姓名________________ 学号________________ 成绩________________

一、 选择题(12分，每题2分)

1. 在一个有向图中，所有顶点的入度之和等于所有边的(B)倍。

   A. 1/2

   B. 1

   C. 2

   D. 4

2. 设图G的邻接矩阵为
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
   则下列说法正确的是(D)。

   A. G有5个顶点

   B. G有4条边

   C. G没有自环

   D. G没有重边

3. 图G为哈密顿图的必要条件是G为(D)

   A. 欧拉图

   B. 树

   C. 完全图

   D. 连通图

4. 下面哪种描述的简单图不一定是树(C)

   A. 无回路的连通图

   B. 有n个结点，$n-1$条边的连通图

   C. 每对结点都连通的图

   D. 连通但删去一条边则不连通的图

5. 若一棵完全二叉树有$2n-1$个结点，则它的树叶数是(A)

   A. n

B. $2n$

C. $n-1$

D. 2

6. 连通图G是一棵树，当且仅当G中(B)

A. 有些边不是割边

B. 所有边都是割边

C. 无割边集

D. 每条边都不是割边

二、 填空题(10分，每题2分)

1. 一棵树T有5个度为2的结点，3个度为3的结点，4个度为4的结点，2个度为5的结点，其余均是度为1的结点，问T有__19__个度为1的结点。

2. 若图$G=(V,E)$具有一条哈密顿回路，则对于结点集V的每个非空子集S，在G中删除S中所有的结点所得到的连通支数为W，则S中结点数$|S|$与W满足的关系是__$W\leq|S|$__。

3. 若一个无向图有5个结点，如果它的补图是连通图，那么这个无向图最多有__6__条边。

4. 设G是具有8个顶点的树，则G中增加__21__条边才能把G变成完全图。

5. n个结点的森林由k棵树组成，该森林有__$n-k$__条边。

三、(7分) 证明:在至少有2个人的人群中，至少有2个人，他们有相同的朋友数。

证： 用结点表示人，用边表示两人是朋友关系，可以构造图G。 1分

1. 当只有两个人时，要么互相认识要么互相不认识，所以有相同的朋友数。 2分

2. 当$n>2$时

   (a) 若图G不存在孤立点，即所有人至少认识一个人，各结点的度$1\leq d(v_i)\leq n-1$。由抽屉原理可知，n个结点中至少有2个结点有相同的度。 5分

   (b) 若图G只存在一个孤立结点v_0, 则$G-v_0$满足情况(a)的条件，存在至少2个结点有相同的度。 6分

   (c) 若图G中存在k个孤立结点,$k\geq 2$，则孤立结点的度相同。 7分

故得证。

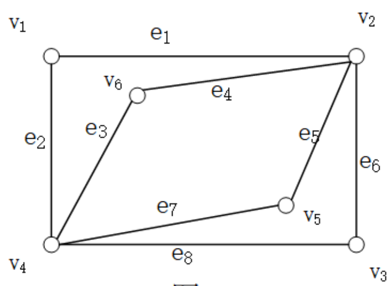
另证： 在n个点的度数$0\leq d\leq n-1$。但是不可能同时有一个点度数为$n-1$且有另一个点度数为0，因为如果点度数为$n-1$则表示该点与其他所有点都有边相连。

因此n个点的度数$0\leq d\leq n-1$或$1\leq d\leq n-2$。这两种情况度数均只有$n-1$个可能的值，而图中有n个点，由抽屉原理可知其中至少两个点的度数相等。故得证。

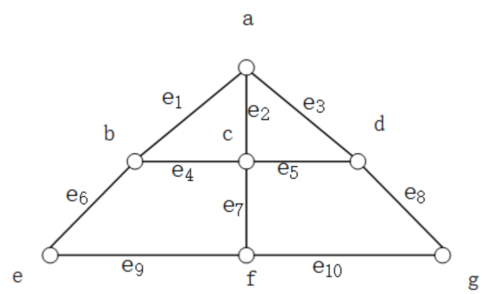
四、(7分) 给定两个图G_1, G_2（如下图所示）：

(1) 试判断它们是否为欧拉图、哈密顿图？并说明理由。

(2) 若是欧拉图，请写出一条欧拉回路。



图G_1



图G_2

解：

(1) G_1是欧拉图，因为$\forall v_i(1 \leq i \leq 6), d(v_i)$为偶数。
G_1不是哈密顿图，令$S = v_2, v_4$，则$G_1 - S$的连通分支数$W = 4 >| S |= 2$，与哈密顿回路必要性定理矛盾。
2.5分

G_2不是欧拉图，因为存在奇数度的结点。
G_2是哈密顿图，因为存在哈密顿回路$(a, e_1, b, e_6, e, e_9, f, e_{10}, g, e_8, d, e_5, c, e_2, a)$。 5分

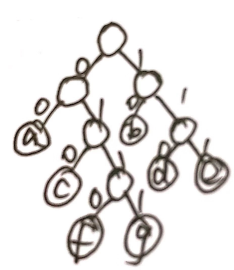
(2) 存在欧拉回路$(v_1, e_1, v_2, e_6, v_3, e_8, v_4, e_7, v_5, e_5, v_2, e_4, v_6, e_3, v_4, e_2, v_1)$。 7分

五、(7分) 设7个字母在通信中出现的频率如下:

a: 32%, b: 20%, c: 15%, d: 10%, e: 10%, f: 8%, g: 5%。

用Huffman算法求每个字母的最佳前缀码。
传输10000个按上述比例出现的字母需要传输多少个二进制数位？

答： Huffman树结构：



....3 分

最佳前缀码（答案不唯一）：

$$a : 00$$
$$b : 10$$
$$c : 011$$
$$d : 110$$
$$e : 111$$
$$f : 0101$$
$$g : 0100$$

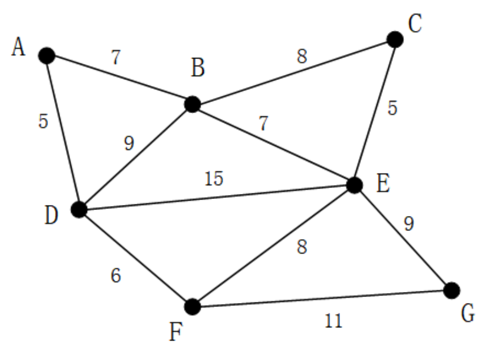
. . . . 5 分

需要二进制数位：

$$10000 * (0.32 \times 2 + 0.20 \times 2 + 0.15 \times 3 + 0.10 * 3 + 0.10 * 3 + 0.08 * 4 + 0.05 * 4) = 26100$$

. . . . 7 分

六、(7分) 用Kruscal或者Prim算法求下图的最小生成树（写出算法生成该树的每步过程），并计算该树中所有边的权值之和。



答：

- Krustal: 加边顺序：CE(AD) AD(CE) DF AB(BE) BE(AB) EG 5分
- Prim: （假设从A点开始, 答案不唯一）AD DF AB BE CE EG 5分

权值和：39 . . . . 7分