Hilfszettel zur Klausur
von Tim S., Seite 1 von 2

1 Information Theory

Information Content (Surprisal)

$-log_2 p(x)$: the more frequent the word, the lower its information content. e.g. the word type "blue" occurs ca. 3750 times in 10000 tokens, and its information content is $-log_2(3750/10000) \approx 1.42$ bits.

Shannon Entropy

$H(X) = -\sum p(x) log_2 p(x)$: entropy as probability, the average information content of information encoding units in the language. Measure of information encoding potential of a symbol system. The higher the uncertainty, the larger the entropy. e.g. $H_{char}(Morse) = -(\frac{86}{136} * log_2(\frac{86}{136}) + \frac{50}{136} * log_2(\frac{50}{136})) \approx 0.949$ bits per character.

Joint Entropy, Conditional Entropy

Joint Entropy: $H(X,Y) = -\sum\sum p(x,y) log_2 p(x,y)$

Conditional Entropy: $H(Y|X) = -\sum p(x) \sum p(y|x) log_2 p(y|x)$ The more ambiguity in language (uncertainty), the higher conditional entropy. No ambiguity -> 0.

Probability Estimation

Maximum Likelihood (ML)

Problems: unit problem, sample size problem, interdependence problem, extrapolation problem

Methods: frequency-based, language models, experiments with humans

Mutual Information

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$

reduction in the uncertainty of X given Y. compromise between minimum learning cost H(Y) and maximum expliciteness I(X; Y).

Entropy is the upper bound on the mutual information between forms and meanings

Is the entropy rate zero? -> asymptotic determinism of human utterances.

2 Propositional Logic

Why formal logic? overcome ambiguity, determine relationships between meanings of sentences, determine meanings of setences, model compositionality, recursive system.

Definition

Proposition: The meaning of a simple declarative sentence

Extensions: real-world situations they refer to.

Frege's Generalization: The extension of a sentence S is its truth value

The proposition expressed by a sentence is the set of possible cases [situations] of which that sentence is true.

propositional variables: p, q, r... propositional operators: $\neg$, $conjunction \wedge$, $disjunction \vee$, XOR, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Syntax: Recursive Definition

1. Propositional letters in the vocabulary of L are formulas in L.
2. If ϕ is a formula in L, then $\neg\phi$ is too.
3. If ϕ and ψ are formulas in L, then $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ are too.
4. Only that which can be generated by the clauses (i)-(iii) in a finite number of steps is a formula in L.

invalid: $\neg(\neg\neg p), \neg((p \wedge q))$

Construction Trees

$(\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg q) \leftrightarrow r\ (iii. \leftrightarrow)$

$(\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg q)\ (iii. \rightarrow)$ $\quad r (i)$

$\neg(p \vee q)\ (ii)$ $\quad \neg\neg q$ (ii)

$p \vee q\ (iii. \vee)$ $\quad \neg q$ (ii)

p (i) $\quad q$ (i) $\quad q$ (i)

3 Predicate Logic

Definition

constant symbols: a, b, c, ...
variable symbols: x, y, z, ...
n-ary/n-place predicate symbols: A, B, C, reflect relations between n elements (n>0)
connectives: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, ...$
quantifiers: $\forall, \exists$
round brackets (), equal sign =

Syntax: Recursive Definition

1. If A is an n-ary predicate letter in the vocabulary of L, and each of t1,..., tn is a constant or a variable in the vocabulary of L, then At1,..., tn is a formula in L.
2. If ϕ is a formula in L, then $\neg\phi$ is too.
3. If ϕ and ψ are formulas in L, then $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ are too.
4. If ϕ is a formula in L and x is a variable, then $\forall x\phi$ and $\exists x\phi$ is too.
5. Only that which can be generated by the clauses (i)-(iv) in a finite number of steps is a formula in L.

invalid: $a, A, \forall(Axy)$

Construction Trees

$\forall_x \forall_y ((A_{xy} \wedge B_y) \rightarrow \exists_x A_{xb})\ (iv.\forall)$

$\forall_y ((A_{xy} \wedge B_y) \rightarrow \exists_x A_{xb})\ (iv.\forall)$

$(A_{xy} \wedge B_y) \rightarrow \exists_x A_{xb}\ (iii. \rightarrow)$

$A_{xy} \wedge B_y\ (iii.\wedge)$ $\quad \exists_x A_{xb}\ (iv.\exists)$

A_{xy} (i) $\quad B_y$ (i) $\quad A_{xb}$ (i)

Semantics

domain (D): set of entities

interpretation functions I = $\{< m, e >, < s, e >, < v, e >\}$, I(m) = e, I(s) = e, I(v) = e.

model M: consists of a domain D and an interpretation function I which conforms to:

1. if c is a constant in L, then I(c) $\in$ D
2. if B is an n-ary prpedicate letter in L, then I(B) $\subset$ D

valuation function V_M:

If Aa1,...,an is an atomic sentence in L, then V_M(Aa1,...,an) = 1 iff <I(a1), ..., I(an)> $\in$ I(A).

...

$V_M(\forall x\phi) = 1$ iff $V_M([c/x]\phi) = 1$ for all constants c in L.

$V_M(\exists x\phi) = 1$ iff $V_M([c/x]\phi) = 1$ for at least one constant c in L.

If $V_M(\phi) = 1$, then ϕ is said to be true in model M.

4 Relationen

Binäre Relation

Eine binäre Relation R ist eine Menge von Paaren $(a,b) \in A \times B$.

$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$ bzw. $a(\neg R)b \Leftrightarrow (a,b) \notin R$

Beispiele:

Teilerrelation (nTm): $P_3 := \{(n, m+3) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = \{(1,4),(2,5),(3,6),...\}$

Relation $\subset$ über $\mathcal{P}(M)$ für $M = \{1,2\}$: $\{(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{1,2\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{1,2\})\}$

Inverse Relation

Sei $R \subseteq A \times B$. Die inverse Relation zu R ist $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in R\}$. Also ist $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Beispiel: Sei $R = \{(1,a),(1,c),(3,b)\}$ dann ist $R^{-1} = \{(a,1),(c,1),(b,3)\}$

Komposition

Seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen. Die Verknüpfung $(R \circ S) \subseteq (M_1 \times M_3)$ heißt Komposition der Relationen R, S.

$R \circ S := \{(x,z) \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

Beispiel: Sei $R = \{(1,2),(2,5),(5,1)\}$, dann ist $R^2 = R \circ R = \{(1,5),(2,1),(5,2)\}$

Sei $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(n,m) \in R \Leftrightarrow m = 3n$ und $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ mit $(n,z) \in S \Leftrightarrow z = -n$. Dann ist $R \circ S = \{(n,z) \mid z = -3n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

Eigenschaften von Operationen

$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$
$T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$
$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$
$T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$

Eigenschaften von Relationen

Reflexiv: $\forall a \in A : (a,a) \in R$
Symmetrisch: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
Antisymm.: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$
Transitiv: $\forall a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
Total: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$
Irreflexiv: $\forall a \in A : (a,a) \notin R$
Asymm.: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$
Alternativ: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \oplus (b,a) \in R$
Rechtseind.: $\forall a \in A : (a,b) \in R \wedge (a,c) \in R \Rightarrow b = c$
Linkseind.: $\forall a \in A : (b,a) \in R \wedge (c,a) \in R \Rightarrow b = c$
Eindeutig: R ist recht- und linkseindeutig.
Linkstotal: $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$
Rechtstotal: $\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$

Äquivalenzrelation

Ist eine Relation $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv, heißt sie Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklassen

Gegeben eine Äquivalenzrelation R über der Menge A. Dann ist für $a \in A$: $[a]_R = \{x \mid (a,x) \in R\}$ die Äquivalenzklasse von a. (Äquivalente Elemente kommen in die gleiche Menge)

Beispiel (Restklassen):

$[4] = \{n \mid n \mod 3 = 4 \mod 3\} = [1]$
$[5] = \{n \mid n \mod 3 = 5 \mod 3\} = [2]$
$[6] = \{n \mid n \mod 3 = 6 \mod 3\} = [3]$

Zerlegungen, Partition

Eine Zerlegung (Partition) $\mathcal{Z}$ ist eine Einteilung von A in nicht leere, paarweise elementfremde Teilmengen, deren Vereinigung mit A übereinstimmt.

Beispiel: Sei $A = \{1,2,3,...,10\}$. Dann ist $\mathcal{Z}_\infty = \{\{1,3\},\{2,5,9\},\{4,10\},\{6,7,8\}\}$

Abschluss einer Relation

R^*_ϕ bildet die fehlenden Relationen mit der Eigenschaft ϕ, also alle Kombinationen aus A, die noch nicht in R sind.

Beispiel:

Sei $A = \{1,2,3\}$ und $R = \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$. Dann ist $R^*_{refl} = R \cup \{(1,1),(2,2)\}$, $R^*_{sym} = R \cup \{(2,1),(3,2)\}$, $R^*_{tra} = R \cup \{(1,3)\}$

Halbordunung

Eine Relation R, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

5 Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ eindeutig ein bestimmtes $y = f(x) \in Y$ zuordnet. y ist das *Bild* von x und x das *Urbild* von y. Für eine Abbildung gilt, dass jedes Element der Urmenge X genau auf ein $y \in Y$ abbildet, es müssen aber nicht alle Elemente aus Y angenommen werden bzw. darf auch mehrfach angenommen werden (rechtseindeutig, linksvollständig).

Als Relation:
$f \subseteq A \times B$ mit $f = \{(a, f(a)) \mid a \in A \wedge f(a) \in B\}$

Funktionen

Sei $f \subseteq A \times B$ linkseindeutige und rechtsvollständige Relation.

F ist linksvollständig, wenn gilt $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$.

F ist rechtseindeutig, wenn gilt $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B : (a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2$.

Bild, Urbild

Sei $f : A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$.

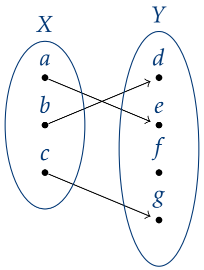
Das *Bild* von M unter f ist die Menge $f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$.

Das *Urbild* einer Teilmenge $N \subseteq B$ heißt $f^{-1}(N) := \{a \in A \mid f(a) \in N\}$.

Eigenschaften von Abbildungen

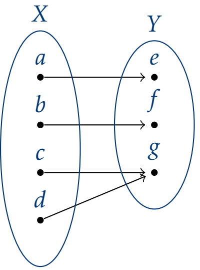
Injektivität:
$\forall x,y \in X : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Jedes $y \in Y$ wird höchstens einmal (oder garnicht) getroffen:

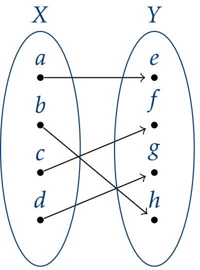


Surjektivität:
$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

Jedes $y \in Y$ wird mindestens einmal getroffen.



Bijektivität:
Jedem $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet und jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$:



Beispiel für Abbildung, die injektiv aber nicht surjektiv ist: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $f(n) = n+1$ injektiv, da $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y+1$ gelten muss, was nur gilt, wenn $x = y$. f ist nicht surjektiv da 0 kein Urbild.

Komposition

Die *Komposition* (Hintereinanderausführung) zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist $a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Es gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Außerdem gilt: Die Komposition von injektiven Abbildungen ist injektiv, die von surjektiven Abbildungen ist surjektiv und die von bijektiven Abbildungen ist bijektiv.

Identität, Umkehrabbildung

Die Abbildung $id_A : A \to A$ mit $id_A(a) = a$ heißt *Identität*.
Sei $f : A \to B$ bijektive Abbildung. Dann existiert zu f stets eine Abbildung g mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$. g heißt die zu f *inverse Abbildung* (f^{-1}). Es gilt $f^{-1}(f(a)) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = b$.

Mächtigkeit von Mengen, Abzählbarkeit

Gleichmächtige Mengen:
Seien M und N zwei Mengen. M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt ($M \cong N$).
Endliche Mengen:
Eine Menge M heißt endlich, wenn $M = \emptyset$ oder es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung $b : M \to \mathbb{N}_n$ gibt.
Unendliche Mengen:
Eine Menge M heißt unendlich, wenn M nicht endlich.
Abzählbare Mengen:
Eine Menge M heißt abzählbar, wenn M endlich oder es gibt bijektive Abbildung $b : M \to \mathbb{N}$.
Abzählbar unendliche Mengen:
Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn M abzählbar und M unendlich.
Überabzählbare Mengen:
Eine Menge M heißt überabzählbar, wenn M nicht abzählbar.
Spezielle endliche Mengen:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{N}_n := [n] := \{1, \ldots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen.
Beispiele:
$|\{a,b,c\}| = 3 = |\{x,y,11\}|$
$|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

Kardinalität

Anzahl der Elemente einer Menge. Zwei Mengen haben gleiche Kardinalität, wenn sie gleichmächtig sind.

Beispielbeweis

Zu zeigen: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
Beweis. Wir betrachten $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(n) := (1, n)$ und $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n,m) := 2^n \cdot 3^m$. Beide sind injektiv, also $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

6 Graphentheorie

Gerichteter Graph

$G = (V, E)$ wobei V Menge aller Knoten z.B. $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $E \subseteq V \times V$ Menge aller Kanten mit $e = (v, u)$. Hierbei steht v für den Startknoten von e und u ist Endknoten von e.
Hinweis:
Ist die Kantenmenge E symmetrisch ($(u,v) \in E \wedge (v,u) \in E$) sprechen wir von einem ungerichteten Graphen. In solchen werden keine Schlingen betrachtet.

Adjazente Knoten

Zwei Knoten, die in einem Graphen durch eine Kante verbunden sind, heißen *adjazent* oder *benachbart*.

Endlicher Graph

Ein Graph G heißt endlich, wenn die Knotenmenge V endlich ist.

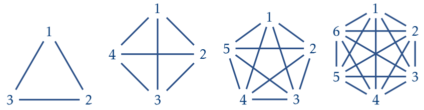
Nullgraph (vollst. unverbunden)

$G = (V, \emptyset) \Rightarrow$ ohne Kanten

Vollständiger Graph

$G = (V, V \times V)$ ist vollständig (heißt auch K_n wegen n Knoten) und hat Maximalzahl von n^2 Kanten $\Rightarrow$ gerichtet und mit Schlingen. Der Ungerichtete K_n hat $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kanten, wobei n die Zahl der Knoten ist.

Beispiel:



Ungerichteter Graph

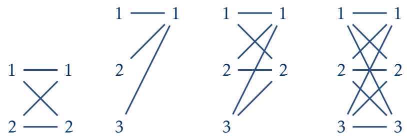
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ungerichtet $\Leftrightarrow E$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow (u, v) \in E \wedge (v, u) \in E$. Da hier die Kanten ungerichtet, kann Mengenschreibweise verwendet werden.

Schlinge

Kante mit gleichem Start- und Endknoten. Wird bei ungerichteten Graphen nicht betrachtet.

Bipartite Graphen

Ein ungerichteter Graph ist bipartit, wenn die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen U, W zerlegbar ist, sodass alle Kanten $e \in E$ einen Endpunkt in U und einen anderen in W haben.
Beispiel:



Eulersche Graphen

G heißt eulerscher Graph, falls es in G einen geschlossenen Weg gibt, der jede Kante von G enthält.
G ist eulerscher Graph $\Leftrightarrow$ jede Ecke von G hat geraden Grad und G ist zusammenhängend.

Untergraph

Seien $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$ zwei Graphen. H heißt Teilgraph von G, wenn $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$ (wenn also jede Kante von H auch zu G gehört.)
Hinweis:
Der Nullgraph O_n ist Teilgraph jedes Graphen mit n Knoten. Außerdem ist jeder Graph Teilgraph des vollständigen Graphen K_n.

Induzierte Teilgraphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge V von G, dann ist der Untergraph oder der durch V' induzierte Teilgraph von G der Graph $G[V'] = (V', E')$ mit $E' = \{(u,v) \mid u, v \in V' \wedge (u,v) \in E\}$
Beispiel:
Ist G ein Graph hat $G[\{2,3,4\}]$ nur die Knoten 2, 3 und 4 und die entsprechenden Kanten.

Grad eines Knoten

Der Ausgrad von v ist die Zahl der Kanten, die v als Startknoten besitzen. Der Ingrad von v ist die Zahl der Kanten, die in v enden. Ist G ungerichtet stimmen Ausgrad von v und Ingrad von v überein und wird Grad von v genannt.
Hinweis:
Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph, dann gilt $\sum_{v \in V} indeg(v) = \sum_{v \in V} outdeg(v) = |E|$. Ist G ungerichtet, dann gilt $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$.

Wege

Ein Weg von den Knoten u nach v ist eine Folge benachbarter Knoten. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der Kanten. Ein Weg der Länge 0 wird als trivialer Weg bezeichnet und besteht nur aus einem Knoten.
Hinweis:
Ein Weg heißt geschlossen, wenn seine beiden Endknoten gleich sind.

Graphzusammenhang

Knoten u und v eines ungerichteten Graphen heißen zuammenhängend, wenn es einen Weg in G von u nach v gibt.

Zusammenhangskomponente

Ein Graph G heißt zusammenhängend wenn jedes Knotenpaar aus G zusammenhängend ist.
Hinweis:
Die Äquivalenzklassen (zusammenhängende Teilgraphen) einer Zusammenhangsrelation Z über einem ungerichteten Graphen G heißen Zusammenhangskomponenten (ZK) von G.

Pfade, Kreise

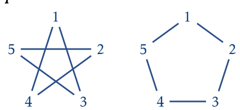
Als *Pfad* werden Wege in einem Graphen bezeichnet, bei denen keine Kante zweimal durchlaufen wird. Ein geschlossener Pfad heißt *Kreis*. Bei einem *einfachen Pfad* wird kein Knoten mehrfach durchlaufen. Ein geschlossener Pfad, der mit Ausnahme seines Ausgangspunktes einfach ist, heißt *einfacher Kreis*. Ein einfacher Kreis durch sämtliche Knoten des Graphen, heißt *Hamiltonscher Kreis*.

Hamiltonscher Kreis

Kann der Zusammenhang eines Graphen G durch die Entnahme eines einzigen Knotens (und sämtlicher mit diesem Knoten benachbarter Kanten) zerstört werden, dann besitzt G keinen Hamiltonschen Kreis.

Isomorphe Graphen

Zwei Graphen heißen isomorph zueinander, wenn sie strukturell gleich sind.
Beispiel:



v	1	2	3	4	5
$\phi(v)$	1	4	2	5	3

Komplementäre Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist $\overline{G} = (V, (V \times V) \setminus E)$ der Komplementärgraph von G.
Hinweis:
Ein Graph heißt selbstkomplementär wenn G und $\overline{G}$ isomorph sind.