1 证明 9 个人之中若非至少有 4 个人相互认识，则至少有 3 个人相互不认识。

引理： 六个人中必有三个人相互认识或相互不认识。

引理证明： 设其中一人为 A。若 A 认识其中三个人，则若三个人之间相互不认识，得证。若三人之中有两人相互认识，则加上 A，三人相互认识。若 A 不认识其中三个人，则若三个人之间相互认识，得证。若三人之中有两人相互不认识，则加上 A，三人相互不认识。 □

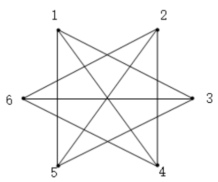
证明： 设其中一人为 A. 若 A 不认识其中四个人，则：若四个人相互认识，存在 4 个人相互认识；若四个人中有两人相互不认识，则加上 A，存在 3 个人相互不认识。

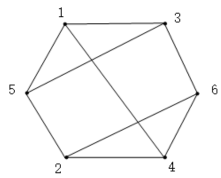
若 A 认识至少五个人，则对其余八人依次分析，若其中有人不认识其中四个人，则类似可证。

若全部九个人都认识至少五个人，则至少有一个人认识至少六个人（图中度为奇数的节点必有偶数个）。则由引理易证。 □

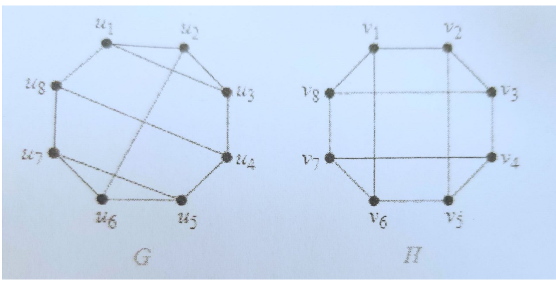
2 6 个人围成圆形就坐，每个人恰好只与相邻者不认识，是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识?

答： 可以。原题可转化为寻找同构图的问题。由以下两图同构可得。





3 判断下面两图是否同构。是，找出映射；否，说明理由。



答： 不同构。图 G 中由 u_1, u_2, u_3 构成的导出子图，图 H 不存在同构的导出子图。

4 设 G 是不存在三角形的简单图，证明：

1. $\sum d^2(v_i) \leq mn$;

2. $m \le \frac{n^2}{4}$.

答： 1. 对图中一条边，记其端点为 v_i, v_j，由于图中不存在三角形，有：

$$d(v_i) + d(v_j) \le n$$

对所有边列出上式相加，可得

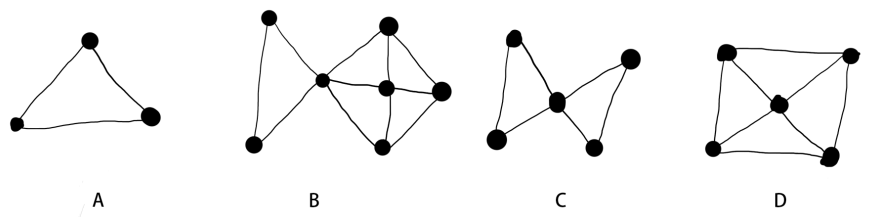
$$\sum d^2(v_i) \le mn$$

左边为 $\sum d^2(v_i)$ 是因为值为 $d(v_i)$ 的项恰被计算了 $d(v_i)$ 次。

2. 设图中度最大的一个节点 v_0 度为 k $(0 \le k \le n-1)$. 则可以将所有节点分为三类：v_0, 和 v_0 直接相连的 k 个节点，和其他的 $(n-1-k)$ 个节点。图中的边有两类：和 v_0 直接相连的边，共有 k 条；以及和第三类的 $(n-1-k)$ 个节点相连的边，最多有 $k \times (n-1-k)$ 条。故

$$\begin{aligned} m &\le k + k \times (n-1-k) \\ &= k \times (n-k) \\ &\le \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

5 下列各图中，既没有欧拉回路也没有哈密顿回路的图是 B



6 设 G 是有 n 个节点的简单图 (n>2 且 n 为奇数)。证明：G 与 $\bar{G}$ 中奇数度节点个数相等。

证明： 设 $v_1, v_2, \ldots, v_i$ 为图 G 的奇数度节点，$v_{i+1}, \ldots, v_n$ 为偶数度节点。则补图 $\bar{G}$ 中，$v_1, v_2, \ldots, v_i$ 的度

$$d'(v_i) = n - 1 - d(v_i)$$

为奇数，因为 n 是奇数，且 $d(v_i)$ 也是奇数。同理，$d'(v_{i+1}), \ldots, d'(v_n)$ 均是偶数。

故图 G 与 $\bar{G}$ 的奇数度节点个数相等。 □