

Contents

| | |
|---|-------------|
| 1 旋流管道流声特征提取 | iii |
| 1.1 基本管道声传播模型 | v |
| 1.2 色散关系 | v |
| 1.2.1 Pridmore-Brown 方程 | vi |
| 1.2.2 非均熵旋流管道色散方程 | vii |
| 1.3 案例分析 | x |
| 1.3.1 案例 00: 算法验证以及优缺点讨论 | x |
| 1.3.2 案例 01: 旋流的影响 | xi |
| 1.3.3 案例 02-03: 软壁面吸声效应 | xi |
| 1.3.4 案例 04: 周向模态的分布规律 | xii |
| 1.3.5 案例 05: 非均熵的影响 | xii |
| 1.3.6 案例 06: 不稳定模态 | xii |
| 1.3.7 案例 07: 非均熵的不稳定熵模态 | xiii |
| 1.4 管道格林公式 | xvii |
| 1.4.1 均匀流管道格林公式 | xvii |
| 1.4.2 旋流管道单极子格林公式 | xviii |
| 1.4.3 旋流管道偶极子格林公式 | xx |
| 1.4.4 旋流管道旋转声源 | xxii |
| 1.5 案例分析 | xxii |
| 1.5.1 案例 01: 无旋流单极子噪声 | xxii |
| 1.5.2 案例 02: 有旋流单极子噪声 | xxiii |
| 1.5.3 案例 03: 软壁面吸声 | xxiv |
| 1.5.4 案例 04: 偶极子噪声 | xxiv |
| 1.5.5 案例 05: 旋转声源发声 | xxiv |
| 2 MATLAB 代码: greenfun_dipoleNoise 函数 | xxix |

Chapter 1

旋流管道流声特征提取

当前，国内外不少研究考虑到了流致噪声的产生和气动弹性不稳定性（如颤振、强迫振动和声共振）相关，已经广泛研究了轴向流动管状机械中的小扰动的传播及其与叶片排的相互作用。在没有强冲击波的情况下，流动不均匀性的强度通常很小，因此在许多应用中，它们可以被认为是对平均流动的小扰动。因此，运动方程可以做线化处理。这使得这种流动的数学处理大大简化。对不稳定流动现象，假设上游流动由施加在均匀轴向平均流动上的扰动组成。然后可以将这些扰动分成不同的独立潜在的声学、熵和旋涡模式。该模型适用于轴向平均流管道模型。然而，在涡轮风扇发动机的级间区域中，流场表现为非均匀的可压缩剪切流和强旋涡。对于旋流存在的情况，平均旋流与扰动量的相互耦合作用严重影响着声波的传播截止特性。旋流产生的离心力和科氏力使得声模态、涡模态和熵模态耦合在一起。而传统的轴向平均流情况的模态分析、基于轴向平均流的对流波动方程以及基于无旋流平均流假设的全势方程都不再适用。因此，需要从原始未简化的连续方程、动量方程和能力方程出发，重新建立新的旋流声传播模型来研究旋流存在下的模态特性。

从上个世纪 70 年代，Nayfeh et al. [1975] 系统地分析了发动机管道内声模态传播特性后，Kerrebrock [1977] 最先采用模态形式分析了无限长管道内包含旋流的小扰动传播问题，并给出了刚体旋转和自由涡两种平均旋流的近似形式。90 年代中期，Kousen 采用配置发求解欧拉方程特征值问题，研究无限长硬壁管道内有均熵、无粘、可压旋流情况下的小扰动传播特性 (Kousen [1996, 1999, 1995])。他的研究结果表明，当有平均旋流存在时，管道内有三类模态：第一类是类似平均轴流声模态的近声模态 (Acoustic modes)，与流体可压性相关，之所以叫作近声模态是由于这部分模态不像在平均轴流情况下完全是压力波，但又压力占优，扰动的压力成分主要集中在这部分模态；第二类模态是由于旋流的存在产生的一个特征值 (即特征波数) 连续体 (Critical Layer)，这部分模态的随流导数为 0，因此叫做纯对流模态，这部分模态不含压力成分，主要是涡扰动。第三类模态是位于纯对流模态两侧的两支离散的近对流模态 (Hydrodynamic modes)，熵量占优但又包含少量压力成分。在后续的研究中，一些学者又相继考虑了边界条件的影响，在包含软壁面边界条件的同时，近声模态将发生偏离。

从本世纪初开始，美国圣母大学 (the University of Notre Dame) Atassi 教授领导的 Hessert 航空研究中心在压气机螺旋流的流致噪声、声传播及声模态研究方面进行了一系列深入科研工作 (Golubev and Atassi [1996], Golubev et al. [1997], Ali et al. [2000, 2001], Atassi [2007])。同样是进行无限长硬壁管道均熵旋流的模态分析，与 Kousen 不同的是，他们采用 Goldstein 的速度分解理论，将扰动速度分解成与平均流涡量相关的速度 (有旋部分)，与压力相关的速度 (有势部分) 和由熵引起的速度三部分，然后代入欧拉方程求解特征值问题。研究给出了近对流模态的特性及不同模态之间的耦合程度。1998 年，Tam and Auriault [1998] 也通过采用有限差分格式 求解线化欧拉方程初值

问题分析了有旋流存在时硬壁管道内的模态特性，他们假设定常流的密度是常量，实际上求解的是个非均熵流问题。给出了此种情况下不稳定波的性质，并指出近声模态与可压性有关，而可压性对对流模态几乎没有影响。[Nijboer \[2001\]](#) 比较了 [Kousen](#) 和 [Tam](#) 模态分析的工作，指出硬壁情况下非均熵流和均熵流特征值的计算结果的差异，尤其是对流模态部分，当假设定常流密度不变时，对流模态会产生伪模态。[Atassi \[2007\]](#) 分析了非均匀流中耦合的熵波和涡波的传播和稳定性问题。同年，[Heaton and Peake \[2006\]](#) 分析了有旋流存在时，对流模态中的连续谱的不稳定性问题。[Cooper and Peake \[2001\]](#) 利用在径向以对数变化的熵分布研究了有旋流条件熵对模态的影响。由于管道内存在平均旋流时，模态扰动（指有相同旋转周期和行波波数的扰动）一般不能用类似正余弦函数（矩形管）或 Bessel 函数（圆管）这类特殊函数表示，而只能用一些数值方法描述，需要从原始控制方程出发采用近似解析或者数值方法求解，如 WKB 近似、配置法、谱方法等。

从模态分析的结果人们认识到旋流对模态传播截止特性的影响，因此有限长管道内包含平均旋流的声传播问题开始受到重视。本世纪初，[Cooper and Peake \[2001\]](#) 采用基于摄动理论的多尺度方法研究渐变管道内平均旋流存在下的声传播特性。指出平均旋流会使同向旋转的模态更靠近截止（反向旋转模态远离截止）。并指出当壁面为软壁面时，同向旋转的模态比在无旋流中更容易衰减（反向旋转的模态可能会放大）。2004 年又进一步分析了航空发动机内由于旋流和管道截面的变化在入口管道产生的声共振现象（[Cooper et al. \[2004\]](#), [Cooper and Peake \[2000\]](#)）。2005 年同时考虑了有旋流情况下，声波在管道中的传播情况，和采用 Wiener-Hopf 方法计算等截面硬壁环管中有锥体存在情况下声波向前和向后的辐射（[Heaton and Peake \[2005\]](#)）。2006 年，在以往工作的基础上，[Cooper \[2006\]](#) 分析了平均流熵的形式对变截面管中含有旋流时声传播的影响。但多尺度方法公式不具有通用性，应用不方便，并且无法考虑各模态之间反射、散射等相互作用，因此只能作为一种近似方法。2001 年，[Ali \[2001\]](#) 推导了包含旋流影响的管道出入口无反射边界条件，并应用到线化欧拉方程中采用有限差分方法分析声和涡扰动在管道内的传播。另一种常用的管道声传播计算方法是有限元方法，已有的有限元模型主要还是局限于有势平均流情况，不适用于计算有平均旋流情况。

除管道声传播外，利用声类比对旋转声源的发声和预测也是至关重要的一个环节。1951 年，[Lighthill \[1952, 1954\]](#) 创造性地提出，把流体力学基本方程重新变换，并把脉动的气体密度作为独立的变量，准确地类比流体力学方程左端项为自由空间的声传播波动算子，右边作为流动噪声的声源项。该方程的最终可通过计算为源项与格林函数的卷积得到，在这种情况下格林函数为简单的自由空间格林函数。经过不断的发展，莱特希尔的类比已经以多种方式扩展，包括考虑流动中的移动表面，[Curle \[1955\]](#) 和 [Williams and Hawkings \[1969\]](#)，在左侧选择不同的因变量（例如，[Goldstein \[1976\]](#) 和 [Morfey and Wright \[2007\]](#)）。此外，一些学者通过改写左侧的算子使得其对某些研究的问题的流动噪声更加适用。[Lilley \[1973\]](#) 将 Lighthill 的类比扩展为更适合的形式通过在左侧引入三阶算子来表示高速喷射噪声，以表示单向基础剪切流。[Howe](#) 的对流方程重新改造了声类比方程，使得其这个理论能够明确地考虑到各种非声学、非均匀平均流动等因素对流动噪声的影响（[Howe \[1975\]](#)）。

应用发动机管道的噪声预测，通过格林函数考虑管道旋流中的影响。同时，旋流与转子、静子叶片排之间的相互作用及旋流对转静干涉噪声的作用等问题也值得研究。[Wundrow et al. \[1994\]](#) 采用格林函数的方法研究旋流与叶片排的相互作用。此外，[Atassi](#)、[Peake](#) 等团队陆续研究了有旋流存在时叶栅的声辐射问题，给出了其高频近似，分析了旋流对叶片负载的影响。[Cooper and Peake \[2005\]](#) 建立近似解析模型来预测转静干涉噪声。[Posson and Peake \[2012, 2013\]](#) 考虑了管道中轴向剪切和旋转的基流的影响，重新整理方程为六阶线性算子作用下的压力扰动的形式，并将其应用于转静干涉的噪声预测。

本章的组织如下：首先，介绍了旋流管道的特征值求解问题，相较于传统的均匀流管道，重新整理的原始控制方程将考虑熵值变化的影响，并通过配置法数值求解矩阵特征值。最终，给出一些案例论证旋流、边界条件以及周向模态对特征值的影响。接着，第 3 节和第 4 节将分别具体地分析均熵

和非均熵条件下，旋流管道声-涡-熵耦合的机理。耦合分析将建立在计算各个模态特征谱的压力、涡量和熵值的能量占比之上，并借此进一步分析不同参数在声-涡-熵耦合中的作用。在非均熵研究中，我们还将探究不稳定模态的产生机理和特性分析。最后，第5小节介绍旋流管道的发声机理，是对Lighthill声类比的拓展，为后续对旋转机械旋流背景下的转静干涉的噪声预测及“声共振”机理的研究打下基础。

1.1 基本管道声传播模型

上一章节，我们介绍了曲线坐标系下的NS线性化和流声特征分析的基本方法。我们将其应用到柱坐标，建立基本的旋流管道声传播模型。由于假定无限长管道，模态展开便可简化为1维问题。在实际应用中，管内旋流在轴向和周向分量大小相近，但是径向方向的分量可以忽略。我们将柱坐标系下NS方程的非守恒形式(??)利用关系式(??)进行线性化。声音作为以特定波长的扰动在流体中的传播以声速传播，流体的总速度、密度和压力可表示为未扰动前的均匀流与扰动量的叠加形式：

$$\rho = \rho_0 + \rho', p = p_0 + p', \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u'_r \\ U_\theta + u'_\theta \\ U_z + u'_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

忽略非线性项，最终得到展开成柱坐标系下的扰动量形式的线性欧拉方程(Mathews [2016])：

$$\begin{aligned} \frac{D_0\rho'}{Dt} + u'_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{u}') &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{D_0u'_z}{Dt} + u'_r \frac{dU_z}{dr} \right) + \frac{\partial p'}{\partial z} &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{D_0u'_r}{Dt} - \frac{2U_\theta u'_\theta}{r} \right) - \rho \frac{U_\theta^2}{r} + \frac{\partial p'}{\partial r} &= 0 \\ \rho_0 \left(\frac{D_0u'_\theta}{Dt} + \frac{u'_r}{r} \frac{d}{dr}(rU_\theta) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{D_0p'}{Dt} + u_r \frac{\rho_0 U_\theta^2}{r} + \gamma p_0(\nabla \cdot \mathbf{u}') &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中，

$$s_0 = c_v \log \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0 \gamma} \right) \quad (1.3)$$

$$c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0 \quad (1.4)$$

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.5)$$

由方程(1.4)可简化得到密度脉动量和压力脉动量之间的关系：

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p' - \frac{\rho_0}{c_p} s' \quad (1.6)$$

其中， s' 为熵的扰动量。

那么，熵扰动量形式的线性守恒方程有：

$$\frac{D_0s'}{Dt} + \frac{ds_0}{dr} u'_r = 0 \quad (1.7)$$

1.2 色散关系

在线性边界等截面无限长管道模型中，方程的解可以用无限个管道声模态叠加的形式进行描述。这些“声模态”在给定的频率下，以固定模式在管道中传播，有以下展开形式：

$$p'(z, t) = p'(r, \theta) f(z - c_z t) = \hat{p}(r, \theta) e^{iw(t-z/c_z)} = \hat{p}(r, \theta) e^{iwt-i\kappa z} \quad (1.8)$$

该模态由包含波数和频率的指数函数 $e^{iwt-i\kappa z}$ 和形状函数 $\hat{p}(r, \theta)$ 决定，其中 $\hat{p}(r, \theta)$ 可以展开成特征函数线性叠加的形式。类似 (??)， c_z 为特征速度， k 则为特征波数。因此，关系式 (1.8) 代入方程 (1.2)，整理可得到色散关系 (Dispersion relation)。色散关系求解得到轴向特征值 κ ，该特征值决定了管道声传播的特性。

以无背景流的波动方程为例，i.e., $U_z(r) = 0, U_\theta(r) = 0$ 。设声管半径为 1，延伸至无限远，写成柱坐标的形式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

其特征函数以 m 的整数阶的 Bessel 函数的解析形式存在，因此模态分解 (1.8) 可以进一步转化为：

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J_m(\alpha_{mn} r) \cos(m\theta - \phi_m) e^{j(\omega t - \kappa z)} \quad (1.10)$$

假设壁面刚性，管壁法向速度为 0：

$$u_{rm}|_{r=a} = 0 \Rightarrow \frac{dJ_m(\alpha_{mn} r)}{d(\alpha_{mn} r)} \Big|_{r=1} = 0 \quad (1.11)$$

最终，得到色散关系式：

$$\kappa = \pm \sqrt{k^2 - \alpha_{mn}^2}, k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (1.12)$$

其中， α_{mn} 为 bessel 函数与坐标轴的交点。在 MATLAB 中仅需一行命令便可求得：

```
% [import chebfun package](https://github.com/chebfun/chebfun)
roots(diff(chebfun(@(t) besselj(0,t),[0,20])))
```

对结果进行分析：轴向波数 κ 为两个根号解（“-”向上游传播，“+”向下游传播）。如果 k 大于特征值 k_n^m ，则 κ 为实数，轴向模态上表现为正弦曲线。随着 k 的变小，波长变大。当 k 小于特征值 k_{mb} ，则 κ 为虚数，该对应的 m-n 模态呈指数衰减或截止。

同理，我们还可以假设存在均一轴向背景流 M 的情况，得到色散关系式：

$$\kappa = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - (1 - M^2)\alpha_{mn}^2}}{1 - M^2}, k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (1.13)$$

因此，对于无背景流或均一背景流的案例来说，均存在解析解。如图 (1.1) 所示，为径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性，反映了特定周向模态的频率截止特性。相对无背景流的对称分布，均匀流的整体特征分布向下游的传播方向发生了一定角度的倾斜，类似于自由场中的“多普勒效应”。

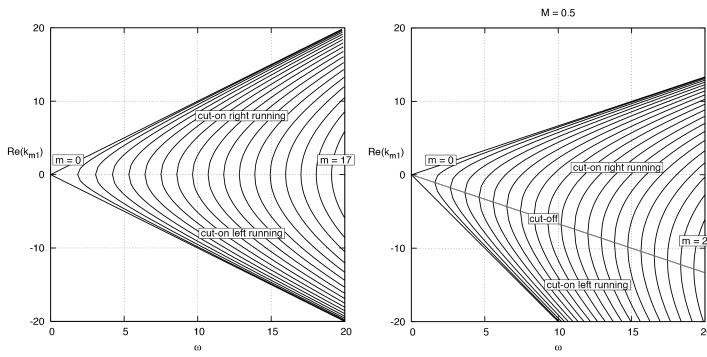


Figure 1.1: 无背景流和存在背景流的径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性, 见 Rienstra [2015]

1.2.1 Pridmore-Brown 方程

考虑管道轴向速度的情况, i.e., $U_z(r) \neq 0, U_\theta(r) = 0$, 关系式 $\phi'(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}(r)e^{i\omega t - i\kappa x - im\theta}$ 代入方程 (1.2), 整理并便可得到色散方程, 常被称为 Pridmore-Brown 方程 (Rienstra [2019]):

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{r} \left(\frac{r}{\Omega^2} \hat{p}' \right)' + \left(\Omega^2 - \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \hat{p} &= 0 \text{ with } \Omega = \frac{\omega - \kappa U_z}{c_0} \\ \rho_0 c_0 \Omega \hat{u}_z + \frac{\hat{p}' U'_z}{c_0 \Omega} - \kappa \hat{p} &= 0 \\ \rho_0 c_0 \Omega \hat{u}_r - i \hat{p}' &= 0 \\ \rho_0 c_0 \Omega \hat{u}_\theta - \frac{m}{r} \hat{p} &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

这里, ' 表示对 r 求导数, $\hat{\phi}$ 表示周向模态 m 下的形状函数。

阻抗边界条件:

$$[i\omega Z \hat{p}' = \rho_0 c_0^2 \Omega^2 \hat{p}]_{r=1} \quad (1.15)$$

其中, Z 为阻抗。当 Z 趋于无穷大时, 得到 $\hat{u}_r = 0$, 转化为硬壁边界条件。

非常值得一提的是, Rienstra [2019] 利用 Galerkin 数值方法, 首先构造剪切流的模型, 求解并分析了 Pridmore-Brown 方程在剪切流条件下的径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性, 如图 (1.2)。

其中, 轴向速度分布 (Rienstra and Vilenski [2008]):

$$\begin{aligned} U(r) &= \tanh\left(\frac{1-r}{\delta}\right) + (1 - \tanh(\delta^{-1})) \left(1 + r + \frac{1 + \tanh(\delta^{-1})}{\delta} r\right) (1-r) \\ u_0(r) &= \tau - \sigma + \sigma U(r) \end{aligned} \quad (1.16)$$

假设转子发声, 其模态 $m = 22$, 频率 $w = 22$, 可以看到其截止特性相对边界层参数 δ 非常敏感。随着 δ 从 0 增加到 0.1, 在 $\delta = 0.055$ 附近, 转子噪声从 “cut-on” 变成 “cut-off”。可以看出, 边界层对声传播的影响不容忽视。

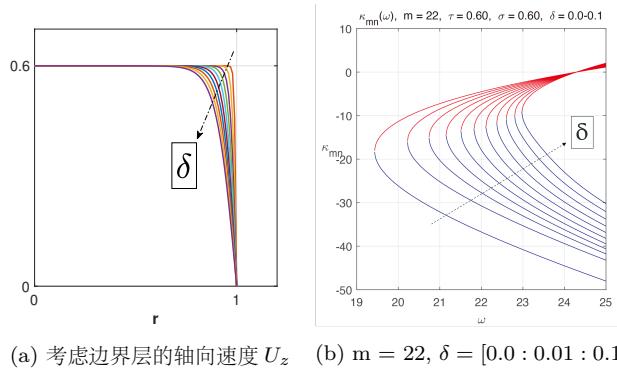


Figure 1.2: 边界层条件下的径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性, 见 Rienstra [2019]

1.2.2 非均熵旋流管道色散方程

对 Pridmore-Brown 方程进一步拓展, 考虑管道周向速度和非均熵的影响,i.e., $U_\theta(r) \neq 0, s_0(r)' \neq 0$, 将关系式 $\phi'(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}(r)e^{i\omega t - i\kappa x - im\theta}$ 代入方程 (1.2), 整理并便可得到更为复杂的旋流管道色散方程 (Mathews [2016]):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{i\Omega\hat{p}}{c_0^2} + \hat{u}_r \frac{\rho_0 U_\theta^2}{rc_0^2} + \rho_0 \left[\frac{im\hat{u}_\theta}{r} + i\kappa\hat{u}_z + \frac{\hat{u}_r}{r} + \frac{d\hat{u}_r}{dr} \right] = 0 \\
 & \rho_0 \left[-i\Omega\hat{u}_z + \hat{u}_r \frac{dU_z}{dr} \right] + i\kappa\hat{p} = 0 \\
 & \rho_0 \left[-i\Omega\hat{u}_r - \frac{2U_\theta}{r}\hat{u}_\theta \right] + \frac{d\hat{p}}{dr} - \frac{U_\theta^2}{rc_0^2}\hat{p} + \frac{\rho_0 U_\theta^2}{rc_P}\hat{s} = 0 \\
 & \rho_0 \left[-i\Omega\hat{u}_\theta + \frac{\hat{u}_r}{r} \frac{d}{dr}(rU_\theta) \right] + \frac{im\hat{p}}{r} = 0 \\
 & -i\Omega\hat{s} + \frac{ds_0}{dr}\hat{u}_r = 0
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

其中,

$$\Omega(r) = \omega - kU_z(r) - \frac{mU_\theta(r)}{r} \tag{1.18}$$

令 $\hat{\Omega} = \omega - \frac{mU_\theta}{r}, \zeta = 1 - U_z^2 c_0^2$ 。整理上述方程 (1.17), 并将 κ 提取到方程右侧, 得到矩阵表达形式:

$$AX = \lambda X$$

$$X = \begin{bmatrix} \hat{u}_z & \hat{u}_r & \hat{u}_\theta & \hat{p} & \hat{s} \end{bmatrix}^T, \quad \lambda = -\kappa i$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{U_z \hat{\Omega}}{c_0^2 \zeta} i & \left[-\frac{U_z}{c_0^2 \zeta} \frac{dU_z}{dr} + \frac{1}{r\zeta} + \frac{U_\theta^2}{\zeta r c_0^2} \right] + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{dr} & \frac{m}{r\zeta} i & -i \frac{\hat{\Omega}}{c_0^2 \rho_0 \zeta} & 0 \\ 0 & -i \frac{\hat{\Omega}}{U_z} & -\frac{2U_\theta}{rU_z} & \frac{1}{\rho_0 U_z} \frac{d}{dr} - \frac{U_\theta^2}{\rho_0 U_z r c_0^2} & \frac{U_\theta^2}{rc_p U_z} \\ 0 & \frac{1}{U_z} \left[\frac{U_\theta}{r} + \frac{dU_\theta}{dr} \right] & -\frac{\hat{\Omega}}{U_z} i & \frac{im}{r\rho_0 U_z} & 0 \\ -\frac{\rho_0 \hat{\Omega}}{\zeta} & \frac{\rho_0}{\zeta} \left[\frac{dU_z}{dr} - \left(\frac{U_\theta^2}{c_0^2} + 1 \right) \frac{U_z}{r} \right] - \frac{\rho_0 U_z}{\zeta} \frac{d}{dr} & -\frac{m\rho_0 U_z}{r\zeta} & i \frac{U_z \hat{\Omega}}{c_0^2 \zeta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{U_z} \frac{ds_0}{dr} & 0 & 0 & -i\hat{\Omega} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

同理，给出环形管道 ($h \leq r \leq 1$) 的 Ingard-Myers 边界条件：

$$\begin{aligned} Z_h \frac{\omega \hat{u}_r(h)}{U_z(h)} + \frac{\hat{\Omega}(h) \hat{p}(h)}{U_z(h)} - \kappa \hat{p}(h) &= 0 \\ Z_1 \frac{\omega \hat{u}_r(1)}{U_z(1)} - \frac{\hat{\Omega}(1) \hat{p}(1)}{U_z(1)} + \kappa \hat{p}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

当管道内存在平均旋流时，特征方程不再是 Bessel 方程，而是线化欧拉方程组。径向的特征函数也无法写成 Bessel 函数的形式。本文采用数值配置法的方式求解该问题。所谓配置法，即将所求方程组再配置点处展开求解，然后利用配置点除的值可以插值得到任意点的值。这里，配置点选取 N 阶 Chebyshev 多项式的极点，即

$$r_j = \cos \frac{\pi j}{N}, j = 0, \dots, N \quad (1.21)$$

若令 $f(r)$ 为 $[-1, 1]$ 上连续函数，则 $f(r)$ 可以用 N 阶插值多项式 $g_j(r)$ 插值得到，即

$$f(r) = \sum_{j=0}^N f(r_j) g_j(r) \quad (1.22)$$

这里令

$$g_j(r) = \frac{(-1)^{j+1} (1-r^2) T'_N(r)}{\bar{c}_i N^2 (r - r_i)}, j = 0, \dots, N \quad (1.23)$$

其中，

$$\bar{c}_j = \begin{cases} 2 & j = 0, N \\ 1 & 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad (1.24)$$

所以任意扰动量 f ，在非配置点处函数值可由配置点 r_j 处插值得到，即

$$f(r) = \frac{(1-r^2) T'_N(r)}{N^2} \sum_j f(r_j) \frac{(-1)^{j+1}}{\bar{c}_j (r - r_j)} \quad (1.25)$$

其中，

$$T'_N(r) = \frac{N \cdot \sin(N \arccos r)}{\sqrt{1-r^2}} \quad (1.26)$$

从特征方程 (1.19) 可以看出，系数矩阵里包含了变量的导数，所以这里需要求解插值函数的导数。令扰动量在配置点处的导数为

$$\frac{df(r_i)}{dr} = \sum_{j=0}^N D_{ij} f(r_j), i = 0, \dots, N \quad (1.27)$$

则导数矩阵为

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{c_i(-1)^{i+j}}{2c_j \sin \frac{\pi}{2N}(i+j) \sin \frac{\pi}{2N}(-i+j)} & i \neq j; i = 0, \dots, N/2; j = 0, \dots, N \\ -\cos\left(\frac{\pi i}{N}\right) & i = j; i = 1, \dots, N/2; j = 1, \dots, N \\ \frac{2N^2+1}{6} & i = j = 0 \\ -D_{N-i, N-j} & i = N/2 + 1, \dots, N; j = 0, \dots, N \end{cases} \quad (1.28)$$

值得一提的是，在采用配置法求解特征值问题时，由于在边界上的配置点既要满足控制方程又要满足边界条件，因此在边界点上，方程是“超定”的。处理“超定”边值问题的方法有两种，一种叫作“强制”边界条件，即用声学边界条件替换边界上某个控制方程；另一种叫作“自然”边界条件，即将控制方程进行变换，使控制方程的个数与未知数的个数相同。这里采用“强制”边界条件进行计算。

1.3 案例分析

上述基于 Pridmore-Brown 方程的特征值分析，已经对于非均匀流下的壁面边界层和临界边界的声学特征有了一定的认识。拓展到旋流框架，我们需要对算法进行验证，并分析旋流、软壁面边界条件、熵等参数对特征值及其声传播的影响。

| 案例 | U_z | $U_\theta = Tr/r + \Omega r$ | w | m | h | 边界条件 | 熵条件 |
|----|--------|-------------------------------|------|---------|------|----------|------------------|
| 00 | 0; 0.5 | 0 | < 10 | 0 – 20 | 0.01 | 硬壁 | 均熵 |
| 01 | 0.5 | 0; 0.1r + 0.1/r; 0.2r + 0.2/r | 25 | 15 | 0.6 | 硬壁 | 均熵 |
| 02 | 0.5 | 0 | 25 | 15 | 0.6 | 硬壁 vs 软壁 | 均熵 |
| 03 | 0.5 | 0; 0.1r + 0.1/r; 0.2r + 0.2/r | 25 | 15 | 0.6 | 软壁 | 均熵 |
| 04 | 0.5 | 0.1r + 0.1/r | 25 | 5/10/15 | 0.6 | 软壁+旋流 | 均熵 |
| 05 | 0.3 | 0.3r + 0.3/r | 20 | 2 | 0.6 | 硬壁 | $\beta=0, 2, -2$ |
| 06 | 0.4 | 0.2/r | 10 | 2 | 0.6 | 硬壁 | $\beta=-2$ |
| 07 | 0.5 | 0 | 25 | 15 | 0.6 | 软壁 | $\beta=-1.5-0.5$ |

1.3.1 案例 00：算法验证以及优缺点讨论

案例 00 见图 (1.1) 给出了径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性。由于旋流框架向下兼容均匀流和 Pridmore-Brown 方程，该案例目的是验证数值算法的正确性。利用配置法求特征值并与图 (1.3) 对比。可以看到，该数值方法在较少的配置点 ($N=31$) 的情况下，便可以获得相同的结果。但随着频率的增加，配置点数增加，计算时间也会大幅度提高。

对比 Rienstra [2019] 在计算 Pridmore-Brown 方程使用的 Galerkin 方法：首先，两者都使用了 Chebyshev 多项式作为基函数，均具有很高的插值精度，同时在边界处具有高分辨率。Galerkin 方法更易拓展到大型的数值仿真软件，且利用迭代求特征值，能依次捕捉特征值，减少人为区分不同模态的特征值的麻烦。配置法相对更为简单易用，适合处理复杂方程，且效率更高。但是两者都采用多项式插值的思想，对于高频问题，均收敛艰难，通常采用 WKB 方法更为合适。对于对流模态，由于其在边界处大幅震荡但在远离边界快速衰减的特征，相比 Galerkin 方法，配置法能较好地捕获该特

征。尽管如此，由于对流模态通常有无限多个，无法利用配置法依次求解格林函数。不少研究表明，Frobenius 展开求解可能是更为合适的方法，具体参考 [Brambley et al. [2012], King et al. [2021]]。在实际处理过程中，cut-on 模态以及靠近实轴的 cut-off 模态的前几项能量最高，其他模态项（包括近对流模态）实际声能占比很小，通常情况下对于声传播问题来说可以忽略。

1.3.2 案例 01：旋流的影响

采用上述的配置法求解线性欧拉方程的特征值问题，可以得到轴向波数（特征值）和扰动量的径向分布（特征向量）。包含旋流的典型特征模态谱主要包含两类模态：一类是（近/纯）声模态，这类模态并不跟随平均流运动，其特征值的分布是离散的；另一类是涡量占优的（近/纯）对流模态，这类模态基本跟随平均流运动，即对流波数近似为零或者为零。因此，在无旋流的情况下，对流模态的轴向波数分布位于：

$$\inf_{h < r < 1} \frac{w}{U_z(r)} \leq k \leq \sup_{h < r < 1} \frac{w}{U_z(r)} \quad (1.29)$$

而在有旋流情况下，对流模态的周向波数分布位于：

$$\inf_{h < r < 1} \frac{w - mU_\theta(r)}{U_z(r)} \leq k \leq \sup_{h < r < 1} \frac{w - mU_\theta(r)}{U_z(r)} \quad (1.30)$$

案例 01 见图 (1.4) 为典型的无旋流和旋流的轴向波数对比，可以探究旋流对声传播的影响，也能验证算法的准确性。其中，管道内径为 0.6，轴向模态 m 为 15，频率 w 为 25，轴向速度为 0.5，内外均为硬壁均熵的条件。根据解析解可知，其 cut-off 连线满足 $real(\kappa) = -wU_z/(1 - U_z^2)$ ，该数值结果 $real(\kappa) = -25 * 0.5 / (1 - 0.5^2) = 16.67$ ，符合要求。同时，对流模态需满足方程 (1.29)， $\kappa = 50$ ，同样在误差可接受范围内。在旋流条件下，对流模态扩展为连续点，这与方程 (1.30) 的结果是一致的。

因此，旋流的引入同样改变了管道声传播的截止和传播特性，对比三个周向速度的结果，其 cut-on 声模态依次递减；同时，cut-off 所在的直线也逐渐右移。Cooper and Peake [2000] 曾将旋流的因素考虑在导致进口叶道区域产生声共振的因素之一。该案例也可以推测这一点，体现在旋流使得原本传播的模态截止，导致声音无法继续后传，而非稳定的近对流模态的能量却逐渐增加。

1.3.3 案例 02-03：软壁面吸声效应

在管道降噪问题中，根据实际情况选择合适吸声阻抗参数的材料十分关键。案例 02-03 对比分析壁面边界条件对特征值的影响，同时还分析旋流的影响，对工程吸声降噪提供一定的理论依据。

案例 02 见图 (1.5)，分别为硬壁、内外均为软壁面、内环软壁面外环硬壁、内环硬壁外环软壁面四种边界条件。可以看出，软壁面的存在使得 cut-on 模态逐渐往 cut-off 模态方向聚拢，极大程度地改变了管道声传播的特性，尤其是对截至频率的影响。另外内外均设软壁相比单环软壁影响更大。同时，吸声的效果与模态和频率等参数直接相关。

案例 03 见图 (1.6) 分析了均熵情况下，平均旋流对软壁面吸声效果的影响，选取的旋流参数与案例 01 一致。可以看出，在旋流条件下，随着旋流的增大无衰减的传播声模态个数逐渐减少，声模态截至线右移，对流模态左移并且范围变大，这与案例 01 旋流的影响类似。加上软壁面后，不同旋流参数对截至模态的曲线形状并未产生改变，可以认为软壁面和旋流效果可以叠加。另一方面，软壁面并不改变对流模态的性质，其原因与对流模态的能量由于流动的涡量的作用效果，而并非压强的作用有关。当然，从图 (1.6) 右图可以看出，对流模态的数值仿真会分裂出上下两条曲线，这是数值计算的误差所导致的，其两端连线与理论对流模态的“critical layer”保持一致。值得注意的是，在对

流模态末端会出现离散的一些点，通常称为近对流模态或者旋转模态，它们包含了绝大部分的非定常涡量，该模态可能与管道声学失稳之间的关系。

1.3.4 案例 04：周向模态的分布规律

案例 04 见图 (1.7) 分析了旋流同时存在内外软壁面的情况下，周向模态数对特征模态计算结果的影响。 m 分别取 -15, -5, 5, 15。可以看出，当旋流与声波传播方向相反时 (m 为负) 声模态的截止线相对左移，有更多无衰减的传播声模态，而对流模态相对右移，并且范围扩大；当旋流与声波传播方向相同时 (m 为正) 声模态的截止线相对右移，无衰减的传播声模态数量减小，而对流模态相对左移，并且范围扩大。

我们从另外一个角度也可以印证这一规律，对所有模态的叠加得到周向模态和频率的关系图 (1.8)。均匀流截止模态相对周向模态对称，但幅值由于“多普勒效应”发生偏移；旋流截止模态相对周向模态非对称，幅值也会随着周向流动发生偏移。

1.3.5 案例 05：非均熵的影响

旋转机械靠近叶片的管道平均流实际上应该为非均熵。对于非均熵情况，除了声-涡耦合之外，熵扰动的变化也很难直接通过脉动压力进行表达，其特征矩阵也必须将熵扰动参数或者压力脉动参数考虑在内。

为更符合实际叶轮机械工作工况，Cooper [2006] 曾建议将均熵假设修改为随半径对数变化，即以下形式：

$$s_0(r) = -\log(r^\beta) \quad (1.31)$$

进而，速度和密度分别将满足：

$$c_0^2(r) = c_0^2(1)r^{-\beta/c_p} + (\gamma - 1)r^{-\beta/c_p} \int_1^r s^{\beta/c_p} \frac{U_\theta^2(s)}{s} ds \quad (1.32)$$

$$\rho_0^{\gamma-1}(r) = r^{\beta/c_v} c_0^2(r) \quad (1.33)$$

因此，我们可以改变 β 来调节平均熵量在 r 方向的分量，以近似实际的叶轮机械管道复杂流动下的声传播特性。

案例 05 见图 (1.9)，利用上述熵的对数表达的形式，选取 β 值为 0, 2, -2 分别对应均熵，熵有负梯度和熵有正梯度三种情况来分析平均流熵梯度对声传播特性的影响。参数为 $h = 0.5$, $U_z = 0.3$, $w = 20$, $U_\theta = 0.3r + 0.3/r$, $m = 2$ 。平均流的压力、声速、密度和熵分布如图 (1.10)。可以看出，平均熵的梯度会改变 cut-off 截止线，正的平均熵梯度 (β 为负) 比均熵情况有更多的传播声模态，负的平均熵模态 (β 为正) 与均熵情况相比传播声模态的数量会减少。这是因为，当我们增加熵值 $s_0(r)$ 时，同时也增加了声速 $c_0(r)$ ，也就减小了周向流速 U_z (无量纲形式 = 实际轴向流速除以声速的平方)。在均匀流中，cut-off 截至线的实值在 $real(\kappa) = -wU_z/(1 - U_z^2)$ 附近。因此增加熵值 $s_0(r)$ 使得截止线右移。另外，cut-on 模态同样会随着 U_z 的增加，向虚数 cut-off 转化。因此随着熵值的增大，cut-on 的模态越来越少。

1.3.6 案例 06：不稳定模态

当平均流是非均熵情况时，包含旋流的特征值计算会出现不稳定模态，即模态的压力扰动沿着传播方向逐渐放大的模态。对于向下游传播的模态，当轴向特征值虚部为负数时，由于扰动量表达式中 $\exp(-Im(\kappa)z)$ 项的存在，使得扰动随 z 的增加而放大，因此对于向下游传播的模态，轴向特征值虚部为负的模态为不稳定模态。这类模态在特征值谱中可以很容易的分辨，并且不随配置点取的多少而改变，因此不同于模态计算中出现的伪模态。

首先说明不稳定波的特性，见图 (1.11)。选取的参数为 $h = 0.4$, $Uz = 0.3$, $w = 10$, $U_\theta = 0.2/r$, $m = 2$ 。首先，给出 $\beta = -2$ 情况下的对流对流模态附近的非稳定模态及其特征函数。可以看到，在对流模态附近出现上下对称分布的几组模态，其脉动压力特征谱在内壁面边界幅值较大，随半径增大迅速衰减为 0。参考管莹 et al. [2008] 所用的计算能量占比的方法，从图中可以看出，非均熵旋流情况下，压力仍然均集中在近声模态部分，而涡量大部分集中在近对流模态部分。此时，熵值扰动量能量不完全为 0，部分下游的低阶近声模态以及近对流模态附近的非稳定模态将与熵耦合，占据一部分能量。

下面依次分析轴向速度、周向模态数和平均流熵梯度对不稳定模态的影响，见图 (1.12)。其规律是：随着轴向速度增加，不稳定模态数量减小；随着周向模态数 m 的增大，不稳定模态数量减小；当熵参数为负（熵有正梯度）时比均熵情况有更多不稳定模态。尤其在 β 减小的一定程度，例如 $\beta = -4$ 时，从图中可以看到，除了在对流模态附近产生非稳定模态以外，截止线附近也“脱落”出离散的不稳定模态（全局图 (j)）。

1.3.7 案例 07：非均熵的不稳定熵模态

案例 07 见图 (1.13) 考虑在无旋流条件下，非均熵与软壁面边界条件同时作用的结果。当我们改变均匀流的熵值 $s_0(r)$ 时，基本上表现为三个主要特征。首先，当我们增加系数 β ，cut-off 截止线将会向右移动。其次，随着系数 β 的增加，cut-on 的模态数也逐渐减少。再者，管道边界敷设声衬情况下，当熵值减小的一定程度（如 $\beta=-1\&-1.5$ ），可以发现在上下游均会出现区别于声学和对流模态的不稳定模态。前两个现象已经在上节较好解释，不再赘述。

不一样的地方在于，在 $\beta = -1.5$ 的条件下，出下了 3 个“surface-entropy”模态 (Mathews [2016])，这和其他 cut-off 和 cut-on 模态之间的有所区别。显然，声模态的特征函数类似于正弦曲线，根据均匀流圆管声传播的解析式，我们可以类比得到，声模态经过实轴的次数类似于径向模态的阶数。但是，对于“surface-entropy”模态则表现出不同的形态，其在内壁面振动，随径向逐渐衰减为 0。该特性与上述非稳定模态类似，也是区别于均熵旋流所独有的。

1.4 管道格林公式

1.4.1 均匀流管道格林公式

可以将管道模态视为表达管道中任何声场的基础解。但点声源的格林公式，其问题是带有局部源的 x-傅立叶变换解的极点，可以通过留数定理，将这些极点作为模态累加的解。参考 (Rienstra and Tester [2008], Rienstra [2015])。考虑一个无量纲半径为单位 1 的圆柱管，亚音速轴向速度 M 的平均流量以及无量纲角频率 w 的谐波压力和速度扰动 \hat{p} 。压力由 $\mathbf{x}_0(r_0, z_0, \theta_0)$ 处的点源激发，并满足方程式：

$$\nabla^2 \hat{p} - \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \hat{p} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (1.34)$$

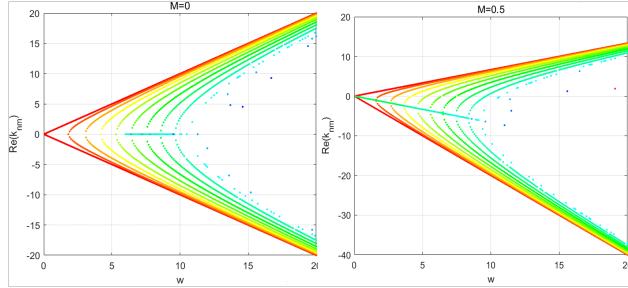


Figure 1.3: 旋流管道框架下的配置算法用于验证图 (1.1) 径向模态为 1 下的 cut-on 模态轴向波数的实数项分布特性。

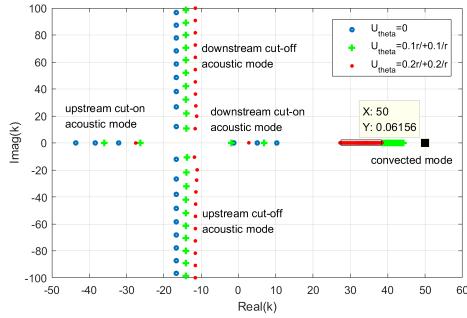


Figure 1.4: 案例 01: 轴向波数无旋流与旋流对比-参数: $h = 0.6, w = 25, m = 15, Uz = 0.5$, 硬壁

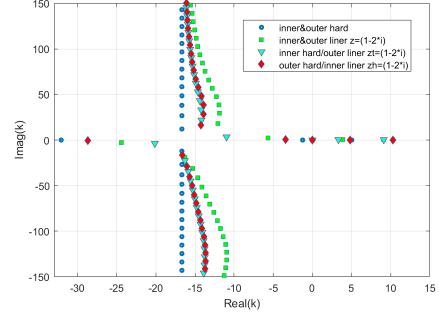


Figure 1.5: 案例 02: 轴向波数硬壁与软壁面对比-参数:

$h = 0.6, w = 25, m = 15, Uz = 0.5$, 硬壁 vs 软壁

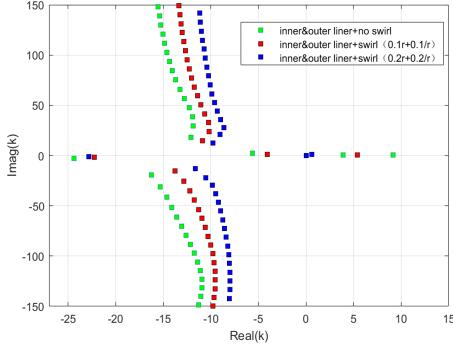
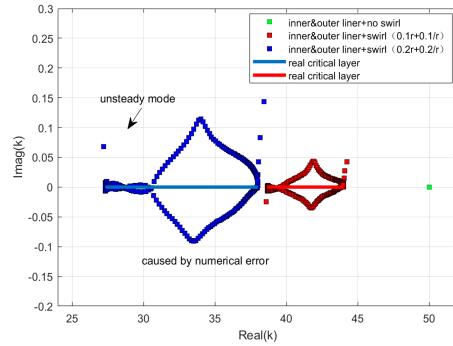


Figure 1.6: 案例 03: 旋流对软壁吸声效果的影响对比-参数: $h = 0.6, w = 25, m = 15, Uz = 0.5$, 软壁+旋流



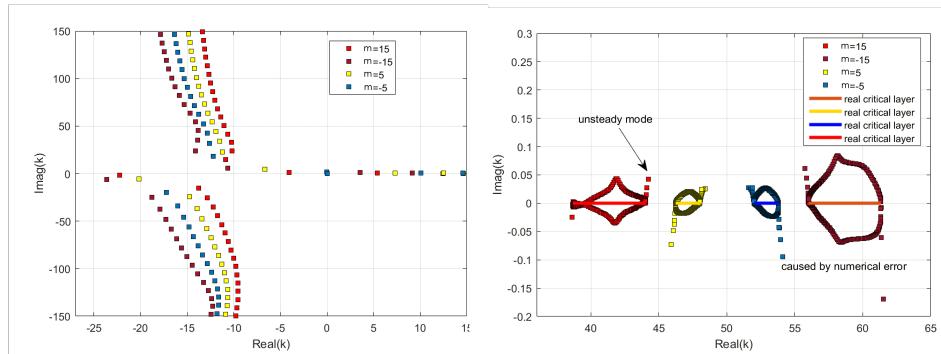


Figure 1.7: 案例 04: 不同周向模态旋流对软壁面吸声效果对比-参数:
 $h = 0.6, w = 25, m = -5/-15/5/15, Uz = 0.5$

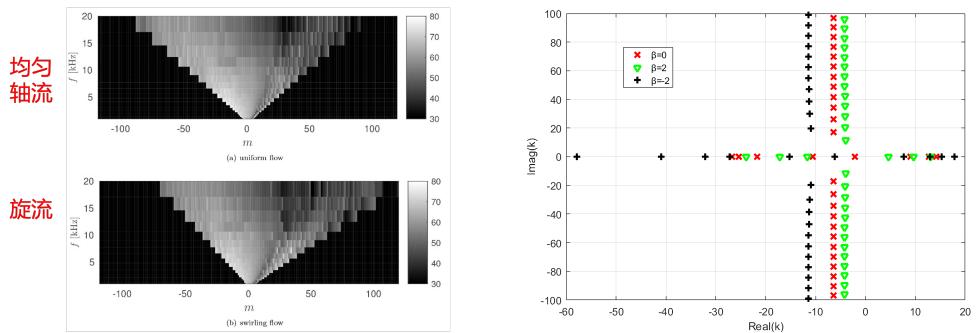


Figure 1.8: 旋流和均匀流的特征模态在频率-周向模态上的幅值分布图

Figure 1.9: 案例 05: 不同熵分布等声模态特征值分布

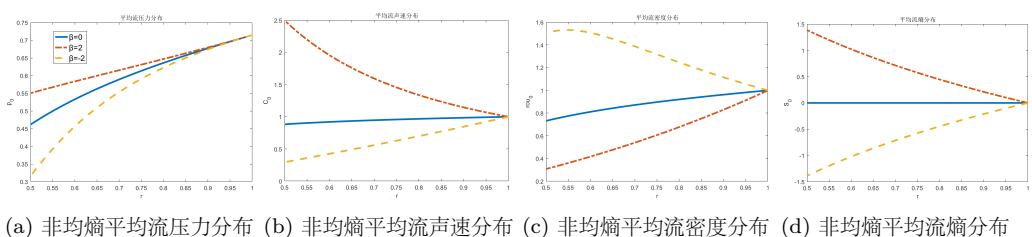


Figure 1.10: 案例 05 中的均匀流随 r 的分布

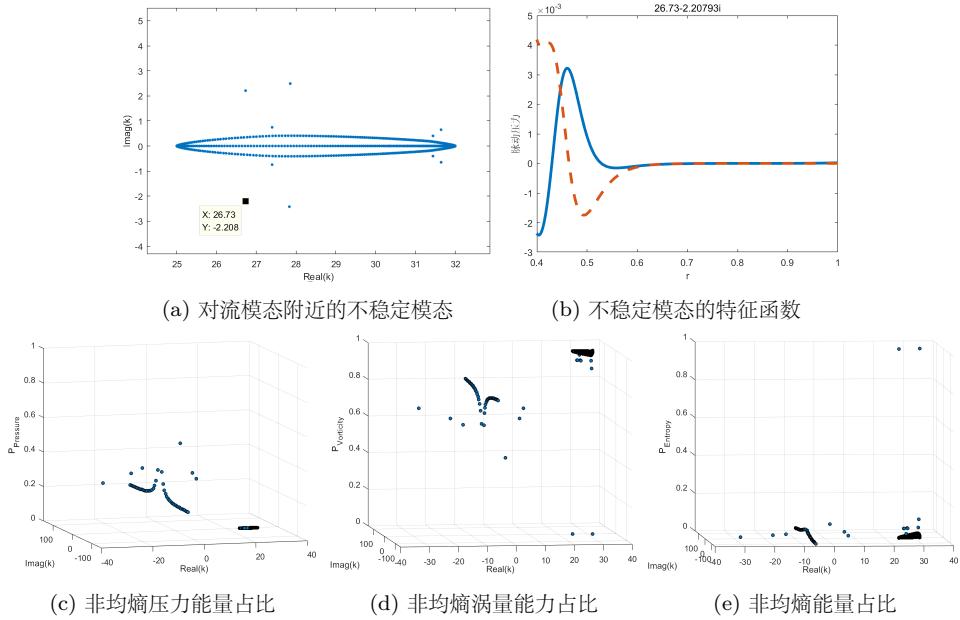


Figure 1.11: 案例 06: 不稳定模态及其特征函数及其各成分的能量占比

假设为软壁面，则阻抗边界条件满足：

$$\left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \hat{p} + i\omega Z \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0 \text{ at } r = 1 \quad (1.35)$$

下面开始推导满足特定管道特征函数下的任意声源位置的格林函数。已知 δ 函数可以通过广义傅里叶级数的形式展开：

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa(z - z_0)} d\kappa \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta - \theta_0)} \quad (1.36)$$

同时，脉动压力展开形式为：

$$\hat{p}(z, r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta - \theta_0)} \hat{p}_m(r, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta - \theta_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_m(r, \kappa) e^{-i\kappa(z - z_0)} d\kappa \quad (1.37)$$

将上面两个式子带入波动方程的两边，进行波数域脉动压力分析求解：

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial r} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \hat{p}_m = \frac{\delta(r - r_0)}{4\pi^2 r} \quad (1.38)$$

其中，

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \Omega^2 - \kappa^2 \\ \Omega &= w - \kappa M \end{aligned} \quad (1.39)$$

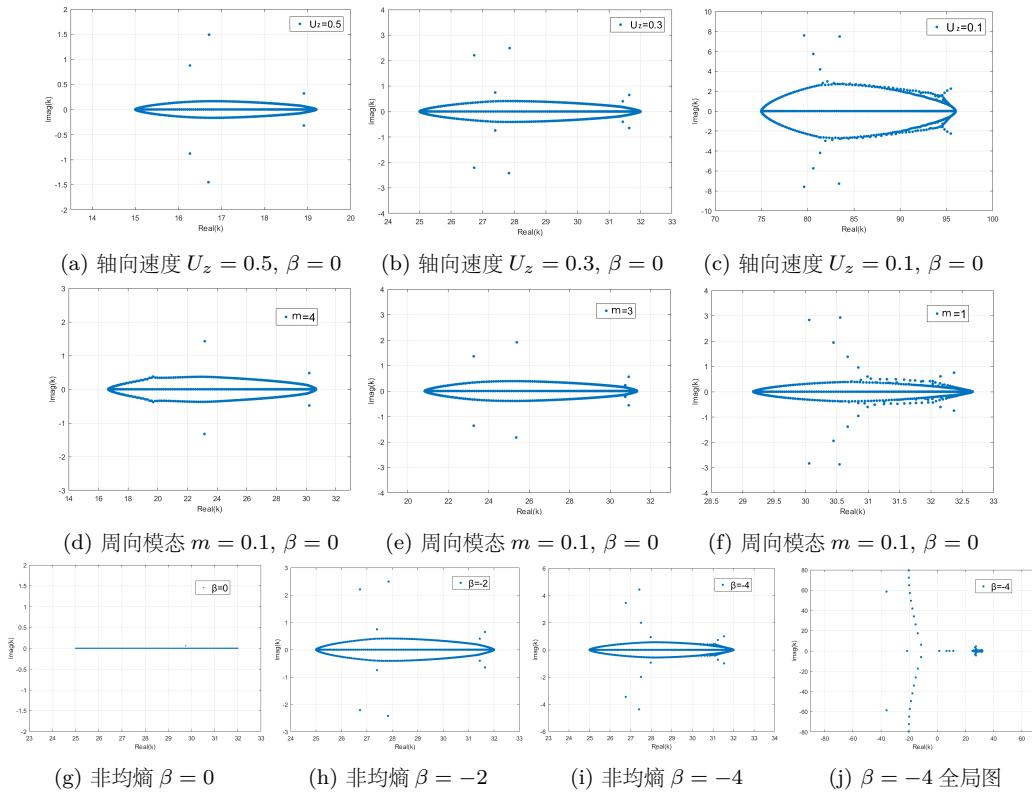
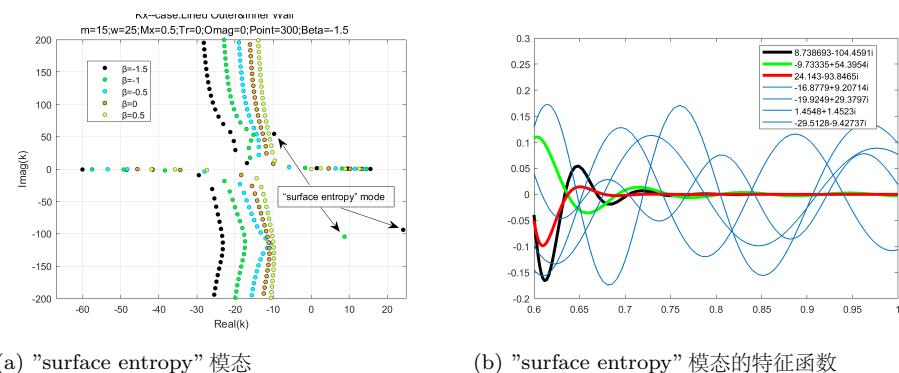


Figure 1.12: 轴向速度、周向模态数和平均流熵梯度对不稳定模态的影响; 其他参数与案例 05 一致

Figure 1.13: 案例 07: 非均熵软壁面条件下的不稳定模态; 参数: $h = 0.6, w = 25, m = 15, U_z = 0.5$

可以通过留数定理推导，得到其特定的解的形式：

$$\hat{p}_m(r, \kappa) = A(\kappa)J_m(\alpha r) + \frac{1}{8\pi}H(r - r_0)(J_m(\alpha r_0)Y_m(\alpha r) - Y_m(\alpha r_0)J_m(\alpha r)) \quad (1.40)$$

其中， H 为 Heaviside 阶跃函数，通过 $r=1$ 处的边界条件：

$$i\Omega^2\hat{p}_m + \omega Z\hat{p}'_m = 0 \quad \text{at} \quad r = 1 \quad (1.41)$$

可以得到 (Rienstra [2015])：

$$A = \frac{1}{8\pi} \left[Y_m(\alpha r_0) - \frac{i\Omega^2 Y_m(\alpha) + \omega \alpha Z Y'_m(\alpha)}{i\Omega^2 J_m(\alpha) + \omega \alpha Z J'_m(\alpha)} J_m(\alpha r_0) \right] \quad (1.42)$$

$$\hat{p}_m(r, \kappa) = J_m(\alpha r_<) \frac{i\Omega^2 F_m(r_>, \alpha) + \omega Z H_m(r_>, \alpha)}{8\pi E_m(\kappa)} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} E_m(\kappa) &= i\Omega^2 J_m(\alpha) + \omega \alpha Z J'_m(\alpha) \\ F_m(r, \alpha) &= J_m(\alpha)Y_m(\alpha r) - Y_m(\alpha)J_m(\alpha r) \\ H_m(r, \alpha) &= \alpha J'_m(\alpha)Y_m(\alpha r) - \alpha Y'_m(\alpha)J_m(\alpha r) \end{aligned} \quad (1.44)$$

代入上述定义式，我们发现 F_m 和 H_m 都是 α^2 的解析函数，而 E_m 和 $J_m(\alpha r_<)$ 都可以写成 α^m 乘以 α^2 的解析函数。结果表明， $\hat{p}_m(r, \kappa)$ 是 κ 的解析函数。它具有离散的极点 $\kappa = k_n^{m\pm}$ ，由下式的零点得到：

$$E_m(k_n^{m\pm}) = 0 \quad (1.45)$$

其最终的结果通过傅立叶逆变换利用复变分析在 κ 复数域找到：对于 $z > z_0$ ，连接下半平面周围的积分轮廓以封闭向右传播模式的复模态波数；对于 $z < z_0$ 的上半平面连接 z 的上半平面，以封闭向右传播模态。

定义：

$$Q_{mn} = \pm \left[(k_{mn}^\pm + \Omega_{mn}^\pm M) \left(1 - \frac{m^2}{(\alpha_{mn}^\pm)^2} - \frac{(\Omega_{mn}^\pm)^4}{(\omega \alpha_{mn}^\pm Z)^2} \right) - \frac{2iM\Omega_{mn}^\pm}{\omega Z} \right] \quad (1.46)$$

其中， $+$ / $-$ 分别代表向右/向左传播的模态。

$$\left. \frac{dE_m}{d\kappa} \right|_{\kappa=k_n^{m\pm}} = \pm \omega Z Q_{mn} J_m(\alpha_{mn}^\pm) \quad (1.47)$$

利用留数定理，对于 $z > z_0$ ，对极点 $\kappa = k_n^{m+}$ 进行留数求和；对于 $z < z_0$ ，对极点 $\kappa = k_n^{m-}$ 进行留数求和。根据特征值方程 (1.45) 和 Wronskian 方程 $J_m(x)Y'_m(x) - Y_m(x)J'_m(x) = \frac{2}{\pi x}$ ，得到

$$i\Omega_{mn}^2 F_m(r_>, \alpha_{mn}) + \omega Z H_m(r_>, \alpha_{mn}) = -\frac{2\omega Z}{\pi J_m(\alpha_{mn})} J_m(\alpha_{mn} r_>) \quad (1.48)$$

其中， $\alpha_{mn} = \alpha(k_{mn})$ 。最终，我们可以将上下游波数进行整合得到模态叠加形式：

$$\hat{p}_m(r, z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{J_m(\alpha_{mn}r) J_m(\alpha_{mn}r_0)}{Q_{mn} J_m^2(\alpha_{mn})} e^{-i\kappa_{mn}(z-z_0)} \quad (1.49)$$

1.4.2 旋流管道单极子格林公式

Possion and Peake [2013] 考虑了管道中轴向剪切和旋转的基流的影响, 将方程 (1.17) 重新整理为仅包含压力扰动的六阶线性算子作用下的形式, 并将其应用于转子尾缘噪声预测 (Possion and Peake [2012])。

$$\boxed{F^M(\hat{p}) = S^M} \quad (1.50)$$

算子 F^M 定义为:

$$\begin{aligned} F^M := & \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\bar{D}_0^2}{Dt^2} - \frac{\bar{\partial}^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\bar{\partial}^2}{\partial \theta^2} \right) \Re^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\bar{D}_0}{Dt} - U'_z \frac{\bar{\partial}}{\partial z} - Y_\theta \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \left(\frac{U_\theta^2}{rc_0^2} - \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right) \frac{\bar{D}_0}{Dt} \right) \Re \mathbf{T} \\ & + \Re \frac{\bar{D}_0}{Dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \mathbf{T} - \frac{\bar{D}_0}{Dt} \left[2U'_z \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + 2 \left(\frac{U_\theta}{r} \right)' \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + \Im'_\theta \right] \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.51)$$

源项最终表达为 (S^M 继续展开为 S_1^M 和 S_2^M , 具体参考 Mathews [2016]):

$$\begin{aligned} S^M = & \Re^2 \left(S_2^M \right) - \Re \left(\frac{\bar{D}_0}{Dt} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \right) \right) - U'_z \frac{\bar{\partial}}{\partial z} - Y_\theta \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \\ & \left(\frac{U_\theta^2}{rc^2} - \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right) \frac{\bar{D}_0}{Dt} \left(S_1^M + \frac{\bar{D}_0}{Dt} \left[2U'_z \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + 2 \left(\frac{U_\theta}{r} \right)' \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} \frac{\bar{D}_0}{Dt} + \Im'_\theta \right] S_1^M \right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

其中,

$$\Re = \frac{\bar{D}_0^2}{Dt^2} + \Im_\theta, \mathbf{T} = -\frac{\bar{D}_0}{Dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} - \frac{2U_\theta}{r^2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \theta} + \frac{U_\theta^2}{rc_0^2} \frac{\bar{D}_0}{Dt} \quad (1.53)$$

$$\Im_\theta = \frac{2U_\theta(r)}{r^2} \frac{d}{dr} (rU_\theta) + \frac{U_\theta}{r} \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} - \frac{U_\theta^2}{rc_0^2} \right) \quad (1.54)$$

采用本征函数法数值求解格林函数的频域形式 \hat{G}_w 。首先, 我们对上式方程对时间作傅里叶变换, 并展开为柱坐标的表达形式, 得:

$$F^M \left(\hat{G}_w(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) e^{-iwt} \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{-iwt} = \delta(z - z_0) \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\theta - \theta_0) e^{-iwt} \quad (1.55)$$

脉动压力即可表达为:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, t) = \int \left(\hat{G}_w(r, x, \theta | r_0, x_0, \theta_0) S(r_0, x_0, \theta_0) \right) dz_0 e^{-iwt} \quad (1.56)$$

进一步, \hat{G}_w 还可以通过傅里叶变换得到波数域的表达形式:

$$\hat{G}_w(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta-\theta_0)} \int G_m(r | r_0; w, k) e^{i\kappa(z-z_0)} dk \quad (1.57)$$

参考 Duffy [2015], 可以给出 \hat{G}_n 的表达形式如下:

$$\hat{G}_m(r | r_0; w, \kappa, m) = \frac{1}{r_0 W_m(r_0) J_m(r_0, \kappa)} \begin{cases} g_1(r_0; w, \kappa, m) g_2(r; w, \kappa, m) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; w, \kappa, m) g_1(r; w, \kappa, m) & r > r_0 \end{cases} \quad (1.58)$$

其中,

$$\begin{aligned} J(r_0, \kappa) &= [\Omega^2(r_0, \kappa) - \mathcal{U}_\theta(r_0)] \Omega^2(r_0, \kappa) \frac{dg_1}{dr}(r_0; w, \kappa, m) \\ \Omega(r) &= w - \kappa U_z(r) - \frac{m U_\theta(r)}{r} \\ \mathcal{U}_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r U_\theta) \end{aligned} \quad (1.59)$$

W 为 g_1, g_2 的 Wronskian 行列式:

$$W(r_0, w, \kappa, m) = g_1(r_0; w, \kappa, m) \frac{dg_2}{dr}(r_0; w, \kappa, m) - g_2(r_0; w, \kappa, m) \quad (1.60)$$

根据留数定理, 可得:

$$\hat{G}_{mn}(z, r | z_0, r_0) = \pm \frac{i}{2\pi} e^{ik_n^m(z-z_0)} \frac{1}{r_0 \left(\frac{\partial W}{\partial \kappa} J_0 + \frac{\partial J_0}{\partial \kappa} W \right)} \begin{cases} g_1(r_0; k_n^m) g_2(r; k_n^m) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; k_n^m) g_1(r; k_n^m) & r > r_0 \end{cases} \quad (1.61)$$

其中,

$$\frac{\partial W}{\partial \kappa} = \frac{\partial g_1}{\partial \kappa} \frac{\partial g_2}{\partial r} + g_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g_2}{\partial \kappa} \right) - g_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \kappa} \right) - \frac{\partial g_2}{\partial \kappa} \frac{\partial g_1}{\partial r} \quad (1.62)$$

通过上述关系, 利用 “Chebfun” 数值方法求解得到给定频率 w 下的 \hat{G}_w 结果。最终, 对这些周向模态成分的 \hat{G}_n 进行逐层累加求和得到:

$$\begin{aligned} \hat{G}_m &\approx \sum_n \hat{G}_n(z, r | z_0, r_0) \\ \hat{G}_w &= \sum_m e^{im(\theta-\theta_0)} \hat{G}_m \end{aligned} \quad (1.63)$$

将格林函数代入主方程得到:

$$\mathcal{A}(r, \kappa_n^m) \frac{d^2 g_j}{dr^2}(r; \kappa_n^m) + \mathcal{B}(r, \kappa_n^m) \frac{dg_j}{dr}(r; \kappa_n^m) - \mathcal{C}(r, \kappa_n^m) g_j(r; \kappa_n^m) = 0 \quad (1.64)$$

带入 $r = 1$ 和 $r = h$ 边界条件求解得到 g_1, g_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial \kappa}(1; \kappa_n^m) = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial \kappa}(h; \kappa_n^m) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g_1}{\partial \kappa} \right)(1; \kappa_n^m) = \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \kappa}(1, \kappa_n^m) g_1(1; \kappa_n^m) + \hat{f}_1(1, \kappa_n^m) \frac{\partial g_1}{\partial \kappa}(1; \kappa_n^m) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g_2}{\partial \kappa} \right)(h; \kappa_n^m) = \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \kappa}(h, \kappa_n^m) g_2(h; \kappa_n^m) + \hat{f}_2(h, \kappa_n^m) \frac{\partial g_2}{\partial \kappa}(h; \kappa_n^m) \end{cases} \quad (1.65)$$

1.4.3 旋流管道偶极子格林公式

通常情况下，压气机管道里面的模型常被简化为均匀流背景下的叶片偶极子噪声。如图 (1.14) 所示，Goldstein [1976] 将其简化模型计算一个无限大圆形管道中均匀流下的一个风扇的辐射声场。

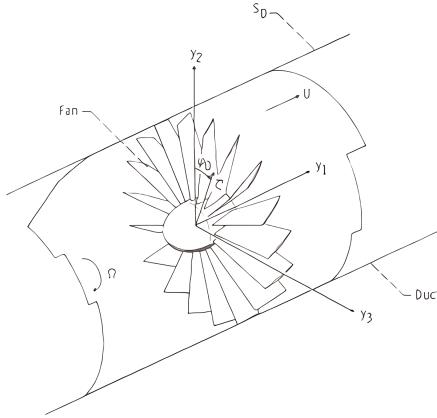


Figure 1.14: 管道叶片发声基本模型

类似 Lighthill 声类比公式出发，从最基本的 FW-H 方程出发。最终得到包含格林函数的展开形式：

$$\left[\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \nabla^2 \right] \{p(\mathbf{x}, t) H(f)\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [T_{ij} H(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)] + \frac{D}{Dt} [Q \delta(f)] \quad (1.66)$$

其中，

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho u_i u_j + [(p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] \delta_{ij} - \sigma_{ij} \\ L_i &= \rho u_i [u_n - (v_n - U_{\infty n})] + P_{ij} n_j \\ Q &= \rho [u_n - (v_n - U_{\infty n})] + \rho_0 (v_n - U_{\infty n}) \end{aligned} \quad (1.67)$$

上式方程 (1.67) 包含三项，分别为四极子、偶极子和单极子产生的噪声。

从该思想出发，Posson and Peake [2012, 2013] 逐步推导了管道内的偶极子格林公式。在此，我们仅仅给出略掉复杂的推导细节给出最终结论，假设偶极子的方向为 $\mathbf{n} = [n_z, 0, n_\theta]$ ，写成基于单极子格林函数的算子 \mathcal{T}_0 的形式。

时域表达形式：

$$p(\mathbf{x}, t) = \int \Delta P(x_0, t_0) \mathcal{T}_0(G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))(t_0) dt_0 \quad (1.68)$$

$$\mathcal{T}_0(G) = n_x D_0^2 \frac{\partial G}{\partial z}|_{z_0} + n_\theta \left(\frac{D_0^2}{r_0} \frac{\partial G}{\partial \theta_0} + 2 \frac{U_\theta}{r_0} \mathcal{R}(G) \right) \quad (1.69)$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\hat{G}) = & \left[\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{D_0}{Dt_0} \cdot \right) + \frac{d(r_0 U_\theta)}{r_0 dr_0} \frac{\partial}{r_0 \partial \theta_0} + \frac{dU_z}{dr_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \right] \mathcal{D}_0(\hat{G}) \\ & - 2 \left[\frac{dU_z}{dr_0} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{d}{dr_0} \left(\frac{U_\theta}{r_0} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_0} \right] \frac{D_0^2 \hat{G}}{Dt_0^2} - \frac{d}{dr_0} \left[\frac{2U_\theta}{r_0^2} \frac{d(r_0 U_\theta)}{dr_0} \right] \frac{D_0 \hat{G}}{Dt_0}\end{aligned}\quad (1.70)$$

$$\mathcal{D}_0 = \frac{D_0^2}{Dt_0} - \frac{2U_\theta}{r^2} \frac{d(rU_\theta)}{dr}, \quad \frac{D_0}{Dt_0}(.) = \frac{\partial}{\partial t_0} + U_z \frac{\partial}{\partial z} + U_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \quad (1.71)$$

频域表达形式：

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}, t) = & 2\pi i \int_{\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\kappa} \Delta \hat{P}(\mathbf{x}_0, \omega) \mathcal{T}_{m, \kappa}(\hat{G}_m(r | \kappa, \omega)) \\ & \times e^{i\kappa(z-z_0)+im(\theta-\theta_0)-i\omega t} d\kappa d\omega\end{aligned}\quad (1.72)$$

$$\mathcal{T}_{m, \kappa}(\hat{G}_w) = n_z \mathcal{D}_{m, \kappa, r_0}^2 \kappa \hat{G}_w + m n_\theta \left(\frac{\mathcal{D}_{m, \kappa}^2}{r_0} \hat{G}_w + 2 \frac{U_\theta}{r_0} \mathcal{R}_{m, k} \hat{G}_w \right) \quad (1.73)$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{m, k} \approx & \frac{d(r_0 U_\theta)}{dr_0} m/r_0^2 + \frac{dU_z}{dr_0} \kappa \mathcal{D}_{m, \kappa} \\ & - 2 \left[\frac{dU_z}{dr_0} \kappa + \frac{d}{dr_0} \left(\frac{U_\theta}{r_0} \right) m \right] \Lambda_{m, k}^2 - \frac{d}{dr_0} \left[\frac{2U_\theta}{r_0^2} \frac{d(r_0 U_\theta)}{dr_0} \right] \Lambda_{m, k}\end{aligned}\quad (1.74)$$

$$\mathcal{D}_{m, \kappa} = \Lambda_{m, k}^2(\omega) - \frac{2U_\theta}{r^2} \frac{d(rU_\theta)}{dr}, \quad \Lambda_{m, k}(\omega) = -\omega + U_z \kappa + \frac{U_\theta}{r} m \quad (1.75)$$

这里 $\mathcal{R}_{m, k}$ 忽略了一项 $\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{D_0}{Dt_0} \cdot \right)$ 的影响。

感兴趣的读者可进一步参考附录 2 关于格林公式（单极子和三个不同方向的偶极子）的代码，进一步注释链接到参考论文 Mathews [2016] 的对应公式。

1.4.4 旋流管道旋转声源

对于旋转声源来说，我们可以利用上述得到的静止声源的结果，通过变换坐标系为旋转框架来实现。利用关系式 $\theta_0 = \theta_{0R} + \Omega_R t_0$ ，可以得到 $\omega_m = \omega - m\Omega_R$ ，代入频域方程 (1.72)，此时声源项的频域表达式同样需要转换到旋转坐标系的框架，最终整理得到：

$$\begin{aligned}p(z, r, \theta, t) = & 2\pi i \int_{\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\kappa} \Delta \hat{P}(\mathbf{x}_R, \omega_m) \mathcal{T}_{m, \kappa, r_0}(\hat{G}_m(r | \kappa, \omega, r_0)) \\ & \times e^{i\kappa(z-z_0)+im(\theta-\theta_{0R})-i\omega t} d\kappa d\omega\end{aligned}\quad (1.76)$$

1.5 案例分析

接下来，基于上述相应格林函数的数值解，验证五个基本案例，分别为无旋流单极子、有旋流单极子、软壁面边界单极子、偶极子和旋转声源，均为均熵条件，周向模态均截断到-40 至 40，管道内径为 0.6，外径为 1，轴向速度均为 0.5，相应代码请参考 Wang [2018]。

| 案例 | U_z | U_θ | w | m | h | 边界条件 | 类型 |
|----|-------|----------------|-----|------------|-----|------|-------|
| 01 | 0.5 | 0 | 25 | [-40 : 40] | 0.6 | 硬壁 | 单极子 |
| 02 | 0.5 | $0.1r + 0.1/r$ | 25 | [-40 : 40] | 0.6 | 硬壁 | 单极子 |
| 03 | 0.5 | 0 | 25 | [-40 : 40] | 0.6 | 软壁 | 单极子 |
| 04 | 0.5 | 0 | 25 | [-40 : 40] | 0.6 | 硬壁 | 偶极子 |
| 05 | 0.5 | 0 | 25 | [-40 : 40] | 0.6 | 硬壁 | 旋转单极子 |

1.5.1 案例 01：无旋流单极子噪声

案例 01 见图 (1.15) 给出了无旋流情况下，硬壁边界条件下各个模态所占的比重。可以看出，位于 $\theta_0 = 0$ 处的单极子声源所产生的声场呈现上下对称分布。从模态占比图上也能很好的反映这一特点。在声源所在位置处，其强度最大，并随距离的增加逐渐衰减。周向模态绝对值超过 25 之后，其能量也迅速呈现快速衰减的趋势。因此，数值上我们在 -40 到 40 之间采取阶段是合理的。

对于模态的每个分量，分别展示 $m = 0, 5, -5, 20, -20$ 的无旋流声模态特征，见图 (1.16)。周向模态的正负对应各模态旋转的方向。这与解析模型是完全一致的。对于内径 h 较大的管道，径向模态 $n > 1$ 常常快速衰减，因此基于这个假设仅留下 $n < 5$ 的截断可以提高数值计算的效率。

值得提醒的是，案例 01 的参数与 Mathews [2016] 的 Figure 3.30 一致，但结果略有不同。其原因是，Mathews 使用的格林函数是 \hat{p}_m ，该形式为 \hat{G}_m 的近似：

$$\hat{p}_m(r | r_0; w, \kappa, m) = \frac{1}{r_0 W_m(r_0)} \begin{cases} g_1(r_0; w, \kappa, m) g_2(r; w, \kappa, m) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; w, \kappa, m) g_1(r; w, \kappa, m) & r > r_0 \end{cases} \quad (1.77)$$

该操作对问题做了一些简化，忽略了 J_m 项的影响，最终结果的性质上与 \hat{G}_w 相近，但提高了数值稳定性。相应地，若忽略对流模态的影响，只考虑声学特征的贡献，利用留数定理，得到 \hat{p}_n^m (其符号表示，周向模态 m 下的 \hat{p}_n ，隐含径向模态信息)：

$$\hat{p}_n^m(x, r | x_0, r_0) = \pm \frac{i}{2\pi} e^{i\kappa_n^m(x-x_0)} \frac{1}{r_0 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \kappa}(\kappa_n^m)} \begin{cases} g_1(r_0; \kappa_n^m) g_2(r; \kappa_n^m) & r \leq r_0 \\ g_2(r_0; \kappa_n^m) g_1(r; \kappa_n^m) & r > r_0 \end{cases}, \quad (1.78)$$

我们选用实际的 \hat{G}_w ，后续的偶极子求解也基于此。

1.5.2 案例 02：有旋流单极子噪声

首先需要提醒的是，在旋流条件下，在模态叠加过程中声学模态、对流模态以及不稳定模态可能会靠的很近，因此根据之前描述的不同特性加以细致区分；否则若将对流模态和不稳定模态当作声学模态来对待，则 g_1 、 g_2 函数的计算将很难收敛。

案例 01 见图 (1.17)，给出了有旋流情况下，硬壁边界条件下各个模态所占的比重。可以看出，位于 $\theta = 0$ 处的单极子声源所产生的声场呈现非对称分布。同时从模态占比图上看，能量占比向负方向偏移。随着周向模态的绝对值增大，其能量也迅速呈现衰减的趋势。

值得注意的是，在模态比占有周向模态 $m = -20$ 的模态比相邻的模态能量要大一个量级；此模态相比案例 01 的无旋流的同样工况也是不存在的，也就是说，旋流改变对流波数，使该模态能量增强。以下我们将对此进行深入研究。如图 (1.18) 所示，首先我们给出了 $m = -20$ 模态附近的模态占比局部放大图。 $m = -20$ 的模态能量占比相比附近的其他模态高一倍多。对比 $m = -19$ 和 $m = -21$ 的模态分布图。可以看到， $m = -20$ 有着密集分布的“小斑块”，在径向上占据约为两个波长，可能原因是其径向模态和管径相互匹配，发生了类似的“声共振”现象。

尽管如此，周向 $m = -20$ 下到底是哪个径向模态在起作用？同时为何其他模态的径向模态未被激发？带着这些问题，需要进一步对 κ 特征分布图进行研究。如图 (1.19)， $m = -20$ 对于下游能量贡献率最高的主要有 6 个（方块标记点），同时分别做出这 6 个特征值所对应的格林函数 \hat{G}_n 。可以看出，绿色曲线（其特征值为 $-19.05 - 1.419i$ ）的径向模态为 4 阶的格林函数幅值最大。左图标记了从 $m = -19$ 到 $m = -21$ 同为四阶径向模态特征值的运动规律，以下游为例 $m = -20$ 虚部为 -1.419 ，具有极强的不稳定性，这使得输入频率 $w = 25$ 在此处波长匹配，加以不稳定性质导致激发更高的能量。

1.5.3 案例 03：软壁面吸声

案例 03 见图 (1.20) 给出了一个典型的软壁面吸声的压力脉动时空仿真图，动画结果参考 Wang [2018]。该结果对比无旋流和旋流的对比，软壁面边界能规整模态，并降低噪声。具体的原理分析，见上一节 1.3.3。在实际吸声板设计的工程问题中，由于阻抗条件 Z 为理想条件，均匀流的“多普勒”效应外加有边界层存在时，使得吸声问题变得极为复杂。

因此，本文模型仅仅停留在定性分析，仍然需要进行改进 Mathews et al. [2018]。

1.5.4 案例 04：偶极子噪声

1.5.5 案例 05：旋转声源发声

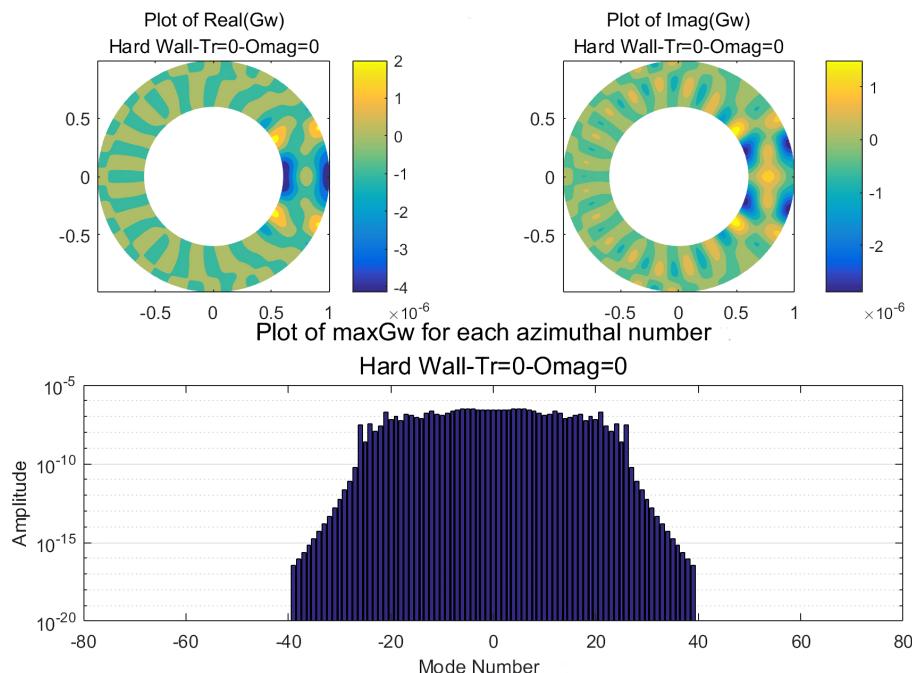


Figure 1.15: 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $z - z_0 = 0.5$, $U_z = 0.5$, $w = 25$, $h = 0.6$ 无旋流。上图为在声源点处的截面的格林函数能量分布，左图为实部、右图为虚部，下图为对应的模态分布。

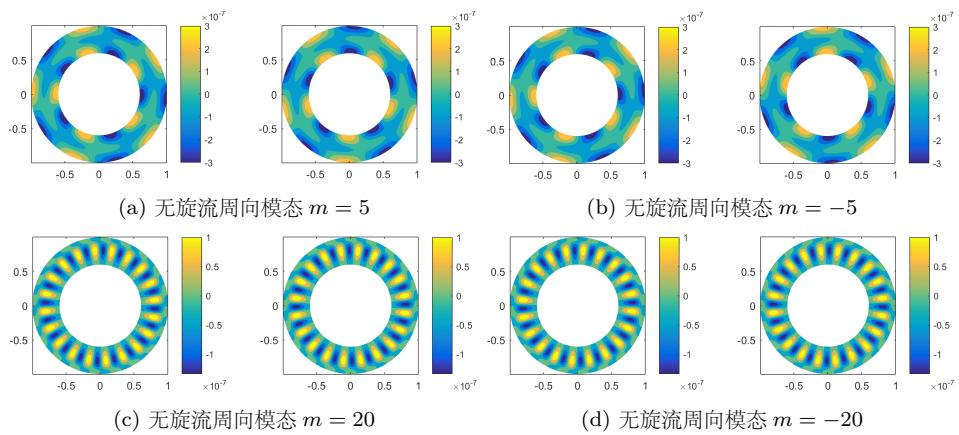


Figure 1.16: 周向模态分解, 对比 $m = 5, -5, 20, -20$ 的截面能量图

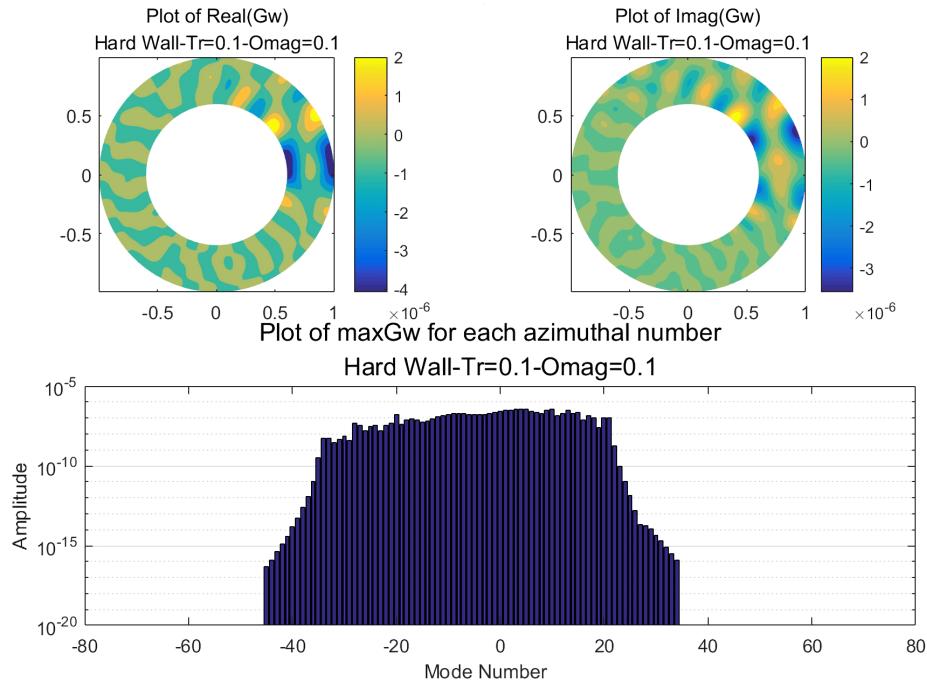


Figure 1.17: 单极子位于 $(r_0, \theta_0) = (0.8, 0)$, $z - z_0 = 0.5$, $U_z = 0.5$, $w = 25$, $h = 0.6$, 有旋流 $U_\theta = 0.1/r + 0.1r$ 。上图为在声源点处的截面的格林函数能量分布，左图为实部、右图为虚部，下图为对应的模态分布。

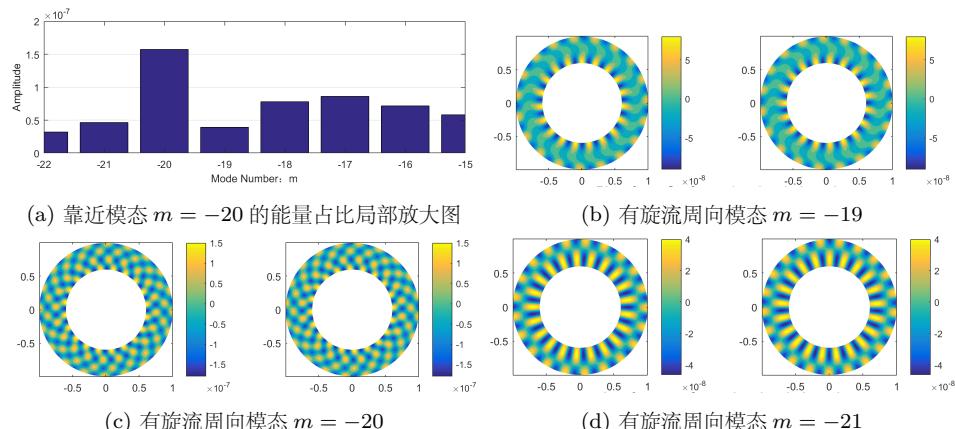


Figure 1.18: 有旋流 $m = -20$ 模态的特征分析，其区别于周围几个模态，具体较高的能量。从图中看出，可能原因是其径向模态和管径匹配，因此发生了类似的“声共振”现象。

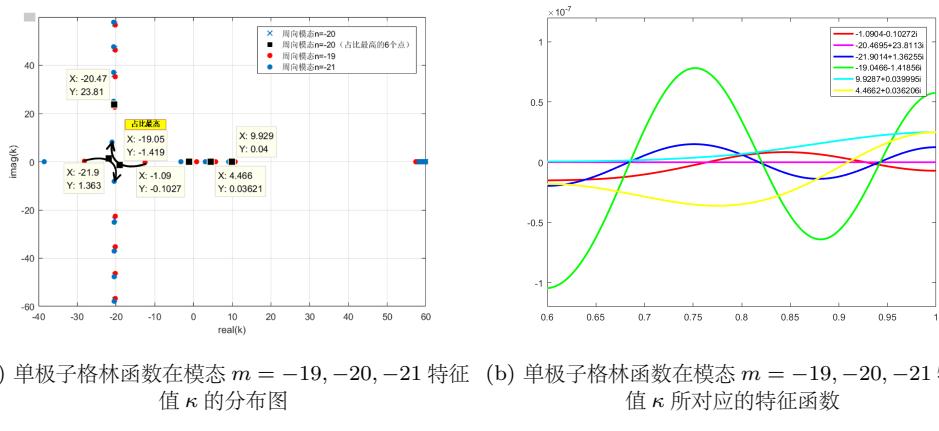


Figure 1.19: 分析模态 $m = -20$ 能量占比较高的原因: 输入频率 $w = 25$ 在此处波长匹配, 加以不稳定性导致激发更高的能量

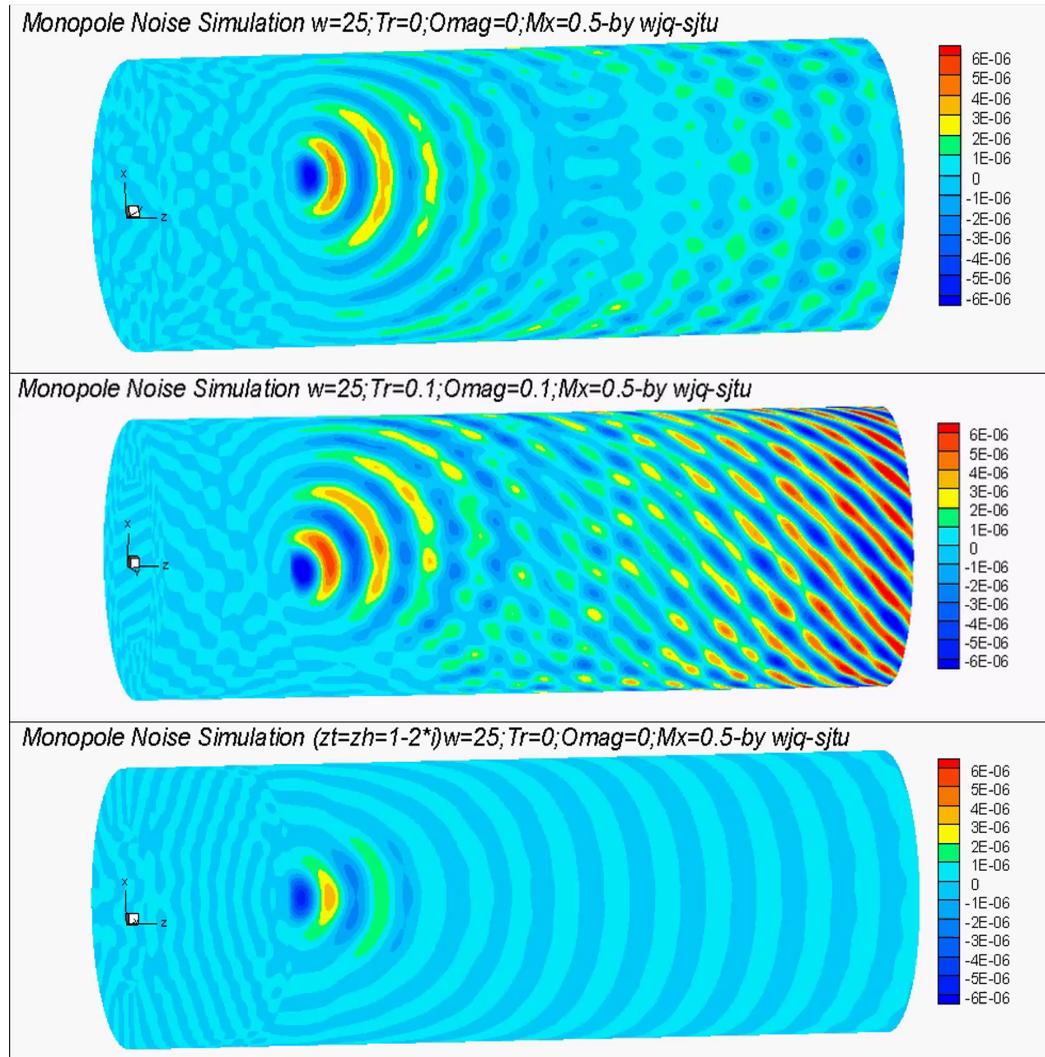


Figure 1.20: 单极子噪声时空分布图：对比案例 01 的均匀流、案例 02 的旋流以及案例 03 的软壁面条件

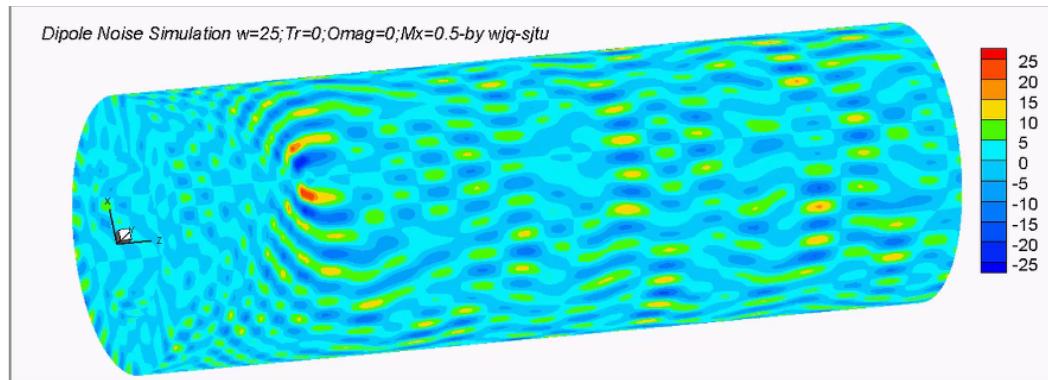


Figure 1.21: 偶极子噪声时空分布图

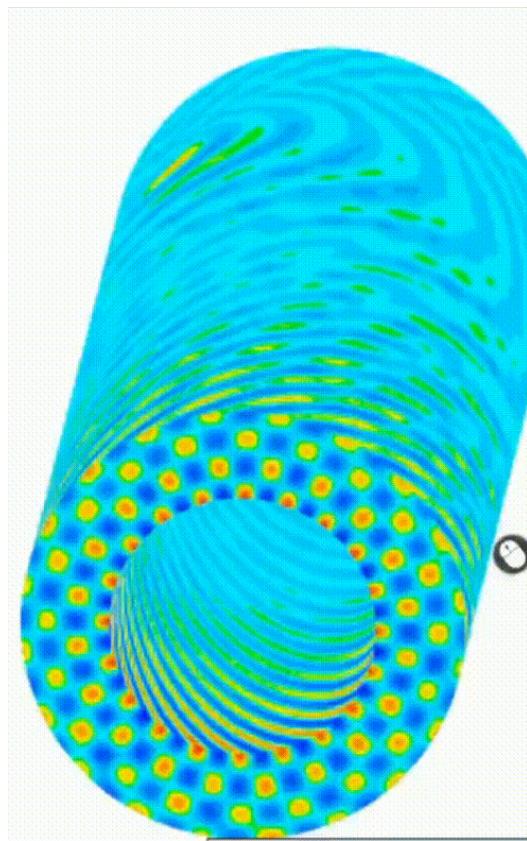


Figure 1.22: 旋转单极子噪声时空分布图

Chapter 2

MATLAB 代码: greenfun_dipoleNoise 函数

```
% 该代码为 https://github.com/jiaqiwang969/SwirlDuctAcoustics 的关键部分
% 主要功能: 数值求解单极子和偶极子 green 函数
% Ref: James Mathews 的博士论文工作
%
1 function [G_nm,Tgm1,Tgm2,Tgm3]
2     =greenfun_dipoleNoise(r,Boundary,m,Ratio,w,Tr,Omag,Mx,c02,rou0,k_nm,z_t,z_h,r0,x0,Angle1,Angle2,Angle3)
3 %numerical green's function calculation ,2018-10-10,wjq
4 diAxis1=[0,-cos(Angle1/180*pi),sin(Angle1/180*pi)];%Direction of dipole force source
5 diAxis2=[0,-cos(Angle2/180*pi),-sin(Angle2/180*pi)];%Direction of dipole force source
6 diAxis3=[0,-cos(Angle3/180*pi),-sin(Angle3/180*pi)];%Direction of dipole force source
7
8 %p_nm=[];
9 G_nm=[];Tgm1=[];Tgm2=[];Tgm3=[];
10 if length(k_nm)&length(x0)==0 %wave number may be empty for high circumferential modes
11     for kk=1:length(k_nm)
12         xr = chebfun('xr', [Ratio, 1]);M_theta=Tr./xr+0mag*xr;
13         c02 = chebfun([fliplr(c02')]', [Ratio, 1]);rou0 = chebfun([fliplr(rou0')]', [Ratio,1]);
14         Mx = chebfun([fliplr(Mx')]',[Ratio,1]);
15         U_theta=2*M_theta/xr.^2*diff(xr*M_theta)+M_theta.^2/xr.* (diff(rou0)/rou0-M_theta.^2/xr/c02);
16         %%for pn&G
17         Phi=1-k_nm(kk)/w*Mx-m/w*M_theta/xr;Ri=(M_theta.^2/xr)*c02*Phi+2*m/w*M_theta/xr.^2;%James-3.1.19
18         A_rk=(U_theta-w.^2*Phi.^2)*Phi.^2*w.^2; %(James-3.5.21)
19         B_rk=w.^2*Phi.^2*((U_theta-w.^2*Phi.^2)*(1/xr-diff(rou0)/rou0)+diff(w.^2*Phi.^2-U_theta));%(James-3.5.22)
20         C_rkw2=(U_theta-w.^2*Phi.^2)^2*(Phi.^2*c02-(k_nm(kk)/w).^2-(m/w).^2/xr.^2)+Ri*(U_theta-w.^2*Phi.^2)...
21             *(Ri+phi.^1/(1/xr-diff(rou0)/rou0))+Ri*(diff(Phi.^2*Phi.^2-U_theta))-Phi.^2*(w.^2*Phi.^2-U_theta)*(diff(Ri));%(James-3.1.21)
22         f1=(2*m/w*U_theta(1)/Phi(1)+U_theta(1)^2/c02(1))...
23             +(Boundary==2)*sqrt(-1)*rou0(1)/z_t*(w*Phi(1)^2-U_theta(1)/w);%(James-3.1.22),(James-3.1.17)
24         f2=(2*m/w*U_theta(Ratio)/Phi(Ratio)/Ratio.^2+U_theta(Ratio)^2/c02(Ratio))/Ratio...
25             -(Boundary==3)*sqrt(-1)*rou0(1)/z_h*(w*Phi(Ratio)^2-U_theta(Ratio)/w);%(James-3.1.23)
26         L=chebop(Ratio, 1);
27         L.op=@(xr,g) A_rk*diff(g,2)+B_rk*diff(g,1)-w.^2*C_rkw2.*g;%James-3.5.20
28         L1=L;L2=L;
29
30         L1.rbc=@(g) [g-1,diff(g)-f1];g1 = L1\0;
31         L2.lbc=@(g) [g-1,diff(g)-f2];g2 = L2\0;
32
33         figure;plot(real(g1),'-');hold on;plot(real(g2),'-');
34
35         %% df/dk
36         Phi_k=-Mx;Ri_k=-M_theta.^2/xr/c02*Mx;
37         A_rk_k=(-w.^2*2*Phi.^2*Phi_k)*Phi.^2*w.^2+w.^2*2*Phi.^2*Phi_k*(U_theta-w.^2*Phi.^2);
38         B_rk_k=w.^2*2*Phi.^2*Phi_k*(U_theta-w.^2*Phi.^2)*(1/xr-diff(rou0)/rou0)+diff(w.^2*2*Phi.^2-U_theta)...+w.^2*Phi.^2*(-w.^2*2*Phi.^2*Phi_k*(1/xr-diff(rou0)/rou0)+diff(w.^2*2*Phi.^2*Phi_k-U_theta));
39         C_rk_kw2=2*(U_theta-w.^2*Phi.^2)*(-w.^2)^2*Phi.^2*Phi_k*(Phi.^2/c02-(k_nm(kk)/w).^2-(m/w).^2/xr.^2)...+(U_theta-w.^2*Phi.^2)^2*(2*Phi.^2*c02*Phi_k-2*(k_nm(kk)/w));
40         +Ri_k*(U_theta-w.^2*Phi.^2)*(Ri+Phi.^1/(1/xr-diff(rou0)/rou0))...+Ri*(-w.^2*2*Phi.^2*Phi_k)*(Ri+Phi.^1/(1/xr-diff(rou0)/rou0))+Ri*(U_theta-w.^2*2*Phi.^2)*(Ri_k+(1/xr-diff(rou0)/rou0)*Phi_k)...+Ri_k*(diff(Phi.^2*Phi.^2-U_theta))+Ri*(diff(w.^2*2*Phi.^2*Phi_k-U_theta))...-diff(Ri_k)*(Phi.^2*Phi.^2-U_theta))-diff(Ri)*(w.^2*3*Phi.^2*Phi_k-U_theta);
41         b_k1=w.^2*C_rk_kw2*g1-B_rk_k*(diff(g1))-A_rk_k*(diff(g1,2));
42         b_k2=w.^2*C_rk_kw2*g2-B_rk_k*(diff(g2))-A_rk_k*(diff(g2,2));
43         f1_k=-2*m/w*U_theta(1)/Phi(1)^2*Phi_k(1)...+(Boundary==2)*sqrt(-1)*rou0(1)/z_t*w.^2*Phi(1)^2*Phi_k(1);%(James-3.1.22),(James-3.1.17)
44         f2_k=-2*m/w*U_theta(Ratio)/Ratio.^2/Phi(Ratio)^2*Phi_k(Ratio)...;
```

```

56 -(Boundary==2||Boundary==4)*sqrt(-1)*rou0(Ratio)/z_h*w*2*Phi(Ratio)*Phi_k(Ratio);%(James-3.1.23),(James-3.1.17)
57 Lk1=;Lk2=L;
58 Lk1.rbc=@(g) [g-0,diff(g)-f1_k];gk1 =Lk1\b_k1;
59 Lk2.lbc=@(g) [g-0,diff(g)-f2_k];gk2 =Lk2\b_k2;
60 % figure; plot(real(gk1),'.-');hold on;plot(real(gk2),'.-');
61 J=(w^2*Phi'^2-U_theta)*w^2*Phi'^2;
62 W=g1*diff{g2}-g2*diff{g1};
63 J_k=2*w^4*Phi.^3*Phi_k+(w^2*Phi.^2-U_theta)*w.^2*2*Phi*Phi_k;
64 W_k=gk1*diff{g2}+g1*diff{gk2}-g2*diff{gk1}-gk2*diff{g1}; %(James-3.5.28)
65 WJ_k=W_k.*J+w.*J_k;
66 Amk=k_nm(kk).*Mx+m*M_theta/xr-w;Dmk=Amk.^2-2*M_theta/xr.^2*diff(xr*M_theta);%(Posson2012AAIA-19)
67 R01mk=(diff(xr*M_theta)*m/xr.^2*diff(Mx))*k_nm(kk).*Dmk-2*(diff(Mx)*k_nm(kk)+diff(M_theta/xr)*m).*Amk.^2...
68 -diff(2*M_theta/xr.^2*diff(xr*M_theta)).*Amk;%Posson-JFM-2013-CI 未包括偏导数部分
69 Tmk_1=diAxis1(3)*Dmk.^2*k_nm(kk)+diAxis1(2)*(Dmk.^2/xr*m+2*M_theta/xr*R01mk);%(Posson2012AAIA-30)
70 Tmk_2=diAxis2(3)*Dmk.^2*k_nm(kk)+diAxis2(2)*(Dmk.^2/xr*m+2*M_theta/xr*R01mk);%(Posson2012AAIA-30)
71 Tmk_3=diAxis3(3)*Dmk.^2*k_nm(kk)+diAxis3(2)*(Dmk.^2/xr*m+2*M_theta/xr*R01mk);%(Posson2012AAIA-30)
72
73 kkk=1;
74 for xk0=x0
75 %p_nm{kk, kkk}=sign(xk0)*((xr<r0)*sqrt(-1)*w/2/pi/r0/W_k(r0)*exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0)*g1(r0)*g2...
76 % +(xr>r0)*2*sqrt(-1)*w/4/pi/r0/WJ_k(r0)*exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0)*g1*g2(r0));%(James-3.5.9)
77 G_nm{kk, kkk}=sign(xk0)*((xr<r0)*sqrt(-1)*w/2/pi/r0/WJ_k(r0)*exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0)*g1(r0)*g2...
78 +(xr>r0)*2*sqrt(-1)*w/4/pi/r0/WJ_k(r0)*exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0)*g1*g2(r0));%(James-3.5.9)
79 G_m{kk, kkk}=sign(xk0)*((xr<r0)*sqrt(-1)*w/2/pi/r0/WJ_k(r0)*g1(r0)*g2...
80 +(xr>r0)*2*sqrt(-1)*w/4/pi/r0/WJ_k(r0)*g1*g2(r0));%(James-3.5.9)
81 Tgm1{kk, kkk}=sqrt(-1)*(Tmk_1*G_m{kk, kkk}+diAxis1(2)*(2*M_theta/xr*Amk*Dmk*diff(G_m{kk, kkk}))...
82 *exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0); %(Posson2012AAIA-44b),关于变量r0的函数, x0=0
83 Tgm2{kk, kkk}=sqrt(-1)*(Tmk_2*G_m{kk, kkk}+diAxis2(2)*(2*M_theta/xr*Amk*Dmk*diff(G_m{kk, kkk}))...
84 *exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0); %(Posson2012AAIA-44b),关于变量r0的函数, x0=0
85 Tgm3{kk, kkk}=sqrt(-1)*(Tmk_3*G_m{kk, kkk}+diAxis3(2)*(2*M_theta/xr*Amk*Dmk*diff(G_m{kk, kkk}))...
86 *exp(sqrt(-1)*k_nm(kk)*xk0); %(Posson2012AAIA-44b),关于变量r0的函数, x0=0
87
88 kkk=kkk+1;
89 end
90
91 end
92 end
93 end

```

Bibliography

- Amr Ali, Hafiz Atassi, and Oliver Atassi. Acoustic eigenmodes in a coannular duct with a general swirling flow. In *6th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, page 1954, 2000.
- Amr Ali, Hafiz Atassi, and Oliver Atassi. Derivation and implementation of inflow/outflow conditions for aeroacoustic problems with swirling flows. In *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, page 2173, 2001.
- Amr A Ali. *Aeroacoustics and stability of swirling flows*. University of Notre Dame, 2001.
- Oliver V Atassi. Propagation and stability of vorticity–entropy waves in a non-uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 575:149–176, 2007.
- Edward J Brambley, Mirela Darau, and Sjoerd W Rienstra. The critical layer in linear-shear boundary layers over acoustic linings. *Journal of Fluid Mechanics*, 710:545–568, 2012.
- A Cooper and N Peake. Wave propagation in a slowly-varying duct with mean vortical swirling flow. In *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, page 2124, 2001.
- AJ Cooper and N Peake. Trapped acoustic modes in aeroengine intakes with swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 419:151–175, 2000.
- AJ Cooper, AB Parry, and N Peake. Acoustic resonance in aeroengine intake ducts. *J. Turbomach.*, 126(3):432–441, 2004.
- Alison J Cooper. Effect of mean entropy on unsteady disturbance propagation in a slowly varying duct with mean swirling flow. *Journal of sound and vibration*, 291(3-5):779–801, 2006.
- Alison J Cooper and Nigel Peake. Upstream-radiated rotor–stator interaction noise in mean swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:219–250, 2005.
- N Curle. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 231(1187):505–514, 1955.
- Dean G Duffy. *Green's functions with applications*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- Marvin E Goldstein. *Aeroacoustics*. New York, 1976.
- Vladimir Golubev, Hafiz Atassi, Vladimir Golubev, and Hafiz Atassi. Acoustic-vorticity modes in an annular duct with mean vortical swirling flow. In *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, page 1695, 1997.

- VV Golubev and HM Atassi. Sound propagation in an annular duct with mean potential swirling flow. *Journal of Sound and Vibration*, 198(5):601–616, 1996.
- Christopher Heaton and Nigel Peake. Generation and scattering of sound in vortical flow. In *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, page 3023, 2005.
- Christopher Heaton and Nigel Peake. Continuous spectrum growth and modal instability in swirling duct flow. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*, page 2583, 2006.
- MS Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4):625–673, 1975.
- Jack L Kerrebrock. Small disturbances in turbomachine annuli with swirl. *Aiaa Journal*, 15(6):794–803, 1977.
- Matthew J King, Edward J Brambley, Renan Liupekevicius, Miren Radia, Paul Lafourcade, and Tauqeer H Shah. The critical layer in quadratic flow boundary layers over acoustic linings. *arXiv preprint arXiv:2112.01643*, 2021.
- Kenneth Kousen. Pressure modes in ducted flows with swirl. In *Aeroacoustics Conference*, page 1679, 1996.
- Kenneth A Kousen. Eigenmode analysis of ducted flows with radially dependent axial and swirl components. In *CEAS/AIAA Joint Aeroacoustics Conference, 1 st, Munich, Germany*, pages 1085–1094, 1995.
- Kenneth A Kousen. Eigenmodes of ducted flows with radially-dependent axial and swirl velocity components. Technical report, 1999.
- Michael James Lighthill. On sound generated aerodynamically i. general theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 211(1107):564–587, 1952.
- Michael James Lighthill. On sound generated aerodynamically ii. turbulence as a source of sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 222(1148):1–32, 1954.
- David G Lilley. Prediction of inert turbulent swirl flows. *AIAA journal*, 11(7):955–960, 1973.
- James R Mathews, Vianney Masson, Stéphane Moreau, and Hélène Posson. The modified myers boundary condition for swirling flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 847:868–906, 2018.
- James Richard Mathews. *Mathematical modelling of noise generation in turbofan aeroengines using Green' s functions*. PhD thesis, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of ⋯, 2016.
- CL Morfey and MCM Wright. Extensions of lighthill's acoustic analogy with application to computational aeroacoustics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2085):2101–2127, 2007.

- Ali H Nayfeh, John E Kaiser, and Demetri P Telionis. Acoustics of aircraft engine-duct systems. *Aiaa Journal*, 13(2):130–153, 1975.
- Ronald Nijboer. Eigenvalues and eigenfunctions of ducted swirling flows. In *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, page 2178, 2001.
- Hélène Posson and Nigel Peake. Acoustic analogy in swirling mean flow applied to predict rotor trailing-edge noise. In *18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (33rd AIAA Aeroacoustics Conference)*, page 2267, 2012.
- Helene Posson and Nigel Peake. The acoustic analogy in an annular duct with swirling mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 726:439–475, 2013.
- Sjoerd Rienstra and Gregory Vilenski. Spatial instability of boundary layer along impedance wall. In *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference)*, page 2932, 2008.
- Sjoerd W Rienstra. Fundamentals of duct acoustics. *Von Karman Institute Lecture Notes*, 2015.
- Sjoerd W Rienstra. Solutions and properties of the pridmore-brown equation. In *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, page 2594, 2019.
- Sjoerd W Rienstra and Brian J Tester. An analytic green's function for a lined circular duct containing uniform mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 317(3-5):994–1016, 2008.
- Christopher KW Tam and Laurent Auriault. The wave modes in ducted swirling flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 371:1–20, 1998.
- Jiaqi Wang. Swirlductacoustics. In <https://github.com/jiaqiwang969/SwirlDuctAcoustics>, with non-commercial license, 2018.
- JE Ffowcs Williams and David L Hawkings. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 321–342, 1969.
- David W Wundrow, Lennart S Hultgren, and ME Goldstein. Interaction of oblique instability waves with a nonlinear plane wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 264:343–372, 1994.
- 管莹, 王同庆, and 赵小见. 包含平均旋流的圆环管道声传播的模态分析. *航空动力学报*, 23(10):1875–1881, 2008.