

计算物理学 (A) 第二次大作业 第 3 题

截止日期: 5 月 28 日

1 相对论电子的同步辐射

同步辐射是电子在恒定磁场中的辐射, 是回旋加速器中电子能量耗散的主要方式, 也可以利用这种辐射来制造高能的 γ 光子源。电子的同步辐射谱为 [1]

$$\frac{d^2W}{dt d\omega} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}\pi\tau_c\gamma} \left\{ \left[2 + \frac{\omega^2}{(1-\omega)} \right] K_{2/3} \left[\frac{2\omega}{3\chi(1-\omega)} \right] - \int_{2\omega/[3\chi(1-\omega)]}^{\infty} dy K_{1/3}(y) \right\} \quad (1)$$

其中 $\alpha = 1/137$ 是精细结构常数, $\tau_c = \hbar/(mc^2)$ 是康普顿时间, γ 是电子的洛伦兹因子, ω 是辐射光子能量 (ϵ_γ) 与初态电子能量 (ϵ) 之比, 即 $\omega = \epsilon_\gamma/\epsilon$, $K_\nu(x)$ 是第二类改良贝塞尔函数。式1的物理意义是电子在单位时间内辐射一个能量为 $\omega\epsilon$ 的光子的概率。式1中还有一个重要的无量纲参数 χ , 它的定义是

$$\chi = \frac{e\hbar}{m_e^3 c^4} |F_{\mu\nu} p^\nu| = \frac{\gamma \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}/c)^2}}{E_s} \quad (2)$$

其中 $E_s = m_e^2 c^3 / e\hbar$ 是 Schwinger 临界场¹。式2的物理意义是电子静止坐标系下感受到的场强与 Schwinger 临界场之比, 对于恒磁场下的回旋运动, 它简化为

$$\chi = \frac{\gamma v B}{E_s} \quad (3)$$

在处理相对论电子的辐射的时候, 我们将这种辐射看成是量子的概率性事件, 而不是经典的连续的辐射, 且假定不同时刻辐射的光子互不相干, 总的辐射能谱即为所有辐射光子的非相干叠加。在某个电子辐射的瞬间, 光子能量通过如下蒙卡方法来确定 [2]:

¹ 电子在一个康普顿波长内加速得到的能量等于其静止能量所对应的场强 [3]。

1. 产生一个 0 到 1 之间的随机数 P
2. 已知辐射瞬间电子的能量 $\epsilon = \gamma m_e c^2$ 和所处的场强 B ，即已知 χ ，则可通过

$$\frac{\int_0^\omega \frac{d^2 W}{dt d\omega} d\omega}{\int_0^1 \frac{d^2 W}{dt d\omega} d\omega} = P \quad (4)$$

反解出 ω ，再利用 $\epsilon_\gamma = \omega \epsilon$ 得到辐射光子的能量

3. 如果辐射次数足够多，总的光子能谱应当趋近于理论式1.

现已将函数

$$p(\chi, \omega) = \frac{\int_0^\omega \frac{d^2 W}{dt d\omega} d\omega}{\int_0^1 \frac{d^2 W}{dt d\omega} d\omega} \quad (5)$$

制成表格，文件名为“c0.table”，由于 $p(\chi, \omega)$ 是关于变量 χ 和 ω 的双变量函数，所以“c0.table”是一张二维表格，行对应 χ ，列对应 ω ，表格值为函数值 $p(\chi, \omega)$ 。 χ 的取值是从 10^{-3} 到 10^2 按等比数列取 100 个点（或 $\log_{10} \chi$ 从 -3 到 2 按等差数列取 100 个点）， ω 的取值是从 10^{-4} 到 1 按等比数列取 500 个点（或 $\log_{10} \omega$ 按等差数列取点）。

试求：

1. 写一个查表程序，对于任意的 χ 和产生的随机数 P ，通过表格“c0.table”找到辐射光子的能量。注：这是一个二维的线性插值问题，可以通过 3 次一维的线性插值得到。
2. 设一束电子在磁场中做回旋运动，始终保持 $\chi = 1$ ，不考虑辐射的反作用，即辐射不会改变电子的运动状态，统计 10 万次辐射之后的光子能谱。提示：产生 10 万个随机数，每个随机数用第 1 小问中的程序得到辐射光子能量，将 $(0, 1)$ 平均划分成 100 个区间，统计落在每个子区间的光子数，画出 $\frac{dN}{d\omega} - \omega$ 图，即辐射光子数关于光子能量的曲线，这应当与理论式1给出的能谱 $\frac{d^2 W}{dt d\omega} - \omega$ 有相同的趋势（归一化之后将完全吻合）。

参考文献

- [1] VM Katkov, Vladimir Moiseevich Strakhovenko, et al. *Electromagnetic processes at high energies in oriented single crystals*. World Scientific, 1998.

- [2] Christopher Paul Ridgers, John G Kirk, Roland Duclous, TG Blackburn, CS Brady, Keith Bennett, TD Arber, and AR Bell. Modelling gamma-ray photon emission and pair production in high-intensity laser-matter interactions. *Journal of computational physics*, 260:273–285, 2014.
- [3] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, 82(5):664, 1951.