1. 生成格雷码图像

1.1 格雷码

一种二进制码制，是一种无权码，它的特点是前后相邻码值只改变一位数，这样可以减小错位误差，因此又称为最小错位误差码。下面是四位格雷码值表：

十进制数	普通二进制码	格雷码
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

1.2 生成n位格雷码

1.2.1 传统方法生成：

- 第一步，生成n位全零码
- 第二步，改变最右端的码值
- 第三步，改变自右起第一个“1”码元左边的码元
- 重复第二、三步直至得到2^n个格雷码

可以看出，传统方法不容易用代码实现，接下来介绍递归法

1.2.2 递归法

经过观察发现n位格雷码可以由（n-1）位格雷码得到，即

- 第一步：（n-1）位格雷码正序排列最左侧（前缀）补0
- 第二步：（n-1）位格雷码逆序排列最左侧（前缀）补1
- 第三步：一、二步得到结果依次排列得到n位格雷码

如：
1位： 0 1
正序 00 01
逆序 11 10

2位： 00 01 11 10
正序 000 001 011 010
逆序 110 111 101 100

3位： 000 001 011 010 110 111 101 100

可见递归法比较容易代码实现，因此本项目采用递归法生成n位格雷码

1.2.3 格雷码与普通二进制码的转换

传统方法

- 二进制码-->格雷码

二进制码与其右移一位高位补零后的数码异或后得到格雷码

> 如：二进制0010 --> 右移0001 -->0010 xor 0001 --> 格雷码0011

- 格雷码-->二进制码

最左边的一位不变，从左边第二位起，将每位与左边一位解码后的值异或，作为该位解码后的值。依次异或，直到最低位。依次异或转换后的值（二进制数）就是格雷码转换后二进制码的值。

> 如：格雷码（用G表示）0011-->二进制码（用B表示）左边第一位不变0xxx-->解码的第二位G2 xor B1 =0 xor 0 -->00xx -->G3 xor B2 --> 001x -->G4 xor B3 -->0010(二进制码)

字典查询

在生成格雷码的同时，将每一位格雷码与其对应的十进制数组成键值对储存在字典中，这样在进行二进制码、格雷码、十进制相互转换时可以直接查询字典完成比较方便.

本项目采用的互补格雷码，需要4位格雷码图和5位格雷码的最后一张，详细代码可以查看python版本代码。

2. 生成四步相移图像

2.1 相移码

从**N步相移码**说起，首先相移码的原理是利用N幅正弦条纹图通过投影仪投射到物体表面再通过相机拍摄获取图像，通过所得图像计算每个位置的相位差，然后通过相位—深度的映射关系获取物体的深度信息。

投影光栅的光强函数：

$I_n(x,y) = A(x,y) + B(x,y)cos[\varphi(x,y) + \Delta\varphi n]$

$\Delta\varphi_n = 2\pi(n-1)/N(n \in [1,N])$

> 式中：A(x,y)表示背景光强，B(x,y)表示调制幅值，$\varphi(x,y)$表示包裹相位（相对相位），$\Delta\varphi_i$表示平移相位。其中前三个变量未知，因此N至少取3。

2.2 生成四步相移码

由于选用4位格雷码+四步相移，编码区域可以分为16，因此相移码的**周期数**$f=16$，**周期**$T=Width/f$，因此$\varphi(x,y)=\frac{2\pi fx}{Width}$

> T用像素表示,Width表示图像宽度(单位:像素)，实验投影仪width=1920（像素）因此T=1920/16

代码生成步骤

第一步：生成一个1920维的行向量；
第二步：利用公式$I(x,y)=128+127cos[2\pi(\frac{fx}{Width}+\frac{n-1}{N})]$对每一个向量元素进行填充；
第三步：利用np.tile()函数生成1080行，得到1920*1080的矩阵；
第四步：利用cv2.imshow（）函数显示。

3. 求解相对相位

3.1 包裹相位求解公式

N步相移法求包裹相位的详细推导可以参考这篇博客：标准N步相移主值相位计算式推导过程

这里给出四步相移法的求解公式：

$I0(x,y)=A(x,y)+B(x,y)cos[\varphi(x,y)$

$I1(x,y)=A(x,y)-B(x,y)sin[\varphi(x,y)]$

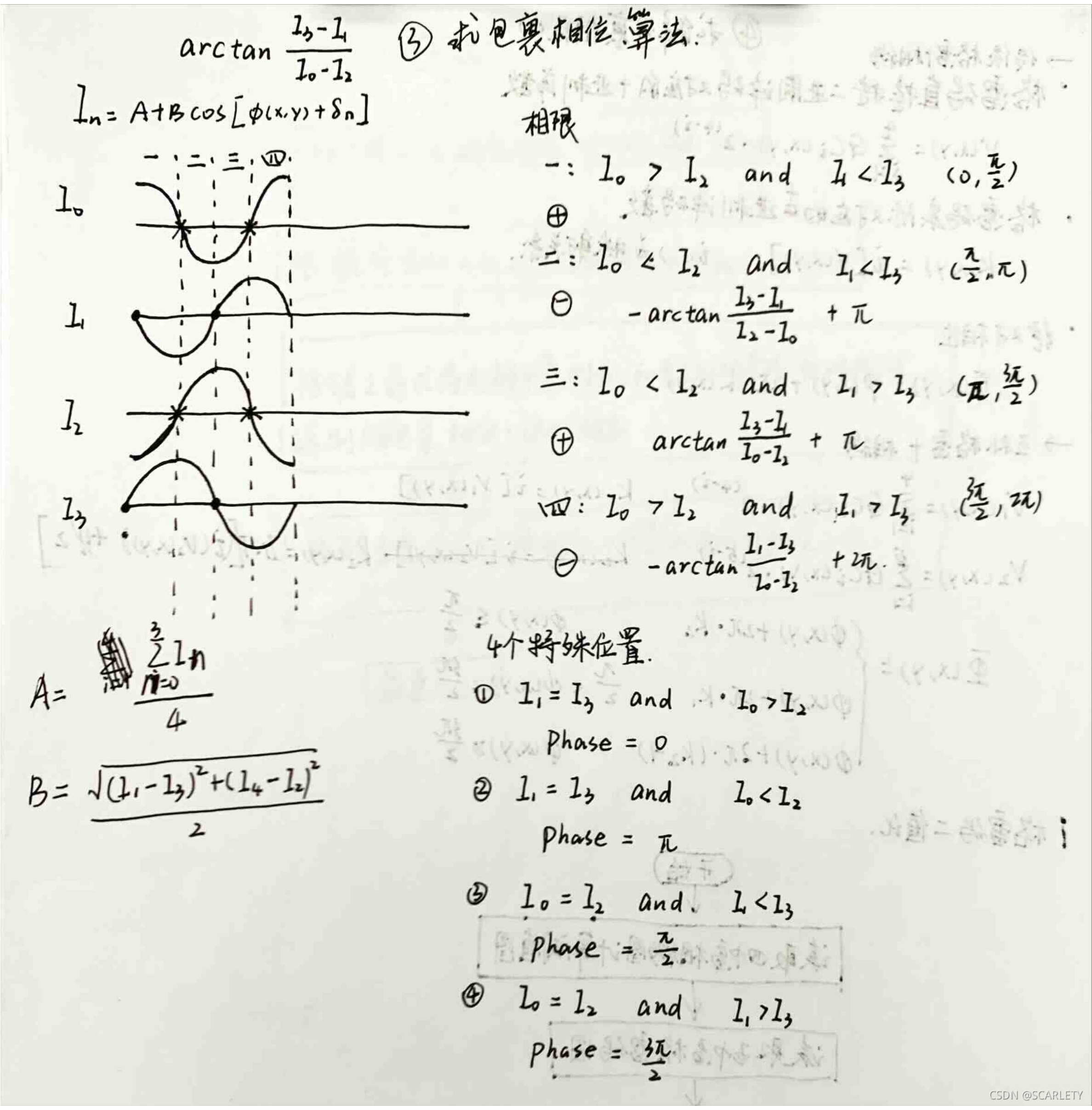
$I2(x,y)=A(x,y)-B(x,y)cos[\varphi(x,y)]$

$I3(x,y)=A(x,y)+B(x,y)sin[\varphi(x,y)]$

联立得：$\varphi(x,y)=arctan\frac{I3-I1}{I0-I2}$，由于反正切函数被限制在$[-\pi,\pi]$，因此该公式求解的是**包裹相位。**

3.2 特殊位置

在实际的代码中我们需要考虑4个特殊位置和4个象限：



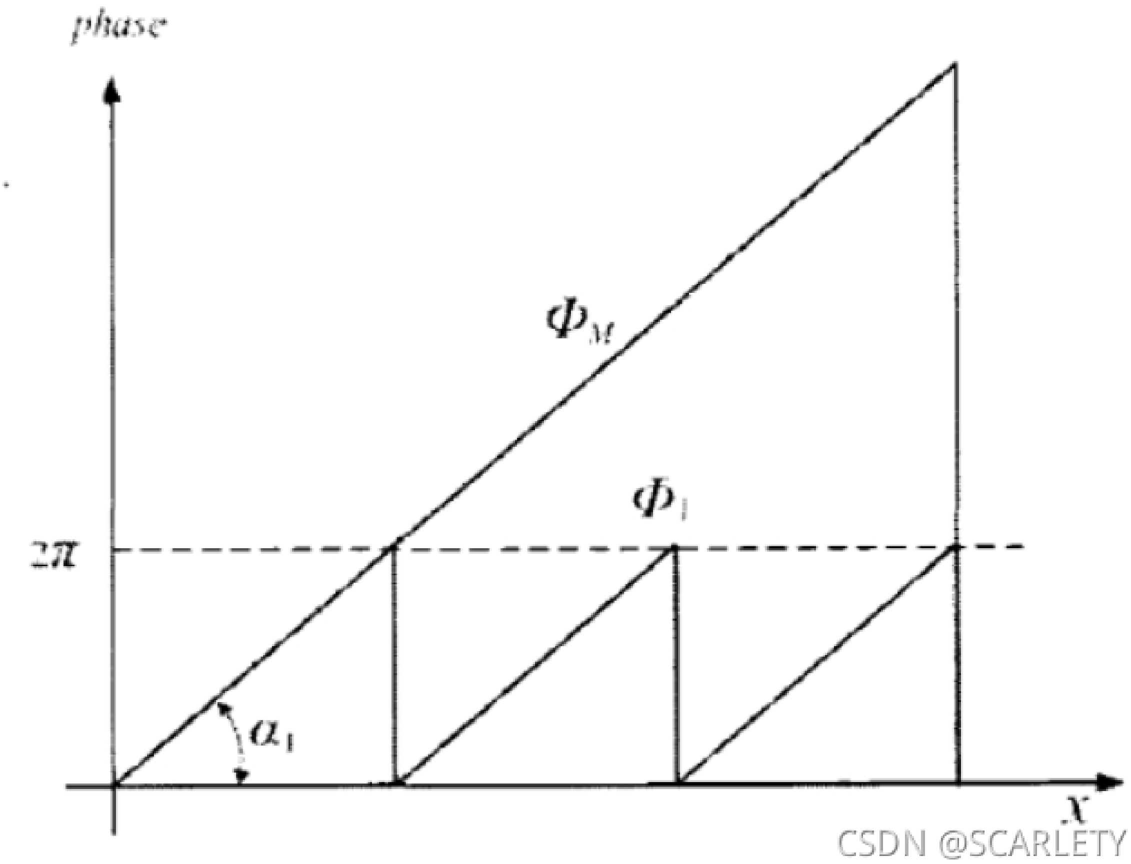
将每一个像素利用上述方法求得包裹相位并储存在对应位置，可以得到所有对应位置的数值大小都在，然后对其进行线性放缩到，再用cv2.imshow()显示。

4. 求解绝对相位

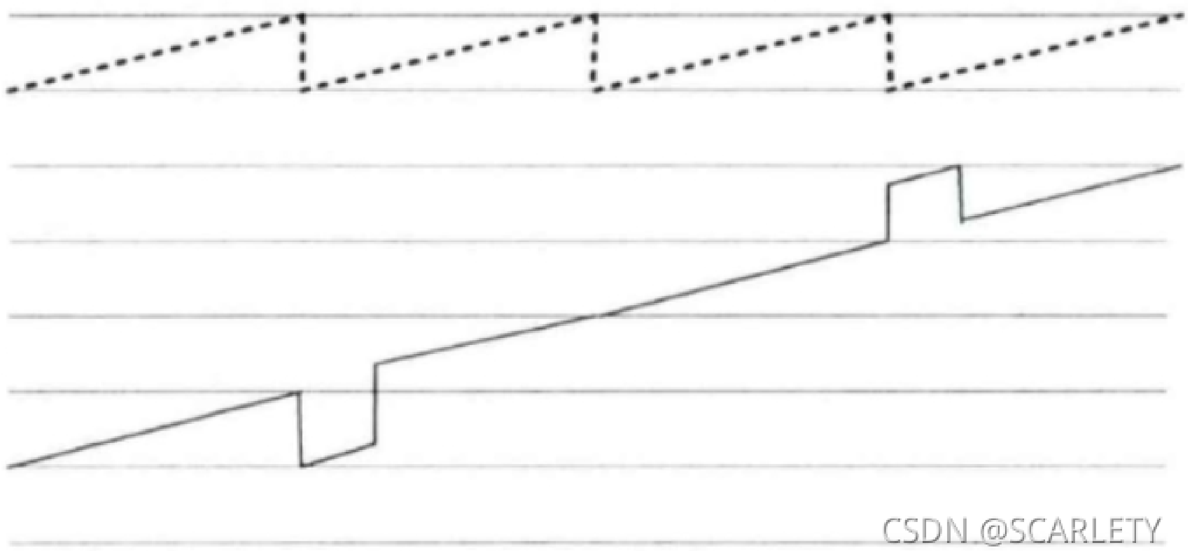
4.1 互补格雷码级次图

<table>
<tr><td>GC_1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>GC_2</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>GC_3</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>GC_4</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>GC_5</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>k_1</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">15</td></tr>
<tr><td>k_2</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>ϕ</td><td colspan="32">CSDN @SCARLETY</td></tr>
</table>

图中GC表示格雷码图，k1、k2表示对应的编码值，现在我们需要将包裹相位还原成连续的绝对相位。我们发现，只要在每一个截断处加上$2k\pi$（k表示周期的级次），就可以恢复成连续的相位：



因此我们用四幅格雷码图像将整个有效视区分成16份并分别编码，因此这里的周期级次K就等于格雷码的编码值（k1），**但是由于实际过程中，由于投影仪和相机的畸变效应，所投的格雷码图像与相移码图像会产生错位**：



4.2 绝对相位求解公式

由于错位发生在包裹相位的截断处，为了解决错位问题，我们引入一张5位格雷码，与4位格雷码形成互补，k2的计算公式为:

$K2 = INT[(V2+1)/2]$

> INT:向下取整，V2：GC0-GC5格雷码对应的十进制数。

利用以下公式就可以避免截断处产生错位：

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,y)+2\pi k_2(x,y), & \varphi(x,y)\le\dfrac{\pi}{2}\\ \varphi(x,y)+2\pi k_1(x,y), & \dfrac{\pi}{2}<\varphi(x,y)<\dfrac{3\pi}{2}\\ \varphi(x,y)+2\pi[k_2(x,y)-1], & \varphi(x,y)\ge\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

4.3 实际求解过程

在相机实际拍摄的图片中由于环境光的影响，拍摄到的格雷码值并不是标准的二值图，因此:

首先要将格雷码图像进行二值化处理。

1. 选取二值化阈值：利用四幅相移码图像每个像素的均值作为阈值获得阈值图像TH_img
2. 将每一幅格雷码图像与阈值图的每一个对于对应像素进行对比，小于等于阈值赋值为0，大于阈值的赋值为1
3. 将二值化后的图像放缩到[0，255]以显示出来

然后计算k1、k2的值

最后带入公式求解绝对相位，由于相移码分为16个周期，因此最后的绝对相位是,再将获得的绝对相位A进行线性放缩得到$B = A * 255/32\pi$，显示出来。

5. 获得相机-投影仪像素坐标之间的对应关系

获得绝对相位后，就可以建立相机-投影仪像素坐标之间的对应关系，假设相机像素坐标为(u_c, v_c)，投影仪像素坐标为(u_p, v_p)，相移码一个周期所占的像素个数为T，那么通过相位关系可以得到如下关系式：

$\Phi(u_p, v_p) = \Phi(u_c, v_c)$

$\Phi(u_p, v_p) = \frac{2\pi u_p}{T}$

可以得到如下关系式：

$u_p = \frac{\Phi(u_p,v_p)*T}{2\pi} = \frac{\Phi(u_c,v_c)*T}{2\pi}$

在相机实际拍摄的图片中由于环境光的影响，拍摄到的格雷码值并不是标准的二值图，因此我们首先要将格雷码图像进行二值化处理

（i）选取二值化阈值：利用四幅相移码图像每个像素的均值作为阈值获得阈值图像TH_img

（ii）将每一幅格雷码图像与阈值图的每一个对于对应像素进行对比，小于等于阈值赋值为0，大于阈值的赋值为1

（iii）将二值化后的图像放缩到[0，255]以显示出来

然后计算k1、k2的值
最后带入公式求解绝对相位，由于相移码分为16个周期，因此最后的绝对相位是,再将获得的绝对相位A进行线性放缩得到B=A*255/，显示出来。

6. 根据标定参数获得重建点云信息

6.1 根据内参数获得关系式

根据相机模型：

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{cx} & 0 & u_{c0} & 0 \\ 0 & f_{cy} & v_{c0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} R_{w\to c} & t_{w\to c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f_{cx} & 0 & u_{c0} \\ 0 & f_{cy} & v_{c0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c/Z_c \\ Y_c/Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f_{cx} & 0 & u_{c0} \\ 0 & f_{cy} & v_{c0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以得到：

$$\begin{cases} X_c = x_c * Z_c \\ Y_c = y_c * Z_c \\ Z_c = Z_c \end{cases}$$

由相机内参数可得

$$\begin{cases} u_c = f_{cx} * x_c + u_{c0} \\ v_c = f_{cy} * y_c + v_{c0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = (u_c - u_{c0})/f_{cx} \\ y_c = (v_c - v_{c0})/f_{cy} \end{cases}$$

投影仪可以看作逆相机，因此投影仪模型与相机模型相同，同理可得：

$$\begin{cases} X_p = x_p * Z_p \\ Y_p = y_p * Z_p \\ Z_p = Z_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_p = f_{px} * x_p + u_{p0} \\ v_p = f_{py} * y_p + v_{p0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_p = (u_p - u_{p0})/f_{px} \\ y_p = *(v_p - v_{p0})/f_{py} \end{cases}$$

6.2 根据外参数获得方程

设相机投影仪系统的外参数为$R_{c\to p} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$、$t_{c\to p} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}$

由下面式子，

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = R_{c\to p} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} + t_{c\to p}$$

展开得：

$$\begin{cases} X_p = r_{11}X_c + r_{12}Y_c + r_{13}Z_c + t_x = (r_{11}x_c + r_{12}y_c + r_{13})Z_c + t_x \\ Y_p = r_{21}X_c + r_{22}Y_c + r_{23}Z_c + t_y = (r_{21}x_c + r_{22}y_c + r_{23})Z_c + t_y \\ Z_p = r_{31}X_c + r_{32}Y_c + r_{33}Z_c + t_z = (r_{31}x_c + r_{32}y_c + r_{33})Z_c + t_z \end{cases}$$

又由相机投影仪像素坐标得关系有：

$$\begin{cases} u_p = f_{px} * x_p + u_{p0} \\ u_p = \frac{\Phi(u_c, v_c) * T}{2\pi} \end{cases} \Rightarrow f_{px} * x_p + u_{p0} = \frac{\Phi(u_c, v_c) * T}{2\pi}$$

最终得到连联立方程组：

$$\begin{cases} x_p * Z_p = (r_{11} x_c + r_{12} y_c + r_{13}) Z_c + t_x \\ Z_p = (r_{31} x_c + r_{32} y_c + r_{33}) Z_c + t_z \\ f_{px} * x_p + u_{p0} = \frac{\Phi(u_c, v_c) * T}{2\pi} \end{cases}$$

解得：

$$Z_c = \frac{x_p t_z - t_x}{J_x - J_z x_p}$$

> $J_x = (r_{11} x_c + r_{12} y_c + r_{13})$；
> $J_z = (r_{31} x_c + r_{32} y_c + r_{33})$；
> $x_p = (\frac{\Phi(u_c, v_c) * T}{2\pi} - u_{p0}) / f_{px}$。

相机坐标系下的得三维坐标点为：

$$\begin{cases} X_c = x_c * Z_c \\ Y_c = y_c * Zc \\ Z_c = \frac{x_p t_z - t_x}{J_x - J_z x_p} \end{cases}$$