华中科技大学人工智能与自动化学院 2021～2022 学年第二学期“运筹学（一）”考试试卷 A 卷

考试方式: 闭卷　**考试日期:** 2023 年 06 月 26 日　**考试时长:** 150 分钟

专业班级：________ 学　号：________ 姓　名：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

分　数	
评卷人	

一、（20 分）请用单纯形方法求解如下线性规划问题：

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 \leq 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解答：（1）原问题的标准化问题为，

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

。。。（3 分）

（2）构建初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			3	-1	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1	0	1
0	x_5	1	(2)	0	3	0	1	(1/2)
$c_j - z_j$			(7/2)	0	3/2	-1	0	
-1	x_2	1/4	0	1	-1/4	-1	-1/4	
3	x_1	1/2	1	0	3/2	0	1/2	
$c_j - z_j$			0	0	-15/4	-1	-7/4	

初始单纯形表。。。（7 分）

调整。。。（8 分）

（3）得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到原问题最优解，

x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=0。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（2 分）

大 M 方法解答

（1） 原问题的标准化问题为，

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad = 1 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 \qquad + x_5 \ = 1 \\ \qquad x_i \geq 0, i = 1,2,...,5 \end{cases}$$

。。。（2 分）

（2） 添加人工变量 x_6 和任意大的正数 M，构造原问题对应的大 M 法问题

$$\max z' = 3x_1 - x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \qquad + x_6 = 1 \\ 2x_1 \quad + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad = 1 \\ \qquad x_i \geq 0, i = 1,2,...,6 \end{cases}$$

。。。（1 分）

（3） 构建大 M 法问题初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			3	-1	1	0	0	-M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_6	1	1	(2)	1	-1	0	1	
0	x_5	1	2	0	3	0	1	0	
$c_j - z_j$			3+M	(-1+2M)	1+M	-M	0	0	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1/2	0	1/2	1
0	x_5	1	(2)	0	3	0	1	0	(1/2)
$c_j - z_j$			(7/2)	0	3/2	-1/2	0	1/2-M	
-1	x_2	1/4	0	1	-1/4	-1/2	-1/4	1/2	
3	x_1	1/2	1	0	3/2	0	1/2	0	
$c_j - z_j$			0	0	-15/4	-1/2	-7/4	1/2-M	

初始单纯形表。。。（7 分）

调整。。。（8 分）

（4） 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到大 M 法问题最优解。又大 M 法问题最优解中所有人工变量都为非基变量，因此得到原问题最优解，x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=0。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（2 分）

二阶段法解答

（1） 原问题的标准化问题为，

$$\max z = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$ 。。。（**2** 分）

（2） 添加人工变量 x_6，构造原问题对应的第一阶段法问题

$$\max z' = -x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,6 \end{cases}$$ 。。。（**1** 分）

（3） 构建第一阶段问题初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \to$			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	-1	**θ**
C_B	X_B	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	x_6	**1**	**1**	**(2)**	**1**	**-1**	**0**	**1**	
0	x_5	**1**	**2**	**0**	**3**	**0**	**1**	**0**	
$c_j - z_j$			**1**	**(2)**	**1**	**-1**	**0**	**0**	
-1	x_2	**1/2**	**1/2**	**1**	**1/2**	**-1/2**	**0**	**1/2**	
0	x_5	**1**	**2**	**0**	**3**	**0**	**1**	**0**	
$c_j - z_j$			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到第一阶段问题最优解。又第一阶段问题最优解中所有人工变量都为非基变量，因此可根据第一阶段问题的最后一个单纯形表构造第二阶段初始单纯形表.

第一阶段问题初始单纯形表。。。（**4** 分）

调整。。。（3 分）

（4） 构建第二阶段初始问题单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			3	-1	1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1/2	0	1
0	x_5	1	(2)	0	3	0	1	(1/2)
$c_j - z_j$			(7/2)	0	3/2	-1/2	0	
-1	x_2	1/4	0	1	-1/4	-1/2	-1/4	
3	x_1	1/2	1	0	3/2	0	1/2	
$c_j - z_j$			0	0	-15/4	-1/2	-7/4	

第二阶段问题初始单纯形表。。。（4 分）

调整。。。（4 分）

（5） 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到第二阶段问题最优解。因此原问题最优解为，x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=0。最优值为 max Z = 5/4。

。。。（2 分）

分　数	
评卷人	

二、(**15** 分)现有如下生产计划问题，需要决定 I 和 II 两种产品的产量。生产一单位产品 I 可得 4 分，一单位产品 II 可得 5 分。生产产品 I 需要消耗 1.5 单位的水晶，3 单位的天然气；产品 II 需要消耗 2 单位水晶和 3 单位的天然气。现有储存水晶 20 单位，天然气 35 单位。生产计划模型和单纯形计算表终表分别如下所示：

$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 1.5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 35 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$C_j \rightarrow$			4	5	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_1	20/3	1	0	-2	$4/3$
5	x_2	5	0	1	2	-1
			0	0	-2	$-1/3$

试问：

(1)　水晶和天然气的每单位影子价格分别是多少？(3 分)

(2)　求保持当前最优基不改变的水晶储存量的范围和保持当前最优解不改变的产品 II 的得分变化范围。(6 分)

(3)　后勤官将水晶存储量增加到了 25，并将产品 II 的得分调整到了 6 分，根据灵敏度分析方法重新计算最优生产方案。(6 分)

解答：(1) 由单纯形计算表终表可知，水晶和天然气的每单位影子价格分别是 2 分和（1/3）分。
（2）由单纯形计算表终表可知，

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 4/3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

因此，保持当前最优基不改变的水晶储存量的变化量Δb_1应满足，

$$0\le B^{-1}\left(b+\begin{pmatrix}\Delta b_1\\ 0\end{pmatrix}\right)=B^{-1}b+B^{-1}\begin{pmatrix}\Delta b_1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}20/3\\ 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4/3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta b_1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}20/3-2\Delta b_1\\ 5+2\Delta b_1\end{pmatrix}$$

所以，Δb_1应满足，

$$-5/2\ \le\Delta b_1\le 10/3$$

于是，保持当前最优基不改变的水晶储存量的范围为[35/2,70/3]。
另外，由单纯形计算表终表可知，保持当前最优解不改变的产品 II 的得分的变化量Δc_2应满足，

$C_j \rightarrow$			4	$5+\Delta c_2$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_1	20/3	1	0	-2	$4/3$
5	x_2	5	0	1	2	-1
			0	Δc_2	-2	$-1/3$

$C_j \rightarrow$			4	$5+\Delta c_2$	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_1	20/3	1	0	-2	$4/3$
5	x_2	5	0	1	2	-1
			0	0	$-2-2\Delta c_2$	$-1/3+\Delta c_2$

$$-2-2\Delta c_2\le 0 \text{ 且 } -1/3+\Delta c_2\le 0\text{。}$$

因此，Δc_2应满足，

$$-1 \le \Delta c_2 \le 1/3$$

于是，保持当前最优解不改变的产品 II 的得分变化范围为，

$$4 \le c_2 \le 16/3$$

（4） 后勤官将水晶存储量增加到了 25，并将产品 II 的得分调整到了 6 分。两种调整都超出了保持当前最优基的相应变化范围，需要在单纯形计算表终表的基础上继续计算。

水晶存储量增加到了 25 后，单纯形计算表终表中的等号右端项将变化为，

$$B^{-1}\begin{pmatrix}25\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4/3\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10/3\\15\end{pmatrix}$$

产品 II 的得分调整到了 6 分后，单纯形计算表终表中的检验数将变化为，

$$C-C_BB^{-1}A=$$

$$\begin{pmatrix}4 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 4/3\\0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 2/3\end{pmatrix}$$

综合后，单纯形计算表终表将变化为，

$C_j \to$			4	6	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
4	x_1	-10/3	1	0	-2	$4/3$
6	x_2	15	0	1	2	-1
			0	0	-4	$2/3$

将变化后的表中等号右端项化为可行解后，有

$C_j \to$			4	6	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	5/3	-1/2	0	1	$-2/3$
6	x_2	$35/3$	1	1	0	$1/3$
			-2	0	0	-2

重新计算后的最优生产方案为，产品 I 生产(5/3)单位，产品 II 生产(35/3)单位，最优得分为 0*(5/3)+6*(35/3) = 70 (分)。

分　数	
评卷人	

三、（15 分）已知如下最小化问题：

$$\min\omega = 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 + 2y_6$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - \dfrac{1}{4}y_4 + y_5 - y_6 \geq 1 \\ y_1 + \dfrac{1}{4}y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 \geq 1 \\ y_i \geq 0, i = 1,2,3,4,6,\ y_5 \leq 0 \end{cases}$$

试回答下列问题：

1） 写出该问题的对偶问题，目标函数符号为 z，决策变量用 x 表示（5 分）

2） 已知该问题的对偶问题最优解为 $x_1^* = \dfrac{2}{3}, x_2^* = \dfrac{4}{3}$， 试用互补松弛性原理求原最小化问题的最优解。（10 分）

解答：1）将最小化问题标准化为，

$$\min \omega = 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 - y_5^{'} + 2y_6$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - \frac{1}{4}y_4 - y_5^{'} - y_6 \geq 1 \\ y_1 + \frac{1}{4}y_2 - y_3 - y_4 - y_5^{'} + y_6 \geq \frac{1}{3} \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5^{'}, y_6 \geq 0 \end{cases}$$

因此，该问题的对偶问题为，

$$\max z = x_1 + \frac{1}{3}x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2）因对偶问题最优解为$x_1^* = \frac{2}{3}, x_2^* = \frac{4}{3}$，由互补松弛性知，标准化问题得到最优解时的 2 个约束都是等式约束。

另外，将对偶问题最优解$x_1^* = \frac{2}{3}, x_2^* = \frac{4}{3}$分别带入对偶问题的 6 个约束知，$x_{s3}$>0, x_{s4}>0，x_{s5}>0，x_{s6}>0，第 3 至第 6 个约束都是严格不等式约束。因此，由互补松弛性知，标准化问题最优解中$0 = y_3 = y_4 = y_5^{'} = y_6$。

于是，标准化问题最优解应满足，

$$s.t.\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + \frac{1}{4} y_2 = \frac{1}{3} \\ y_1, y_2 \geq 0, y_3 = y_4 = y_5' = y_6 = 0 \end{cases}$$

解得，

$$y_1 = \frac{1}{9}, y_2 = \frac{8}{9}，\ 0 = y_3 = y_4 = y_5' = y_6。$$

因此，原最小化问题的最优解为，

$$y_1 = \frac{1}{9}, y_2 = \frac{8}{9}，\ 0 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6，$$

最优值为， $\omega = \frac{10}{9}$。

分　数	
评卷人	

四、（15 分）某市准备在下一年度预算中购置一批救护车,已知每辆救护车购置价为 20 万元。救护车用于所属的两个郊区县,各分配x_a台和x_b台。a 县救护站从接到电话到救护车出动的响应时间为$40-3x_a$分钟，b 县相应的响应时间为$50-4x_b$分钟。该市确定如下优先级目标：

P1：用于救护车购置费用不超过 400 万元;
P2：a 县的响应时间不超过 5 分钟;
P3：b 县的响应时间不超过 5 分钟。

试问：
建立目标规划模型
若对优先级目标做出调整，P2 变 P1，P3 变 P2，P1 变 P3，重新建立模型。

解答：设非负的偏移变量为b_i^+和b_i^-，i=1,2,3。

（1）目标规划模型为，

$$\min z = P_1\left(d_1^+\right) + P_2\left(d_2^+\right) + P_3\left(d_3^+\right)$$

$$s.t.\begin{cases} 20x_a + 20x_b + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ -3x_a + d_2^- - d_2^+ = -35 \\ -4x_b + d_3^- - d_3^+ = -45 \\ x_a, x_b, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

（2）优先级调整后，目标规划模型为，

$$\min z = P_1\left(d_1^+\right) + P_2\left(d_2^+\right) + P_3\left(d_3^+\right)$$

$$s.t.\begin{cases} -3x_a + d_1^- - d_1^+ = -35 \\ -4x_b + d_2^- - d_2^+ = -45 \\ 20x_a + 20x_b + d_3^- - d_3^+ = 400 \\ x_a, x_b, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

分　数	
评卷人	

五、（**20** 分）由编号为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的三个产地提供产品给编号为 **A,B,C,D** 的四个销地。各个产地的产量、各个销地的销量、以及产销地之间产品的单位运价如下表所示：

产地 \ 销地	A	B	C	D	产量
I	2	3	4	1	10
II	7	9	11	3	22
III	8	5	7	7	12
销量	16	10	14	14	

请确定调运方案，尽量满足各个销地的产品供应同时使得总的运输成本最低，并求出最省的运输成本。

解答：（1）原问题不是产销平衡问题，通过增加一个虚拟产地 **IV** 使之化为如下产销平衡问题。

销地 产地	A	B	C	D	产量
I	2	3	4	1	10
II	7	9	11	3	22
III	8	5	7	7	12
IV	0	0	0	0	10
销量	16	10	14	14	

设 $x_{ij} \geq 0$，i, j=1, 2, 3, 4. 表示从第 i 个产地运往第 j 个销地的运量。

（2）由 Vogel 法确定初始解。

Vogel 表	A	B	C	D	行差
I	2	3	4	1	1
II	7	9	*11*	3	4,2,4
III	8	5	7	7	2,1,1
IV	0	0	0	0	0
列差	2, 5,1	3,2,4	4,3,4	1,2,4	

（step1,最大行差列差为 4，在第 2 行和第 3 列中选运价最低的 $x_{43}=10$, 划去第 4 行。

step2, 最大行差列差为 5，在第 1 列中选运价最低的 $x_{11}=10$, 划去第 1 行。

step3,最大行差列差为 4，在第 2 行和第 2、3、4 列中选运价最低的 $x_{24}=14$, 划去第 4 列。

step4,最大行差列差为 4，在第 2、3 列中选运价最低的 $x_{32}=10$, 划去第 2 列。

step5, 最大行差列差为 4，在第 2 行和第 3 列中选运价最低且下标靠前的 $x_{21}=6$, 划去第 1 列。

Step6, 在第 3 列中选运价最低的 $x_{33}=2$, step7, 在最后一处选 $x_{23}=2$ 。共 4+4−1=7 个数字）

初始解	A	B	C	D	产量
I	10				10
II	6		*2*	14	22
III		10	2		12
IV			10		10
销量	16	10	14	14	

（4） 通过位势法进行优性检验。

（选数字最多且下标最靠前的第 2 行对应的位势为 0）

位势表	A	B	C	D	u_i
I	2				-5
II	7		11	3	0
III		5	7		-4
IV			0		-11
v_j	7	9	11	3	

（检验数=$C_{ij}-u_i-v_j$）

检验数表	A	B	C	D	u_i
I	0	-1	-2	3	-5
II	0	0	0	0	0
III	5	0	0	8	-4
IV	4	2	0	8	-11
v_j	7	9	11	3	

第 1 行第 3 列检验数为负且最小，说明将第 1 行第 3 列元素为换入基变量后总运价还会下降，当前解并非最优解。

（5）　通过闭回路法换基。

换基	A	B	C	D	产量
I	8		2		10
II	8			14	22
III		10	2		12
IV			10		10
销量	16	10	14	14	

（6）　位势法优性检验。

（选数字最多的第 3 列对应的位势为 0）

位势表	A	B	C	D	u_i
I	2		4		4
II	7			3	9
III		5	7		7
IV			0		0
v_j	-2	-2	0	-6	

（检验数=C_{ij} - $u_i - v_j$ ）

检验数表	A	B	C	D	u_i
I	0	1	0	3	-5
II	0	2	2	0	0
III	3	0	0	6	-4
IV	2	2	0	6	-3
v_j	7	9	11	3	

所有检验数均非负，说明已找到最优解。又，所有非基解的检验数均为正，说明找到了唯一的最优解。

（7） 得到最优解。

因此，最优调配方案为，

$x_{11}=8, x_{13}=2, x_{21}=8, x_{24}=14, x_{32}=10, x_{33}=2, x_{43}=10$ 。最省的运输成本为，

Z=8*2+2*4+8*7+14*3+10*5+2*7=186(单位运价)。

分　数	
评卷人	

六、（15 分）考虑一个有 4 个任务和 4 个人员的任务分配问题。每个人员只能被分配到一个任务，每个任务只能由一个人员来完成。已知每个人员完成每个任务所需要的时间，如下表所示：

	任务 1	任务 2	任务 3	任务 4
人员 1	10	2	3	4
人员 2	3	5	2	8
人员 3	1	2	6	5
人员 4	4	3	1	9

请使用指派算法求解该问题，并给出最优任务分配方案和总时间。

解答：

先使得各行各列都有 0.

8	0	1	0
1	3	0	4
0	1	5	2
3	2	0	6

找独立零元。

8	(0)	1	~~0~~
1	3	(0)	4
(0)	1	5	2
3	2	~~0~~	6

独立零元个数不足。

8	(0)	1	0	
1	3	(0)	4	
(0)	1	5	2	
3	2	0	6	

第 2、4 行减去 1，第 3 列加上 1.

8	0	2	0
0	2	0	3
0	1	6	2
2	1	0	5

找独立零元

8	(0)	2	0
0	2	(0)	3
(0)	1	6	2
2	1	0	5

独立零元不足。

8	(0)	2	0	
0	2	(0)	3	
(0)	1	6	2	
2	1	0	5	

第 2、3、4 行减去 1，第 1、3 列加上 1.

9	0	3	0
0	1	0	2
0	0	6	1
2	0	0	4

找独立零元。

9	$\cancel{0}$	3	(0)
(0)	1	$\cancel{0}$	2
$\cancel{0}$	(0)	6	1
2	$\cancel{0}$	(0)	4

4 个独立零元，找到最优分配方案。

人员 1 做任务 4，人员 2 做任务 1，人员 3 做任务 2，人员 4 做任务 3.

总时间为，4+3+2+1=10(时间单位)。