作业4参考答案

(4) 8. 假设存在结点 v_i, v_j

满足 $d(v_i)+d(v_j)<n$

令 $G'=G-\{v_i, v_j\}$

$$m(G') \le m(K_{n-2}) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

由题设: $m(G) > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$

则 $m(G') > m(G)-(d(v_i)+d(v_j))$

$$> \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-n$$

$$> \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

与上式矛盾

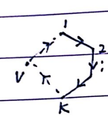
∴原命题得证

2-9. 使用数学归纳法

$n=2$ 时 显然成立 假设当 $n=k$ 时，G 为有向完全图且存在哈密顿道路。

当 $n=k+1$ 时，设第 $k+1$ 个点为 v，在 G 中的 H 道路为 $(v_1, v_2 \cdots v_k)$

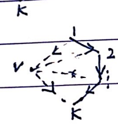
$G'=G+v$ 为有向完全图



① 若 $(v, v_1) \in G'$ 或 $(v_k, v) \in G'$，G' 的 H 道路为 $(v, v_1 \cdots v_k)$ 或 $(v_1, v_2 \cdots v_k, v)$

② 若 $(v_1, v) \in G'$ 且 $(v, v_k) \in G'$，这时，总是 $\exists i$，满足 $1 \le i < k-1$

使得 $(v_i, v) \in G'$ 且 $(v, v_{i+1}) \in G'$



那么 G' 的 H 道路为 $(v_1, v_2 \cdots v_i, v, v_{i+1} \cdots v_k)$

∴数学归纳法成立 #

10 个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 G.

若 G 中有 H 回路，则问题获得证.

由已知条件，对任意两点 $v_i, v_j \in V(G)$，都有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-2$

此时若 v_i 与 v_j 相识，即 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$.

若不相识，必存在 $v_k, v_l \in V(G)$，满足 (v_i, v_k), (v_j, v_k) (v_i, v_l) $(v_j, v_l) \in E(G)$

否则，设 $(v_i, v_k) \notin E(G)$，$(v_i, v_l) \in E(G)$ 则出现 v_k, v_j 合在一起不认识 v_i，

v_l, v_j 合在一起不认识 v_i，与原设矛盾，从而 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$

∴ 由定理可知，G 中存在 H 回路.