

2024-2025 学年度春季



课程名称：《自动控制原理（一）》

第2讲 控制系统的微分方程模型

课程学时：共56学时

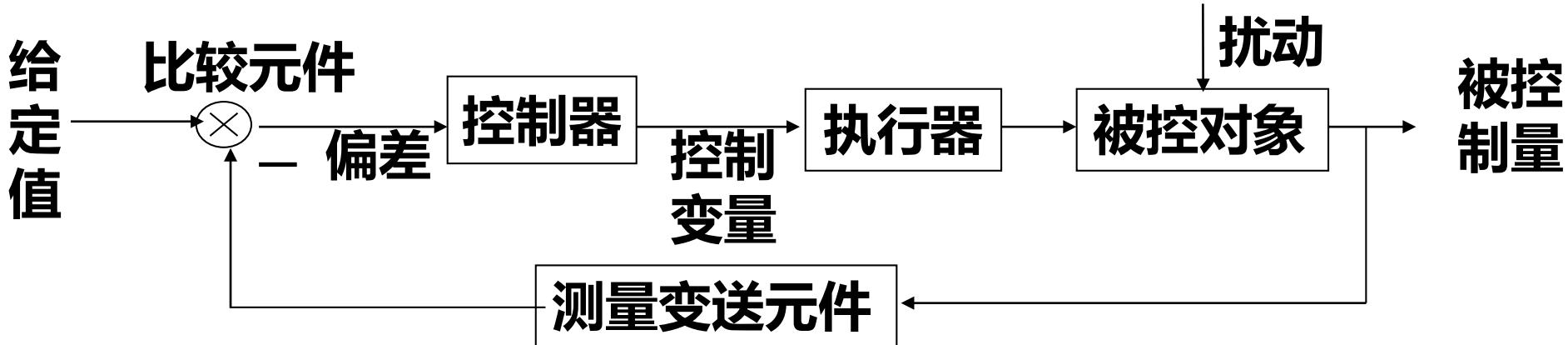
课程性质：专业基础课

学生对象：自动化2305班
(26人)

授课教师：刘骁康

课程目标：掌握自动控制的基本原理、控制系统的建模、性能分析和综合设计方法

■ 自动控制系统的基本架构



■ 自动控制系统的分类

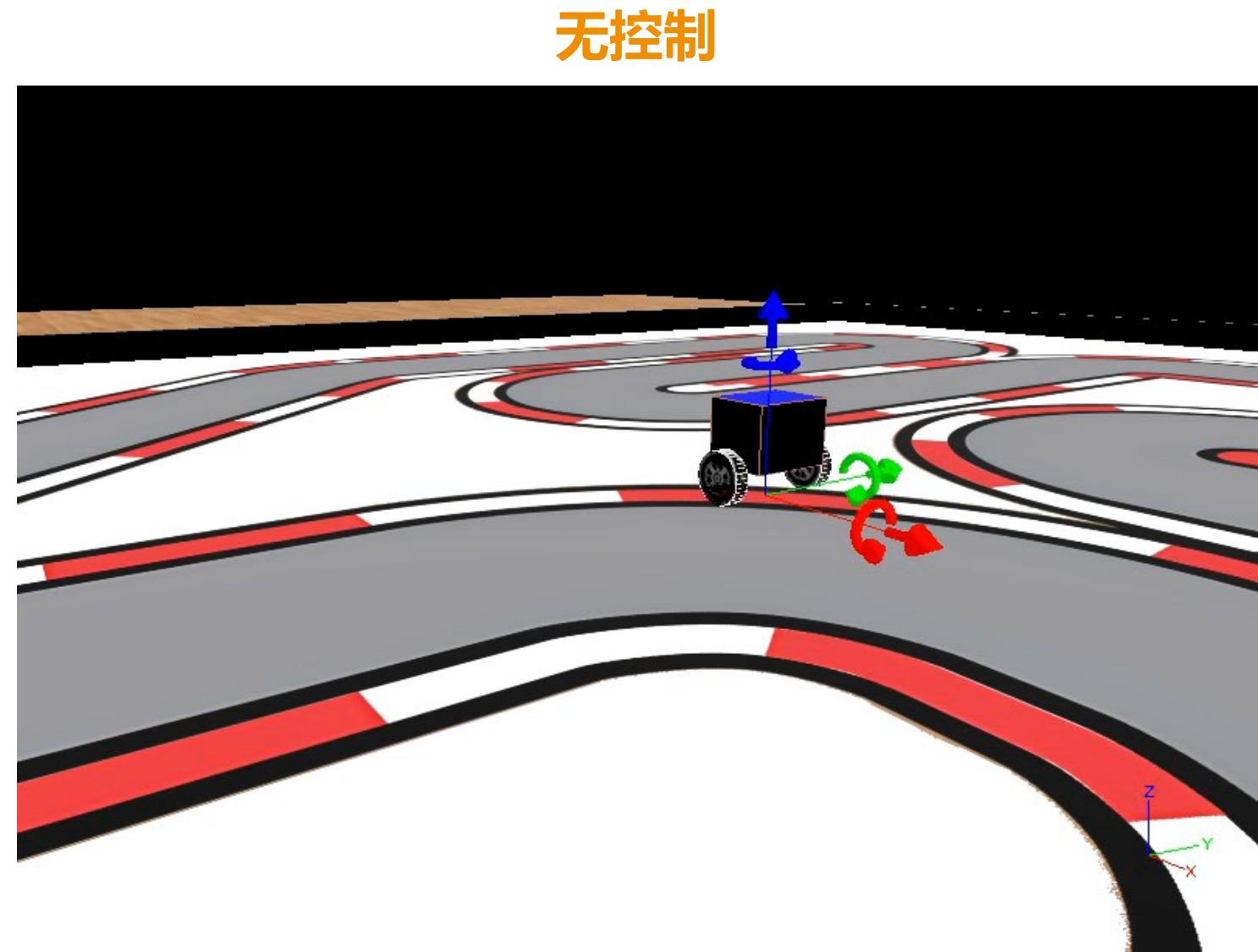
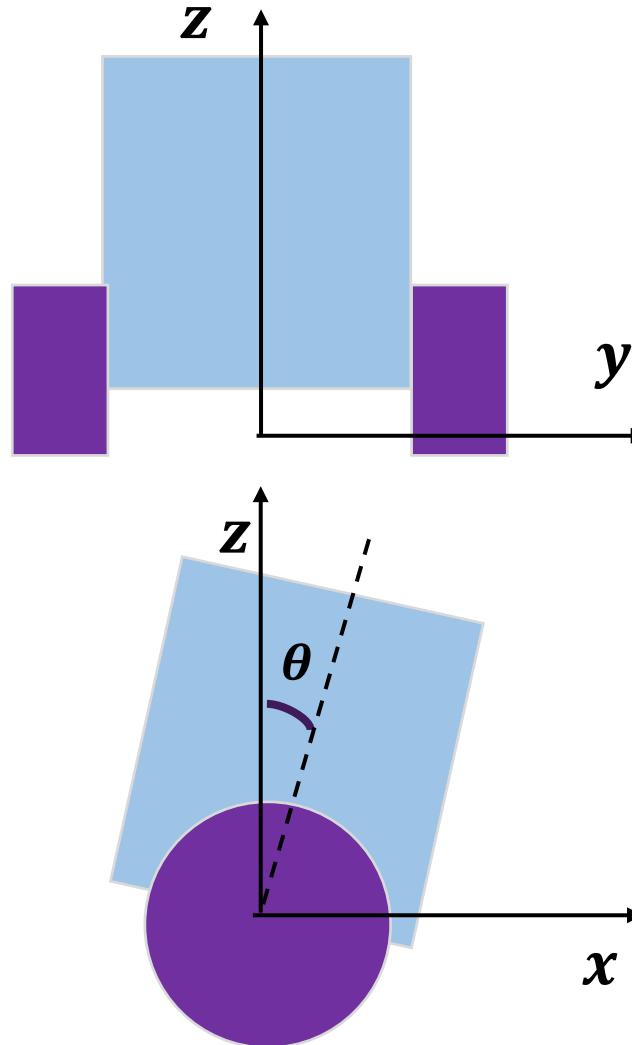
1. 开环控制、闭环控制、复合控制；
2. 恒值控制系统、程序控制系统、随动控制系统；
3. 连续系统、离散系统；
4. 集中参数系统、分布参数系统；
5. SISO系统、MIMO系统；
6. 定长系统、时变系统
7. 线性系统、非线性系统；

■ 控制系统的基本要求

- **稳定性**: 先决条件。
- **动态性能**: 快速性、平稳性。
- **稳态性能**: 稳态误差越小越好。

导入

■ 轮式机器人

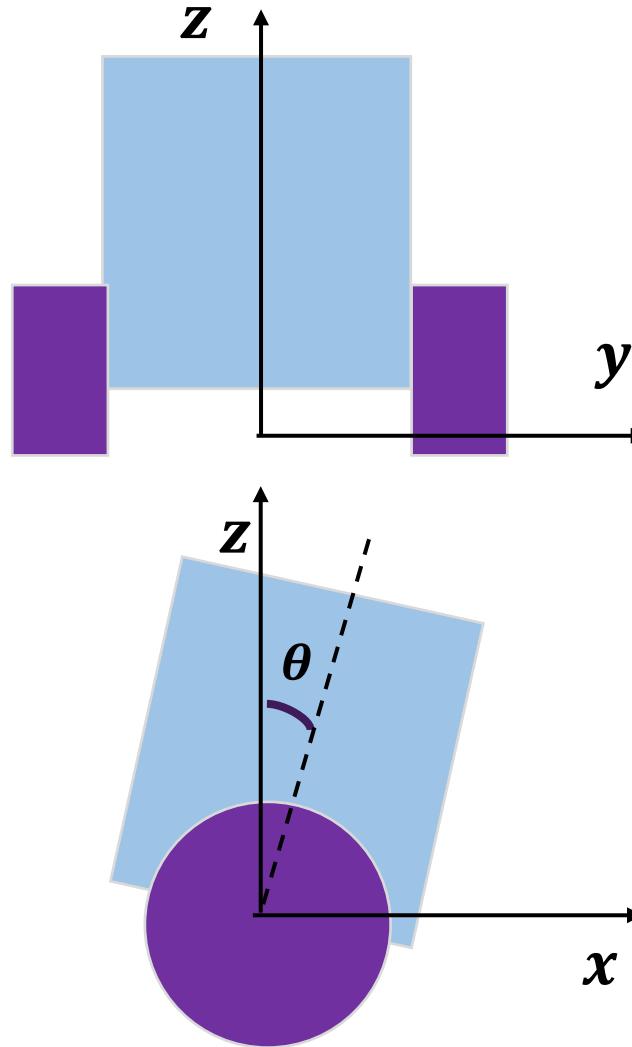


无控制

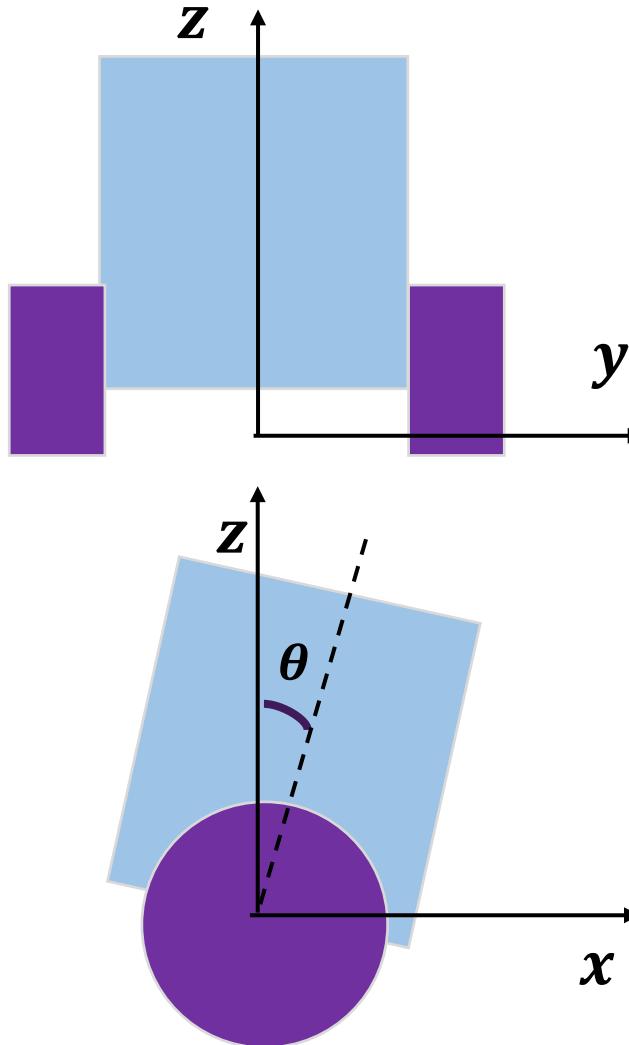
模拟碰撞俯仰角0.1rad

导入

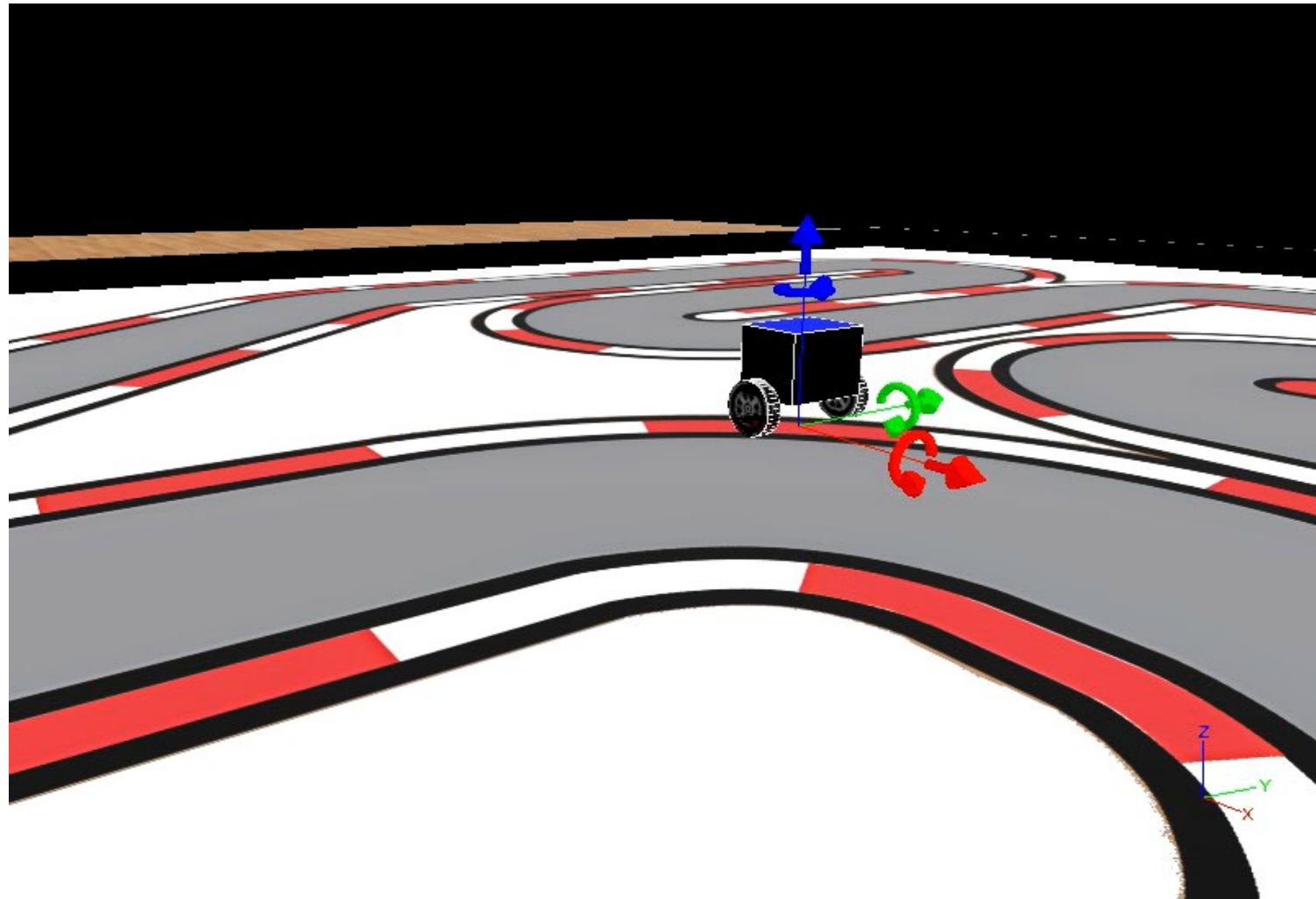
■ 轮式机器人



■ 轮式机器人



如何设置合适的转矩控制力矩呢？



↑ 模拟碰撞俯仰角0.1rad

?什么叫数学模型?

◆**数学模型**: 是描述系统(或环节)的输出变量与输入变量(或内部变量)之间关系的数学表达式。

?为什么要建立系统的数学模型?

以便定量地给出系统中一些变量之间的相互关系。从而对系统进行各种分析和设计，包括稳定性和动态响应的性能分析。

?数学模型有哪些形式?

- 如果只需要反映系统静态关系，就可以用代数方程；
- 如果要表示系统输入和输出之间的动态关系，就可以用微分方程、偏微分方程或差分方程。

？建立数学模型的方法有哪些？

机理建模和实验建模。

• **机理建模**：根据系统的运动学或动力学的规律和机理建立系统的数学表达式。

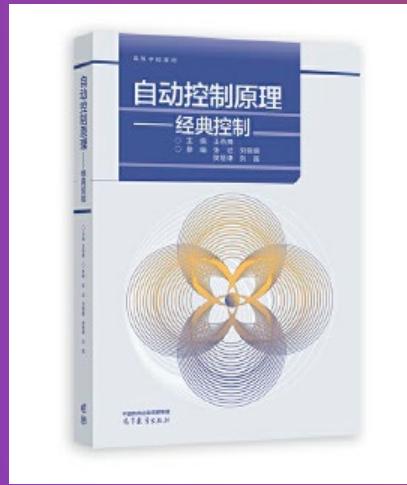
要求已知所有元部件的结构及对应的物理机理。

• **实验建模**：人为地给系统施加某种典型的输入信号，记录下对应的输出响应数据，通过辨识的方法采用适当的数学模型去模拟逼近该过程，所获得的数学模型称为辨识模型。

不需要了解系统内部情况，但不精确。

？建立数学模型应遵循什么原则？

准确性、简化性。



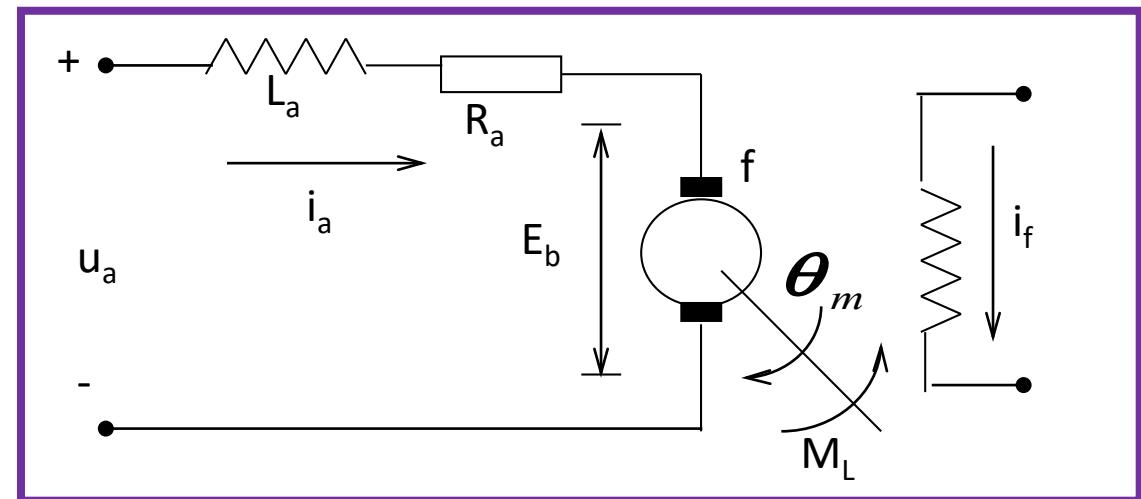
第二章：控制系统的数学模型

第2讲 控制系统的微分方程模型

DE-based Modeling of Control System

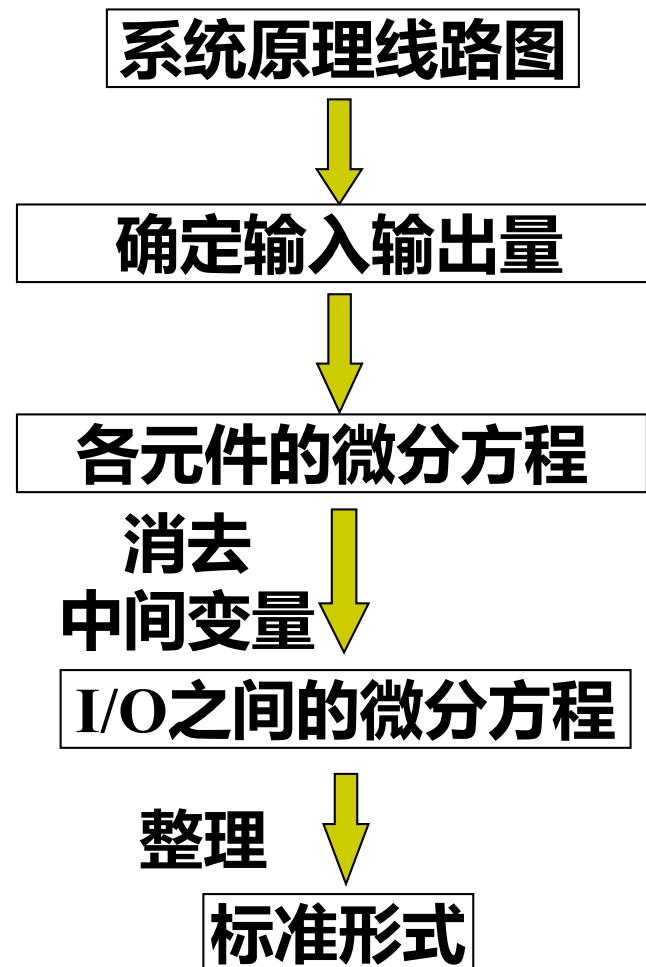
本讲内容

- 一、控制系统的微分方程
- 二、非线性系统的线性化
- 三、案例：轮式机器人平衡动力学分析



一、控制系统的微分方程

■ 建立控制系统微分方程的一般步骤



对任何线性定常系统，假如它的输出为 $c(t)$ ，输入为 $r(t)$ ，则系统微分方程模型的一般形式如下：

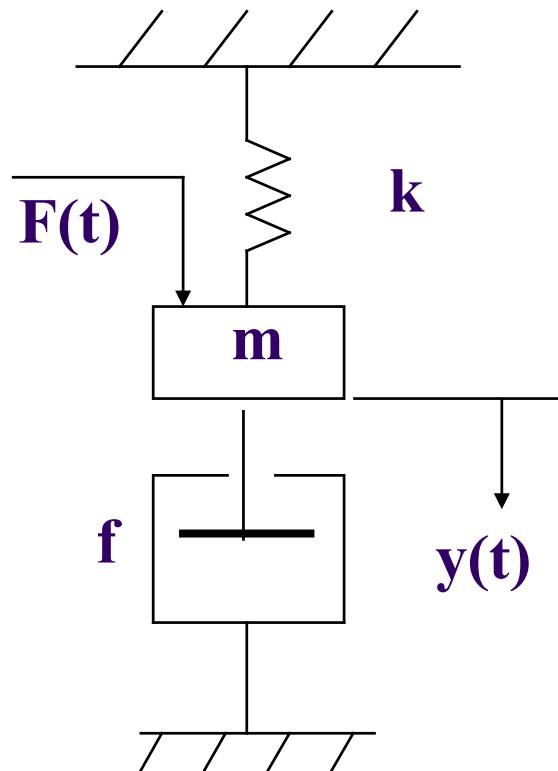
$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

有时将输出的0阶导数项的系数化为1。

对于实际的系统， $n \geq m$ ，而且大多数系统 $n > m$ 。

一、控制系统的微分方程

例1.1：机械位移系统



机械位移系统：设一弹簧、质量块、阻尼器组成的系统如图所示，当外力 $F(t)$ 作用于系统时，系统将产生运动。

假设：忽略弹簧和阻尼器的质量，并认为连接是刚性的。这样各处才能同时运动。

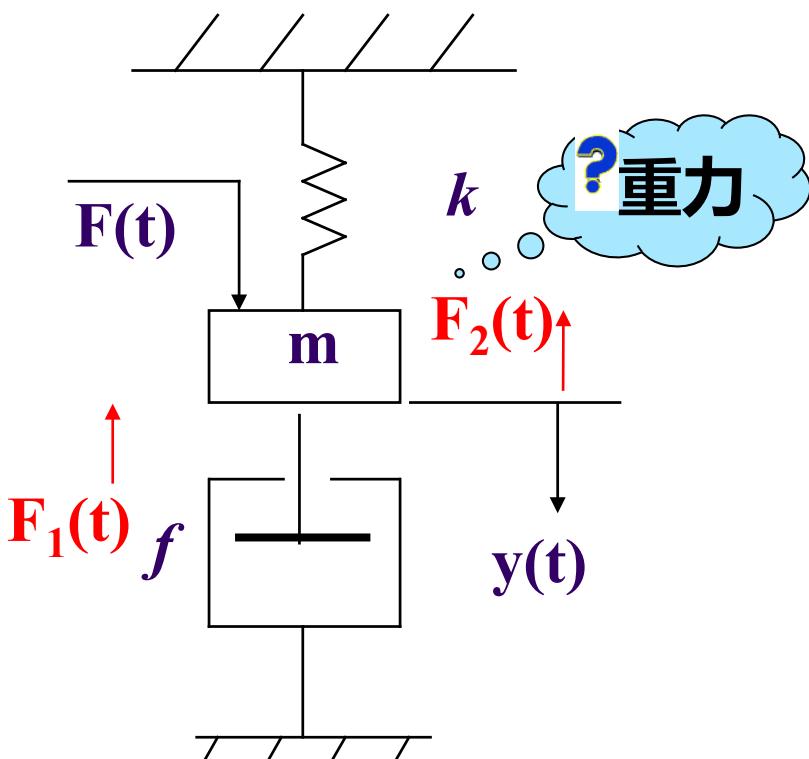
试写出外力 $F(t)$ 与质量块的位移 $y(t)$ 之间的微分方程。

◆工作机理：

- 阻尼器的作用方式是产生摩擦力（流体阻力），大小与速度成正比，方向与运动方向相反。
- 弹簧的作用力大小与位移成正比，方向与运动方向相反。

一、控制系统的微分方程

例1.1：机械位移系统



f — 阻尼系数

k — 弹性系数

- ◆首先确定输入和输出。 $F(t)$ 与 $y(t)$
- ◆然后根据物理定律列写方程

阻尼器的阻力 $F_1(t) = -f \frac{dy(t)}{dt}$

弹簧的恢复力 $F_2(t) = -ky(t)$

质量块的运动 $F(t) + F_1(t) + F_2(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$

- ◆消去中间变量，化为标准形式

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dy(t)}{dt} + \underline{y(t)} = \frac{1}{k} F(t)$$

令 $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$, $\zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$, $K = \frac{1}{k}$ 则

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \textcircled{K} F(t)$$

系数为1

静态时系统的输出与输入之比，称为**比例系数或传递系数**

式中， T 为时间常数， ζ 为阻尼比。

一、控制系统的微分方程

例1.2：电路系统

◆首先确定输入和输出。设回路电流为 $i(t)$, 由克希霍夫定律写出回路方程为:

◆消去中间变量 $i(t)$ 得到描述电路输入输出关系的微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c = u_r(t)$$

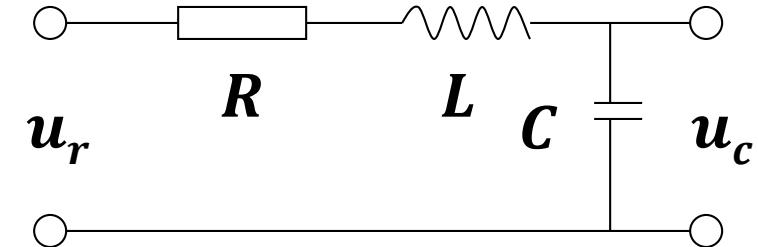
令 $RC = T_2$, $L/R = T_1$, 则 $T_1 T_2 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du_c(t)}{dt} + u_c = u_r(t)$

与前面建立的弹簧-质量-阻尼器系统的微分方程比较,

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = KF(t)$$

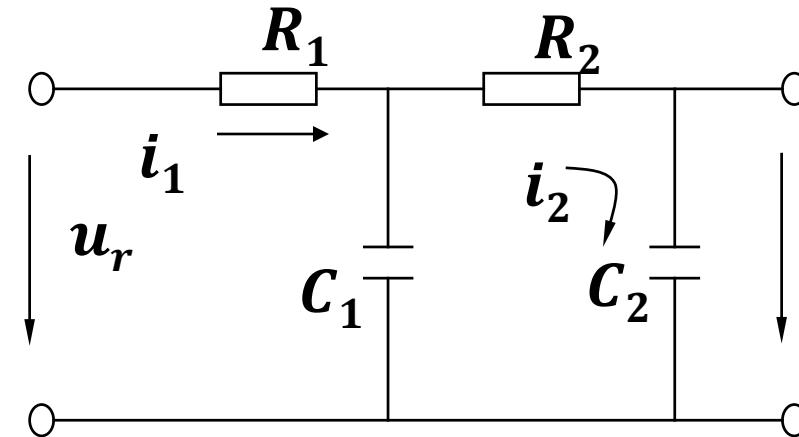
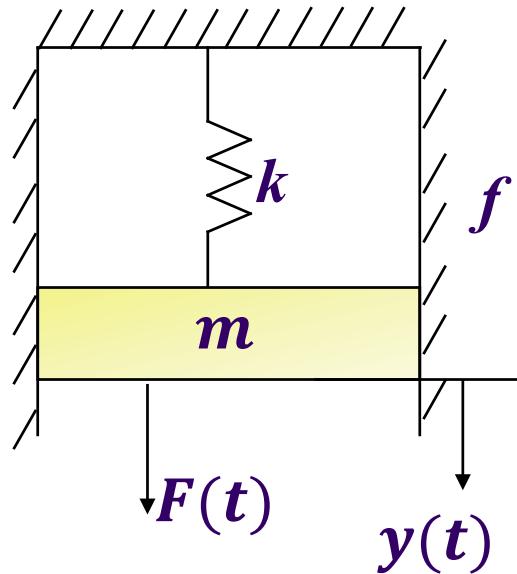
二者的结构相似。若选择适当的参数, 则当输入相同时, 两个系统的输出会具有相同的响应曲线。因此称二者为相似系统。

$$u_r = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c$$
$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$$



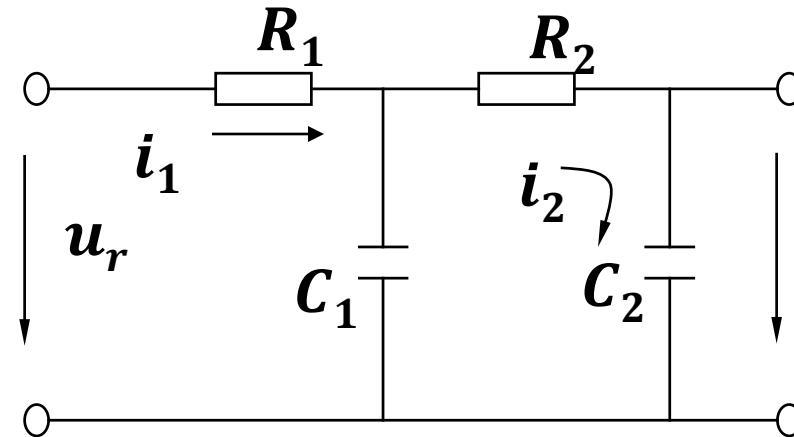
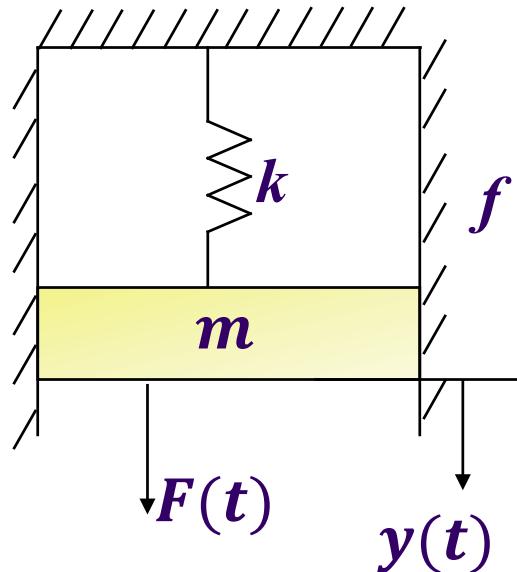
一、控制系统的微分方程

测试：试写出下面系统的微分方程模型



一、控制系统的微分方程

测试：试写出下面系统的微分方程模型



【答案】

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - ky(t)$$

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

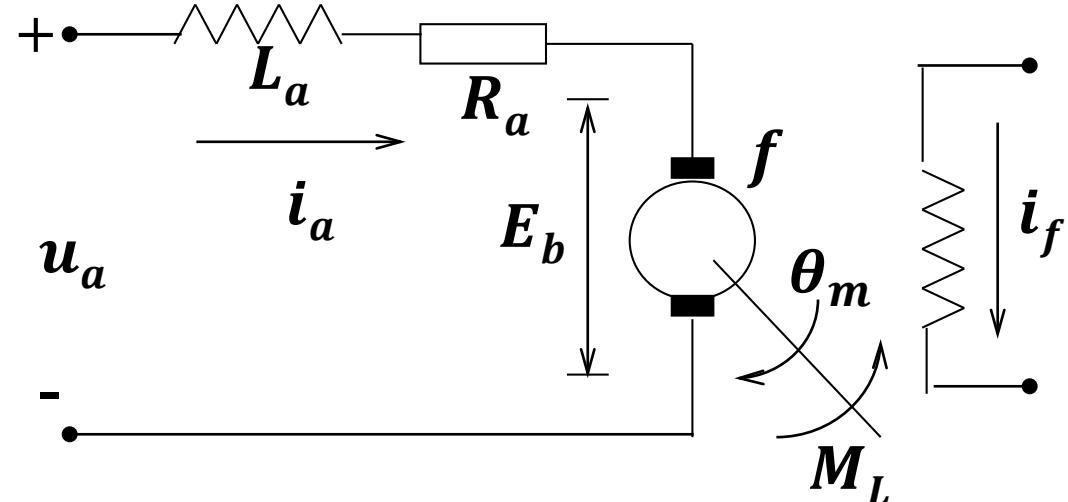
一、控制系统的微分方程

例1.3：直流电动机

直流电动机是将直流电做功转化为机械功的一个装置，其原理是电枢回路产生电枢电流与电机的励磁磁通相互作用产生电磁转矩 M_d 从而拖动负载运动，同时电机转动会产生一个反电势作用于电枢回路。

有一电枢控制的它激直流电动机如图示。

图中， i_f 为固定的激磁电流， u_a 为端电压， M_L 为负载转矩， R_a 、 L_a 分别为电枢电阻和电感。



已知 K_b 为电动机反电势系数， C_m 为电动机力矩系数， f 为电机上的粘性摩擦系数， J 为电动机转动惯量。

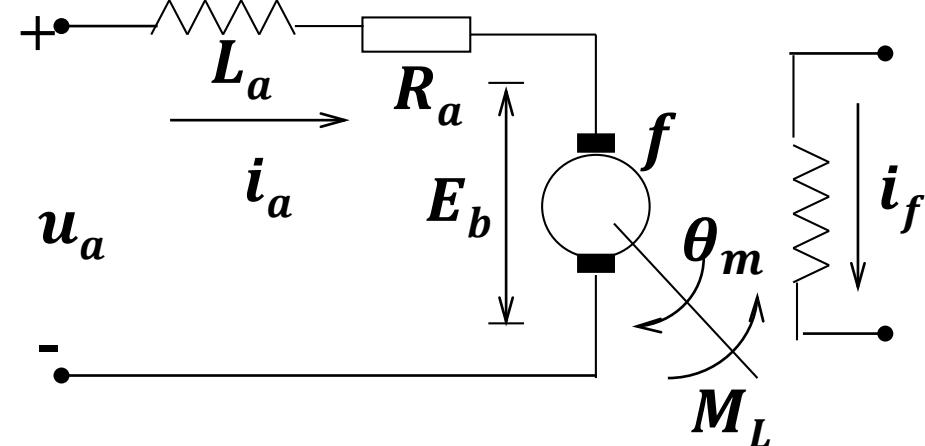
以电枢电压 u_a 为输入量，以电动机的转角 θ_m 为输出量，写出该电动机的微分方程。

一、控制系统的微分方程

例1.3：直流电动机

◆近似：

➤不计**电枢反应**：由磁极所形成的磁场称为主**磁场**；当电枢绕组中有电流通过时，绕组本身产生一个**磁场**，称为**电枢磁场**；

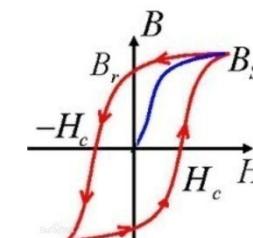


➤不计**涡流效应**：在导体外绕上通入交变电流的线圈，则导体在圆周方向会产生**感应电动势**和**感应电流**，感应电流的方向沿导体的圆周方向转圈，称为**涡流现象**。

➤不计**磁滞影响**：磁性体的磁化具有不可逆性，如图。

图中H为**磁场强度**，B为**磁感应强度**。

➤假设电机绕组**温度**在瞬变过程中不变。绕组电流会引起发热。



一、控制系统的微分方程

例1.3：直流电动机

【解】设电磁转矩 M_m ，电枢反电势 E_b ，电枢电流 i_a 。

◆由输入端开始，按照信号传递顺序列写方程

1. 电枢回路电压平衡方程：

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b$$

2. 电枢的反电动势：大小与角速度成正比，方向与电枢电压相反。

电动机反电势系数已知，为 K_b 。

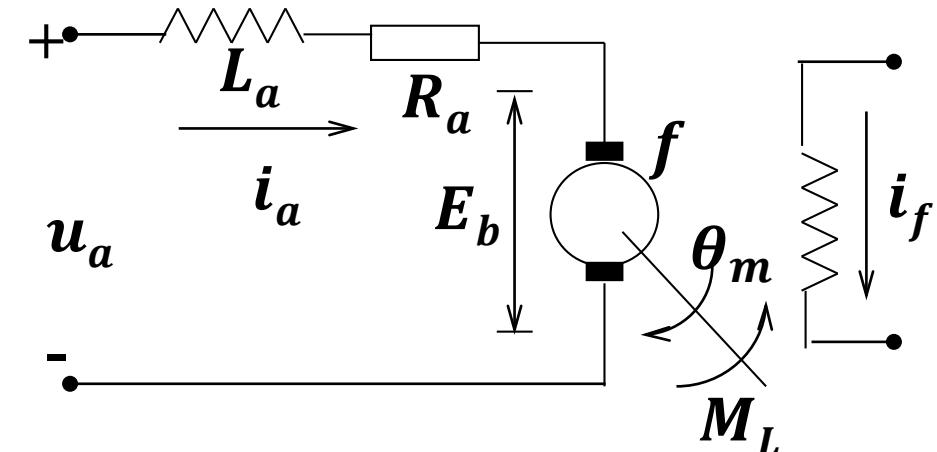
$$E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

3. 电磁转矩方程：电力驱动电机转动。电动机力矩系数已知，为 C_m 。

$$M_m = C_m i_a$$

4. 电动机轴上的转矩平衡方程，电机转动要克服惯性、摩擦以及负载。电机上的转动惯量为 J ，粘性摩擦系数为 f 。

$$M_m = J \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + f \frac{d\theta_m}{dt} + M_L$$



一、控制系统的微分方程

例1.3：直流电动机

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b \quad E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$M_m = C_m i_a$$

$$M_m = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + f \frac{d\theta_m}{dt} + M_L$$

扰动，是一种输入

- ◆ 消去中间变量 i_a, E_b, M_m ，可得到表示电枢电压 u_a 、电动机的转角 θ_m 及负载转矩 M_L 之间关系的微分方程：

$$JL_a \frac{d^3\theta_m}{dt^3} + (JR_a + fL_a) \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + (fR_a + C_m K_b) \frac{d\theta_m}{dt} = C_m u_a - L_a \frac{dM_L}{dt} - R_a M_L$$

- ◆ 若以电机转速 $\omega = \frac{d\theta_m}{dt}$ 为输出量，则上式可改写为

$$JL_a \frac{d^2\omega}{dt^2} + (JR_a + fL_a) \frac{d\omega}{dt} + (fR_a + C_m K_b) \omega = C_m u_a - L_a \frac{dM_L}{dt} - R_a M_L$$

一、控制系统的微分方程

例1.3：直流电动机

$$JL_a \frac{d^2\omega}{dt^2} + (JR_a + fL_a) \frac{d\omega}{dt} + (fR_a + C_m K_b) \omega = C_m u_a - L_a \frac{dM_L}{dt} - R_a M_L$$

◆ 令 $T_m = JR_a/(fR_a + C_m K_b)$, $T_a = La/Ra$, $T_b = fL_a/(fR_a + C_m K_b)$, $K_m = C_m/(fR_a + C_m K_b)$, 可简化为

$$T_a T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + (T_m + T_b) \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_m u_a - \frac{T_a T_m}{J} \frac{dM_L}{dt} - \frac{T_m}{J} M_L$$

◆ 若负载转矩 $M_L = 0$, 则 $T_a T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + (T_m + T_b) \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_m u_a$

◆ 若电枢回路中的 L_a 很小可以忽略, 则 $JR_a \frac{d\omega}{dt} + (fR_a + C_m K_b) \omega = C_m u_a$

◆ 若电枢电阻 R_a 很小可以忽略, 则有 $K_b \omega = u_a$, 即电枢电压与电机转速成正比, 此时称为测速发电机, 为线性元件。

一、控制系统的微分方程

例1.4：水箱系统

液位流体过程。如图， Q_1 为流入量，也是输入量。 Q_2 为流出量， h 为液位高度，为系统输出。已知 C 为水箱的截面积。

【解】根据物质守恒定律，因为流体不可压缩，有

$$Q_1 - Q_2 = C \frac{dh}{dt}$$

由于通过节流阀的流体是c，由流量公式得：

$$Q_2 = \alpha \sqrt{\frac{2gh}{\gamma}} = k\sqrt{h}$$

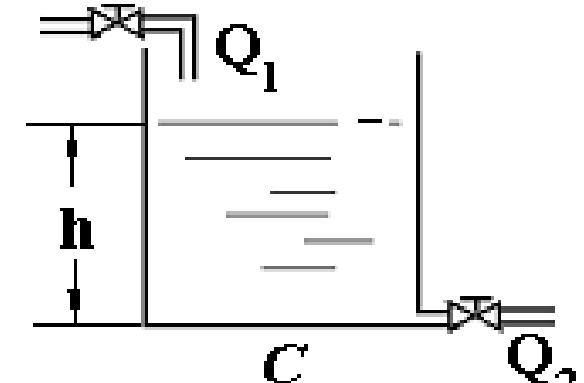
其中 g 为重力加速度， γ 为液体密度， α 为流体系数。

设节流阀开度固定，则

$$k = \alpha \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \quad \text{为常数。}$$

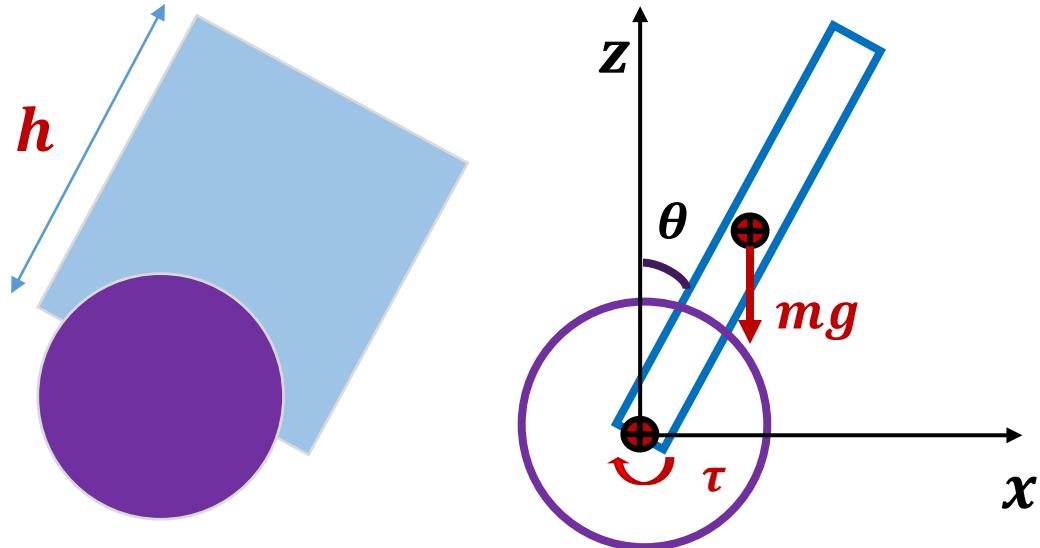
消去中间变量 Q_2 ，则有 $C \frac{dh}{dt} + k\sqrt{h} = Q_1$

这是一个一阶非线性微分方程！



一、控制系统的微分方程

测试：建立轮式机器人平衡控制系统的微分方程



设俯仰角为 θ ,
机器人主体质量为 m , 高度为 h
转动惯量为 J
机器人主体受到重力的转矩和电机
作用的转矩 τ
试建立控制输入转矩 τ 和俯仰角为 θ
的微分方程

【答案】

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh \sin(\theta(t)) + \tau$$

这是一个二阶非线性微分方程!

一、控制系统的微分方程

【温故知新】微分方程的求解

- ◆用拉普拉斯变换求解微分方程的一般步骤是：
 1. 对线性微分方程的每一项进行拉氏变换，使微分方程变成以 s 为变量的代数方程；注意**初始条件**的处理。
 2. 求解代数方程，得到输出变量**象函数**的表达式；
 3. 将象函数展开成部分分式；
 4. 对部分分式进行拉氏反变换，得到微分方程的解。

一、控制系统的微分方程

【温故知新】微分方程的求解

- ◆**拉普拉斯变换** $\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow sF(s) - f(0)$ $\frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
- ◆**拉普拉斯反变换**: 通常首先进行部分分式展开, 然后查表求拉氏反变换。

$1(t) \rightarrow \frac{1}{s}$	$t \rightarrow \frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{2}t^2 \rightarrow \frac{1}{s^3}$	$e^{-at} \rightarrow \frac{1}{s+a}$
$\sin bt \rightarrow \frac{b}{s^2 + b^2}$		$\cos bt \rightarrow \frac{s}{s^2 + b^2}$	
$e^{-at} \sin bt \rightarrow \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$		$e^{-at} \cos bt \rightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	

一、控制系统的微分方程

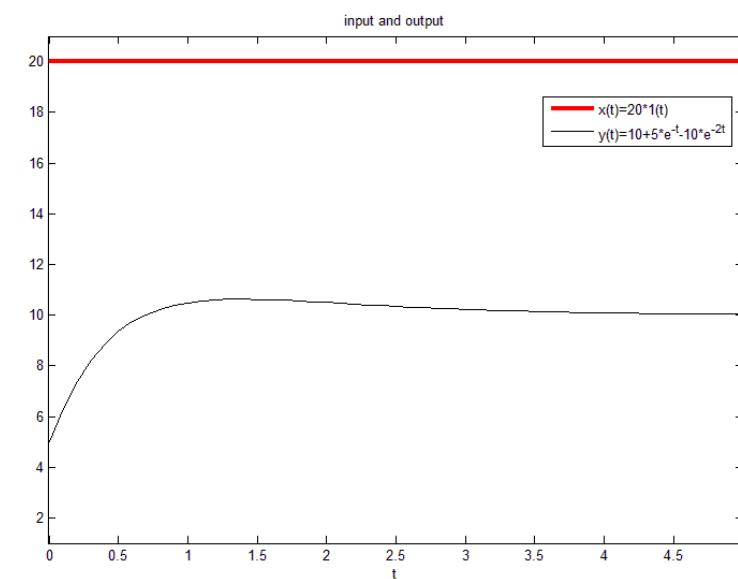
【温故知新】微分方程的求解

已知系统的微分方程为 $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x$

式中 y 为系统的输出变量， x 为输入变量，设 $x = 20 \cdot 1(t)$ ，初始条件为 $y(0) = 5$, $\dot{y}(0) = 15$, 求系统的输出 $y(t)$ 。

$$y(t) = 10 + 5e^{-t} - 10e^{-2t}$$

如果一个系统建模是非线性系统的话，该怎么办呢？



二、非线性系统的线性化

?什么叫线性化?

在一定的条件下或在一定范围内把非线性的数学模型化为线性模型的处理方法称为非线性数学模型的**线性化**。

二、非线性系统的线性化

?为什么要进行线性化?

严格地说，几乎所有元件或系统的运动方程都是非线性方程，即输入、输出和扰动等之间的关系都是非线性的。

非线性微分方程的求解和控制系统性能研究非常复杂，不方便。

对许多系统来说，如果研究的是系统在某个**工作点**附近的性能，那么把它看作是线性关系，**不会产生很大的误差**。

同时，由于线性化以后**可以应用叠加原理等**，使得研究问题非常方便。

因此我们要研究非线性微分方程的线性化。

二、非线性系统的线性化

?采用什么方法进行线性化?

在给定工作点的邻域将非线性函数展开为泰勒级数，忽略级数中的高阶项后，就可得到只包含偏差的一次项的线性方程。这种线性化方法称为**小偏差法**。

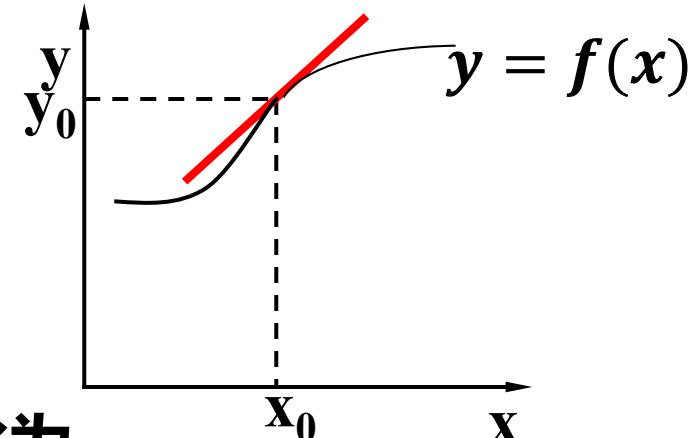
?线性化要满足什么条件?

- 小偏差理论或小信号理论**。在工程实践中，控制系统都有一个额定的工作状态和工作点，当变量在工作点附近作小范围的变化时，就满足这个条件。
- 在工作点附近存在各阶导数或偏导数。

二、非线性系统的线性化

设非线性函数 $y = f(x)$ 如图所示，如果在给定工作点 $y_0 = f(x_0)$ 处各阶导数均存在，则在 $y_0 = f(x_0)$ 附近将 y 展开成泰勒级数：

$$y = f(x) = f(x_0) + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$



若偏差 $\Delta x = x - x_0$ 很小，可忽略级数中高阶无穷小项，上式化为

$$y = f(x) \approx f(x_0) + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x_0} (x - x_0)$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x_0} (x - x_0) = K \Delta x$$

K 表示 $y = f(x)$ 曲线在 (x_0, y_0) 处切线的斜率。因此非线性函数在工作点处可以用该点的切线方程线性化。

二、非线性系统的线性化

例2.1：水箱系统的线性化

将液位流体过程在工作点($Q_{10} = 6, h_0 = 4$)处线性化。

$$C \frac{dh}{dt} + 3\sqrt{h} = Q_1$$

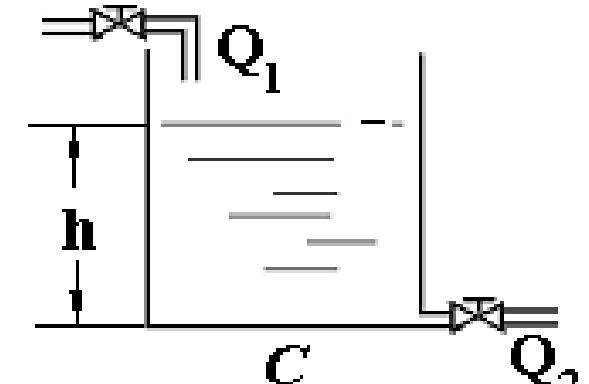
【解】设 $Q_3 = 3\sqrt{h}$ 平衡点处有 $3\sqrt{h_0} = Q_{10}$

将 Q_3 进行线性化：

$$\begin{aligned} Q_3 &= 3\sqrt{h_0} + (3\sqrt{h})' \Big|_{h_0} \Delta h \\ &= 3\sqrt{h_0} + \frac{3}{2\sqrt{h}} \Big|_{h_0=4} \Delta h = 3\sqrt{h_0} + 0.75\Delta h \end{aligned}$$

则 $C \frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} + 3\sqrt{h_0} + 0.75\Delta h = Q_{10} + \Delta Q_1$

则 $C \frac{d\Delta h}{dt} + 0.75\Delta h = \Delta Q_1$



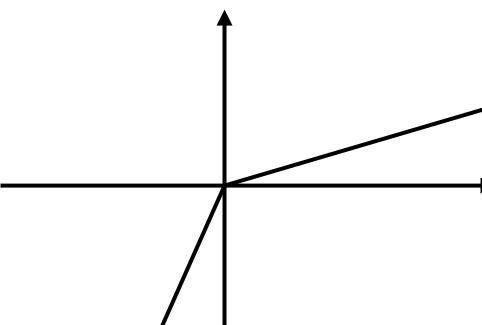
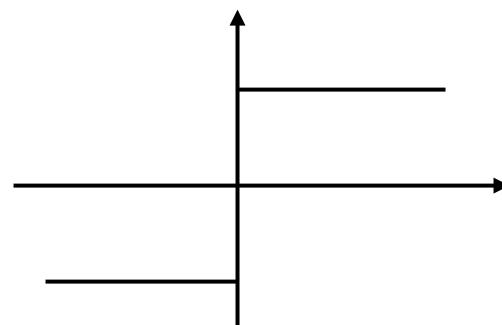
？如何选择工作点？

？工作点处为何满足导数为0的关系？

二、非线性系统的线性化

在处理线性化问题时，需要注意以下几点：

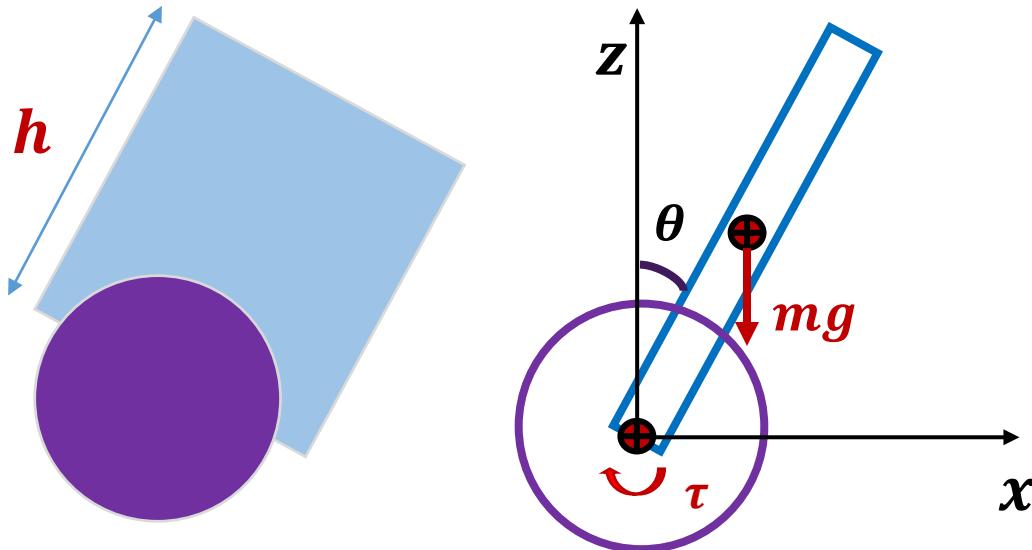
- 上述线性化是针对元件的某一**工作点**进行的，工作点不同，得到的线性化方程的系数也将不同。因此在线性化时必须确定元件的**工作点**。
- 在线性化过程中，略去了泰勒级数中二阶以上的无穷小项，如果实际系统中输入量**变化范围较大时**，采用小偏差法建立线性模型必然会带来**较大的误差**。
- 线性化后的微分方程通常是**增量方程**，在实用上为了简便通常直接采用y和x来表示增量。
- 若描述非线性特性的函数具有**间断点、折断点或非单值关系**而无法作线性化处理时，则控制系统只能应用**非线性理论**来研究。



本质非线性

二、非线性系统的线性化

测试：轮式机器人平衡控制系统的线性化



$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh \sin(\theta(t)) + \tau$$

如何选择工作点？

【答案】

$$J \frac{d^2\Delta\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\Delta\theta + \Delta\tau$$

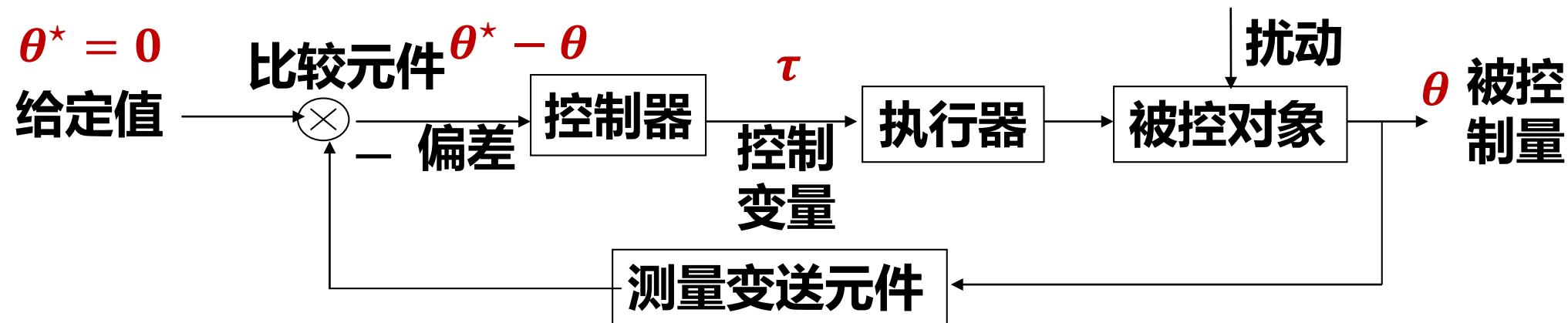
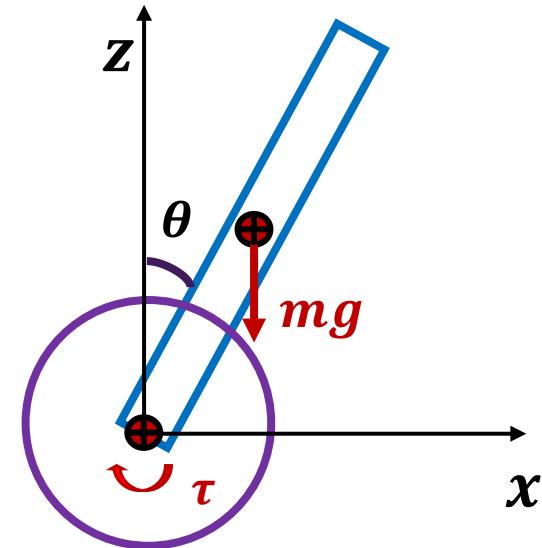
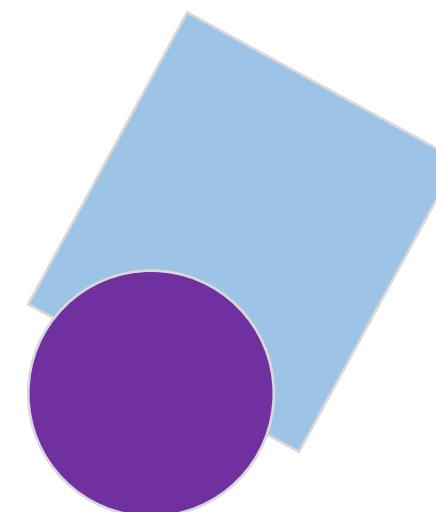
$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

三、轮式机器人平衡动力学分析

分析：轮式机器人平衡控制系统

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

【如何设计控制量 τ 】



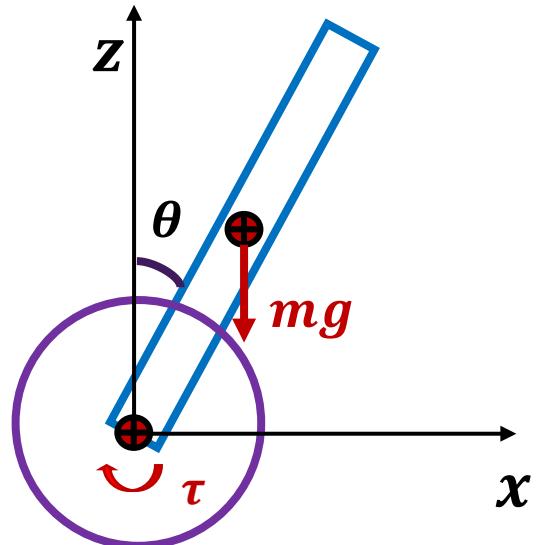
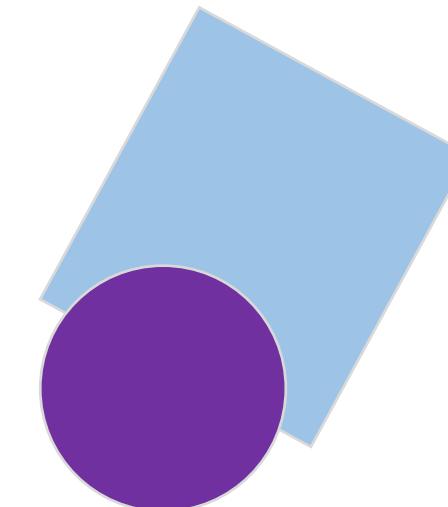
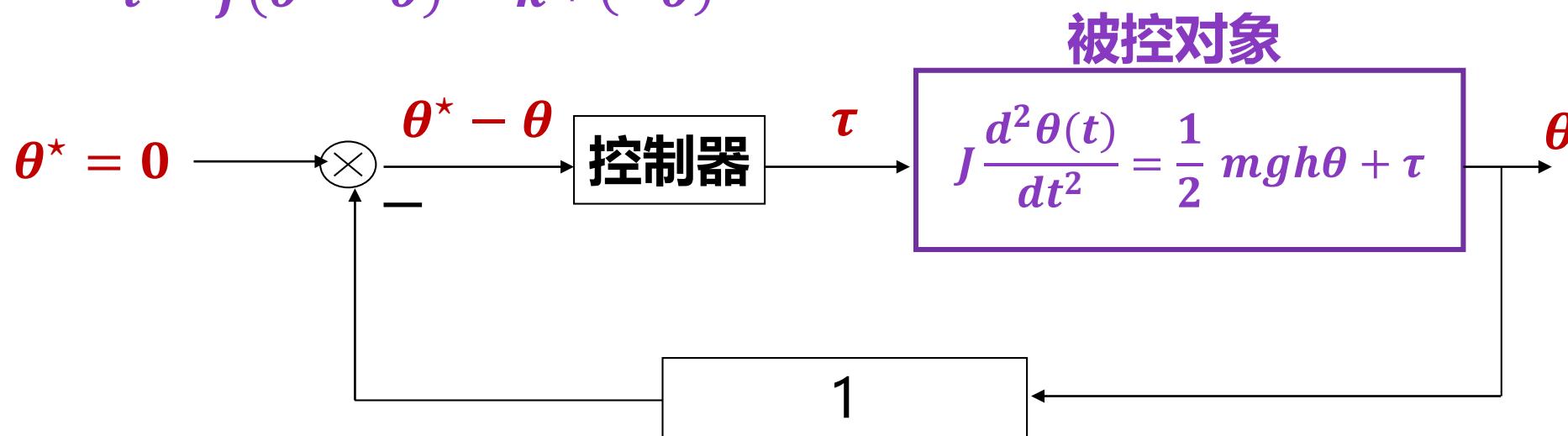
三、轮式机器人平衡动力学分析

分析：轮式机器人平衡控制系统

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

【如何设计控制量 τ 】

$$\tau = f(\theta^* - \theta) = k * (-\theta)$$



三、轮式机器人平衡动力学分析

分析：轮式机器人平衡控制系统

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} mgh\theta + \tau$$

【如何设计控制量 τ 】

$$\tau = k * (-\theta),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

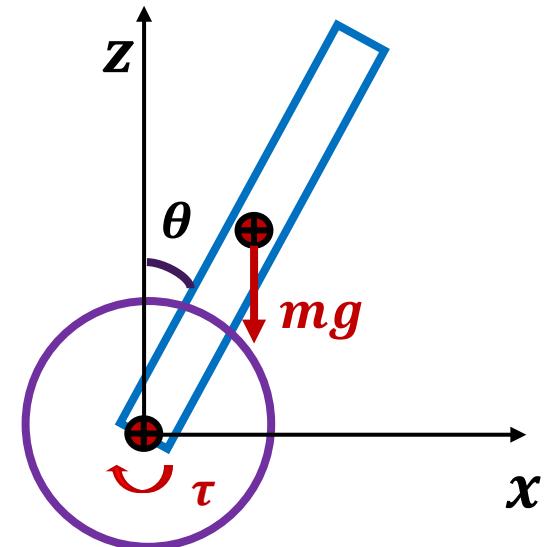
◆ 拉氏变换

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \left(\frac{1}{2} mgh - k\right)\theta$$

$$Js^2\theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) + \left(k - \frac{1}{2}mgh\right)\theta(s) = 0,$$

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(k - \frac{1}{2}mgh\right)\theta = 0$$

得到 $\theta(s) = \frac{\theta(0)s + \dot{\theta}(0)}{Js^2 + (k - \frac{1}{2}mgh)}$



分类讨论

三、轮式机器人平衡动力学分析

分析：轮式机器人平衡控制系统

◆ 拉氏变换

$$\theta(s) = \frac{\theta(0)s + \dot{\theta}(0)}{Js^2 + (k - \frac{1}{2}mgh)}$$

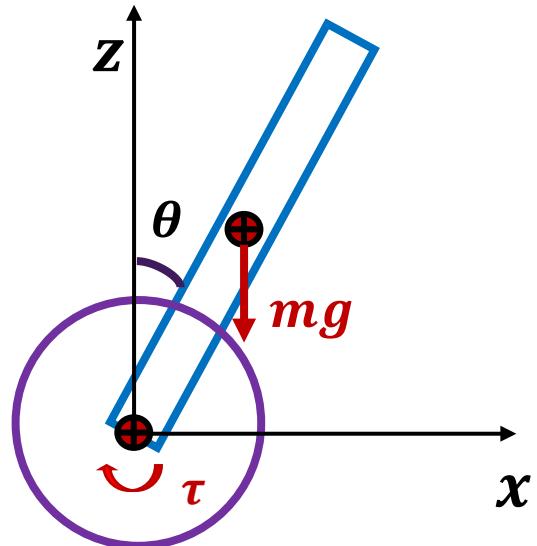
$$\alpha = k - \frac{1}{2}mgh$$

✓ 若 $\alpha > 0$, 则 $\theta(s) = \frac{\theta(0)}{J} \frac{s}{s^2 + \frac{\theta(0)\alpha}{J}} + \frac{\dot{\theta}(0)}{J} \frac{1}{s^2 + \frac{\dot{\theta}(0)\alpha}{J}}$

→ $\theta(t) = \frac{\theta(0)}{J} \cos(\sqrt{\theta(0)\alpha}t) + \frac{\dot{\theta}(0)}{J} \sin(\sqrt{\dot{\theta}(0)\alpha}t)$ θ(t) 随时间在振荡

✓ 若 $\alpha < 0$, 则 $\theta(s) = \frac{1}{J} \left(\frac{c_1}{s + \sqrt{\frac{\alpha}{J}}} + \frac{c_2}{s - \sqrt{\frac{\alpha}{J}}} \right)$

→ $\theta(t) = \frac{c_1}{J} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{J}}t} + \frac{c_2}{J} e^{\sqrt{\frac{\alpha}{J}}t}$ θ(t) 随时间趋向无穷



- 控制系统建模：
 - 建立微分方程模型：机械系统、电路系统、水箱系统、轮式机器人
 - 非线性系统的线性化：水箱系统、轮式机器人
 - 微分方程的求解：拉氏变换+部分分式展开+反拉氏变换
 - 案例分析：轮式机器人
- 作业：
 - 参考书 2.1
 - 下载webots软件，结合本讲内容，实现轮式机器人的平衡控制。