1 指出下列谓词公式中的量词及其辖域，指出各自由变元和约束变元，并回答它们是否是合式公式：

(1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge R$（R为命题常项）

(2) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)S(x) \to T(x)$

(3) $P(x) \to ((\forall y)(\exists x)(P(x) \wedge B(x,y)) \to P(x))$

答：

(1) 全称量词$\forall$，辖域$P(x) \vee Q(x)$, 其中x为约束变元，$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \wedge R$是合式公式。

(2) 全称量词$\forall$, 辖域$P(x) \wedge Q(x)$, 其中x为约束变元。
存在量词$\exists$, 辖域$S(x)$, 其中x为约束变元。
$T(x)$中x为自由变元。$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists x)S(x) \to T(x)$不是合式公式。

(3) 全称量词$\forall$，辖域$(\exists x)(P(x) \wedge B(x,y))$，其中$y$为约束变元.
存在量词$\exists$，辖域$P(x) \wedge B(x,y)$，其中x为约束变元.
不在量词辖域中的$P(x)$中的x为自由变元. $P(x) \to ((\forall y)(\exists x)(P(x) \wedge B(x,y)) \to P(x))$不是合式公式。

2 用谓词公式将下列语句形式化：

(1) 高斯是数学家，但不是文学家。

(2) 没有一个奇数是偶数。

(3) 一个数既是偶数又是质数，当且仅当该数为2.

(4) 发亮的东西不都是金子。

(5) 如果一个人不相信其他所有人，那么他也就不可能得到其他人的信任。

(6) 谁要是游戏人生，他就一事无成；谁不能主宰自己，他就是一个奴隶。（歌德）

答：

(1) $M(x)$表示“x是数学家”，$A(x)$表示“x是天文学家”，g表示“高斯”,原句可表示为

$$M(g) \wedge \neg A(g)$$

(2) $O(x)$表示“x是奇数”，$E(x)$表示“x是偶数” ,原句可表示为

$$\neg(\exists x)(O(x) \wedge E(x))$$

(3) $O(x)$表示“x是奇数”，$E(x)$表示“x是偶数” ,原句可表示为

$$(\forall x)(O(x) \wedge E(x) \leftrightarrow x = 2)$$

(4) $G(x)$表示“x是金子”，$L(x)$表示“x是发亮的” ,原句可表示为

$$\neg(\forall x)(L(x) \rightarrow G(x))$$

(5) $M(x)$表示“x是人”，$B(x, y)$表示“x相信y”， 原句可表示为

$$(\forall x)\left(M(x) \wedge \neg(\exists y)(M(y) \wedge x \neq y \wedge B(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y)(M(y) \wedge x \neq y \wedge B(y, x))\right)$$

(6) $M(x)$表示“x是人”，$K(x)$表示“x游戏人生”，$L(x)$ 表示“x一事无成”，$H(x, y)$表示“x主宰y”，$N(x)$表示“x是奴隶”，原句可表示为

$$(\forall x)(M(x) \wedge K(x) \rightarrow L(x)) \wedge (\forall x)(\neg H(x, x) \rightarrow N(x))$$

3 证明

(1) $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y)) = (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)$

(3) $(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) = (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$

答:

(1)

$$\begin{aligned}(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) &\Rightarrow \neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)\\ &\Rightarrow (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)Q(x)\\ &\Rightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))\\ &\Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\exists x)(\exists y)(P(x)\to Q(y)) &= (\exists x)(\exists y)(\neg P(x)\vee Q(y))\\
&= (\exists x)(\neg P(x)\vee(\exists y)Q(y))\\
&= (\exists x)\neg P(x)\vee(\exists y)Q(y)\\
&= \neg(\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y)\\
&= (\forall x)P(x)\to(\exists y)Q(y)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)(P(x)\to Q(y)) &= (\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))\\
&= (\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y))\\
&= (\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)\\
&= \neg(\exists x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)\\
&= (\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y)
\end{aligned}
$$

4 求下列各式的前束范式及Skolem标准形(只含$\forall$)：

(1) $\neg(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(y)$

(2) $\neg(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(y)$

(3) $(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x,y,z)\leftrightarrow(\exists z)Q(x,y,z))$

(4) $(\exists x)(\neg(\exists y)P(x,y)\to((\exists z)Q(z)\to R(x)))$

答:

(1)

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(y) &= (\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)\neg Q(y))\\
&= (\exists x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y))
\end{aligned}
$$

Skolem标准形：

$$(\forall y)(P(a)\wedge Q(y))$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\neg(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y) &= (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y)) \\
&= (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(x,y))
\end{aligned}
$$

Skolem标准形:

$$(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x, f(x)))$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x,y,z) \leftrightarrow (\exists z)Q(x,y,z)) \\
=&(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x,y,z) \to (\exists z)Q(x,y,z) \wedge ((\exists z)(Q(x,y,z) \to (\exists z)(P(x,y,z))) \\
=&(\forall x)(\forall y)((\neg(\exists z)P(x,y,z) \vee (\exists z)Q(x,y,z)) \wedge (\neg(\exists z)Q(x,y,z) \vee (\exists z)P(x,y,z))) \\
=&(\forall x)(\forall y)(((\forall z)\neg P(x,y,z) \vee (\exists u)Q(x,y,u)) \wedge ((\forall v)\neg Q(x,y,v) \vee (\exists w)P(x,y,w))) \\
=&(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)((\neg P(x,y,z) \vee Q(x,y,u)) \wedge (\neg Q(x,y,v) \vee P(x,y,w)))
\end{aligned}
$$

Skolem标准形:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall v)((\neg P(x,y,z) \vee Q(x,y,f(x,y,z))) \wedge (\neg Q(x,y,v) \vee P(x,y,g(x,y,z,v))))$$

(4)

$$
\begin{aligned}
(\exists x)(\neg(\exists y)P(x,y) \to ((\exists z)Q(z) \to R(x))) &= (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee (\neg(\exists z)Q(z) \vee R(x))) \\
&= (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee ((\forall z)\neg Q(z) \vee R(x))) \\
&= (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee (\forall z)(\neg Q(z) \vee R(x))) \\
&= (\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))
\end{aligned}
$$

Skolem标准形：

$$(\forall z)(P(a,b) \vee \neg Q(z) \vee R(a))$$

5 证明下列命题推得的结论有效：

(1) 只要今天天气不好，就一定有考生不能提前进入考场；当且仅当所有凯盛提前进入考场，考试才能准时进行。故若考试准时进行，那么天气就好。

(2) 凡15的倍数都是3的倍数，凡15的倍数都是5的倍数，所以有些5的倍数是3的倍数。

答:

(1) 设个体域D: 所有考生，P: 今天天气好，Q: 考试准时进行，$A(x)$: x提前进入考场，该推理就是要证明: $\neg P \to \neg(\exists x)\neg A(x), (\forall x)A(x) \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \to P$

(1)$\neg P \to (\exists x)\neg A(x)$	前提引入
(2)$\neg P \to \neg(\forall x)A(x)$	(1)置换
(3)$(\forall x)A(x) \to P$	(2)置换
(4)$(\forall)xA(x) \leftrightarrow Q$	前提引入
(5)$((\forall x)A(x) \to Q) \wedge (Q \to (\forall x)A(x))$	(4)置换
(6)$Q \to (\forall x)A(x)$	(5)
(7)$Q \to P$	(6)(3)三段论

(2) 设个体域为整数集，$D(x,y) : x/y$flp. 该推理就是要证明：$(\forall x)D(x,15) \to D(x,3)), (\forall x)D(x,15) \to D(x,5)), (\exists x)D(x,15) \Rightarrow (\exists x)(D(x,5) \wedge D(x,3))$

(1)$(\exists x)D(x,15)$	前提引入
(2)$D(a,15)$	(1)存在量词消去
(3)$(\forall x)D(x,15) \to D(x,3))$	前提引入
(4)$D(a,15) \to D(a,3)$	(3) 存在量词消去
(5)$D(a,3)$	(4)(2)分离
(6)$(\forall x)D(x,15) \to D(x,5))$	前提引入
(7)$D(a,15) \to D(a,5)$	(6) 存在量词消去
(8)$D(a,5)$	(2)(7) 分离
(9)$D(a,5) \wedge D(a,3)$	(5)(8)
(10)$(\exists x)(D(x,5) \wedge D(x,3))$	(9) 存在量词引入