作业16参考答案

12.

对任意的$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in R_1 \upharpoonright (A_1 \cup A_2)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1 \land x \in A_1 \cup A_2$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1 \land (x \in A_1 \lor x \in A_2)$

$\Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R_1 \land x \in A_1) \lor (\langle x, y\rangle \in R_1 \land x \in A_2)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1 \upharpoonright A_1 \lor \langle x, y\rangle \in R_1 \upharpoonright A_2$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1 \upharpoonright A_1 \cup R_1 \upharpoonright A_2$

所以，$R_1 \upharpoonright (A_1 \cup A_2) = R_1 \upharpoonright A_1 \cup R_1 \upharpoonright A_2$.

14.

解：由定义：

R 是 A 上对称的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in A \land y\in A \land xRy)\to yRx)$

R 是 A 上传递的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in A \land y\in A \land z\in A \land xRy \land yRz)\to xRz)$

R 是 A 上自反的$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\to xRx)$

因此，R 是 A 上对称的和传递的$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((x\in A \land y\in A \land xRy)\to xRx)$

因而，R 是 A 上对称的和传递的，但不一定是自反的.

例如，$R=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

15.

解：R_1 无任何关系

R_2 反对称、传递

R_3 对称、自反、传递

R_4 自反、传递

R_5 无任何关系

R_6 对称、非自反

R_7 反对称、非自反

R_8 对称、自反

17.

(2) 设 R 是非自反的,对任意的 $\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in I_A\Leftrightarrow x=y\Rightarrow\langle x,y\rangle\notin R$,即 $I_A\cap R=\varnothing$.

设 $I_A\cap R=\varnothing$,对任意的 x

$\langle x,x\rangle\in I_A\Rightarrow\langle x,x\rangle\notin R$,即 R 是非自反的.

因而,R 是非自反的$\Leftrightarrow I_A\cap R=\varnothing$.

18.

(4) 该命题为假.

例如:

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$,$R_2=\{\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,

$R_1\circ R_2=\{\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$.

21.

解: 由图可知

$$M(R_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ M(R_1^2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$M(R_1^3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ M(R_1^4)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

所以,$R_1^k=R_1^{k+3}$.

$$M(R_2)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\ M(R_2^2)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_2^3)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},\ M(R_2^4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$M(R_2^5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ M(R_2^6)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以,$R_2^k=R_2^{k+5}$.

$$M(R)=\begin{pmatrix}M(R_1)&0\\0&M(R_2)\end{pmatrix}$$

由 $R^m=R^n$ 可知,$M(R^m)=\begin{pmatrix}M(R_1^m)&0\\0&M(R_2^m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M(R_1^n)&0\\0&M(R_2^n)\end{pmatrix}=M(R^n)$,

即 $R_1^m=R_1^n$ 且 $R_2^m=R_2^n$.

因此,满足 $m<n$ 且 $R^m=R^n$ 的最小自然数为 $m=0,n=3\times5=15$.

22.

解： $R_1 \circ R_2 = \{\langle c, d\rangle\}$,

$R_2 \circ R_1 = \{\langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle\}$,

$R_1^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle\}$,

$R_2^2 = \{\langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$.