

## 课程名称：《自动控制原理（一）》

### 第6讲 控制系统的信号流图

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象：自动化2305班  
(26人)

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

## ■ 第5讲 控制系统的结构图-Part 2

等效变换法则：

【法则1】串联连接的等效变换

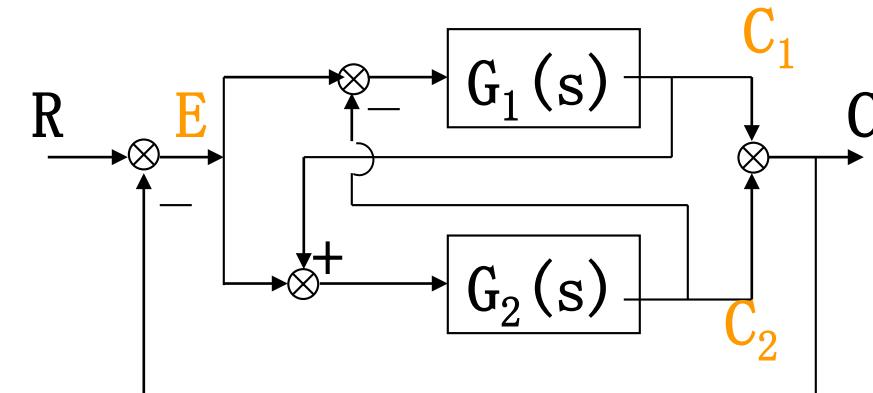
【法则2】并联连接的等效变换

【法则3】反馈连接的等效变换

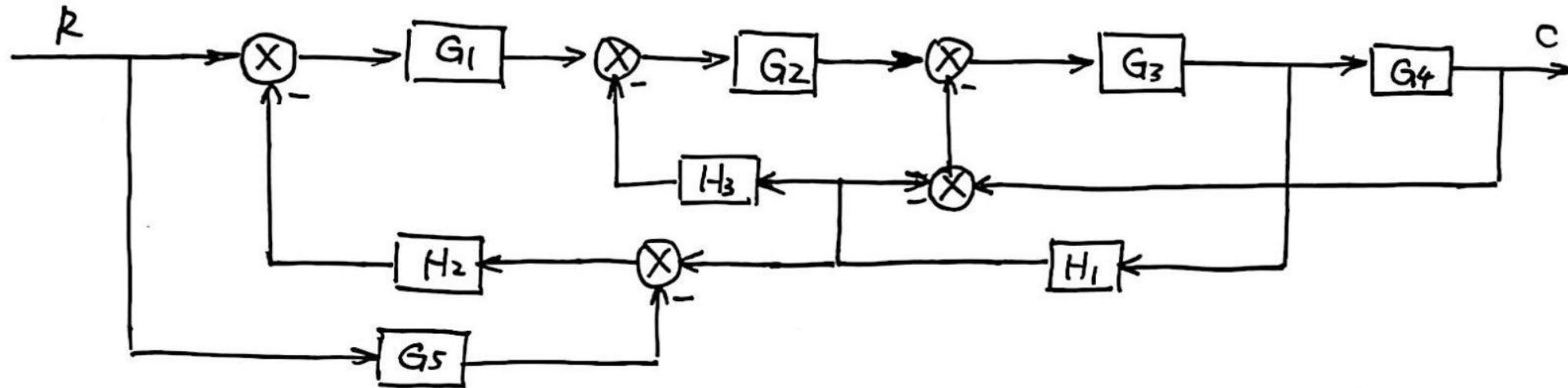
【法则4】综合点的前后移动

【法则5】引出点的前后移动

【法则6】相邻综合点的移动/相邻引出点的移动



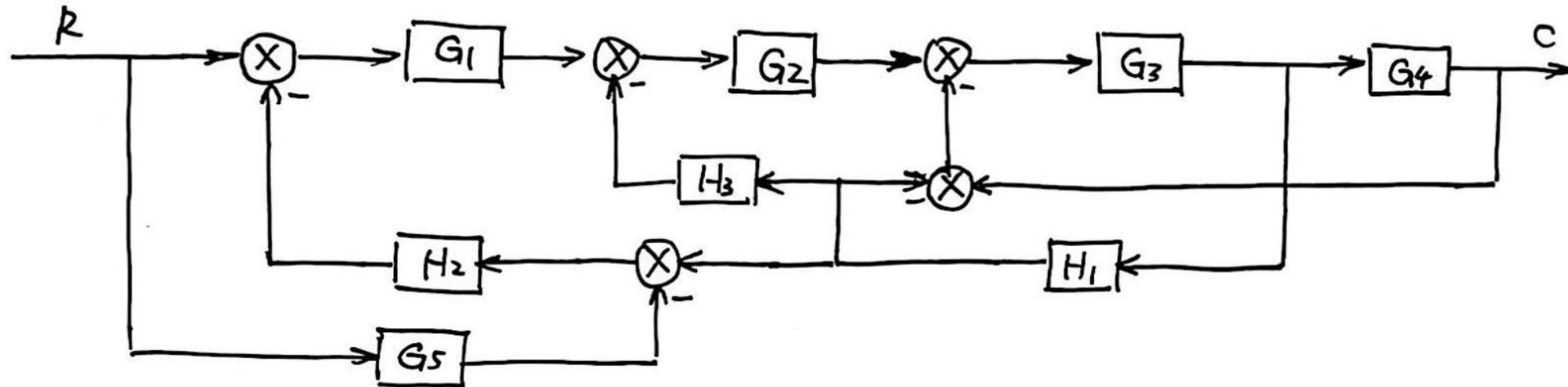
## ■ 结构图化简求传递函数



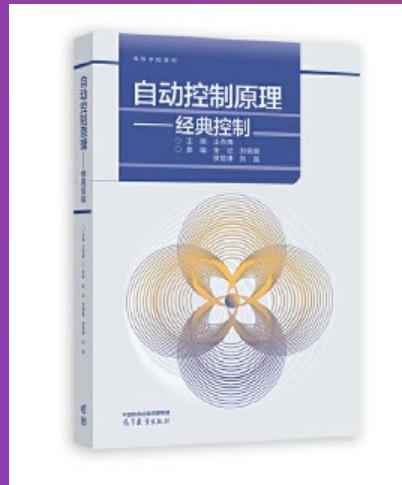
## ■ 结构图化简求传递函数总结

- ◆ 首先确定输入信号与输出信号，如果有多个输入或多个输出，则应分别进行结构图的等效变换，求得各自的传递函数。
- ◆ 若结构图中有交叉，则要把综合点和引出点前后移动，**移动的原则：综合点尽量向相邻综合点方向移动；引出点则尽量向相邻的引出点移动，最终把交叉的现象消除**
- ◆ 对多回路相互嵌套的情况，则由内至外进行等效变换。
- ◆ 如果结构图很难看清回路的连接方式，则可以根据线性系统满足叠加原理的性质，将结构图分解，从局部到整体，一步一步地进行等效变换。
- ◆ 在整个变换过程中，要注意反馈回路的正负符号。

## ■ 结构图化简求传递函数



是否还有其他的办法呢？

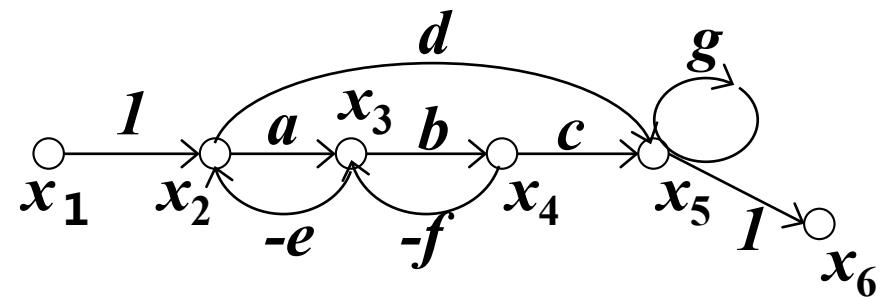


## 第二章：控制系统的数学模型 第6讲 控制系统的信号流图

Signal Flow Graph of Control Systems

### 本讲内容

- 一、信号流图的基本概念
- 二、Mason公式
- 三、测试



# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的组成

◆ 定义：信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络

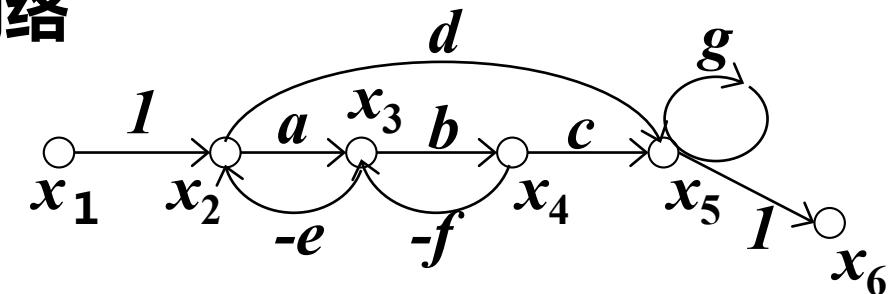
◆ 节点：用“○”表示。节点表示变量或信号。

如 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 和 $x_6$ 。

其值等于所有进入该节点的信号之和。

◆ 支路：连接两个节点的定向线段。

◆ 支路增益：支路旁边标注的传递函数，表示两个节点变量的因果关系。



$$x_2 = x_1 - ex_3$$

$$x_3 = ax_2 - fx_4$$

$$x_4 = bx_3$$

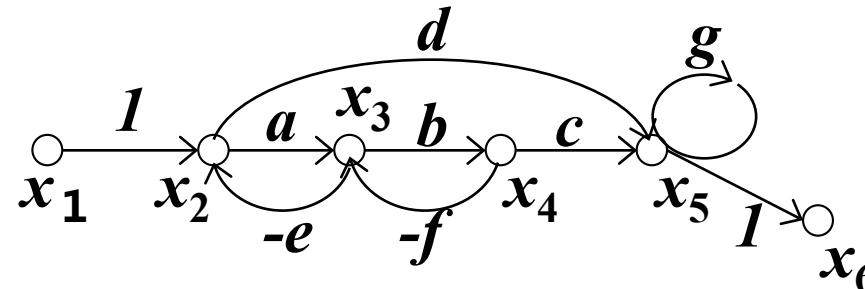
$$x_5 = dx_2 + cx_4 + gx_5$$

$$x_6 = x_5$$

# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的组成

- ◆ 节点包括：



- ✓ **输入节点** (源节点)：只有输出支路的节点。表示系统的输入变量。如节点 $x_1$
- ✓ **输出节点** (阱节点)：只有输入支路的节点。表示系统的输出变量。如节点 $x_6$
- ✓ **混合节点**：既有输入支路又有输出支路的节点。如节点 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 和 $x_5$
- ◆ 信号流图中至少包括一个输入节点和一个输出节点。

# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的组成

✓ **通路**: 从某一节点开始, 沿支路箭头方向, 经过各相连支路到另一节点所构成的路径。

如 $x_1$ 到 $x_4$ 通路就是 $x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ 。

通路中各支路增益的乘积叫做**通路增益**。如 $x_1$ 到 $x_4$ 通路增益为 $ab$ 。

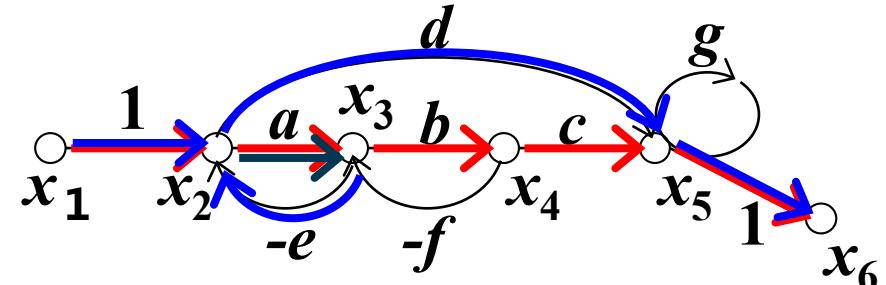
✓ **前向通路**: 指从输入节点开始并终止于输出节点且与其它节点相交不多于一次的通路。

该通路的各增益乘积称为**前向通路增益**。

如图前向通路增益一条为 $abc$ , 另一条为 $d$ 。

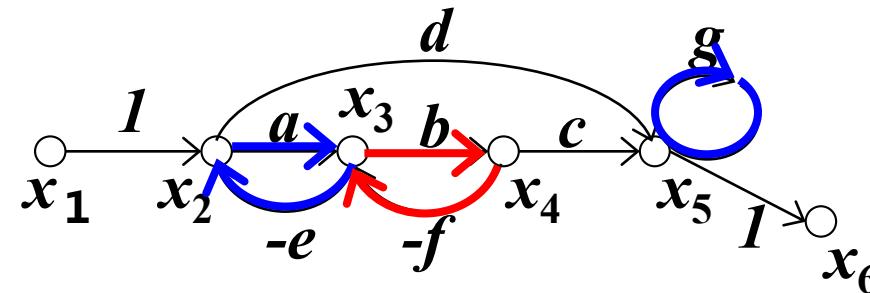
✓ **回路**: 通路的终点就是通路的起点, 并且与任何其它节点相交不多于一次的通路称为**回路**。

回路中各支路增益的乘积称为**回路增益**。如 $x_2 - x_3 - x_2$ 回路增益为 $-ae$ 。



# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的组成



✓**不接触回路与接触回路：**一信号流图有多个回路，各回路之间没有任何公共节点，则称为**不接触回路**，反之称为**接触回路**。

如回路 $x_2 - x_3 - x_2$ 和回路 $x_5 - x_5$ 为**不接触回路**。

回路 $x_2 - x_3 - x_2$ 和回路 $x_3 - x_4 - x_3$ 为**接触回路**。

# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制

已知系统的原理图，如何绘制出信号流图呢？

◆ 步骤如下：

1. 确定系统的输入信号和输出信号
2. 建立系统信号间的原始微分方程或代数方程
3. 对原始方程进行拉氏变换
4. 以信号为节点、信号间的传递关系为支路、信号间的变换关系为支路增益，绘制信号流图

- 系统的输入节点放在左端，输出节点放在右端
- 如果这样绘制出来的图没有输出节点，则需要增加一个支路增益为1的支路，流向输出节点。

# 一、信号流图的基本概念

【例1.1】试绘制RLC电路的信号流图，其中 $u_r(t)$ 为输入电压， $u_c(t)$ 为输出电压，输出端开路。

【解】写出原始方程式：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c(t) = u_r(t)$$

$$i = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

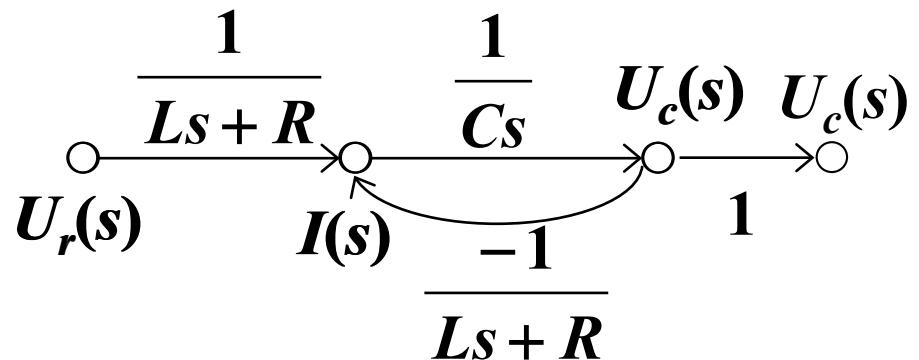
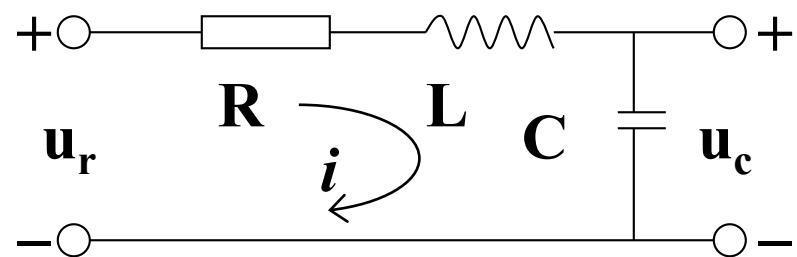
拉氏变换得

$$LsI(s) + RI(s) + U_c(s) = U_r(s) \quad I(s) = CsU_c(s)$$

$I(s)$ 为中间信号，因此变换成：

$$I(s) = \frac{U_r(s) - U_c(s)}{Ls + R}$$

$U_c(s)$ 为输出信号，因此变换成：  $U_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$



注：综合点信号相减体现在回路增益为负。

# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制- (信号流图与结构图)

$$I(s) = \frac{U_r(s) - U_c(s)}{Ls + R}$$

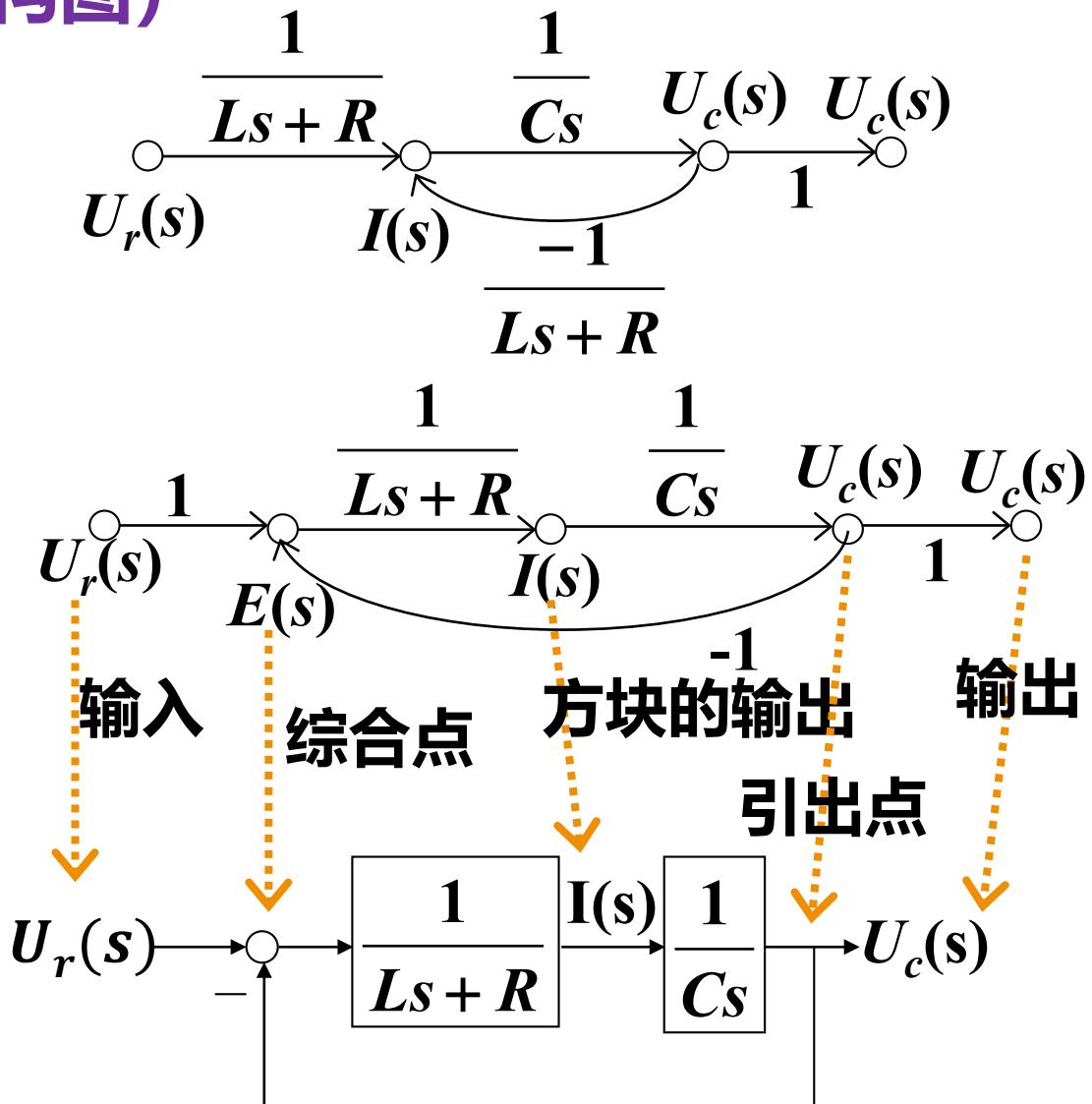
$$U_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$E(s) = U_r(s) - U_c(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R} E(s)$$

注：信号流图也不是唯一的。

◆ 方块图与信号流图的对应关系：



# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制

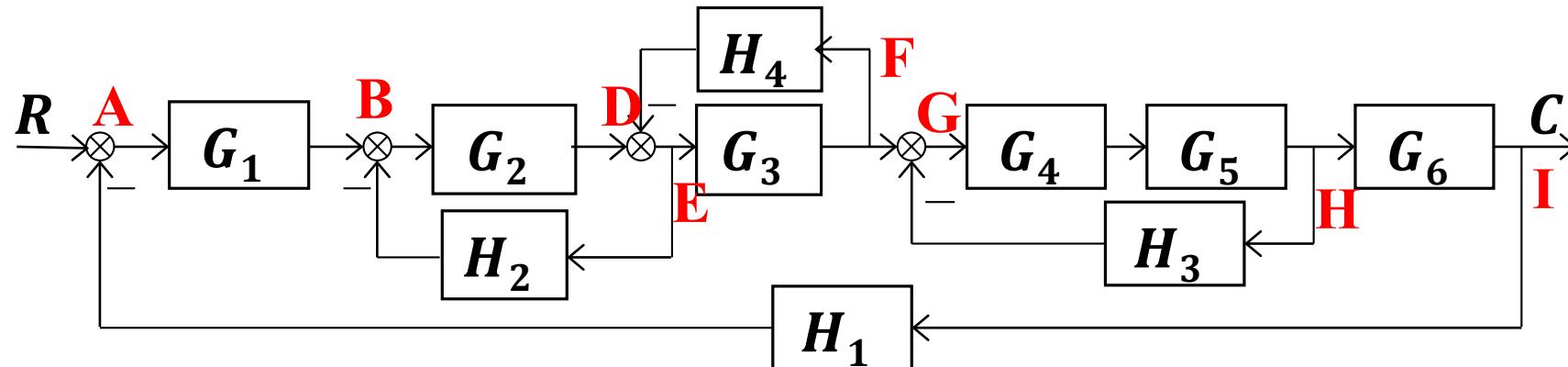
◆ 由结构图绘制信号流图：

- ✓ 将结构图中系统的输入信号、输出信号、各综合点的输出信号、引出点的引出信号和方块的输出信号作为**节点**。
- ✓ 把信号的传递用支路连接。
- ✓ 将传递函数作为**支路增益**。
- ✓ 综合点信号相减体现为支路增益为负。

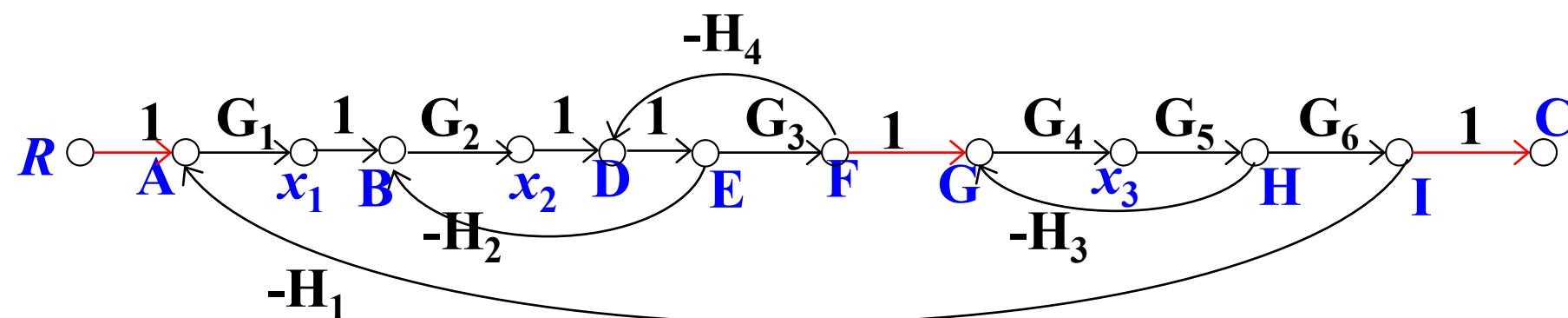
# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制

【例1.2】将下面结构图绘制为信号流图

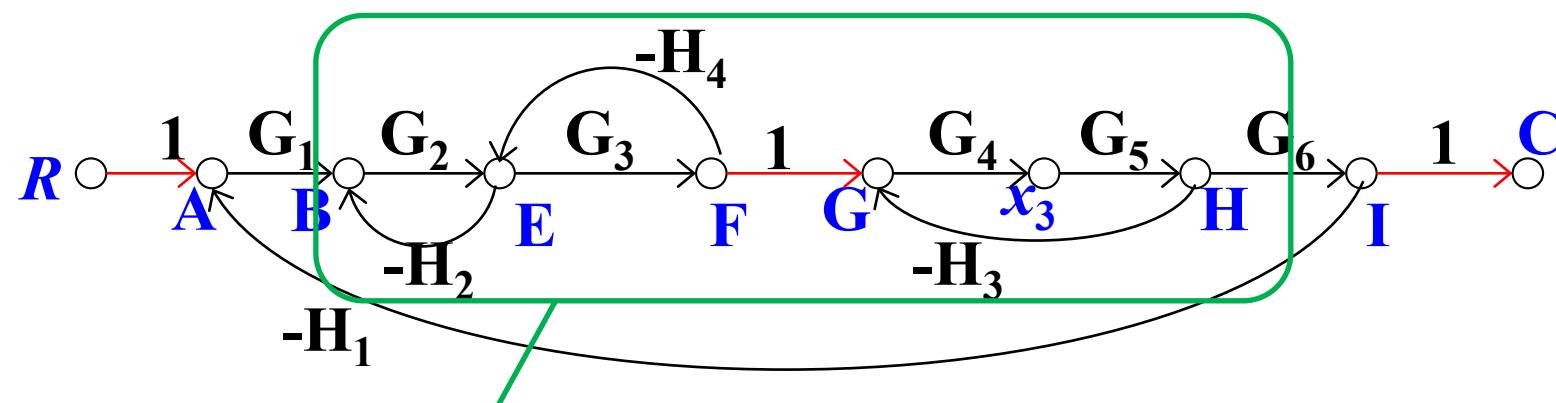
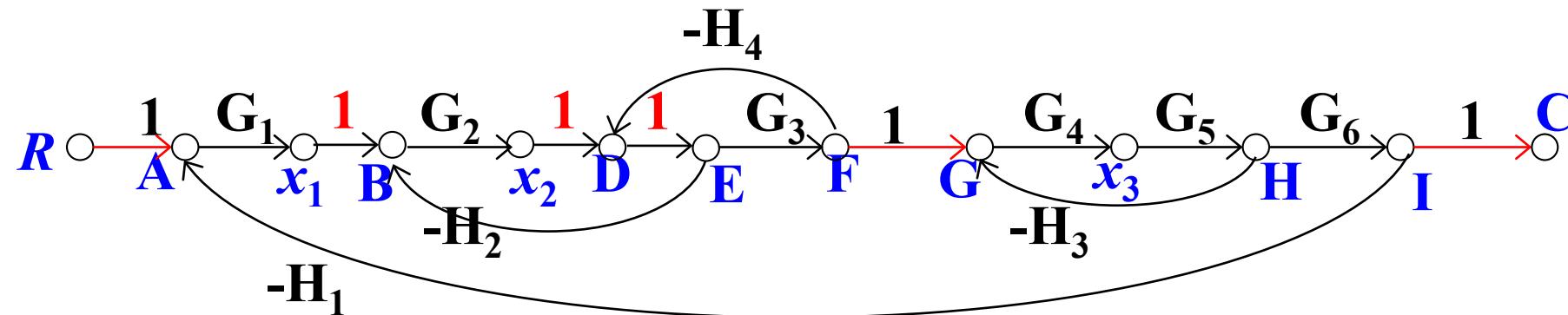


【解】

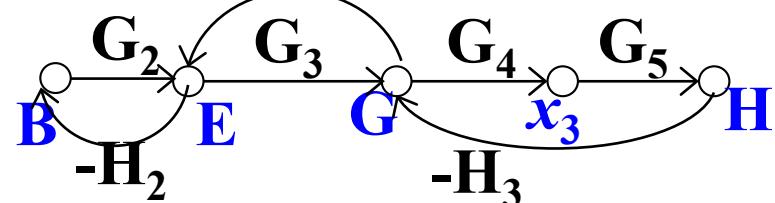


# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制



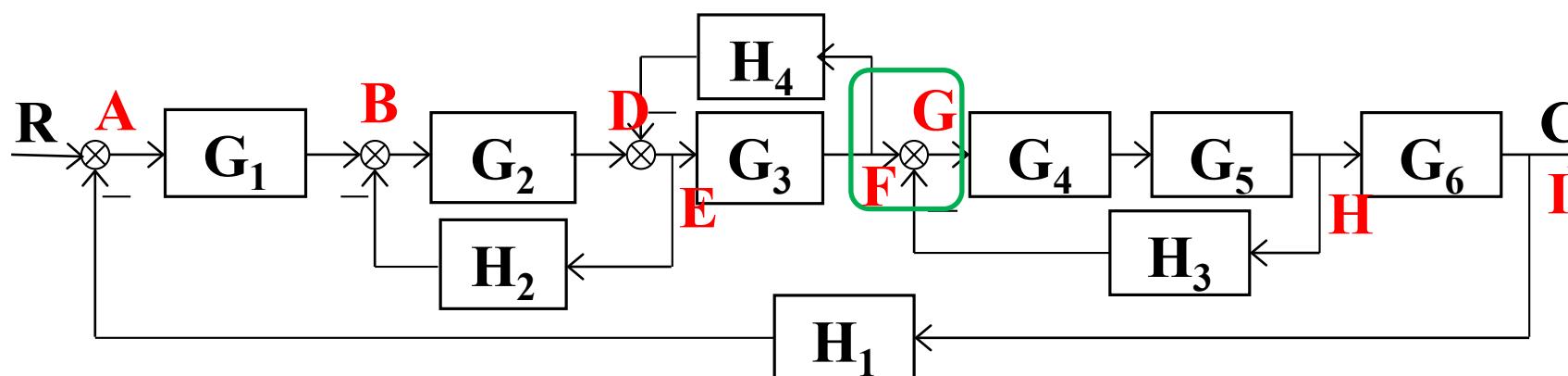
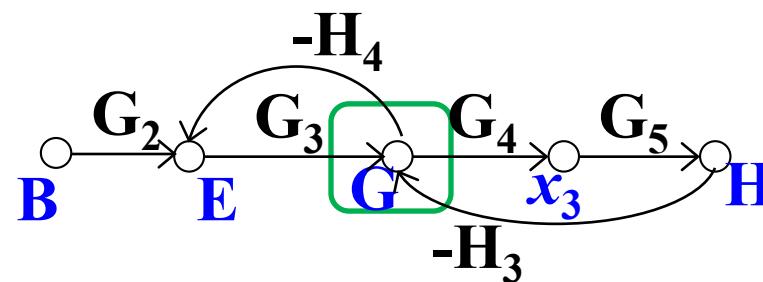
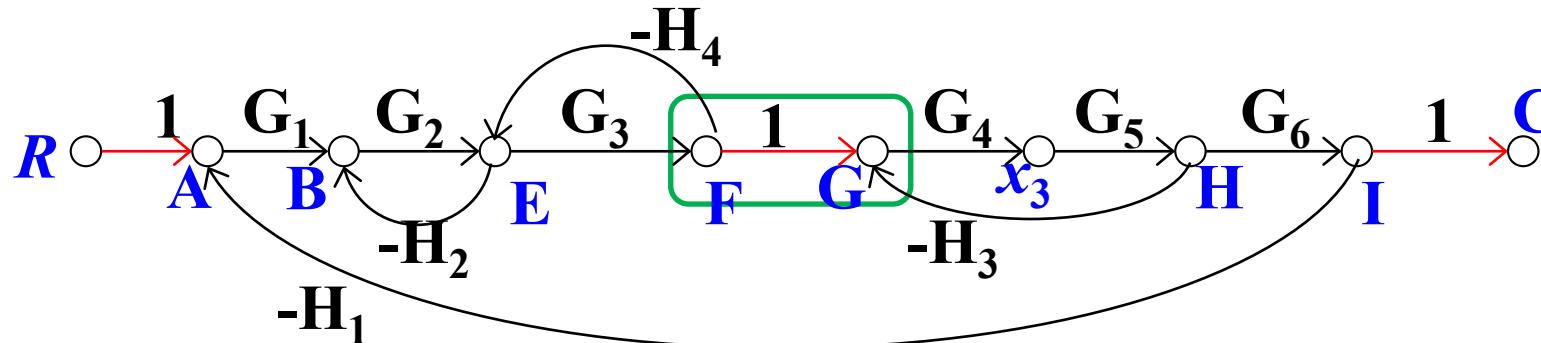
$$E = G_2 B - H_4 F = G_2 B - H_4 (G_3 E)$$



$$E = G_2 B - H_4 G = G_2 B - H_4 (G_3 E - H_3 H)$$

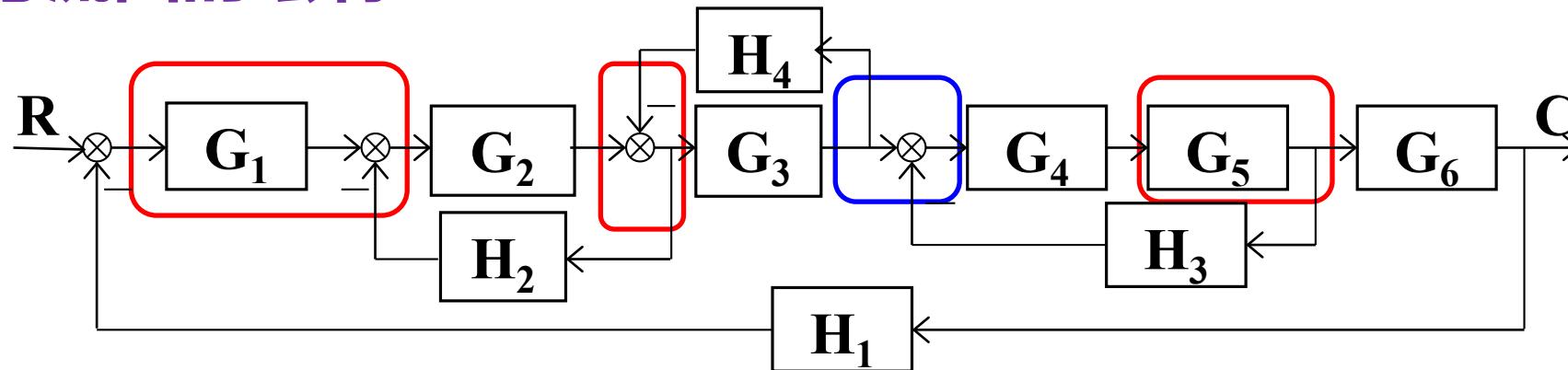
# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制



# 一、信号流图的基本概念

## ■ 信号流图的绘制



- 当结构图中综合点在方框的输出端时，可以只为综合点的输出信号建立节点。
- 当结构图中引出点在方框的输出端时，可以只为引出点的引出信号建立节点。
- 当引出点和综合点相邻时，  
如果引出点在综合点的输出端，可以只为引出点的信号建立节点。  
如果引出点在综合点的输入端，需要分别为引出点和综合点的输出建立节点。

## 二、Mason公式

---

- ◆ 梅逊公式是美国麻省理工学院S.J. Mason于20世纪50年代提出的。  
借助于梅逊公式，不经任何结构变换，便可以得到系统的传递函数。

## 二、Mason公式

- ◆ 梅逊公式的表达式为：
$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$
- $G(s)$ : 待求的总传递函数。 $\Delta = 1 - \sum_1^n L_i + \sum_1^{n_2} L_i L_j - \sum_1^{n_3} L_i L_j L_k + \dots$
- $\Delta$ 称为**特征式**,
- $\sum L_i$ : 所有**回路**( $n$ 条)的回路增益之和。
- $\sum L_i L_j$ : 所有**两两互不接触回路**( $n_2$ 条)的回路增益乘积之和。
- $\sum L_i L_j L_k$ : 所有**三个互不接触回路**( $n_3$ 条)的回路增益乘积之和。
- $P_k$ : 从输入节点到输出节点**第k条前向通路**的增益。
- $\Delta_k$ : 在 $\Delta$ 中，将与**第k条前向通路相接触的回路除去后所余下的部分**的 $\Delta$ ，称为**余子式**。
- $m$ : 从输入节点到输出节点**所有前向通路的条数**。

## 二、Mason公式

◆ 梅逊公式的证明：

参见：

1. Samuel J. Mason, “Feedback theory-Some properties of signal flow graphs,” Proc. IRE, vol. 41, no. 9, pp. 1144-1 156, Sept. 1953.
2. Samuel J. Mason, “Feedback theory-Further properties of signal flow graphs,” Proc. IRE, vol. 44, no. 7, pp. 920-926, July 1956.
3. W.K. Chen, “Applied Graph Theory, Graphs and Electrical Networks,” North-Holland, Amsterdam, 1976.
4. 陈景明, “S.J. Mason讯号流图增益公式的另一个证明,” 吉林大学自然科学学报, no. 4, pp. 137-146, 1979.

## 二、Mason公式

【例2.1】求图示控制系统的传递函数

回路有8个：

$$L_1 = -G_4 H_4,$$

$$L_2 = -G_5 G_6 H_1$$

$$L_3 = -G_8 H_1$$

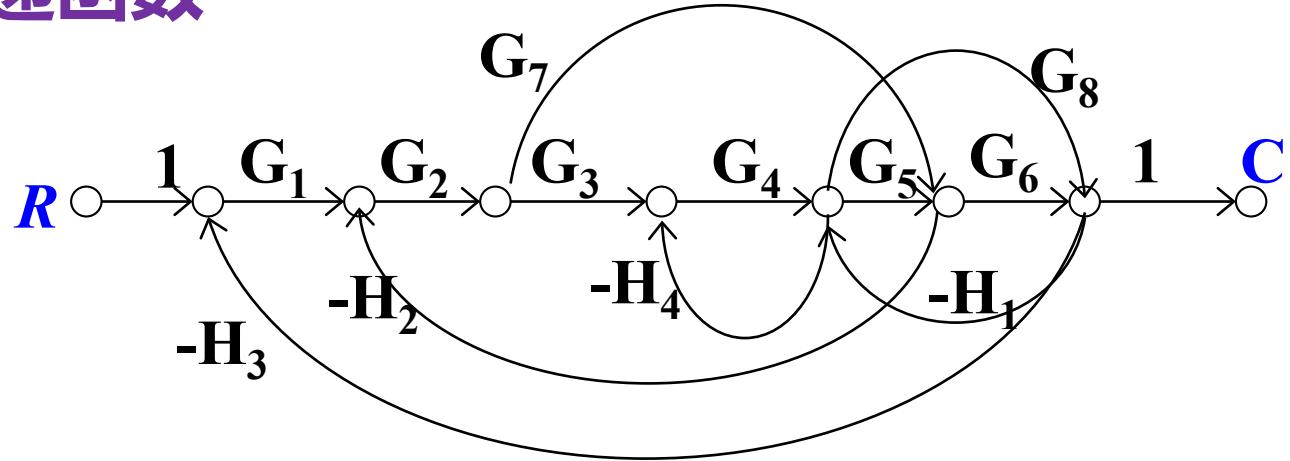
$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

$$L_5 = -G_2 G_7 H_2$$

$$L_6 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_7 = -G_1 G_2 G_7 G_6 H_3$$

$$L_8 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 H_3$$



回路中两两互不接触回路有：

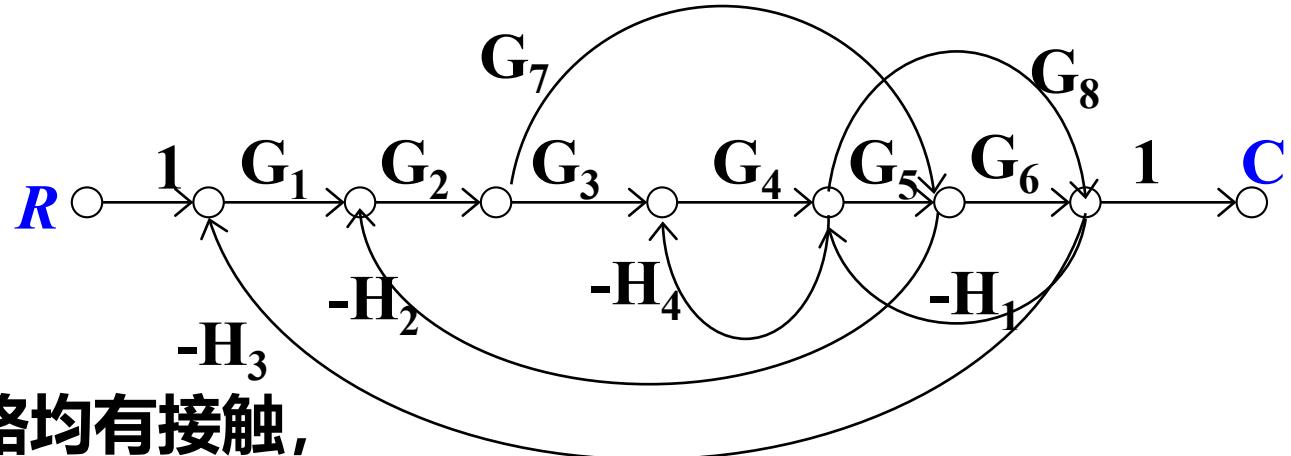
$$L_1 \text{与} L_5, \quad L_1 \text{与} L_7, \quad L_3 \text{与} L_5,$$

因而特征式：

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 - L_6 - L_7 - L_8 \\ + L_1 L_5 + L_1 L_7 + L_3 L_5$$

## 二、Mason公式

【例2.1】已知信号流图，求图示控制系统的传递函数



有3条前向通路，

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$ , 与每个回路均有接触,

$P_1$ 的余子式 $\Delta_1 = 1$ ;

$P_2 = G_1G_2G_7G_6$ , 与回路 $L_1 = -G_4H_4$ 不接触,

$P_2$ 的余子式 $\Delta_2 = 1 - L_1$ 。

$P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8$ , 与每个回路均有接触,

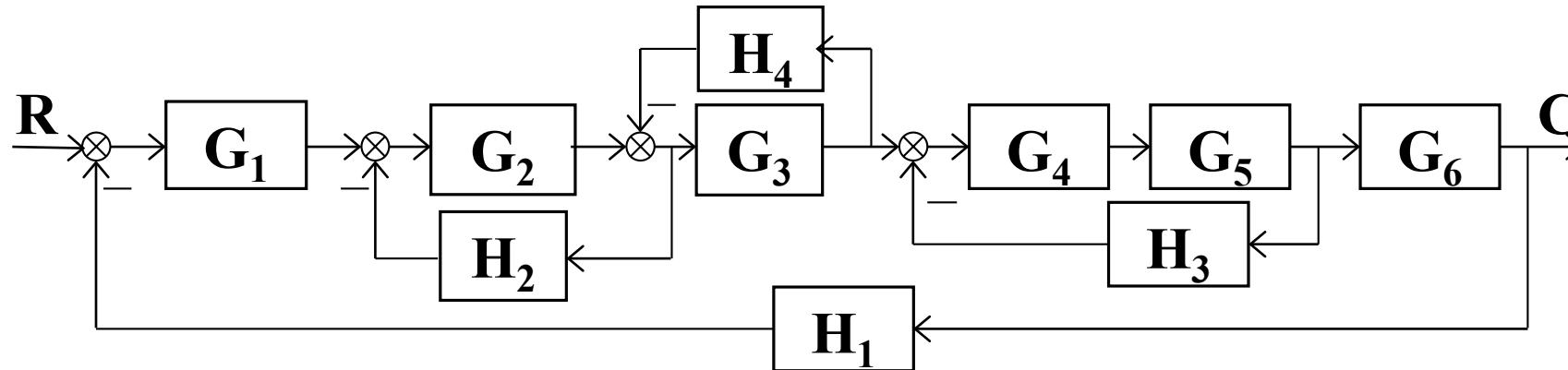
$P_3$ 的余子式 $\Delta_3 = 1$ ;

则由梅逊公式可得系统传递函数:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

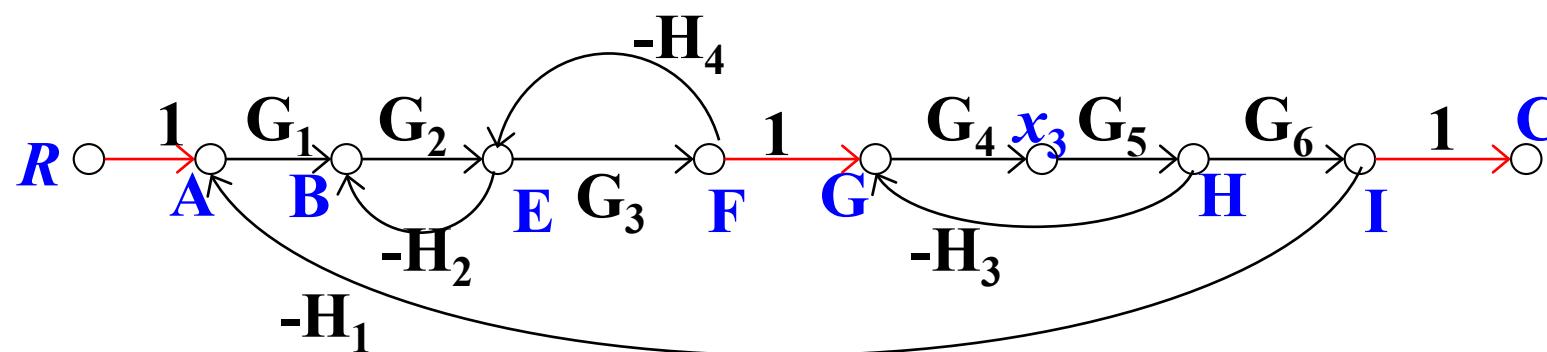
## 二、Mason公式

【例2.2】已知系统结构图，求图示控制系统的传递函数



结构图

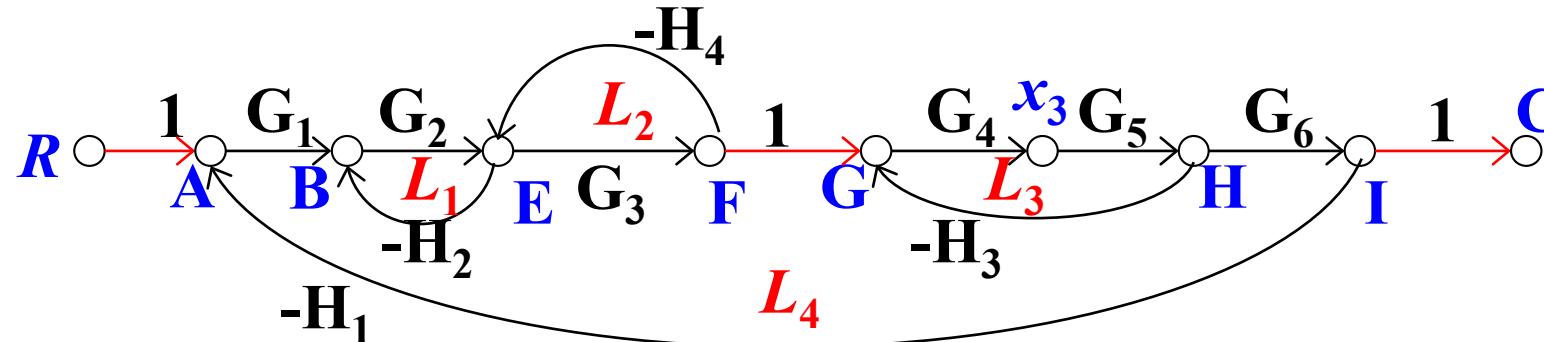
【解】



信号流图

## 二、Mason公式

【例2.2】已知系统结构图，求图示控制系统的传递函数



$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$

共有四个回路  $n = 4$  :  $L_1 = -G_2 H_2$     $L_2 = -G_3 H_4$     $L_3 = -G_4 G_5 H_3$     $L_4 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1$

回路  $L_1$  与  $L_3$ 、回路  $L_2$  与  $L_3$  互不接触,  $L_1 L_3 = (-G_2 H_2)(-G_4 G_5 H_3) = G_2 G_4 G_5 H_2 H_3$

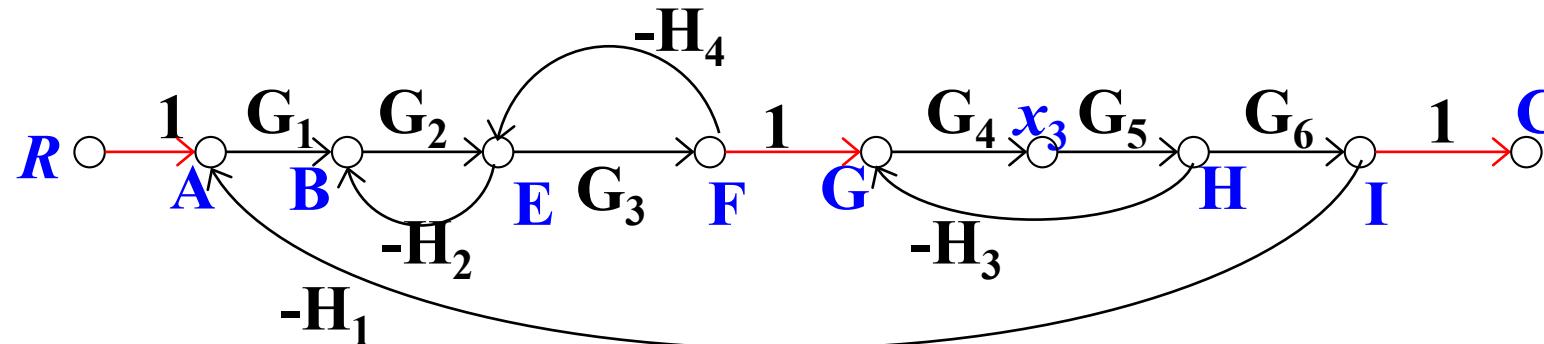
$$L_2 L_3 = (-G_3 H_4)(-G_4 G_5 H_3) = G_3 G_4 G_5 H_3 H_4$$

没有三个之间互不接触回路,

$$\begin{aligned} \text{故得特征式: } \Delta &= 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j = 1 + G_2 H_2 + G_3 H_4 + G_4 G_5 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 \\ &\quad + G_2 G_4 G_5 H_2 H_3 + G_3 G_4 G_5 H_3 H_4 \end{aligned}$$

## 二、Mason公式

【例2.2】已知系统结构图，求图示控制系统的传递函数



$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^m P_k \Delta_k}{\Delta}$$

只有一条前向通路，且  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$ 。

由于所有回路均与前向通路相接触，故余子式  $\Delta_1 = 1$ 。

所以系统的总传递函数为：

$$G(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 + G_2 H_2 + G_3 H_4 + G_4 G_5 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 + G_2 G_4 G_5 H_2 H_3 + G_3 G_4 G_5 H_3 H_4}$$

## 二、Mason公式

【例2.3】已知系统结构图，试用Mason公式求解系统的传递函数

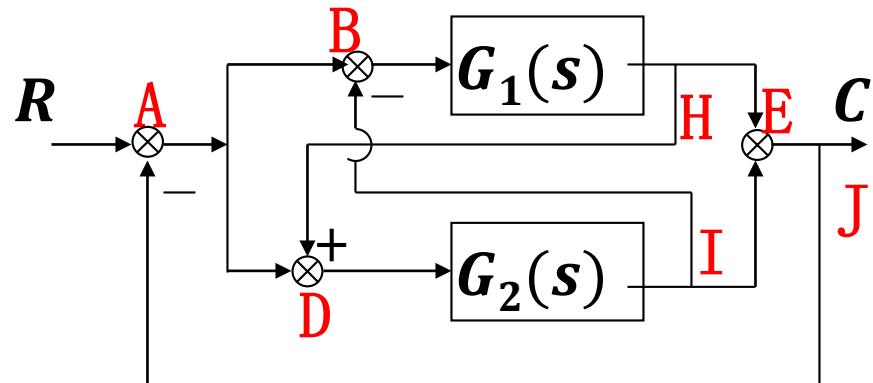
求图示控制系统的传递函数。

【解】回路有5个：

$$L_1 = -G_1, \quad L_2 = -G_1 G_2,$$

$$L_3 = -G_2, \quad L_4 = G_1 G_2, \quad L_5 = -G_1 G_2.$$

回路中没有不接触回路，



$$\text{因而特征式 } D = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 = 1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2$$

$$\text{前向通路有4条: } P_1 = G_1, \quad P_2 = G_1 G_2, \quad P_3 = G_2, \quad P_4 = -G_1 G_2,$$

它们与每个回路均有接触，余子式  $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 1, \Delta_4 = 1$ ，

则由梅逊公式可得系统传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2}$$

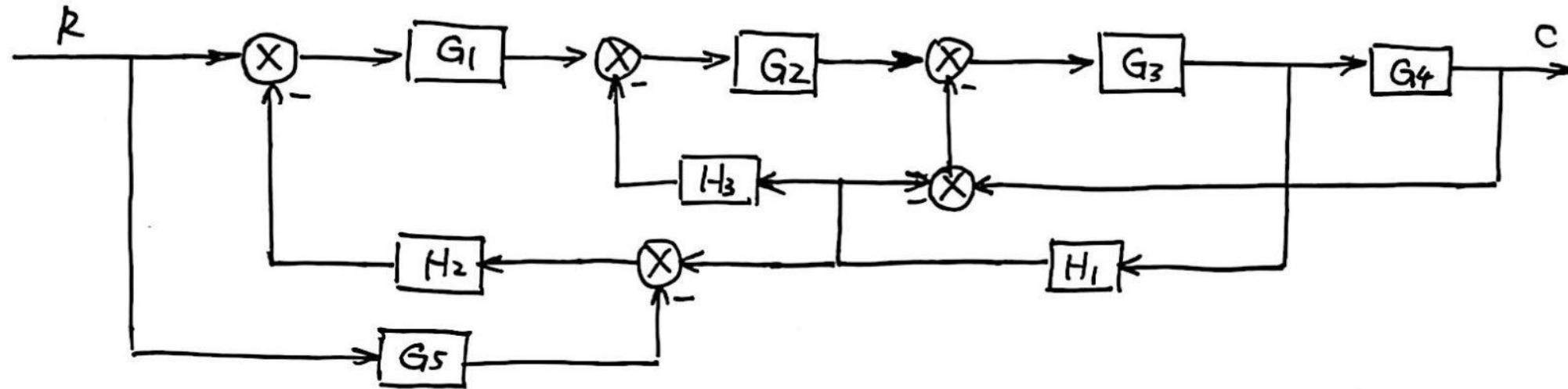
## 二、Mason公式

### 【小结】信号流图/结构图-采用Mason公式求传递函数

- ✓ **回路**: 按照信号流向, 从某个综合点出发, 经过方框、其它综合点和引出点最多只一次, 最后回到原综合点。
- ✓ **回路增益**: 回路所经过的方框的传递函数的乘积、乘以信号流向过程中信号进入综合点的符号。
- ✓ **接触回路**: 共享方框、综合点或引出点的回路。否则就是不接触回路。
- ✓ **前向通路**: 从输入出发, 按照信号流向、经过方框和其它综合点最多只一次, 最后到达输出。
- ✓ **前向通路增益**: 前向通路所经过的方框的传递函数的乘积、乘以信号流向过程中信号进入综合点的符号。
- ✓ **与前向通路相接触的回路**: 与前向通路共享方框、综合点或引出点的回路。

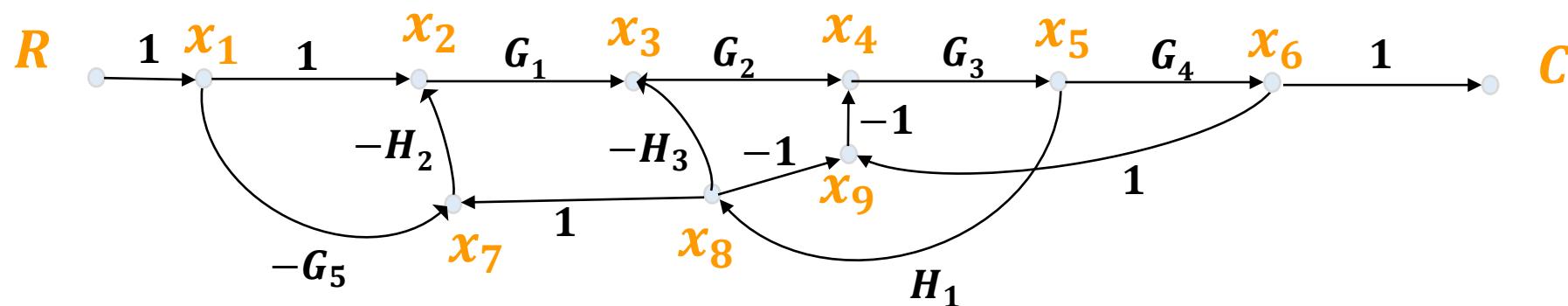
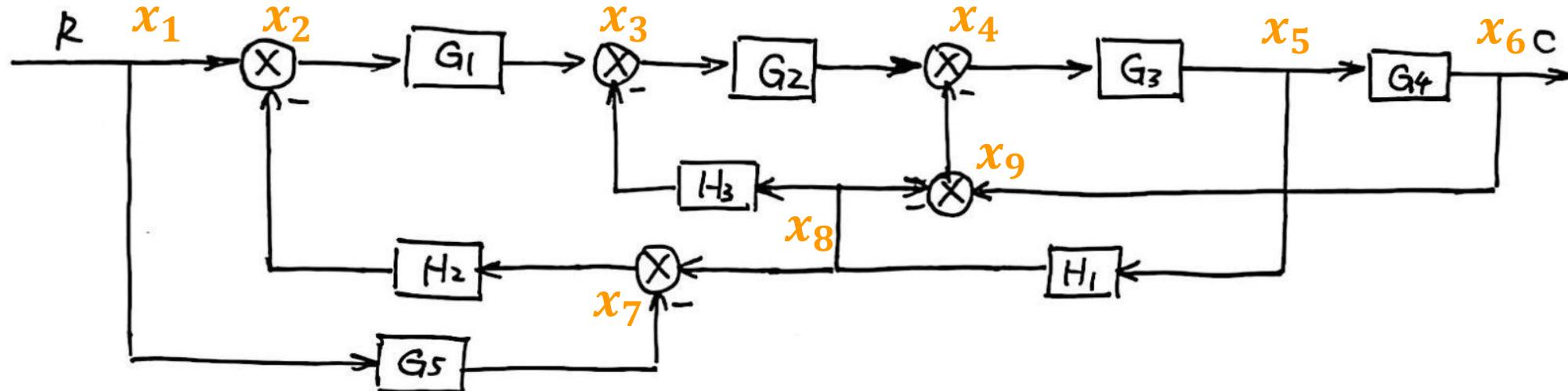
### 三、测试

■ 请各组用信号流图/Mason公式的方法，求解下面结构图的传递函数



### 三、测试

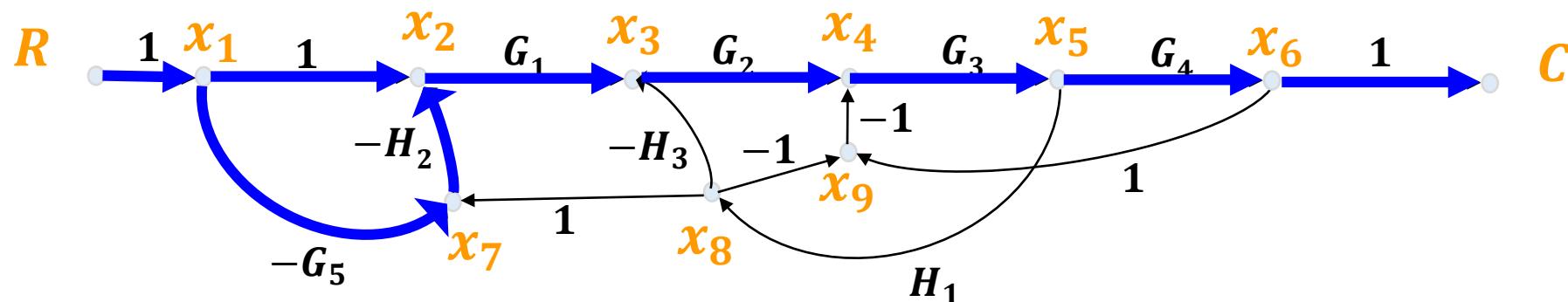
■ 请各组用信号流图/Mason公式的方法，求解下面结构图的传递函数



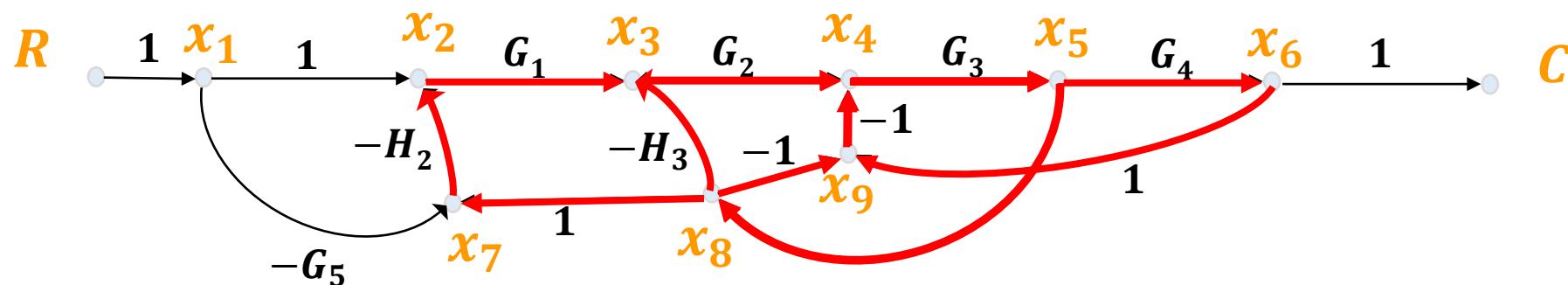
### 三、测试

■ 请各组用信号流图/Mason公式的方法，求解下面结构图的传递函数

【前向通路】



【回路】



- 控制系统的信号流图：
  - 信号流图的基本组成
  - 信号流图的绘制
  - 用Mason公式求解传递函数
- 作业：
  - 参考书 2.11
  - 梳理第二章内容、预习第三章稳定性