姓名 ____________ 学号 ____________ 成绩 ____________

一. （12 分） 单项选择题

1. 若集合 $A = \{a, b\}, B = \{a, b, \{a, b\}\}$，则 ____________
   - A. $A \in B$，但 $A \not\subset B$
   - **B. $A \subset B$，且 $A \in B$**
   - C. $A \subset B$，但 $A \notin B$
   - D. $A \not\subset B$，且 $A \notin B$
2. 假设集合 $A \subseteq B$，C 是任意一个集合，则以下 ____________ 不一定成立
   - A. $C \times A \subseteq C \times B$
   - **B. $\cap A \subseteq \cap B$**
   - C. $C \cap A \subseteq C \cap B$
   - D. $A - B \subseteq B - A$
3. 设集合 $A = \{a\}$，下式不成立的是 ____________
   - **A. $\{a\} \in PP(A)$**
   - B. $\{\varnothing\} \subseteq PP(A)$
   - C. $\{\varnothing, \{a\}\} \in PP(A)$
   - **D. $\{\varnothing, \{a\}\} \subseteq PP(A)$**
4. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的二元关系 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A \wedge a + b = 8\}$，则 R 具有的性质为 ____________
   - A. 自反的
   - **B. 对称的**
   - C. 对称和传递的
   - D. 反自反和传递的
5. 如果 R_1 和 R_2 是 A 上的自反关系，则 $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$ 中自反关系有 ____________ 个
   - A. 0
   - B. 1
   - **C. 2**
   - D. 3
6. $f \circ g \circ h$ 是双射，那么一定有 ____________
   - A. f 是单设，h 是满射
   - B. g 是满射，h 是单射
   - **C. f 是满射，h 是单射**
   - D. f 是单射，g 是单射

二. （12 分） 填空题

1. 设集合 $A = \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}, B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$，则 $A \oplus B =$ $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

2. A, B 为集合，化简 $A \cup ((B - A) - B) =$ $\underline{\quad A \quad}$
3. 设集合 $A = \{a, b, c\}$，A 上的二元关系

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle c, a\rangle\}, S = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$$

   则 $(R \circ S)^{-1} =$ $\underline{\{\langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle\}}$
4. 关系 $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$,则 $st(R)$ 为 $\underline{\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, c\rangle\}}$(其中 $s(R)$ 为 R 的对称闭包，$t(R)$ 为 R 的传递闭包)
5. 设集合 $A = \{1,\ 2\}, B = \{a,\ b\}$,那么集合 A 到 B 的双射函数是 $\underline{\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}}$ **或** $\underline{\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle\}}$
6. 设 f, g, h 是实数集上的函数，$f(x) = x^2 + x, g(x) = x + 4, h(x) = \frac{x}{3}$，则 $h \circ f \circ g =$ $\underline{\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{20}{3}, \frac{x^2+9x+20}{3}}$

三. （5 分） 证明: $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

答:

对任意的$\langle x, y\rangle \in (A \oplus B) \times C$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in A \oplus B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C) \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in A \times C \wedge \langle x, y\rangle \notin B \times C) \vee (\langle x, y\rangle \notin A \times C \wedge \langle x, y\rangle \in B \times C) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A \times C) \oplus (B \times C)
\end{aligned}$$

另证:

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \times C &= ((A - B) \cup (B - A)) \times C \\
&= ((A - B) \times C) \cup ((B - A) \times C) \\
&= ((A \times C) - (B \times C)) \cup ((B \times C) - (A \times C)) \\
&= (A \times C) \oplus (B \times C)
\end{aligned}$$

四. （5 分） 求 1 到 250 之间能被 2、3、5 中任何一个整除的整数的个数。

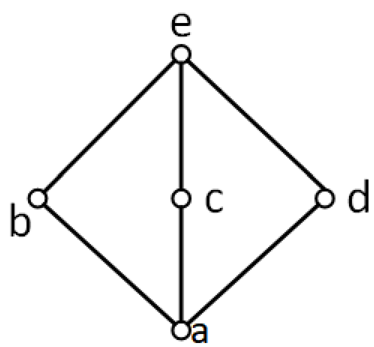
答: 设 A, B, C 表示 1 到 250 之间分别能被 2、3、5 整除的整数的个数，则有

$$\begin{aligned}
&|A| = 125, |B| = 83, |C| = 50 \\
&|A \cap B| = 41, |A \cap C| = 25, |B \cap C| = 16, |A \cap B \cap C| = 8 \\
&|A \cup B \cup C| \\
=&|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
=&125 + 83 + 50 - 41 - 25 - 16 + 8 \\
=&184
\end{aligned}$$

五.（5 分） 设 $A=\{a,b,c,d,e\}, \leq_A = I_A \cup \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}$，给出 $\langle A,\leq_A\rangle$ 的哈斯图，并指出极小元、极大元、最小元、最大元、下界、上界、下确界、上确界。

答:

1.



2. 极小元、最小元、下界、下确界为 a，极大元、最大元、上界、上确界为 e。

六.（5 分） 设 $A=\{1,2,\ldots,20\}, R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)\}$。证明 R 是 A 上的等价关系，并求商集 A/R。

答: $\forall x\in A, x=5k+i, 0\leq i\leq 4$，所以 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 5)$，即 xRx。

$\forall x,y\in A$，若 xRy，即 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)$，故有 $x=5k+i$ 且 $y=5m+i(0\leq i\leq 4)$，所以有 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ 5)$，即有 yRx。

$\forall x,y,z\in A$，若 xRy 且 yRz，则有 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 5)$ 和 $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 5)$，即有 $x=5k+i, y=5m+i, z=5n+i, 0\leq i\leq 4$，从而 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 5)$，故有 xRz。

综上 R 具有自反性、对称性、传递性，所以 R 是等价关系。

$$\begin{aligned} A/R &= \{[1]_R,[2]_R,[3]_R,[4]_R,[5]_R\} \\ &= \{\{1,6,11,16\},\{2,7,12,17\},\{3,8,13,18\},\{4,9,14,19\},\{5,10,15,20\}\} \end{aligned}$$

七.（6 分） 若非空集合 A 上的二元关系 R 和 S 是偏序关系，试证明：$R\cap S$ 也是 A 上的偏序关系。

答:

- $\forall x\in A, \langle x,x\rangle\in R, \langle x,x\rangle\in S \Rightarrow \langle x,x\rangle\in R\cap S$，所以 $R\cap S$ 有自反性。

- $\forall x, y \in A$，因为 R, S 是反对称的，

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in R \cap S \wedge \langle y, x\rangle \in R \cap S \\
&\Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S) \wedge (\langle y, x\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in S) \\
&\Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \wedge (\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, x\rangle \in S) \\
&\Leftrightarrow x = y \wedge y = x \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}$$

  所以 $R \cap S$ 有反对称性。

- $\forall x, y, z \in A$，因为 R, S 是传递的，

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in R \cap S \wedge \langle y, z\rangle \in R \cap S \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in S \\
&\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in S \\
&\Leftrightarrow \langle x, z\rangle \in R \cap S
\end{aligned}$$

  所以 $R \cap S$ 有传递性。综上 R 有偏序关系。