计算物理学 (A) 第三次大作业 第 2 题

截止日期：6 月 24 日

1 月球引力对地球同步轨道的扰动

同步卫星的周期与地球的自转周期相同，为一个恒星日。如果不考虑月球的影响，卫星只受到地球的万有引力

$$F = \frac{GM_e m}{r^2} \tag{1}$$

其中 r 表示地球到卫星的距离，$M_e = 5.9736 \times 10^{24}\text{kg}$ 是地球质量，$G = 6.6743 \times 10^{-11}\text{m}^3/\text{kgs}^2$ 为引力常数。可以计算出卫星圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_e}} \tag{2}$$

用周期来表示轨道半径

$$r = \left(\frac{GM_e T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{3}$$

将周期设置为一个恒星日，$T_s = 86164\text{s}$，得到轨道半径 $r_{geo} \approx 42168\text{km}$. 现在我们来考虑月球的影响，首先假设月球在地球的赤道面上做圆周运动，月地距离为 $r_m = 384400\text{km}$，周期为 27.32 个恒星日 $T_m = 27.32T_s$. 月球质量为 $7.3477 \times 10^{22}\text{kg}$，引力因子可写为 $GM_m = 1.2300 \times 10^{-2}GM_e$. 由于同步卫星也位于地球的赤道面内，这简化成了一个二维问题，如图1所示，其中 r_m 为月地距离，r_{sm} 为月球到卫星的距离，ϕ 为卫星在极坐标系下的角度。设 $\Delta_\phi(t) = \phi(t) - \phi_0(t)$，其中 ϕ_0 为没有月球时卫星转过的角度，我们将考察 $\Delta_\phi(t)$ 随时间的变化。

实际上，月球的轨道平面与地球的赤道面成一夹角，并由于太阳的影响，该夹角在 $25° \pm 5°$ 浮动。我们简单地将其取为一个常数 α，$\alpha = 25°$. 这一倾斜角会使得卫星的运动轨迹偏离赤道面，偏离角为 Θ，如图所示2。

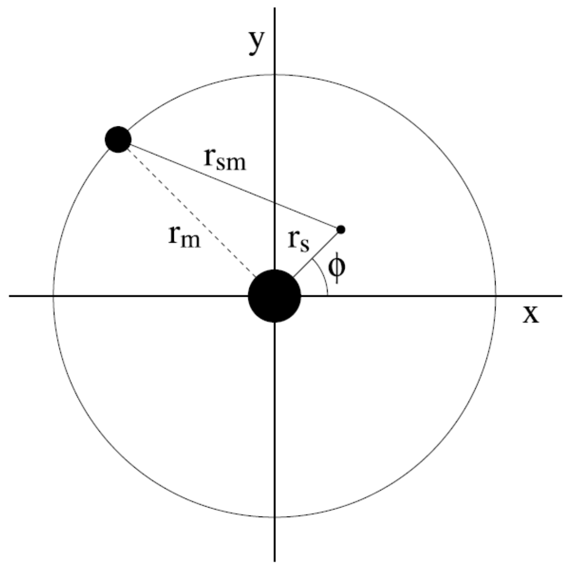

图 1: 月球、地球和卫星的二维运动平面

在程序中我们假定地球静止不动，月球稳定地在某一轨道上做周期运动，初始位置设为 $x = R_m \cos(\alpha), y = 0, z = R_m \sin(\alpha)$, 则其运动轨迹可写为

$$\vec{r}_m = R_m \cos(\alpha) \cos(2\pi t/T_m)\, \vec{e}_x + R_m \sin(2\pi t/T_m)\, \vec{e}_y + R_m \sin(\alpha) \cos(2\pi t/T_m)\, \vec{e}_z \tag{4}$$

卫星在 $t = 0$ 时刻位于赤道面内，且初始角 $\phi = 0$. 卫星的周期为 $T = aT_s$（对于同步轨道 $a = 1$，但可以讨论 $a \neq 1$ 的情况），初始位置为 $x_0 = r(T)$，其中 $r(T)$ 由式3确定，$y_0 = z_0 = 0$. 由于卫星受到引力

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM_e}{r_s^3}\vec{r}_s - \frac{GM_m}{r_{sm}^3}\vec{r}_{sm} \tag{5}$$

求解运动微分方程得到 $r(t), \phi(t)$ 和 $\Theta(t)$ 随时间的变化。与没有月球的情况相比，角度变化为

$$\Delta_\phi = \phi(t) - \phi_0(t) = \phi(t) - 2\pi\frac{t}{T_s} \tag{6}$$

径向距离的变化为

$$\Delta_r(t) = r(t) - r_{\text{geo}} = r(t) - \left(\frac{GM_e T_s^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \tag{7}$$

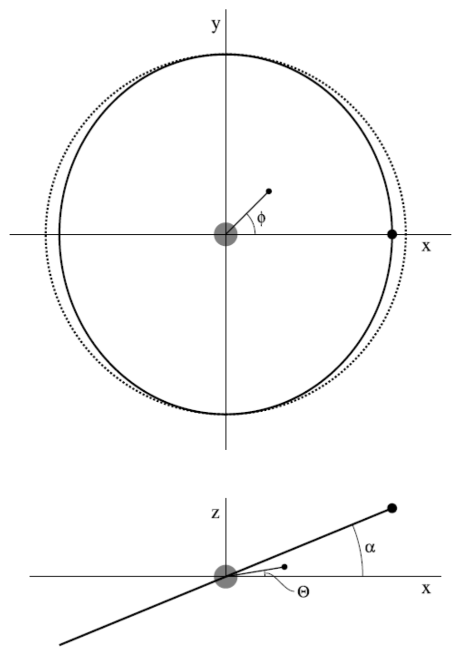

图 2: 上图为月球轨道在地球赤道面 (xy 平面) 的投影，虚线为倾斜角取为零的情况。下图是该系统的侧视图，月球轨道的倾角 α 取为常数，卫星的偏离角 Θ 随时间变化。

试求：

1. 假设月球位于赤道面内，即 $\alpha = 0$，画出月球对卫星轨道的扰动 Δ_r 和 Δ_ϕ 随时间的变化，总的时间为 100 个恒星日。
2. 在上题的基础上，改变卫星的初始周期 $T = aT_s$，取 $a \neq 1$. 调整 a 的大小，使得 Δ_ϕ 在 500 个恒星日取最小值。能否给出 a 取最佳值的物理解释?
3. 取 $\alpha = 25°$，画出 Δ_ϕ 和 Θ 随时间的变化，总的时间为 200 个恒星日。然后仿照第 2 题给出最佳的周期。