作业8参考答案

3. 说明：

   1. 题目意思是分别用只有↑和↓来表示
   2. 与或和异或不满足结合律，即

      $$(P \uparrow Q) \uparrow R \neq P \uparrow (Q \uparrow R)$$

      因为

      $$\begin{aligned}(P \uparrow Q) \uparrow R &= \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge R) \\ &= (P \wedge Q) \vee \neg R \\ &= (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R)\end{aligned}$$

      而

      $$\begin{aligned}P \uparrow (Q \uparrow R) &= \neg(P \wedge \neg(Q \wedge R)) \\ &= \neg P \vee (Q \wedge R) \\ &= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)\end{aligned}$$

3. 用↑和↓分别表示出¬，∧，∨，→和↔.

解：

(1) 用↑表示

$$\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$$

$$P \wedge Q = \neg(\neg(P \wedge Q)) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$$

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q = P \uparrow (Q \uparrow Q)$$

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q)) \\ &= \neg((P \uparrow Q) \wedge (\neg P \uparrow \neg Q)) = (P \uparrow Q) \uparrow (\neg P \uparrow \neg Q) \\ &= (P \uparrow Q) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = (P \uparrow \neg Q) \wedge (Q \uparrow \neg P) \\ &= (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \wedge (Q \uparrow (P \uparrow P)) \\ &= ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \end{aligned}$$

(2) 用↓表示

$$\neg P = \neg(P \vee P) = P \downarrow P$$

$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q) = (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$$

$$P \vee Q = \neg(\neg(P \vee Q)) = \neg(P \downarrow Q) = (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q = ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)$$

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) = \neg(\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q)) \\ &= \neg((P \downarrow (\neg Q)) \vee ((\neg P) \downarrow Q)) \\ &= ((P \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(P \vee Q) \\ &= (\neg P \downarrow \neg Q) \vee (P \downarrow Q) = ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \vee (P \downarrow Q) \\ &= (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \downarrow (((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow (P \downarrow Q)) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\ &= ((\neg P \downarrow Q) \downarrow (\neg P \downarrow Q)) \wedge ((\neg Q \downarrow P) \downarrow (\neg Q \downarrow P)) \\ &= ((((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)) \downarrow (((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q))) \\ &\quad \downarrow ((((Q \downarrow Q) \downarrow P) \downarrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P)) \downarrow (((Q \downarrow Q) \downarrow P) \downarrow ((Q \downarrow Q) \downarrow P))) \end{aligned}$$

4.

(2) 若 $A \leftrightarrow B$ 永真,则$\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真.

由$\neg A = A^{*-}$,$\neg B = B^{*-}$,得 $A^{*-} \leftrightarrow B^{*-}$ 永真.

即 $A^{*} \leftrightarrow B^{*}$ 永真.

反之,若 $B^{*} \leftrightarrow A^{*}$ 永真,则$(A^{*})^{*} \leftrightarrow (B^{*})^{*}$ 永真.

由 $A=(A^{*})^{*}$,$B=(B^{*})^{*}$,得 $A \leftrightarrow B$ 永真.

因此,$A \leftrightarrow B$ 与 $A^{*} \leftrightarrow B^{*}$ 同永真.

显然,$A \leftrightarrow B$ 与 $A^{*} \leftrightarrow B^{*}$ 同可满足.

5.

(8) $(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)$

合取范式:$(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) = \neg P \vee Q$

析取范式:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) \\
=& (P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) \\
=& (\neg P \vee Q) \vee ((Q \wedge P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)) \\
& \vee (\neg (Q \wedge P) \wedge \neg ((Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge P))) \\
=& \neg P \vee Q \vee (Q \wedge P \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee ((\neg Q \vee \neg P) \\
& \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)) \\
=& \neg P \vee Q \vee ((\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)) \\
=& \neg P \vee Q
\end{aligned}
$$

主合取范式:$(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) = \neg P \vee Q = \bigwedge_{1}$

主析取范式:$(P \to Q) \vee (Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P) = \bigwedge_{1} = \bigvee_{0,1,3}$

在 $\begin{cases} P=\mathrm{T} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{F} \\ Q=\mathrm{T} \end{cases}$, $\begin{cases} P=\mathrm{F} \\ Q=\mathrm{F} \end{cases}$ 三种解释下该式为真.

注意: 合取范式和析取范式不唯一.