1 写出下列命题的真假，并证明你的结论：

(1) 若$A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则$A \times C \subseteq B \times D$

(2) 如果$A \subset C$且$A \subseteq B \subseteq C$, 则至少有$A \subset B$或者$B \subset C$

(3) 对于任意三个集合A, B和C，$(A \oplus B) \cup C = (A \cup C) \oplus (B \cup C)$

(4) 对于任意两个集合A和B，$B - (B - A) = A$

证：

(1) 真。假设$\langle a, c\rangle \in A \times C$. 因为$A \subseteq B$，于是$a \in B$。同样的, 由$c \in C$且$C \subseteq D$可以得到$c \in D$. 因此$a \in C, c \in D$可以得到$\langle a, c\rangle \in B \times D$. 于是可以证明$A \times C \subseteq B \times D$. $\square$

(2) 真。假设$A \not\subset B$且$B \not\subset C$, 则一定有$A = B$且$B = C$, 那么$A = C$, 与$A \subset C$矛盾. $\square$

(3) 假。令$A = \varnothing, B = \varnothing, C = \{\varnothing\}$, 则$(A \oplus B) \cup C = (\varnothing \oplus \varnothing) \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$, 而$(A \cup C) \oplus (B \cup C) = (\varnothing \cup \{\varnothing\}) \oplus (\varnothing \cup \{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \oplus \{\varnothing\} = \varnothing$. $\square$

(4) 假。令$A = \{2, 3\}, B = \{1, 2\}$，那么$B - (B - A) = B - \{1\} = \{2\} \neq A$. $\square$

2 假设A, B, C均为任意集合，证明以下命题：

(1) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$

(2) $A - (A - B) = A \cap B$

(3) $(A = \varnothing \vee B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \times B) = \varnothing$

证：

(1) 必要性:
假设$C \subset A$, 则$A \cup C = A$, 于是有

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

充分性:
假设$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$，那么根据假设有：

$$\begin{aligned} x \in C \Rightarrow x &\in \{x \mid x \in A \cap B \vee x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cup C \\ &= A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} x \in C &\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

即$C \subset A$. □

(2)

$$\begin{aligned} A - (A - B) = A - (A \cap -B) = \{x \mid x \in A \wedge \wedge x \notin A \cap -B\} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap -B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin -B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B \end{aligned}$$

□

(3) 充分性：

假设$A = \varnothing$，考虑$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$，因为没有$a \in A$，所以$\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\} = \varnothing$

必要性:

反证。假设$A \neq \varnothing$且$B \neq \varnothing$，但是$A \times X = \varnothing$。因为$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$，所以必然存在$a \in A$和$b \in B$，于是$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq P(A \cup B)$, 得到 $\langle a, b\rangle \in A \times B$，与$A \times B = \varnothing$矛盾。□

3 A, B是有限集合，已知$|A| = 3, |P(B)| = 64, |P(A \cup B)| = 256$，求$|B|, |A \cap B|, |A - B|, |A \oplus B|$。

解： 由$|P(B)| = 64 = 2^6$，得$|B| = 6$

由$|P(A \cup B)| = 256 = 2^8$，得$|A \cup B| = 8$

由容斥原理得

$$\begin{aligned} &|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ \Rightarrow &|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 3 + 6 - 8 = 1 \end{aligned}$$

即$|A \cap B| = 1$

$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 3 - 1 = 2$
$|A \oplus B| = |A \cup B| - |A \cap B| = 8 - 2 = 6$

在集合论公理系统中讨论4～6：

4 证明$\{x \mid x = x\}$不是集合。

证: 假设存在集合$c = \{x \mid x = x\}$。因为$c = c$为真，于是可以得到$c \in c$，与正则公理矛盾(定理9.7.6)。□

5 证明不存在集合$a = \{a, \varnothing\}$

证： 用反证法证明。直接使用正则公理无法导出矛盾，于是我们先应用子集公理。由子集公理存在集合$a_0 = \{z \mid z \in a \wedge z = a\} = \{a\}$。由正则公理可知存在$b \in a_0$且$a_0 \cap b = \varnothing$。因为$a$是$a_0$唯一的元素，即$a_0 \cap a = \varnothing$。但是这显然与$a \in a_0 \cap a$矛盾。□

6 对m使用数学归纳法证明：

$$\forall m \forall n (n \in m \to n^+ \in m \vee n^+ = m)$$

证:

1. $m = 0$时显然成立，因为$n \in 0$为假
2. 假设$n \in m \to n^+ \in m \vee n^+ = m$成立，我们需要证明$n \in m^+ \to n^+ \in m^+ \vee n^+ = m^+$。于是$n \in m^+$的前提有两种情况需要讨论

   (1) $n = m$, 可以立即得到$n^+ = m^+$，证明完毕

   (2) $n \in m$，由归纳假设有$n^+ \in m \vee n^+ = m$，两种情况都能得到$n^+ \in m^+ = m \cup \{m\}$.

   由数学归纳法可知命题成立。□