

# 基于变分原理的差分格式

## 目 录

1	引言	2
2	网格和离散化	4
2.1	网格	4
2.2	网格函数	6
2.3	离散模型	6
3	一般的二次泛函极小问题	10
3.1	退化的半正定二次型	10
3.2	广义函数空间和其中基本的二次型	12
3.3	几类典型的变分问题	15
3.3.1	正定的自由变分问题	15
3.3.2	退化的自由变分问题	16
3.3.3	约束的变分问题	17
3.4	解的稳定性与逼近性质	19
4	差分格式的收敛性	22
4.1	用网格函数逼近	23
4.2	离散解的收敛性	27

冯康的《基于变分原理的差分格式》于 1965 年发表在《应用数学和计算数学》杂志第 2 卷第 4 期上. 该文奠定了有限元方法严格的数学基础, 为有限元法的实际应用提供了可靠的理论保证. 它的发表也是我国独立于西方创始了有限元方法的标志.

不过编者在网上搜索却未能找到该文的电子扫描版, 在中科院冯康院士的[主页](#)上以及《冯康文集》里面都只有该文的[英译版](#). 于是编者从国图翻拍了该文的原始版本, 重新录入排版, 以方便自己 and 他人学习之用. 为确认对原文的理解, 在录入的过程中还参照了英译版 (并发现几处排版错误). 虽经过编者仔细校对, 但录入排版过程中还是有可能存在一些错漏, 所以将英译版的勘误列表和原文翻拍的版本也附在后面, 供读者对比查阅.

另外, 冯康院士后来为了推广有限元法, 做了大量的报告, 并编写了相关的讲义和教材, 这些现在都可以在中科院官网上找到比较清晰的扫描版本, 也可以作为学习的参考.

— 编者 (5070319@qq.com)

2020.01.12 — 2020.01.30

# 基于变分原理的差分格式<sup>1</sup>

冯 康

## 1 引言

数理方程定解问题从原始形成到在计算机上进行数值解算的过程大致有四个环节:

1. 物理机理: 如各种物理量的守恒规律, 运动规律等, 也包括具体的条件如参数, 几何形状和其他原始资料.
2. 数学提法: 通常表为连续统形式的微分 (积分) 方程和相应的定解条件.
3. 离散模型: 通常表为离散形式的代数方程如差分方程.
4. 算法程序: 即离散方程求解的算术步骤.

不妨称阶段  $1 \rightarrow 2$  为数学化或解析化,  $2 \rightarrow 3$  为离散化或代数化,  $3 \rightarrow 4$  为算法化或算术化. 本文主要讨论离散化阶段的问题.

离散模型的好坏主要按下列诸点来衡量:

1. 是否保持问题的物理与数学特性?
2. 能否给出具有必要准确度的结果?
3. 按机器时间及存储量能否实现, 代价如何?
4. 是否比较简单、通用、灵活, 便于掌握推广?

这里 1, 2 是可靠性问题, 定性的和定量的; 3, 4 是可行性问题, 关于物的和关于人的. 当然, 在不同的情况下侧重点也是有所不同的. 但是, 也可以设想, 如果人们不是孤立地、形式地而是联系着其前后阶段来进行研究, 则有可能较好地解决这些矛盾. 事实上, 当人们从传统数学形式的框框下解放出来, 考究问题的物理机理, 直接从第一性原理出发来构成离散模型时, 的确可以得到总体上比较合理的结果.

我们以二阶椭圆方程自伴边值问题为例说明同一问题可以有不同的数学提法, 从而导致不同的离散化途径.

(A) 微分方程提法:

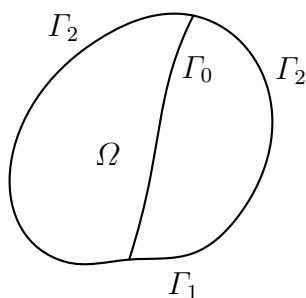


图 1

$$(x, y) \in \Omega : -[(au_x)_x + (au_y)_y] + bu = \varphi, \quad (1.1)$$

$$(x, y) \in \Gamma_1 : u = \chi, \quad (1.2)$$

$$(x, y) \in \Gamma_2 : au_n + cu = \psi. \quad (1.3)$$

这里  $\Omega$  为有界开域, 边界  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .  $a, b$  在  $\bar{\Omega}$  上片状连续,  $0 \leq a_0 \leq a \leq a_1, b \geq 0$ .  $c$  在  $\Gamma_2$  上

<sup>1</sup>1965 年 7 月 20 日收到.

片状连续,  $c \geq 0$ .  $\varphi \in L_2(\Omega)$ ,  $\psi \in L_2(\Gamma_2)$ .<sup>2</sup>  $\chi$  在  $\Gamma_1$  上连续,  $u_n$  代表外法向导数. 当系数  $a, b$  有间断时则在间断线  $\Gamma_0$  上 (1.1) 不成立而代以内边界接触条件 (见图 1):

$$(x, y) \in \Gamma_0: u^+ = u^-, \quad (1.4)$$

$$(x, y) \in \Gamma_0: (au_n)^+ = (au_n)^-. \quad (1.5)$$

当边段  $\Gamma_1$  非空时称为第一类问题. 当  $\Gamma_1$  为空而  $b$  或  $c \neq 0$  时称为第三类问题. 这两类问题都是自伴正定的. 当  $\Gamma_1$  为空而  $b \equiv c \equiv 0$  时称为第二类问题, 是自伴半正定的, 这时为了保证有解须附加条件

$$\iint_{\Omega} \varphi d\sigma + \oint_{\partial\Omega} \psi ds = 0. \quad (1.6)$$

(B) 守恒原理提法: 对一切子域  $D \subset \Omega$  满足积分关系

$$D \subset \Omega: - \int_{\partial D \setminus \Gamma_2} au_n ds - \int_{\partial D \cap \Gamma_2} (\psi - cu) ds + \iint_D bu d\sigma = \iint_D \varphi d\sigma. \quad (1.7)$$

并满足边界条件 (1.2), (1.4).

(C) 变分原理提法: 在满足边界条件 (1.2), (1.4) 的光滑函数类中令能量

$$J(u) = \frac{1}{2} \left\{ \iint_{\Omega} [a(u_x^2 + u_y^2) + bu^2] d\sigma + \int_{\Gamma_2} cu^2 ds \right\} - \left\{ \iint_{\Omega} \varphi u d\sigma + \int_{\Gamma_2} \psi u ds \right\} \quad (1.8)$$

达到极小.

应该指出, 微分的提法 (就是数理方程边值问题传统的提法) 是最习见的, 但却不是最原始的. 方程 (1.1) 写成散度型的, 在实践中又往往提为非散度型, 如

$$- [a(u_{xx} + u_{yy}) + a_x u_x + a_y u_y] + bu = \varphi.$$

从物理上说, 守恒原理或变分原理的提法是更为原始更为基本. 它们直接反映了物理机理.

注意无论在守恒或变分的提法下, 内外边界条件 (1.3), (1.5) 都和微分方程 (1.1) 一样是推论, 即都是所定的解的必备性质而无须事先列出, 因此它们称为自然或自由边界条件. 另一方面, 边界条件 (1.2), (1.4) 则均仍须保留, 这是强加的或约束的边界条件.

在网格的基础上进行差分离散化时相应地也有三种不同途径 (例如见 [1]).

(A)' 模拟微分方程及内外边界条件, 形式地以格点值的差商代替微商.

(B)' 模拟守恒原理, 在各网格单元及其围道上建立离散的守恒方程即差分方程, 其解是在某种离散意义下满足守恒律.

(C)' 在网格分区累加的基础上模拟能量表达式, 得到有穷自由度的二次函数极小问题. 它的“欧拉方程”就是差分方程, 其解是在某种离散意义下达到能量极小.

通过不同的途径可以达到相同的格式, 而在每种途径中也有种种不同的方案. 尽管这样, 途径的选择是有重要意义的, 这是因为各种途径各自有其自然导致的结果, 并且往往在关键之处呈现分化.

<sup>2</sup>编者注: 这里  $L_2$  表示平方可积的勒贝格空间, 现通行的惯例是采用上标形式  $L^p$  表示  $p$  次可积函数空间; 类似地, 后文提到的索伯列夫空间  $W_2^{1,s}$  现在一般记为  $W^{1,2}(\mathbb{R}^s)$ , 即用  $W^{k,p}(\mathbb{R}^s)$  表示  $\mathbb{R}^s$  上所有满足前  $k$  阶弱导数属于  $L^p$  的实值函数的索伯列夫空间.

一般说来,微分途径的优点是通用,简便,有时可以达到较高的精度.缺点是容易陷于盲目,物理数学特性保持较差.例如自伴问题差分化时,如未经特殊的考虑,则离散矩阵往往不对称(特别当从非散度型方程出发时),从而导致解的失真和解算的困难.虽然在一些特定的情况下可以达到较高的精度,但在另一些情况下却又不一定能保证基本的可靠性.对于复杂的内外边界条件,不规则的系数和几何形状,不规则的网格,解的不规则性,如奇异性间断性 etc 等情况下处理比较困难,也不容易统一.

守恒原理或变分原理的途径的优点在于它们是针对着根本的物理规律进行模拟,从而容易保证解的可靠性以及保持问题的特性.例如,用守恒原理离散化时很容易保持自伴性,用变分原理离散化时更能自动保证自伴性,从而也为解算提供方便.由于自然边界条件以及由间断性引起的内边界接触条件在提法中不出现,因此可以不加特别处理或只经简单的处理就能合理地反映在统一的差分格式里.对于解、系数、区域、网格等的不规则性也都比较易于适应.在此情况下,尽管所得的差分格式在形式上可以很复杂,但它的构成原则却还是很简单的,也不难用程序实现.因此,在实践中往往可以用不规则的网格但较少的节点来适应解的不规则性,从而以较小的机器时间和存储量代价取得较可靠的结果.

应该指出,在实践中最感兴趣的,直接导源于连续介质物理力学过程的数理方程问题绝大多数都是以这样或那样的守恒律或变分律作为基本机理的,因此守恒和变分的方法由广阔的应用范围,可用于数学上或物理上种种不同类型的问题.

变分问题的数值近似解法有两类,一类是在能量表达式中用差商代替微商,因而得到差分的形式,这也就是给予变分原理的差分格式的一种类型,首见于欧拉,后见于 Courant, Friedrichs, Lewy 等<sup>[3,1]</sup>. 这类方法,长期以来没有得到应有的重视.另一类近似解法是黎兹-加辽金方法<sup>[2]</sup>,即把变分问题限制在有限维子空间内求解,而坐标函数是适当选取的特殊函数系列.这类方法在计算机以前曾被广泛采用,能够较好地保持问题特性.它的缺点是在复杂几何形状,复杂系数的情况比较困难,不够通用灵活;虽在理论上比较完整,但在具体情况下收敛条件的验证却不落实;特别是没有结合机器计算的特点进行改造发展.但是,如果采用黎兹方法的合理内核,但抛弃经典形式的特殊函数而代以网格式的函数作为坐标函数,便能得另一种类型的基于变分原理的差分格式,同样首见于欧拉,后见于 Polya<sup>[4]</sup> 对调和方程本征值下限的估计.

在椭圆问题包括弹性力学问题在内,当前在自然边界条件的处理,特性保持,格式的适应性和理论保证等方面,变分的差分方法似较优于守恒的差分方法.而在变分的差分法中基于黎兹原理和网格函数的一类更似突出,本文将较系统地讨论这一类差分格式,揭示它在上述诸方面的优点并给出相当简单而完整的理论依据.

## 2 网格和离散化

### 2.1 网格

设  $\Omega$  为平面有界连通的开域,  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . 为了对  $\Omega$  作网格剖分,先做逼近域  $\Omega'$ , 其边界  $\partial\Omega'$  为折线回线<sup>3</sup>. (图 2 中折线 12345678 为  $\partial\Omega'$ , 部分用虚线段代替的回线则为原有的  $\partial\Omega$ .)

对  $\Omega'$  作网格剖分  $\overline{\Omega'} = \bigcup_{\alpha=1}^M B_{\alpha}$ , 闭格区  $B_{\alpha}$  为三角形或平行四边形, 它们的顶点称为格点, 边称为格线. 当格点对于所有含有它的格区而言都是顶点时叫做正规格点 (如图 2 中的 1 至 10), 否则称为非正规格点 (如图 2 中的 11 及 12). 我们规定, 每个非正规格点必定落在

<sup>3</sup>编者注:“回线”的“回”字(原文为繁体“迴”)应是封闭的意思,“折线回线”即闭折线(closed broken line). 图 2 中逼近域的边界  $\partial\Omega'$  为闭折线,用虚线表示;原始边界  $\partial\Omega$  用封闭的实线表示(两者重合的部分只能看到实线).

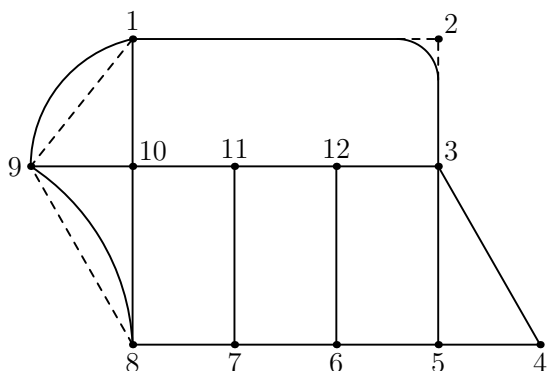


图 2

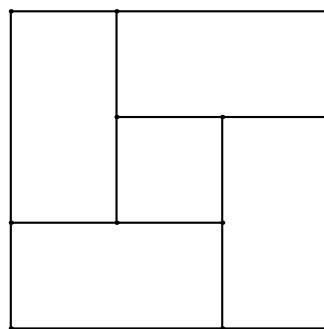


图 3

某个以正规格点为端点的一边上 (如图 2 中的 11 及 12 落在边 3-10 上). 这样就排除了如图 3 所示的剖分. 为了避免退化, 设每个  $B_\alpha$  均与  $\Omega$  相交, 此外还假设  $\partial\Omega'$  上的格点都落在  $\partial\Omega$  上或其外. 落在外面的格点叫做虚格点, 如图 2 中的 2. 这样  $\Omega'$  的格线自然地对  $\Omega$  做了剖分  $\overline{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^M A_\alpha$ . 当  $A_\alpha$  为内部格区 (与  $\partial\Omega$  不相交) 时,  $A_\alpha = B_\alpha$ , 当  $A_\alpha$  为边缘格区 (与  $\partial\Omega$  相交) 时, 可以有  $A_\alpha \neq B_\alpha$ , 这时可以有曲边 (图 2 中 1-9-10, 8-9-10, 1-2-3-10), 当  $A_\alpha \not\subset B_\alpha$  时, 称为外插格区 (如图 2 中的 1-9-10), 当  $A_\alpha \subset B_\alpha$  时, 称为内插格区 (如图 2 中的 8-9-10 及 1-2-3-10). 显然有  $A_\alpha \cap A_\beta \subset B_\alpha \cap B_\beta$ .

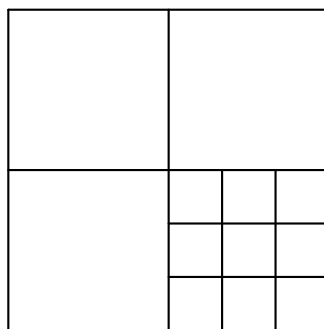
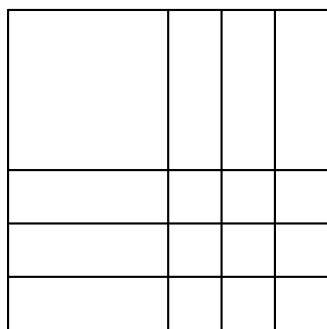


图 4

对于网格的几点说明:

1. 我们兼容两种形状的格区和任意的格距是为了对于区域的几何性状以及解的解析性状有较大的适应能力, 从而可以期望能以格点数较少但合理布局的网格来取得较准的结果.
2. 容许有非正规格点是为了便于根据需要而局部地加密网格. 如图 4 所示, 当采用非正规格点时可以按人们的本来意图局部地在第四象限加密 (图 4 右), 当不采用非正规格点时则须连同第一第三象限也加密 (图 4 左).
3. 容许有虚格点是为提高边界附近的函数或导数值的精确度提供方便.
4. 容许有曲边 (包括内外插的) 格区可以简化网格的构成, 避免或减少对于曲边界作逼近, 并能使离散变分问题的定解区域和定解函数类统一在连续统变分问题的定解区域和定解函数类之内, 从而便于得到比较广泛的理论保证 (详见 §3, §4).
5. 边界上的特殊点如拐折点, 边界条件系数的间断点, 不同类边界的分界点等都应该划为格点.
6. 区域内部系数的间断线应尽可能作为格线, 或者尽可能用折线去逼近, 虽然这对于保证

收敛而言并非绝对必要,但是可以提高精确度.

## 2.2 网格函数

对于  $\Omega$  划定网格  $\{A_1, B_1; \dots; A_M, B_M\}$  后就可以定义网格函数. 设在全部正规格点  $P_1, \dots, P_N$  上赋定了函数值  $U_1, \dots, U_N$ . 在非正规格点用它所从属的两端正规格点作线性补插, 于是全部格点上的值全已确定. 对任意  $P \in \Omega$ , 恒有  $A_\alpha \ni P$ , 取  $B_\alpha$  的顶点值为基值作双线性补插即得  $u(P)$ .

所谓对于三角形或平行四边形的顶点函数值作双线性插值是指过点  $P$  作直线平行于任选的一个边, 这直线必与另外某两个边或其延线相交于  $P', P''$ . 在  $P', P''$  处的值用它们所属的边的顶点值线性插出, 再用  $P', P''$  处的值线性地插出  $P$  点的值. 不难证明, 插值结果与过程中平行边的选择无关.

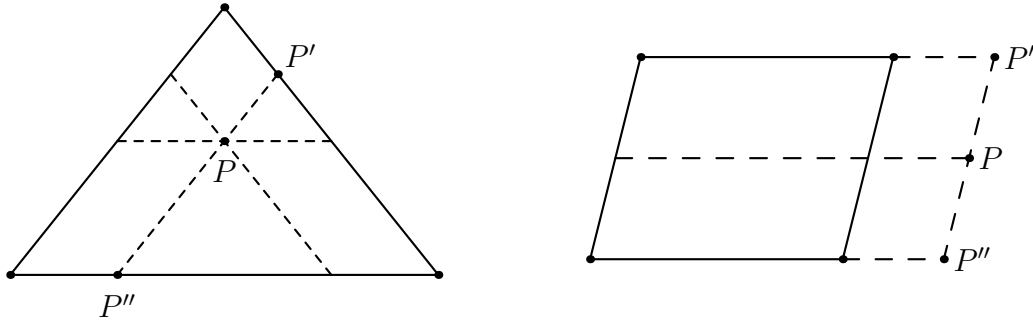


图 5

由于  $A_\alpha \cap A_\beta \subset B_\alpha \cap B_\beta$ , 而后者又是  $B_\alpha$  与  $B_\beta$  的公共边或公共边的一段, 因此易见双线性插值  $u(P)$  与含  $P$  的  $A_\alpha$  的选择无关. 也容易证明  $u(P)$  在  $\bar{\Omega}$  上连续, 它的一阶导数以  $\Omega$  的格线为间断线. 为了简便不妨称这样的函数为网格函数或片状双线性网格函数.

从正规格点值  $U_1, \dots, U_N$  为自由参数, 所有的网格函数组成一个  $N$  维的线性空间, 记为  $S'(\Omega) = S'$ . 如果对每一个  $k = 1, \dots, N$  作网格函数  $v^{(k)}(P)$  满足

$$v^{(k)}(P_i) = \delta_{ik} \text{ (Kronecker 符号)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

于是  $\{v^{(1)}, \dots, v^{(N)}\}$  成为  $S'$  的基, 而任意  $u \in S'$  可以表示为

$$u(P) = \sum_{k=1}^N U_k v^{(k)}(P). \quad (2.2)$$

显然  $S'(\Omega)$  是广义函数空间  $W_2^1(\Omega)$  的一个子空间,  $W_2^1(\Omega) = W_2^1$  为区域  $\Omega$  上函数本身及其一阶广义导数均为平方可积 (属于  $L_2(\Omega)$ ) 的函数类.  $W_2^1$  是二阶椭圆问题最自然的, 最恰当的解类<sup>[5]</sup>. 它既在理论上比较完备, 在实用上也足够广泛, 因为实际计算的许多问题的解往往是“真正的”广义解而不是经典解. 网格函数本身也有导数间断, 严格说来它的导数只是按广义的意义才存在.

## 2.3 离散模型

为了构成离散模型只须把连续模型中的求解函数类  $W_2^1(\Omega)$  或其子集代以有穷维的子空间  $S'(\Omega)$  或其相应的子集, 并且算出能量表达式  $J(u)$  以及其它定解条件在离散空间  $S'(\Omega)$  内的表达形式.

本节将着重代数形式的介绍, 到 §3 还要进一步研究. 问题 (1.8) 表为:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}D(u) - F(u) = \min, \\ D(u) &= D(u, u), \quad D(u, v) = \iint_{\Omega} [a(u_x v_x + u_y v_y) + buv] \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} cuv \, ds, \\ F(u) &= \iint_{\Omega} \varphi u \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} \psi u \, ds. \end{aligned}$$

对于  $u = \sum_{k=1}^N U_k v^{(k)} \in S'$ ,

$$J(u) = \frac{1}{2}D(u, u) - F(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U_i U_j D(v^{(i)}, v^{(j)}) - \sum_{j=1}^N U_j F(v^{(j)}).$$

定义

$$D(U, U) = D(u, u) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} U_i U_j, \quad (2.3)$$

$$F(U) = F(u) = \sum_{i=1}^N B_i U_i, \quad (2.4)$$

这里

$$\begin{aligned} A_{ij} &= D(v^{(i)}, v^{(j)}) = \iint_{\Omega} [a(v_x^{(i)} v_x^{(j)} + v_y^{(i)} v_y^{(j)}) + bv^{(i)} v^{(j)}] \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} cv^{(i)} v^{(j)} \, ds \\ &= \sum_{\alpha \in M_i \cap M_j} \left\{ \iint_{A_\alpha} \cdots \, d\sigma + \int_{A_\alpha \cap \Gamma_2} \cdots \, ds \right\} \\ &= A_{ji}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$M_i$  表示函数  $v^{(i)}$  所影响的格区  $A_\alpha$  的标号的集合.

$$B_i = F(v^{(i)}) = \iint_{\Omega} \varphi v^{(i)} \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} \psi v^{(i)} \, ds = \sum_{\alpha \in M_i} \left\{ \iint_{A_\alpha} \cdots \, d\sigma + \int_{A_\alpha \cap \Gamma_2} \cdots \, ds \right\}, \quad (2.6)$$

于是离散后的代数极值问题

$$J(U) = \frac{1}{2}D(U, U) - F(U) = \min, \quad (2.7)$$

定解范围或在离散空间  $S'$  内或在其适当的子集内, 将视各类具体问题而异, 分述于后.

第三类边值问题系在整空间  $W_2^1$  内定极小, 因此离散后 (2.7) 应在全空间  $S'$  内定极小. 这也相当于解欧拉方程

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} U_j = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

矩阵  $A$  的对称正定性是明显的.



第二类问题有解的充要条件为

$$F(1) = \iint_{\Omega} \varphi \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \psi \, ds = 0. \quad (2.9)$$

此时也是在整空间  $W_2^1(\Omega)$  内定解, 有解但不唯一, 可以差一个可加常数. 如果附加规范条件

$$\iint_{\Omega} u \, d\sigma = 0, \quad (2.10)$$

则有唯一解. 离散化后同前成为 (2.7) 或 (2.8). 由于  $1 \equiv \sum v^{(i)}, u = \sum U_i v^{(i)}$ , (2.9), (2.10) 分别成为

$$\sum_{i=1}^N B_i = 0, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^N E_i U_i = 0, \quad E_i = \iint_{\Omega} v^{(i)} \, d\sigma. \quad (2.12)$$

(2.11) 就是离散问题有解的充要条件, 而 (2.12) 就是保证有唯一的离散解的附加规范化条件. 这是因为代数方程组 (2.8) 有解的充要条件是右向量与齐次方程组的基本解 (就是  $U_1 = \dots = U_N = 1$ ) 正交. 在 §3 中将作进一步的讨论.

对于第一类问题, 由于  $\Gamma_1$  上是强加的边界条件, 所以处理上要比自然条件困难一些. 设对网格边界  $\partial\Omega'$  对应于  $\Gamma_1$  的部分与  $\Gamma_1$  相重合,  $\Gamma_1$  的端点也取为格点. 在这一区段的格点的值就直接取给定  $\chi$  的值, 不妨记为  $U_j, j = N' + 1, \dots, N$ . 因此就形成条件极值问题

$$J(U_1, \dots, U_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} U_i U_j - \sum_{i=1}^N B_i U_i, \quad (2.13)$$

$$U_j = \chi_j, \quad j = N' + 1, \dots, N. \quad (2.14)$$

注意自由变量只是  $U_1, \dots, U_{N'}$ , 因此欧拉方程为

$$\frac{\partial}{\partial U_i} J(U_1, \dots, U_{N'}, \chi_{N'+1}, \dots, \chi_N) = 0, \quad i = 1, \dots, N'. \quad (2.15)$$

即作下列形式

$$\sum_{j=1}^{N'} A_{ij} U_j = B_i - \sum_{l=N'+1}^N A_{il} \chi_l, \quad i = 1, \dots, N'. \quad (2.16)$$

矩阵  $\{A_{ij}\}, i, j = 1, \dots, N'$  的正定性也是明显的. 这是直接处理的方法.

也可以采取间接处理的方法. 此时并不要求  $\Gamma_1$  落在网格边界上. 参照这网格的布局在  $\Gamma_1$  上进行分割而得节点  $Q_1, \dots, Q_r$ . 第一类边界条件的处理表为

$$u(Q_i) = \chi(Q_i), \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.17)$$

这里  $u(Q_i)$  就是网格函数在  $Q_i$  处的值, 实际上是  $Q_i$  所在格区的顶点值的线性组合.



例如图 6 中有正方形网格,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_7$  为虚格点. 虚线表示  $\Gamma_1$ , 与网格边界错开半格. 在  $\Gamma_1$  上取节点  $Q_1, \dots, Q_5$ , 于是 (2.17) 表为<sup>4</sup>

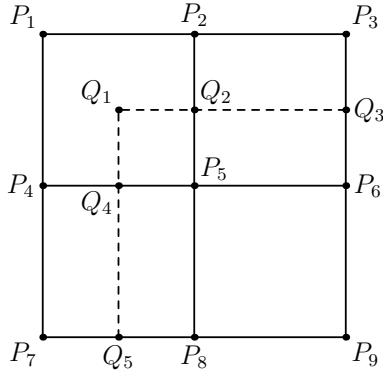


图 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(U_1 + U_2 + U_4 + U_5) &= \chi(Q_1), \\ \frac{1}{2}(U_2 + U_5) &= \chi(Q_2), \\ \frac{1}{2}(U_3 + U_6) &= \chi(Q_3), \\ \frac{1}{2}(U_4 + U_5) &= \chi(Q_4), \\ \frac{1}{2}(U_7 + U_8) &= \chi(Q_5). \end{aligned}$$

也可以采用积分中值定理来处理第一类边界条件. 例如把  $\Gamma_1$  参照网格布局分割为区段  $S_1, \dots, S_r$  而要求

$$\frac{1}{\text{mes } S_i} \int_{S_i} u \, ds = \frac{1}{\text{mes } S_i} \int_{S_i} \chi \, ds, \quad \text{mes } S_i = \int_{S_i} ds, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.18)$$

不难见到, 无论采用直接或间接的处理, 问题归结为线性约束条件

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} U_j = G_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.19)$$

下的二次函数极小问题

$$J(U) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} U_i U_j - \sum_{i=1}^N B_i U_i = \min. \quad (2.20)$$

应注意保证矩阵  $C$  的秩为  $r$ , 这是因为  $\chi$  即  $G$  有原则上的任意性, 而约束方程 (2.19) 当且仅当  $C$  的秩为  $r$  时方能对任意的右项有解. 注意无论采用边界处理 (2.14), (2.17) 或 (2.18) 时, 当  $u \equiv 1$  时  $u|_{\Gamma_1} = \chi \equiv 1$ , 因此有

$$\sum_{j=1}^N C_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.21)$$

问题 (2.19), (2.20) 对于任意的右项  $G$  恒有唯一解. 事实上由于  $C$  的秩为  $r$ , 故有  $Z$  满足 (2.19)<sup>5</sup>, 即  $CZ = G$ . 命  $U = Z + V$ <sup>6</sup>, 则问题等价于

$$\begin{cases} CV = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} I(V) = \frac{1}{2} D(V) - F'(V) = \min, \end{cases} \quad (2.23)$$

这里  $F'(V) = F(V) - D(V, Z)$ <sup>7</sup>. 如果  $D(V) = 0$  则知  $V_1 = \dots = V_N$ , 因此又由 (2.22), (2.21) 知  $V = 0$ . 故二次型  $D(V)$  在子空间  $CV = 0$  上正定.

<sup>4</sup>编者注: 原文误排为 (2.18), 现改.

<sup>5</sup>编者注: 原文误排为 (2.23), 现改.

<sup>6</sup>编者注: 原文误排为  $U = Z + W$ , 现改.

<sup>7</sup>编者注: 原文误排为  $D(V, W)$ , 现改.

上述的模型可以称为理想的离散模型, 即假定所有的系数  $A_{ij}, B_i, \dots$  等均系准确算出. 在一系列较简单的情况 (如系数为片状线性, 边界比较规则) 是可以做到, 而且也是应该争取的. 但在较复杂的情况下则准确计算有很大的困难或不可能, 这时就许可或有必要对定解条件中的  $a, b, c, \varphi, \psi, \dots$  作调整, 例如按网格用片状常值, 片状线性值或其它较简单形式的  $a', b', c', \varphi', \psi'$  来代替, 即泛函  $J(u) = \frac{1}{2}D(u) - F(u)$  代成受扰的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}D'(u) - F'(u), \quad (2.24)$$

使得相应的系数可以准确算出

$$D'(u) = D'(U) = \sum_{i,j=1}^N A'_{ij} U_i U_j, \quad (2.25)$$

$$F'(u) = F'(U) = \sum_{i=1}^N B'_i U_i. \quad (2.26)$$

注意在第二类问题应使受扰后的  $\varphi', \psi'$  仍满足相容条件

$$F(1) = \iint_{\Omega} \varphi' d\sigma + \int_{\partial\Omega} \psi' ds = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^N B'_i = 0. \quad (2.27)$$

对于区域  $\Omega$  和它的内边界  $\Gamma_0$  也可以进行扰动.

### 3 一般的二次泛函极小问题

为了更好地了解离散模型与连续模型间的关系和论证收敛性, 我们将统一地考虑希氏空间内的变分问题.

以下设  $H$  为希氏空间, 有穷维或无穷维. 为了简便只讨论实系数的情况, 对于复系数的推广是显然的.

以  $(u, v), \|u\| = \sqrt{(u, u)}$  表示其内积及范数, 必要时标明为  $(u, v)_H, \|u\|_H$ . 一些习用的概念如线性型 (泛函), 双线性型, 二次型, 正定, 半正定等不再列举. 它们的定义中均默认有界性, 但在下文中根据情况有时明提, 有时不提. 二次型  $\varphi_1(u), \varphi_2(u)$  称为等价的, 记作  $\varphi_1(u) \asymp \varphi_2(u)$ , 如果有正数  $M_1, M_2$  使得

$$\begin{aligned} |\varphi_1(u)| &\leq M_1 |\varphi_2(u)|, \\ |\varphi_2(u)| &\leq M_2 |\varphi_1(u)|. \end{aligned}$$

当  $\varphi(u)$  为正定时,  $\varphi(u) \asymp \|u\|^2$ , 可以用相应的双线性型  $\varphi(u, v)$  来定义新内积和范数而有界性, 连续性保持不变.

#### 3.1 退化的半正定二次型

设  $\varphi(u)$  为半正定有界二次型, 定义  $\varphi$  的零集  $P = P_\varphi$

$$P_\varphi = \{v | \varphi(v) = 0\},$$

当  $P \neq \{0\}$  时为退化. 以下恒设  $P$  的维数  $d$  为有穷. 我们称有界线性泛函组  $f_1(u), \dots, f_m(u)$  补足于  $\varphi$ , 如果二次型

$$\psi(u) = \varphi(u) + \sum_{i=1}^m (f_i(u))^2$$

不退化, 亦即当  $\varphi(v) = 0, f_1(v) = \dots = f_m(v) = 0$  时, 恒有  $v = 0$ . 命  $w_1, \dots, w_d$  为  $P_\varphi$  的一组基, 则  $f_1, \dots, f_m$  补足于  $\varphi$  的充要条件为  $(m, d)$  矩阵  $\{f_i(w_j)\}$  的秩为  $d$ . 显然补足于任意的  $\varphi$  的线性泛函组总是存在的, 例如取

$$f_i(u) = (w_i, u), \quad i = 1, \dots, d.$$

我们说半正定有界二次型  $\varphi(u)$  在  $H$  内拟正定, 如果每当有界线性泛函组  $f_1(u), \dots, f_m(u)$  补足于  $\varphi(u)$  时, 二次型  $\psi(u) = \varphi(u) + \sum (f_i(u))^2$  正定于  $H$ . 显然, 为此只须验证存在正数  $A$  使得

$$\|u\|^2 \leq A \left[ \varphi(u) + \sum_{i=1}^m (f_i(u))^2 \right]. \quad (3.1)$$

当  $H$  为有穷维时, 由于半正定非退化性等价于正定性, 故任意半正定二次型均为拟正定. 在无穷维的  $H$  中只是下列较弱命题成立:

**命题.** 如果对于半正定有界二次型  $\varphi(u)$  存在一组有界线性泛函  $g_1(u), \dots, g_r(u)$ , 使得二次型  $\varphi(u) + \sum_{i=1}^r (g_i(u))^2$  正定, 于是  $\varphi(u)$  在  $H$  内拟正定.

证. 不妨设

$$\|u\|^2 = \varphi(u) + \sum_{i=1}^r (g_i(u))^2,$$

$f_1, \dots, f_m$  补足于  $\varphi$ , 求证不等式 (3.1) 成立. 现假设不然, 于是存在序列  $u_n \in H$  使得

$$1 = \|u_n\|^2 = \varphi(u_n) + \sum_{i=1}^r (g_i(u_n))^2, \quad (3.2)$$

$$\varphi(u_n) + \sum_{i=1}^m (f_i(u_n))^2 \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

由 (3.2) 知有子列 (仍记为  $u_n$ ) 及  $u_0 \in H$  使得  $u_n \xrightarrow{\text{弱}} u_0$ . 于是由 (3.2), (3.3) 得

$$\begin{aligned} f_i(u_n) &\rightarrow f_i(u_0) = 0, & g_i(u_n) &\rightarrow g_i(u_0), \\ \varphi(u_n) &\rightarrow 0, & \varphi(u_0, u_n) &\rightarrow \varphi(u_0, u_0) = \varphi(u_0). \end{aligned}$$

更由 Schwarz 不等式

$$(\varphi(u_0, u_n))^2 \leq \varphi(u_0)\varphi(u_n)$$

可得  $\varphi(u_0) = 0$ . 因此  $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u_0) = 0$ .

$$\|u_n\| \rightarrow \varphi(u_0) + \sum_{i=1}^r (g_i(u_0))^2 = \|u_0\| = 1,$$

即  $u_0 \neq 0$ . 另一方面因  $f_1, \dots, f_m$  补足于  $\varphi$ , 而  $\varphi(u_0) = f_i(u_0) = 0, i = 1, \dots, m$ , 即  $u_0 = 0$ , 得一矛盾.

### 3.2 广义函数空间和其中基本的二次型

对于二阶椭圆方程问题最自然的求解函数类即基本空间  $H$  取为  $W_2^1(\Omega)$ , 设  $\Omega$  的维数为  $s$ :

$$(u, v) = (u, v)_{W_2^1} = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s u_{x_i} v_{x_i} \, dx. \quad (3.4)$$

对于高阶 ( $2m$  阶) 方程自然取  $H = W_2^m(\Omega)$ ,

$$(u, v)_{W_2^m} = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} D^p u \cdot D^p v \, dx, \quad (3.5)$$

这里  $p = (p_1, \dots, p_s)$ ,  $|p| = p_1 + \dots + p_s$ ,  $D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_s^{p_s}}$ .

在空间  $W_2^m$  内半正定退化二次型

$$\varphi_m(u) = \int_{\Omega} \sum_{|p|=m} (D_u^p)^2 \, dx \quad (3.6)$$

的零集  $P_m$  为一切次数  $< m$  的多项式

$$\sum_{0 \leq p_1 + \dots + p_s < m} a_{p_1 \dots p_s} x_1^{p_1} \dots x_s^{p_s},$$

的全体,  $\{x_1^{p_1} \dots x_s^{p_s} | 0 \leq p_1 + \dots + p_s < m\}$  构成  $P_m$  的基. 对于  $W_2^1$ ,  $\varphi_1(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s u_{x_i}^2 \, dx$ , 相应的  $P_1$  为一切常函数的集合, 它的基为 1.

$$P = [1]. \quad (3.7)$$

对于二阶弹性力学方程组则基本空间取为向量函数空间  $W_2^{1,s}(\Omega)$ , 其中列向量函数  $u = (u_1, \dots, u_s)'$  的分量  $u_i$  跑遍  $W_2^1(\Omega)$ ,  $s = \Omega$  的维数 (实践上有兴趣的只是  $s = 2, 3$ )<sup>[2]</sup>.

$$(u, v)_{W_2^{1,s}} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s u_i v_i \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^s u_{ij} v_{ij} \, dx = \sum_{i=1}^s (u_i, v_i)_{W_2^1}, \quad (3.8)$$

这里  $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . 如果命

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}), \quad \omega_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{ij} - u_{ji}),$$

则由恒等式

$$\sum_{i,j=1}^s u_{ij}v_{ij} = \sum_{i,j=1}^s \varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) + \sum_{i,j=1}^s \omega_{ij}(u) \cdot \omega_{ij}(v)$$

得

$$(u, v)_{W_2^{1,s}} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^s u_i v_i \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^s \omega_{ij}(u) \cdot \omega_{ij}(v) \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^s \varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(v) \, dx. \quad (3.9)$$

空间  $W_2^{1,s}$  内半正定二次型

$$\varphi_{1,s}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^s (\varepsilon_{ij}(u))^2 \, dx \quad (3.10)$$

的零集  $P_{1,s}$  为一切刚性位移

$$v_i = a_i + \sum_{j=1}^s b_{ij}x_j, \quad b_{ij} = -b_{ji}, \quad i = 1, \dots, s \quad (3.11)$$

的全体, 其维数为  $s + \frac{s(s-1)}{2}$ . 当  $s = 2$  时基为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix};$$

当  $s = 3$  时基为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

非常重要的是在  $W_2^1(\Omega)$  内成立 **Соболев** 不等式<sup>[5]</sup>

$$\int_{\Omega} \sum_{|p|<m} (D^p u)^2 \, dx + \int_{\Omega} \sum_{|p|=m} (D^p u) \, dx \leq A_1 \left\{ \sum_{|p|<m} \left[ \int_{\Omega} D^p u \, dx \right]^2 + \int_{\Omega} \sum_{|p|=m} (D^p u)^2 \, dx \right\}, \quad (3.12)$$

因此

$$\|u\|_{W_2^m}^2 \asymp \varphi_m(u) + \sum_{|p|<m} (f_p(u))^2,$$

这里

$$f_p(u) = \int_{\Omega} D^p u \, dx, \quad |p| < m$$

为一族补足于  $\varphi$  的有界线性泛函. 因此  $\varphi_m$  在  $W_2^m$  内拟正定.

类似地, 在  $W_2^{1,s}(\Omega)$  内成立 **Korn** 不等式<sup>[2]</sup>

$$\text{当 } \int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx = 0, \, i, j = 1, \dots, s \text{ 时 } \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u) \, dx \leq B_1 \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u) \, dx. \quad (3.13)$$

如果定义

$$\begin{aligned} f_i(u) &= \int_{\Omega} u_i \, dx, \quad i = 1, \dots, s, \\ f_{ij}(u) &= \int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx, \quad i, j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

则有

$$\|u\|_{W_2^{1,s}} \asymp \varphi_{1,s}(u) + \sum_{i=1}^s (f_i(u))^2 + \sum_{i,j=1}^s (f_{ij}(u))^2.$$

事实上, 由于恒等式 (3.8) 及 **Соболев** 不等式, 只须证明不等式

$$\sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u) \, dx + \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u) \, dx \leq B \left\{ \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u) \, dx + \sum_{i,j=1}^s \left[ \int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx \right]^2 \right\}. \quad (3.14)$$

为此命

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b_{ij}(u) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx, \quad b_{ij} = -b_{ji}, \\ v_i(x) &= \sum_{j=1}^s b_{ij} x_j, \quad \omega_{ij}(v) = b_{ij}, \end{aligned}$$

则有

$$\int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx = \int_{\Omega} \omega_{ij}(v) \, dx, \quad \varepsilon_{ij}(v) = 0.$$

取  $u' = u - v$ , 则有

$$\int_{\Omega} \omega_{ij}(u') \, dx = 0, \quad \varepsilon_{ij}(u') = \varepsilon_{ij}(u). \quad (3.15)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u) \, dx + \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u) \, dx &= \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u') \, dx + \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u' + v) \, dx, \\ \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u' + v) \, dx &= \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u') \, dx + 2b_{ij} \int_{\Omega} \omega_{ij}(u') \, dx + b_{ij}^2 \int_{\Omega} dx. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u) \, dx + \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u) \, dx \leq \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(u') \, dx + \sum_{i,j=1}^s \int_{\Omega} \omega_{ij}^2(u') \, dx + \sum_{i,j=1}^s \frac{1}{\text{mes } \Omega} \left[ \int_{\Omega} \omega_{ij}(u) \, dx \right]^2.$$

对  $u'$  可以应用 **Korn** 不等式, 并注意 (3.15) 即得 (3.14). 由此可知  $\varphi_{1,s}$  在  $W_2^{1,s}$  内拟正定.

这里二次型  $\varphi_m, \varphi_{1,s}$  的拟正定性实质就是嵌入定理, 它们与椭圆方程问题中二次型  $D(u)$  等价, 因此对后者的正定性或拟正定性的判断起着主导作用.

### 3.3 几类典型的变分问题

#### 3.3.1 正定的自由变分问题

这是指在希氏空间  $H$  内定义的变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2}D(u) - F(u) = \min, \quad (3.16)$$

其中二次型  $D$  为有界正定:

$$b\|u\|^2 \leq D(u) \leq a\|u\|^2,$$

线性型  $F$  有界

$$|F(u)| \leq c\|u\|;$$

所谓自由是指在全空间  $H$  内求解.

由于正定性, 可在  $H$  中定义新的内积和范数:

$$(u, v)_D = D(u, v), \quad \|u\|_D = \sqrt{D(u)}, \quad \|u\|_D \asymp \|u\|.$$

$F$  对新范数而言仍为有界, 因此由 **Riesz**<sup>8</sup> 定理知存在  $u_0 \in H$ , 使得  $F(u) = (u_0, u)_D$ , 于是

$$J(u) = \frac{1}{2}(u, u)_D - (u_0, u)_D = \frac{1}{2}\|u - u_0\|_D^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_D^2,$$

即问题 (3.16) 等价于问题

$$I(u) = \|u - u_0\|_D = \min.$$

显然, 问题在  $H$  内的解就是  $u_0$ , 在闭子空间  $S'$  内的解就是  $u_0$  按内积  $D$  在子空间  $S'$  的投影  $u'$ ; 这些解显然都是唯一的, 并且有估计式

$$D(u' - u_0) \leq D(u - u_0), \text{ 对一切 } u \in S'. \quad (3.17)$$

在离散化时去有穷维的子空间  $S'$ . 命  $\{v^{(1)} \dots, v^{(N)}\}$  为  $S'$  的一组基<sup>9</sup>, 于是对于

$$u = \sum_{i=1}^N U_i v^{(i)}$$

得

$$\begin{aligned} J(u) &= J(U) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} U_i U_j - \sum_{i=1}^N b_i U_i, \\ a_{ij} &= D(v^{(i)}, v^{(j)}), \quad b_i = f(v^{(i)}), \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

因此在  $S'$  中的变分问题就是二次函数的自由极小问题:

$$J(U) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} U_i U_j - \sum_{i=1}^N b_i U_i = \min. \quad (3.19)$$

<sup>8</sup>编者注: 原文误排为 **Riecz**, 现改.

<sup>9</sup>编者注: 原文误排为  $\{v_1, \dots, v_N\}$ , 现改. 下式同.



由  $D(u)$  的正定性立即得矩阵  $A = (a_{ij})$  的正定性. 这也等价于解欧拉方程

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.20)$$

正定的自由变分问题是第三类边值问题的抽象提法. 也是所有要讨论的二次泛函极小问题最终归结的基本形式.

### 3.3.2 退化的自由变分问题

这是指变分问题 (3.16) 在全空间  $H$  内求解, 但  $D(u)$  为退化的半正定型, 并设在  $H$  内拟正定,  $F$  如前; 第二类自由边值问题通常抽象为这种形式.

因  $D(u)$  为拟正定, 于是对于任意一组补足于  $D$  的有界线性型  $g_1, \dots, g_m$  而言, 恒有

$$\|u\|^2 \asymp D(u) + \sum_{i=1}^m (g_i(u))^2.$$

定义闭子空间

$$Q = \{v | g_1(v) = \dots = g_m(v) = 0\},$$

显然在  $Q$  上  $\|u\| \asymp D(u)$ , 即  $D(u)$  在  $Q$  上正定. 因此问题在子空间  $Q$  上是有唯一解的. 但是这个解未必是原来问题的解, 而且原问题也可能无解.

命  $P$  为  $D(u)$  的零集, 即

$$P = \{v | D(v) = 0\};$$

不妨设其维数为  $m$ ,  $\{z_1, \dots, z_m\}$  为  $P$  的一组基.

**命题 1.** 问题  $J(u) = \min$  在  $H$  内有解的充要条件为

$$F(v) = 0, \text{ 对一切 } v \in P, \quad (3.21)$$

亦即

$$F(z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

当此条件满足时, 解在  $H$  内按  $\text{mod } P$  意义唯一, 并且等价于在子空间  $Q$  内求  $J(u) = \min$  的问题.

证. 当 (3.20) 不成立时, 必有  $v_0 \in H, D(v_0) = 0, F(v_0) < 0$ , 于是当  $k \rightarrow \infty$  时  $J(kv) = kF(v_0) \rightarrow -\infty$ , 即  $J$  无极小. 反之, 当 (3.20) 成立时, 恒有  $J(u) = J(u+v)$ , 如果  $v \in P$ , 又因  $f_1, \dots, f_m$  补足于  $D$ , 故对于任意  $u \in H$  恒存在唯一的  $v \in P$ , 使得  $u+v \in Q$  而  $J(u) = J(u+v)$ . 因此在  $Q$  内的极值也就是在  $H$  内的极值, 并且  $Q$  内极小解的唯一性相当于  $H$  内极小解的  $\text{mod } P$  唯一性. 证毕.

**命题 2.** 设  $S'$  为  $H$  的闭子空间且满足

$$P \subset S', \quad (3.22)$$

则变分问题在  $H$  的子空间  $S'$  内有解的充要条件仍为 (3.20), 并在此条件满足时解在  $S'$  内按  $\text{mod } P$  意义唯一, 并且等价于在子空间  $S' \cap Q$  内  $J(u) = \min$  问题. 在  $S' \cap Q$  内的极小解  $u'$ , 就是在  $Q$  内的极小解  $u_0$  按  $D$  的投影.

证明类似, 只须充分注意到条件 (3.21). 应该指出, 这个条件对于离散化的特性保持有重要的意义, 因为它把不唯一解的多重性结构以及可解条件等忠实地保留下来. 我们采用的网格函数类  $S'$  的确包含了有关的退化型  $D(u)$ , 如  $\int_{\Omega} a(u_x^2 + u_y^2) d\sigma, \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^s \varepsilon_{ij}^2(u) dx$  的零集 (3.7), (3.11).

离散化时取满足 (3.21) 的有穷维子空间  $S'$ , 同前得到极小问题 (3.19) 或方程组 (3.20), 但这里系数矩阵为对称半正定退化. 相容条件 (3.21) 离散化为

$$\sum_{j=1}^N Z_j^{(i)} F(v^{(j)}) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

这里

$$z_i = \sum_{j=1}^N Z_j^{(i)} v^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m$$

为  $P$  的基, 因此  $Z^{(i)}, i = 1, \dots, m$  就是二次型  $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} U_i U_j$  的零集的基, 也就是齐次方程组

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j = 0$$

的基本解组. 考虑到 (3.18), 离散相容条件可以表为

$$\sum_{j=1}^N Z_j^{(i)} b_j = 0. \quad (3.23)$$

因此代数上的意义是非常明显的, 它表示退化对称非齐次方程组有解的充要条件为右向量与相应的齐次方程组的基本解组正交.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

条件  $g_1(v) = 0, \dots, g_m(v) = 0$  在  $S'$  内则表为

$$\sum_{j=1}^N g_{ij} U_j = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.24)$$

$$g_{ij} = g_i(v^{(j)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, N.$$

在实践上, 按 (3.20) 自由定解比附加规格化条件 (3.24) 定它的解要方便些<sup>[8]</sup>.

### 3.3.3 约束的变分问题

这是具有强加边界条件如第一类边值问题的抽象提法. 恒假定在  $H$  内满足强加边界条件的元素的集合  $L$  非空, 即有  $z \in L$ , 并设  $L$  为超闭平面. 因此可以表  $L = z + K$ , 即当  $u \in L$  时

$u = z + v, v \in K$ ,  $K$  为一闭子空间, 即所有满足相应的齐次边界条件的元素的集合. 显然, 在  $L$  内定  $J(u) = \min$  等价于在  $K$  内定  $I(v) = \min$ ,

$$I(v) = \frac{1}{2}D(v) - G(v),$$

$$G(v) = F(v) - D(z, v).$$

由于  $D(u, v)$  在  $H$  上有界双线性, 故  $G(v)$  仍在  $H$  上为有界线性.

在  $H$  的某个闭超平面  $L = z + K$  上定  $J(u) = \min$ . 当  $D(u)$  正定时则当然也在  $K$  上正定, 故在  $L$  上有唯一解  $u_0$ . 当  $D(u)$  退化拟正定, 并且存在补足于  $D$  的线性有界泛函族  $g_1, \dots, g_m$ , 使得当  $v \in K$  时恒有  $g_1(v) = \dots = g_m(v) = 0$ , 则由于

$$\|v\|^2 \asymp D(v) + \sum_{i=1}^m (f_i(v))^2,$$

易见  $D(v)$  在  $K$  上也正定<sup>10</sup>. 因此, 在这两种情况下  $I(v) = \min$  在  $K$  上有唯一解  $v_0$ , 亦即  $J(u) = \min$  在  $L$  上有唯一解  $u_0 = z + v_0$ .

当在逼近  $H$  的某个离散闭子空间  $S'$  内定解时, 有可能  $S'$  与  $L$  不相交, 这是势必采用受扰的边界条件, 即用受扰的  $L' = z' + K'$ , 这里  $z' \in S'$  满足受扰的边界条件. 这是受扰的变分问题在  $L'$  上定  $J(u) = \min$  等价于在  $K'$  上定  $I'(v) = \min$ ,  $I'(v) = \frac{1}{2}D(v) - G'(v)$ ,  $G'(v) = F(v) - D(z', v)$ , 因此泛函本身亦受扰动.

设

$$K' = K \cap S', \quad (3.25)$$

于是当  $v \in K'$  时仍然保持有  $g_1(v) = \dots = g_m(v) = 0$ . 故  $D(v)$  在  $K'$  上保持正定, 因此  $I'(v) = \min$  在  $K'$  上有唯一解  $v'$ . 注意  $v'$  不是  $v_0$  按  $D$  在  $S'$  上的投影, 而是问题  $I'(v) = \min$  在  $K$  上的解按  $D$  在  $S'$  上的投影.

条件 (3.25) 对于离散化的特征保持亦即收敛性的保证也起相当的作用.

进行离散化时除得到 (3.18), (3.19) 外, 约束条件也要离散化. 由于这里涉及强加的条件, 故不能从变分原理导出统一的离散化法则, 设条件 (3.25) 满足, 于是  $K'$  为  $S'$  的一个子空间, 一般表为

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} U_j = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

相应的超平面  $L'$  则表为

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} U_j = g_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

这里应该注意使矩阵  $C$  的秩为  $r$  (见 §2.3), 以保证这个欠定方程组对任意的右项 (反映约束条件的值) 有解, 即存在  $z' \in L'$ .

<sup>10</sup>编者注: 原文此处为“易见  $D(v)$ , 即  $D(v)$  在  $K$  上也正定.”, 其中“即  $D(v)$ ”应为多余部分, 现删.

### 3.4 解的稳定性与逼近性质

当已知希氏空间及其闭子空间中各类变分问题的唯一可解性后, 次一问题就是断定解的稳定性, 即问题的定解条件 (即二次项和一次项内的“系数”) 经过微扰后, 变分解也只经受微扰. 首先研究正定的情形.

**稳定性问题 1.** 设空间  $H$  中变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2}D(u) - F(u) = \min \quad (3.26)$$

受微扰成为变分问题

$$J_n(u) = \frac{1}{2}D_n(u) - F_n(u) = \min, n = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

$D$  为有界正定二次型,  $f$  为有界线性型:

$$b\|u\|^2 \leq D(u) \leq a\|u\|^2,$$

$$|f(u)| \leq c\|u\|.$$

$D_n, F_n$  也分别保持为有界正定二次型及有界线性型, 并且满足微扰条件

$$|D_n(u) - D(u)| \leq \varepsilon_n \|u\|^2, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

$$|f_n(u) - f(u)| \leq \delta_n \|u\|, \quad \delta_n \rightarrow 0. \quad (3.29)$$

于是在  $H$  中受扰变分问题 (3.27) 的解  $u_n$  收敛于原问题 (3.26) 的解  $u_0$ .

证. 首先指出由所设条件易知  $D_n, f_n$  为一致正定及一致有界:

$$b'\|u\|^2 \leq D_n(u) \leq a'\|u\|^2, b' > 0,$$

$$|f_n(u)| \leq c'\|u\|.$$

以下证明将分段进行.

1.  $J_n(u_n) \leq J(u_0) + \sigma_n, \sigma_n \rightarrow 0$ .

事实上,

$$\begin{aligned} J_n(u_n) &= \min J_n(u) \leq J_n(u_0) = J(u_0) + J_n(u_0) - J(u_0) \\ &\leq J(u_0) + |D_n(u_0) - D(u_0)| + |f_n(u_0) - f(u)| \\ &\leq J(u_0) + \varepsilon_n \|u_0\|^2 + \delta_n \|u_0\|. \end{aligned}$$

2.  $\|u\|$  有界.

事实上, 由于  $J_n(u_n) = \frac{1}{2}D_n(u_n) - f_n(u_n)$  有上界,  $f_n(u)$  一致有界, 故有:

$$D_n(u_n) \leq \alpha + \beta \|u_n\|, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (3.30)$$

又由  $|D(u_n) - D_n(u_n)| \leq \varepsilon_n \|u_n\|^2 \leq \varepsilon_n b^{-1} D(u_n)$ , 得

$$D(u_n) \leq D_n(u_n) + \varepsilon_n b^{-1} D(u_n),$$

因此

$$D_n(u_n) \geq (1 - \varepsilon_n b^{-1}) \|u_n\|^2 \geq \gamma \|u_n\|^2, \quad \gamma > 0.$$

由此及 (3.30) 即得  $\|u_n\|$  有界.

$$3. J_n(u_n) \geq J(u_0) + \tau_n, \tau_n \rightarrow 0.$$

事实上, 类似于 1 的证明,

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \min J(u) \leq J(u_n) = J_n(u_n) + J(u_n) - J_n(u_n) \\ &\leq J_n(u_n) + \varepsilon_n \|u_n\|^2 + \delta_n \|u_n\| \\ &= J_n(u_n) + \tau_n, \end{aligned}$$

因  $\|u_n\|$  有界故  $\tau_n \rightarrow 0$ .

$$4. \text{ 由 2 知有 } u' \in H, u_n \text{ 有一个子列, 记为 } u_k, \text{ 使得 } u_k \xrightarrow{\text{弱}} u'. \text{ 又由 1, 3 知 } J_n(u_n) \rightarrow J(u_0).$$

$$5. \|u_k\| \rightarrow \|u'\|, u' = u_0.$$

事实上, 根据

$$\frac{1}{2} D(u') - f(u') = J(u') \geq J(u_0) = \frac{1}{2} D(u_0) - f(u_0),$$

得

$$D(u') \geq D(u_0) + 2[f(u') - f(u_0)]; \quad (3.31)$$

另一方面,

$$D(u_n) = D(u_n) - D_n(u_n) + D_n(u_n),$$

由 (3.28), (3.29) 及 2, 4 知

$$\begin{aligned} D(u_n) - D_n(u_n) &\rightarrow 0, \quad f(u_n) - f_n(u_n) \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2} D_n(u_n) - f_n(u_n) &= J_n(u_n) \rightarrow J(u_0) = \frac{1}{2} D(u_0) - f(u_0). \end{aligned}$$

因此当取子列  $u_k \xrightarrow{\text{弱}} u'$  时  $f_k(u_k) \rightarrow f(u')$ , 并且

$$D(u_k) \rightarrow D(u_0) + 2[f(u') - f(u_0)],$$

亦即

$$D(u_k) \rightarrow 2J(u_0) + 2f(u'). \quad (3.32)$$

根据 Schwarz 不等式

$$D(u', u_k) \leq \sqrt{D(u')} \cdot \sqrt{D(u_k)},$$

由于  $D(U', u)$  时有界线性型, 故当  $u_k \xrightarrow{\text{弱}} u'$  时有

$$D(u') \leq \sqrt{D(u')} \cdot \sqrt{D(u_0) + 2[f(u') - f(u_0)]}.$$

如果  $u' \neq 0$ , 则有

$$D(u') \leq D(u_0) + 2[f(u') - f(u_0)],$$

由此及 (3.31) 得

$$D(u') = D(u_0) + 2[f(u') - f(u_0)],$$

即

$$J(u') = J(u_0) = \min J(u).$$

有变分解的唯一性得  $u_0 = u'$ , 而  $D(u_k) \rightarrow D(u_0)$ . 如果  $u' = 0$ , 则由  $J(u_0) = \min J(u) \leq J(u')$ , 故  $J(u_0) \leq 0$ . 另由 (3.32) 及  $f(u') = 0$  得

$$0 \leq D(u_k) \rightarrow 2J(u_0).$$

因此  $J(u_0) = 0 = J(0)$ , 从而  $u_0 = 0 = u'$ , 并且也有  $D(u_k) \rightarrow D(u_0)$ . 因此证明了  $\|u_k\| \rightarrow \|u_0\|$ . 又由于  $u_k \xrightarrow{\text{弱}} u_0$ , 故有  $\|u_k - u_0\| = 0$ .

6.  $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ .

这是因为, 如果不成立则必有子列  $u_m$  即  $\sigma > 0$ , 使  $\|u_m - u_0\| > \sigma$ . 由上所证,  $u_m$  又必有子列  $u_k$ , 使得  $\|u_k - u_0\| \rightarrow 0$ , 得出矛盾. 证毕.

现在来讨论变分问题解的逼近性质. 设  $S_n, n = 1, 2, \dots$ , 为  $H$  内的子空间列. 定义其极限集  $S$  如下:  $u \in S$  当且仅当  $u$  在  $S_n$  的投影  $u_n \rightarrow u$ . 显然  $S$  是一个子空间, 而且  $u \in S$  的充要条件为对每个  $n$  有  $v_n \in S_n$ , 使得  $v_n \rightarrow u$ . 直观上说,  $S$  就是能用  $S_n$  的元来逼近的点集. 我们来证明  $S$  是闭集. 事实上, 如果  $u \in \bar{S}$  而  $u$  在  $S_n$  内的投影  $u_n$  不收敛于  $u$ , 则有  $\delta > 0$  及子序列  $u_k$ , 使得

$$\|u - u_k\| > \delta.$$

由于  $u \in \bar{S}$ , 故有  $v \in S$ ,  $\|u - v\| < \frac{1}{4}\delta$ , 又  $v$  在  $S_n$  的投影  $v_n \rightarrow v$ , 故有

$$\|v - v_k\| \leq \frac{1}{4}\delta, \text{ 当标号 } k \text{ 充分大时.}$$

因此,

$$\|u - u_k\| \leq \|u - v\| + \|v - v_k\| + \|v_k - u_k\|.$$

由于  $\|v_k - u_k\| \leq \|v - u\|$ , 故

$$\|u - u_k\| \leq 2\|u - v\| + \|v - v_k\| \leq \frac{3}{4}\delta,$$

得出矛盾. 因此  $\bar{S} = S$ . 由此可知, 当集合  $M$  在空间  $H$  内稠密且  $M \subset S$ , 则有  $S = H$ , 这时我们说子空间列  $S_n$  在  $H$  内完全.

**逼近性定理 1.** 命变分问题  $J(u) = \min$  在空间  $H$  内的解为  $u_0$ , 受扰变分问题  $J_n(u) = \min$  在子空间  $S_n$  内的解为  $w_n$ .  $J(u)$  和  $J_n(u)$  满足稳定性定理 1 中所列的条件. 命  $S$  为子空间列  $\{S_n\}$  的极限集. 如果  $u_0 \in S$ , 则有  $w_n \rightarrow u_0$ . 特别地当子空间列  $\{S_n\}$  在  $H$  内完全时, 恒有  $w_n \rightarrow u_0$ .

证. 命  $u_0$  为  $J(u) = \min$  在  $H$  内的解, 我们已证  $u_n \rightarrow u_0$ . 命  $v_n$  为  $J(u) = \min$  在  $S_n$  内的解, 显然  $v_n$  为  $u_0 \in S$  在子空间  $S_n$  按内积  $D(u, v)$  的投影, 因此  $\|v_n - u_0\| \rightarrow 0$ , 于是  $\|v_n - u_n\| \rightarrow 0$ . 命  $w_n$  为  $J_n(u) = \min$  在  $S_n$  内的解, 于是有

$$D_n(w_n - u_n) = \min_{u \in S_n} D_n(u - u_n) \leq D_n(v_n - u_n).$$

根据  $D$  的正定性和 (3.28),

$$\begin{aligned} D(w_n - u_n) &\leq (1 - \varepsilon_n b^{-1})^{-1} D_n(w_n - u_n), \\ D_n(v_n - u_n) &\leq (1 + \varepsilon_n b^{-1}) D(v_n - w_n), \end{aligned}$$

已知  $v_n - w_n \rightarrow 0$ , 因此  $w_n - u_n \rightarrow 0$ , 即  $w_n \rightarrow u_0$ .

利用 §3.3 中的结果可以把上述定理推广到退化的自由变分和约束的变分问题如下, 证明很容易, 从略.

**稳定性与逼近性定理 2.** 设  $D, D_n$  在  $H$  中退化拟正定, 并有公共的零集  $P$ ,  $f$  及  $f_n$  均满足相容条件; 其余假设均同于稳定性定理 1. 命  $g_1, \dots, g_m$  为补足于  $D$  的一族线性泛函,

$$Q = \{v | g_1(v) = \dots = g_m(v) = 0\}.$$

于是受扰问题的解在  $Q$  中的代表  $u_n$  收敛于原问题的解在  $Q$  中的代表  $u_0$ . 更设  $S_n \supset P$ ,  $\{S_n\}$  在  $H$  内完全或  $u_0$  属于  $\{S_n\}$  的极限集, 则受扰问题在子空间  $S_n$  内的解在  $S_n \cap Q$  中的代表  $w_n$  收敛于  $u_0$ .

**稳定性与逼近性定理 3.** 关于  $D, D_n$  的假设同于定理 2. 设对于某闭子空间  $K$  存在一族补足于  $D$  的线性泛函  $g_1, \dots, g_m$  使当  $v \in K$  时恒有  $g_1(v) = \dots = g_m(v) = 0$ . 设原问题及受扰问题分别在超平面  $L = z + K$  及  $L_n = z_n + K$  内定解, 解记为  $u_0$  及  $u_n$ ; 并设  $z_n \rightarrow z$ . 于是  $u_n \rightarrow u_0$ . 再设  $\{S_n\}$  在  $H$  内完全或  $u_0$  属于  $\{S_n\}$  的极限集,  $z_n \in S_n$ , 于是受扰问题在子空间  $S_n$  内的超平面  $S_n \cap L_n = z_n + S_n \cap K$  的解  $w_n$  收敛于  $u_0$ .

## 4 差分格式的收敛性

对于二阶椭圆型方程或弹性力学方程组, 根据 §3.2 所述, 一些基本的二次型, 如  $\varphi_1(u), \varphi_{1,s}(u)$ , 等, 具有拟正定的特点; 利用它们就很容易肯定各具体方程问题中的二次型  $D(u)$  的正定性或拟正定性, 从而能肯定相应变分问题在广义函数空间  $W_2^1, W_2^m, W_2^{1,s}$  及其子空间中的可解性, 稳定性等, 从而也保证了差分格式方程的可解性. 为了保证差分格式的收敛性, 上节中的稳定性逼近定理也提供了条件. 事实上, 在一些文献上 (如 [2]) 所列的结果也为此提供了条件, 特别在区域、系数、网格较简单的情况下, 当采用我们介绍的差分格式时, 运用已有的成果差不多不需要什么证明就能保证收敛性. 我们推广稳定性逼近性定理的目的无非是在更广泛、更一般、比较复杂, 而且是实践中常遇到的情况下也能证明收敛性. 为了



达到这个目的, 只需证明一些特定的网格函数在  $W_2^1$  内完全, 或者更一般些, 弄清楚网格加密时要满足什么条件就能保证相应的网格函数在  $W_2^1$  内完全. 下面可以见到这和经典的黎兹方法有很大的不同, 在这里这种分析完全是初等的, 能够取得的结果也是极广泛的.

由于具有一阶连续导数的函数类  $C^1(\bar{\Omega})$  在  $W_2^1(\Omega)$  内稠密, 因此要证明网格函数类序列  $\{S_n\}$  在  $W_2^1$  内完全, 只须证明它们在  $C^1$  内完全. 为此只须研究用网格函数去逼近具有一阶连续导数的函数时的误差估计.

#### 4.1 用网格函数逼近

设  $\Omega$  为平面上的一个有界开域, 它的边界  $\partial\Omega$  由一个或几个互不相交的片状光滑闭曲线组成. 设  $u(P)$  在  $\bar{\Omega}$  上有连续的一阶导数, 熟知  $u$  可以延拓到全平面上而保持有连续的一阶导数<sup>[6]</sup>. 在以下的构造和讨论中, 将可能牵涉到  $\bar{\Omega}$  以外的  $u$ , 那时将默认它是  $u$  的某个固定的延拓. 如 §2 那样对  $\Omega$  作网格剖分  $\{A_\alpha, B_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, M$ . 以  $u$  在各正规格点的值  $\{u(P_i)\}_{i=1, \dots, N}$  为基值作双线性补插网格函数  $v(P), v \in S'(\Omega)$ . 这样的网格函数  $v$  称为  $u$  的自然网格逼近. 我们来估计  $v$  对  $u$  按函数本身和一阶导数的绝对偏差. 为此只需对典型格区  $A = A_\alpha, B = B_\alpha$  进行估计, 并设  $B$  为三角形或矩形. 当  $B$  为平行四边形时, 结果可由矩形结果导出.

定义

$$\omega'(d) = \sup_{\substack{PP' \leq d \\ 0 \leq \theta \leq \pi}} |u_\theta(P) - u_\theta(P')|,$$

这里  $u_\theta = (\cos \theta)u_x + (\sin \theta)u_y$ . 命  $\delta = \delta_\alpha$  为域  $A_\alpha \cup B_\alpha$  的直径, 当  $\delta \rightarrow 0$  时  $\omega'(\delta) \rightarrow 0$ .

1. 当  $B = B_\alpha$  为三角形, 顶点均为正规时:

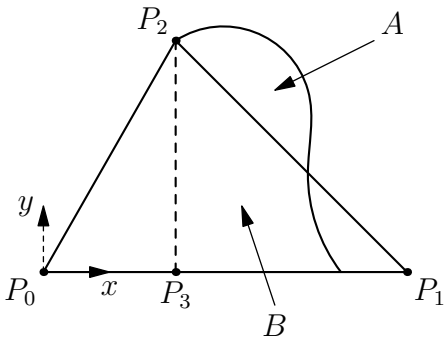


图 7

记  $B$  的顶点为  $P_0, P_1, P_2$ . 不妨命  $P_0P_1$  为最长边, 并取这个方向为正  $x$  向. 命最长边长度为  $h_x$ , 以此边为基底时三角形的高记为  $h_y$ . 命  $P_3$  为自  $P_2$  至  $P_0P_1$  的垂足, 由于  $P_0P_1$  为最长边,  $P_3$  一定在  $(P_0, P_1)$  内部, 取  $y$  的方向使得  $P_2$  在  $y > 0$  的一边<sup>11</sup>(见图 7), 于是

$$v(P) = u(P_0) + \frac{u(P_1) - u(P_0)}{h_x}x + \frac{u(P_2) - \bar{u}(P_3)}{h_y}y, \quad (4.1)$$

这里  $\bar{u}(P_3)$  为两端顶点值  $u(P_0), u(P_1)$  的线性内插:

$$\bar{u}(P_3) = \sigma u(P_1) + (1 - \sigma)u(P_0), \quad (4.2)$$

$\sigma : (1 - \sigma) = \overline{P_0P_3} : \overline{P_1P_3}$ . 由于

$$\begin{aligned} u(P_1) &= u(P_3) + \int_{P_3}^{P_1} u_x dx = u(P_3) + (1 - \sigma)h_x u_x(Q_1), \quad Q_1 \in (P_1, P_3), \\ u(P_0) &= u(P_3) + \int_{P_3}^{P_0} u_x dx = u(P_3) - \sigma h_x u_x(Q_0), \quad Q_0 \in (P_0, P_3), \end{aligned}$$

故得

<sup>11</sup>编者注: 原文误排为  $y_0 > 0$ , 现改.

$$\bar{u}(P_3) = u(P_3) + \sigma(1 - \sigma)h_x [u_x(Q_1) - u_x(Q_0)],$$

于是

$$\begin{aligned} v_x(P) &= \frac{u(P_1) - u(P_0)}{h_x} = u_x(Q), \quad Q \in (P_0, P_1), \\ v_y(P) &= \frac{u(P_2) - u(P_3)}{h_y} + \frac{\sigma(1 - \sigma)}{h_y} [u_x(Q_1) - u_x(Q_0)] \\ &= u_y(Q) + \frac{\sigma(1 - \sigma)}{h_y} [u_x(Q_1) - u_x(Q_0)]. \end{aligned}$$

因此得到导数估计

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \omega'(\delta), \quad (4.3)$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \left[ 1 + \frac{h_x}{h_y} \sigma(1 - \sigma) \right] \omega'(\delta). \quad (4.4)$$

又由于

$$v(P) - u(P) = v(P_0) - u(P_0) + \int_{P_0}^{P_1} (v_x - u_x) dx + (v_y - u_y) dy \quad (4.5)$$

及  $v(P_0) = u(P_0)$ , 故得到函数本身的偏差估计:

$$|v(P) - u(P)| \leq \left[ 2 + \frac{h_x}{h_y} \sigma(1 - \sigma) \right] \delta \cdot \omega'(\delta) \quad (4.6)$$

2. 当  $B$  为矩形, 顶点均为正规时:

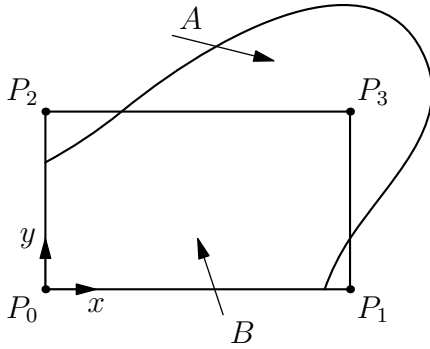


图 8

记  $B$  的顶点为  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . 局部地取最长边  $P_0P_x$  为正  $x$  轴,  $P_0P_2$  为正  $y$  轴, 两边长记为  $h_x, h_y$ ,  $P_0$  为原点 (见图 8), 于是

$$\begin{aligned} v(P) &= \frac{h_x - x}{h_x} \cdot \frac{h_y - y}{h_y} \cdot u(P_0) + \frac{x}{h_x} \cdot \frac{h_y - y}{h_y} \cdot u(P_1) + \\ &\quad \frac{h_x - x}{h_x} \cdot \frac{y}{h_y} \cdot u(P_2) + \frac{x}{h_x} \cdot \frac{y}{h_y} \cdot u(P_3). \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} v_x(P) &= \frac{u(P_1) - u(P_0)}{h_x} \cdot \left( 1 - \frac{y}{h_y} \right) + \frac{u(P_3) - u(P_2)}{h_x} \cdot \frac{y}{h_y} \\ &= u_x(Q_1) \left( 1 - \frac{y}{h_y} \right) + u_x(Q_2) \frac{y}{h_y}, \\ &\quad Q_1 \in (P_0, P_1), Q_2 \in (P_2, P_3). \end{aligned}$$

于是

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \left( 1 - \frac{y}{h_y} \right) [u_x(Q_1) - u_x(P)] + \frac{y}{h_y} [u_x(Q_2) - u_x(P)].$$

当  $A \subset B$  时,  $\frac{y}{h_y}$  与  $\left( 1 - \frac{y}{h_y} \right)$  均非负, 其和为 1, 故有

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \omega'(\delta),$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \omega'(\delta);$$

当  $A \not\subset B$  时, 如命  $d_x$  为  $A \cup B$  的横向直径,  $d_y$  为  $A \cup B$  的纵向直径, 则有

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \left(1 + \frac{2d_y}{h_y}\right) \omega'(\delta), \quad (4.8)$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \left(1 + \frac{2d_x}{h_x}\right) \omega'(\delta); \quad (4.9)$$

也不难见到<sup>12</sup>,

$$|v(P) - u(P)| \leq \left[ d_x \left(1 + \frac{2d_y}{h_y}\right) + d_y \left(1 + \frac{2d_x}{h_x}\right) \right] \omega'(\delta). \quad (4.10)$$

对于非正规顶点  $P_i$ , 插值基值不取  $u(P_i)$  而取  $P_i$  对它所属的两个正规顶点的值  $u(P'_i)$ ,  $u(P''_i)$  的线性内插值. 此时也有类似的估计. 为此只需把以前推导中的  $u(P_i)$  代替以  $\bar{u}(P_i)$ ; 在三角形时  $i = 0, 1, 2$ , 在矩形时  $i = 0, 1, 2, 3$ .

$$\bar{u}(P_i) = \sigma_i u(P'_i) + (1 - \sigma_i) u(P''_i) = u(P_i) + \sigma_i (1 - \sigma_i) h_i [u_{\theta_i}(Q''_i) - u_{\theta_i}(Q'_i)],$$

此处  $h_i = \overline{P'_i P''_i}$ ,  $0 \leq \sigma_i \leq 1$ ,  $Q'_i \in (P'_i, P''_i)$ ,  $Q''_i \in (P''_i, P_i)$ .  $u_{\theta_i}$  为  $u$  沿  $\overline{P'_i P''_i}$  的方向导数. 注意到

$$|u_{\theta_i}(Q''_i) - u_{\theta_i}(Q'_i)| \leq \omega'(h_i),$$

不难导出下列结果, 在这些结果中系设全部顶点为非正规, 当有顶点为正规时只需略去有关的项.

当  $B$  为三角形, 顶点为非正规时:

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \left[ 1 + \sum_{i=0}^1 \frac{h_i}{h_x} \sigma_i (1 - \sigma_i) \right] \omega'(\delta'), \quad (4.11)$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \left[ 1 + \frac{h_x}{h_y} \sigma (1 - \sigma) + \sum_{i=0}^2 \frac{h_i}{h_y} \sigma_i (1 - \sigma_i) \right] \omega'(\delta'), \quad (4.12)$$

在这里  $\delta' = \max\{\delta, h_0, h_1, h_2\}$ .

当  $B$  为矩形内插格区, 顶点为非正规时:

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \left[ 1 + \sum_{i=0}^3 \frac{h_i}{h_x} \sigma_i (1 - \sigma_i) \right] \omega'(\delta'), \quad (4.13)$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \left[ 1 + \sum_{i=0}^3 \frac{h_i}{h_y} \sigma_i (1 - \sigma_i) \right] \omega'(\delta'), \quad (4.14)$$

这里  $\delta' = \max\{\delta, h_0, h_1, h_2, h_3\}$ .

当  $B$  为矩形外插格区, 顶点为非正规时:

---

<sup>12</sup>编者注: 原文 (4.10) 式第二个分母误排为  $h_y$ , 现改.

$$|v_x(P) - u_x(P)| \leq \left\{ 1 + \frac{2d_y}{h_y} + \left( 1 + \frac{d_y}{h_y} \right) \left[ \frac{h_0}{h_x} \sigma_0(1 - \sigma_0) + \frac{h_1}{h_x} \sigma_1(1 - \sigma_1) \right] + \frac{d_y}{h_y} \left[ \frac{h_2}{h_x} \sigma_2(1 - \sigma_2) + \frac{h_3}{h_x} \sigma_3(1 - \sigma_3) \right] \right\} \omega'(\delta'), \quad (4.15)$$

$$|v_y(P) - u_y(P)| \leq \left\{ 1 + \frac{2d_x}{h_x} + \left( 1 + \frac{d_x}{h_x} \right) \left[ \frac{h_0}{h_y} \sigma_0(1 - \sigma_0) + \frac{h_2}{h_y} \sigma_2(1 - \sigma_2) \right] + \frac{d_x}{h_x} \left[ \frac{h_1}{h_y} \sigma_1(1 - \sigma_1) + \frac{h_3}{h_y} \sigma_3(1 - \sigma_3) \right] \right\} \omega'(\delta'), \quad (4.16)$$

利用这些导数估计和 (4.5) 可以得函数本身的估计, 不赘述了.

考查一下有关网格和规则性的一些参数. 网格中各格区  $A_\alpha \cup B_\alpha$  的直径的最大值时网格粗细的主要标志. 对于三角形格区, 比值  $\frac{h_x}{h_y} \sigma(1 - \sigma)$  也有明确意义. 不难验证, 一系列三角形的  $\frac{h_x}{h_y} \sigma(1 - \sigma)$  保持为有界的充要条件为各三角形的最大内角有小于  $180^\circ$  的上界. 对于矩形或平行四边形格区, 横 (纵) 向直径对横 (纵) 边长之比标志外插延伸的程度, 不妨称外延比. 只在外插格区时外延比才会大于 1. 对于平行四边形, 所谓纵横两向是指与四边平行的方向. 在非正规格点上长短边之比也反映格距变化的情况.

**网格函数逼近定理.** 设对区域  $\Omega$  作一系列的网格剖分  $\{A_\alpha^{(n)}, B_\alpha^{(n)}\}_{\alpha=1, \dots, M_n}$ , 命相应的网格函数类为  $S_n(\Omega)$ . 设最大格区直径  $\rightarrow 0$ , 并且设:

- 1°. 当含有三角形格区时, 最大内角有小于  $180^\circ$  的上界.
- 2°. 当含有外插的平行四边形格区时, 最大外延比有上界.
- 3°. 当含有非矩形的平行四边形格区时, 最大内角有小于  $180^\circ$  的上界.
- 4°. 当含有非正规格点时, 在这些格点的最大长短边长比有上界.

于是, 每个  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  的自然网格逼近  $v_n$  分别按函数本身及一阶导数一致收敛于  $u$ . 因此也按  $W_2^1(\Omega)$  模量收敛. 从而离散子空间列  $S_n(\Omega)$  在  $W_2^1(\Omega)$  内完全.

在前面插值函数的误差估计的基础上证明本定理时显然的, 不待细说. 只须指出, 前面的估计式中用的坐标都是局部的. 各个格区之间可能差一个平移及旋转. 对于非矩形的平行四边形则前列公式仍可用, 但  $x, y$  应了解为斜坐标. 如果用直角坐标  $\xi, \eta$ , 并使  $\xi$  方向与  $x$  方向一致, 则有

$$u_\xi = u_x, \quad u_\eta = \frac{1}{\sin \theta} (u_y - u_x \cos \theta),$$

这里  $\theta$  为原来斜坐标中  $x$  向与  $y$  向的夹角; 正由于因子  $\frac{1}{\sin \theta}$ , 所以在网格加密时为了保证逼近须加条件 3°.

对应于向量函数空间  $W_2^{1,2}(\Omega)$  也可以构造向量网格函数空间  $S_n^2(\Omega) = S_n^2 \subset W_2^{1,2}$ . 也有同样的逼近定理.

注意定理所列的条件是相当宽的, 并且时为了保证一致模量下的收敛性而设. 如果只求  $S_n$  在  $W_2^1$  中的完全性, 这些条件还可能放松. 这些条件本身也比较自然, 在设计网格时考虑它们是有益的.

## 4.2 离散解的收敛性

在应用 §3.2 判定二次型的正定性或拟正定性的基础上有了网格函数类  $S_n(\Omega)$  (或  $S_n^2(\Omega)$ ) 在希氏空间  $H = W_2^1(\Omega)$  (或  $W_2^{1,2}(\Omega)$ ) 内的完全性, 就可应用 §3 的稳定性逼近性定理去证明二阶椭圆型问题或二维二阶弹性力学方程组各类边值问题在各种系数条件下差分格式的收敛性 (按  $W_2^1$ , 即函数及导数均方的收敛性). 关于差分方程的性质见 §3.3. 利用 (3.17) 可以得出误差估计. 注意在这里连续问题与离散问题的理论背景是统一的.

首先考虑所谓理想的离散模型, 即差分方程的系数系按准确的微分积分得出.

对于第三类问题, 由于它们是正定自由变分问题, 直接应用 §3 的逼近性定理 1 即得收敛性.

对于第二类问题. 在二阶椭圆方程中, 各种不同系数的  $D(u)$  均与 §3 中的二次型  $\varphi_1(u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) d\sigma$  等价. 因此有公共的零集  $P$ , 并且  $S_n \supset P$ . 在二维弹性问题中, 各种  $D(u)$  均等价于  $\varphi_{1,2}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^2(u) d\sigma$ , 因此也有共同的零集  $P$ ,  $S_n \supset P$ . 于是同样可以应用逼近性定理 2 而得收敛性<sup>13</sup>.

第一类边值问题要复杂些. 设第一类边界段  $\Gamma_1$  为折线段. 作网格  $\Omega_n$  使得  $\Gamma_1$  都在网格边界上,  $\Gamma_1$  上的折点总是格点. 第一类边界条件离散地表示为

$$u(P_i) = \chi(P_i), \quad i = 1, \dots, N'.$$

我们更假设在  $\Gamma_1$  上定义的  $\chi$  可以拓展为定义在  $\bar{\Omega}$  上的具有一阶连续导数的函数  $z$ . 于是当网格列满足网格逼近定理的条件时, 差分格式收敛. 对于弹性力学问题也类似. 事实上, 对于函数  $z \in C^2(\bar{\Omega})$  作自然网格逼近  $z_n \in S_n(\Omega)$ ,  $z_n \rightarrow z$ . 一切满足边值条件的  $u \in L$  可以表示为  $u = z + v$ ,  $v \in K$ ,  $K$  时在  $\Gamma_1$  上等于 0 的函数所组成的闭子空间. 离散化后相当于在  $L_n = z_n + S_n \cap K$  上定解. 显然存在补足于  $D(u)$  的泛函, 如

$$g(u) = \int_{\Gamma_1} u ds,$$

使得当  $v \in K$  时  $g(v) = 0$ . 于是可用 §3 中有关约束变分问题的稳定性逼近性定理 3 而得收敛性.

应该指出, 再有内间断线  $\Gamma_0$  时, 即使不把  $\Gamma_0$  作为格线, 但只要离散模型是理想的, 即系数产生时严格考虑到系数的间断奇异性而准确得出, 那么在理论上是保证收敛的, 但也能证明收敛速度将慢于将间断线作为格线的情况.

对于受扰的离散模型, 则为了保证收敛性, 须先保证“系数”的收敛性, 即验证稳定性定理中的微扰条件. 为此, 例如可以要求

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |a(x, y) - a_n(x, y)| &\rightarrow 0, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |b(x, y) - b_n(x, y)| &\rightarrow 0, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\Gamma_2} |c(s) - c_n(s)| &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

<sup>13</sup>编者注: 本段第二个积分公式内求和上标 2 在原文中漏排, 现加.

$$\int_{\Omega} (\varphi - \varphi_n)^2 d\sigma \rightarrow 0,$$

$$\int_{\Omega} (\psi - \psi_n)^2 ds \rightarrow 0.$$

当  $a, b, c, \varphi, \psi$  为连续函数时, 可以取  $a_n, b_n, c_n, \varphi_n, \psi_n$  为它们的片状双线性自然网格逼近或片状常值网格逼近而保持微扰条件成立. 对于第二类问题则还要注意使得受扰泛函

$$J_n(u) = \frac{1}{2} D_n(u) - f_n(u)$$

中的  $f_n$  满足相容条件

$$f_n(v) = 0, \text{ 对一切 } v \in P.$$

应该指出, 网格函数法的解的收敛性是按广义函数  $W_2^1$  意义, 即函数与导数都均方收敛. 许多问题求解的目的往往要求导数, 因此在导数上能保持均方收敛是很有利的. 此外, 由于网格函数的特点, 有穷多个节点值唯一地确定了区域  $\Omega$  上的函数. 它的微商也是唯一确定了. 当人们需要微商是即按它的解析形式微分, 而在构成模型时也是按同一原则来微分的, 这就表示格式构成与对于数值结果的解释是协调一致的. 许多其它差分格式往往缺少这种协调性.

基于网格函数的变分差分格式曾用于弹性力学问题, 取得了较好的结果; 在 [7] 中对此做了研究, 包括理论的分析 and 论证. 这类格式构成原则虽简单, 但形式上可以很复杂. 因此, 需要考虑到几何的、解析的种种特征而把格式的形式进一步系统化、规律化, 也需要更细致地分析它在各种条件下的收敛性状, 研究这类格式的代数特征以发展有关的解算方法. 关于对于其它坐标系统, 高维区域, 高阶方程等的推广, 以及如何把解的奇异性吸收到这一类格式中的问题, 作者将在以后报导.

## 参 考 文 献

- [1] Varga R., Matrix Iterative Analysis, New Jersey, 1962.
- [2] Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, 1952; 米赫林, 二次泛函的极小问题, 科学出版社, 1964.
- [3] Courant R., Friedrichs, K. O., Lewy H., Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **100**(1928), 32—74
- [4] Polya G., Estimates for Eigenvalues, pp. 200—207 of Studies in Mathematics and Mechanics, presented to Richard von Mises, New York, 1954.
- [5] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Лен. Гос. Университета, 1950; 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959.
- [6] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ГИТТЛ, 1949; 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 第一卷第二分册, 高等教育出版社, 1955.
- [7] 黄鸿慈、王荅贤、崔俊芝、赵静芳、林宗楷, 按位移解平面弹性问题的差分方法(未发表).
- [8] 黄鸿慈, 关于椭圆型方程 Neumann 问题的数值解法, 应用数学与计算数学, **1**(1964), 121—130.

#### 附录: 英译版勘误列表

- (1.8) 式的第一个积分中缺少  $bu^2$  项.
- (2.8) 式省略了  $i = 1, 2, \dots, N$ .
- (2.15) 式的编号被误排为 (2.25).
- (2.17) 式的编号被误排为 (2.7).
- (2.19) 式省略了  $i = 1, \dots, r$ .
- (2.21) 式前段文字中的边界条件被误排为  $u \equiv |_{\Gamma_1} = \chi \equiv 1$ .
- (3.7) 式前段文字中的积分变量  $dx$  被误排为  $ds$ .
- (3.17) 式前面第 2 个公式中的倒数第二项  $\frac{1}{2}\|u - u_0\|_D^2$  漏排了下标  $D$ .
- (3.23) 式前三行中将  $Z^{(i)}$  误排为  $z_i$ .