数理逻辑

课程XI

第11章 函 数

- 上一章研究了关系的自反，传递、对称等性质，并针对这些性质研究了—些特殊的关系，如等价关系、偏序关系．这一章研究的各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的．函数是一个基本的数学概念．通常的实函数是在实数集合上讨论的．这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数．

11．1 函数和选择公理

11.1.1 函数定义

- 定义11.1.1 对集合A到集合B的关系f，若满足下列条件：
  (1)对任意的x∈dom(f)，存在唯一的y∈ran(f)，使xfy成立；
  (2)dom(f)=A
  则称f为从A到B的函数，或称f把A映射到B(有的书称f为全函数、映射、变换)
- 一个从A到B的函数f，可以写成f：A→B，这时若xfy，则可记作f：x|→y或f(x)=y.
- 若A到B的关系f只满足条件(1)，且有dom(f)⊂A，则称f为从A到B的部分函数(有的书上称f为函数)，

- 函数的两个条件可以写成

  $(1)(\forall x)(\forall y1)(\forall y2)((xfy1 \wedge xfy2)\rightarrow y1=y2)$，

  $(2)(\forall x)(x\in A\rightarrow(\exists y)(y\in B \wedge xfy))$.
- 函数的第—个条件是单值性，定义域中任一x与B中唯一的y有关系，因此，可以用f(x)表示这唯一的y．第二个条件是A为定义域，A中任一x都与B中某个y有关系.注意不能把单值性倒过来，对A到B的函数f，当x1fy且x2fy成立时，不一定x1=x2；因此，函数的逆关系不一定是函数.
- 如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个1，其余为0。它的关系图中每个A中的顶点恰好发出一条有向边.

- 例1　对实数集R，R上的关系f为

  $f=\{\langle x, y\rangle \mid y=x^3\}$

  f是从R到R的函数，记作$f: R\rightarrow R$，并记作$f: x\mapsto x^3$或$f(x)=x^3$.
- 例2　集合$A=\{1, 2, 3\}$上的两个关系

  $g=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

  和　$h=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

  都不是从A到A的函数.
- 因为g没有单值性，即$\langle 3, 1\rangle\in g$且有$\langle 3, 2\rangle\in g$，而对关系h，$dom(h)=\{1, 2\}\neq A$. 但是，h是从$\{1, 2\}$到A的函数.

- 定义11.1.2 对集合A和B，从A到B的所有函数的集合记为A_B(有的书记为B^A)．于是，A_B＝{f|f：A→B}．
- 例3 对A＝{1，2，3}，B＝{a，b}．从A到B的函数有8个：

f1={<1，a>，<2，a>，<3，a>}

f2={<1，a>，<2，a>，<3，b>}

f3={<1，a>，<2，b>，<3，a>}

f4={<1，a>，<2，b>，<3，b>}

f5={<1，b>，<2，a>，<3，a>}

f6={<1，b>，<2，a>，<3，b>}

f7={<1，b>，<2，b>，<3，a>}

f8={<1，b>，<2，b>，<3，b>}

于是 A_B＝{f1，f2，f3，…，f8}

- 若A和B是有限集合，且$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A^B|=n^m$．从Φ到Φ的函数只有$f=\Phi$，从Φ到B的函数只有$f=\Phi$．若$A\neq\Phi$，从A到Φ的函数不存在．因此，$\Phi_\Phi=\Phi_B=\{\Phi\}$，$A_\Phi=\Phi$（对$A\neq\Phi$）.

- 定义11.1.3 设f：A→B，A1⊆A，定义A1在f下的象f[A1]为$f[A1]=\{y|(\exists x)(x\in A1 \wedge y=f(x))\}$，把f[A]称为函数的象，
- 设B1⊆B，定义B1在f下的完全原象$f^{-1}[B1]$为
  $f^{-1}[B1]=\{x|x\in A \wedge f(x)\in B1\}$
- 注意，在上一章f^{-1}表示f的逆关系．这个定义中的$f^{-1}[B1]$表示完全原象，可以认为其中的f^{-1}是f的逆关系，因为函数的逆关系不一定是函数，所以f^{-1}一般只表示逆关系，不是逆函数(除非特别说明).

例 4 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 为偶数} \\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{当 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

则

$$f[\mathbf{N}] = \mathbf{N}, f[\{-1,0,1\}] = \{-1,0\},$$

$$f^{-1}[\{2,3\}] = \{4,5,6,7\}.$$

特别地

$$f[\varnothing] = f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

11.1.2 特殊的函数

- 等价关系利函数都是特殊的关系．同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数，
- 定义11．1．4 设f：A→B．

(1)若ran(f)＝B，则称f是满射的，或称f是A到B上的，

(2)若对任意的x1，x2∈A，x1≠x2，都有f(x1)≠f(x2)，则称f是单射的，或内射的，或—对一的，

(3)若f是满射的又是单射的，则称f是双射的，或一对一A到B上的．简称双射．

- 如果f：A→B是满射的，则对任意的y∈B，存在x∈A，使f(x)＝y．如果f：A→B是单射的，则对任意的y∈ran(f)，存在唯一的x∈A，使f(x)＝y．

- 例5 f：{1，2}→{0}，f(1)=f(2)=0，是满射的，不是单射的．f：N→N，f(x)=2x，是单射的，不是满射的．f：Z→Z，f(x)=x+1，是双射的．特别地，Φ：Φ→B是单射的，Φ：Φ→Φ是双射的．
- 给定两个集合A和B，是否存在从A到B的双射函数?怎样构造从A到B的双射函数?这是两个很重要的问题．第一个问题在下一章讨论．下面举例说明第二个问题，

- 例6 对下列的集合A和B，分别构造从A到B的双射函数：
  (1)A＝R，B＝R，R是实数集.
  (2)A=R，B=R_+={x|x∈R^x>0}.
  (3)A＝[0，1)，B=(1/4,1/2]都是实数区间.
  (4)A＝NXN，B＝N.

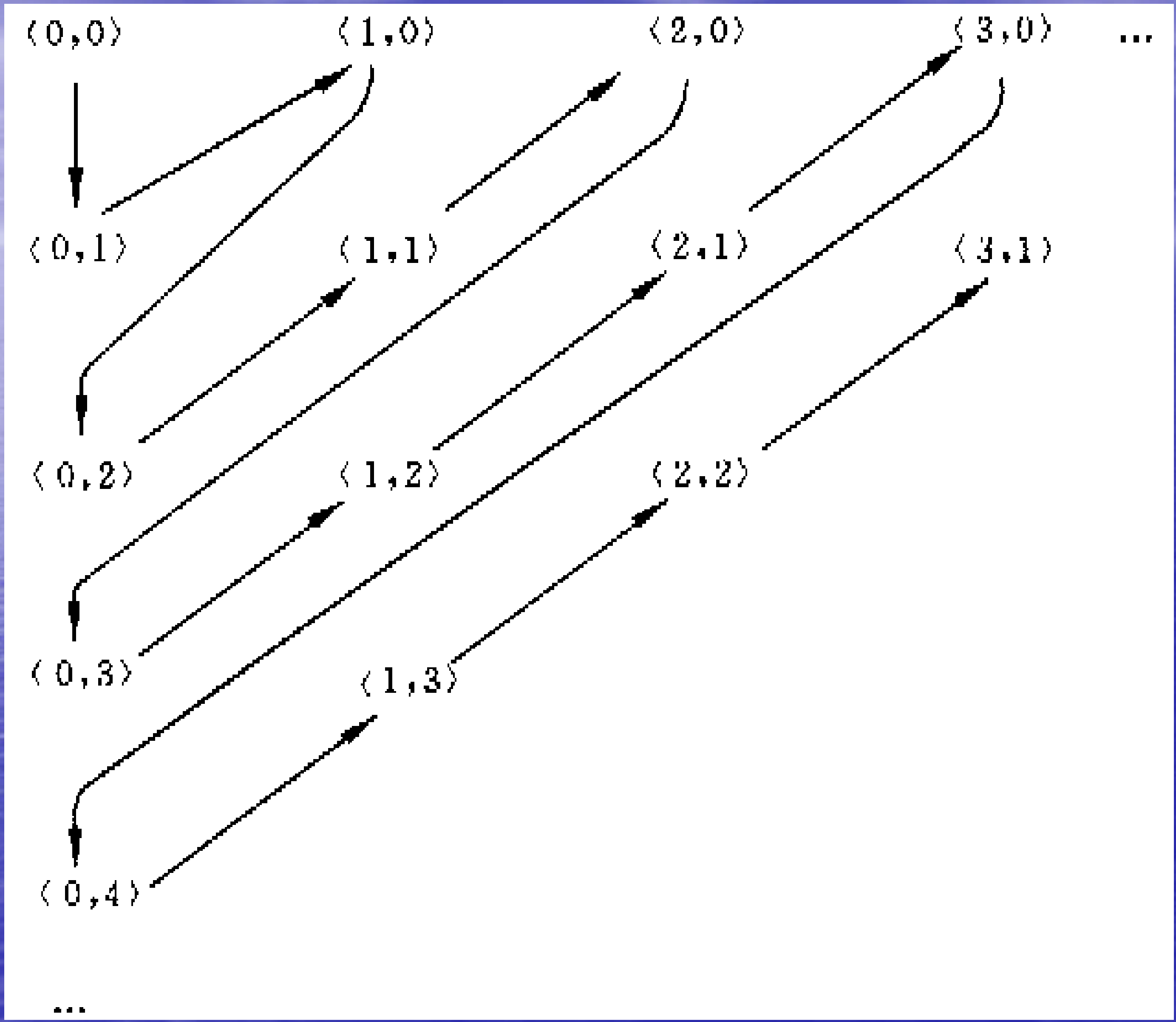
解

(1)令f：R→R，f(x)＝x

(2)令f：R→R_+，f(x)＝e^x.

(3)令f:[0，1)→(1/4,1/2]，f(x)＝1/2—x/4

- (4)NXN是由自然数构成的所有有序对的集合．这些有序对可以排列在直角坐标系—个象限中，构成一个无限的点阵．如图所示．构造要求的双射函数，就是在点阵中有序对与N的元素间建立一一对应，也就是把点阵中有序对排成一列并依次编号0，1，2，….



⟨0,0⟩
⟨1,0⟩
⟨2,0⟩
⟨3,0⟩
…
⟨0,1⟩
⟨1,1⟩
⟨2,1⟩
⟨3,1⟩
⟨0,2⟩
⟨1,2⟩
⟨2,2⟩
⟨0,3⟩
⟨1,3⟩
⟨0,4⟩
…

NXN中元素的排列次序是：<0，0>，<0，1>，<1，0>，<0，2>，<1，1>，<2，0>，<0，3>，…． 图中用箭头表示次序．这相当于f(<0，0>)=0，f(<0，1>)＝1，f(<1，0>)＝2，f(<0，2>)＝3，…．

显然，(m，n)所在的斜线上有m+n+1个点．在此斜线上方，各行元素分别有1，2，…，m+n个，这些元素排在<m，n>以前．在此斜线上，m个元素排在<m，n>以前．排在<m，n>以前的元素共有[1+2+…+(m+n)]+m个．于是，双射函数f：NXN→N为

f(<m，n>)＝(m+n)(m+n+1)/2＋m，

对无限集合A，若存在从A到N的双射函数，就可仿照这种方法，把A中元素排成一个有序图形，按次序数遍A中元素．这就构造了从A到N的双射函数．

11．1．3 常用的函数

- 定义11.1.5 设f：A→B，如果存在一个y∈B，使得对所有的x∈A，有f(x)＝y，即有f[A]＝{y}，则称f：A→B为常函数．
- 定义11．1. 6 A上的恒等关系I_A：A→A称为恒等函数．于是，对任意的x∈A，有 I_A(x)＝x.
- 定义11.1. 7 对实数集R，设f：R→R，如果(x≤y)→(f(x)≤f(y))，则称f为单调递增的；如果(x<y)→(f(x)<f(y))，则称f为严格单调递增的．类似可定义单凋递减和严格单调递减的函数．

- 定义11．1. 8 对集合A，n∈N，把函数f：An→A称为A上的n元运算．

  运算是算术运算概念的推广．在代数结构课程中将对运算作深入研究，运算的例子有数字的运算，集合的运算，关系的运算，逻辑联结词是在{T，F}上的运算．
- 定义11．1．9 设A，B，C是集合，Bc为从B到C的所有函数的集合，则F：A→Bc称为一个泛函(有时G：Bc→A称为一个泛函)．

  泛函F也是函数，它把A的元素a映射到从B到C的函数f:B→C．即函数值F(a)是函数f：B→C．

- 例7 泛函F：$R \to R_R$，$F(a)=(f(x)=x+a)$．或写成 F：$a \mapsto [x \mapsto x+a]$.于是

  $F(2)$对应函数 $x \mapsto x+2$，

  $F(2)(3)=3+2=5$.

  $F(6)$对应函数 $x \mapsto x+6$，

  $F(6)(3)=3+6=9$.

泛函值$F(2)$有双重含义：一方面表示2下F的函数值为$F(2)$，另一方面这个值是一个函数$F(2)$：$R \to R$，$F(2)$：$x \mapsto x+2$.

- 定义11．1.10　设A是全集，对任意的ACE，A的特征函数X_A定义为：

$$X_A: E \to \{0, 1\}, \quad X_A(a)= \begin{cases} 1, a \in A \\ 0, a \notin A \end{cases}$$

- 例8　设E＝{a，b，c}，A＝{a，c}，则$X_A(a)=1$，$X_A(b)=0$，$X_A(c)=1$.
- 特征函数是集合的另一种表示方法，模糊集合论就是参照特征函数的思想，用隶属函数定义模糊集合.

- 定义11．1.11 设R是A上的等价关系，令g：A→A／R，$g(a)=[a]_R$，则称g为从A到商集A／R的典型映射或自然映射．
- 例9 设A={1，2，3}，R是A上的等价关系，它诱导的等价类是{1，2}，{3}则从A到A／R的自然映射g为

  g：{1，2，3}→{{1，2}，{3}}，

  g(1)＝{1，2}，g(2)＝{1，2}，g(3)={3}，

11．1．4 选择公理

- 选择公理(形式1) 对任意的关系R，存在函数f，使得f⊆R且dom(f)=dom(R).
- 选择公理是一个重要的数学公理，有时记作AC．选择公理还有其他的等价形式．这里的形式最直观，最容易理解．
- 一般的关系R不是函数，因为R不是单值的．也就是对某些x∈dom(R)，有多于一个y1，y2,...，使y1∈ran(R)，y2∈ran(R),...， 且<x，y1>∈R，<x,y2>∈R，...，这时x有多个值y1，y2，…与之对应.为了构造函数f，只要对任意的x∈dom(R)，从<x，y1>，<x，y2>，…中任取一个放入f中．则f是单值的，f⊆R，且有dom(f)＝dom(R)，f是函数f：dom(R)→ran(R)．因为多个有序对中可任选其一，所以构造的f可以有多个．

- 例10 设关系R＝{<1，a>，<1，b>，<2，b>}，则f1＝{<1，a>，<2，b>}和f2={<1，b>，<2，b>}都是满足条件的函数.

11.2 函数的合成与函数的逆

- 函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数．下面讨论函数的一些特殊性质．

11．2．1 函数的合成

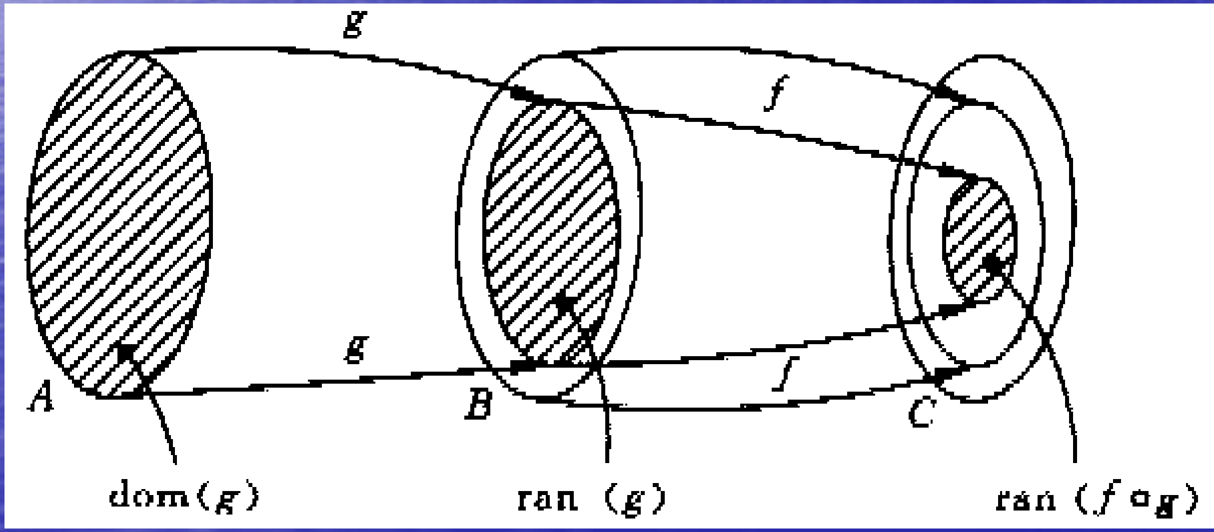
- 定理11．2．1 设g：A→B，f：B→C，则
  (1)f。g是函数f。g：A→C，
  (2)对任意的x∈A，有(f。g)(x)=f(g(x)).

证明 (1)因为g：A→B，则
(∀x)(x∈A→(∃y)(y∈B^<x,y>∈g))．又因f：B→C，则
(∀y)(y∈B→(∃z)(z∈C^<y，z>∈f))，由任意的x∈A，存在y∈B有<x，y>∈g，对y∈B存在z∈C有<y，z>∈f，因此对x∈A存在z∈C使<x，y>∈g^<y，z>∈f，使<x，z>∈f。g．所以dom(f。g)＝A，

假设对任意的x∈A，存在y1和y2，使得<x，y1>∈f。g且<x，y2>∈f。g．则
(∃t1)(∃t2)((xgt1^t1fy1)^(xgt2^t2fy2)).

因为g是函数，则t1＝t2，又因f是函数，则y1＝y2．所以f。g是函数．

(2)对任意的x∈A，因为<x，g(x)>∈g，<g(x)，f(g(x))>∈f，故<x，f(g(x))>∈f。g．又因f。g是函数，则可写为(f。g)(x)＝f(g(x))．函数的合成可以用图表示．从图中可见dom(g)=A，ran(g) ⊆B=dom(f)，ran(f) ⊆C．而dom(f。g)＝A，ran(f。g) ⊆C．



- 定理11．2．2 设g：A→B，f：B→C，则有

  (1)若f，g是满射的，则f。g是满射的，

  (2)若f。g是单射的，则f。g是单射的，

  (3)若f。g是双射的，则f。g是双射的.

证明

(1)对任意的z∈C，因为f是满射的，故∃y∈B，使f(y)＝z．对这个y∈B，因为g是满射的，故∃x∈A，使g(x)=y.所以，z＝f(y)＝f(g(x))=(f。g)(x)，f。g是满射的.

(2)对任意的z∈ran(f。g)，若存在x1，x2，使(f。g)(x1)=z且(f。g)(x2)＝z. 则存在y1，y2，使x1gy1^y1fz且x2gy2^y2fz. 因为f是单射的，故y1＝y2;又因g是单射的，故x1=x2。所以，f。g是单射的.

(3)由(1)、(2)得证.

- 这个定理的逆定理是否成立呢?请看下列定理.

- 定理11.2．3 设g：A→B，f：B→C，则有

  (1)若f。g是满射的，则f是满射的，

  (2)若f。g是单射的，则g是单射的，

  (3)若f。g是双射的，则f是满射的，g是单射的．

证明

(1)对任意的z∈C，因为f。g是满射的，故∃x∈A，使x(f。g)z．则∃y∈B，使xgy^

yfz．则∃y∈B，使f(y)＝z．f是满射的．

(2)对任意的$y \in ran(g)$，若存在$x1$，$x2 \in A$，使$x1gy \wedge x2gy$，即$g(x1)=y=g(x2)$．对这个$y \in B$，(因$ran(g) \subseteq B$)，存在$z \in C$，使得$f(y)=z$．则$f(g(x1))=z=f(g(x2))$，于是$x1(f \circ g)z \wedge x2(f \circ g)z$．因为$f \circ g$是单射的，故$x1=x2$．所以g是单射的．

(3)由(1)，(2)得证．

- 注意，当$f \circ g$是满射的，g不一定是满射的；当$f \circ g$是单射的，f不一定是单射的．

- 例1 设g：A→B，f：B→C，A＝{a}，B＝{b，d}，C={c}．且g＝{<a，b>}，f＝{<b，c>，<d，c>}，则f。g={<a，c>}．f。g是满射的，但是g不是满射的．
- 例2 设g：A→B，f：B→C，A＝{a}，B＝{b，d}，C＝{c}，且g＝{<a，b>}，f＝{<b，c>，<d，c>}，则f。g＝{<a，c>}，f。g是单射的，但是f不是单射的．

- 定理11. 2. 4 设f：A→B，则$f=f\circ I_A=I_B\circ f$.
- 证明留作思考题.

11. 2. 2 函数的逆

- 一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数.
- 例3 对A={a，b，c}. A上的关系R为

  R= {<a，b>，<a，c>，<a，a>}，

 从A到A的函数f为

  f={<a，c>，<b，c>，<c，a>}.

 则它们的逆为

  R^{-1}={<b，a>，<c，a>，<a，a>}是A到A的函数，

  f^{-1}={<c，a>，<c，b>，<a，c>}不是A到A的函数.

- 定理11．2．5 若f：A→B是双射的，则f^{-1}是函数f^{-1}：B→A

证明 对任意的y∈B，因为f是双射的，所以存在x∈A，使<x，y>∈f，<y，x>∈f^{-1}．所以，dom(f^{-1})＝B.

对任意的y∈B，若存在x1，x2∈A，使得<y，x1>∈f^{-1}且<y，x2>∈f^{-1}，则<x，y>∈f且<x2，y>∈f．因为f是双射的，故x1＝x2.所以，f^{-1}是函数f^{-1}：B→A.

- 定义11．2．1 设f：A→A是双射的，则称f^{-1}：B→A为f的反函数．
- 定理11．2．6 若f：A→B是双射的，则f^{-1}：B→A是双射的．

证明 对任意的x∈A，因为f是从A到B的函数，故存在y∈B，使<x，y>∈f,<y，x>∈f^{-1}．所以，f^{-1}是满射的．

对任意的x∈A，若存在y1，y2∈B，使得<y1，x>∈f^{-1}且<y2，x>∈f^{-1}，则有<x，y1>∈f且<x，y2>∈f．因为f是函数，则y1＝y2所以，f^{-1}是单射的，它是双射的，

- 例4　f：$[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,\ 1]$，$f(x)=\sin x$是双射函数．所以，$f^{-1}$：$[-1,\ 1]\to[-\pi/2,\pi/2]$，$f^{-1}(y)=\arcsin y$是f的反函数．

对实数集合R，正实数集合R_+.g：$R\to R_+$，$g(x)=2^x$是双射的．所以，g^{-1}：$R_+\to R$，$g^{-1}(y)=\log_2 y$是g的反函数．

- 定理11．2．7 若f：$A \rightarrow B$是双射的，则对任意的$x \in A$，有$f^{-1}(f(x))=x$，对任意的$y \in B$，有$f(f^{-1}(y))=y$。

证明 对任意的$x \in A$，因为f是函数，则有$<x, f(x)> \in f$，有$<f(x), x> \in f^{-1}$，因为f^{-1}是函数，则可写为$f^{-1}(f(x))=x$.

对任意的$y \in B$，类似可证$f(f^{-1}(y))=y$.

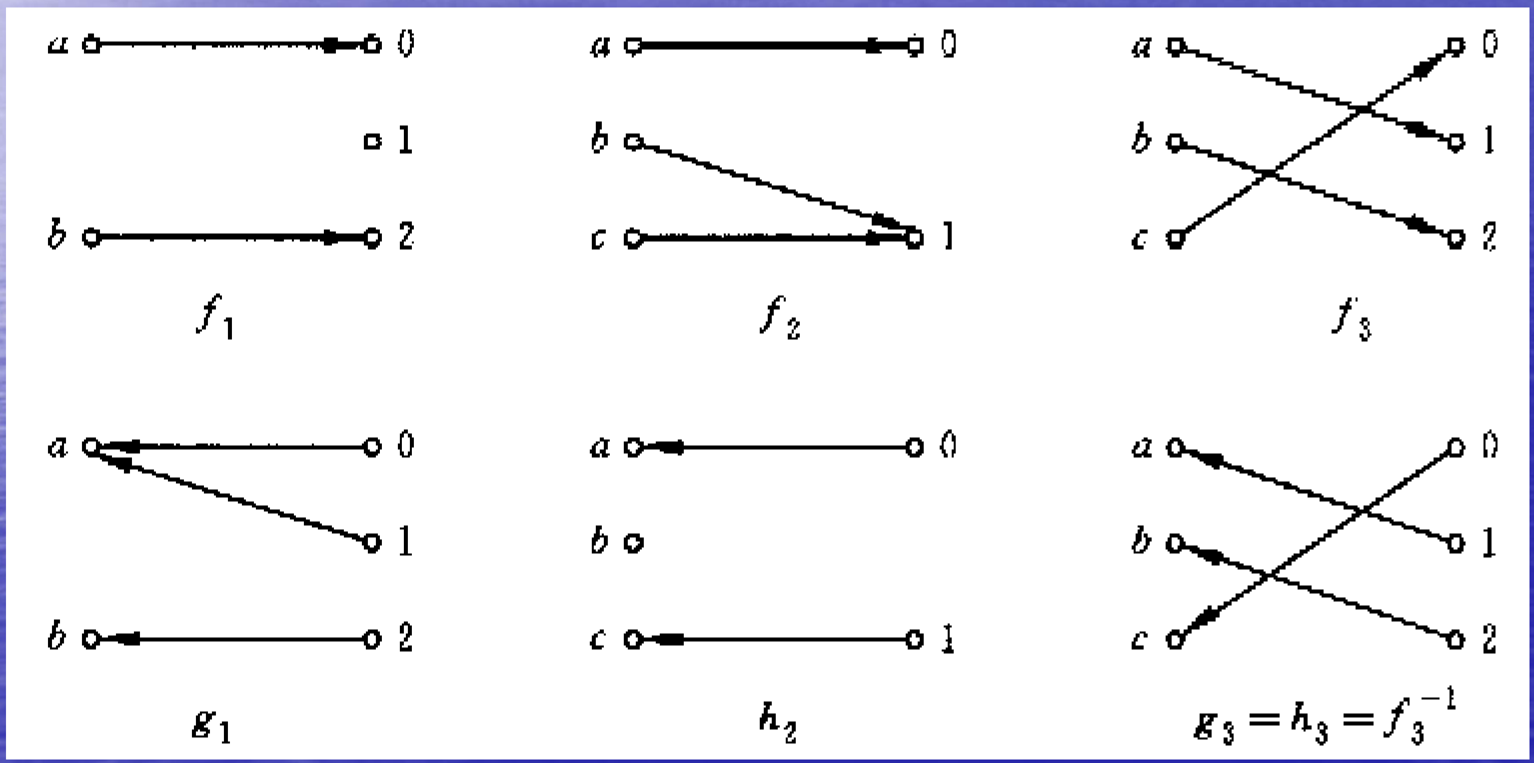
- 由定理，对任意的$x \in A$，$f^{-1}(f(x))=x$，则$(f^{-1} \circ f)(x)=x$，于是$f^{-1} \circ f=I_A$.同理也有，$f \circ f^{-1}=I_B$. 对非双射的函数f：$A \rightarrow B$，是否存在函数g：$B \rightarrow A$使$g \circ f=I_A$呢?是否存在函数h：$B \rightarrow A$使$f \circ h=I_B$呢?

- 定义11．2．2 设f：A→B，g：B→A，如果g。f$=I_A$，则称g为f的左逆；如果f。g$=I_B$，则称g为f的右逆．
- 例5 设 f1：{a，b}→{0，1，2}，

  f2：{a，b，c}→{0，1}，

  f3：{a，b，c}→{0，1，2}，

  如图所示，则f1存在左逆g1，不存在右逆．f2存在右逆h2，不存在左逆．f3即存在左逆g3，又存在右逆h3，且$g3=h3=f3^{-1}$．如图所示．



a
b
0
1
2
f_1
a
b
c
0
1
f_2
a
b
c
0
1
2
f_3
a
b
0
1
2
g_1
a
b
c
0
1
h_2
a
b
c
0
1
2
$g_3 = h_3 = f_3^{-1}$

- 定理11．2．8 设f：A→B，A≠Φ，则

  (1)f存在左逆，当且仅当f是单射的；

  (2)f存在右逆，当且仅当f是满射的；

  (3)f存在左逆又存在右逆，当且仅当f是双射的；

  (4)若f是双射的，则f的左逆等于右逆．

证明

(1)先证必要性．设存在x1，x2∈A，使得f(x1)＝f(x2)．设g为f的左逆，则x1＝(g。f)(x1)＝g(f(x1))＝g(f(x2))＝(g。f)(x2)=x2

所以，f是单射的．

再证充分性．因为f是单射的，所以$f: A \rightarrow ran(f)$是双射的，则$f^{-1}: ran(f) \rightarrow A$也是双射的．已知$A \neq \Phi$，则$\exists a \in A$，构造$g: B \rightarrow A$为

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当} y \in ran(f) \\ a, & \text{当} y \in B - ran(f) \end{cases}$$

显然，g是函数$g: B \rightarrow A$．对任一$x \in A$，有$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$，所以，$g \circ f = I_A$，g的构造如图，实箭头表示g，虚箭头表示f.

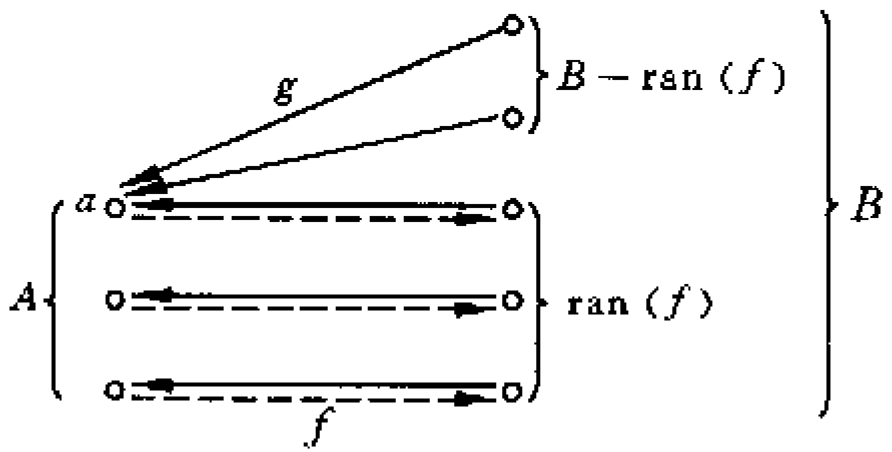


图 11.2.3　f 的左逆 g

(2)先证必要性．设f的右逆为h：$B \to A$，有$f \circ h = I_B$.则对任意的$y \in B$，存在$x \in A$，使$h(y)=x$，则$y = I_B(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y)) = f(x)$，所以，f是满射的．

- 再证充分性，(注意，不能取h＝f-1，因为f^{-1}不一定是函数，只是关系，)因为f是满射的，所以ran(f)=dom(f-1)＝B．依据选择公理，对关系f^{-1}，存在函数$h\subseteq f^{-1}$，且有dom(h)＝dom(f^{-1})=B，且ran(h)$\subseteq$ran(f^{-1})＝A．即h:B→A，对任意的y∈B，存在x∈A，使h(y)＝x且f(x)＝y．则

  (f。h)(y)＝f(h(y))=f(x)=y．

所以，f。h＝I_B，h是f的右逆．h的构造如图，实箭头表示h，虚箭头表示f.

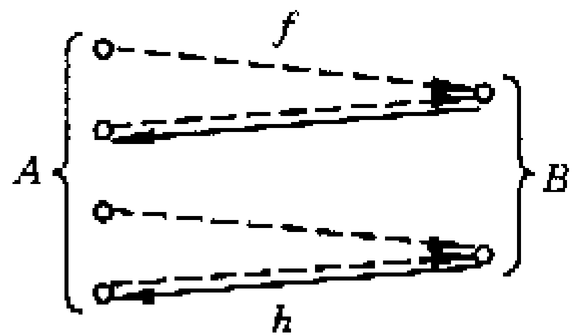


图 11.2.4　f 的右逆 h

(3)由(1)，(2)得证.

(4)设f的左逆为g：B→A，右逆为h：B→A，则$g \circ f=I_A$，$f \circ h=I_B$.

$g＝g \circ I_B＝g \circ (f \circ h)＝(g \circ f) \circ h=I_A \circ h=h$

所以，g＝h.