1 抛起的手机

某位同学将他的手机抛了起来，希望它在空中能绕转动惯量居中的那个轴旋转。手机的陀螺仪记录了角速度矢量随时间的变化，见附件 Gyroscope.csv 。

手机可近似视作一个刚体。若略去空气阻力，其角速度随时间的变化遵循欧拉运动方程

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{I_y - I_z}{I_x}\omega_y\omega_z,\\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_z\omega_x,\\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x\omega_y.\end{aligned} \tag{1}$$

其中 I_α 为手机绕其 α 轴的转动惯量（$\alpha = x, y, z$）。

1. 试分别对于 $\alpha = x, y, z$，通过数值差分给出角加速度 $\dot{\omega}_\alpha$，并画出 $\dot{\omega}_\alpha$ 随 $\omega_\beta\omega_\gamma$ 变化的关系图。手机在哪一个时间段在空中自由转动？各轴转动惯量的大小关系如何？

2. 选取自由转动阶段的数据，试通过线性拟合得到角加速度 $\dot{\omega}_\alpha$ 随 $\omega_\beta\omega_\gamma$ 变化的斜率 k_α。

3. 从而，我们得到了方程组

$$\begin{aligned}I_x k_x &= I_y - I_z,\\ I_y k_y &= I_z - I_x,\\ I_z k_z &= I_x - I_y.\end{aligned}$$

   这是关于向量 (I_x, I_y, I_z) 的线性齐次方程组。通常而言，由于数值误差的存在，方程无解。此时最优的策略是求解其所对应的一个本征值问题，寻找相应于绝对值最小本征值的本征向量。但基于目前掌握的数值知识，也能够求解该问题。引入新变量 $\tilde{x} \equiv I_x/I_z, \tilde{y} \equiv I_y/I_z$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{x}k_x - \tilde{y} + 1 &= 0,\\ \tilde{x} + \tilde{y}k_y - 1 &= 0,\\ -\tilde{x} + \tilde{y} + k_z &= 0.\end{aligned}$$

   两个独立变量，三个线性方程。我们将三个式子平方相加，得到一个二次函数，随后求这个二次函数的极小值，便可作为原问题某种意义上的最优解。请检验这个极小值问题对应于一个二阶线性方程组的求解，并由此给出手机各轴转动惯量之比。

4. 刚体的欧拉角 (θ, φ, ψ) 与其绕惯量主轴转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 之间有如下关系

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,\\ \omega_y &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,\\ \omega_z &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

   取手机被抛起时刻 $\theta = \varphi = \psi = 0$，试通过数值积分给出其三个欧拉角随时间的变化关系，并绘图表示。这位同学是否成功让他的手机绕转动惯量居中的那个轴稳定旋转了？