

第 10 周优秀作业已发送至讨论区，同学们可在课程平台中自行查看。

课程门户

计算方法 (二)

AI 工作台

班级活动

课件

教案

章节

资料

通知

讨论

作业

考试

题库

知识图谱

统计

管理

AI 助教管理

全部 + 新建讨论区

全部话题

蔡伟业 (老师) 05-01 13:30 自动化2303-2304
薛国庆-精品作业
简答题:
P56: 22,24...

蔡伟业 (老师) 05-01 13:29 自动化2303-2304
王逸轩-精品作业
简答题:
...

蔡伟业 (老师) 05-01 13:24 自动化2305-2306
周佳妮-精品作业
简答题:
...

第 11 周作业

第 10-11 周作业基本上都是计算错误，其中 P57 34 题计算量比较大，错误率高一些。

34. 构造适合下列数据表的三次插值样条 $S(x)$:

x	-1	0	1	3
y	-1	1	3	5
y'	6			1

方法一：

34. 由表得 $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j=1, 2, 3$, $h_0=1$, $h_1=1$, $h_2=2$

$$M_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}$$

$$M_0 = \frac{1}{2}, M_1 = \frac{1}{3}, M_2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

$$X_k \quad f(x_k) \quad \text{一阶差商} \quad \text{二阶差商} \quad d_0 = \frac{b}{h_0}(f[x_0, x] - f_0) = -24$$

$$-1 \quad -1 \quad d_1 = b f[x_0, x_1, x_2] = 0$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad d_2 = b f[x_1, x_2, x_3] = -2$$

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad d_3 = \frac{b}{h_2}(f'_3 - f[x_2, x_3]) = 0$$

$$3 \quad 5 \quad 1 \quad -\frac{1}{3}$$

得到矩阵线性方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得 $M_0 = -14$, $M_1 = 4$, $M_2 = -2$, $M_3 = 1$

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x-x_j)^3}{6h_j} + \left(y_i - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1}-x}{h_j} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right) \frac{x-x_j}{h_j}$$

$$S(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1, -x^3 + 2x^2 + x + 1, \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{19}{4}x - \frac{1}{4} \quad j=0, 1, 2$$

方法二：

插值点函数值条件：

$$a_1(-1)^3 + b_1(-1)^2 + c_1(-1) + d_1 = -1$$

$$d_1 = 1$$

$$a_2(1)^3 + b_2(1)^2 + c_2(1) + d_2 = 3$$

$$a_3(1)^3 + b_3(1)^2 + c_3(1) + d_3 = 3$$

$$a_3(3)^3 + b_3(3)^2 + c_3(3) + d_3 = 5$$

插值点导数值条件：

$$3a_1(0)^2 + 2b_1(0) + c_1 = 6$$

$$3a_3(3)^2 + 2b_3(3) + c_3 = 1$$

连接点一阶导数值连续：

$$S'_1(0) = S'_2(0) \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$S'_2(1) = S'_3(1) \Rightarrow 3a_2 + 2b_2 + c_2 = 3a_3 + 2b_3 + c_3$$

连接点二阶导数值连续：

$$S''_1(0) = S''_2(0) \Rightarrow 2b_1 = 2b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$S''_2(1) = S''_3(1) \Rightarrow 6a_2 + 2b_2 = 6a_3 + 2b_3$$

共 12 个方程，12 个未知数，此方程组直接求解比较困难，可通过 matlab 或 python 的相关

库编程求解得：

$$S(x) = \begin{cases} 3x^3 + 2x^2 + x + 1, & x \in [-1,0] \\ -x^3 + 2x^2 + x + 1, & x \in [0,1] \\ \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{19}{4}x - \frac{1}{4}, & x \in [1,3] \end{cases}$$

```

1 from sympy import symbols, Eq, solve
2
3 a1, b1, c1, d1 = symbols('a1 b1 c1 d1')
4 a2, b2, c2, d2 = symbols('a2 b2 c2 d2')
5 a3, b3, c3, d3 = symbols('a3 b3 c3 d3')
6
7 # 1. S1(-1) = -1
8 eq1 = Eq(a1*(-1)**3 + b1*(-1)**2 + c1*(-1) + d1, -1)
9 # 2. S1(0) = 1
10 eq2 = Eq(d1, 1)
11 # 3. S2(0) = 1
12 eq3 = Eq(d2, 1)
13 # 4. S2(1) = 3
14 eq4 = Eq(a2 + b2 + c2 + d2, 3)
15 # 5. S3(1) = 3
16 eq5 = Eq(a3 + b3 + c3 + d3, 3)
17 # 6. S3(3) = 5
18 eq6 = Eq(a3*27 + b3*9 + c3*3 + d3, 5)
19 # 7. S1'(-1) = 6
20 eq7 = Eq(a1*3 - b1*2 + c1, 6)
21 # 8. S3'(3) = 1
22 eq8 = Eq(3*a3*9 + 2*b3*3 + c3, 1)
23 # 9. S1'(0) = S2'(0)
24 eq9 = Eq(c1, c2)
25 # 10. S2'(1) = S3'(1)
26 eq10 = Eq(3*a2 + 2*b2 + c2, 3*a3 + 2*b3 + c3)
27 # 11. S1''(0) = S2''(0)
28 eq11 = Eq(2*b1, 2*b2)
29 # 12. S2''(1) = S3''(1)
30 eq12 = Eq(6*a2 + 2*b2, 6*a3 + 2*b3)
31
32 solution = solve([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, eq9, eq10, eq11, eq12], eq1 = Eq(-a1 + b1 - c1 + d1, -1), e
33 | | | | | [a1, b1, c1, d1, a2, b2, c2, d2, a3, b3, c3, d3]) a1 = a1, b1 = b1, c1 = c1, d1 = d1, a2 = a2, b2 =
34
35 solution solution = {a1: 3, a2: -1, a3: 1/4, b1: 2, b2: 2, b3: -7/4, c1: 1, c2: 1, c3: 19/4, d1: 1, d2: 1, d3: -1/4}

```

P94

3. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量地高，并指明求积公式所具有的代数精度：

$$(1) \int_{-h}^h f(x) dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$$

3(1) 将多项式 $1, x, x^2$ 分别代入求积公式

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2h \\ -A_0 h + A_2 h = 0 \\ A_0 h^3 + A_1 h^2 = \frac{2}{3} h^3 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{3} \\ A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\therefore \int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{1}{3} f(-h) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(h)$

\therefore 梯形公式具有代数精度为2.

须求解三个未知数，列出三个方程， $f(x)$ 分别带入 1 、 x 、 x^2 即可，于是该公式至少有二次代数精度（对于 x^2 成立），此后还需验证对于更高次数项是否成立。发现对于 x^3 成立，对于 x^4 不成立，因此该公式有三次代数精度。

部分作业疑似抄袭

↑	提交时间 ↑	提交ip	状态 ↴	批阅人	成绩 ↓
09	05-07 22:15	10.19.156.6	已完成	蔡伟业	70
18	05-06 23:02	10.19.158.246	已完成	蔡伟业	70
i80	05-06 22:50	10.19.155.11	已完成	蔡伟业	70
07	05-06 22:33	10.19.153.218	已完成	蔡伟业	70
23	05-06 20:19	223.104.121.6	已完成	蔡伟业	70