

2024-2025 学年度春季



课程名称：《自动控制原理（一）》 第9讲 控制系统的动态性能-Part 1

课程学时：共56学时

课程性质：专业基础课

学生对象：自动化2305班
(32人)

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

■ 控制系统的稳定性

判别方法1：(线性定常系统)

设系统初始条件为零，输入一个理想的单位脉冲函数，若输出响应 $c(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0, \text{ 则该系统是稳定的。}$$

判别方法2：(线性定常系统) S 域的判别方法

传递函数 $\Phi(s)$ 的所有极点均在根平面(S 平面)的左半部分。

■ 控制系统的稳定性

判别方法3：(线性定常系统) 劳斯判据

- 系统稳定的充要条件是Routh表中第一列各项元素均为正。
- 特征方程具有正实部根的个数等于Routh表第一列中系数改变符号的次数。

特殊情况1：劳斯阵列表中某一行的第一个系数为0，其余各系数全为0或没有其余项

特殊情况2：Routh表中某一行全为零

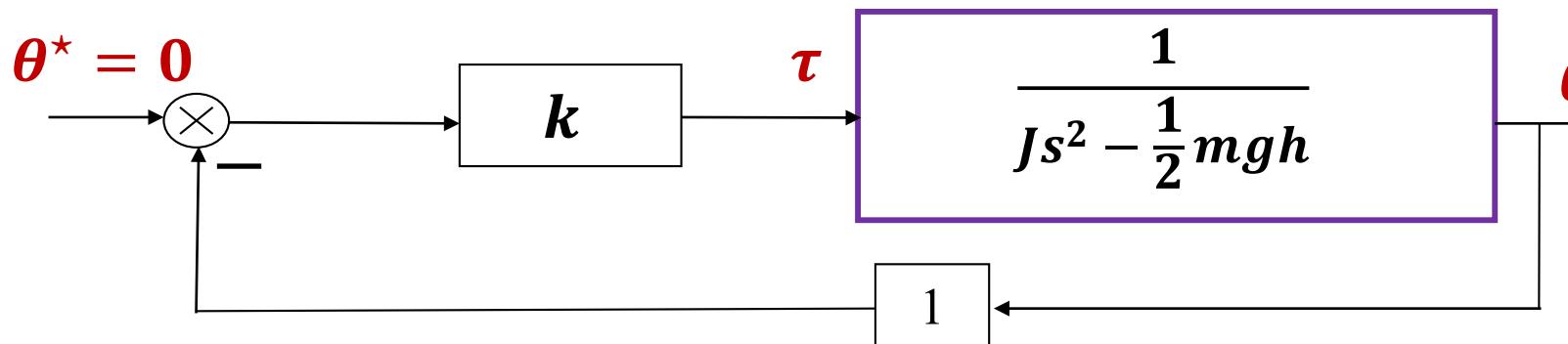
回顾-案例

【案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

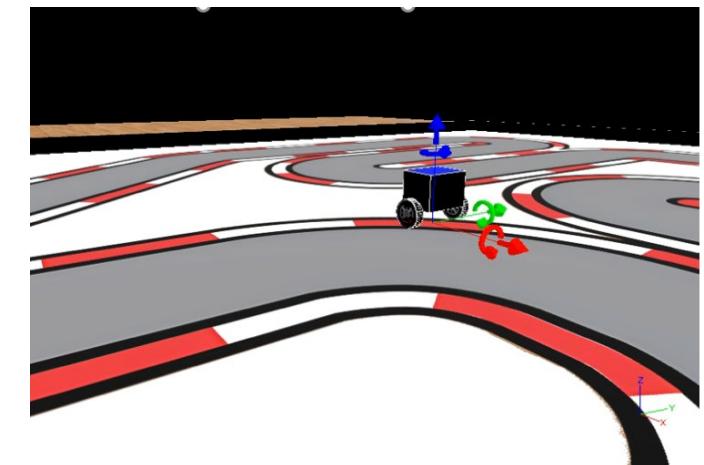
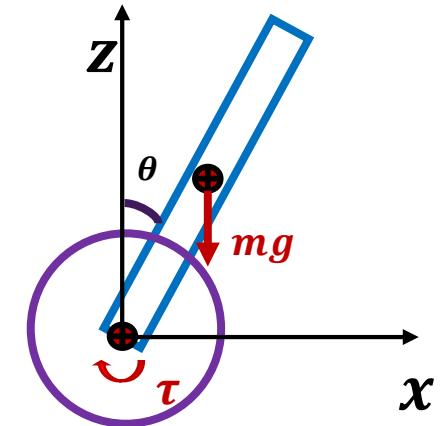
$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2}mgh\theta + \tau$$

其中俯仰角为 θ , 机器人主体质量为 m , 高度为 h 转动惯量为 J
机器人主体受到重力的转矩和电机作用的转矩 τ

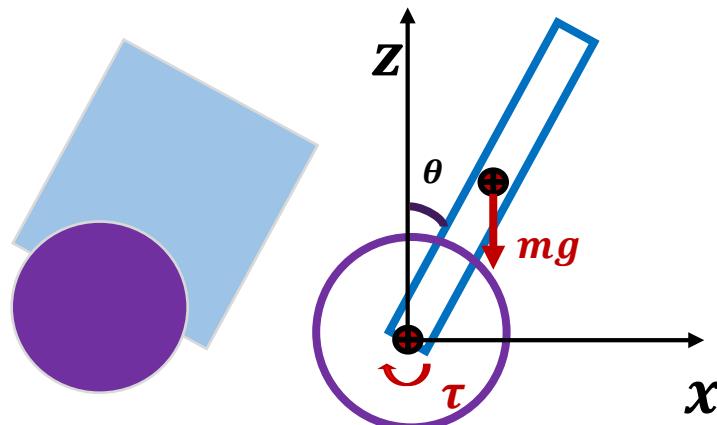
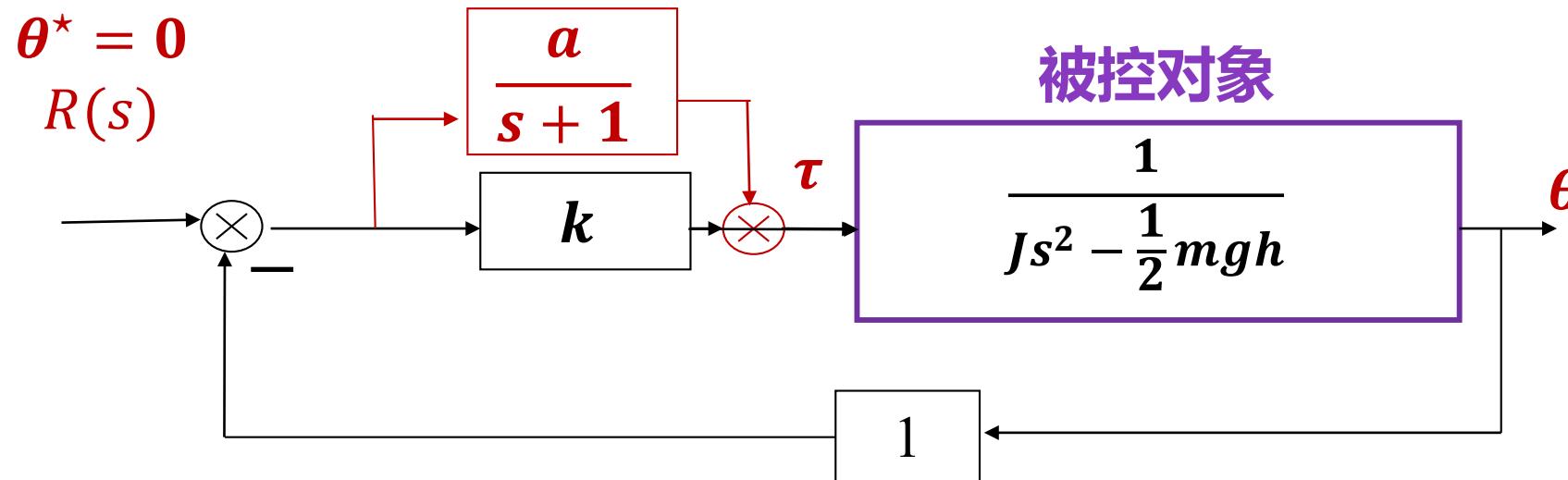
设计控制量 $\tau = -k\theta$



$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + k - \frac{1}{2}mgh}$$



【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

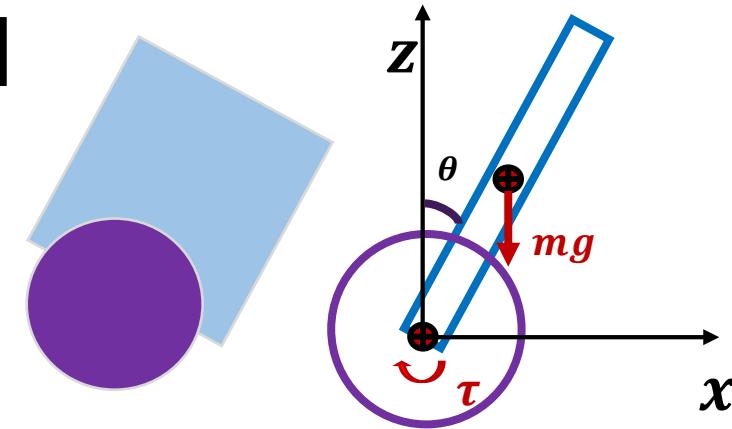


$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$

回顾-案例

【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{ks + k + a}{Js^3 + Js^2 + ks - \frac{1}{2}mghs + k + a - \frac{1}{2}mgh}$$



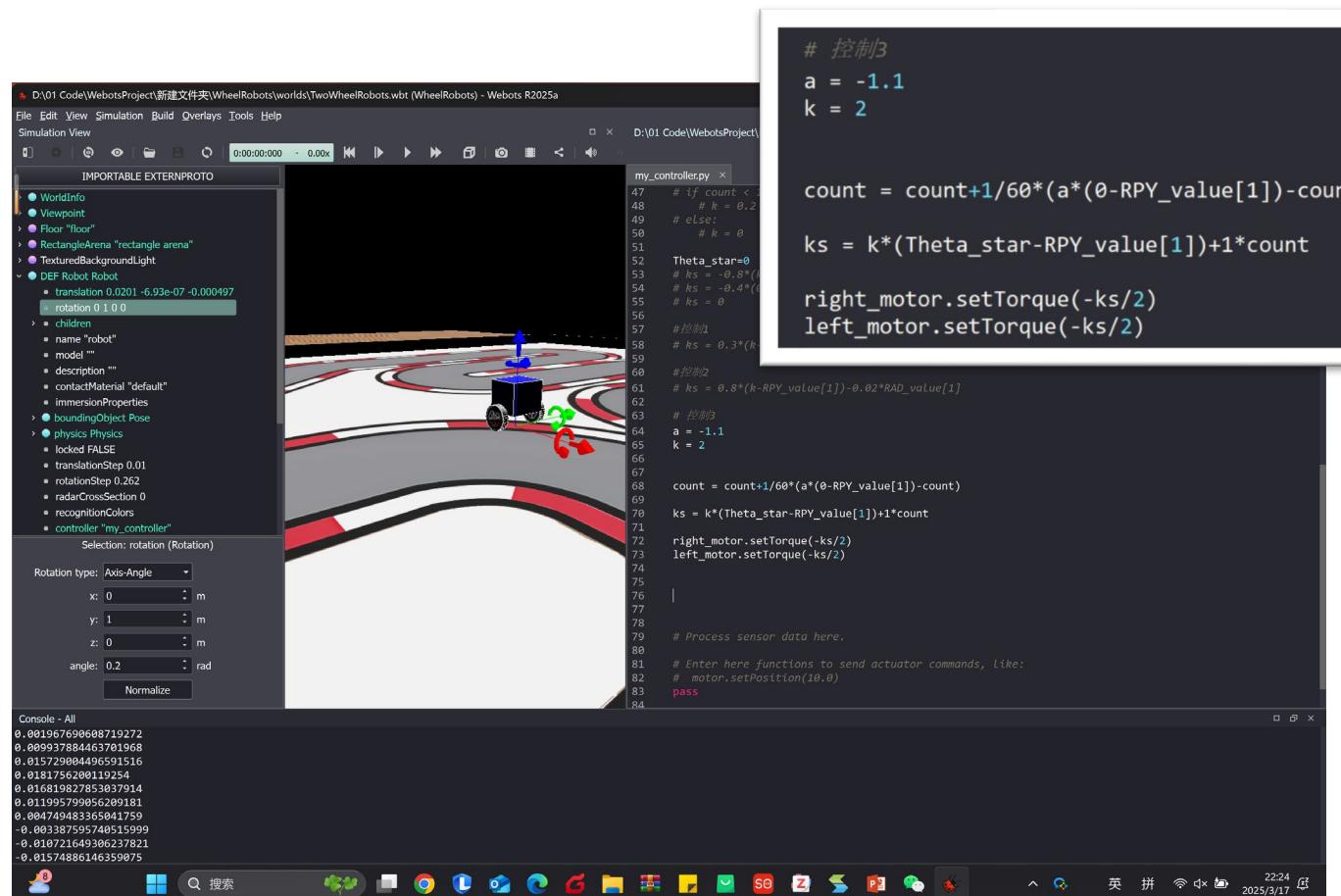
s^3	J	$k - \frac{1}{2}mgh$
s^2	J	$k + a - \frac{1}{2}mgh$
s^1	$-a$	
s^0	$k + a - \frac{1}{2}mgh$	

若 $a < 0$ 且 $k + a - \frac{1}{2}mgh > 0$, 则平衡车能够平衡

回顾-案例

【测试/案例】轮式机器人平衡控制改进方法的结构图

若 $a < 0$ 且 $k + a - \frac{1}{2}mgh > 0$, 则平衡车能够平衡



The screenshot shows the Webots simulation environment. On the left, the World Viewport displays a 3D scene of a two-wheeled robot on a curved track. The robot has a blue rectangular body and black wheels. A coordinate system is overlaid on the robot. On the right, the Editor Viewport shows the script file "my_controller.py". The code implements a balance control algorithm based on the provided formula.

```
# 控制3
a = -1.1
k = 2

count = count+1/60*(a*(0-RPY_value[1])-count)

ks = k*(Theta_star-RPY_value[1])+1*count

right_motor.setTorque(-ks/2)
left_motor.setTorque(-ks/2)

# 控制2
# ks = 0.8*(r-RPY_value[1])-0.02*RAD_value[1]

# 控制
a = -1.1
k = 2

count = count+1/60*(a*(0-RPY_value[1])-count)

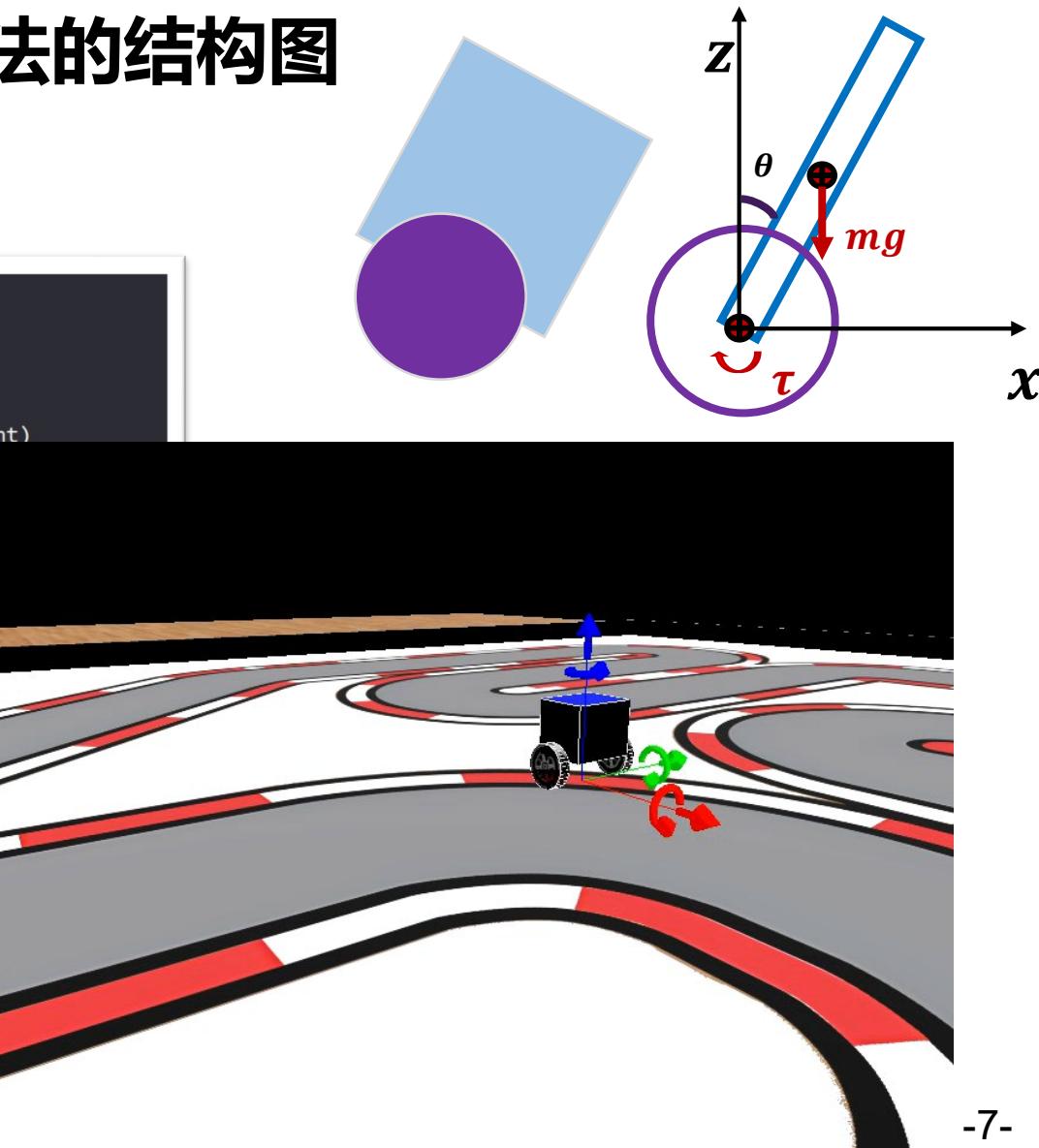
ks = k*(Theta_star-RPY_value[1])+1*count

right_motor.setTorque(-ks/2)
left_motor.setTorque(-ks/2)

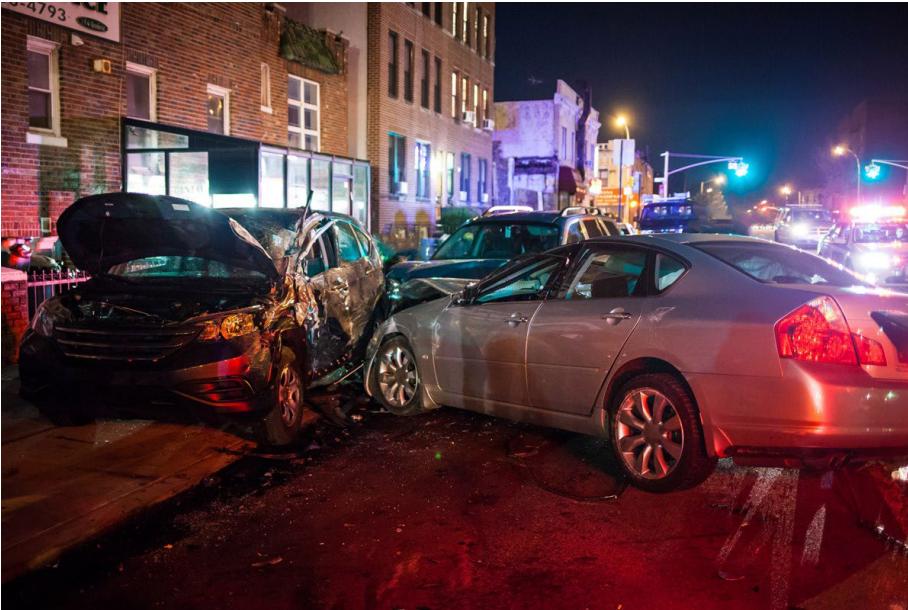
# Process sensor data here.

# Enter here functions to send actuator commands, like:
# motor.setPosition(10,0)
pass
```

Console output at the bottom shows numerical values.

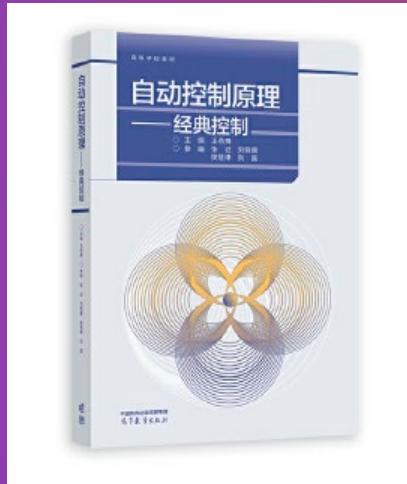


■ 车辆跟驰事故(Uber无人车的碰撞事故)



约90%车辆追尾都是因为与前车没有保持安全距离

如何在车辆跟驰控制中跟前车始终维持安全距离?



第三章：控制系统的时域分析

第9讲 控制系统的动态性能分析-Part 1

Transient Stability Analysis of Control Systems – Part 1

本讲内容

- 一、动态性能分析与性能指标
- 二、一阶系统的时域响应
- 三、二阶系统的时域响应

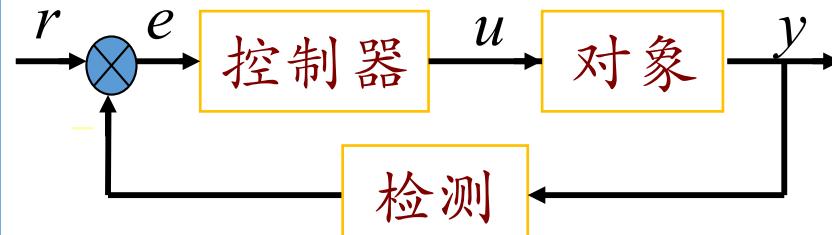


一、动态性能分析与性能指标

□ 动态过程



典型控制结构图



十六进制十六进制

动态过程

动态过程：输入信号作用在系统的时刻起，到输出达到稳态为止，系统输出随时间变化的过程。

不同初始状态、不同控制器、不同控制参考指令都会出现不同的动态过程

一、动态性能分析与性能指标

◆ 动态过程(瞬态响应、动态响应): 从输入信号作用在系统的时刻起, 到输出达到稳态为止, 系统输出随时间变化的过程。

Q1: 动态性能是否与输入有关?

是的。

Q2: 为何采用典型输入信号作用来考察动态性能?

瞬态响应与输入信号形式有关, 输入信号不同, 系统响应不同。考察典型输入信号, 使对系统性能分析有一个统一的标准。

Q3: 通常采用哪个典型输入信号?

单位阶跃信号。

Q4: 初始条件对动态响应过程是否有影响?

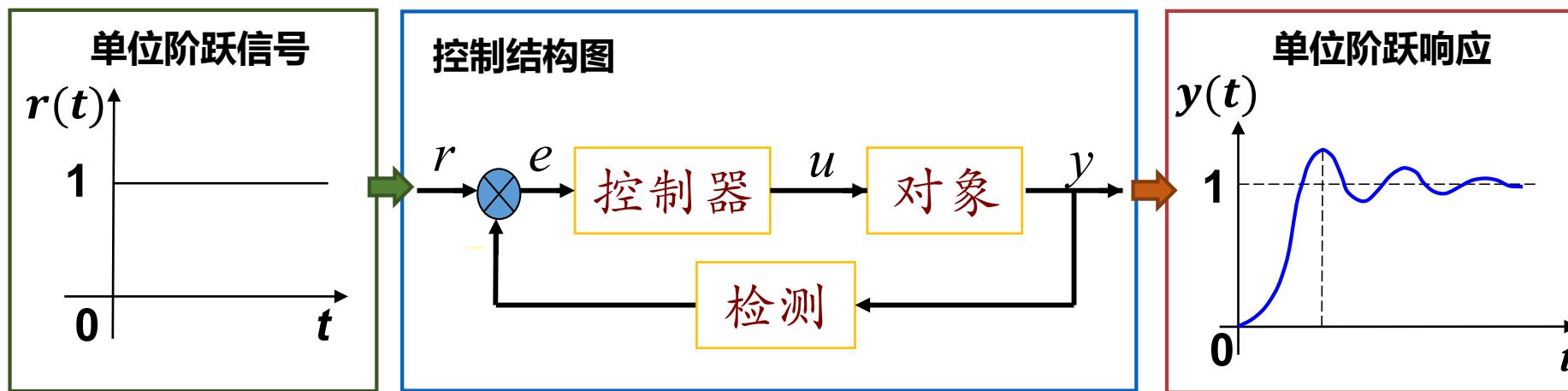
有影响。为考察输入信号的作用, 设为零初始条件。

◆ 总结: 动态性能分析是以系统在零初始条件下, 对单位阶跃输入信号的响应来描述。¹¹⁻

一、动态性能分析与性能指标

动态性能的分析方法有哪些？

- ✓ 解析法(直接求解法)——得到系统输出 $c(t)$ 表达式。
- ✓ 计算机仿真法——可对复杂高阶的、多变量的系统求解 $c(t)$ ，直接得到各种指标。
- ✓ 间接评价法——通过与系统的结构、参数有联系的性能指标来评价系统的品质。广泛使用。



动态性能分析：零初始条件下对系统的单位阶跃响应的动态过程进行分析。

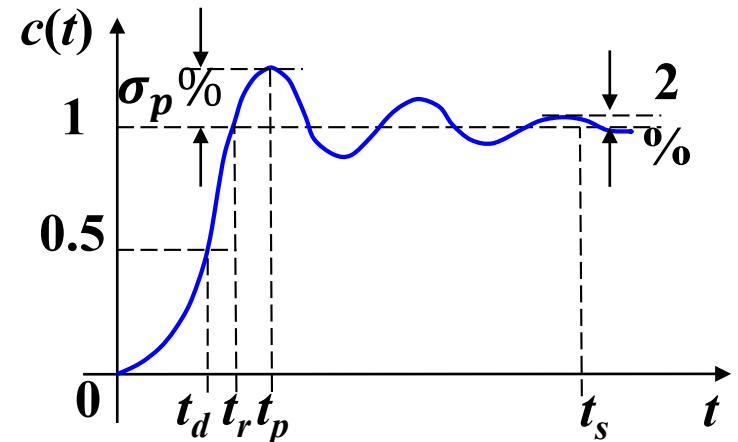
一、动态性能分析与性能指标

□ 动态性能指标

? 衡量动态性能的指标有哪些?

线性系统时域响应性能指标包括:

- 延迟时间 t_d : 指系统的单位阶跃响应从0上升到稳态值的50%所需要的时间。
- 上升时间 t_r :
 - 对有振荡的系统, 为单位阶跃响应从0开始至第一次到达稳态值所需时间
 - 对无振荡的系统, 为单位阶跃响应从稳态值的10%到达90%所需时间。
- 峰值时间 t_p : 指系统的单位阶跃响应从0到达第一个超过其稳态值的峰值所需时间。



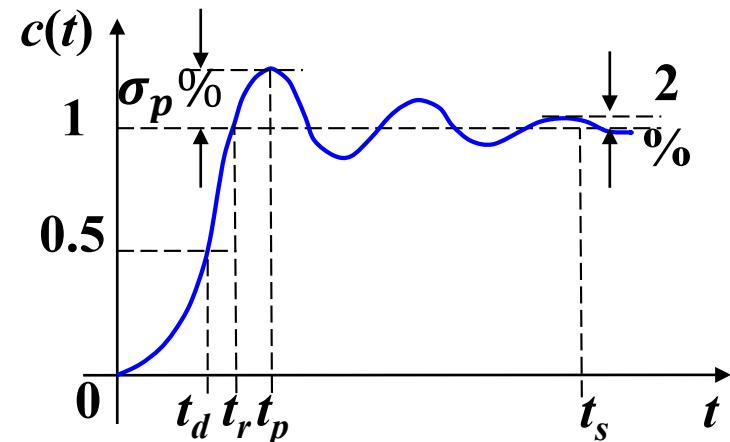
一、动态性能分析与性能指标

□ 动态性能指标

- **最大超调量** σ_p : 指系统的单位阶跃响应偏离稳态值的最大值，常以百分比表示，即

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%.$$

- **调整时间 (调节时间)** t_s : 指系统的单位阶跃响应从0开始到进入稳态值的95%~105% (或98%~102%) 误差带时所需要的时间。
- **振荡次数**: 指在调节时间 t_s 内系统的单位阶跃响应穿越其稳态值次数的一半。
- **衰减比**: 指系统的单位阶跃响应的第一个峰值与第二个峰值之比。



一、动态性能分析与性能指标

□ 性能指标的表征：

- 延迟时间、上升时间、峰值时间：用于评价系统在响应初期的初始快速性。
- 调整时间：用于评价系统总体快速性。
- 超调量、振荡次数、衰减比：用于评价系统的平稳性。

二、一阶系统的时域响应

□ 一阶系统：可用一阶微分方程描述其动态过程的系统。

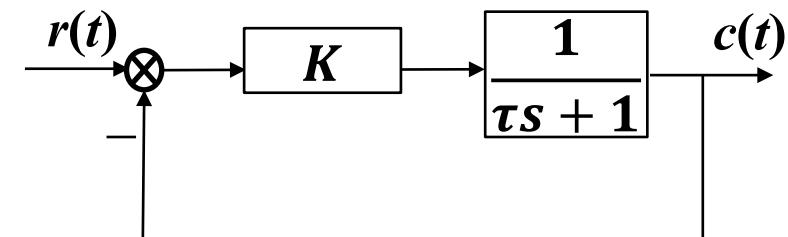
如图所示一阶系统，其中 τ 是开环时间常数， K 为开环放大系数。

该一阶系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + s\tau + K} = \frac{K/\tau}{s + (K + 1)/\tau} = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{K + 1}{\tau}s + 1}$$
$$= \frac{K_B}{Ts + 1},$$

其中 $T = \frac{\tau}{K+1}$ 为闭环时间常数。

$K_B = \frac{K}{K+1}$ 为闭环放大系数。



二、一阶系统的时域响应

□ 一阶系统的动态性能分析

$$G_B(s) = \frac{K_B}{Ts + 1}$$

零初始条件下输入单位阶跃信号时，输出为：

$$C(s) = \frac{\frac{K_B}{T}}{s + \frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_B}{s} - \frac{K_B}{s + \frac{1}{T}},$$

拉氏反变换得一阶系统的单位阶跃响应为 $c(t) = K_B(1 - e^{-\frac{t}{T}}), t \geq 0$ 。

◆ 响应特征分析：

- 一阶系统的单位阶跃响应为一条初始值为0，以指数规律上升到终值的曲线。
- 稳态值：当 $t \rightarrow \infty$ 时输出响应稳态值为 $c(\infty) = K_B = \frac{K}{K+1}$ ，

K 越大， $c(\infty)$ 越接近于1。总存在稳态误差：

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = 1 - c(\infty) = \frac{1}{K+1}.$$

二、一阶系统的时域响应

□ 一阶系统性能指标分析

- ◆ 响应特征分析：

$$c(t) = \frac{K}{K+1} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

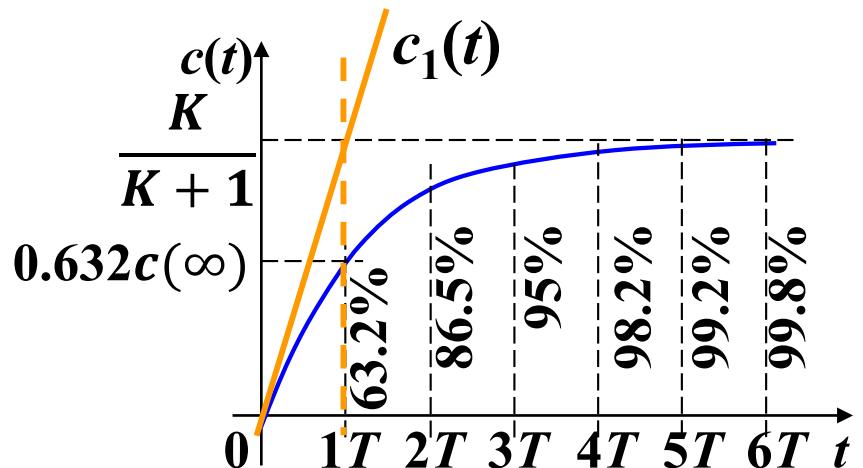
系统的**时间常数**为 $T = \frac{\tau}{K+1}$

➤ 当 $t = T$ 时, $c(t) = c(\infty)(1 - e^{-1}) = 0.632c(\infty)$, 即输出达到稳态值的63.2% 时对应的时间就是闭环时间常数 T 。

➤ 对 $c(t)$ 求导: $\frac{dc(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-(K+1)t/\tau}$ 关于 t 单调下降,

在 $t = 0$ 时 $c(t)$ 的变化率最大, 此时斜率为 $\frac{dc(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$ 。

以 $\frac{K}{\tau}$ 为斜率定义曲线 $c_1(t)$, 则 $c_1(t) = \frac{K}{\tau} t$, 当 $t = T$ 时 $c_1(t)$ 到达稳态值 $\frac{K}{K+1}$ 。



二、一阶系统的时域响应

□ 一阶系统性能指标分析 $c(t) = K_B(1 - e^{-\frac{t}{T}}), t \geq 0.$

✓ 延迟时间：令 $c(t) = 50\% \times c(\infty) = 0.5K_B$ ，得延迟时间 $t_d = 0.69T$ 。

✓ 上升时间：令 $1 - e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.1$, $1 - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.9$,

得 $t_r = t_2 - t_1 = 2.2T$ 。

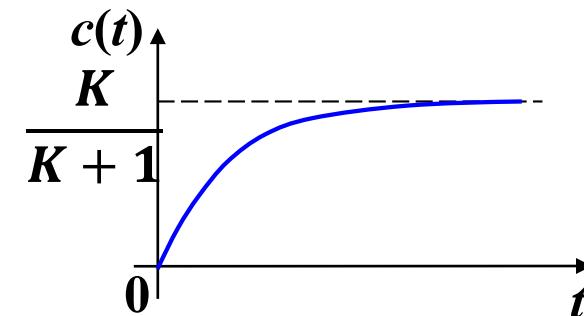
➤ 调整时间 t_s ： $t = 3T$ 时 $c(3T) = 0.950c(\infty)$,

$t = 4T$ 时 $c(4T) = 0.982c(\infty)$ 。则 $t_s = \begin{cases} 3T, \Delta = 5\%, \\ 4T, \Delta = 2\%. \end{cases}$

➤ 峰值时间 t_p ：为无穷大。

□ 结论：闭环时间常数 T 完全反映了一阶系统的动态性能。

T 反映系统惯性， T 减小，惯性减小，响应速度加快。



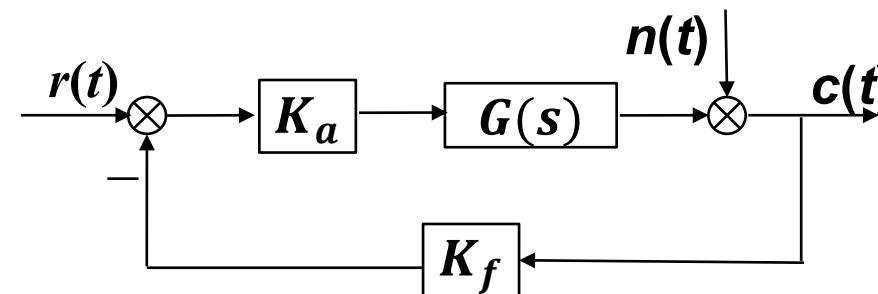
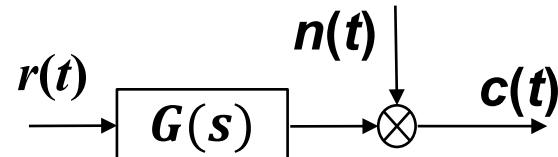
二、一阶系统的时域响应

【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。

下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数

$$G(s) = \frac{1}{10s+1}, \text{ 放大器 } K_a = 100, \text{ 温度传感器 } K_f = 1.$$

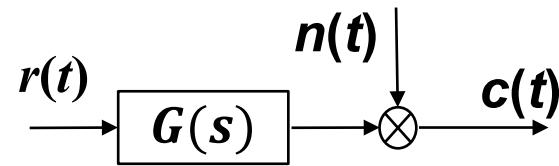
- 1) 若 $r(t) = 1(t)$, $n(t) = 0$, 两种系统从开始达到稳态温度值的 63.2% 各需多长时间?
- 2) 当 $n(t) = 0.1(t)$ 阶跃扰动时求扰动对两种系统温度的影响。



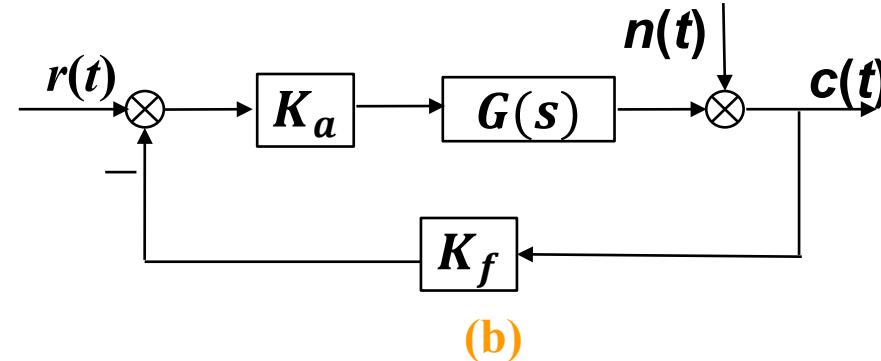
二、一阶系统的时域响应

【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。

下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数



(a)



(b)

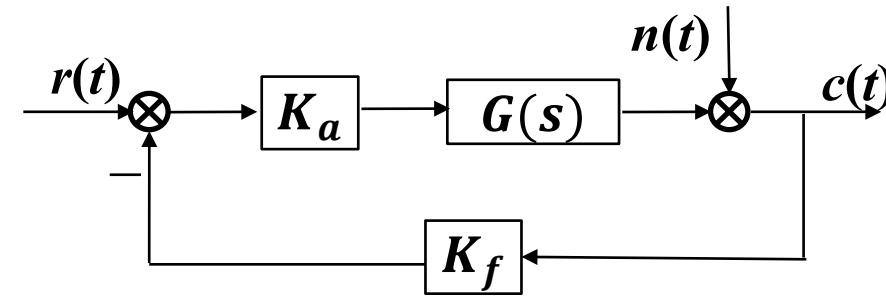
【解】1)对(a)系统有 $G_a(s) = \frac{1}{10s+1}$ ，时间常数 $T_a = 10$ ，从开始达到稳态温度值的63.2%需 $t = 10$ 时间单位。

对(b)系统有 $G_b(s) = \frac{100}{10s+101}$ ，时间常数 $T_b = \frac{10}{101} = 0.099$ ，则从开始达到稳态温度值的63.2%需 $t = 0.099$ 时间单位。

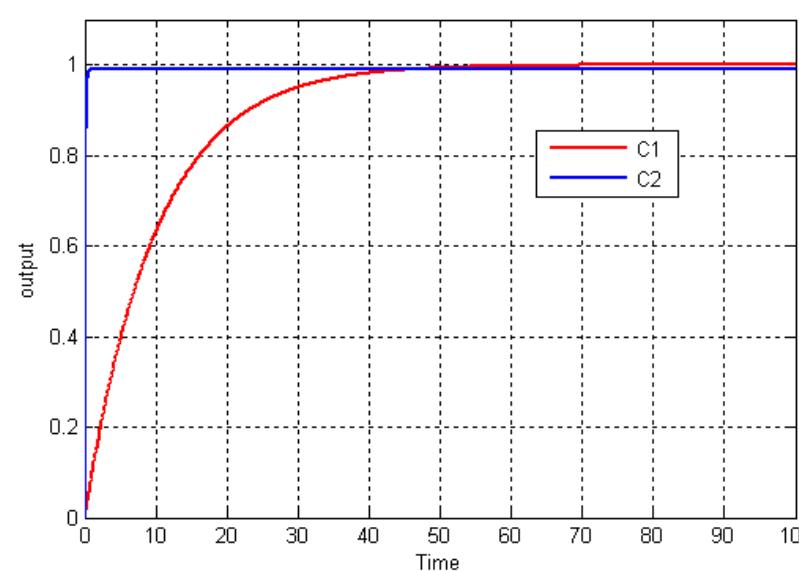
二、一阶系统的时域响应

$$G_a(s) = \frac{1}{10s+1}, \quad t = 10$$

$$G_b(s) = \frac{100}{10s+101}, \quad t = 0.099$$



```
t=[0:0.1:100];
n1=[1];d1=[10 1];sys1=tf(n1,d1)
C1=step(sys1,t)
n2=[100];d2=[10 101];sys2=tf(n2,d2)
C2=step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'), ylabel('output')
```



二、一阶系统的时域响应

【例2.1】在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定。

下图分别为开环和闭环温度控制系统结构图，其中加热器的传递函数

2)当有 $n(t) = 0.1(t)$ 阶跃扰动时求扰动对两种系统温度的影响。

对(a)系统， $G_{na}(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = 1$ ，

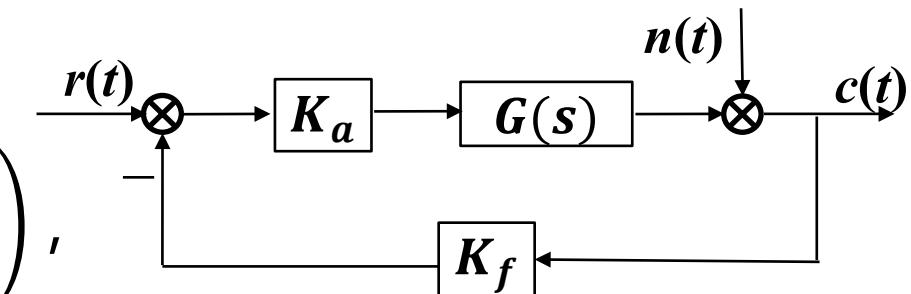
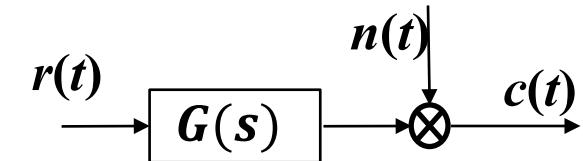
$n(t) = 0.1(t)$ 作用下输出 $c_{na}(t) = 0.1$ 。

对(b)系统， $G_{nb}(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{10s+1}{10s+101}$ ，

$n(t) = 0.1(t)$ 作用下输出

$$C_{nb}(s) = \frac{10s+1}{10s+101} \times \frac{0.1}{s} = \frac{0.1}{101} \left(\frac{1}{s} + \frac{100}{s+10.1} \right),$$

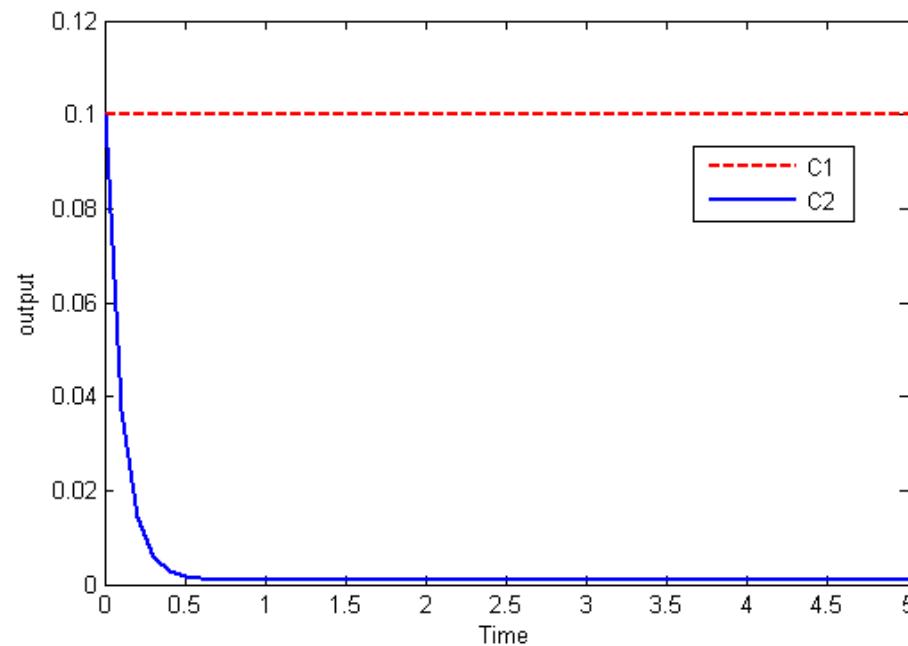
则 $c_{nb}(t) = 9.9 \times 10^{-4} (1 + 100e^{-10.1t})$ 。



二、一阶系统的时域响应

$$n(t) = 0.1(t) \quad c_{na}(t) = 0.1 \quad c_{nb}(t) = 9.9 \times 10^{-4} (1 + 100e^{-10.1t})$$

```
t=[0:0.1:5];
n1=[1];d1=[1];sys1=tf(n1,d1)
C1=0.1*step(sys1,t)
n2=[10 1];d2=[10 101];
sys2=tf(n2,d2)
C2=0.1*step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'), ylabel('output')
```

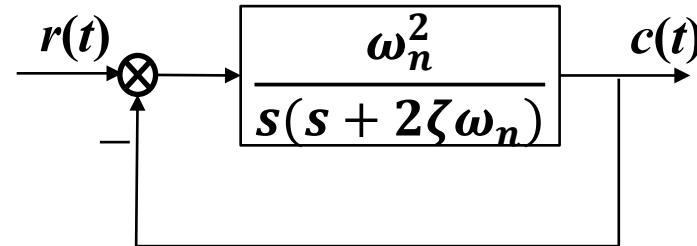


可见，闭环系统比开环系统动态过程加快，抗扰动性能增强。

三、二阶系统的时域响应

□ 二阶系统性能指标分析

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t)$$



- ζ 为阻尼比，又称阻尼系数，
- ω_n 为无阻尼自然振荡频率。
- 闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

为二阶系统闭环传递函数的标准形式。闭环特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

闭环特征根为 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 。

三、二阶系统的时域响应

- ◆ 对 $s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ 进行分析可判断系统的稳定性：
 - $\zeta < 0$ 为**负阻尼**，系统不稳定。
 - $\zeta = 0$ 为**无阻尼**，特征根为共轭纯虚根 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ ，临界稳定。
 - $0 < \zeta < 1$ 为**欠阻尼**，系统稳定。
 - $\zeta = 1$ 为**临界阻尼**，特征根为**实数重根** $s_{1,2} = -\omega_n$ ，稳定。
 - $\zeta > 1$ 为**过阻尼**，系统稳定。

不同工作状态的单位阶跃响应特性不同，下面分别讨论。

三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

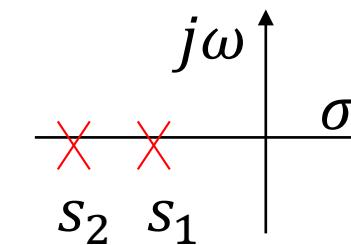
欠阻尼

无阻尼

负阻尼

(1 过阻尼) $\zeta > 1$ 时：考察单位阶跃响应。令

$$s_1 = -\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad s_2 = -\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1},$$



则系统的单位阶跃响应为

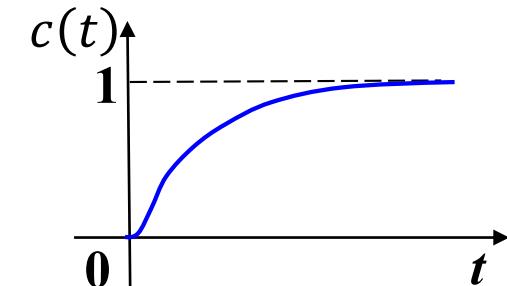
$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \geq 0,$$

稳态分量

瞬态分量

对 $c(t)$ 求导得 $\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$

- $\dot{c}(0) = 0$,
- $\dot{c}(t)$ 从 0 逐渐增大, $t = \frac{\ln|s_2| - \ln|s_1|}{s_1 - s_2}$ 时最大,
- 随后减小, $t \rightarrow \infty$ 时 $\dot{c}(t)$ 减小至 0。因此 $c(t)$ 如图, 是一条单调递增的 S 形曲线。



三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

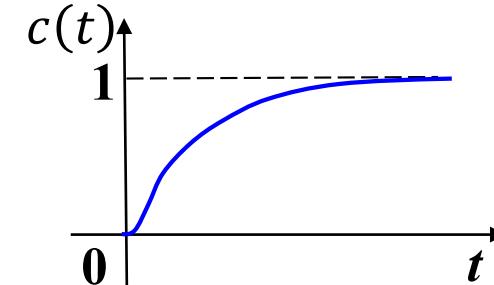
欠阻尼

无阻尼

负阻尼

$$s_1 = -\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad s_2 = -\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \geq 0$$



□ 响应曲线特征：

- 过渡过程为单调递增，既无超调，也无振荡。
- $\zeta \gg 1$ 时， s_1 靠近虚轴， s_2 远离虚轴，

靠近虚轴的极点 s_1 起主导作用，

s_2 对应的瞬态分量衰减很快，可忽略不计，把二阶系统近似为一阶系统来处理。

- 稳态误差 $e(\infty) = r(\infty) - c(\infty) = 0$ 。

三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

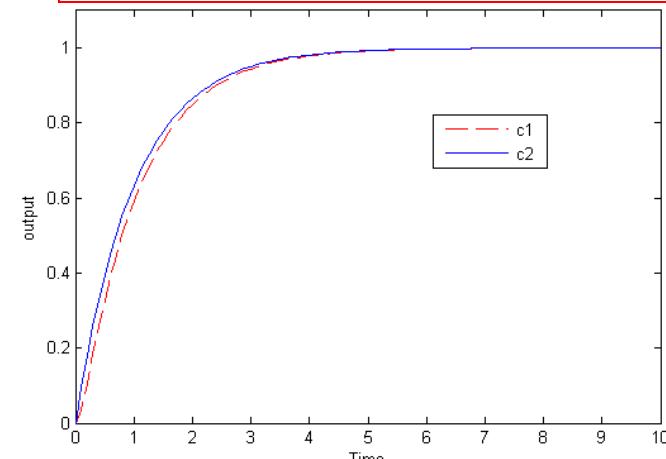
【例3.1】已知两个控制系统的传递函数分别为 $G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$ 和 $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ ，绘制这两个系统的单位阶跃响应曲线，分析二者的相似之处。

【解】设两个系统的单位阶跃响应分别为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ ，如图。二者单位阶跃响应非常近似，分析动态特性时，近似有 $G_1(s) \approx G_2(s)$ 。

- 一般当两个极点间距 $7 \sim 10$ 倍或 $\zeta \geq 1.5$ 时，可将二阶系统近似为一阶系统来处理。

注：近似是在保证稳态值不变的情况下进行。

```
P=[-1 -10];
sys1=zpk([],P,10)
C1=step(sys1,t)
n2=[1];d2=[1 1];
sys2=tf(n2,d2)
C2=step(sys2,t)
plot(t,C1,'r',t,C2,'b')
xlabel('Time'),
ylabel('output')
```



三、二阶系统的时域响应

过阻尼

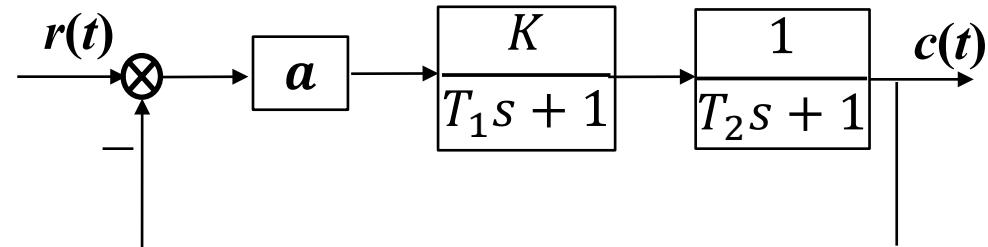
临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

【例3.2】已知控制系统的结构图如图，且单位阶跃响应曲线单调递增到稳态值， $T_1, T_2, K > 0$ ，试确定 a 的范围。



【解】闭环特征方程为 $T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + Ka + 1 = 0$,

$$\text{特征根为 } s_{1,2} = \frac{-(T_1+T_2) \pm \sqrt{(T_1+T_2)^2 - 4T_1T_2(Ka+1)}}{2T_1T_2},$$

响应曲线单调递增到稳态值，说明系统稳定，且特征根为两个负实根。则

$$Ka + 1 > 0,$$

$$(T_1 + T_2)^2 - 4T_1T_2(Ka + 1) \geq 0,$$

$$\text{整理得 } -\frac{1}{K} < a \leq \frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2K} - \frac{1}{K}.$$

三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

【2 临界阻尼】

$\zeta = 1$ 时 $s_{1,2} = -\omega_n$, 单位阶跃响应

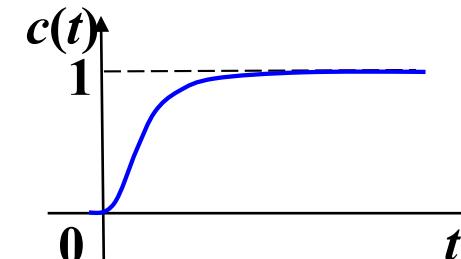
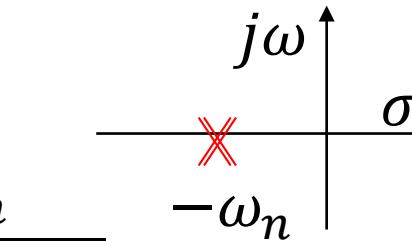
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2},$$

则 $c(t) = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$, $t \geq 0$ 。

此时输出响应曲线形如图。

□ 响应曲线特征:

- 过渡过程为单调递增。既无超调，也无振荡。
- $\zeta = 1$ 是系统输出响应为单调还是振荡过程的分界，称为临界阻尼状态。
- 在 ω_n 一定的情况下，其动态过程比过阻尼快。
- 稳态误差 $e(\infty) = 0$ 。



为什么？

三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

【3 欠阻尼】 $0 < \zeta < 1$ 时, 记系统的两个特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma \pm j\omega_d,$$

负实部 $\sigma = \zeta \omega_n$, 虚部 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

$\omega_n = |s_{1,2}|$ 为特征根的模。单位阶跃响应为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2},$$

$$\text{则 } c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right),$$

令 $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta$, 则

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta),$$

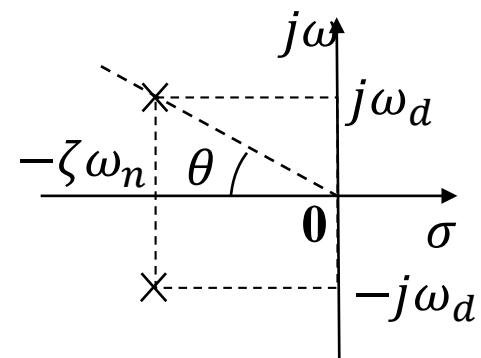
稳态分量

瞬态分量

➤ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 为有阻尼振荡频率。

➤ $\theta = \arccos \zeta$ 为初始相角。

$$\frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

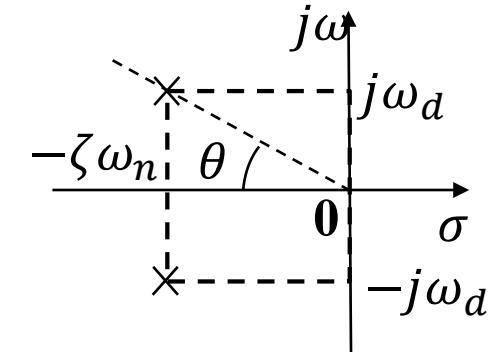
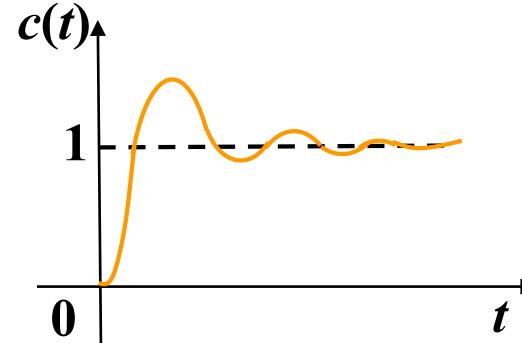
欠阻尼

无阻尼

负阻尼

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



□ 响应曲线特征：

- 振荡频率为特征根的虚部 ω_d 。 ω_d 增大则振荡频率增大。
- 振荡幅值按指数衰减，速度取决于负实部 $\zeta\omega_n$ 。 $\zeta\omega_n$ 大则衰减速度快。
- 初始相角由阻尼比 ζ 决定， $\theta = \arccos \zeta$ 。
- 误差： $e(t) = r(t) - c(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$,
- $t \rightarrow \infty$ 时 $e(t) \rightarrow 0$ 。

三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

【4 无阻尼】 $\zeta = 0$ 时两个特征根为 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

单位阶跃响应为 $c(t) = 1 - \cos \omega_n t, t \geq 0$ 。

此时输出响应曲线如图。

□ 响应曲线特征：

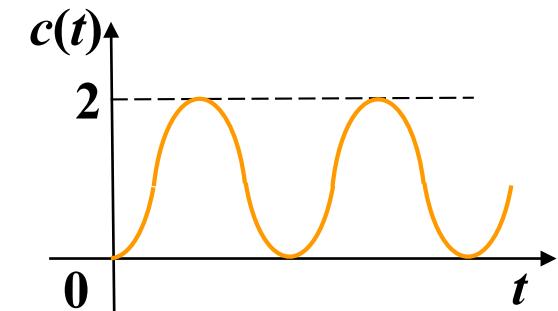
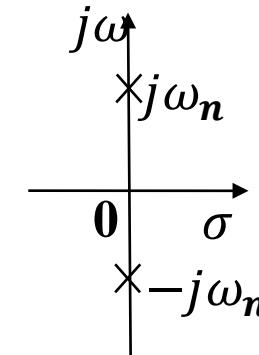
■ 等幅振荡。振荡频率就是无阻尼自然振荡频率 ω_n 。

■ 没有稳态，为临界稳定。

◆ ω_d 与 ω_n 的关系：

ω_d 是欠阻尼时衰减振荡过程的振荡频率。

显然 $\omega_d < \omega_n$ 且随着 ζ 的增大， ω_d 的值减小。



三、二阶系统的时域响应

过阻尼

临界阻尼

欠阻尼

无阻尼

负阻尼

【5 负阻尼】 $\zeta < 0$ 时，系统具有实部为正的极点，输出响应是发散的，此时系统无法正常工作。

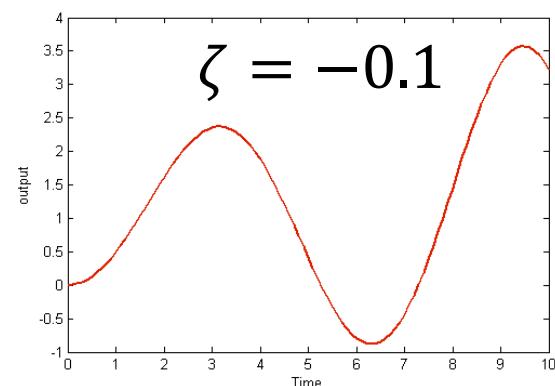
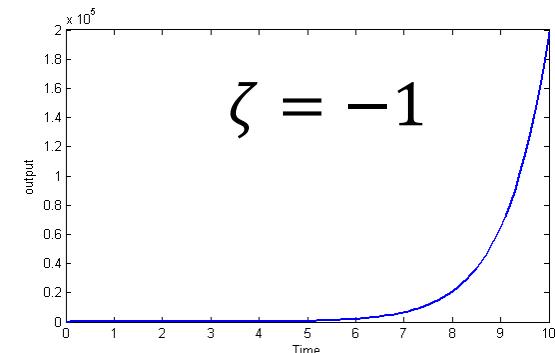
➤ 当 $-1 < \zeta < 0$ 时，系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta),$$

➤ 当 $\zeta \leq -1$ 时，系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}} \right),$$

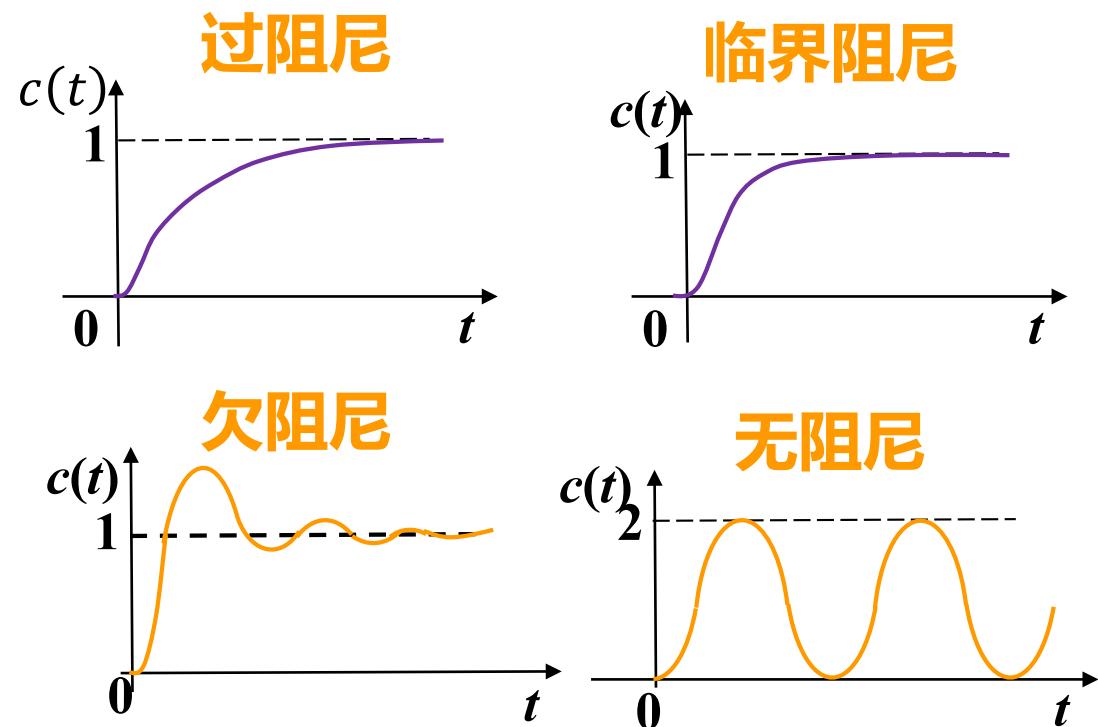
图示是当 $\omega_n = 1$ 时不同阻尼比的单位阶跃响应曲线。



三、二阶系统的时域响应

【总结】

- 从振荡程度看， ζ 越小振荡越厉害； ζ 增大到一定程度时单调上升。
- 从过渡过程时间看，无振荡时，以临界阻尼时过渡过程时间最短。欠阻尼状态的过渡过程时间比临界阻尼时更短。



◆ 结论： ζ 增大，振荡程度减小，过渡过程时间增长。

综合过渡过程时间和振荡程度，一般希望二阶系统工作在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 的欠阻尼状态，此时过渡过程时间和振荡特性均可接受。

工程中常取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

1、**上升时间** t_r ：即单位阶跃响应从0上升到第一个稳态值所需要的时间。

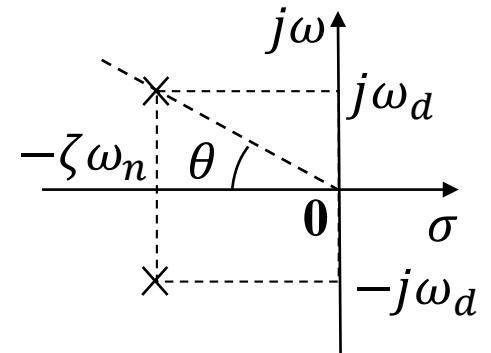
$$\text{令 } c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1,$$

$$\text{则 } \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0,$$

单位阶跃响应第一次到达1时 $\omega_d t_r + \theta = \pi$, ? 能否为 $k\pi$?

因此 $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ 。 **记**

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \theta = \arccos \zeta$$



结论：要使响应速度加快，即减小 t_r ，须使阻尼比 ζ 减小，自然振荡角频率 ω_n 增大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

2、**峰值时间** $\frac{dc(t)}{dt} = 0$ 的时间即为所求。

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\text{令 } \frac{dc(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \zeta \omega_n - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t + \theta) \omega_d = 0$$

$$\text{即 } \sin(\omega_d t + \theta) \zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d t + \theta) = 0, \quad \theta = \arccos \zeta$$

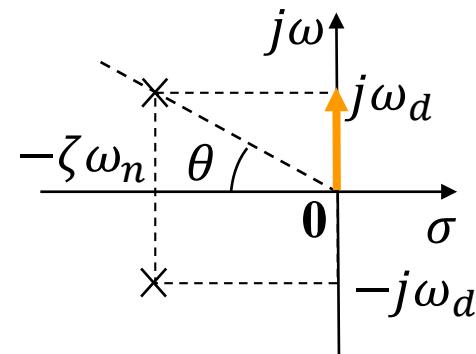
得 $\sin \omega_d t = 0$,

峰值时间是输出到达第一个最大值时对应的时间，

因此令 $\omega_d t = \pi$ 得 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ 。

记

结论：要使响应速度加快，即 t_p 减小，须使阻尼比 ζ 减小，自然振荡角频率 ω_n 增大。



四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

3、**超调量** $\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$

$$c(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(\pi + \theta),$$

由 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = -\sqrt{1 - \zeta^2}$,

得 $c(t_p) = 1 + e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, 而 $c(\infty) = 1$, 则 $\sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%.$

记

结论：超调量只与阻尼比有关。要想超调量减小，需阻尼比 ζ 增大。

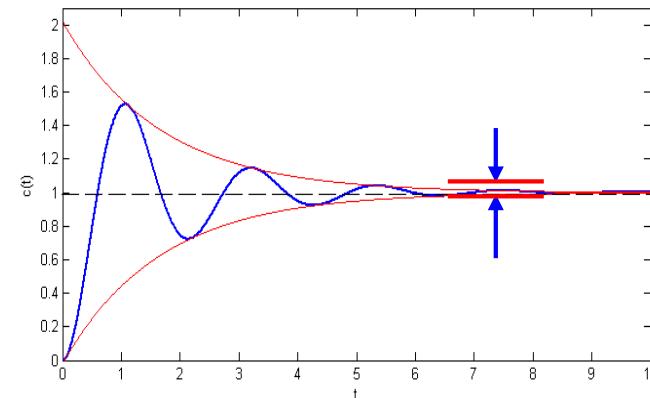
四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

4、调整时间

利用包络线来求。定义上下包络线

$$c_1(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad c_2(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$



➤ 可行性分析：取其中较大者与 $c(t)$ 比较大小。由于

$$c_1(t) - c(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (1 + \sin(\omega_d t + \theta)) \geq 0,$$

因此用包络线来求调整时间，最大误差为一个周期的时间。

➤ 求解：令 $c_1(t) - 1 = \Delta$ ，即 $\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta$ ，则 $t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\zeta^2}}$ 。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln \frac{1}{4\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ 如图所示。}$$

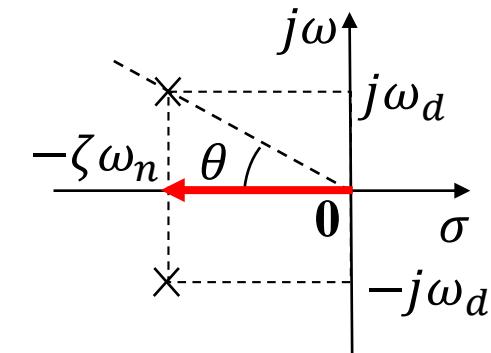
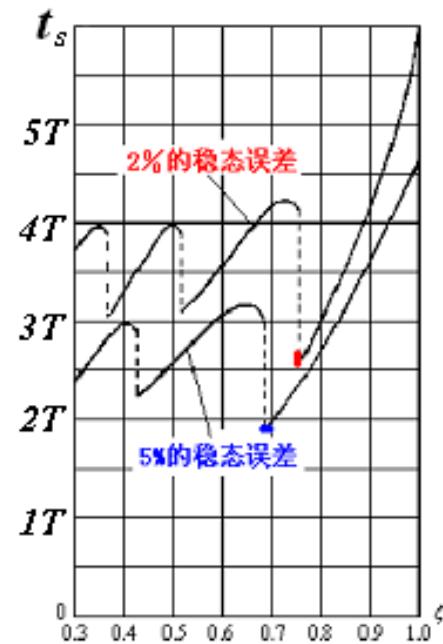
由图知，在 $\zeta=0.69 (\Delta=5\%)$ 或 $\zeta=0.77 (\Delta=2\%)$ 时， t_s 达到最小值。此后随 ζ 的增大几乎线性上升。

工程中常取

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{4}{\zeta \omega_n}, & \Delta = 2\% \\ \frac{3}{\zeta \omega_n}, & \Delta = 5\% \end{cases}$$

记

记



结论：要 t_s 减小，须使阻尼比 ζ 增大，自然振荡角频率 ω_n 增大。

四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

4、调整时间

?可否利用峰值时间来求?

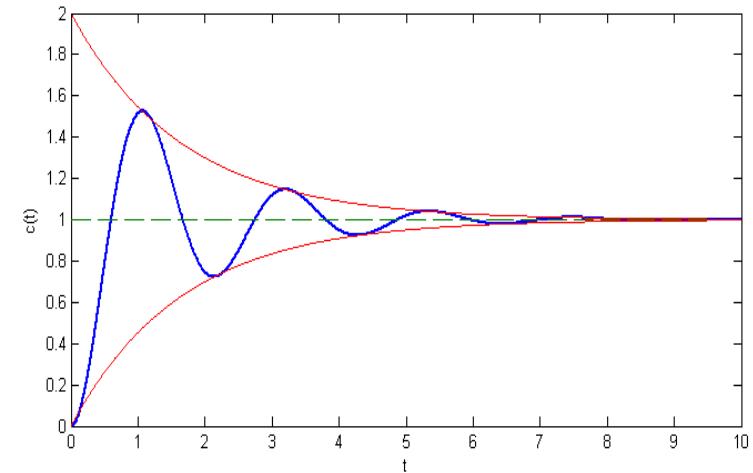
由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ 带入得 $c(t_p) = 1 \pm e^{-\zeta\omega_n t_p}$,

定义光滑曲线 $c_1(t) = 1 + e^{-\zeta\omega_n t}$, $c_2(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}$ 。

令 $c_1 - 1 = \Delta$ 得 $t'_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta}$, 则 $t_s \approx \begin{cases} \frac{4}{\zeta\omega_n}, & \Delta = 2\% \\ \frac{3}{\zeta\omega_n}, & \Delta = 5\% \end{cases}$

➤ 误差分析: 由于 $c_1 - c = e^{-\zeta\omega_n t} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right)$

曲线 $c_1(t)$ 存在小于 $c(t)$ 的值。而包络线求出的 t_s 比真实值大。



四、欠阻尼系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta), t \geq 0,$$

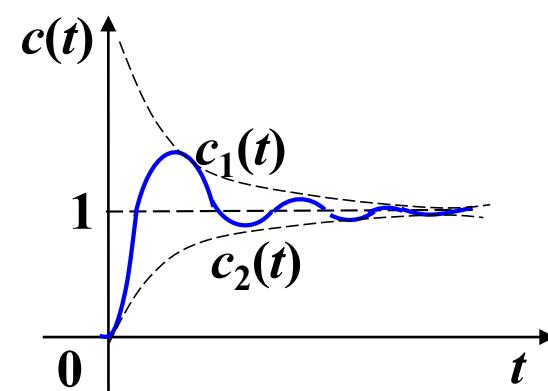
5. 振荡次数 N : 在调节时间内响应曲线穿越其稳态值次数的一半。

响应曲线振荡周期为 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$,

由 $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$, $\Delta=2\%$ 或 $\frac{3}{\zeta\omega_n}$, $\Delta=5\%$

则振荡次数 $N = \frac{t_s}{T_d} \approx \begin{cases} \frac{4\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}, & \Delta=2\%, \\ \frac{3\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}, & \Delta=5\%. \end{cases}$

结论: 振荡次数 N 只与阻尼比 ζ 有关, ζ 越大, 振荡次数越小。



四、欠阻尼系统的性能指标

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5\%$$

【总结】

- 当 ω_n 一定时，要减小 t_r 和 t_p ，须减少 ζ ；而要减小 t_s ，须使 ζ 增大，即响应初期速度与总体响应速度相互矛盾。
- 当 ζ 一定时，增大 ω_n 可使 t_r 、 t_p 和 t_s 都减少，提高快速性。
- σ_p 和 N 只取决于 ζ 。 ζ 越小， σ_p 越大，振荡次数 N 越大。

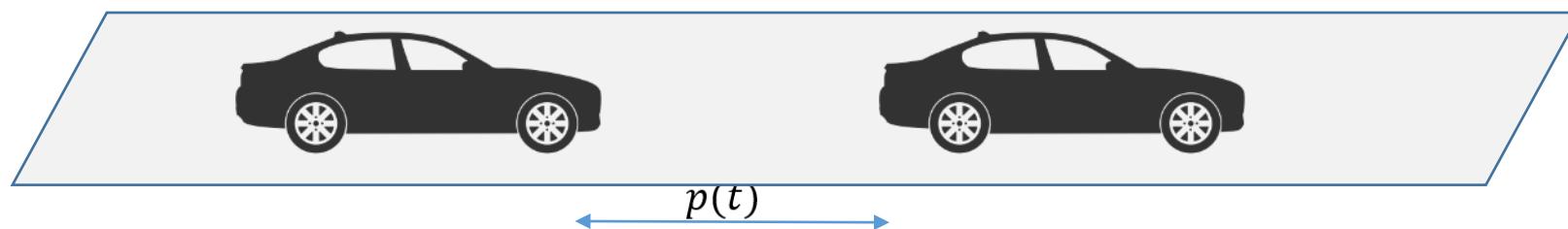
在设计控制系统时，一般根据 σ_p 的要求选择 ζ 的值（一般 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ ）。再调节 ω_n 来满足时间指标要求。

？其他阻尼下系统的动态性能指标能否套用欠阻尼的公式？

四、欠阻尼系统的性能指标

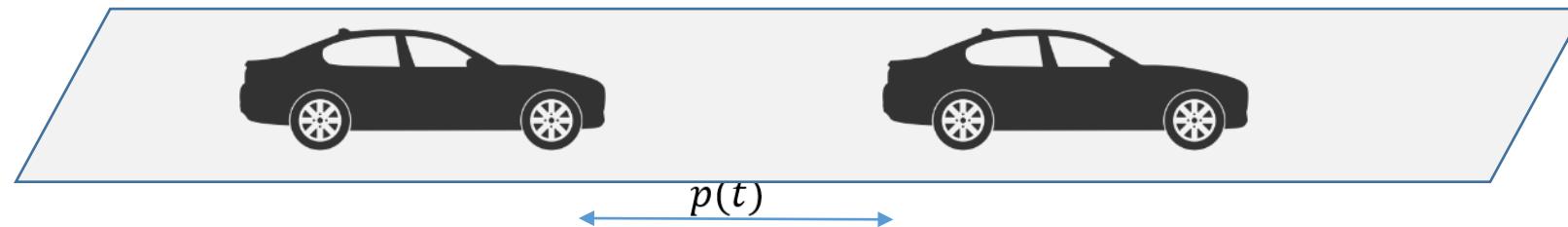
【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为 v^* (m/s)，与前车的相对初始位移为10米，前车按照 v^* (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度 $v(t)$ 和相对距离 $p(t)$ 。请设计后车加速度 $u(t)$ 实现车辆跟驰，且与前车**保持相对距离致5 m**，同时

- 1) 车辆跟驰动态过程中，相对距离不能小于4.5 m；
- 2) 要求调节时间 $t_s \leq 2$ 秒($\Delta = 2\%$)。



四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为 v^* (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照 v^* (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度 $v(t)$ 和相对距离 $p(t)$ 。请设计后车加速度 $u(t)$ 实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时



$$\text{设 } y(t) = 10 - p(t), x(t) = v(t) - v^*, y(0) = 0, x(0) = 0$$

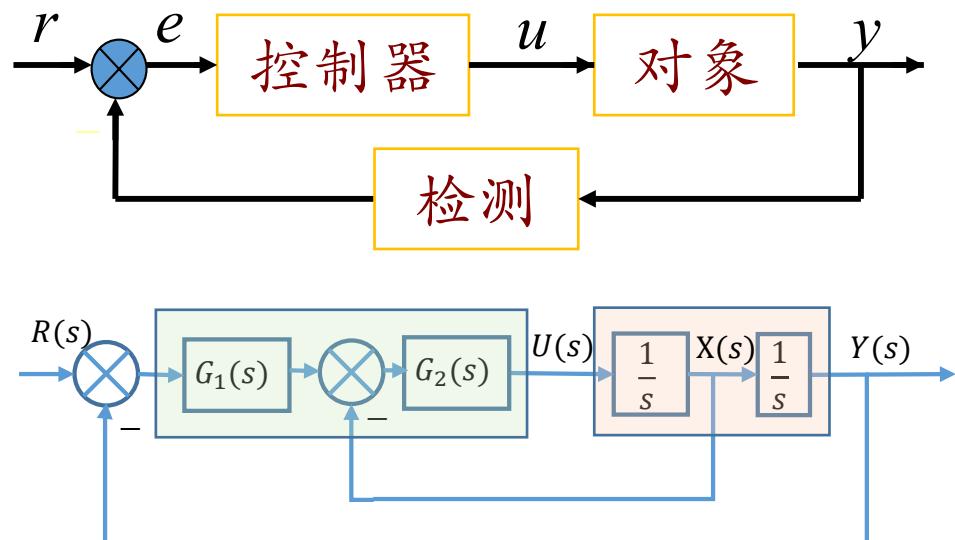
求导

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -\dot{p}(t) = v(t) - v^* = x(t) \\ \dot{x}(t) = \dot{v}(t) = u(t) \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{拉式变换}} \quad \begin{cases} sY(s) = X(s) \\ sX(s) = U(s) \end{cases}$$

四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】汽车初始速度为 v^* (m/s)，与前车的相对初始位移为10 米，前车按照 v^* (m/s)的速度匀速行驶。控制器设计过程中可获取汽车的速度 $v(t)$ 和相对距离 $p(t)$ 。请设计后车加速度 $u(t)$ 实现车辆跟驰，且与前车保持相对距离致5 m，同时

设 $y(t) = 10 - p(t)$, $x(t) = v(t) - v^*$



期望输出: $y_{ref} = 10 - 5 = 5$

参考输入: $r(t) = 5l(t)$

最大超调量:

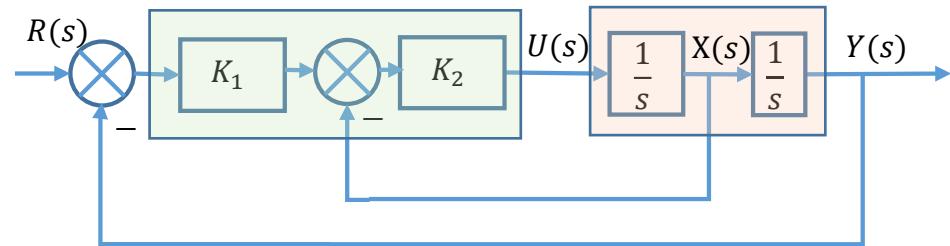
$$\sigma_p \leq \frac{(10-4.5)-5}{5} \times 100\% = 10\%$$

调节时间: $t_s \leq 2$ s

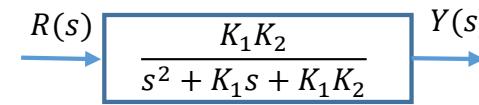
$$G_1(s) = K_1 \quad G_2(s) = K_2$$

如何结合欠阻尼二阶系统性能指标设计控制器参数 K_1 和 K_2 呢？

四、欠阻尼系统的性能指标



结构图
化简



最大超调量: $\sigma_p \leq 10\%$

$$\begin{cases} \sigma_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.1 \\ t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 2 \end{cases}$$

调节时间: $t_s \leq 2$ s

$$\rightarrow \begin{cases} \xi \geq 0.59 \\ \xi\omega_n \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xi = 0.7 \\ \omega_n = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_2 = 4.2 \\ K_1 = 2.2 \end{cases}$$

控制器: S域 $U(S) = K_2(K_1(R(s) - Y(s)) - X(s))$

时域 $u(t) = 4.2 \times (2.2 \times (5l(t) - y(t)) - x(t))$

$v(t) - v^*$

$10 - p(t)$

四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】 仿真算例1：控制参数 $K_1 = 4, K_2 = 3$

四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】 仿真算例2：控制参数 $K_1 = 2.2, K_2 = 4.2$

The screenshot shows a Python development environment with two main panes. The left pane displays the source code for a file named `CarEnvironment.py`. The right pane shows the execution of this code in a Jupyter notebook, with the output console showing repeated messages about the initial distance between the front and rear cars.

```
# 检测事件发生，先把事件全部拿过来，再看发生的是哪一件事。
for event in pygame.event.get():
    # 检测关闭按钮或点击的事件
    if event.type == pygame.QUIT or (
        event.type == KEYDOWN and (
            event.key == K_ESCAPE or event.key == K_q
        )):
        # 如果按下屏幕右上方的X号就会退出
        print(event)
        pygame.quit()
        exit()

# 背景精灵绘制
Background_sprites.draw(screen)
Background_sprites.drawtexts()

# 车辆精灵绘制
Car_sprites.draw(screen)
Car_sprites.speedx = 0

# 计算误差
error = (Car_sprites.speedx - Car_sprites.Follow.speedx)*0.6
# error = (Car_sprites.x - Car_sprites.Follow.x-1000)/1000
Car_sprites.Follow.speedx = error*1*error*3
if pygame.time.get_ticks()>3000:
    error = (Car_sprites.Follow.speedx-(Car_sprites.speedx))*1.2
    error = (Car_sprites.x - Car_sprites.Follow.x)/100
    y = 10 - error
    state = state+(4.2*(2.2*(5-y)-error))/120
    state = state+(4.2*(2.2*(5-y)-error))/120
    Car_sprites.Follow.speedx = state

p_store[count,0] = (pygame.time.get_ticks()-3000)/1000
p_store[count,1] = error
count = count + 1
print('前车距离: '+str(round(error,3))+'米')

# 车辆精灵更新
Car_sprites.Follow.speedx = 1
Car_sprites.Front.draw(screen)

if pygame.time.get_ticks()>7000 and flag == 1:
    plt.plot(p_store[1:count-1,0], p_store[1:count-1,1], linestyle='--')
    plt.grid()
    plt.plot(p_store[1:count-1,0], np.ones(count-2)*4.5, linestyle='--', color='r')
    plt.xlim([0,4])
    plt.ylim([0,16])
    plt.xlabel('时间(s)')
    plt.ylabel('相对距离(m)')
    plt.savefig('curve.jpg', dpi = 600)
    flag = 0

# 更新
Car_sprites.update()
Car_sprites.Follow.update()
Car_sprites.Front.update()
Background_sprites.update()
pygame.display.update()

# 检测事件发生，先把事件全部拿过来，再看发生的是哪一件事。
for event in pygame.event.get():
    # 检测关闭按钮或点击的事件
    if event.type == pygame.QUIT or (
        event.type == KEYDOWN and (
            event.key == K_ESCAPE or event.key == K_q
        )):
        # 如果按下屏幕右上方的X号就会退出
        print(event)
        pygame.quit()
        exit()
```

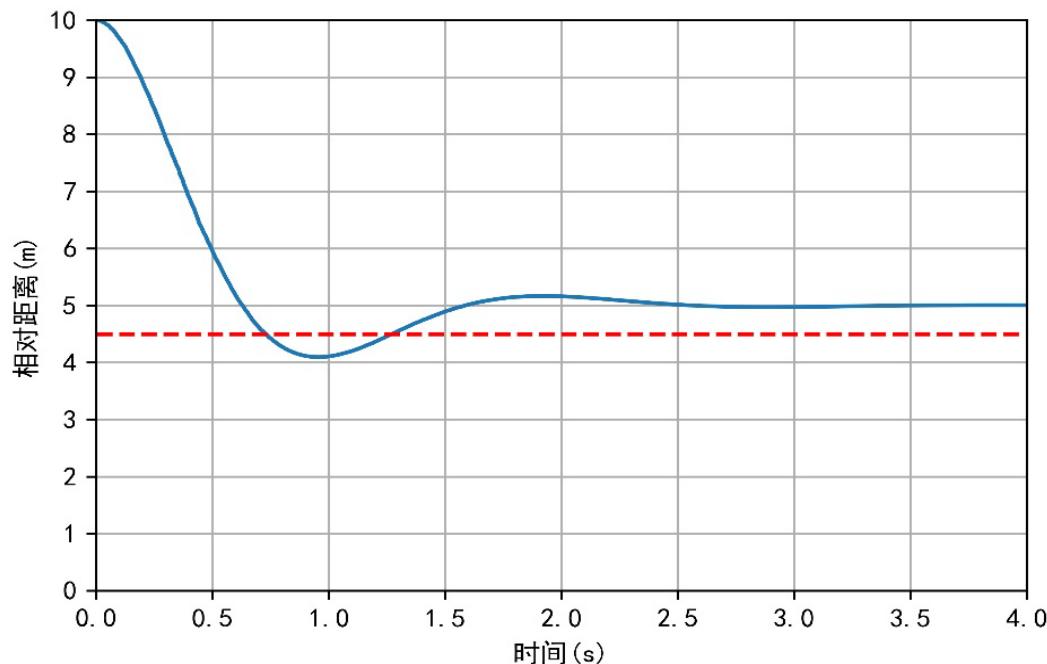
In [11]:

```
前车距离: 5.0米
<event(256-Quit {})>
```

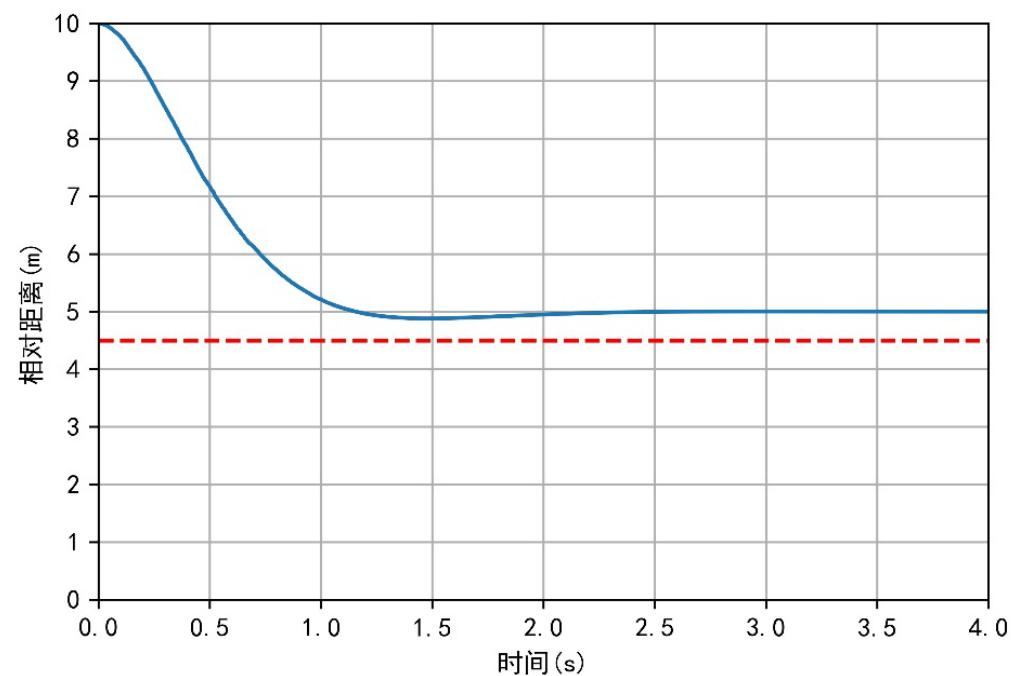
四、欠阻尼系统的性能指标

【案例：车辆跟驰】

算例1：参数 $K_1 = 4$ $K_2 = 3$



算例2：参数 $K_1 = 2.2$ $K_2 = 4.2$



- 算例1的相对距离超过警戒线，调节时间超过2秒
- 算例2的相对距离并未超过警戒线，调节时间在2秒之内

思考：如果后车的初始速度不为 v^* 的时候，该如何设计呢？

- 控制系统的暂态性能：
 - 暂态性能指标：7个
 - 一阶系统的性能指标
 - 二阶系统的性能指标
 - 案例：车辆跟驰控制
- 作业：
 - 作业3.3和3.5
- 大作业：

第一问：如何设计控制器？使得轮式机器人俯仰角在 0.2 rad 的偏置下，1秒内稳定到平衡点 $\pm 0.01 \text{ rad}$ 附近。