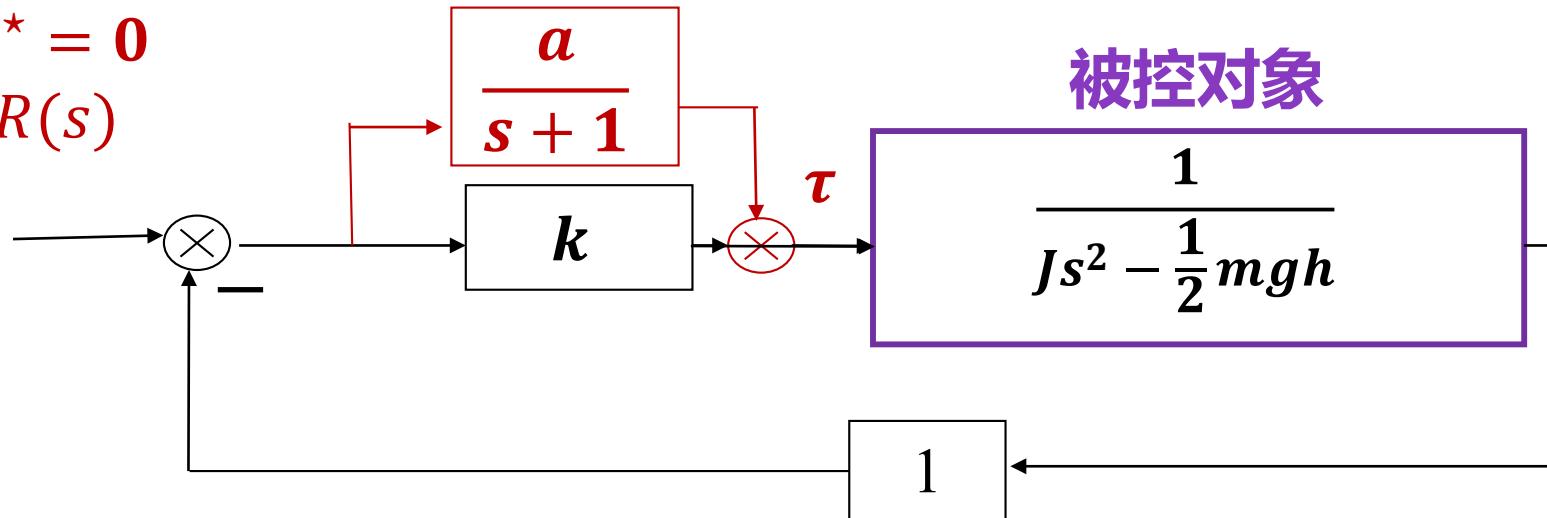
(2) 根据 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ 和 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, 得 $\omega_d \geq 6.283$, $3.333 \leq \zeta\omega_n \leq 4$,

满足条件(2)的区域如图中阴影部分。

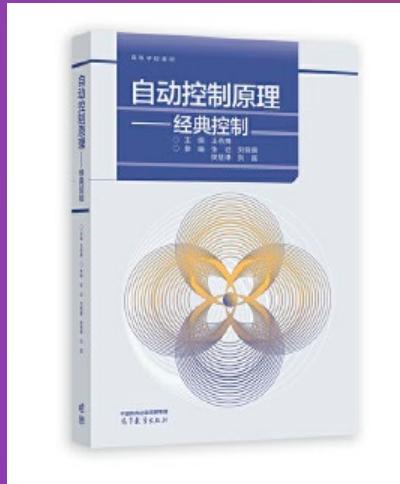


【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$\theta^* = 0 \\ R(s)$$



大作业第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad 的偏置下，1 秒内稳定到平衡点 ± 0.01 rad 附近。



第三章：控制系统的时域分析

第11讲 控制系统的动态性能分析-Part 3

Transient Stability Analysis of Control Systems – Part 3

本讲内容

一、高阶系统的时域响应

二、思考题：



一、高阶系统的时域响应

□ 高阶系统的数学模型：闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)},$$

当系统的闭环极点都在s平面左半部时，系统稳定。设q个互不相同的实极点 p_j ，有r对互不相同的复极点 $-\zeta_l \omega_{nl} \pm \omega_{nl} \sqrt{\zeta_l^2 - 1}$ ，则单位阶跃响应为

$$C(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{l=1}^r \frac{b_l(s + \zeta_l \omega_{nl}) + c_l \omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2}}{s^2 + 2\zeta_l \omega_{nl}s + \omega_{nl}^2},$$

$$\text{则 } c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{l=1}^r b_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t) + \\ \sum_{l=1}^r c_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t), \quad t \geq 0,$$

方法：忽略次要因素，应用低阶系统分析方法。

一、高阶系统的时域响应

$$c(t) = \underline{a_0} + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t}$$

↑ 稳态分量

$$+ \sum_{l=1}^r b_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t) +$$

$$\sum_{l=1}^r c_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t),$$

↑ 一阶环节的动态分量

↑ 二阶环节的动态分量

【结论1】 高阶系统的单位阶跃响应是由一阶和二阶环节的响应叠加而成的。各分量的相对大小由系数和衰减快慢两个因素决定；

了解了各分量及其相对大小，就可知高阶系统的瞬态响应。

一、高阶系统的时域响应

$$c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{l=1}^r b_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t) + \sum_{l=1}^r c_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t),$$

【结论2】 离虚轴越远 (p_j 和 $\zeta_l \omega_{nl}$ 越大) 的闭环极点，其对应动态响应分量衰减越快。

【结论3】 动态分量的系数与闭环极点和零点的位置有关。

?若一对零极点的位置十分靠近，会产生什么情况？

会使得该极点对应的系数很小，从而该极点所对应的响应分量对系统的过渡过程几乎没有影响。如：

$$C(s) = \frac{s+2.5}{s(s+2)(s+0.1)} = \frac{12.5}{s} + \frac{0.1315}{s+2} - \frac{12.63}{s+0.1} \quad C(s) = \frac{s+2.1}{s(s+2)(s+0.1)} = \frac{10.5}{s} + \frac{0.026}{s+2} - \frac{10.526}{s+0.1}$$

距离很近的零、极点对称为偶极子。（距离很近是相对的）

一、高阶系统的时域响应

$$c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{l=1}^r b_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t) + \sum_{l=1}^r c_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin(\omega_{nl} \sqrt{1 - \zeta_l^2} t),$$

【结论4】 如果离虚轴最近的极点附近没有零点，且其余极点都远离虚轴，则这样的闭环极点所对应的动态分量在系统的响应过程中起主要作用，称为主导极点，主导极点对应的分量衰减最慢。

远离虚轴的极点为**非主导极点**。

- 高阶系统一般具有**振荡性**，主导极点往往是共轭复极点
- 工程实际中，常采用**主导极点**对系统进行近似，只保留一、二个主导极点，将高阶系统近似成一阶或二阶系统进行分析。
- 主导极点的**实部**应该为其它极点的1/5或更小。越小，近似程度较高。

一、高阶系统的时域响应

【例1.1】已知系统的闭环传递函数，求系统近似单位阶跃响应和性能指标。

$$G(s) = \frac{3.11 \times 10^5 s + 6.24 \times 10^6}{s^4 + 100s^3 + 8000s^2 + 4.4 \times 10^5 s + 6.24 \times 10^6}.$$

【解】 系统闭环传递函数的零极点形式为：

$$G_B(s) = \frac{3.11 \times 10^5 (s+20.06)}{(s+20)(s+60)(s+10+j71.4)(s+10-j71.4)},$$

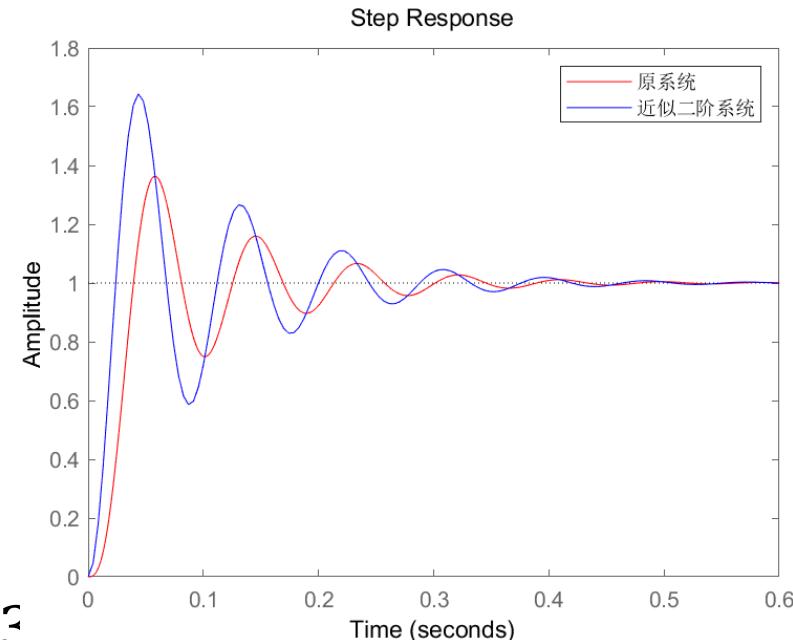
$p_{3,4} = -10 \pm j71.4$ 为主导极点， $p_2 = -60$ 对响应的影响可以忽略，闭环传递函数近似为

$$G_B(s) \approx \frac{3.11 \times 10^5}{59.8(s+10+j71.4)(s+10-j71.4)} = \frac{5.2 \times 10^3}{s^2 + 20s + 5.2 \times 10^3},$$

近似阻尼比和自然振荡角频率分别为 $\omega_n = 72.11$, $\zeta = 0.13$.

单位阶跃响应近似为 $c(t) \approx 1 - 1.01e^{-10t} \sin(71.4t + 1.43)$

动态性能指标近似为 $t_r = 0.024$, $t_p = 0.044$, $t_s \approx 0.30 \sim 0.40$, $\sigma_p = 64.3\%$.



一、高阶系统的时域响应

【例1.2】 设单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$ ，试近似确定系统的单位阶跃响应，并求系统的动态性能指标。

【解】 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{10}{s^3 + 7s^2 + 10s + 10} = \frac{10}{(s+5.52)(s^2 + 1.48s + 1.83)}$

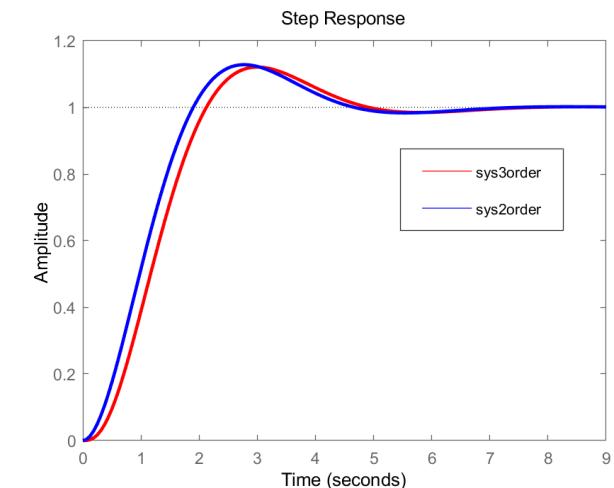
极点 $s_{1,2} = -0.74 \pm j1.133$ 距离 -5.52 较远，且附近不存在零点，

是主导极点。近似闭环传递函数为 $\Phi'(s) = \frac{1.83}{s^2 + 1.48s + 1.83}$ ，

则 $\omega_n = 1.353, \zeta = 0.547$ ，单位阶跃响应近似为

$$c(t) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) = 1 - 1.195 e^{-0.74 t} \sin(1.133 t + 56.839^\circ),$$

动态性能指标近似为 $t_r = 1.9$, $t_p = 2.77$, $t_s \approx 4.05 \sim 5.4$, $\sigma_p = 12.8\%$ 。



一、高阶系统的时域响应

□ 增加零极点的作用 ?近似求出的性能指标偏大还是偏小?

分析在某低阶系统上增加零点或增加极点对系统性能的影响。

【例1.3】 比较动态性能指标，分析零点和极点对动态性能的作用。

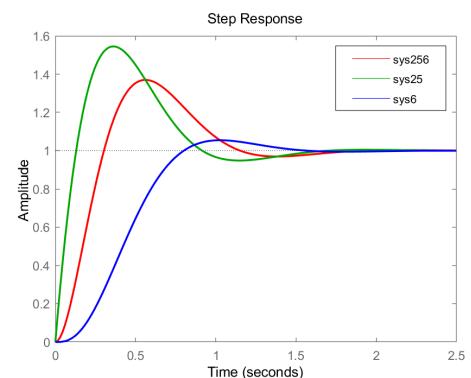
$$G_{B1} = \frac{60(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6)}, \quad G_{B2} = \frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25}, \quad G_{B3} = \frac{150}{(s^2+6s+25)(s+6)}$$

【解】 性能指标如右表：

◆ 结论1：增加极点使系统超调量减小，调节时间增加。这是由于极点具有滤波(阻尼)作用，输出经滤波后振荡减弱。

◆ 结论2：增加零点使超调量加大，响应初期的响应速度加快。这是由于零点具有微分作用。

系统	σ_p	t_s
G_{B1}	37%	1.6
G_{B2}	54.5%	1.48
G_{B3}	5.5%	1.4



一、高阶系统的时域响应

□ 增加零极点的作用

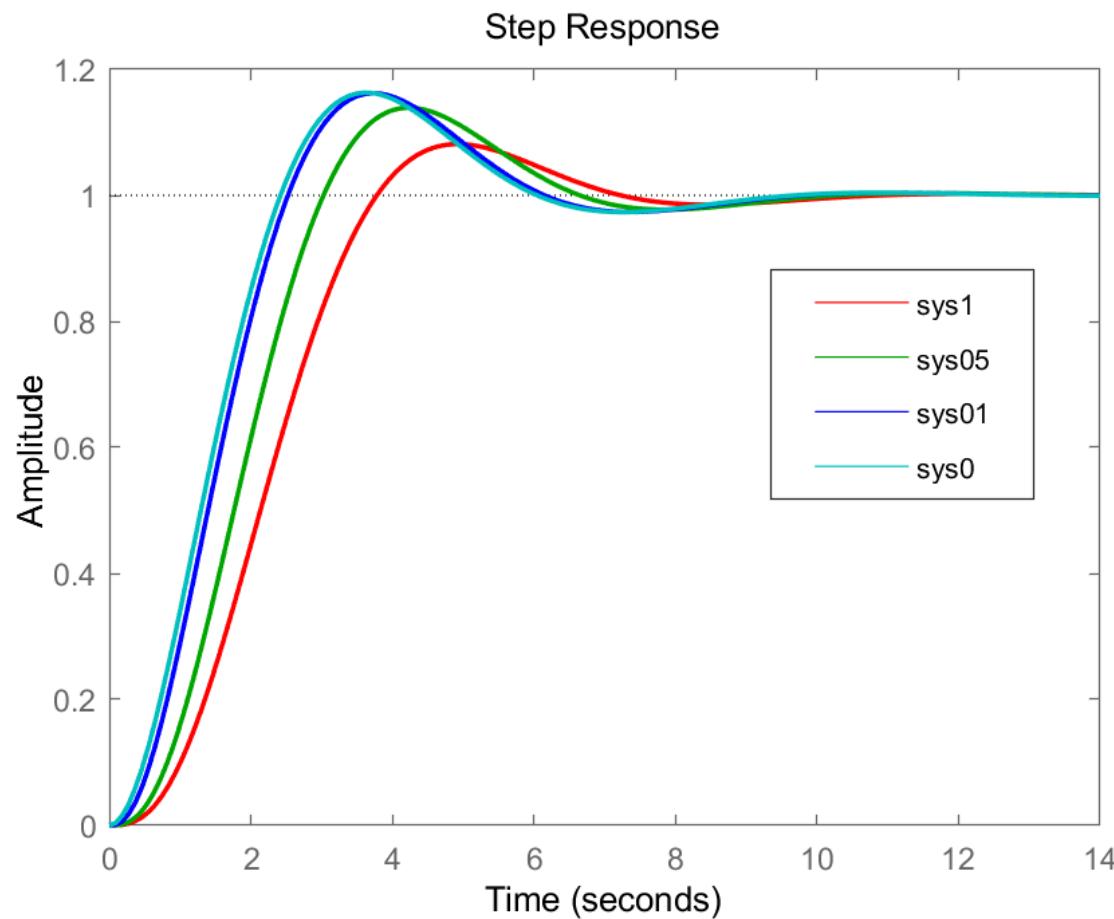
- 对比极点作用的大小：
已知二阶系统传递函数

$$G_{B1} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)},$$

设三阶系统闭环传递函数为

$$G_{B2} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(Ts + 1)},$$

$T = 1, 0.5, 0.1$ 三种情况对比

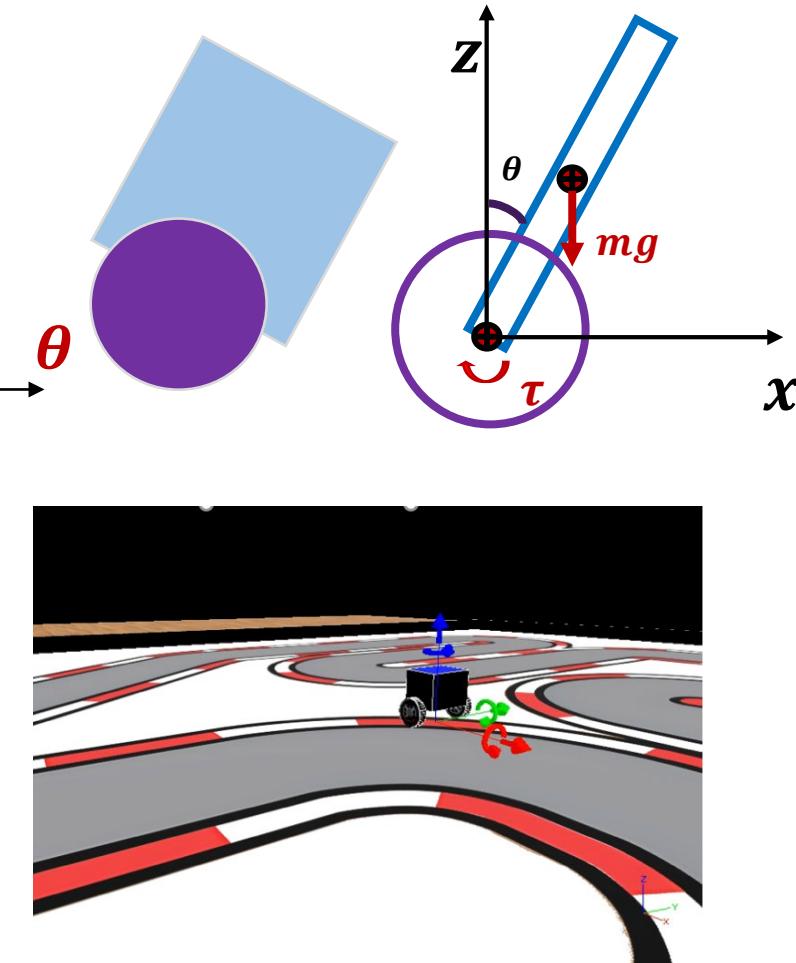
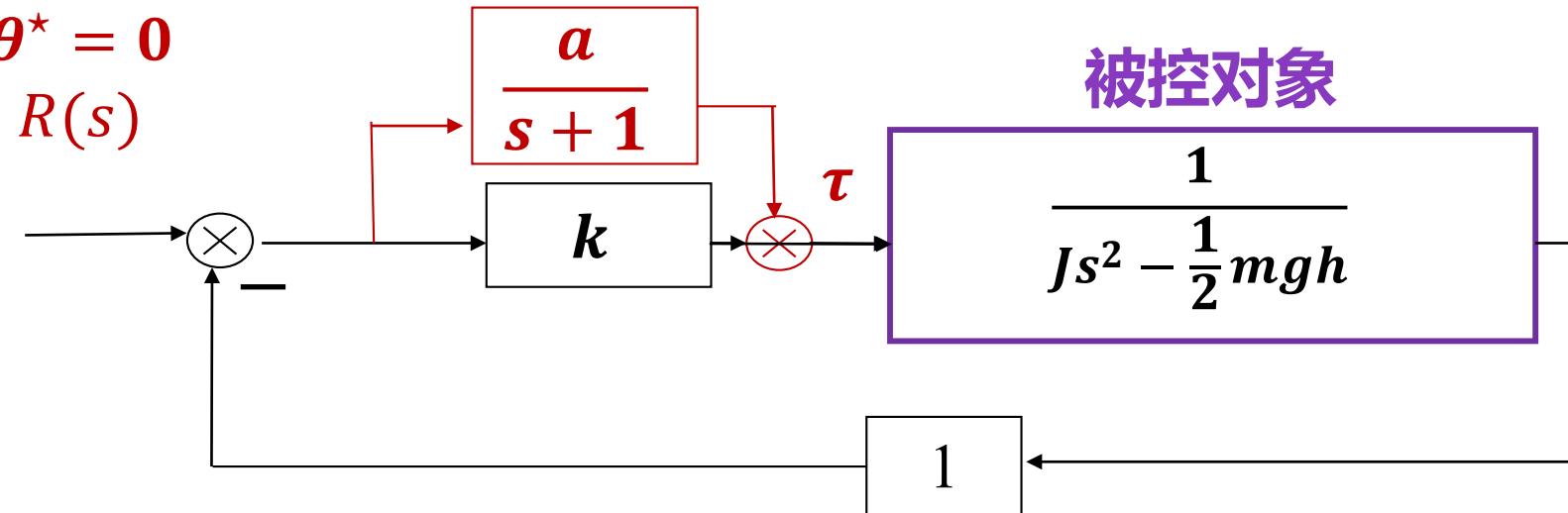


- 当惯性环节的时间常数较大，即第3个根实部较小时，
- 惯性环节的滤波作用较大，二阶系统的输出经过滤波后振荡现象减弱。

二、轮式机器人平衡控制系统

【思考题】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$\theta^* = 0$$
$$R(s)$$



大作业第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad 的偏置下，
1 秒内稳定到平衡点 ± 0.01 rad 附近。

- 控制系统的暂态性能：
 - 暂态性能指标：7个
 - 一阶系统的性能指标
 - 二阶系统的性能指标
 - 高阶系统的性能指标
- 作业：
 - 作业3.3和3.5
- 大作业：

第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad 的偏置下，1秒内稳定到平衡点 $\pm 0.01 \text{ rad}$ 附近。