姓名 ____________ 学号 ____________ 成绩 ____________

一. （12 分） 单项选择题

1. 若集合 $A=\{a,b\}, B=\{a,b,\{a,b\}\}$，则________
   - A. $A\in B$，但 $A\not\subset B$
   - **B. $A\subset B$，且 $A\in B$**
   - C. $A\subset B$，但 $A\notin B$
   - D. $A\not\subset B$，且 $A\notin B$
2. 假设集合 $A\subseteq B$，C 是任意一个集合，则以下________不一定成立
   - A. $C\times A\subseteq C\times B$
   - **B. $\cap A\subseteq \cap B$**
   - C. $C\cap A\subseteq C\cap B$
   - D. $A-B\subseteq B-A$
3. 设集合 $A=\{a\}$，下式不成立的是________
   - **A. $\{a\}\in PP(A)$**
   - B. $\{\varnothing\}\subseteq PP(A)$
   - C. $\{\varnothing,\{a\}\}\in PP(A)$
   - **D. $\{\varnothing,\{a\}\}\subseteq PP(A)$**
4. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A\wedge a+b=8\}$，则 R 具有的性质为________
   - A. 自反的
   - **B. 对称的**
   - C. 对称和传递的
   - D. 反自反和传递的
5. 如果 R_1 和 R_2 是 A 上的自反关系，则 $R_1\cup R_2, R_1\cap R_2, R_1-R_2$ 中自反关系有________个
   - A. 0
   - B. 1
   - **C. 2**
   - D. 3
6. $f\circ g\circ h$ 是双射，那么一定有________
   - A. f 是单设，h 是满射
   - B. g 是满射，h 是单射
   - **C. f 是满射，h 是单射**
   - D. f 是单射，g 是单射

二. （12 分） 填空题

1. 设集合 $A=\{\{1\},\{2\},1,2\}, B=\{1,2,\{1,2\}\}$，则 $A\oplus B=$ $\underline{\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}}$

2. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，A 上的二元关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,a\rangle\},S=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

则 $(R\circ S)^{-1}=$ $\underline{\{\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle\}}$

3. 关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$,则 $st(R)$ 为 $\underline{\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle\}}$(其中 $s(R)$ 为 R 的对称闭包，$t(R)$ 为 R 的传递闭包)
4. 设集合 $A=\{1,\ 2\},B=\{a,\ b\}$,那么集合 A 到 B 的双射函数是 $\underline{\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}}$ **或** $\underline{\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}}$
5. 设 f,g,h 是实数集上的函数，$f(x)=x^2+x,g(x)=x+4,h(x)=\frac{x}{3}$，则 $h\circ f\circ g=$ $\underline{\frac{1}{3}x^2+3x+\frac{20}{3},\frac{x^2+9x+20}{3}}$
6. A,B 为集合，化简 $A\cup((B-A)-B)=$ $\underline{A}$

三. （5 分） 求 1 到 250 之间能被 2、3、5 中任何一个整除的整数的个数。

答： 设 A,B,C 表示 1 到 250 之间分别能被 2、3、5 整除的整数的个数，则有

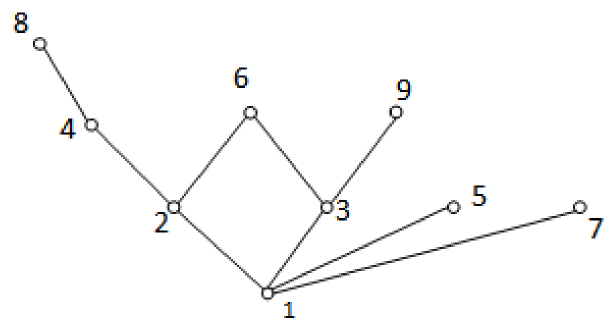
$$\begin{aligned}
&|A|=125,|B|=83,|C|=50\\
&|A\cap B|=41,|A\cap C|=25,|B\cap C|=16,|A\cap B\cap C|=8\\
&|A\cup B\cup C|\\
=&|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\\
=&125+83+50-41-25-16+8\\
=&184
\end{aligned}$$

四. （5 分） 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，R 是 A 上的整除关系，$B=\{2,4,6\}$

1. 写出关系 R 的表达式
2. 画出关系 R 的哈斯图
3. 求出集合 B 的最大元、最小元

答：

1. $R=I\cup\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\ldots,\langle 1,9\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,8\rangle\}$
2.



3. B 的最小元为 2，不存在最大元。

五. （5 分） 设 $A=\{1,2,\ldots,20\}, R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)\}$。证明 R 是 A 上的等价关系，并求商集 A/R。

答： $\forall x\in A, x=5k+i, 0\le i\le 4$，所以 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 5)$，即 xRx。

$\forall x,y\in A$，若 xRy，即 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)$，故有 $x=5k+i$ 且 $y=5m+i(0\le i\le 4)$，所以有 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ 5)$，即有 yRx。

$\forall x,y,z\in A$，若 xRy 且 yRz，则有 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)$ 和 $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 5)$，即有 $x=5k+i, y=5m+i, z=5n+i, 0\le i\le 4$，从而 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 5)$，故有 xRz。

综上 R 具有自反性、对称性、传递性，所以 R 是等价关系。

$$\begin{aligned}A/R&=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R,[4]_R,[5]_R\}\\&=\{\{1,6,11,16\},\{2,7,12,17\},\{3,8,13,18\},\{4,9,14,19\},\{5,10,15,20\}\}\end{aligned}$$

六. （5 分） 令 $f\in A_A$。定义 $A_0=A, A_1=f(A_0), A_2=f(A_1),\ldots,A_n=f(A_{n-1}), n\ge 1$。令 $A^*=\cap_{j=0}^{\infty}A_j$。证明 $f(A^*)\subseteq A^*$.

答： 假设 $x\in A^*$，那么 $x\in A_j$ 对所有 $j\in\mathbb{N}$ 成立，所以对 $j\ge 1, f(x)\in A_j$。因为 $A_1=f(A)\subseteq A$，所以 $f(x)\in A=A_0$，因此 $f(x)\in A_j$ 对所有 $j\in\mathbb{N}$ 都成立，于是可以得到 $f(x)\in A^*$。

七. （6 分） 假设 f 是集合 X 到集合 Y 的双射，并且 $A,B\subseteq X$，证明 $f(A\oplus B)=f(A)\oplus f(B)$

答： 假设 $y \in f(A \oplus B)$，那么存在 $x \in A \oplus B$ 满足 $f(x) = y$，那么 $x \in A - B$ 或者 $x \in B - A$。不损失一般性可以假定 $x \in A - B$。由 $x \in A$ 可知 $f(x) \in f(A)$。如果 $f(x) \in B$ 也成立，那么存在 $z \in B$ 使得 $f(x) = f(z)$。由 f 是一对一的可知 $z = x$，那么 $x \in B$，与 $x \in A - B$ 矛盾，因此 $f(A \oplus B) \subseteq f(A) \oplus f(B)$。对 $x \in B - A$ 的情况也同理可证。

另一方面，假设 $y \in f(A) \oplus f(B)$，那么 $y \in f(A) - f(B)$ 或 $y \in f(B) - f(A)$。不损失一般性可以假定 $y \in f(A) - f(B)$，那么存在 $x \in A$ 满足 $f(x) = y$。假设 $x \in B$ 也成立，那么 $y = f(x) \in f(B)$，与 $y \in f(A) - f(B)$ 矛盾，所以 $y \in f(A) - f(B)$。对 $y \in f(B) - f(A)$ 的情况也同理可证。因此 $f(A) \oplus f(B) \subseteq f(A \oplus B)$。

综上得到 $f(A \oplus B) \subseteq f(A) \oplus f(B)$ 与 $f(A) \oplus f(B) \subseteq f(A \oplus B)$，可以得到 $f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B)$。$\square$