

CFD HW2

差分格式的构造。

Student: 潘佳怡, jiayipan@stu.pku.edu.cn

Problem 1: 格式的构造与精度

(a) 一阶与二阶导数的两种差分格式。

- (i) $(\frac{\partial u}{\partial x})_j \approx \frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x}$ 向前差分
 $(\frac{\partial u}{\partial x})_j \approx \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}$ 中心差分
- (ii) $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_j \approx \frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2}$ 二阶中心差分
 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_j \approx -\frac{u_{j+2}-16u_{j+1}+30u_j-16u_{j-1}+u_{j-2}}{12\Delta x^2}$ 四阶中心差分

(b) 差分格式的精度。

(i) 一阶导数向前差分: 将u在j点做泰勒级数展开

$$u_{j+1} = u_j + (\Delta x)u'_j + (\frac{\Delta x^2}{2})u''_j + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x} = u'_j + (\frac{\Delta x}{2})u''_j + O(\Delta x^2)$$

则误差项为 $O(\Delta x)$, 一阶精度。

(ii) 一阶导数中心差分:

$$u_{j+1} = u_j + (\Delta x)u'_j + (\frac{\Delta x^2}{2})u''_j + (\frac{\Delta x^3}{6})u'''_j + O(\Delta x^4)$$

$$u_{j-1} = u_j - (\Delta x)u'_j + (\frac{\Delta x^2}{2})u''_j - (\frac{\Delta x^3}{6})u'''_j + O(\Delta x^4)$$

$$u_{j+1} - u_{j-1} = (2\Delta x)u'_j + (\frac{\Delta x^3}{3})u'''_j + O(\Delta x^5)$$

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x} = u'_j + (\frac{\Delta x^2}{6})u'''_j + O(\Delta x^4)$$

则误差项为 $O(\Delta x^2)$, 二阶精度。

(iii) 二阶导数中心差分:

$$u_{j+1} = u_j + (\Delta x)u'_j + \frac{\Delta x^2}{2}u''_j + \frac{\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5),$$

$$u_{j-1} = u_j - (\Delta x)u'_j + \frac{\Delta x^2}{2}u''_j - \frac{\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5).$$

$$\text{相加得到: } u_{j+1} + u_{j-1} = 2u_j + \Delta x^2 u''_j + \frac{\Delta x^4}{12} u''''_j + O(\Delta x^6).$$

$$\frac{u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j}{\Delta x^2} = u''_j + \frac{\Delta x^2}{12} u''''_j + O(\Delta x^4).$$

则误差项为 $O(\Delta x^2)$, 该格式为二阶精度。

(iv) 四阶中心差分:

$$u_{j+2} = u_j + 2\Delta x u'_j + 2\frac{\Delta x^2}{2}u''_j + \frac{8\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{16\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5),$$

$$u_{j-2} = u_j - 2\Delta x u'_j + 2\frac{\Delta x^2}{2}u''_j - \frac{8\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{16\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5),$$

$$u_{j+1} = u_j + \Delta x u'_j + \frac{\Delta x^2}{2}u''_j + \frac{\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5),$$

$$u_{j-1} = u_j - \Delta x u'_j + \frac{\Delta x^2}{2}u''_j - \frac{\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24}u''''_j + O(\Delta x^5).$$

取线性组合:

$$-u_{j+2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j-2} = -u_j - 2\Delta x u'_j - 2\frac{\Delta x^2}{2}u''_j - \frac{8\Delta x^3}{6}u'''_j - \frac{16\Delta x^4}{24}u''''_j$$

$$+ 16\left(u_j + \Delta x u'_j + \frac{\Delta x^2}{2}u''_j + \frac{\Delta x^3}{6}u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24}u''''_j\right)$$

$$- 30u_j$$

$$\begin{aligned}
& + 16 \left(u_j - \Delta x u'_j + \frac{\Delta x^2}{2} u''_j - \frac{\Delta x^3}{6} u'''_j + \frac{\Delta x^4}{24} u''''_j \right) \\
& - u_j + 2\Delta x u'_j - 2\frac{\Delta x^2}{2} u''_j + \frac{8\Delta x^3}{6} u'''_j - \frac{16\Delta x^4}{24} u''''_j + O(\Delta x^5). \\
& \frac{-u_{j+2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j-2}}{12\Delta x^2} = u''_j + \frac{\Delta x^4}{90} u''''_j + O(\Delta x^6).
\end{aligned}$$

则误差项为 $O(\Delta x^4)$ ，该格式为四阶精度。

Problem 2: 数值验证格式的精度

范例函数均使用 $y = \sin x$ 。

```

步长:0.001, 一阶导数向前差分误差:0.0004, 一阶导数中心差分误差:1.1785109255146864e-07
步长:0.001, 一阶导数向前差分误差:0.0004, 一阶导数中心差分误差:1.178512034627488e-07
步长:0.0013894954943731374, 一阶导数向前差分误差:0.0005, 一阶导数中心差分误差:2.2753487471938172e-07
步长:0.0013894954943731374, 一阶导数向前差分误差:0.0005, 一阶导数中心差分误差:2.2753487460835942e-07
步长:0.0019306977288832496, 一阶导数向前差分误差:0.0007, 一阶导数中心差分误差:4.393010566428046e-07
步长:0.0019306977288832496, 一阶导数向前差分误差:0.0007, 一阶导数中心差分误差:4.3930102777700597e-07
步长:0.0026826957952797246, 一阶导数向前差分误差:0.0009, 一阶导数中心差分误差:8.481574107488399e-07
步长:0.0026826957952797246, 一阶导数向前差分误差:0.0009, 一阶导数中心差分误差:8.481574106378176e-07
步长:0.003727593720314938, 一阶导数向前差分误差:0.0013, 一阶导数中心差分误差:1.637535001708379e-06
步长:0.003727593720314938, 一阶导数向前差分误差:0.0013, 一阶导数中心差分误差:1.6375350463393445e-06
步长:0.005179474679231213, 一阶导数向前差分误差:0.0018, 一阶导数中心差分误差:3.1615830826670077e-06
步长:0.005179474679231213, 一阶导数向前差分误差:0.0018, 一阶导数中心差分误差:3.1615830933251488e-06
步长:0.0071968567300115215, 一阶导数向前差分误差:0.0026, 一阶导数中心差分误差:6.104053652533636e-06
步长:0.0071968567300115215, 一阶导数向前差分误差:0.0025, 一阶导数中心差分误差:6.104053660194175e-06
步长:0.01, 一阶导数向前差分误差:0.0035, 一阶导数中心差分误差:1.1785054096269398e-05
步长:0.01, 一阶导数向前差分误差:0.0035, 一阶导数中心差分误差:1.1785054107260606e-05
步长:0.013894954943731374, 一阶导数向前差分误差:0.0049, 一阶导数中心差分误差:2.2753271291753308e-05
步长:0.013894954943731374, 一阶导数向前差分误差:0.0049, 一阶导数中心差分误差:2.275327129963589e-05
步长:0.019306977288832496, 一阶导数向前差分误差:0.0069, 一阶导数中心差分误差:4.392929452678995e-05
步长:0.019306977288832496, 一阶导数向前差分误差:0.0068, 一阶导数中心差分误差:4.392929453245209e-05
步长:0.026826957952797246, 一阶导数向前差分误差:0.0096, 一阶导数中心差分误差:8.481271796789702e-05
步长:0.026826957952797246, 一阶导数向前差分误差:0.0094, 一阶导数中心差分误差:8.481271796567658e-05
步长:0.0372759372031494, 一阶导数向前差分误差:0.0133, 一阶导数中心差分误差:0.00016374223804827004
步长:0.0372759372031494, 一阶导数向前差分误差:0.0130, 一阶导数中心差分误差:0.00016374223804671573
步长:0.0517947467923121, 一阶导数向前差分误差:0.0186, 一阶导数中心差分误差:0.00031611632627404074
步长:0.0517947467923121, 一阶导数向前差分误差:0.0180, 一阶导数中心差分误差:0.0003161163262739297
步长:0.07196856730011518, 一阶导数向前差分误差:0.0260, 一阶导数中心差分误差:0.0006102488849064613
步长:0.07196856730011518, 一阶导数向前差分误差:0.0248, 一阶导数中心差分误差:0.0006102488849032417
步长:0.1, 一阶导数向前差分误差:0.0365, 一阶导数中心差分误差:0.001177922186606284
步长:0.1, 一阶导数向前差分误差:0.0341, 一阶导数中心差分误差:0.0011779221866056178

```

Figure 1: 一阶导数精度数据

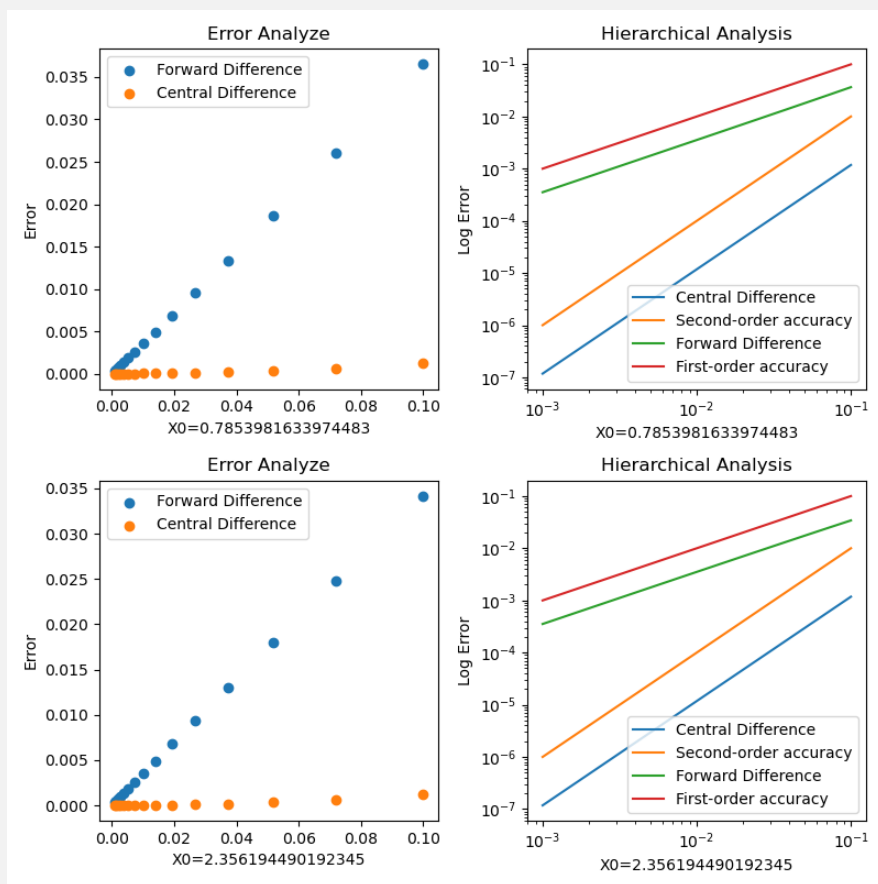


Figure 2: 一阶导数精度

经过验证，一阶导数向前差分格式是一阶精度，因为 $\log(error)$ 和 $\log(h)$ 的参考线平行，一阶导数中心差分格式是二阶精度，因为 $\log(error)$ 和 $\log(h^2)$ 的参考线平行。

步长:0.01, 二阶导数二阶中心差分误差:5.892538209817388e-06,二阶导数四阶中心差分误差:8.17796941277038e-11
 步长:0.01, 二阶导数二阶中心差分误差:5.892538209928411e-06,二阶导数四阶中心差分误差:8.122469363769369e-11
 步长:0.011787686347935873, 二阶导数二阶中心差分误差:8.187643241508447e-06,二阶导数四阶中心差分误差:1.5268497577380913e-10
 步长:0.011787686347935873, 二阶导数二阶中心差分误差:8.187643241619469e-06,二阶导数四阶中心差分误差:1.527517001775891e-10
 步长:0.013894954943731374, 二阶导数二阶中心差分误差:1.137667265660447e-05,二阶导数四阶中心差分误差:2.9363722564568207e-10
 步长:0.013894954943731374, 二阶导数二阶中心差分误差:1.1376672656715492e-05,二阶导数四阶中心差分误差:2.933497889046066e-10
 步长:0.016378937069540637, 二阶导数二阶中心差分误差:1.5807795626598953e-05,二阶导数四阶中心差分误差:5.662110780235707e-10
 步长:0.016378937069540637, 二阶导数二阶中心差分误差:1.5807795626709975e-05,二阶导数四阶中心差分误差:5.663146618317683e-10
 步长:0.019306977288832496, 二阶导数二阶中心差分误差:2.1964783868511084e-05,二阶导数四阶中心差分误差:1.0920294668537167e-09
 步长:0.019306977288832496, 二阶导数二阶中心差分误差:2.1964783868622106e-05,二阶导数四阶中心差分误差:1.09207920484522e-09
 步长:0.022758459260747887, 二阶导数二阶中心差分误差:3.051982052171276e-05,二阶导数四阶中心差分误差:2.1080110990112644e-09
 步长:0.022758459260747887, 二阶导数二阶中心差分误差:3.0519820307439716e-05,二阶导数四阶中心差分误差:2.1078325751489047e-09
 步长:0.02682695795279726, 二阶导数二阶中心差分误差:4.240686789369619e-05,二阶导数四阶中心差分误差:4.0695604663909535e-09
 步长:0.02682695795279726, 二阶导数二阶中心差分误差:4.240686773948621e-05,二阶导数四阶中心差分误差:4.069393377825747e-09
 步长:0.03162277660168379, 二阶导数二阶中心差分误差:5.8923600973037615e-05,二阶导数四阶中心差分误差:7.856097661296246e-09
 步长:0.03162277660168379, 二阶导数二阶中心差分误差:5.892360097314864e-05,二阶导数四阶中心差分误差:7.85615328346978e-09
 步长:0.0372759372031494, 二阶导数二阶中心差分误差:8.187301509787748e-05,二阶导数四阶中心差分误差:1.5167264999504937e-08
 步长:0.0372759372031494, 二阶导数二阶中心差分误差:8.187301501805244e-05,二阶导数四阶中心差分误差:1.516712533344844e-08
 步长:0.043939705607607904, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00011376013335484547,二阶导数四阶中心差分误差:2.9281856828156094e-08
 步长:0.043939705607607904, 二阶导数二阶中心差分误差:0.0001137601333549565,二阶导数四阶中心差分误差:2.9281804203584727e-08
 步长:0.0517947467923121, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00015806523047245946,二阶导数四阶中心差分误差:5.6530355618811257e-08
 步长:0.0517947467923121, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00015806523047257048,二阶导数四阶中心差分误差:5.6530341963068054e-08
 步长:0.061054022965853265, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00021962327602342846,二阶导数四阶中心差分误差:1.0913284720359684e-07
 步长:0.061054022965853265, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00021962327599367448,二阶导数四阶中心差分误差:1.0913279513413698e-07
 步长:0.07196856730011521, 二阶导数二阶中心差分误差:0.0003051507841540513,二阶导数四阶中心差分误差:2.1067506095207023e-07
 步长:0.07196856730011521, 二阶导数二阶中心差分误差:0.0003051507841541623,二阶导数四阶中心差分误差:2.1067505739935655e-07
 步长:0.08483428982440717, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00042397712833919243,二阶导数四阶中心差分误差:4.066765860732957e-07
 步长:0.08483428982440717, 二阶导数二阶中心差分误差:0.00042397712833930346,二阶导数四阶中心差分误差:4.0667656564519206e-07
 步长:0.1, 二阶导数二阶中心差分误差:0.0005890592675165118,二阶导数四阶中心差分误差:7.849730557785151e-07
 步长:0.1, 二阶导数二阶中心差分误差:0.0005890592675055206,二阶导数四阶中心差分误差:7.8497303190872e-07

Figure 3: 二阶导数精度数据

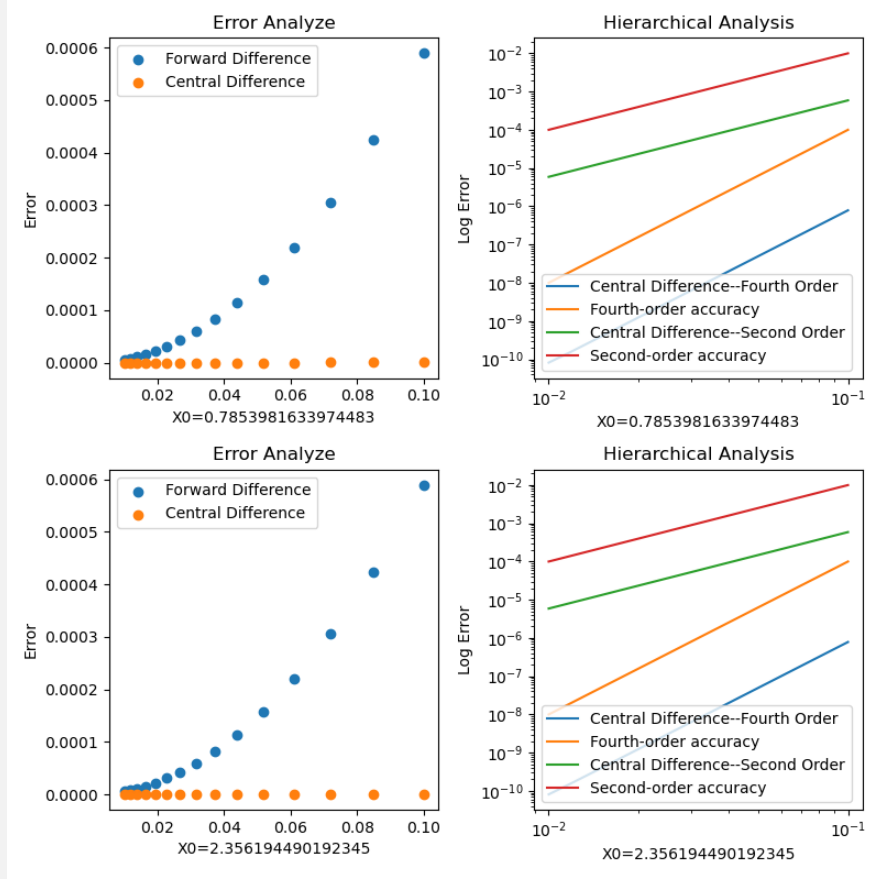


Figure 4: 二阶导数精度

经过验证，二阶导数二阶中心差分格式是二阶精度，因为 $\log(\text{error})$ 和 $\log(h^2)$ 的参考线平行，二阶导数四阶中心差分格式是四阶精度，因为 $\log(\text{error})$ 和 $\log(h^4)$ 的参考线平行。

Problem 3: 舍入误差和截断误差的规律

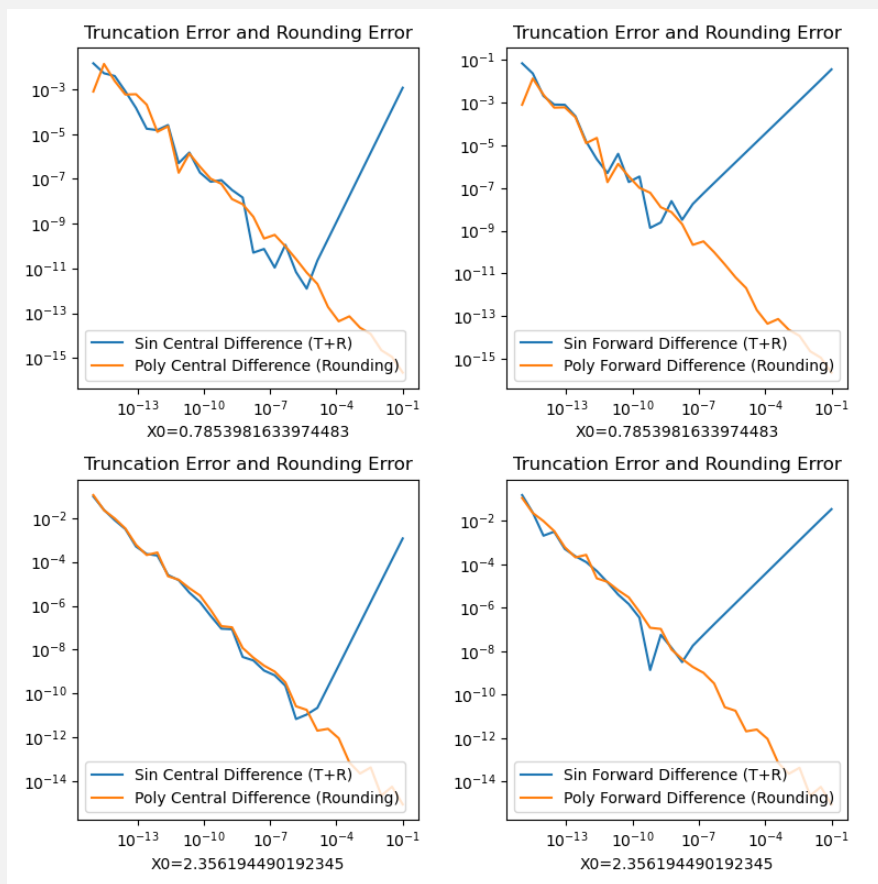


Figure 5: 一阶导数舍入误差和截断误差。范例函数分别为 $y = x$ 以及 $y = \sin x$



Figure 6: 二阶导数舍入误差和截断误差。范例函数分别为 $y = x^2$ 以及 $y = \sin x$

对于舍入误差，步长越小，舍入误差越大，在步长很小时导致误差回升。对于截断误差，主要受格式精度影响，步长越小，截断误差越小，但不能无限减小。当步长很小时，舍入误差起主导作用，但当步长逐渐扩大，无截断误差的函数的误差持续减小，有截断误差的函数的误差基本以 $O(h^p)$ 的速率上升。

Problem 4: 单精度和双精度的影响

单精度算得出的计算结果，在处理非常小或非常大数字的误差增加，尤其是通过多个操作积累的误差，双精度是可以保证在这些极端情况下仍然能保持较高的计算精度，特别适用于需要高精度的科学计算，双精度能确保结果的准确性和可靠性。