没有眼泪的拓扑[1]

SIDNEY A. MORRIS[2]

白富生 译

版本日期: 2007年10月14 日[3]

[2]本书的波斯文译本将很快问世

[3]本书内容一直在更新及扩充; 预期共有15章. 如果你发现了本书的任何错误或有任何改进本书的建议, 请发电子邮件到s.morris@ballarat.edu.au 或f.bai@ballarat.edu.au

目　录

第一章　拓扑空间

引言

网球, 足球, 垒球和曲棍球或许都是令人激动的运动项目, 但是为了参加这些项目, 你首先必须学会这些运动项目的规则. 数学也不例外. 所以我们先开始学习拓扑的规则.

本章开始先给出拓扑的定义, 接着给出了一些简单例子: 有限拓扑空间, 离散空间, 不可分空间, 及有限闭拓扑空间.

拓扑, 像其它的纯数学的分支如群论一样, 是公理化学科. 我们以一组公理作为开始, 然后我们用这些公理来证明命题和定理. 发展你写证明的技巧是极度重要的.

为什么证明是如此重要呢? 设想我们的任务是建造一座大楼. 我们会先从地基开始. 在我们学拓扑学的情形下, 地基就是公理或定义—任何其它的东西都要建造在它们基础上. 每一个定理或命题都代表了一层新知识, 并且必须被坚实地固定在之前的层上. 我们将用证明将新的一层固定在之前的层上. 所以定理和命题是我们得到的新的知识的高度, 而证明是必须的, 由于它们是用来把新层附加在之前层上的灰浆. 没有证明, 结构就会坍塌.

那么什么是数学证明?

数学证明是无懈可击的论证, 开始于你被给的信息, 通过逻辑推理进行下去, 最终得到你被要求证明的结果.

你应该通过写下你被给的信息开始你的证明, 然后指明什么是你被要求证明的. 如果你被给的信息或你被要求证明的信息中包含专门术语, 那么你应该写下这些专门术语的定义.

每个证明都应该由完整的句子组成. 每一个这样的句子都应该是由(i)*之前所陈述的内容* 或(ii) *已被证明的定理, 命题或引理* 所推导出的.

在本书里你将看到很多证明, 但是注意数学不是旁观者的运动, 她是参加者的运动. 学习写证明的唯一方法是自己试着去写.

§1.1 拓扑

定义 1.1.1. 设X为非空集. X的子集簇τ 被称为X上的一个拓扑, 如果

(i) X 和空集$\varnothing$属于τ,

(ii) 任何*(*有限或无限*)*个τ中集合的并集属于τ, 并且

(iii) τ中任何两个集合的交集属于τ.

称偶对(X,τ) 为一个拓扑空间.

例 1.1.2. 令$X=\{a,b,c,d,e,f\}$ 及

$$\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}.$$

则τ_1是X上的一个拓扑, 由于它满足定义*1.1.1*的条件(i), (ii), (iii).

例 1.1.3. 令$X=\{a,b,c,d,e\}$ 及

$$\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,e\},\{b,c,d\}\}.$$

则τ_2不是一个X上的拓扑, 由于τ_2中两个集合的并集

$$\{c,d\}\cup\{a,c,e\}=\{a,c,d,e\}$$

不属于τ_2; 于是τ_2不满足定义*1.1.1*的条件(ii).

例 1.1.4. 令$X=\{a,b,c,d,e\}$ 及

$$\tau_3=\{X,\varnothing,\{a\},\{f\},\{a,f\},\{a,c,f\},\{b,c,d,e,f\}\}.$$

则τ_3 $\boxed{\text{不}}$ 是一个X上的拓扑, 由于τ_3中两个集合的交集

$$\{a,c,f\}\cap\{b,c,d,e,f\}=\{c,f\}$$

不属于τ_3; 于是τ_3不满足定义*1.1.1*的条件(iii).

例 1.1.5. 令$\mathbb{N}$ 为自然数集 *(*即正整数集*)*, 令τ_4由$\mathbb{N}, \varnothing$及所有$\mathbb{N}$的有限子集组成. 则τ_4 $\boxed{不}$ 是$\mathbb{N}$上的一个拓扑, 由于如下无数个集合的并集

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

不属于τ_4; 于是τ_4不满足定义*1.1.1*中的条件(ii).

例 1.1.6. 设X为任何非空集, 令τ为所有X中子集所组成的子集簇. 则τ称为集合X上的**离散拓扑**. 拓扑空间(X, τ) 称为**离散空间**.

我们注意到定义1.1.6中τ满足定义1.1.1的条件, 因此确实是一个拓扑.

注意定义1.1.6中集合X可为$\boxed{任意}$非空集. 所以存在无限个离散空间—每个离散空间对应一个集合X.

定义 1.1.7. 设X为任意非空集, 令$\tau = \{X, \varnothing\}$. 则$\tau$称为**平庸拓扑**, (X, τ)称为**平庸空间**.

我们不得不再次核实这里的τ确实满足定义1.1.1的条件, 所以是一个拓扑.

我们再次观察到定义1.1.7中的集合X可以为任意非空集. 因此存在无限个不可分空间—每个不可分空间对应一个集合X.

在本章的引言部分我们讨论了证明的重要性, 以及在写证明的时候, 什么应被考虑进去. 我们最先关于证明的经历在例1.1.8**和命题**1.1.9. **你应该仔细地研究这些证明**.

例 1.1.8. 若$X = \{a, b, c\}$, τ是X上的一个拓扑, 并且$\{a\} \in \tau$, $\{b\} \in \tau$,及$\{c\} \in \tau$, 求证τ为离散拓扑.

证明.

我们已有的信息是τ是一个拓扑, $\{a\} \in \tau$, $\{b\} \in \tau$,及$\{c\} \in \tau$.

要求我们证明τ是离散拓扑; 即要求我们证出τ包含X中所有的子集(由定义1.1.6). 记着τ是一个拓扑, 因此满足定义1.1.1中的条件(i), (ii), (iii).

因此, 我们将以写下所有X中的子集作为证明的开始.

集合X有3个元素, 因此它有2^3个互不相同的子集. 它们是: $S_1 = \{\varnothing\}, S_2 = \{a\}, S_3 = \{b\}, S_4 = \{c\}, S_5 = \{a,b\}, S_6 = \{a,c\}, S_7 = \{b,c\}$, 及$S_8 = \{a,b,c\} = X$.

要求我们证出每一个子集属于τ. 由于τ是一个拓扑, 定义1.1.1的条件(i)说明X和$\varnothing$属于τ; 即$S_1 \in \tau$和$S_8 \in \tau$.

我们已知$\{a\} \in \tau, \{b\} \in \tau$及$\{c\} \in \tau$; 即$S_2 \in \tau, S_3 \in \tau$ 和$S_4 \in \tau$.

为了完成证明, 我们需要证出$S_5 \in \tau, S_6 \in \tau$和$S_7 \in \tau$. $S_5 = \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$. 由于已知$\{a\}$和{b}属于$\tau$, 定义1.1.1中条件(ii)表明它们的并集也属于τ; 于是$S_5 = \{a,b\} \in \tau$.

相似地, 我们有$S_6 = \{a,c\} = \{a\} \cup \{c\} \in \tau$及$S_7 = \{b,c\} = \{b\} \cup \{c\} \in \tau$.

∎

在本章导言的评论里, 我们提到数学不是一项旁观者的运动. 你应该做一位积极的参与者. 当然你的参加包含了做一些练习. 但是在对你的期望里还包含更多内容. 你不得不对展现在你面前的学习内容进行$\boxed{\text{思考}}$.

你的任务之一是看我们已经证出的结果, 并问相关的问题. 例如, 我们刚刚证明过如果每一个单点集$\{a\}, \{b\}$和$\{c\}$属于τ并且$X = \{a,b,c\}$, 则τ是离散拓扑. 你应该问这是否仅仅是更广泛的现象中的一个例子; 即如果(X,τ)是任何满足τ包含所有单点集的拓扑空间, 那么τ是否一定是离散拓扑? 答案是"是", 并且命题1.1.9给出了证明.

命题 1.1.9. 若(X,τ)是一个拓扑空间, 且对任何$x \in X$, 单点集$\{x\}$属于τ, 则τ为离散拓扑.

证明.

本结果是对例1.1.8的推广. 因此你可能会期待证明是相似的. 然而, 我们不能象在例1.1.8中那样, 列出X的所有的子集, 因为X可能是个无限集. 无论怎样我们必须证出$\boxed{\text{任何}}$$X$中的子集属于$\tau$.

在这一时刻你可能被诱使去对一些特殊情况去证明这一结果, 例如, 让X由4个, 5个或者100个元素组成. 但是这种方法注定要失败. 回忆一下我们在本章开始的评注里将数学证明描述为滴水不漏的推理. 通过考虑几种特殊情况, 或者很多的特殊情况, 我们不能得到滴水不漏的推理. 这样的推理必须包含所有的情况. 所以我们必须考虑

一个一般的任何非空集合的情况. 我们必须通过某种方法证出X中的每个子集都属于τ.

再次回顾对例1.1.8的证明, 我们认识到关键点是任何X的子集是X中一些单点子集的并集, 并且我们已知所有的所有的单点子集属于τ. 对一般的情况, 这些仍旧成立.

我们以记录下每个集合是其自身的单点子集的并集的事实开始我们的证明. 令S为X中任一子集. 那么

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

由于已知每一个$\{x\}$属于τ, 定义1.1.1中条件(ii)及上边的等式表明$S \in \tau$. 由于S为X中的任意子集, 我们得出τ是离散拓扑. ∎

每个集合是其自身的单点子集的并集是一个在本书里许多不同的上下文里, 我们都要不时用到的结果. 注意到甚至当$S = \varnothing$时这条性质都成立, 因为那时我们定义什么叫做**空并**, 并以$\varnothing$作为结果.

习题1.1

1. 令$X = \{a, b, c, d, e, f\}$. 判别以下每个集合X中子集簇是否是X上的一个拓扑.

   (a) $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$;

   (b) $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$;

   (c) $\tau_3 = \{X, \varnothing, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

2. 令$X = \{a, b, c, d, e, f\}$. 如下那些X的子集簇是X上的一个拓扑? (给出理由)

   (a) $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$;

   (b) $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$;

   (c) $\tau_3 = \{X, \varnothing, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

3. 若$X = \{a, b, c, d, e, f\}$及τ是X上的离散拓扑, 则如下哪一个关系式正确?

   (a) $X \in \tau$; (b) $\{X\} \in \tau$; (c) $\{\varnothing\} \in \tau$; (d) $\varnothing \in \tau$;
   (e) $\varnothing \in X$; (f) $\{\varnothing\} \in X$; (g) $\{a\} \in \tau$; (h) $a \in \tau$;
   (i) $\varnothing \subset X$; (j) $\{a\} \in X$; (k) $\{\varnothing\} \subset \tau$; (l) $a \in X$;
   (m) $X \subset \tau$; (n) $\{a\} \subset \tau$; (o) $\{X\} \subset \tau$; (p) $a \subset \tau$;
   [提示: 有且只有6个上述关系式正确.]

4. 令(X, τ)为任何的拓扑空间. 证明任意的有限个τ中成员的交属于τ.
   [提示: 用数学归纳法来证明这个结果.]

5. 令$\mathbb{R}$为所有实数的集合. 求证如下每一个$\mathbb{R}$的子集簇是一个拓扑.

   (i) τ_1由$\mathbb{R}$, $\varnothing$, 及所有形如$(-n, n)$的区间构成, 这里n为任何正整数;
   (ii) τ_2由$\mathbb{R}$, $\varnothing$, 及所有形如$[-n, n]$的区间构成, 这里n为任何正整数;
   (iii) τ_3由$\mathbb{R}$, $\varnothing$, 及所有形如$[n, \infty)$的区间构成, 这里n为任何正整数.

6. 令$\mathbb{N}$为所有正整数组成的集合. 求证如下每一个$\mathbb{N}$的子集簇是一个拓扑.

   (i) τ_1由$\mathbb{N}$, $\varnothing$, 及所有形如$\{1, 2, \ldots, n\}$的集合构成, 这里n为任何正整数; (此拓扑称为**initial segment 拓扑**.)
   (ii) τ_2由$\mathbb{N}$, $\varnothing$, 及所有形如$\{n, n+1, \ldots\}$的集合构成, 这里n为任何正整数; (此拓扑称为**final segment 拓扑**.)

7. 列出下列集合上的所有可能的拓扑:

   (a) $X = \{a, b\}$;
   (b) $Y = \{a, b, c\}$.

8. 令X为一无限集, τ为X上的一个拓扑. 若X中的每个无限子集属于τ, 求证τ为离散拓扑.

*9. 令$\mathbb{R}$为所有实数组成的集合. 在如下10个$\mathbb{R}$的子集簇中, 有且仅有三个子集簇是拓扑. 找出它们并说明理由.

   (i) τ_1由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如(a, b)的区间构成, 这里a和b是满足$a < b$的实数.

(ii) τ_2由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$(-r,r)$的区间构成, 这里r是正实数.

(iii) τ_3由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$(-r,r)$的区间构成, 这里r是正有理数.

(iv) τ_4由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$[-r,r]$的区间构成, 这里r是正有理数.

(v) τ_5由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$(-r,r)$的区间构成, 这里r是正无理数.

(vi) τ_6由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$[-r,r]$的区间构成, 这里r是正无理数.

(vii) τ_7由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$[-r,r)$的区间构成, 这里r是正实数.

(viii) τ_8由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$(-r,r]$的区间构成, 这里r是正实数.

(ix) τ_9由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$[-r,r]$及$(-r,r)$的区间构成, 这里r是正实数.

(x) τ_{10}由$\mathbb{R}$, $\varnothing$和所有形如$[-n,n]$及$(-r,r)$的区间构成, 这里n是正整数, r是正实数.

§1.2 开集, 闭集, 及闭开集

好于继续用“τ的成员”的称谓, 我们发现给这样的集合一个名字是更为方便. 我们称之“开集”. 我们也将给开集的补集命名. 他们将被称为“闭集”. 这些术语并不是很理想, 只是起源于实数轴上所谓的“开区间”和“闭区间”. 我们将在第二章对此做进一步说明.

定义 1.2.1. *令(X,τ)为任何拓扑空间. 则组成τ的成员称为***开集***.*

命题 1.2.2. *若(X,τ)是任何一个拓扑空间, 则*

(i) *X和$\varnothing$是开集,*

(ii) *任何个(有限或无限)开集的并集是开集及*

(iii) *任意有限个开集的交集是开集.*

证明. 显然(i)和(ii)是定义1.2.1和定义1.1.1中(i)和(ii)的直接推论. 条件(iii)由定义1.2.1和练习1.1中第四题得出. ∎

在阅读命题1.2.2的时候, 一个问题应该已经出现在你的脑海: 尽管任何有限或无限个开集的并使是开集, 我们仅仅指出了有限个开集的交集是开集. 无限个开集的交集也一定是开集吗? 接下来的例子表明答案是“不”.

例 1.2.3. 令$\mathbb{N}$为所有正整数组成的集合, τ由$\varnothing$和每一个在$\mathbb{N}$中的补集为有限集的集合S组成. 容易验证τ满足定义*1.1.1*, 因此是$\mathbb{N}$上的一个拓扑. (在下一节我们将进一步讨论这种拓扑. 它被称为有限闭拓扑.) 对每一个自然数n, 定义集合S_n如下:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

显然每个S_n是拓扑τ中的开集, 由于其补集是有限集. 然而,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} = \{1\}.$$

由于$\{1\}$的补集既不是$\mathbb{N}$, 也不是有限集, $\{1\}$不是开集. 于是(1)表明开集S_n的并集不是开集.

你可能会问, 作者是怎么找到如例1.2.3中所给出的例子? 答案是乏味的: 通过反复试验得到的.

例如, 如果我们去试一个离散拓扑, 那么我们会发现每一个开集的交集也是开集. 同样的情况适用于不可分拓扑. 所以你要做的是一些聪明的猜测.

记住, 要证明开集的交集不一定是开集, 你只需要找到一个反例!

定义 1.2.4. 令(X,τ)为一个拓扑空间. 一个X的子集称为拓扑空间(X,τ)中的**闭集**, 如果其在X中的补集, 即$X \setminus S$, 是(X,τ)中的开集.

在例1.1.2中, 闭集是

$$\varnothing, X, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,e,f\}, \{b,e,f\} \text{和} \{a\}.$$

如果(X,τ) 是一个离散空间, 那么显然每个X的子集是闭集. 然而, 在一个不可分空间(X,τ)里, 唯一的闭集是X和$\varnothing$.

命题 1.2.5. 若(X,τ)是任一拓扑空间, 则

(i) $\varnothing$和X是闭集,

(ii) 任意个(有限或无限)闭集的交集是闭集及

(iii) 任意有限个闭集的并集是闭集.

证明. 由于X的补集为$\varnothing$及$\varnothing$的补集为X, 从命题1.2.2(i)和定义1.2.4中可直接得出(i).

为了证明(iii), 令$S_1, S_2, \dots, S_n$为闭集. 我们需要证出$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$是闭集. 由定义1.2.4, 证出$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$是开集就够了.

由于$S_1, S_2, \dots, S_n$是闭集, 它们的补集$X \setminus S_1$, $X \setminus S_2$, $\dots$, $X \setminus S_n$是开集. 而

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n). \tag{1.1}$$

由于(1.1)的右手边是有限个开集的交集, 故为开集. 于是(1.1)的左手边是开集. 因此$S_1 \cup \S_2 \cup \cdots \cup S_n$是个闭集. 得证.

对(ii)的证明与对(iii)的证明相似. [然而, 你应该读一读对例1.3.9的证明所给出的警示.

∎

警示: 名称“开”和“闭”常常将拓扑世界的新人带到错误中去. 尽管名字是这样取的, 一些开集也是闭集! 此外, 一些集合既不是开集又不是闭集! 实际上, 如果我们考虑例1.1.2, 我们看到

(i) 集合{a}既开有闭;

(ii) 集合{b,c}既不开又不闭;

(iii) 集合{c,d}是开集, 但不是闭集;

(iv) 集合{a,b,e,f}是闭集, 但不是开集.

在离散空间里, 每一个集合既开又闭, 而在不可分空间(X, τ), 所有X的子集除了X和$\varnothing$是既不开又不闭的.

为了提醒你集合可以是既开又闭的, 我们引进如下定义:

定义 1.2.6. *一个拓扑空间(X, τ)的子集S称为*闭开*的, 如果它在(X, τ)中是既开又闭的.*

在任意一个拓扑空间(X, τ)里, X和$\varnothing$都是闭开(clopen[1])的.

[1]我们承认“clopen”是个很丑的单词, 但现在对它的使用已经普遍了.

在一个离散空间里, 所有X中的子集是闭开的.

在一个平庸空间里, 唯一的闭开集是X和$\varnothing$.

习题1.2

1. 列出所有64个例1.1.2X的子集. 在每个集合的旁边写明它是否是(i) 闭开的; (ii) 既不开又不闭; (iii) 开但不闭; (iv) 闭但不开.

2. 令(X,τ)为一个拓扑空间, 其每一个子集都为闭集. 求证(X,τ)为离散拓扑空间.

3. 观察到如果(X,τ)是一个离散拓扑空间或不可分空间, 那么每个开集是闭开集. 找一个集合{a, b, c, d}上的既不是离散拓扑也不是可分拓扑的拓扑, 使得其具有每个开集是闭开集的性质.

4. 令X为无限集. 如果τ是X上的拓扑, 并且X的每一个无限子集是闭集, 求证τ为离散拓扑.

5. 令X为无限集, τ是X上的一个拓扑, 并且唯一的X的开无限子集为X自身. (X,τ)一定是平庸拓扑空间吗?

6. (i) 令τ为X上的一个拓扑, 由4个集合组成: $\tau=\{X,\varnothing,A,B\}$, 这里$A$和$B$是$X$的不同的非空真子集. [$A$为$X$的非空**真子集**是指$A\subset X$且$A\neq X$, 由$A\subset X$表示.] 求证$A$和$B$满足且只满足以下条件中的一个:

$$(a)\ B=X\setminus A;\qquad (b)\ A\subset B;\qquad (c)\ B\subset A$$

[提示: 首先证明A和B一定满足至少其中一个条件, 然后证明它们不能满足一个以上的条件.]

(ii) 根据(i)列出所有$X=\{1,2,3,4\}$上的由刚好4个集合组成的拓扑.

§1.3 有限闭拓扑

通过指明那些集合是开的来定义某个集合上的拓扑是很平常的. 然而,

有时通过说明那些集合是闭集来描述一个拓扑更自然. 下边的定义给了这样的一个例子.

定义 1.3.1. *设X是任意的非空集. X上的拓扑τ称为***有限闭拓扑***, 如果X的闭子集是X及X的所有有限子集; 即开集为$\varnothing$和所有具有有限补集的X的子集.*

再一次强调验证定义1.3.1中的τ确实是一个拓扑是必要的; 即它满足定义1.1.1的条件.

注意定义1.3.1并不是说每一个满足X为闭集及X的有限子集为闭集的拓扑都是有限闭拓扑. X上$\boxed{\text{所有}}$的闭集是这些集合的拓扑才是有限闭拓扑. [当然, 在任何集合上的离散拓扑, 集合X和所有X的有限子集是闭的, 但是所有X的其它的子集也是闭集.]

在有限闭拓扑中所有有限集是闭的. 然而下例表明无限子集不需要是开集.

例 1.3.2. *设$\mathbb{N}$是所有正整数组成的集合, 则集合$\{1\}, \{5,6,7\}, \{2,4,6,8\}$是有限集, 因此在有限闭拓扑里是闭的. 因此它们的补集*

$$\{2,3,4,5,\ldots\}, \{1,2,3,4,8,9,10,\ldots\}, \{1,3,5,7,9,10,11,\ldots\}$$

是有限闭拓扑里的开集. 另一方面, 由偶的正整数组成的集合不是闭集, 因为它不是有限集, 于是它的补集, 由奇正整数组成的集合在有限闭拓扑里不是开集.

所以尽管所有的有限集为闭集, 不是所有的无限集都为开集.

例 1.3.3. *令τ为某集合X上的有限闭拓扑. 如果X有至少3个不同的闭开集, 求证X是有限集.*

证明.

我们已知τ是有限闭拓扑, 并且至少有3个不同的闭开集.

我们要证出X是有限集.

注意到τ为有限闭集意味着所有闭集组成的集簇由X和所有X的有限子集所构成. 又注意到一个集合是闭开的, 当且仅当它是既闭又开的.

记着在任何拓扑空间里, 至少有两个闭开集, 及X和$\varnothing$ (参见紧接定义1.2.6的评注.) 但我们已知在拓扑空间(X,τ)里, 存在至少3个闭开子集. 于是存在不同于$\varnothing$和X的一个闭开集. 所以我们将要仔细关注这个闭开集!

由于空间(X,τ)有3个不同的闭开集, 我们知道存在X的一个闭开子集S, 满足$S \neq X$和$S \neq \varnothing$. 由于S是(X,τ)上的开集, 由定义1.2.4可知其补集$X \setminus S$是闭集.

因此S和$X \setminus S$都是有限闭拓扑τ中的闭集. 由于S和$X \setminus S$都不等于X, S和$X \setminus S$都是有限集. 又由$X = S \cup (X \setminus S)$, X是两个有限集的并. 于是X是有限集. 得证. ∎

我们现在知道对任何无限集, 可以定义三种不同的拓扑—并且还有更多的. 我们知道的三个是离散拓扑, 平庸拓扑和有限闭拓扑. 所以我们必须总是要仔细地指明在一个集合上的拓扑.

例如, 集合$\{n : n \geq 10\}$是自然数集合上有限闭拓扑中的开集, 但它不是不可分拓扑中的开集. 由奇自然数组成的集合是自然数集合上离散拓扑中的开集, 但不是有限闭拓扑中的开集.

我们现在将一些你以前大概遇到过的定义记录下来.

定义 1.3.4. *令f为集合X到集合Y的映射.*

(i) *映射f称为**一一**的或**单**的, 如果对$x_1, x_2 \in X$, 可由$f(x_1) = f(x_2)$得到$x_1 = x_2$;*

(ii) *映射f称为**到上**的或**满**的, 如果对任何$y \in Y$, 存在$x \in X$, 使得$f(x) = y$;*

(iii) *映射f称为**双**的, 如果它既是一一的, 又是满的.*

定义 1.3.5. *令f为集合X到集合Y的映射. 映射f称为**有逆**的, 如果存在Y到X的映射g, 使得对所有$x \in X$有$g(f(x)) = x$, 对所有的$y \in Y$有$f(g(y)) = y$. 映射g称为f的逆映射.*

如下命题的证明留给读者作为练习.

命题 1.3.6. *令f为集合X到集合Y的映射.*

1. 映射f有逆映射，当且仅当f是双的.

2. 令g_1和g_2为Y到X的映射. 如果g_1和g_2都是f的逆映射，则$g_1 = g_2$; 即对任何$y \in Y$，$g_1(y) = g_2(y)$.

3. 令g为Y到X的映射. 则g是f的逆映射，当且仅当f是g的逆映射.

警示: 学生们通常会错误地认为一个映射是一一的, 如果它“将一个点映射成一个点”.

所有的映射将一个点映成一个点. 事实上这是映射定义的一部分. 一一映射是将不同的点映射成不同点的映射.

我们现在来看一个你以前可能没遇到过的很重要的概念.

定义 1.3.7. 令f为集合X到集合Y的映射. 若S为任何Y的子集，则集合$f^{-1}(S)$由

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{且} f(x) \in S\}.$$

X的子集$f^{-1}(S)$称为S的**逆映像**.

注意到$f : X \to Y$的逆映射存在当且仅当f是双的. 然而任何Y的子集的逆映像存在即使f既不是一一的, 也不是到上的. 下一个例子展示了这一点.

例 1.3.8. 令f为整数集合$\mathbb{Z}$到其自身的函数: $f(z) = |z|$对每一个$z \in \mathbb{Z}$.

由于$f(1) = f(-1)$，函数f不是一一的.

它也不是到上的，因为找不到任何$z \in \mathbb{Z}$使得$f(z) = -1$. 所以f当然不是双的. 因此，由命题*1.3.6*(i)，f没有逆函数. 然而逆映像一定存在. 例如，

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$$

$$f^{-1}(\{-5, 3, 5, 7, 9\}) = \{-3, -5, -7, -9, 3, 5, 7, 9\}.$$

我们以一个有趣的例子来结束这一节.

例 1.3.9. 令(Y, τ)为拓扑空间，X为非空集. 又令f为X到Y的映射. 记$\tau_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \tau\}$. 求证$\tau_1$是$X$上的一个拓扑.

证明.

我们的任务是证明集簇τ_1是X上的一个拓扑; 即我们必须证出τ_1满足定义1.1.1中的条件(i), (ii)和(iii).

$$X \in \tau_1 \quad \text{由于} \quad X = f^{-1}(Y) \quad \text{及} \quad Y \in \tau.$$
$$\varnothing \in \tau_1 \quad \text{由于} \quad \varnothing = f^{-1}(\varnothing) \quad \text{及} \quad \varnothing \in \tau.$$

因此τ_1具有定义1.1.1的性质(i).

为了验证定义1.1.1的性质(ii), 记由τ_1与指标集J相应的一些集合组成的簇$\{A_j : j \in J\}$. 我们须证出$\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$. 由于$A_j \in \tau_1$, τ_1的定义表明$A_j = f^{-1}(B_j)$, 这里$B_j \in \tau$. 而且有$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$. [参见练习1.3#1.]

对于所有的$j \in J$, $B_j \in \tau$, 由于τ是Y上的拓扑, 成立$\bigcup_{j\in J} B_j \in \tau$. 因此, 由$\tau_1$的定义, $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) \in \tau_1$; 即$\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$.

于是τ_1具有定义1.1.1的性质(ii).

[警示. 在这里提醒你不是所有的集合是可数的. (参见附录中关于可数集的评注.) 所以在上述推导中, 来设$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$属于$\tau_1$, 并证明它们的并$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ 属于τ_1是不够的. 这只是证明了可数个τ_1成员的并属于τ_1, 但并没有证出τ_1具有定义1.1.1的性质(ii)—这一性质要求所有的由某些τ_1中集合得到的并, 无论是由可数或不可数个集合得到的并, 属于τ_1.]

最后, 设A_1和A_2属于τ_1. 须证出$A_1 \cap A_2 \in \tau_1$.

由于$A_1, A_2 \in \tau_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$和$A_2 = f^{-1}(B_2)$, 这里$B_1, B_2 \in \tau$.

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2). \qquad \text{[参见练习1.3\#1.]}$$

由于$B_1 \cap B_2 \in \tau$, 我们有$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau_1$. 因此, $A_1 \cap A_2 \in \tau_1$, 我们已经证出了τ_1具有定义1.1.1的性质(iii).

于是τ_1是X上的一个拓扑. ∎

习题1.3

1. 令f为X到Y的映射. 我们在例1.3.9指出

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \tag{1.2}$$

和

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \tag{1.3}$$

这里B_j是Y中的任意子集, J是任意的指标集.

(a) 证明(1.2)成立.
[提示: 通过令x为左手边集合里的任何一个元素来开始你的证明, 先证出x属于右手边集合. 然后证明反过来也成立.]

(b) 证明(1.3)成立.

(c) 找出(具体的)集合A_1, A_2, X,和Y, 以及映射$f : X \to Y$使得$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$, 这里$A_1 \in X, A_2 \in X$.

2. 在练习1.1#6(ii)中给出的拓扑是有限闭拓扑吗? (给出理由)

3. 拓扑空间(X, τ)称为一个T_1-空间, 如果每一个单点集$\{x\}$是(X, τ)中的闭集. 说明在以下9个拓扑空间里, 恰有两个为T_1-空间. (给出理由.)

(i) 离散空间;

(ii) 有至少两个点的平庸空间;

(iii) 具有有限闭拓扑的无限集;

(iv) 例1.1.2;

(v) 练习1.1#5(i);

(vi) 练习1.1#5(ii);

(vii) 练习1.1#5(iii);

(viii) 练习1.1#6(i);

(ix) 练习1.1#6(ii).

4. 令τ为集合X上的有限闭拓扑. 如果τ也是离散拓扑, 求证X为有限集.

5. 拓扑空间(X, τ)称为T_0-空间, 如果对X中每一对不同的点a, b, 存在一个包含a但不包含b的开集, 或者存在一个包含b但不包含a的开集.

(a) 求证每个T_1-空间是T_0-空间.

(b) 上述习题3拓扑空间(i)—(vi)中哪些是T_0-空间? (给出理由.)

(c) 在集合$X = \{0, 1\}$上给出一个拓扑τ, 使得(X, τ)是T_0-空间而不是T_1-空间. [你得到的拓扑空间称为**Sierpinski空间**.]

(d) 求证在练习1.1#6中所描述的拓扑是一个T_0-空间. (注意到从上述习题3可知这些拓扑空间都不是T_1空间.)

6. 令X为任意无限集. **可数闭拓扑** 定义为闭集为X及X的所有可数子集的拓扑空间. 求证它确实是X上的一个拓扑.

7. 令τ_1和τ_2为X上的两个拓扑. 证明如下每一个论断.

(i) 如果τ_3由$\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$给出, 那么$\tau_3$不一定是$X$上的拓扑. (通过给出具体例子来说明.)

(ii) 如果τ_4由$\tau_4 = \tau_1 \cap \tau_2$给出, 那么$\tau_3$是$X$上的拓扑. (拓扑$\tau_4$称为拓扑$\tau_1$和$\tau_2$的 **交**.)

(iii) 如果(X, τ_1)和(X, τ_2)是T_1空间, 那么τ_4也是T_1空间.

(iv) 如果(X, τ_1)和(X, τ_2)是T_0空间, 那么τ_4不一定是T_0空间. (通过给出具体例子来证明.)

(v) 如果$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$是集合$X$上的拓扑, 那么集合$\bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$也是$X$上的拓扑.

(vi) 如果对任何$i \in I$, 这里I为某个指标集, τ_i是X上的拓扑, 那么集合$\bigcap_{i \in I} \tau_i$也是X上的拓扑.

§1.4 后记

本章我们介绍了拓扑空间的基本概念. 我们看到了很多有限空间[2]的例子, 以及离散拓扑空间, 平庸拓扑空间, 有限闭拓扑空间. 对于应用而言, 上述拓扑空间都不是特别重要的例子. 然而, 在4.3节习题8中, 我们提到了每一个无限拓扑空间"包含"一个具有以下5种拓扑之一的无限拓扑空间: 平庸拓扑, 离散拓扑, 有限闭拓扑, 1.1节

[2] **有限拓扑空间** 是指集合X 是有限的拓扑空间(X, τ).

习题6中的initial segment 拓扑或final segment 拓扑. 下一章我们将要描述非常重要的欧几里得拓扑.

在学习过程中我们碰到了名词"开集"和"闭集", 并且我们被警告: 这些名字可能会给人误导. 集合可以是既开又闭的, 既不开又不闭的, 开但不闭的, 或闭但不开的. 记住我们不能通过证明一个集合不是闭的来证明一个集合是开的是很重要的.

除了拓扑, 拓扑空间, 开集, 和闭集, 我们所谈到的最重要的主题是关于如何写证明.

在本章开始的评注里, 我们指出了学习写证明的重要性. 在例1.1.8, 命题1.1.9, 和例1.3.3中我们已经看到怎么样"构思"一个证明. 发展你自己的写证明的技巧是基本的. 可以用来练习写证明的好的习题包括1.1节习题8, 1.2节习题2, 4, 及1.3节习题1, 4.

一些学生被拓扑的概念搞糊涂了, 因为它包含着"集合的集合". 做练习1.1#3可以检查你对拓扑概念的理解.

练习题包含了今后将要正式引入的T_0-空间和T_1-空间的概念. 这些概念被称为**分离性质**.

最后我们强调了逆映像的重要性. 这放在了例1.3.9和1.3节习题1中. 我们的连续映射的定义是依赖于逆映像的概念的.

第二章　欧几里得拓扑

导言

在一部电影或小说里, 情节通常只围绕少数几个角色演进. 在我们所讲的拓扑的故事中, 实数集上的欧几里得拓扑是这样的一个角色. 事实上, 它是一个如此有丰富内容的例子, 以致于我们要经常为了得到启发和进一步的检验而回到它这里.

令$\mathbb{R}$为所有实数组成的集合. 在第一章里我们定义三个可以被放在任何集合上的拓扑: 离散拓扑, 平庸拓扑和有限闭拓扑. 于是我们知道了三个可以放在集合$\mathbb{R}$上的拓扑. 六个$\mathbb{R}$上其它的拓扑在练习1.1 第5 题和第9题中定义. 在本章我们描述一个重要的多并有趣的多的$\mathbb{R}$上的拓扑, 我们称之为欧几里得拓扑.

对欧几里得拓扑的分析带我们到"拓扑的基"的概念. 在线性代数的学习中, 我们知道每个向量空间有一个基, 并且每个向量是基中成员的线性组合. 相似地, 在一个拓扑空间里, 每个开集能被表示为基的成员的并. 事实上, 一个集合是开的, 当且仅当它为基中成员的并.

§2.1　$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑

定义　2.1.1. *$\mathbb{R}$中的子集S称为在**$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑**的开集, 如果它满足如下性质:*

(*) 对任何$x \in S$, 存在$\mathbb{R}$中的a, b, 满足$a < b$, 使得$x \in (a, b) \subseteq S$.

注意. 当我们提到拓扑空间$\mathbb{R}$, 而没有明确提到其上的拓扑时, 均指具有欧几里得拓扑的$\mathbb{R}$.

注 2.1.2. (i) *"欧几里得拓扑" τ 是拓扑.*

证明.

我们需要证出τ满足定义1.1.1中(i), (ii)和(iii).

我们的已知一个集合属于τ当且仅当它满足性质(*).

首先, 我们证明$\mathbb{R} \in \tau$. 设$x \in \tau$. 如果我们令$a = x - 1$和$b = x + 1$, 那么$x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$; 即$\mathbb{R}$具有性质(*), 于是$\mathbb{R} \in \tau$. 其次, 默认的,$\varnothing$ 具有性质(*), 于是$\varnothing \in \tau$.

现在令$A_j : j \in J$, 对某个指标集J, 是τ中成员组成的集簇. 那么我们须要证明$\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$; 即, 我们须证出$\bigcup_{j\in J} A_j$具有性质$*$. 设$x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. 那么对某个$k \in J$, 成立$x \in A_k$. 由于$A_k \in \tau$, 于是存在$\mathbb{R}$中的$a$和$b$,满足$a < b$, 使得$x \in (a, b) \subseteq A_k$. 由于$k \in J$, $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$, 故$x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$. 因此$\bigcup_{j\in J} A_j$具有性质(*), 于是属于$\tau$.

最后, 设A_1和A_2属于τ. 我们需要证明$A_1 \cap A_2 \in \tau$. 令$y \in A_1 \cap A_2$. 于是$y \in A_1$. 由$A_1 \in \tau$, 存在$\mathbb{R}$中的a和b, 满足$a < b$, 使得$y \in (a, b) \subseteq A_1$. 同样$y \in A_2 \in \tau$. 于是存在$\mathbb{R}$中的$c$和$d$, 满足$c < d$, 使得$y \in (c, d) \subseteq A_2$. 令$e$为$a$和$c$中较大的一个, f为b和d中较小的一个. 易得$e < y < f$, 于是$y \in (e, f)$. 由于$(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_1$ 且$(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_2$, 我们得到$y \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$. 因此$A_1 \cap A_2$具有性质*, 故属于$\tau$.

因此τ的确是$\mathbb{R}$上的一个拓扑.

∎

我们现在继续刻画在欧几里得拓扑意义下$\mathbb{R}$上的开集和闭集. 特别的, 我们将会看到所有的开区间事实上是此拓扑上的开集, 所有的闭区间是此拓扑上的闭集.

(ii) 令$r, s \in \mathbb{R}$, 满足$r < s$. 开区间(r, s)的确属于$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑τ, 因此是开集.

证明.

> 我们需证出给定的开区间(r, s)是在欧几里得拓扑中是开集; 即, 我们须证出(r, s)具有定义2.1.1中性质$(*)$.
>
> 所以我们将从设$x \in (r, s)$开始. 我们想在$\mathbb{R}$中找到a和b, $a < b$, 使得$x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

令$x \in (r, s)$. 选$a = r$及$b = s$. 那么显然,

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s).$$

因此(r, s)是欧几里得拓扑上的开集. ∎

(iii) 对任何实数r, 开区间(r,∞)和$(-\infty,r)$是$\mathbb{R}$中的开集.

证明.

首先, 我们来证明(r,∞)是开集; 即它具有性质(*).

为证明这一点, 我们令$x\in(r,\infty)$, 来找$a,b\in\mathbb{R}$ 使得

$$x\in(a,b)\subseteq(r,\infty).$$

设$x\in(r,\infty)$. 令$a=r$及$b=x+1$. 那么$x\in(a,b)\subseteq(r,\infty)$, 于是$(r,\infty)\in\tau$.

类似的, 我们可以证出$(-\infty,r)$ 是$\mathbb{R}$中的开集.

∎

(iv) 注意到尽管每个开区间都是开集, 但反之是不成立的, 这一点很重要. 不是所有$\mathbb{R}$中的开集是区间. 例如, 集合$(1,3)\cup(5,6)$是$\mathbb{R}$中的开集, 但它不是一个开区间. 甚至集合$\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n,2n+1)$是$\mathbb{R}$中的开集.

(v) 对$\mathbb{R}$中的任何满足$c<d$的c和d, 闭区间$[c,d]$不是$\mathbb{R}$中的开集.

证明.

我们需要证出$[c,d]$不具有性质$(*)$.

为了达到这一点, 找到一个x, 使得没有与之相应的满足条件$(*)$的a,b.

明显c和d是区间$[c,d]$里很特殊的点. 所以我们将选$x=c$并且不存在满足所要求条件的a,b.

我们将应用一种叫**反证法**的证明方法. 我们$\boxed{\text{假设}}$存在满足条件的a和b, 然后说明此假设导致一个矛盾, 错误的东西. 于是假设错误! 因此这样的a和b不存在. 于是, $[c,d]$不满足性质$(*)$, 故不是开集.

注意到$c\in[c,d]$. 假设存在$\mathbb{R}$中的满足$a<b$的a和b, 使得$c\in(a,b)\subseteq[c,d]$. 于是由$c\in(a,b)$知$a<c<b$, $a<\frac{c+a}{2}<c<b$. 故$\frac{c+a}{2}\in(a,b)$且$\frac{c+a}{2}\notin[c,d]$. 于是$(a,b)\not\subseteq[c,d]$, 这是个矛盾. 所以不存在a和b使得$c\in(a,b)\subseteq[c,d]$. 因此$[c,d]$不满足性质(*), 于是$[c,d]\notin\tau$. ∎

(vi) 对$\mathbb{R}$中满足$a<b$的任意a和b, 闭区间$[a,b]$是欧几里得拓扑空间$\mathbb{R}$中的闭集.

证明. 为了证出$[a,b]$是闭集, 我们只须观察到其补集$(-\infty,a)\cup(b,\infty)$, 是两个开集的并, 是开集. ∎

(vii) 每个单点集$\{a\}$ 是$\mathbb{R}$ 中的闭集.

证明. $\{a\}$的补集是两个开集$(-\infty, a)$和(a, ∞)的并, 于是为开集. 因此, $\{a\}$是$\mathbb{R}$中的闭集. ∎

[用练习1.3第3题的术语来讲, 此结论是说$\mathbb{R}$是一个T_1-空间.]

(viii) 注意到我们可以通过用"$a \le b$"来取代"a¡b", 将(vii)包括在(vi)中. 单点集$\{a\}$只不过是闭区间$[a, b]$的退化情形.

(ix) 所有整数的集合$\mathbb{Z}$是$\mathbb{R}$中的闭子集.

证明. $\mathbb{Z}$的补集是$\mathbb{R}$上开子集$(n, n+1)$的并$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$, 所以是$\mathbb{R}$上的开集. 因此$\mathbb{Z}$是$\mathbb{R}$上的闭集. ∎

(x) 所有有理数组成的集合$\mathbb{Q}$既不是$\mathbb{R}$上的闭子集, 也不是$\mathbb{R}$上的开子集.

证明.

> 我们将通过证明$\mathbb{Q}$不满足性质(*)来得出$\mathbb{Q}$不是开集.
> 为了做到这一点, 证出$\mathbb{Q}$不包含任何满足$a < b$的区间(a, b)即可.

$\boxed{\text{假设}}$$(a, b) \in \mathbb{Q}$, 这里$a$和$b$属于$\mathbb{R}$, 且$a < b$. 在任何两个不同的实数之间, 都有一个无理数. (你能证明这一点吗?) 因此, 存在$c \in (a, b)$ 使得$c \notin \mathbb{Q}$. 这与$(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$矛盾. 因此$\mathbb{Q}$不包含任何区间$(a, b)$, 于是不是一个开集.

为了证明$\mathbb{Q}$不是闭集, 只需证出$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 不是开集. 利用在任何两个不同的实数之间一定有一个有理数的事实, 我们知道$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 不包含任何满足$a < b$的区间$(a < b)$. 因此$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中不是开的, 故$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中不是闭集.

∎

(xi) 在第三章我们将要证明$\mathbb{R}$中仅有的闭开集是平凡的, 即$\mathbb{R}$和$\varnothing$.

习题2.1

1. 证明对于$a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b)$和$(a, b]$都不是$\mathbb{R}$中的开子集. 再证明它们也都不是$\mathbb{R}$中的闭子集.

2. 证明集合$[a, \infty)$和$(-\infty, a]$是$\mathbb{R}$中的闭子集.

3. 举例说明$\mathbb{R}$中无限个闭子集的并不一定是$\mathbb{R}$中的闭子集.

4. 证明如下每个结论.

(i) 所有整数组成的集合$\mathbb{Z}$不是$\mathbb{R}$中的开集.

(ii) 所有素数组成的集合S是$\mathbb{R}$中的闭子集, 但不是$\mathbb{R}$中的开子集.

(iii) 所有无理数组成的集合$\mathbb{P}$既不是$\mathbb{R}$中的闭子集, 也不是$\mathbb{R}$中的开子集.

5. 如果F是$\mathbb{R}$中一个非空有限子集, 证明F是$\mathbb{R}$中的闭集, 但F不是$\mathbb{R}$中的开集.

6. 如果F是$\mathbb{R}$中的非空可数子集, 证明F不是个开集.

7. (i) 令$S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$. 证明$S$是欧几里得拓扑空间$\mathbb{R}$中的闭集.

   (ii) 集合$T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$是$\mathbb{R}$中的闭集吗?

   (iii) 集合$\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$是$\mathbb{R}$中的闭集吗?

8. (i) 设(X, τ)为拓扑空间. X的子集S称为一个F_σ**-集**, 如果它是可数个闭集的并. 证明所有的开区间(a, b)和所有的闭区间$[a, b]$是$\mathbb{R}$中的F_σ-集.

   (ii) 设(X, τ)为拓扑空间. X的子集T称为一个G_δ**-集**, 如果它是可数个开集的交. 证明所有的开区间(a, b)和所有的闭区间$[a, b]$是$\mathbb{R}$中的G_δ-集.

   (iii) 证明有理数集合$\mathbb{Q}$是$\mathbb{R}$中的F_σ-集. (在6.5节习题3我们将证明$\mathbb{Q}$<u>不</u>是$\mathbb{R}$中的G_δ-集.)

   (iv) 验证F_σ-集的补集是G_δ-集, 且G_δ-集的补集是F_σ-集.

§2.2 拓扑空间的基

注2.1.2 使得我们可以以一种更加方便的方式来刻画$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑. 为了这一点, 我们引出拓扑空间的基的概念.

命题 2.2.1. *$\mathbb{R}$中的子集S是开的, 当且仅当它是开区间的并.*

证明.

我们须证出S是开的, <u>当且仅当</u>它是开区间的并; 既, 我们须证出

(i) 如果S是开区间的并, 那么它是开集, <u>且</u>

(ii) 如果S是开集, 那么它是开区间的并.

设S是开区间的并; 即存在开区间(a_j, b_j), 这里j属于某个指标集J, 使得$S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$. 由注2.1.2 (ii), 每个开区间$(a_j, b_j)$是开集. 因此$S$是开集的并, 于是$S$是开集.

反过来, 设S是$\mathbb{R}$中的开集. 那么对每个$x \in S$, 存在区间$I_x = (a, b)$使得$x \in I_x \subseteq S$. 我们断言$S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

我们须证出两个集合S和$S = \bigcup_{x\in S} I_x$是相等的.
它们可被证出是相等的, 通过证明

(i) 如果$y \in S$, 那么$y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, 且

(ii) 如果$z \in \bigcup_{x\in S} I_x$, 那么$z \in S$.

[注意(i)等价于论断$S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$, 而(ii)等价于$\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$.]

首先设$y \in S$. 则$y \in I_y$. 于是$y \in \bigcup_{x\in S} I_x$, 如所要求的. 其次, 设$z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. 那么$z \in I_t$, 对某个$t \in S$. 由于每个$I_x \subseteq S$, 我们知道$I_t \subseteq S$, 且$z \in S$. 因此, $S = \bigcup_{x\in S} I_x$, 即S是开区间的并, 如所要求的. ∎

上述命题告诉我们为了刻画$\mathbb{R}$上的拓扑, 知道所有的区间(a, b)是开集就足够了. 每一个其它的开集是这些开集的并. 这将我们带到如下的定义.

定义 2.2.2. *设(X, τ)为拓扑空间. X中开集的集合$\mathcal{B}$称为拓扑τ的一个基, 如果每个开集是$\mathcal{B}$中成员的并.*

如果$\mathcal{B}$是X上拓扑τ的基, 那么X中子集U属于τ当且仅当它是$\mathcal{B}$中成员的并. 所以$\mathcal{B}$在如下意义下"生成"拓扑τ: 如果我们知道了$\mathcal{B}$的成员是什么样的集合, 那么我们能决定τ中的成员– 它们正是所有由$\mathcal{B}$中成员的并得到的集合.

例 2.2.3. *令$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. 那么由命题??, $\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑的一个基.*

例 2.2.4. 令(X,τ)为离散空间, $\mathcal{B}$是由X中所有单点子集组成的集簇; 即$\mathcal{B}=\{\{x\}:x\in X\}$. 则由命题1.1.9, $\mathcal{B}$是τ的一个基.

例 2.2.5. 令$X=\{a,b,c,d,e,f\}$且

$$\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}.$$

则$\mathcal{B}=\{\{a\},\{c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$是$\tau_1$的一个基, 这是因此$\mathcal{B}\subseteq\tau_\infty$, 且每个$\tau_1$中的成员可以表示成$\mathcal{B}$中成员的并. (观察到$\varnothing$是$\mathcal{B}$中成员的空的并.)

注意τ_1自身也是τ_1的一个基.

注 2.2.6. 观察到如果(X,τ)是拓扑空间, 则$\mathcal{B}=\tau$是拓扑τ的一个基. 故, 例如, X中所有子集组成的集合是X上离散拓扑的一个基.

因此, 我们看到对同一个拓扑, 可能会有多个不同的基. 事实上, 如果$\mathcal{B}$是X上拓扑空间τ的一个基, $\mathcal{B}_1$是X的子集组成的集合, 并满足$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_1\subseteq\tau$, 那么$\mathcal{B}_1$也是$\tau$的一个基. [验证这一点.]

如上面指出的, "拓扑的集"的概念使得我们可以定义拓扑. 然而下面的例子表明我们应该非常小心.

例 2.2.7. 令$X=\{a,b,c\}$及$\mathcal{B}=\{\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$. 那么对任何$X$上的拓扑来说, $\mathcal{B}$都不是一个基. 为了看出这一点, $\boxed{\text{假设}}$$\mathcal{B}$是某个拓扑$\tau$的基. 那么$\tau$由所有的$\mathcal{B}$中成员组成的并所构成; 即

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{b,c\}\}.$$

(我们又一次用到了$\varnothing$是$\mathcal{B}$中成员的空的并, 且$\varnothing\in\tau$的事实.)

然而, τ不是一个拓扑, 因为集合$\{b\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}$不属于τ, 于是τ不满足定义1.1.1中的性质(iii). 这是个矛盾, 所以我们的假设是错误的. 因此对任何X上的拓扑来说, $\mathcal{B}$都不是一个基.

因此我们要问: 如果$\mathcal{B}$是X中子集的集合, 在什么条件下$\mathcal{B}$是某个拓扑的基? 这个问题为命题2.2.8所回答.

命题 2.2.8. 令X为一非空集合, $\mathcal{B}$为X中子集组成的集合. 那么$\mathcal{B}$是X上某拓扑的基, 当且仅当$\mathcal{B}$有如下性质:

(a) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, 和

(b) 对任何$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 集合$B_1 \cap B_2$是$\mathcal{B}$中成员的并.

证明. 如果$\mathcal{B}$是拓扑τ的基, 那么τ一定满足定义1.1.1的(i), (ii)和(iii). 特别的, X一定是开集, 任何两个开集的交一定是开集. 由于开集恰恰是$\mathcal{B}$中成员的并, 上述a)和b)成立.

反过来, 假设$\mathcal{B}$满足性质a)和b), τ是由所有的$\mathcal{B}$中成员的并组成的集合簇. 我们将要证明τ是一个X上的拓扑. (如果这样的话, 显然$\mathcal{B}$是此拓扑的一个基, 于是命题正确.)

根据(a), $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, 故$X \in \tau$. 注意到$\varnothing$是$\mathcal{B}$中成员的空并, 所以$\varnothing \in \tau$. 于是我们证出了$\tau$满足定义1.1.1的性质(i).

令$\{T_j\}$是由τ中一些成员组成的集簇. 那么每个T_j是$\mathcal{B}$中成员的并. 则所有T_j的并也是$\mathcal{B}$中成员的并, 故属于τ. 于是τ也满足定义1.1.1的条件(ii).

最后, 令C和D属于τ. 我们需要验证$C \cap D \in \tau$. 但是$C = \bigcup_{k\in K} B_k$, 对某个指标集K, 且集合$B_k \in \mathcal{B}$. 同样, $D = \bigcup_{j\in J} B_j$, 对某个指标集J, 且$B_j \in \mathcal{B}$. 因此

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{k\in K, j\in J} (B_k \cap B_j).$$

你应该验证上式中对$C \cap D$的两种表述事实上是相等的!

在有限指标集的情况下, 此式意味着类似于如下式子的结论:

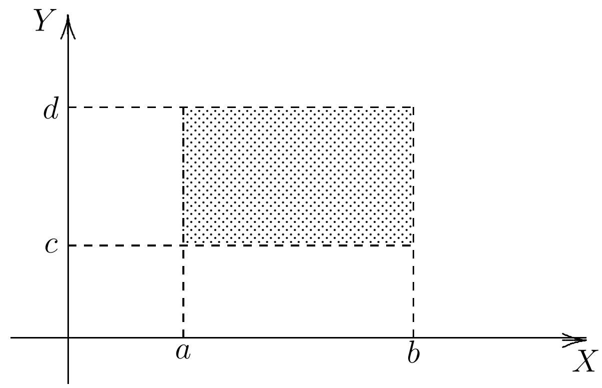
$$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4).$$

由我们的假设条件(b), 每个$B_k \cap B_j$是$\mathcal{B}$中成员的并, 于是$C \cap D$是$\mathcal{B}$中成员的并. 故$C \cap D \in \tau$. 于是τ具有定义1.1.1的性质(iii). 因此, τ确实是一个拓扑, $\mathcal{B}$是此拓扑的一个基, 如所要求的那样. ∎

命题2.2.8是非常有用的结论. 它使得我们可以通过仅写下一个基来定义拓扑. 这通常比试着描述所有的开集要容易.

我们将要应用这个命题来定义一个实数平面上的拓扑. 此拓扑被称为"欧几里得拓扑".

例 2.2.9. 设$\mathcal{B}$是所有平面上的"开矩形"组成的集合: $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2, a < x < b, c < y < d\}$, 这些矩形的每条边与$X$-或$Y$-轴平行.



则$\mathcal{B}$是一个平面上拓扑的基. 此拓扑称为欧几里得拓扑.

每当我们用符号$\mathbb{R}^2$时, 指平面, 当我们作为拓扑空间而提到$\mathbb{R}^2$时, 且没有明确指出拓扑是什么, 我们指具有欧几里得拓扑的平面.

为了明白$\mathcal{B}$确实是某个拓扑的基, 注意(i) 平面是所有开矩形的并, 且(ii) 任何两个矩形的交还是矩形. [我们所说的"矩形"是指边平行于坐标轴的矩形.] 所以满足命题2.2.8的条件, 故$\mathcal{B}$是某拓扑的基.

注 2.2.10. 通过推广例*2.2.9*我们知道如何在

$$\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$ 对每个大于2的整数.

令$\mathcal{B}$为所有$\mathbb{R}$中子集$\{\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 的集合, 显然边平行于坐标轴. 此集合$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}^n$上 欧几里得拓扑的基.

习题2.2

1. 在本习题中, 你将证明圆盘$\{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$ 是$\mathbb{R}^2$中的开集, 然后每个平面上的开圆盘是开集.

   (i) 设$\langle a, b\rangle$ 为圆盘$D = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$中的任一点. 令$r = \sqrt{a^2 + b^2}$. 设$R_{\langle a,b\rangle}$为顶点在点$\langle a \pm \frac{1-r}{8}, b \pm \frac{1-r}{8}$的开矩形. 验证$R_{\langle a,b\rangle} \subset D$.

   (ii) 用(i)的结论证明
   $$D = \bigcup_{\langle a,b\rangle \in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) 由(ii)推导出D是$\mathbb{R}^2$中的开集.

(iv) 证明每个开圆盘$\{\langle x,y\rangle : (x-a)^2+(y-b)^2 < c^2, a,b,c\in\mathbb{R}\}$是$\mathbb{R}^2$中的开集.

2. 在本习题里, 你将要证明$\mathbb{R}^2$中所有开圆盘的集合是$\mathbb{R}^2$中某个拓扑的一个基. [以后我们将会看到此拓扑为欧几里得拓扑.]

(i) 设D_1和D_2是$\mathbb{R}^2$中任意两个满足$D_1\cap D_2\neq\varnothing$的开圆盘. 如果$\langle a,b\rangle$是任意$D_1\cap D_2$中的点, 证明存在中心在$\langle a,b\rangle$并使得$D_{\langle a,b\rangle}\subset D_1\cap D_2$.

[提示: 画图, 并用类似于习题1 (i)的方法]

(ii) 证明

$$D_1\cap D_2=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D_1\cap D_2} D_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) 用(ii)和命题2.2.8证明$\mathbb{R}^2$中所有开圆盘的集合是$\mathbb{R}^2$上某个拓扑的基.

3. 设$\mathcal{B}$是$\mathbb{B}$上所有由$a<b$且a和b是有理数组成的开区间(a,b)的集合. 求证$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑的一个基. [比较此结论与命题2.2.1及例2.2.3, 那里a和b不一定是有理数.]

[提示: 不要用命题2.2.8, 因为此命题只是说明$\mathcal{B}$是<u>某个</u>拓扑的基, 不一定是欧几里得拓扑的基.]

4. 拓扑空间(X,τ)称为满足**第二可数性公理**的, 如果存在τ的一个仅由可数个集合组成的基.

(i) 由上边的习题3来证明$\mathbb{R}$满足第二可数公理.

(ii) 证明一个不可数集上的离散拓扑不满足第二可数公理.

[提示: 只是证出某个基不可数是<u>不</u>够的. 你必须证明此拓扑的$\boxed{\text{每个}}$基是不可数的.]

(iii) 证明对每个正整数n, $\mathbb{R}^n$满足第二可数公理.

(iv) 设(X,τ)为具有有限闭拓扑的所有整数组成的集合. 拓扑空间(X,τ)满足第二可数公理吗?

5. 证明如下结论.

   (a) 设m和c为实数, 这里$m \neq 0$. 那么直线$L = \{\langle x, y\rangle : y = mx + c\}$是$\mathbb{R}^2$上的闭子集.

   (b) 设$\mathbb{S}^1$为$\mathbb{S}^1 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$给出的单位圆. 则$\mathbb{S}^1$为$\mathbb{R}^2$中的闭子集.

   (c) 设$\mathbb{S}^n$为$\mathbb{S}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$给出的单位$n$-球面. 则$\mathbb{S}^n$为$\mathbb{R}^{n+1}$中的闭子集.

   (d) 设B^n为$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$给出的闭单位$n$-球. 则$B^n$为$\mathbb{R}^n$中的闭子集.

   (e) 曲线$C = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$是$\mathbb{R}^2$中的闭子集.

6. 设$\mathcal{B}_1$为X上拓扑τ_1的一个基, $\mathcal{B}_2$为Y上拓扑τ_2的一个基. 集合$X \times Y$由所有$x \in X$, $y \in Y$的有序对$\langle x, y\rangle$组成的集合. 设$\mathcal{B}$是由所有$B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2$组成的集合. 求证$\mathcal{B}$是$X \times Y$上某个拓扑的一个基. 如此定义的拓扑称为$X \times Y$上的 **乘积拓扑**.

   [提示: 参见例2.2.9.]

7. 用上面习题3和2.1节习题8, 证明$\mathbb{R}$上的每个开子集是F_σ-集及G_δ-集.

§2.3 给定拓扑的基

命题2.2.8告诉我们在什么条件下由集合X的一些子集组成的集合$\mathcal{B}$是X上某个拓扑的基. 然而有时对一个给定的X上的拓扑τ, 我们想知道是否$\mathcal{B}$是这个确定的拓扑的一个基. 为了验证$\mathcal{B}$是τ的一个基, 我们可以应用定义2.2.2, 说明每个τ的成员是$\mathcal{B}$中成员的并. 然而, 命题2.3.2给我们提供了另一个方法.

但首先我们给出一个例子来说明X中一些子集组成的集合$\mathcal{B}$是某个拓扑的一个基与$\mathcal{B}$是一个给定拓扑的一个基是不同的.

例 2.3.1. *设$\mathcal{B}$是所有形如$(a, b], a < b$的半开区间组成的集合, 这里$(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$. 则$\mathcal{B}$是某个$\mathbb{R}$上拓扑的一个基, 由于$\mathbb{R}$是所有$\mathcal{B}$中成员的并, 且任何两个半开区间的交是半开区间.*

然而, 以$\mathcal{B}$作为基的拓扑τ_1, <u>不</u>是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑. 我们通过观察到$(a,b]$是具有拓扑τ_1的$\mathbb{R}$中的开集, 而$(a,b]$不是具有欧几里得拓扑的$\mathbb{R}$中的开集(参见*2.1*节习题*1*), 可以明白这一点. 所以$\mathcal{B}$是某个拓扑的基, 但不是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑的基.

命题 2.3.2. 设(X,τ)是一个拓扑空间. X中一些开子集组成的集簇$\mathcal{B}$是τ的一个基, 当且仅当对于任何开集U中任何点x, 存在$B \in \mathcal{B}$使得$x \in B \subseteq U$.

证明.

我们需要证出

(i) 如果$\mathcal{B}$是τ的一个基且$x \in U \in \tau$, 那么存在$B \in \mathcal{B}$使得$x \in B \subseteq U$, <u>及</u>

(ii) 如果对每个$U \in \tau$及$x \in U$, 存在$B \in \mathcal{B}$使得$x \in B \subseteq U$, 那么$\mathcal{B}$是τ的一个基.

设$\mathcal{B}$是τ的一个基且$x \in U \in \tau$. 由于$\mathcal{B}$是τ的一个基, 开集U是$\mathcal{B}$中成员的并; 即$U = \bigcup_{j \in J} B_j$, 这里对某个指标集$J$的每个$j$, 都有$B_j \in \mathcal{B}$. 由$x \in U$知对某个$j \in J$, $x \in B_j$. 因此$x \in B_j \subseteq U$, 如所要求的.

反过来, 设对每个$U \in \tau$和每个$x \in U$, 存在满足$x \in B \subseteq U$的$B \in \mathcal{B}$. 我们须证出每个开集都是$\mathcal{B}$中成员的并. 故令V为任意开集. 则对每个$x \in V$, 存在$B_x \in B$, 使得$x \in B_x \subset V$. 明显的, $V = \bigcup_{x \in V} B_x$. (验证这一点!) 因此$V$是$\mathcal{B}$中成员的并. ∎

命题 2.3.3. 设$\mathcal{B}$是集合X上拓扑τ的一个基. 则X的子集U是开集当且仅当对每个$x \in U$, 存在$B \in \mathcal{B}$使得$x \in B \subseteq U$.

证明. 令U为X中任一子集. 设对每个$x \in U$, 存在$B_x \in \mathcal{B}$使得$x \in B_x \subseteq U$. 显然$U = \bigcup_{x \in U} B_x$. 故$U$为开集的并, 是开集, 如所要求的那样. 反过来的结论可由命题2.3.2得出. ∎

注意到由命题2.3.3刻画的基的性质正是我们在定义$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑时所用的. 我们当时说$\mathbb{R}$中子集U是开的, 当且仅当对任何$x \in U$, 存在满足$a < b$的a和b, 使得$x \in (a,b) \subseteq U$.

警告: 确认你理解命题2.2.8和命题2.3.2的不同. 命题2.2.8给出了X中一些子集组成的集簇$\mathcal{B}$是X上某个拓扑的一个基的条件. 然而, 命题2.3.2给出了由拓扑空间(X, τ)中的一些子集组成的集簇$\mathcal{B}$是给定拓扑τ的一个基的条件.

我们看到一个拓扑可以有多个不同的基. 下个命题告诉我们什么时候在同一集合X上的两个基$\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$定义相同的拓扑.

命题 2.3.4. *设$\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$分别是非空集X上拓扑τ_1和τ_2的基. 则$\tau_1 = \tau_2$ 当且仅当*

(i) *对每个$B \in \mathcal{B}_1$及每个$x \in B$, 存在$B' \in \mathcal{B}_2$, 使得$x \in B' \subseteq B$, 且*

(ii) *对每个$B \in \mathcal{B}_2$及每个$x \in B$, 存在$B' \in \mathcal{B}_1$, 使得$x \in B' \subseteq B$.*

证明.

我们须证出$\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$是同一拓扑的基当且仅当(i)和(ii)成立.

首先我们假设它们是同一拓扑的基, 即$\tau_1 = \tau_2$, 来证条件(i)和(ii)成立.

然后我们假设(i)和(ii), 来证$\tau_1 = \tau_2$.

首先假设$\tau_1 = \tau_2$. 则(i)和(ii)是由命题2.3.2直接得出的结论.

反过来, 假设$\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$满足条件(i)和(ii). 由命题2.3.2, (i)意味着每个$B \in \mathcal{B}_1$是(X, τ_2)中的开集; 即$\mathcal{B}_1 \subseteq \tau_2$. 由于每个$\tau_1$的成员是$\tau_2$中一些成员的并, 我们有$\tau_1 \subseteq \tau_2$. 相似的, 由(ii)可推出$\tau_2 \subseteq \tau_1$. 因此, $\tau_1 = \tau_2$, 如所要求的.

∎

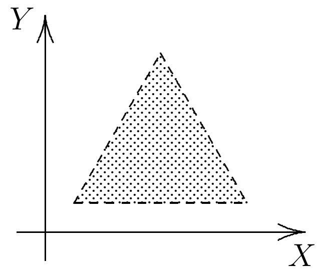
例 2.3.5. *证明由所有的底边平行于X轴的"开等边三角形"是$\mathbb{R}^2$上欧几里得拓扑的基. (我们所说的"开三角形"是指不包含边界的三角形.)*

证明. (粗略证明. 我们在这里仅仅给出一个借助图形的推理. 把写详细证明的任务留给读者.)

我们须证出$\mathcal{B}$是欧几里得拓扑的一个基.

我们将应用命题2.3.4, 但首先我们需要证出$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}^2$上某个拓扑的基.

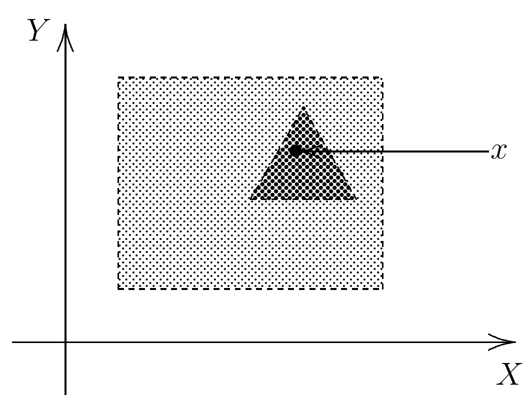
为了做到这一点, 我们证明$\mathcal{B}$满足命题2.2.8的条件.



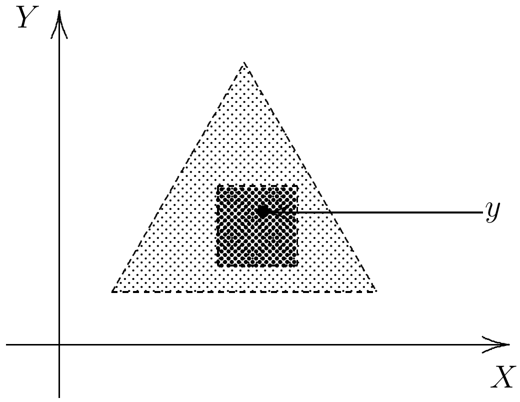
我们观察到的第一件事情是$\mathcal{B}$是某个拓扑的基, 因为它满足命题2.2.8的条件. (为明白$\mathcal{B}$满足命题2.2.8的条件, 注意$\mathbb{R}^2$等于所有底边平行于X轴的开等边三角形的并, 且这样的两个三角形的交是另一个这样的三角形.)

下面我们证明满足命题2.3.4的条件(i)和(ii).

首先我们验证条件(i). 令R为一个边平行于坐标轴的开矩形, x为R中的任意点. 我们须证出存在底边平行于X-轴的开等边三角形T, 使得$x \in T \subseteq R$. 从图形上看这一点是容易得出的.



其次我们验证命题2.3.4的条件(ii). 令T'为一个底边平行于X-轴的开等边三角形, y是T'中的任何一点. 则存在开矩形R'使得$y \in R' \subseteq T'$. 从图形上看这一点也是容易得出的.



所以满足命题2.3.4的条件. 故$\mathcal{B}$确实是$\mathbb{R}^2$上欧几里得拓扑的基.

∎

在例2.2.9我们为欧几里得拓扑定义了一个由所有"开矩形"(满足边平行于坐标轴)组成的集合得到的基. 例2.3.5表明"开矩形"可被"开等边三角形"(满足底边平行于X-轴)所取代, 而拓扑不变. 在本节习题1中我们将看到上述在括号中的条件可以被去掉, 而拓扑不变. 此外, "开矩形"可以被"开圆盘"所取代[1].

习题2.3

1. 判断下列每一个集合是否是$\mathbb{R}^2$上欧几里得拓扑的基:

   (i) 由所有边平行于坐标轴的"开"正方形组成的集合;

   (ii) 由所有"开"圆盘组成的集合;

   (iii) 由所有"开"正方形组成的集合;

   (iv) 由所有"开"矩形组成的集合;

   (v) 由所有"开"三角形组成的集合.

2. (i) 令$\mathcal{B}$为非空集X上某拓扑的一个基. 如果$\mathcal{B}_1$是X中一些子集组成的满足$\tau \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$的集合, 求证$\mathcal{B}_1$也是$\tau$的一个基.

   (ii) 从(i)推出对$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑, 存在不可数个不同的基.

[1]事实上, 绝大多数书用开圆盘刻画$\mathbb{R}^2$上的欧几里得拓扑.

3. 令$\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. 如在例2.3.1所看到的, $\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上某个拓扑τ的一个基, 且τ不是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑. 然而, 求证每个区间(a,b)在$(\mathbb{R},\tau)$中是开的.

4. * 令$C[0,1]$为所有$[0,1]$上的连续实值函数 组成的集合.

   (i) 证明集合$\mathcal{M}$, 这里$\mathcal{M} = \{M(f,\varepsilon) : f \in C[0,1], \varepsilon$是正实数$\}$ 且$M(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[0,1]$且$\int_0^1 |f-g| < \varepsilon\}$, 是$C[0,1]$上的某个拓扑$\tau_1$的基.

   (ii) 证明集合$\mathcal{U}$, 这里$\mathcal{U} = \{U(f,\varepsilon) : f \in C[0,1], \varepsilon$是正实数$\}$ 且$U(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[0,1]$且$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon\}$, 是$C[0,1]$上的某个拓扑$\tau_2$的基.

   (iii) 证明$\tau_1 \neq \tau_2$.

5. 设(X,τ)为拓扑空间. 一个非空的X的开子集组成的集合$\mathcal{S}$称为τ的**子基**, 如果所有$\mathcal{S}$中成员的有限交组成的集合是τ的一个基.

   (i) 证明所有形如(a,∞)或$(-\infty,b)$的开区间组成的集合是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑的子基.

   (ii) 证明$\mathcal{S} = \{\{a\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$是例1.1.2中拓扑$\tau_1$的一个子基.

6. 令S为集合$\mathbb{R}$上拓扑τ的一个子基. (参见上面的习题5.) 如果所有满足$a < b$的闭区间$[a,b]$属于$\mathcal{S}$, 求证τ为离散拓扑.

7. 令X为非空集, $\mathcal{S}$为所有形如$X \setminus \{x\}, x \in X$的集合所组成的集合. 求证$\mathcal{S}$是$X$上有限闭拓扑的一个子基.

8. 令X为任何无限集, τ为X上的离散拓扑. 为τ找一个子基$\mathcal{S}$, 使得$\mathcal{S}$不包含任何单点集.

9. 令$\mathcal{S}$为平面$\mathbb{R}^2$上所有直线组成的集合. 如果$\mathcal{S}$为$\mathbb{R}^2$上某个拓扑τ的子基, 这个拓扑是什么?

10. 令$\mathcal{S}$为平面里所有平行于X-轴的直线组成的集合. 如果$\mathcal{S}$是$\mathbb{R}^2$上某个拓扑τ的子基, 刻画$(\mathbb{R}^2,\tau)$中的开集.

11. 令$\mathcal{S}$为平面上所有圆组成的集合. 如果$\mathcal{S}$是$\mathbb{R}^2$上某个拓扑τ的子基, 刻画$(\mathbb{R}^2,\tau)$中的开集.

12. 令$\mathcal{S}$为平面上所有圆心在X-轴上的圆组成的集合. 如果$\mathcal{S}$是$\mathbb{R}^2$上某个拓扑τ的子基, 刻画$(\mathbb{R}^2,\tau)$中的开集.

§2.4 后记

本章我们定义了一个非常重要的拓扑空间–$\mathbb{R}$, 具有欧几里得拓扑的所有实数组成的集合, 并且花了些时间来分析它. 我们观察到, 在此拓扑里, 开区间确实是开集(闭区间是闭集). 然而, 不是所有的开集是开区间. 无论怎么样, 每一个$\mathbb{R}$中的开集是开区间的并. 这将我们带到了介绍"拓扑的基"的概念, 并且建立了所有开区间组成的集合是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑的一个基的结论.

在第一章的导言里我们将数学证明描述为无懈可击的论述, 并强调了写证明的重要性. 本章我们在注2.1.2 (v)及另一个例子例2.2.7引入了反证法. 证明"充分必要"条件, 即"当且仅当"条件, 在命题2.2.1得到了解释, 在命题2.2.8, 2.3.2, 2.3.3和2.3.4中有进一步的例子.

拓扑的基就其自身而言是一个重要的主题. 我们看到, 例如, 所有的单点集组成的集合是离散拓扑的一个基. 命题2.2.8给出了X的一些子集组成的集簇是X上<u>某个</u>拓扑的基的充分必要条件. 这与命题2.3.2给出的结论相对照: 命题2.3.2给出了X的一些子集组成的集簇是X上<u>给定</u>拓扑的基的充分必要条件. 注意到了两个不同的集合可以是同一个拓扑的基. 命题2.3.4给出了此结论的充分必要条件.

对任何正整数n, 我们定义了$\mathbb{R}^n$上的欧几里得拓扑. 我们看到由所有开圆盘组成的集簇是$\mathbb{R}^2$的一个基, 由所有开正方形组成的集簇或由所有开矩形组成的集簇也是$\mathbb{R}^2$的一个基.

习题介绍了三种有趣的思想. 2.1节习题8给出了F_σ-集和G_δ集的概念, 它们在测度论中是重要的. 2.3节习题4引入了连续实函数空间. 这样的空间称为函数空间, 是泛函分析中的中心研究对象. 泛函分析是(经典)分析和拓扑的混合体, 有时称为现代分析, 参见Simmons Simmons [196]. 最后, 2.3节习题5-12处理子基的概念.

第三章　极限点

导言

在实数线上我们有“接近”的概念．例如，序列0.1，0.01，0.001，0.0001，0.00001，...中的每一点比它的前一个点更接近0．实际上，在某种意义下，0是这个序列的极限点．所以区间$(0,1]$是不闭的，由于它不包含极限点0．在一个一般的拓扑空间，我们没有一个“距离函数”，所以我们必须以不同的方式进行下去．我们将要在不求助于距离的情况下定义极限点的概念．甚至在我们给出的极限点的新定义下，0点将依然是$(0,1]$的一个极限点．极限点概念的引入将使我们更好地理解闭集的概念．

另一个我们将在这章引入的非常重要的拓扑概念是连通性．考虑拓扑空间$\mathbb{R}$．尽管集合$[0,1]\cup[2,3]$和[4,6]两者都能被描述成长度为2，显然它们是不同类的集合—前者由两段不相连的部分组成，而后者由一段组成．这两者之间的不同是“拓扑”的，将会通过连通性的概念揭露出来．

§3.1　极限点和闭包

如果(X,τ)是一个拓扑空间，那么通常称集合X中的元素为**点**..

定义　3.1.1. *设A为拓扑空间(X,τ)的子集．点$x\in X$称为* ***A的极限点****(或****聚点****)，如果每个包含x的开集U包含A中不同于x的一个点．*

例 3.1.2. *考虑拓扑空间(X,τ)，这里$X=\{a,b,c,d,e\}$，拓扑*

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\},$$

$A=\{a,b,c\}$．那么b,d和e是A的极限点，但a和c不是A的极限点．

证明.

a是A的极限点当且仅当每个包含a的开集包含A中的另一个点．

所以为了证出a $\boxed{不}$ 是A的极限点，找到哪怕一个包含a但不包含A中其它点的开集就够了．

集合$\{a\}$是开的, 并且不包含A中的其他点. 于是a不是A的极限点.

集合$\{c, d\}$是包含c的开集, 但它不包含A中任何其它点. 于是c不是A的极限点.

为了证出b是A的极限点, 我们须说明每个包含b的开集包含A中不同于b的其它点.

我们将通过写下所有包含b的开集并验证其中每个集合包含A中不同于b的一个点来证明.

包含b的开集只有X和$\{b, c, d, e\}$, 且两者都包含A中的另一个元素, 即c. 所以b是A极限点.

点d是A的极限点, 尽管它不属于A. 这是因为每一个包含d的开集包含A中的一个点. 类似地, e是A的极限点, 尽管它不属于A. ∎

例 3.1.3. 设(X, τ)为离散空间, A是X中子集. 则A没有极限点, 由于对任何$x \in X$, $\{x\}$是一个不包含任何A中不同于x的点.

例 3.1.4. 考虑$\mathbb{R}$中子集$A = [a, b)$. 容易验证每个$[a, b)$中元素是A的一个极限点. 点b也是A的一个极限点.

例 3.1.5. 令(X, τ)为平庸拓扑空间, A为X的至少有两个元素的子集. 则易看出X中每个点是A的极限点. *(为什么我们这里要要求A有至少两个点?)*

下边的命题为检验一个集合是否是闭集提供了一个很有用的方法.

命题 3.1.6. 令A为拓扑空间(X, τ)的一个子集. 则A在(X, τ)中是闭的当且仅当A包含所有它的极限点.

证明.

我们须证出A在(X, τ)中是闭的<u>当且仅当</u>A包含所有它的极限点; 即, 我们须证出:

(i) 如果A为闭集, 那么它包含所有它的极限点, 且

(ii) 如果A包含所有它的极限点, 那么它是闭集.

令A是(X,τ)中的闭集. 假设p是A的属于$X\setminus A$极限点. 则$X\setminus A$是一个包含A的极限点p的开集. 因此$X\setminus A$包含A中的元素. 显然这是错误的, 所以我们由我们的假设得到了矛盾. 因此每个A的极限点一定属于A.

反过来, 设A包含所有它的极限点. 对每个$z\in X\setminus A$, 由我们的假设知存在包含z的开集U_z使得$U_z\cap A=\varnothing$; 即$U_z\subseteq X\setminus A$. 因此, $X\setminus A=\bigcup_{z\in X\setminus A}U_z$. (验证这一点!) 所以$X\setminus A$是开集的并, 故为开集. 于是它的补集$A$是闭的. ∎

例 3.1.7. *作为命题3.1.6的应用, 我们有如下结论:*

(i) *集合$[a,b)$不是$\mathbb{R}$上的闭集, 由于b是极限点, 但$b\in[a,b)$;*

(ii) *集合$[a,b]$是$\mathbb{R}$上的闭集, 由于所有$[a,b]$的极限点(即所有$[a,b]$中的元素)属于$[a,b]$;*

(iii) *(a,b)不是$\mathbb{R}$上的闭集, 由于它不包含极限点a;*

(iv) *$[a,\infty)$是$\mathbb{R}$上的闭子集.*

命题 3.1.8. *令A为拓扑空间(X,τ)的子集, A'为A的所有极限点组成的集合. 则$A\cup A'$是闭集.*

证明. 由命题3.1.6, 我们只需证集合$A\cup A'$包含所有它的极限点, 或等价地, 集合$X\setminus(A\cup A')$不包含$A\cup A'$的极限点.

令$p\in X\setminus(A\cup A')$. 由于$p\notin A'$, 存在包含$p$的开集$U$, 满足$U\cap A=\{p\}$或$\varnothing$. 但$p\notin A$, 于是$U\cap A=\varnothing$. 我们断言也有$U\cap A'=\varnothing$. 因为若$x\in U$, 由于$U$是开集且$U\cup A=\varnothing$, $x\notin A'$. 故$U\cap A'=\varnothing$. 即$U\cap(A\cup A')=\varnothing$, 且$p\in U$. 因此$p$不是$A\cup A'$的极限点, 故$A\cup A'$是闭集. ∎

定义 3.1.9. *令A为拓扑空间(X,τ)的子集. 那么由A的所有点和A的所有极限点组成的集合$A\cup A'$称为**A的闭包**, 用$\overline{A}$来表示.*

注 3.1.10. *由命题3.1.8, 显然$\overline{A}$是闭集. 由命题3.1.6和3.1节习题5(i), 每个包含A的闭集也一定包含集合A'. 所以$A\cup A'=\overline{A}$是最小的包含A的闭集. 由此可知$\overline{A}$是所有包含A的闭集的交.*

例 3.1.11. 令$X = \{a, b, c, d, e\}$且

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

证明$\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$, 及$\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

证明.

为了找到某个给定集合的闭包, 我们将找出所有包含此集合的闭集, 并从中选择最小的一个. 因此我们以写下所有的闭集作为开始–它们正是所有开集的补集.

闭集是$\varnothing, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$和$\{a\}$. 所以包含$\{b\}$的最小闭集是$\{b, e\}$; 即$\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. 相似地, $\overline{\{a, c\}} = X$, 及$\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

∎

例 3.1.12. 令$\mathbb{Q}$为$\mathbb{R}$中所有有理数组成的集合. 求证$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

证明. $\boxed{\text{假设}}$ $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. 那么存在$x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. 由于$\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$是$\mathbb{R}$中的开集, 存在$a, b$, 满足$a < b$, 使得$x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. 但是在此区间$(a, b)$中存在一个有理数$q$; 即$q \in (a, b)$. 所以$q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, 于是$q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. 这是个矛盾, 因为$q \in \mathbb{Q}$. 因此, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ∎

定义 3.1.13. 令A为拓扑空间(X, τ) 的子集. 那么A称为在X中是**稠密**的, 或在X中是处处稠密的, 如果$\overline{A} = X$.

我们现在可以重新将例3.1.12叙述为: $\mathbb{Q}$是$\mathbb{R}$中的稠密子集.

注意到在例3.1.11中我们看到$\{a, c\}$在X中稠密.

例 3.1.14. 令(X, τ)为离散空间. 则每个X的子集是闭的(由于其补为开集). 因此X的唯一的稠密集是X自身, 由于每个X的子集是其自身的闭包.

命题 3.1.15. 令A为一个拓扑空间的(X, τ)的子集. 那么A在X中稠密, 当且仅当X的每个非空开集和A有非空的交集(即, 如果$U \in \tau$且$U \neq \varnothing$, 那么$A \cap U \neq \varnothing$.)

证明.

首先, 假设每个非空开集合和A的交集非空. 如果$A = X$, 那么显然A在X中稠密. 如果$A \neq X$, 设$x \in X \setminus A$. 如果$U \in \tau$且$x \in U$, 那么$U \cap A \neq \varnothing$. 于是$x$是$A$的一个极限点. 由于$x$是$X \setminus A$的任意点, 每个$X \setminus A$中的点是$A$的极限点. 于是$A' \supseteq X \setminus A$, 由定义3.1.9, $\overline{A} = A' \cup A = X$; 即$A$在$X$中稠密.

反过来, 假设A在X中稠密. 令U为X的任何非空开集. $\boxed{\text{假设}}$ $U \cup A = \varnothing$. 那么若$x \in U$, 则$x \notin A$, 故x不是A的极限点, 因为U是一个包含x的开集, 但不包含A中的任何元素. 这是个矛盾, 因为A在X中稠密, 每个$X \setminus A$中的元素是A的极限点. 因此我们的假设是错误的, 于是$U \cap A \notin \varnothing$, 如所要求的那样.

∎

习题3.1

1. (a) (i) 在例1.1.2中, 找出下列集合的所有的极限点:
   (ii) {a},
   (iii) {b, c}
   (iv) {a, c, d},
   (v) {b, d, e, f}.

   (b) 由此找到上面每个集合的闭包.

   (c) 现在用例3.1.11的方法找上面每个集合的闭包.

2. 令$\mathbb{Z}, \tau$为具有有限闭拓扑的整数集合. 列出下列集合的极限点集:

   (i) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,

   (ii) 由所有偶整数组成的集合E.

3. 找出所有$\mathbb{R}$上开区间(a, b), $a < b$, 的极限点.

4. (a) 下列集合在$\mathbb{R}$中的闭包是什么?

   (i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$,

   (ii) 所有整数组成的集合$\mathbb{Z}$,

   (iii) 所有无理数组成的集合$\mathbb{P}$.

(b) 令S为$\mathbb{R}$中的一个子集, $a \in \mathbb{R}$. 求证$a \in \overline{S}$当且仅当对每个正整数n, 存在$x_n \in S$使得$|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

5. 令S和T是拓扑空间(X, τ)的非空子集, 且$S \subseteq T$.

   (i) 如果p是集合S的极限点, 验证p也是集合T的极限点.

   (ii) 从(i)推出$\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

   (iii) 由此证明如果S在X中稠密, 那么T也在X中稠密.

   (iv) 由(iii)说明$\mathbb{R}$有不可数个不同的稠密子集.

   (v) 再次利用(iii), 证明$\mathbb{R}$有不可数个不同的可数稠密子集及$2^{\mathfrak{c}}$个不同的不可数稠密子集.

§3.2 邻域

定义 3.2.1. *令(X, τ)为拓扑空间, N为X中的子集, p为N中的点. 则N称为p的邻域, 如果存在开集U使得$p \in U \subseteq N$.*

例 3.2.2. *$\mathbb{R}$中的闭区间$[0, 1]$是点$\frac{1}{2}$的邻域, 因为$\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$.*

例 3.2.3. *$\mathbb{R}$中区间$(0, 1]$是点$\frac{1}{4}$的邻域, 因为$\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 1]$. 但是$(0, 1]$不是点$1$的邻域. (证明这一点.)*

例 3.2.4. *如果(X, τ)是任何拓扑空间, $U \in \tau$, 那么从定义3.2.1可知U是所有点$p \in U$的邻域. 因此, 例如每个$\mathbb{R}$中的开区间(a, b)是它包含的每个点的邻域.*

例 3.2.5. *令(X, τ)为拓扑空间, N为点p的邻域. 如果S是满足$N \subseteq S$的任何子集, 那么S是p的邻域.*

以下命题容易验证, 故证明留给读者.

命题 3.2.6. *令A为拓扑空间(X, τ)的子集. 点$x \in X$是A的极限点, 当且仅当每个x的邻域包含A中不同于x的点.*

由于一个集合是闭的当且仅当它包含所有它的极限点, 我们有如下推论:

推论 3.2.7. 令A是拓扑空间(X,τ)的子集. 则A是闭的当且仅当对每个$x \in X \setminus A$, 存在x的邻域N, 使得$N \subseteq X \setminus A$.

推论 3.2.8. 令U为拓扑空间(X,τ)的子集. 则$U \in \tau$当且仅当对每个$x \in U$, 存在x的邻域N, 使得$N \subseteq U$.

下个推论可由推论3.2.8直接得出.

推论 3.2.9. 令U为拓扑空间(X,τ)的子集. 那么$U \in \tau$当且仅当对每个$x \in U$, 存在$V \in \tau$使得$x \in V \subseteq U$.

推论3.2.9对一个集合是否是开集提供了一个有用的测试. 它告诉我们一个集合是开的, 当且仅当对它中的每个点, 可找到一个包含这个点的开集作为它的子集.

习题3.2

1. 令A为拓扑空间(X,τ)的子集. 证明A在X中稠密当且仅当每个$X \setminus A$中点的每个邻域与A的交集非空.

2. (i) 令A和B是拓扑空间(X,τ)的子集. 仔细证明
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$
   (ii) 构造一个使得
$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$
   的例子.

3. 令(X,τ)为拓扑空间. 求证τ是X上的有限闭拓扑, 当且仅当(i) (X,τ)是T_1-空间, 且(ii) 每个X中的无限子集在X中稠密.

4. 拓扑空间(X,τ)称为可分的, 如果它有一个可数稠密子集. 判定下面哪些空间是可分的:

   (i) 具通常拓扑的集合$\mathbb{R}$;

   (ii) 具离散拓扑的可数集;

   (iii) 具有限闭拓扑的可数集;

(iv) (X,τ), X是有限集;

(v) (X,τ), τ有限.

(vi) 具离散拓扑的不可数集;

(vii) 具有限闭拓扑的不可数集;

(viii) 满足第二可数性公理的空间(X,τ).

5. 令(X,τ)为任意拓扑空间, A为任意X的子集. 包含在A中的最大开集成为A的内部, 记为$\mathrm{Int}(A)$. [它是所有完全包含于A的X中开集的并.]

(i) 求证在$\mathbb{R}$中, $\mathrm{Int}([0,1]) = (0,1)$.

(ii) 求证在$\mathbb{R}$中, $\mathrm{Int}((3,4)) = (3,4)$.

(iii) 证明如果A在(X,τ)中是开的, 那么$\mathrm{Int}(A) = A$.

(iv) 验证在$\mathbb{R}$中, $\mathrm{Int}(\{3\}) = \varnothing$.

(v) 证明如果(X,τ)是平庸空间, 那么对所有X中的真子集A, $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.

(vi) 证明对每个$\mathbb{R}$中的可数子集A, $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.

6. 证明如果A是拓扑空间(X,τ)的任意子集, 那么$\mathrm{Int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. (Int的定义见上边习题5.)

7. 利用上面习题6的结论验证A在(X,τ)中稠密, 当且仅当$\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.

8. 根据上面习题5中Int的定义, 判定对于拓扑空间(X,τ)的任何子集A_1和A_2, 下面哪些论断正确.

(i) $\mathrm{Int}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cap \mathrm{Int}(A_2)$,

(ii) $\mathrm{Int}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{Int}(A_1) \cup \mathrm{Int}(A_2)$,

(iii) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

(如果你认为上面某个论断是“对”的, 你必须写出证明. 如果你认为上面某个论断是“错”的, 你必须给出一个具体的反例.)

9. * 令S为拓扑空间(X,τ)中的稠密子集. 求证对每个X中的开集U, $\overline{S\cap U}=\overline{U}$.

10. 令S和T是空间(X,τ)的稠密子集. 如果T是开的, 那么根据上面习题9推出$S\cap T$在X中稠密.

11. 令$\mathcal{B}=\{[a,b):a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{Q},a<b\}$. 证明如下每个结论.

    (i) $\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上某个拓扑τ_1的基. (空间$(\mathbb{R},\tau_1)$称为Sorgenfrey线.)

    (ii) 如果τ是$\mathbb{R}$上的欧几里得拓扑, 那么$\tau_1\supset\tau$.

    (iii) 对所有$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $[a,b)$是$(\mathbb{R},\tau_1)$上的闭开集.

    (iv) Sorgenfrey线是一个可分空间.

    (v) * Sorgenfrey线不满足第二可数性公理.

§3.3 连通性

注 3.3.1. *我们在这里记录一些你应该早知道的定义和事实. 设S是任何实数集. 如果在S中有元素b使得对所有$x\in S$成立$x\le b$, 则b称为S中的**最大元素**. 相似地, 如果S包含一个元素a, 使得对所有$x\in S$成立$a\le x$, 那么a称为S的**最小元素**. 实数集S称为**上有界**的, 如果存在实数c使得对所有$x\in S$, 成立$x\le c$. c称为S的**上界**. 相似地, 定义"**下有界**"和"**下界**". 一个既上有界又下有界的集合称为有界的.*

最小上界公理: 令S为非空实数集. 如果S是上有界的, 那么它有最小上界.

最小上界, 也称为S的**上确界**, 记为$\sup(S)$, 可能属于也可能不属于集合S. 事实上, S的上确界是S中的元素, 当且仅当S有最大元素. 例如, 开区间$S=(1,2)$的上确界是2, 但$2\notin(1,2)$, 而$[3,4]$的上确界是4, 4属于$[3,4]$并是$[3,4]$的最大元素. 任何一个下有界的实数集S有最大下界, 也称为**下确界**, 记为$\inf(S)$.

引理 3.3.2. *令S是一个上有界的$\mathbb{R}$中的子集, p为S的上确界. 如果S是$\mathbb{R}$中的闭集, 则$p\in S$.*

证明. $\boxed{\text{假设}}$ $p \in \mathbb{R} \setminus S$. 由于$\mathbb{R} \setminus S$是开集, 存在实数$a, b$, $a < b$, 使得$p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. 由于$p$是$S$的$\boxed{\text{最小}}$ 上界且$a < p$, 显然存在$x \in S$使得$a < x$. 同时有$x < p < b$, 故$x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. 但这是个矛盾, 因为$x \in S$. 故假设错误, $p \in S$. ∎

命题 3.3.3. *令τ为$\mathbb{R}$中的闭开子集. 那么或者$T = \mathbb{R}$或者$T = \varnothing$.*

证明. $\boxed{\text{假设}}$ $T \neq \mathbb{R}$, 且$T \neq \varnothing$. 那么存在$x \in T$ 及$z \in \mathbb{R} \setminus T$. 不失一般性, 设$x < z$. 令$S = T \cap [x, z]$. 则$S$是两个闭集的交, 故为闭集. 它也是上有界的, 因为显然z是一个上界. 令p为S的上确界. 由引理3.3.2, $p \in S$. 又因$p \in [x, z]$, $p \leq z$. 由$z \in \mathbb{R} \setminus S$, $p \neq z$, 故$p < z$.

T也是开集且$p \in T$. 于是存在$\mathbb{R}$中a和b, $a < b$, 使得$p \in (a, b) \subseteq T$. 设t是满足$p < t < \min(b, z)$的一个数, 这里$\min(b, z)$表示b和z中较小的数. 故$t \in T$且$t \in [p, z]$. 于是$t \in T \cap [x, z] = S$. 这是个矛盾, 因为$t > p$且p是S的上确界. 因此我们的假设错误, 于是$T = \mathbb{R}$或$T = \varnothing$. ∎

定义 3.3.4. *令(X, τ)为一个拓扑空间. 则它称为是* **连通** *的, 如果X的闭开集仅有X和$\varnothing$.*

所以重新叙述命题3.3.3我们得到:

命题 3.3.5. *拓扑空间$\mathbb{R}$是连通的.*

例 3.3.6. *如果(X, τ)是有超过一个元素的离散空间, 那么(X, τ) 不是连通的, 因为每个单点集是闭开集.*

例 3.3.7. *如果(X, τ)是任何平庸空间, 那么它是连通的, 因为仅有的闭开集是X和$\varnothing$. (实际上仅有的开集是X和$\varnothing$.)*

例 3.3.8. *如果$X = \{a, b, c, d, e\}$且*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

那么(X, τ)不是连通的, 因为$\{b,\ c,\ d,\ e\}$是闭开集.

注 3.3.9. 由定义*3.3.4*, 拓扑空间(X,τ)不是连通的(即它是 不连通的), 当且仅当存在非空开集A和B使得$A \cap B = \varnothing$且$A \cup B = X$.[1] (参见本节习题*3*)

我们通过记录下$\mathbb{R}^2$(实际上, $\mathbb{R}^n$,对每个$n \geq 1$)是连通空间. 然而相关证明要到第五章才给出.

连通性是一个非常重要的性质, 关于它我们将要再讲很多.

习题3.3

1. 令S为实数集, 且$T = \{x : -x \in S\}$.

   (a) 证明实数a是S的下确界, 当且仅当$-a$是T的上确界.

   (b) 利用(a)和最小上界公理证明每个下有界的非空实数集有最大下界.

2. 对下面每个实数集, 找出最大元素和最小上界, 如果他们存在.

   (i) $S = \mathbb{R}$.

   (ii) $S = \mathbb{Z} =$ 所有整数组成的集合.

   (iii) $S = [9, 10)$.

   (iv) $S =$所有形如$1 - \frac{3}{n^2}$的实数的集合, 这里n为正整数.

   (v) $S = (-\infty, 3]$.

3. 令(X,τ)为拓扑空间. 求证(X,τ)不是连通的, 当且仅当它有非空不相交的真开子集A和B使得$A \cup B = X$.

4. 例1.1.2中的空间(X,τ)是连通的吗?

5. 令(X,τ)为具有有限闭拓扑的无限集. (X,τ)连通吗?

6. 令(X,τ)为具有可数闭拓扑的无限集. (X,τ)连通吗?

7. 哪些1.1节习题9给出的拓扑空间是连通的?

[1]绝大多数书用这个性质来定义连通性.

§3.4 后记

本章我们引入了极限点的概念, 并且证明了一个集合是闭的当且仅当它包含所有它的极限点. 命题3.1.8接下来告诉了我们任何集合A都有一个包含它自身的最小闭集$\overline{A}$. 集合$\overline{A}$称为A的闭包.

拓扑空间(X, τ)的子集A称为在X中稠密, 如果$\overline{A} = X$. 我们看到了$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密, 且由所有无理数组成的集合$\mathbb{P}$也在$\mathbb{R}$中稠密. 我们引入了点的邻域的概念, 及连通拓扑空间的概念. 我们证明了一个重要的结果, 即$\mathbb{R}$是连通的. 我们以后将会对连通性进行更多的研究.

在习题里我们引入了集合内部的概念, 这是对集合闭包的概念的补充.

第四章　同胚

导言

在每个数学的分支, 识别何时两个结构是等价的具有基本的重要性. 例如, 两个集合是等价的, 就集合理论而言, 如果存在一个双射函数将一个集合映射到另一个集合. 两个群是等价的, 称为同构的, 如果存在一个到另一个的一一并且到上的同态. 两个拓扑空间是等价的, 称为同胚的, 如果一个空间到另一个空间的同胚.

§4.1　子空间

定义 4.1.1. 令Y为拓扑空间(X,τ)的非空子集. Y的子集组成的集合$\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$是$Y$上的拓扑, 称为**子空间拓扑**(或者**相对拓扑**, 或**诱导拓扑**, 或**τ诱导在Y上的拓扑**). 拓扑空间(Y,τ_Y)称为(X,τ)上的一个 **子空间**.

当然你应该核查τ_Y确实是Y上的一个拓扑.

例 4.1.2. 令$X = \{a,b,c,d,e,f\}$,

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\},$$

及$Y = \{b,c,e\}$. 则Y上的子拓扑空间为

$$\tau_Y = \{Y, \varnothing, \{c\}\}.$$

例 4.1.3. 令$X = \{a,b,c,d,e\}$,

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\},$$

及$Y = \{a,d,e\}$. 则Y上的诱导拓扑是

$$\tau_Y = \{Y, \varnothing, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{d,e\}\}.$$

例 4.1.4. 令$\mathcal{B}$为X上拓扑τ的基, Y为X的子集. 则不难证明集合$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$是$Y$上子拓扑空间$\tau_Y$的基. [练习: 验证这一点.]

所以, 让我们考虑$\mathbb{R}$的子集$(1,2)$. $(1,2)$上的诱导拓扑的一个基是集合$\{(a,b) \cap (1,2) : a,b \in \mathbb{R}, 1 \le a < b \le 2\}$是$(1,2)$上诱导拓扑的基.

例 4.1.5. 考虑$\mathbb{R}$中子集$[1,2]$. $[1,2]$上的子拓扑空间τ的一个基为

$$\{(a,b)\cap[1,2] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\};$$

即, $\{(a,b) : 1\le a<b\le 2\}\cup\{[1,b) : 1<b\le 2\}\cup\{(a,2] : 1\le a<2\}\cup\{[1,2]\}$是$\tau$的基.

但是这里我们看到一些奇怪的事情发生了; 例如, $[1,1\frac{1}{2})$当然不是$\mathbb{R}$中的开集, 但$[1,1\frac{1}{2})=(0,1\frac{1}{2})\cap[1,2]$是子空间$[1,2]$的开集.

还有, $(1,2]$在$\mathbb{R}$上不是开集, 但在$[1,2]$中是开集. 甚至$[1,2]$在$\mathbb{R}$中不是开集, 但在$[1,2]$中是开集.

所以无论何时我们说一个集合是开的, 我们必须非常清楚地说明是在哪个空间或哪个拓扑它是开集.

例 4.1.6. 令$\mathbb{R}$为由所有整数组成的$\mathbb{R}$的子集. 求证$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑在$\mathbb{Z}$上的诱导拓扑是离散拓扑.

证明.

为了证明在$\mathbb{Z}$上的诱导拓扑$\tau_{\mathbb{Z}}$是离散的, 由命题1.1.9, 证出每个$\mathbb{Z}$中的单点集在$\tau_{\mathbb{Z}}$中是开的就够了; 即如果$n\in\mathbb{Z}$, 那么$\{n\}\in\tau_Z$.

令$n\in\mathbb{Z}$. 那么$\{n\}=(n-1,n+1)\cap\mathbb{Z}$. 但$(n-1,n+1)$在$\mathbb{R}$中是开集, 因此$\{n\}$在$\mathbb{Z}$上的诱导拓扑是开的. 因此每个$\mathbb{Z}$中的单点集在$\mathbb{Z}$上的诱导拓扑是开的. 于是此诱导拓扑是离散的. ∎

记号: 每当我们提到

$\mathbb{Q}$ =所有有理数组成的集合,

$\mathbb{Z}$ =所有整数组成的集合,

$\mathbb{N}$ =所有正整数组成的集合,

$\mathbb{P}$ =所有无理数组成的集合,

(a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, (a,∞), 或$[a,\infty)$

作为拓扑空间, 而没有明确说明是什么拓扑, 我们指作为$\mathbb{R}$的子空间的诱导拓扑. (有时我们用"通常拓扑"来指代这些集合上的诱导拓扑.)

习题4.1

1. 令$X = \{a,b,c,d,e\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$. 列出在$Y = \{a,c,e\}$上的诱导拓扑$\tau_Y$的成员, 及在$Z = \{b,c,d,e\}$上的诱导拓扑$\tau_Z$.

2. 刻画由$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑在正整数集$\mathbb{N}$上所诱导的拓扑.

3. 对下列每个集合写出一个通常拓扑的基:

   (i) $[a,b)$, 这里$a < b$;

   (ii) $(a,b]$, 这里$a < b$;

   (iii) $(-\infty, a]$;

   (iv) $(-\infty, a)$;

   (v) (a, ∞);

   (vi) $[a, \infty)$.

   [提示: 参见例4.1.4和4.1.5.]

4. 令$A \subseteq B \subseteq X$, 且$X$具有拓扑$\tau$. 令$\tau_B$为$B$上的子空间拓扑. 进一步, 令$\tau_1$为$\tau$在$A$上诱导的拓扑, τ_2是τ_B在A上诱导的拓扑. 求证$\tau_1 = \tau_2$. (所以子空间的子空间是子空间)

5. 令(Y, τ_Y)是空间(X, τ)的子空间. 求证Y的子集在(Y, τ_Y)中是闭的当且仅当$Z = A \cap Y$, 这里A是(X, τ)的闭子集.

6. 求证离散空间的每个子空间是离散空间.

7. 求证平庸空间的每个子空间是平庸空间.

8. 求证$\mathbb{R}$的子空间$[0,1] \cup [3,4]$有至少4个闭开子集. 它共有多少闭开子集?

9. 连通空间的每个子空间是连通的说法对吗?

10. 令(Y,τ_Y)为(X,τ)的子空间. 求证$\tau_Y \subseteq \tau$当且仅当$Y \in \tau$.

    [提示: 记住$Y \in \tau_Y$.]

11. 令A和B是拓扑空间(X,τ)的连通子空间. 如果$A \cap B \neq \varnothing$, 求证子空间$A \cup B$是连通的.

12. 令(Y,τ_1)为T_1-空间(X,τ)的一个子空间. 求证(Y,τ_1)也是T_1空间.

13. 拓扑空间(X,τ)称为是**Hausdorff** 的(或是一个T_2-空间), 如果对给定的任何一对X中的不同的点, 存在开集U和V使得$a \in U, b \in V$,且$U \cap V = \varnothing$.

    (a) 求证$\mathbb{R}$是Hausdorff空间.

    (b) 求证每个离散空间是Hausdorff的.

    (c) 求证每个T_2-空间也是T_1-空间.

    (d) 求证具有有限闭拓扑的$\mathbb{Z}$是T_1空间, 但不是T_2空间.

    (e) 求证任何T_2-空间的子空间是T_2-空间.

14. 令(Y,τ_1)是拓扑空间(X,τ)的子空间. 如果(X,τ)满足第二可数性公理, 求证(Y,τ_1)也满足第二可数性公理.

15. 令a和b属于$\mathbb{R}$, $a < b$. 求证$[a,b]$是连通的.

    [提示: 用$[a,b]$取代命题3.3.3的叙述和证明中所有的$\mathbb{R}$.]

16. 令$\mathbb{Q}$为具通常拓扑的所有有理数组成的集合, $\mathbb{P}$为具通常拓扑的所有无理数组成的集合.

    (a) 求证$\mathbb{R}$和$\mathbb{P}$都不是离散拓扑.

    (b) $\mathbb{Q}$或$\mathbb{P}$是连通空间吗?

    (c) $\mathbb{Q}$或$\mathbb{P}$是Hausdorff空间吗?

    (d) $\mathbb{Q}$或$\mathbb{P}$具有有限闭拓扑吗?

17. 拓扑空间(X,τ)称为**正则空间**, 如果对任何X中的闭子集A和任何$x \in X \setminus A$, 存在开集U和V, 使得$x \in U, A \subseteq V$, 且$U \cap V = \varnothing$. 如果(X,τ)是正则的, 并且是T_1-空间, 那么它称为T_3-空间. 证明如下结论.

(i) 每个正则空间的子空间是正则空间.

(ii) 空间$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}$和$\mathbb{R}^2$是正则空间.

(iii) 如果(X, τ)是正则T_1空间, 那么它是T_2-空间.

(iv) Sorgenfrey线是正则空间.

(v) *令X为所有实数组成的集合$\mathbb{R}$, $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. 定义集合$C \subseteq R$是闭的, 如果$C = A \cup T$, 这里$A$是$\mathbb{R}$上欧几里得拓扑中的闭集, T是S的任何子集. 这些闭集的补集构成$\mathbb{R}$上的一个拓扑τ, 此拓扑是Hausdorff的, 但不是正则的.

§4.2 同胚

我们现在转到等价拓扑空间的概念. 我们以考虑一个例子作为开始:

$$X = \{a, b, c, d, e\}, Y = \{g, h, i, j, k\},$$

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

和

$$\tau_1 = \{Y, \varnothing, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}.$$

显然直觉上(X, τ)"等价于"(Y, τ_1). 由$f(a) = g, f(a) = g, f(a) = g, f(a) = g, f(a) = g$定义的映射$f : X \to Y$ 提供了等价性. 我们现在正式化这种等价性.

定义 4.2.1. *令(X, τ)和(Y, τ_1)为拓扑空间. 则它们称为同胚的, 如果存在满足下列性质的映射$f : X \to Y$:*

(i) *f是一一的(即由$f(x_1) = f(x_2)$有$x_1 = x_2$成立),*

(ii) *f是到上的(即对任何$y \in Y$, 存在$x \in X$使得$f(x) = y$),*

(iii) *对每个$U \in \tau_1$, $f^{-1}(U) \in \tau$, 且*

(iv) *对每个$V \in \tau$, $f(V) \in \tau_1$.*

进一步, 映射f称为(X,τ)和(Y,τ_1)之间的一个同胚映射. 我们记为$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$.

我们将要证出"$\cong$"是一个等价关系, 并用这一点证明所有开区间(a,b)彼此间是同胚的. 例4.2.2是第一步, 它表明了"$\cong$"是一个传递关系.

例 4.2.2. 令$(X,\tau),(Y,\tau_1)$和(Z,τ_2)为拓扑空间. 如果$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$且$(Y,\tau_1)\cong(Z,\tau_2)$, 求证$(X,\tau)\cong(Z,\tau_2)$.

证明.

我们已知$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$; 即存在同胚映射$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$. 我们也已知$(Y,\tau_1)\cong(Z,\tau_2)$; 即存在同胚映射$g:(Y,\tau_1)\to(Z,\tau_2)$.

我们须证出$(X,\tau)\cong(Z,\tau_2)$; 即我们需要找到一个同胚映射$h:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$. 我们将证明复合映射$g\circ f:X\to Z$是所要求的同胚映射.

由于$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$且$(Y,\tau_1)\cong(Z,\tau_2)$, 存在同胚映射$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$和$g:(Y,\tau_1)\to(Z,\tau_2)$. 考虑符合映射$g\circ f:X\to Z$. [这里$g\circ f(x)=g(f(x))$, 对所有$x\in X$.] 验证$g\circ f$是一一的及到上的是程序性任务. 现在设$U\in\tau_2$. 则由于$g$为同胚映射, $g^{-1}(U)\in\tau_1$. 由f是同胚映射的事实, 我们得到$f^{-1}(g^{-1}(U))\in\tau$. 但$f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)$. 所以$g\circ f$有定义4.2.1的性质(iii). 接下来令$V\in\tau$. 那么$f(V)\in\tau_1$, 故$g(f(V))\in\tau_2$; 即$g\circ f(V)\in\tau_2$, 于是我们看到$g\circ f$有定义4.2.1的性质(iv). 因此$g\circ f$是同胚映射. ∎

注 4.2.3. *例4.2.2表明"$\cong$"是传递二元关系. 事实上容易验证它是一个等价关系; 即,*

(i) $(X,\tau)\cong(X,\tau)$ *(反身的);*

(ii) *由*$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$*可知*$(Y,\tau_1)\cong(X,\tau)$ *(对称的);*

[观察到如果$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$是同胚映射, 那么它的逆$f^{-1}:(Y,\tau_1)\to(X,\tau)$也是同胚映射.]

(iii) *由*$(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$*和*$(Y,\tau_1)\cong(Z,\tau_2)$*可知*$(X,\tau)\cong(Z,\tau_2)$ *(传递的).*

下面的三个例子表明所有$\mathbb{R}$中的开区间是同胚的. 长度一定不是一个拓扑性质. 特别的, 一个具有限长度的开区间, 如$(0,1)$, 是与一个具无限长度的区间, 如$(-\infty,1)$, 同胚. 事实上所有开区间与$\mathbb{R}$同胚.

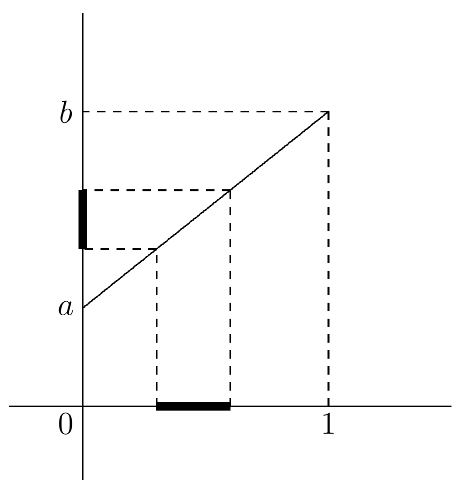
例 4.2.4. 求证任何两个非空开区间(a,b)和(c,d)是同胚的.

证明. (简略证明)

由注4.2.3, 只要证出(a,b)与$(0,1)$同胚且(c,d)也与$(0,1)$同胚. 但由于a和b是任意的数(除了要满足$a<b$), 如果(a,b)与$(0,1)$同胚, 那么(c,d)也与$(0,1)$同胚. 为了证明(a,b)与$(0,1)$同胚, 找到一个同胚映射$f:(0,1)\to(a,b)$就够了.

令$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, 考虑函数$f:(0,1)\to(a,b)$, 由

$$f(x)=a(1-x)+bx.$$



显然$f:(0,1)\to(a,b)$是一一且到上的. 从图上看, 明显地, 任何$(0,1)$中的开区间对应的f的图像是(a,b)中的开区间; 即

$$f((0,1)\text{中的开区间})=\text{一个}(a,b)\text{中的开区间}.$$

但每个$(0,1)$中的开集是$(0,1)$中开区间的并, 于是

$$\begin{aligned} f((0,1)\text{中的开集}) &= f((0,1)\text{中开区间的并}) && (4.1)\\ &= (a,b)\text{中开区间的并} && (4.2)\\ &= (a,b)\text{中的开集}. && (4.3)\end{aligned}$$

故满足定义4.2.1的条件(iv). 类似地, 我们知道$f^{-1}((a,b)$中的开集)也是$(0,1)$中的开集. 于是满足定义4.2.1的条件(iii).

[练习: 仔细写出上面的证明.]

因此, f是一个同胚映射, 并且$(0,1) \cong (a,b)$, 对所有$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

从上面的叙述立即可以知道$(a,b) \cong (c,d)$, 如所要求的那样.

∎

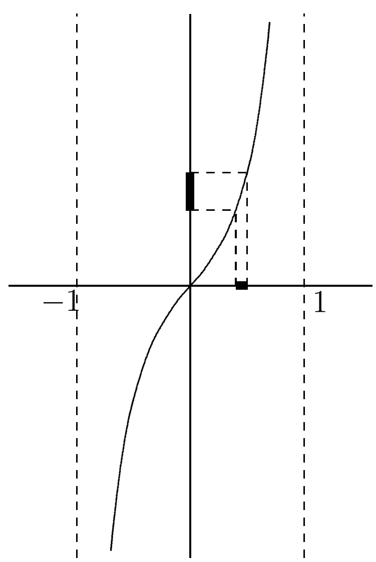
例 4.2.5. 求证空间$\mathbb{R}$与具有通常拓扑的开区间$(-1,1)$同胚

证明.

(简略证明.) 定义$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

容易验证f是一一并到上的, 类似于例4.2.4中的图示推导表明f是一个同胚拓扑.



[练习: 写出表明f是一个同胚拓扑的证明.]

∎

例 4.2.6. **求证每个开区间(a,b), $a<b$, 和$\mathbb{R}$同胚.**

证明. 由例4.2.5, 4.2.4及注4.2.3直接可得. ∎

注 4.2.7. **可以通过相似的方式证明任何两个区间$[a,b]$和$[c,d]$, $a<b$且$c<d$, 是同胚的.**

习题4.2

1. (i) 如果a,b,c,d是实数, $a<b$且$c<d$, 求证$[a,b]\cong[c,d]$.

   (ii) 如果a和b是任何实数, 求证

$$(-\infty,a]\cong(-\infty,b]\cong[a,\infty)\cong[b,\infty).$$

   (iii) 如果c,d,e和f是满足$c<d$和$e<f$的任意实数, 求证

$$[c,d)\cong[e,f)\cong(c,d]\cong(e,f].$$

   (iv) 推出对任何满足$a<b$的实数a和b,

$$[0,1)\cong(-\infty,a]\cong[a,\infty)\cong[a,b)\cong(a,b].$$

2. 求证$\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}$.

3. 设m和c是非零实数且X是由$X=\{\langle x,y\rangle:y=mx+c\}$给定的$\mathbb{R}^2$的子空间. 求证$X$与$\mathbb{R}$同胚.

4. (i) 设X_1和X_2是$\mathbb{R}^2$中由如下式子定义的闭矩形区域:

$$X_1=\{\langle x,y\rangle:|x|\le a_1,|y|\le b_1\}$$

   和

$$X_2=\{\langle x,y\rangle:|x|\le a_2,|y|\le b_2\},$$

   这里a_1,b_1,a_2和b_2是正实数. 如果X_1和X_2从$\mathbb{R}^2$中得到诱导拓扑, 求证$X_1\cong X_2$.

(ii) 设D_1和D_2为$\mathbb{R}^2$中由下式给定的闭圆盘:

$$D_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_1\}$$

和

$$D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq c_2\},$$

这里c_1和c_2是正实数. 求证拓扑空间$D_1 \cong D_2$, 这里D_1和D_2具有它们的子空间拓扑.

(iii) 求证$X_1 \cong D_1$.

5. 设X_1和X_2是由$X_1 = (0,1) \cup (3,4)$和$X_2 = (0,1) \cup (1,2)$给出的$\mathbb{R}$的子空间. $X_1 \cong X_2$成立吗? (给出理由)

6. (**同胚映射群**) 令(X, τ)为任意拓扑空间, G为所有X到它自身的同胚映射组成的集合.

   (i) 求证在复合映射的运算下, G是一个群.

   (ii) 如果$X = [0,1]$, 求证G是无限的.

   (iii) 如果$X = [0,1]$, G是阿贝尔群(交换群)吗?

7. 令(X, τ)和(Y, τ_1)为同胚拓扑空间. 求证

   (i) 如果(X, τ)是T_0空间, 那么(Y, τ_1)是T_0-空间.

   (ii) 如果(X, τ)是T_1空间, 那么(Y, τ_1)是T_1-空间.

   (iii) 如果(X, τ)是Hausdorff空间, 那么(X, τ_1)是Hausdorff空间.

   (iv) 如果(X, τ)满足第二可数性公理, 那么(Y, τ_1)满足第二可数性公理.

   (v) 如果(X, τ)是可分空间, 那么(Y, τ_1)是可分空间.

8. *设(X, τ)为离散拓扑空间. 求证(X, τ)与$\mathbb{R}$的一个子空间同胚, 当且仅当X是可数的.

§4.3 不同胚空间

为了证明两个拓扑空间是同胚的,我们不得不找一个它们之间的同胚映射.

但是, 证明两个拓扑空间<u>不</u>同胚通常难得多, 因为我们不得不说明不存在同胚拓扑. 下面的例子对我们如何来说明这一点提供了一个线索.

例 4.3.1. *求证$[0,2]$不与$\mathbb{R}$中子空间$[0,1]\cup[2,3]$同胚.*

证明. 令$(X,\tau)=[0,2]$, $(Y,\tau_1)=[0,1]\cup[2,3]$. 那么

$$[0,1]=[0,1]\cap Y \Rightarrow [0,1]\text{在}(Y,\tau_1)\text{中闭}$$

且

$$[0,1]=(-1,1\frac{1}{2})\cap Y \Rightarrow [0,1]\text{在}(Y,\tau_1)\text{中开}.$$

于是Y不连通, 因为它有非空真闭开子集$[0,1]$.

$\boxed{\text{假设}}$ $(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$. 于是存在同胚映射$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$. 故$f^{-1}([0,1])$是X 的闭开子集, 故X不连通. 这是不对的, 由于$[0,2]=X$是连通的. (参见4.1节习题15.) 于是我们得到一个矛盾, 故$(X,\tau)\not\cong(Y,\tau_1)$. ∎

从中我们能学到什么?

命题 4.3.2. *任何与一个连通空间同胚的拓扑空间是连通的.*

命题4.3.2给了我们一种试着说明两个拓扑空间不同胚的一种方法... 通过找到一个"同胚映射保持的"性质, 一个空间具有此性质, 而另一个不具有.

在习题里我们已经遇到了很多"同胚映射保持的"性质:

(i) T_0-空间;

(ii) T_1-空间;

(iii) T_2-空间或Hausdorff空间;

(iv) 正则空间

(v) T_3-空间;

(vi) 满足第二可数性公理;

(vii) 可分空间. [参见4.2节习题7.]

也有其它的:

(viii) 离散空间;

(ix) 平庸空间;

(x) 有限闭拓扑;

(xi) 可数闭拓扑.

所以加上连通性, 我们知道同胚映射保持的12个性质. 此外, 两个空间(X,τ)和(Y,τ)不可能同胚如果X和Y有不同的势(例如X可数而Y不可数)或τ和τ_1有不同的势.

不论怎样, 当遇到特定的问题时我们可能没有所需的性质. 例如, 证明$(0,1)$不和$[0,1]$同胚, 或者证明$\mathbb{R}$不与$\mathbb{R}^2$同胚. 我们很快将会看到如何证明这些空间不同胚.

在我们继续前进到这一点之前, 让我们解决如下问题: $\mathbb{R}$的哪些子空间是连通的?

定义 4.3.3. *$\mathbb{R}$中子集S称为* **区间***, 若它满足如下性质: 如果$x \in S, z \in S, y \in R$使得$x < y < z$, 那么$y \in S$.*

注 4.3.4. (i) *注意每个单点集$\{x\}$是个区间.*

(ii) *每个区间具下列形式之一: $\{a\}, [a,b], (a,b), [a,b), (a,b], (-\infty,a), (-\infty,a], (a,\infty), [a,\infty), (-\infty,\infty)$.*

(iii) *由例4.2.6, 注4.2.7, 4.2节习题1, 每个区间与$(0,1), [0,1], [0,1)$或$\{0\}$同胚. 在本节习题1里我们能给出一个更强的结论.*

命题 4.3.5. *$\mathbb{R}$中子空间是连通的当且仅当它是一个区间.*

证明. 所有区间是连通的这一结论能以证明命题3.3.3类似的方式来证: 在证明中用我们要证连通性的区间取代所有的$\mathbb{R}$.

反过来, 令S是连通的. $\boxed{\text{假设}}$ $x \in S, z \in S, x < y < z$,且$y \notin S$. 则$(-\infty, y) \cap S = (-\infty, y] \cap S$是$S$的开及闭子集. 故$S$有一个闭开子集, 即

$$(-\infty, y) \cap S.$$

为了证出S是不连通的, 我们须验证此闭开集是真且非空子集. 它是非空的, 由于$x \in S$. 它是真子集, 由于$z \in S$但$z \notin (-\infty, y) \cap S$. 于是$S$不连通. 这是个矛盾. 因此$S$是一个区间. ∎

我们现在明白了一个叫"连通"这个名字的原因. $\mathbb{R}$的子空间, 如$[a, b]$, (a, b)等等是连通的, 而像

$$X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [5, 6]$$

这样的子空间, 它是"不连通"部分的并, 不是连通的.

现在让我们转到证明$(0, 1) \not\cong [0, 1]$的问题. 首先, 我们给出一个看起来无关紧要的事实:

注 4.3.6. *令$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$为同胚映射. 令$a \in X$, 于是$X \setminus \{a\}$是$X$的子空间, 并具诱导拓扑$\tau_2$. 而且, $Y \setminus \{f(a)\}$是Y的子空间, 且具诱导拓扑τ_3. 那么$(X \setminus \{a\}, \tau_2)$与$(Y \setminus \{f(a)\}, \tau_3)$同胚.*

证明. (简略证明.) 定义$g : X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$, $g(x) = f(x)$, 对所有$x \in X \setminus \{a\}$. 那么容易验证g是一个同胚映射. (写下这一点的证明.) ∎

作为由此事实直接得到的结论, 我们有如下推论:

推论 4.3.7. *如果a, b, c,和d是满足$a < b, c < d$的实数, 那么*

(i) $(a, b) \not\cong [c, d)$,

(ii) $(a, b) \not\cong [c, d]$, *且*

(iii) $[a, b) \not\cong [c, d]$.

证明. (i) 令$(X,\tau)=[c,d)$且$(Y,\tau_1)=(a,b)$. $\boxed{\text{假设}}$ $(X,\tau)\cong(Y,\tau_1)$. 那么$X\setminus\{c\}\cong Y\setminus\{y\}$, 对某个$y\in Y$. 但$X\setminus\{c\}=(c,d)$是一个区间, 故为连通的, 然而不管我们从$(a,b)$中去掉哪个点, 得到的空间都是不连通的. 因此, 由命题4.3.2,

$$X\setminus\{c\}\not\cong Y\setminus\{y\}, \text{对任何} y\in Y.$$

这是个矛盾. 故$[c,d)\not\cong(a,b)$.

(ii) $[c,d]\setminus\{c\}$是连通的, 而$(a,b)\setminus\{y\}$对所有$y\in(a,b)$是不连通的. 因此$(a,b)\not\cong[c,d]$.

(iii) $\boxed{\text{假设}}$ $[a,b)\cong[c,d]$. 则$[c,d]\setminus\{c\}\cong[a,b)\setminus\{y\}$, 对某个$y\in[a,b)$. 因此$([c,d]\setminus\{c\})\setminus\{d\}\cong([a,b)\setminus\{y\})\setminus\{z\}$, 对某个$z\in[a,b)\setminus\{y\}$; 即$(c,d)\cong[a,b)\setminus\{y,z\}$, 对$[a,b)$中某两个不同的点$y$和$z$. 但$(c,d)$是连通的, 而$[a,b)\setminus\{y,z\}$, 对$[a,b)$中任何两个不同的点$y$和$z$来说都是不连通的. 所以我们得到矛盾. 因此$[a,b)\not\cong[c,d]$.

∎

习题4.3

1. 求证每个区间同胚于一个并仅有一个如下的空间:

$$\{0\};\quad(0,1);\quad[0,1];\quad[0,1).$$

2. 从命题4.3.5推出$\mathbb{R}$的每个超过一个点的可数子空间是不连通的. (特别的, $\mathbb{Z}$和$\mathbb{Q}$是不连通的.)

3. 令X为$\mathbb{R}^2$中的单位圆; 即$X=\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\}$且具有子空间拓扑.

   (i) 证明$X\setminus\{\langle 1,0\rangle\}$与开区间$(0,1)$同胚.

   (ii) 推导出$X\not\cong(0,1)$及$X\not\cong[0,1]$.

   (iii) 通过观察到对任何$a\in X$, 子空间$X\setminus\{a\}$是连通的, 证出$X\not\cong[0,1)$.

   (iv) 推导出X不和任何区间同胚.

4. 令Y为

$$Y=\{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\}\cup\{\langle x,y\rangle : (x-2)^2+y^2=1\}$$

给出的$\mathbb{R}^2$上的子空间.

(i) Y和上面习题3中空间X同胚吗?

(ii) Y和某个区间同胚吗?

5. 令Z为

$$Y = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = 1\}$$

给出的$\mathbb{R}^2$上的子空间. 求证

(i) Z不和任何区间同胚, 且

(ii) Z不和X或Y同胚, 这里X和Y是在上面习题3和4中给出的集合.

6. 证明Sorgenfrey线不和$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$, 或此两者任何之一的任何子空间同胚.

7. (i) 求证1.1节习题5(i)中的拓扑空间不予1.1节习题9(ii)中的空间同胚.

(ii) * 在1.1节习题5中, $(X, \tau_1) \cong (X, \tau_2)$成立吗?

(iii) * 在1.1节习题9中, $(X, \tau_2) \cong (X, \tau_9)$成立吗?

8. 设(X, τ)为一个拓扑空间, 这里X是无限集. 证明如下每个结论(最初是被John Ginsburg和Bill Sands证出的).

(i) * (X, τ)有与$(\mathbb{R}, \tau_1)$同胚的子空间, 这里或者τ_1是平庸拓扑, 或者$(\mathbb{N}, \tau_1)$是T_0-空间.

(ii) ** 设(X, τ)为一个T_1-空间. 那么(X, τ)有与$(\mathbb{N}, \tau_2)$同胚的子空间, 这里τ_2或者是有限闭拓扑, 或者是离散拓扑.

(iii) 从(ii)推出任何无限Hausdorff空间包含一个无限离散子空间, 因此包含一个与具离散拓扑的$\mathbb{N}$同胚的子空间.

(iv) ** 设(X, τ)是T_0-空间, 且不为T_1-空间. 则空间(X, τ)有与$(\mathbb{N}, \tau_3)$同胚的子空间, 这里τ_3由$\mathbb{N}, \varnothing$及所有集合$\{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$的所组成, 或$\tau_3$由$\mathbb{N}, \varnothing$及所有集合$\{n, n+1, \ldots\}, n \in \mathbb{N}$的所组成.

(v) 由上述结论推出每个无限拓扑空间有与$(\mathbb{R}, \tau_4)$同胚的子空间, 这里τ_4是平庸拓扑, 离散拓扑, 有限闭拓扑, 或是在(iv)中所描述的两个拓扑之一, 分别称为initial segment 拓扑和final segment 拓扑. 进一步, 任何这5个$\mathbb{N}$上拓扑中的两个都不同胚.

9. 令(X,τ)和(Y,τ_1)为拓扑空间. 映射$f: X \to Y$称为**局部同胚映射**, 如果每个$x \in X$有一个开邻域U使得f将U同胚地映射到(Y,τ_1)的开子空间V; 即如果τ在U上诱导的拓扑为τ_2, τ_1在$V = f(U)$上诱导的拓扑τ_3, 那么f是(U,τ_2)到(V,τ_3)上的同胚映射. 拓扑空间(X,τ)称为和(Y,τ_1)是**局部同胚的**, 如果存在(X,τ) 到(Y,τ_1) 上的局部同胚映射.

   (i) 如果(X,τ)和(Y,τ_1)是同胚拓扑空间, 验证(X,τ)和(Y,τ_1)是局部同胚的.

   (ii) 如果(X,τ)是(Y,τ_1)的开子空间, 求证(X,τ)和(Y,τ_1)是局部同胚的.

   (iii) * 求证如果$f: (X,\tau) \to (Y,\tau_1)$ 是局部同胚映射, 那么f将每个(X,τ)的开子集映射到(Y,τ_1) 的一个开子集.

§4.4 后记

有三种从老的拓扑空间得到新拓扑空间的方法: 生成子空间, 乘积空间, 和商空间. 我们要研究所有这三种方式. 本章我们研究了生成子空间. 这使得我们可以引入重要空间, 如$\mathbb{Q}$, $[a,b]$, (a,b)等等.

我们定义了同胚这个中心概念. 我们注意到了"$\cong$" 是个等价关系. 一个性质称为是**拓扑的**, 如果经过同胚映射它可以保持; 即, 若$(X,\tau) \cong (Y,\tau_1)$, (X,τ)具有此性质, 则(Y,τ_1)一定也有此性质. 我们说明了连通性是拓扑性质. 因此任何与连通空间同胚的空间是连通的. (一些其它的拓扑性质也被确认了.) 我们正式定义了$\mathbb{R}$中区间的概念, 并证明了区间正是$\mathbb{R}$中的连通子空间.

给定两个拓扑空间(X,τ)和(Y,τ_1), 说明它们是否是同胚的是很有意思的任务. 我们证明了每个$\mathbb{R}$中的区间同胚于$[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, $\{0\}$中的一个且只有一个. 下一章我们证明$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}$不同胚. 更难的问题是证明$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}^3$不同胚. 这在以后将会通过Jordan 曲线定理来证明. 尽管如此, 事实上$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ 当且仅当$n = m$. 这最好通过代数拓扑来处理. 本书只是简单涉及了代数拓扑.

4.2节习题6引入了同胚映射群的概念. 就其本身而言, 同胚映射群是一个有趣并重要的主题.

第五章　连续映射

导言

在绝大多数纯数学的分支里我们研究在范畴论里称为"对象"和"箭头"的东西. 在线性代数里对象是向量空间, 箭头是线性变换. 在群论里对象是群, 箭头是同态, 而在集合理论里对象是集合, 箭头是映射. 在拓扑学里, 目标是拓扑空间. 我们现在引入这里的箭头—连续映射.

§5.1　连续映射

当然我们早已熟悉[1]$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数的概念.

函数$f:\mathbb{R}\to$称为**连续**的, 如果对每个$a\in\mathbb{R}$ 及每个正实数ε, 存在正实数δ 使得由$|x-a|<\delta$ 可得$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

怎么将这个定义推广到一般的拓扑空间的情况一点也不明显, 这里我们没有"绝对值"或"减法". 所以我们将寻求另一个(等价的)连续性的定义, 这个定义更容易得到推广.

容易看到$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的, 当且仅当对每个$a\in\mathbb{R}$ 和每个区间$(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$, 对$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得$f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$ 对所有$x\in(a-\delta,a+\delta)$.

这个定义是一个改进, 因为它没有涉及"绝对值"的概念, 但它仍然涉及了"减法". 下一个引理表明了怎么来避免减法.

引理 5.1.1. *令f为一个$\mathbb{R}$到其自身的函数. 则f是连续的, 当且仅当对每个$a\in\mathbb{R}$ 和每个包含$f(a)$ 的开集U, 存在开集包含a 的开集V 使得$f(V)\subseteq U$.*

证明. 设f是连续的. 令$a\in\mathbb{R}$, U 为包含$f(a)$ 的任何开集. 则存在实数c 和d 使得$f(a)\in(c,d)\subseteq U$. 让ε 等于两个数$d-f(a)$ 和$f(a)-c$ 中较小的一个, 于是

$$(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)\subseteq U.$$

[1]这一节的前一部分假定你有一些实分析的知识, 特别是连续性的$\varepsilon-\delta$定义. 如果不是这样的, 那么直接前进到定义5.1.3.

由于映射f 连续, 存在$\delta > 0$ 使得对所有$x \in (a-\delta, a+\delta)$ 成立$(f(x) \in f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. 令$V$ 为开集$(a-\delta, a+\delta)$. 则$a \in V$ 且$f(V) \subseteq U$, 如所要求的.

反过来, 设对每个$a \in \mathbb{R}$ 和每个包含$f(a)$ 的开集U, 存在包含a 的开集V 使得$f(V) \subseteq U$. 我们须证出f 是连续的. 设$a \in \mathbb{R}$, ε 为任何正实数. 让$U = (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. 于是$U$ 为一个包含$f(a)$ 的开集. 因此存在包含a 的开集V, 使得$f(V) \subseteq U$. 由于V 是包含a 的开集, 存在实数c 和d 使得$a \in (c, d) \subseteq V$. 让δ 等于两个数$d-a$ 和$a-c$中较小的那个, 于是$(a-\delta, a+\delta) \subseteq V$. 那么对所有$x \in (a-\delta, a+\delta)$, $f(x) \in f(V) \subseteq U$, 如所要求的. 因此$f$ 连续. ∎

我们可以用在引理5.1.1中刻画的性质来定义连续性, 然而如下的引理使得我们可以给出一个更雅致的定义.

引理 5.1.2. *令f 为一个拓扑空间(X, τ) 到一个拓扑空间(Y, τ') 的映射. 则如下两个条件等价:*

(i) *对每个$U \in \tau'$, $f^{-1}(U) \in \tau$.*

(ii) *对每个满足$f(a) \in U$ 的$a \in X$, $U \in \tau'$, 存在$V \in \tau$ 使得$a \in V$ 且$f(V) \subseteq U$.*

证明.

设条件(i)成立. 令$a \in X$ 及$U \in \tau'$, $f(a) \in U$. 那么$f^{-1}(U) \in \tau$. 令$V = f^{-1}(U)$, 我们有$a \in V, V \in \tau$, 及$f(V) \subseteq U$. 故条件(ii)成立.

反过来, 设条件(ii)成立. 令$U \in \tau_{\prime}$. 如果$f^{-1}(U) = \varnothing$, 那么显然$f^{-1}(U) \in \tau$. 如果$f^{-1}(U) \neq \varnothing$, 令$a \in f^{-1}(U)$. 那么$f(a) \in U$. 因此存在$V \in \tau$ 使得$a \in V, f(V) \subseteq U$. 所以对任何$a \in f^{-1}(X)$ 存在$V \in T$ 使得$a \in V \subseteq f^{-1}(U)$. 由推论3.2.9, 可知$f^{-1}(U) \in \tau$. 故条件(i)成立. ∎

将引理5.1.1和5.1.2放到一起, 我们知道$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的, 当且仅当对每个$\mathbb{R}$ 中的开集U, $f^{-1}(U)$ 是开集.

由此我们定义两个拓扑空间之间连续函数的概念如下:

定义 5.1.3. *令(X, τ) 和(Y, τ_1) 为拓扑空间, f 为X 到Y的映射. 那么$f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ 称为*连续映射*, 如果对每个$U \in \tau_1, f^{-1}(U) \in \tau$.*

从上面的评注可以看出这个连续性的定义与$(X,\tau)=(Y,\tau_1)=\mathbb{R}$ 时的通常定义是一致的.

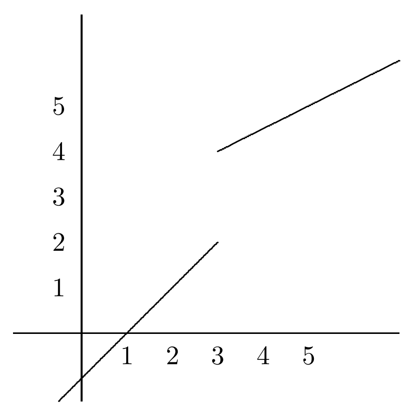
让我们通过考虑几个简单的例子来看看这个连续性的定义在实际中是多么好用.

例 5.1.4. 考虑$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 由$f(x)=x$, 对所有$x\in\mathbb{R}$ 定义; 即f 是恒等函数. 则对任何$\mathbb{R}$ 中的开集U, $f^{-1}(U)=U$, 于是为开集. 因此f 是连续的.

例 5.1.5. 令$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 由$f(x)=c$ 对常数c 和所有$x\in\mathbb{R}$ 给定. 令U 为任何$\mathbb{R}$ 中的开集. 显然$f^{-1}(U)=\mathbb{R}$, 如果$c\in U$, $f^{-1}(U)=\varnothing$, 如果$c\notin U$. 在这两种情况下, $f^{-1}(U)$ 都是开的. 因此f 是连续的.

例 5.1.6. 考虑$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 由

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{如果}x\le 3\\ \frac{1}{2}(x+5), & \text{如果}x>3.\end{cases}$$



记着一个映射是连续的, 当且仅当每个开集的逆映像是开集.

因此, 为证出f 不连续, 我们须找到一个集合U 使得$f^{-1}(U)$ 不是开集.

那么$f^{-1}((1,3))=(2,3]$, 不是开集. 因此f 不连续.

注意到引理5.1.2 现在可以以下述方式重新叙述.[2]

[2]如果你还没有读过引理5.1.2和它的证明, 你现在该这么做了.

命题 5.1.7. 令f 为拓扑空间(X,τ) 到(Y,τ') 上的映射. 那么f 是连续的当且仅当对满足$f(x)\in U$的每个$x\in X$ 和每个$U\in\tau'$, 存在$V\in\tau$ 使得$x\in V$, $f(V)\subseteq U$.

命题 5.1.8. 令$(X,\tau),(Y,\tau_1)$ 和(Z,τ_2) 为拓扑空间. 如果$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 和$g:(Y,\tau_1)\to(Z,\tau_2)$ 是连续映射, 那么复合映射$g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$ 是连续的.

证明.

为了证明复合函数$g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$ 是连续的, 我们须证出如果$U\in\tau_2$, 那么$(g\circ f)^{-1}(U)\in\tau$.

但$(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$.

令U 为(Z,τ_2) 中的开集. 由于g 连续, $g^{-1}(U)$ 是τ_1 中的开集. 那么$f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是τ 中的开集, 由于f 是连续的. 但$f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)$. 故$g\circ f$ 连续. ∎

下一个结果表明如果我们愿意, 连续性可以用闭集而不是开集的语言来刻画.

命题 5.1.9. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 为拓扑空间. 那么$f:(X,\tau)\to$ 是连续的, 当且仅当对每个Y 中的闭子集S, $f^{-1}(S)$ 是X 的闭子集.

证明.

一旦你认识到

$$f^{-1}(S\text{ 的补集})=f^{-1}(S)\text{的补集},$$

命题结论可以立即得出. ∎

注 5.1.10. 在连续映射和同胚映射之间有关系: 如果$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 是同胚映射, 那么它是连续映射. 当然不是所有连续映射是同胚映射.

然而下面的命题给了全面的描述, 其证明可从"连续"和"同胚"的定义得到.

命题 5.1.11. 令(X,τ) 和(Y,τ) 为拓扑空间, f 为X 到Y 的映射. 则f 是同胚映射当且仅当

(i) f 是连续的,

(ii) f 是一一且到上的; 即逆映射$f^{-1}:Y\to X$ 存在, 且

(iii) f^{-1} 是连续的.

下面的命题很有用, 它告诉我们连续映射的限定是连续映射. 它的程序性的证明留给读者– 也参见本节习题8.

命题 5.1.12. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 为拓扑空间, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 为连续映射, A 为X 的子集, τ_2 是A 上的诱导拓扑. 进一步, 令$g:(A,\tau_2)\to(Y,\tau_1)$ 是f 到A 上的限定; 即$g(x)=f(x)$, 对所有$x\in A$. 那么g 是连续的.

习题5.1

1. (i) 令$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 为常映射. 证明f 是连续的.

   (ii) 令$f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ 为恒等映射. 证明f 是连续的.

2. 令$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 由

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

   给出.

   (i) 应用例5.1.6给出的方法, 证明f 不连续.

   (ii) 找出$f^{-1}(\{1\})$, 并应用命题5.1.9, 推导出f 不连续.

3. 令$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 由

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ x+2, & x>1\end{cases}$$

   给出. f 连续吗? (给出理由.)

4. 令(X,τ) 为$X=[0,1]\cup[2,4]$ 给出的$\mathbb{R}$ 的子空间. 定义$f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$, 由

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{如果} x\in[0,1]\\ 2, & \text{如果} x\in[2,4]\end{cases}$$

给出. 求证f 是连续的. (这令你感到惊讶了吗?)

5. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 是拓扑空间, $\mathcal{B}$ 是拓扑τ_1 的基. 求证映射$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 是连续的当且仅当对每个$U\in\mathcal{B}$ 都有$f^{-1}(U)\in\tau$.

6. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 是拓扑空间, f 为X 到Y 的映射. 如果(X,τ) 是离散空间, 求证f 是连续的.

7. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 是拓扑空间, f 为X 到Y 的映射. 如果(Y,τ_1) 是平庸空间, 求证f 是连续的.

8. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 是拓扑空间, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 为连续映射. 令A 为X 的子集, τ_2 为A 上的诱导拓扑, $B=f(A)$, τ_3 为B 上的诱导拓扑, $g:(A,\tau_2)\to(B,\tau_3)$ 为f 在A 上的限定. 求证g 是连续的.

9. 令f 为空间(X,τ) 到$(Y,\tau\prime)$ 的映射. 求证f 是连续的, 当且仅当对每个$x\in X$, 每个$f(x)$ 的领域, 存在x 的邻域M, 使得$f(M)\subseteq N$.

10. 令τ_1 和τ_2 是集合X 上的两个拓扑. 则τ_1 称为比τ_2 **更细拓扑**(τ_2 称为比τ_1 **更粗拓扑**), 如果$\tau_1\supseteq\tau_2$. 求证

    (i) 欧几里得拓扑$\mathbb{R}$ 比$\mathbb{R}$ 上的有限闭拓扑更细;

    (ii) 恒等函数$f:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ 是连续的, 当且仅当τ_1 是比τ_2 更细拓扑.

11. 令$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是使得对任何有理数q 都成立$f(q)=0$ 的连续函数. 求证对每个$x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

12. 令(X,τ) 和(Y,τ_1) 为拓扑空间, $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ 为连续映射. 如果f 是一一的, 求证

    (i) 若(Y,τ_1) 是Hausdorff的, 则(X,τ) 是Hausdorff的.

(ii) 若(Y, τ_1) 是T_1-空间, 则(X, τ) 是T_1-空间.

13. 令(X, τ) 和(Y, τ_1) 为拓扑空间, f 为(X, τ) 到(Y, τ_1) 的映射. 求证f 是连续的, 当且仅当对任何X 的子集A, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

[提示: 利用命题5.1.9.]

§5.2 介值定理

命题 5.2.1. *令(X, τ) 和(Y, τ_1) 为拓扑空间, $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ 为满射且连续. 如果(X, τ) 是连通的, 那么(Y, τ_1) 是连通的.*

证明. 假设(Y, τ_1) 不连通. 那么它有一个闭开子集U 使得$U \neq \varnothing$ 且$U \neq Y$. 那么$f^{-1}(U)$ 是开集, 因为f 是连续的, 并且由命题5.1.9可知也是闭集; 即$f^{-1}(U)$ 是X 上的闭开子集. $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, 由于$f$ 是满射且$U \neq \varnothing$. 也有$f^{-1}(U) \neq X$, 由于如果它们相等, 根据f 的满射性U 就会等于Y. 故(X, τ) 不连通. 这是个矛盾. 因此(Y, τ_1) 是连通的. ∎

注 5.2.2. *(i) 如果去掉条件"满射", 那么上述命题是错误的. (找一个例子来说明这一点.)*

(ii) 简单地说, 命题5.2.1 是讲: 连通集的任何连续映像是连通的.

*(iii) 命题5.2.1 告诉我们如果(X, τ) 是连通空间, (Y, τ') 不是连通的(即**不连通**), 那么不存在(X, τ) 到$(Y, \tau_\prime)$ 的到上连续映射. 例如, 尽管有无限个$\mathbb{R}$ 到$\mathbb{Q}$ (或$\mathbb{Z}$) 的到上的映射, 它们都不是连续的. 事实上在本节习题10我们将看到唯一的$\mathbb{R}$ 到$\mathbb{Q}$ (或$\mathbb{Z}$)的连续映射是常映射.*

如下连通性概念的加强版本经常是有用的.

定义 5.2.3. *拓扑空间(X, τ) 称为是**路径连通**的, 如果对每一对X 中的不同的点a 和b, 存在连续映射$f : [0, 1] \to (X, \tau)$, 使得$f(0) = a$ 且$f(1) = b$. 映射f 称为**连接a到b 的路径**.*

例 5.2.4. *容易看到每个区间是路径连通的.*

例 5.2.5. *对每个$n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ 是路径连通的.*

命题 5.2.6. *每个路径连通空间是连通的.*

证明. 令(X,τ) 为路径连通空间, 假设它不是连通的.

那么它有一个真非空闭开子集U. 所以存在a 和b 使得$a \in U$, $b \in X \setminus U$. 由于(X,τ) 是路径连通的, 存在连续函数$f : [0,1] \to (X,\tau)$ 使得$f(0) = a$ 且$f(1) = b$.

然而, $f^{-1}(U)$ 是$[0,1]$ 的闭开子集. 由于$a \in U, 0 \in f^{-1}(U)$, 于是$f^{-1}(U) \neq \varnothing$. 由于$b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$, 因此$f^{-1}(U) \neq [0,1]$. 于是$f^{-1}(U)$ 是$[0,1]$的真非空闭开子集, 这与$[0,1]$ 的连通性矛盾.

所以(X,τ) 是连通的. ∎

注 5.2.7. *命题5.2.6的逆命题是不对的; 即不是每个连通空间是路径连通的. 如下的$\mathbb{R}^2$ 的子空间是这样的空间的一个例子:*

$$X = \{\langle x,y\rangle : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup \{\langle 0,y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}.$$

[本节习题6表明X 是连通的. X不是路径连通的这点能通过证明没有路径连接$\langle 0,0\rangle$ 到, 例如, 点$\langle 1/\pi, 0\rangle$, 而得出. 画一个图, 试着使你自己确信这一点.]

我们现在可以表明$\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.

例 5.2.8. *显然$\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$ 是路径连通的, 因此由命题5.2.6, 是连通的. 然而, 对任何$a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ 都是不连通的. 因此, $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$.*

我们现在给出Weierstrass介值定理, 它是拓扑学在实变量函数理论中的一个美丽的应用. 对这个结果至关重要的拓扑概念是连通性概念.

定理 5.2.9. *(Weierstrass介值定理) 设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续的, 并设$f(a) \neq f(b)$. 那么对每个$f(a)$ 和$f(b)$ 之间的数p, 存在点$c \in [a,b]$ 使得$f(c) = p$.*

证明. 由于$[a,b]$ 是连通的且f 是连续的, 命题5.2.1表明$f([a,b])$ 是连通的. 由命题4.3.5, 这说明$f([a,b])$ 是个区间. $f(a)$ 和$f(b)$ 属于$f([a,b])$. 于是如果p 在$f(a)$ 和$f(b)$ 之间, $p \in f([a,b])$, 即对某个$c \in [a,b]$, $p = f(c)$. ∎

推论 5.2.10. 如果$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的并使得$f(a)>0$, $f(b)<0$, 那么存在$x\in[a,b]$, 使得$f(x)=0$.

推论 5.2.11. **(不动点定理)** 令f 为$[0,1]$ 到$[0,1]$ 的连续映射. 那么存在$z\in[0,1]$ 使得$f(z)=z$. (点z 称为**不动点**.)

证明. 如果$f(0)=0$ 或$f(1)=1$, 结论显然成立. 因此考虑当$f(0)>0$ 且$f(1)<1$ 的情形就够了.

令$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 由$g(x)=x-f(x)$ 定义. 显然g 是连续的, $g(0)=-f(0)<0$, 且$g(1)=1-f(1)>0$. 于是, 由推论5.2.10, 存在$z\in[0,1]$ 使得$g(z)=0$; 即, $z-f(z)=0$, $z=f(z)$. ∎

注 5.2.12. 推论*5.2.11*是一个称为*Brouwer*不动点定理的非常重要的定理的特殊情况. *Brouwer*不动点定理指出如果将一个n 维方体连续映射到它自身, 那么存在不动点. [有很多关于这个定理的证明, 但绝大多数依赖于代数拓扑的方法. *K. Kuratowski* 的书*"Introduction to Set Theory and Topology"* (*Pergamon Press, 1961*) 中*238-239*页给出了一个简单易懂的证明.]

习题5.2

1. 求证一个路径连通空间的连续映像是路径连通的.

2. 令f 为区间$[a,b]$ 到其自身的连续映射, 这里$a,b\in\mathbb{R}, a<b$. 求证存在不动点.

3. (i) 给出一个例子来说明如果我们在推论5.2.11中用$(0,1)$取代所有$[0,1]$, 那么得到的结论是错误的.

   (ii) 拓扑空间(X,τ) 称为具有**不动点性质**, 如果每个(X,τ)到其自身的连续映射有不动点. 证明仅有的具有不动点性质的区间是闭区间.

   (iii) 令X 是至少有两个点的集合. 求证离散空间(X,τ) 和平庸空间(X,τ') 不具有不动点性质.

   (iv) 一个具有有限闭拓扑的的空间具有不动点性质吗?

(v) 求证如果空间(X,τ) 有不动点性质, (Y,τ_1) 是同胚于(X,τ) 的空间, 那么(Y,τ_1) 具有不动点性质.

4. 令$\{A_j : j \in J\}$ 为拓扑空间(X,τ) 的连通子空间组成的集簇. 如果$\bigcap_{j\in J} A_j \neq \varnothing$, 证明$\bigcup_{j\in J} A_j$ 是连通的.

5. 令A 为拓扑空间(X,τ) 的连通子空间. 求证$\overline{A}$ 也是连通的. 实际上, 求证如果$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, 那么$B$ 是连通的.

6. (i) 求证$\mathbb{R}^2$ 中的子空间$Y = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\}$ 是连通的.

   [提示: 利用命题5.2.1]

   (ii) 验证$\overline{Y} = Y \cup \{\langle 0, y\rangle : -1 \leq y \leq 1\}$.

   (iii) 利用习题5, 看出$\overline{Y}$ 是连通的.

7. 令E 为$\mathbb{R}^2$ 中所有两个坐标都是有理数的点的集合. 求证空间$\mathbb{R}^2 \setminus E$ 是路径连通的.

8. * 令C 为$\mathbb{R}^2$ 中任何可数子集. 求证空间$\mathbb{R}^2 \setminus C$ 是路径连通的.

9. 令(X,τ) 为拓扑空间, a 为X 中的任意点. **X 中a 的分量**, $C_X(a)$ 定义为所有包含a 的X 中连通子集的并. 求证

   (i) $C_X(a)$ 是连通的. (利用上面习题4.)

   (ii) $C_X(a)$ 是包含a 的最大连通集.

   (iii) $C_X(a)$ 在X 中是闭的. (利用上面习题5.)

10. 拓扑空间(X,τ) 称为**完全不连通**的, 如果每个非空连通子集是单点集. 求证如下结论.

   (i) (X,τ) 是完全不连通的, 当且仅当对每个$a \in X$, $C_X(a) = \{a\}$. (参见习题9中的记号.)

   (ii) 具有通常拓扑的所有有理数组成的集合$\mathbb{Q}$ 是完全不连通的.

(iii) 如果f 是$\mathbb{R}$ 到$\mathbb{Q}$ 的连续映射, 求证存在$c \in \mathbb{Q}$ 使得对所有$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

(iv) 每个完全不连通空间的子空间是完全不连通的.

(v) 每个$\mathbb{R}^2$ 中的可数子空间是完全不连通的.

(vi) Sorgenfrey线是完全不连通的.

11. (i) 利用习题9, 以一种自然的方式定义拓扑空间中点的"路径分量".

(ii) 求证在任何拓扑空间, 每个路径分量是路径连通空间.

(iii) 如果(X, τ) 是具有性质: 每个X 中的点都有一个路径连通的邻域的拓扑空间, 求证每个路径分量是开集. 推导出每个路径分量也是闭集.

(iv) 利用(iii), 证明$\mathbb{R}^2$ 中的开子集是连通的, 当且仅当它是路径连通的.

12. * 令A 和B 是拓扑空间(X, τ) 的子集. 如果A 和B 都是开的或都是闭的, 且$A \cup B$ 和$A \cap B$ 都是连通的, 求证A 和B 都是连通的.

13. 一个拓扑空间(X, τ) 称为是**零维**的, 如果此拓扑有由闭开集组成的基. 求证如下结论.

(i) $\mathbb{Q}$ 和$\mathbb{P}$ 是零维空间.

(ii) 零维空间的子空间是零维的.

(iii) 零维Hausdorff空间是完全不连通的. (参见上面习题10.)

(iv) 每个平庸空间是零维的.

(v) 每个离散空间是零维的.

(vi) 超过一个点的平庸空间不是完全不连通的.

(vii) 零维T_0-空间是Hausdorff的.

(viii) * $\mathbb{R}$ 中的子空间是零维的当且仅当它是完全不连通.

14. 求证每个局部同胚映射是连续映射. (参见4.3节习题9.)

§5.3 后记

本章我们称拓扑空间的映射[3]是“连续”的, 如果它具有每个开集的逆映像是开集的性质. 这是个很雅致的定义并容易理解. 它与我们在实分析中遇到的定义形成对照, 这个定义在本章开始提到了. 我们推广了实分析中的定义. 不是为了推广而推广, 而是为了看到什么是真正发生的.

Weierstrass介值定理直觉上看是很显然的, 但我们现在明白它是从$\mathbb{R}$ 是连通的, 并且任何连通空间的连续映像是连通的这个事实中得来的.

我们引入了比连通更强的一个性质, 即路径连通. 在很多情况下强调空间是连通的还不够, 它必须是路径连通的. 此性质在代数拓扑中扮演一个重要的角色.

今后我们将会回到Brouwer不动点定理. 它是一个有威力的定理. 不动点定理在包括拓扑学, 泛函分析和微分方程在内的多个数学分支中扮演重要角色. 它们今天仍然是一个研究活动的主题.

在5.2节习题9和10我们遇到了“分量”和“完全不连通”的概念. 对理解连通性来说, 这两个概念都是重要的.

[3]一些书用术语“映射”来指连续映射. 我们没有这样.

参考文献

[1] Colin C. Adams. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots.* Freeman and Co., New York, 1994.

[2] J. Frank Adams. *Algebraic topology: a student's guide.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972.

[3] G.N. Afanasiev. *Topological effects in quantum mechanics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1999.

[4] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint.* Springer, New York, 2002.

[5] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[6] *Algebraic and Geometric Topology.* http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001–. a refereed electronic journal.

[7] Charilaos N. Aneziris. *The mystery of knots: computer programming for knot tabulation.* World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[8] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Fundamentals of general topology: problems and exercises.* Kluwer, Boston, 1984.

[9] A.V. Arkhangel'skiĭ. *Topological function spaces.* Kluwer, Boston, 1992.

[10] A.V. Arkhangel'skiĭ and L.S. Pontryagin, editors. *General Topology I.* Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[11] D.L. Armacost. *The structure of locally compact abelian groups.* M. Dekker, New York, 1981.

[12] M.A. Armstrong. *Basic topology.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[13] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics.* Springer, New York, 1999.

[14] Emil Artin. *Introduction to algebraic topology.* C.E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1969.

[15] C.E. Aull and R. Lowen, editors. *Handbook of the history of general topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[16] Wojciech Banaszczyk. *Additive subgroups of topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1991.

[17] J. Banks, G. Davis, P. Stacey, J. Brooks, and G. Cairns. On devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:332–334, 1992.

[18] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. *Chaos: A Mathematical Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[19] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. *Additive subgroups of topological vector spaces.* Imperial College Press, London, 2003.

[20] Stephen Barr. *Experiments in topology.* Dover Publications, New York, 1989.

[21] Gerald Alan Beer. *Topologies on closed and convex sets.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1993.

[22] Martin P. Bendsoe. *Optimization of structural topology.* Springer, Berlin, New York, 1995.

[23] Martin P. Bendsoe. *Topology, optimization: theory, methods and applications.* Springer, Berlin, New York, 2003.

[24] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. *Selected topics in infinite-dimensional topology.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.

[25] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Jour. Math (Liouville)*, (9) 7:345–379, 1928.

[26] Donald W. Blackett. *Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach.* Academic Press, New York, 1967.

[27] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. *Chemical topology : introduction and fundamental.* Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[28] Armand Borel. *Seminars on transformation groups.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[29] Karol Borsuk. *Collected Papers/ Karol Borsuk.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983.

[30] Nicolas Bourbaki. *General topology v.1 & v.2.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[31] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10.* Hermann, Paris, 1971 and 1974.

[32] Nicolas Bourbaki. *Topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.

[33] Glen E. Bredon. *Topology and geometry.* Springer, New York, 1997.

[34] Robert F. Brown. *The Lefschetz fixed point theorem.* Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[35] Ronald Brown. *Elements of modern topology.* McGraw Hill, New York, 1968.

[36] Ronald Brown. *Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid.* Halstead Press, New York, 1988.

[37] Georg Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain.* The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.

[38] Stephen C. Carlson. *Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course.* Wiley, New York, 2001.

[39] J. Scott Carter. *How surfaces intersect in space : an introduction to topology.* World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.

[40] Eduard Čech. *Topological spaces.* Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.

[41] Eduard Čech. *Point sets.* Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.

[42] Graciela Chichilnisky. *Topology and markets.* American Mathematical society, Providence, R.I., 1999.

[43] Gustave Choquet. *Topology.* Academic Press, New York, 1966.

[44] Gustave Choquet. *Lectures on analysis.* W.A. Benjamin, New York, 1969.

[45] Daniel E. Cohen. *Combinatorial group theory: a topological approach.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.

[46] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[47] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Continuous pseudometrics.* M. Dekker, New York, 1975.

[48] W.W. Comfort and S. Negrepontis. *Chain conditions in topology.* Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.

[49] James P. Corbett. *Topological principles in cartography.* US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.

[50] J.-M. Cordier. *Shape theory: categorical methods of approximation.* Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.

[51] Jane Cronin. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[52] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. *Handbook of geometric topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[53] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications: an algebraic approach.* Van Gorcum, Assen, 1962.

[54] J.V. Deshpande. *Introduction to topology.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.

[55] Robert L. Devaney. *Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics.* Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.

[56] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment.* Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.

[57] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition.* Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.

[58] Tammo tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter, Berlin, 2000.

[59] Egbert Dierker. *Topological methods in Walrasian economics.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[60] Jean Alexandre Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960.* Birkhauser, Boston, 1989.

[61] Dikran N. Dikranjan. *Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.

[62] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. *Molecular topology.* Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.

[63] C.T.J. Dodson. *Category bundles and spacetime topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.

[64] C.T.J. Dodson. *A user's guide to algebraic topology.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.

[65] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer, Berlin, 1995.

[66] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[67] Alan Dunn. *Sarkovskii's Theorem–Part 1*, http://ocw.mit.edu/nr/rdonlyres/mathematics/18-091spring–2005/a335fb2e-7381–49d4–b60c–7cbd2f349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.

[68] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.

[69] Gerald A. Edgar. *Measure, topology and fractal geometry.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[70] R.E. Edwards. *Curves and topological questions.* Australian National University, Canberra, Australia, 1969.

[71] Robert E. Edwards. *Functional analysis: theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.

[72] James Eels. *Singularities of smooth maps.* Gordon and Breach, New York, 1967.

[73] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

[74] Murray Eisenberg. *Topology.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[75] Patrik Eklund. *Categorical fuzzy topology.* Abo Akademi, Abo, 1986.

[76] Glenn Elert. *The Chaos Hypertextbook*, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.

[77] Ryszard Engelking. *General topology.* PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[78] Ryszard Engelking. *Dimension theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.

[79] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. *Topology.* W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.

[80] K.J. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* Wiley, Chichester, New York, 1990.

[81] Erica Flapan. *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality.* Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.

[82] Graham Flegg. *From geometry to topology.* Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.

[83] D.H. Fremlin. *Consequences of Martin's Axioms.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.

[84] Robert Froman. *Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss.* Crowell, New York, 1972.

[85] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[86] David B. Gauld. *Differential topology: an introduction.* M. Dekker, New York, 1982.

[87] *General Topology Front for the Mathematics ArXiv.* http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[88] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *A compendium of continuous lattices.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[89] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. *Continuous lattices and domains.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[90] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[91] Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland.* Wiley-Interscience, New York, 2002.

[92] Norman J. Girardot. *Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun).* University of California Press, Berkeley, California, 1983.

[93] H. Brian Griffiths. *Surfaces.* Cambridge University Press, London; New York, 1976.

[94] Jonathan L. Gross. *Topological graph theory.* Wiley, New York, 1987.

[95] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordon and Breach, New York, 1973.

[96] Paul Halmos. *Naive set theory.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.

[97] Felix Hausdorff. *Set Theory (translated from the original German).* Chelsea, New York, 1962.

[98] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914).* Chelsea, New York, 1965.

[99] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. *Category theory at work.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.

[100] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations.* Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[101] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[102] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. *Lie groups, convex cones and semigroups.* Clarendon Press, Oxford, 1997.

[103] Peter John Hilton. *Homology theory: an introduction to algebraic topology.* Cambridge University Press, London, 1967.

[104] Neil Hindman and Dona Strauss. *Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications.* W. de Gruyter, New York, 1998.

[105] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition.* Elsevier, Oxford, UK, 2004.

[106] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. *Topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.

[107] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert.* de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, second revised and augmented edition, 2006.

[108] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups.* European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.

[109] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. *Elements of compact semigroups.* C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.

[110] *Hopf Topology Archive.* http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.

[111] Juan Horváth. *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[112] Norman R. Howes. *Modern analysis and topology.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[113] S.T. Hu. *Introduction to general topology.* Holden-Day, San Francisco, 1966.

[114] S.T. Hu. *Differentiable manifolds.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[115] Sze-Tsen Hu. *Elements of general topology.* Holden-Day, San Francisco, 1964.

[116] Sze-Tsen Hu. *Homology theory; a first course in algebraic topology.* Holden-Day, San Francisco, 1966.

[117] Witold Hurewicz and Witold Wallman. *Dimension theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.

[118] Taqdir Husain. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces.* Clarendon Press, Oxford, 1965.

[119] Taqdir Husain. *Introduction to topological groups.* W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.

[120] Taqdir Husain. *Topology and maps.* Plenum Press, New York, 1977.

[121] Miroslav Husek and Jan Van Mill. *Recent progress in general topology.* North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.

[122] J.R. Isbell. *Uniform spaces.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[123] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99:865, 1992.

[124] I.M. James. *General topology and homotopy theory.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[125] I.M. James. *Handbook of algebraic topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.

[126] I.M. James. *History of topology.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.

[127] I.M. James. *Topologies and uniformities.* Springer, London; New York, 1999.

[128] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. *Abstract algebra and famous impossibilities.* Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.

[129] V. Kannan. *Ordinal invariants in topology.* American mathematical society, Providence, R.I., 1981.

[130] Christian Kassel. *Quantum groups.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[131] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. *Quantum topology.* World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.

[132] John L. Kelley. *General topology.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[133] S.M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.

[134] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. *Topological analysis and synthesis of communication networks.* Columbia University Press, New York, 1962.

[135] Bruce R. King. *Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[136] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. *Topological algorithms for digital image processing.* Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.

[137] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[138] Kenneth Kunen. *Set theory.* North-Holland, Amsterdam, 1980.

[139] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. *Handbook of set-theoretic topology.* North-Holland, Amsterdam, 1984.

[140] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to set theory and topology.* Pergamonn Press, New York, 1961.

[141] H.A. Lauwerier. *Fractals: endlessly repeated geometrical figures.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.

[142] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds.* Springer, New York, 2000.

[143] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Springer, New York, 2002.

[144] Seymour Lipschutz. *Schaum's outline of general topology.* McGraw Hill, 1968.

[145] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. *Fuzzy topology*. World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.

[146] Charles Livingston. *Knot theory*. The Mathematical association of America, 1993.

[147] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.

[148] Saunders Maclane. *Categories for the working mathematician, second edition*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[149] Benoit B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155:636–638, 1967.

[150] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, New York, 1983.

[151] R.D. Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*. Birkhäuser, Boston, 1981.

[152] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186:645–647, 1974.

[153] George McCarty. *Topology; an introduction with application to topological groups*. McGraw Hill, New York, 1967.

[154] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. *Topological properties of spaces of continuous functions*. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.

[155] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, New York, 1998.

[156] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. *Topological methods in chemistry*. Wiley, New York, 1989.

[157] Emil G. Milewski. *The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook.* Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.

[158] M. Mimura and Hirosi Toda. *Topology of Lie groups.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.

[159] Edward E. Moise. *Introductory problem courses in analysis and topology.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[160] Mikhail I. Monastyrskaei. *Topology of gauge fields and condensed matter.* Plenum Press, New York, 1993.

[161] Deane Montgomery and Leo Zippin. *Topological transformation groups.* Interscience Publishers, New York, 1955.

[162] Robert L. Moore. *Foundations of point set topology.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[163] Giuseppe Morandi. *The role of topology in classical and quantum physics.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.

[164] K. Morita and J. Nagata, editors. *Topics in general topology.* North Holland, Amsterdam, 1989.

[165] Sidney A. Morris. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups.* Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.

[166] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. *Austral. Math. Soc. Gazette*, 11:31–32, 1984.

[167] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. *Amer. Math. Monthly*, 91:563–564, 1984.

[168] Gregory L. Naber. *Topological methods in Euclidean spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.

[169] Gregory L. Naber. *Topology, geometry and gauge fields: foundations.* Springer, New York, 1997.

[170] Keio Nagami. *Dimension theory.* Academic Press, New York, 1970.

[171] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory.* Interscience Publishers, New York, 1965.

[172] Jun-iti Nagata. *Modern general topology.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.

[173] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics.* A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.

[174] H. Nakano. *Topology and linear topological spaces.* Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[175] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. *Topological vector spaces.* M. Dekker, New York, 1985.

[176] Charles Nash. *Topology and geometry for physicists.* Academic Press, London, New York, 1983.

[177] M.H.A. Newman. *Elements of the topology of plane sets of points.* Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.

[178] A.L. Onishchik. *Topology of transitive transformation groups.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.

[179] John C. Oxtoby. *Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[180] A.R. Pears. *Dimension Theory of general spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.

[181] Anthony L. Peressini. *Ordered topological vector spaces.* Harper and Row, New York, 1967.

[182] C.G.C. Pitts. *Introduction to metric spaces.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

[183] Henri Poincarè. *Science and method; translated and republished.* Dover Press, New York, 2003.

[184] Ian R. Porteous. *Topological geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.

[185] Bodo von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[186] George M. Reed. *Surveys in general topology.* Academic Press, New york, 1980.

[187] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. wachter. *Topology and category theory in computer science.* Oxford University Press, Oxford, England, 1991.

[188] Renzo L. Ricca. *An introduction to the geometry and topology of fluid flows.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.

[189] A.P. Robertson and Wendy Robertson. *Topological vector spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.

[190] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[191] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[192] Hans Sagan. *Space-filling curves.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[193] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukranian Mat. Z.*, 16:61–71, 1964.

[194] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. *Word problems II, Stud. Logic Found. Math.*, 995:373–394, 1980.

[195] M. Signore and F. Melchiorri. *Topological defects in cosmology.* World Scientific Publishers, Singapore, 1998.

[196] George E. Simmons. *Introduction to topology and modern analysis.* McGraw Hill, New York, 1963.

[197] I.M. Singer. *Lecture notes on elementary topology and geometry.* Springer-Verlag, New York, 1967.

[198] Christopher G. Small. *The statistical theory of shape.* Springer, New York, 1996.

[199] Alexei Sossinsky. *Knots: mathematics with a twist.* Harvard University Press, 2002.

[200] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[201] John R. Stallings. *Lectures on polyhedral topology.* Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.

[202] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. *Counterexamples in topology.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[203] N.E. Steenrod. *Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.

[204] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[205] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group topology.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[206] *The MacTutor History of Mathematics Archive.* http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/, 2001–.

[207] Wolfgang Thron. *Topological structures.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[208] *Topology.* http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.

[209] *Topology and its Applications.* http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[210] *Topology Atlas.* http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.

[211] *Topology Proceedings.* http://topology.auburn.edu/tp/top2.htm, 1977–. A hard-copy refereed research journal.

[212] J. van Mill. *The infinite-dimensional topology of function spaces.* Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.

[213] Jan van Mill and George M. Reed. *Open problems in topology.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[214] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. *Amer. Math. Monthly*, 101:353–355, 1994.

[215] Steven Vickers. *Topology via logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[216] A.V. Vologodskii. *Topology and physics of circular DNA.* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[217] Russell C. Walker. *The Stone-Cech compactification.* Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.

[218] C.T.C. Wall. *A geometric introduction to topology.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[219] A.D. Wallace. *Differential topology; first steps.* W.A. Benjamin, New York, 1968.

[220] Evert Wattel. *The compactness operator in set theory and topology.* Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.

[221] Jeffrey R. Weeks. *The shape of space.* Marcel Dekker, New York, 2002.

[222] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. *Topology and geometry in polymer science.* Springer, New York, 1998.

[223] R.L. Wilder. *Topology of manifolds.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.

[224] Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[225] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.

索　引