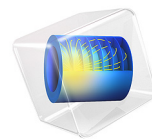


在 COMSOL Multiphysics 5.6 版本中创建



# 浅水方程

## 简介

浅水方程常用于对海洋和大气中的流体流动建模。这种系统模型可预测受污染、海岸侵蚀和极地冰帽融化影响的最终区域。

使用纳维 - 斯托克斯方程等物理描述对这种现象进行综合建模常常会有问题，因为建模域的范围相当大，还要解析自由液面。浅水方程有多种表示法，可以更简单地描述这种现象。

这个一维模型研究多变河床上波的起伏随时间变化的情况。初始波及河床的形状由数学关系表示，因此可以很容易地改变波幅或河床的形状等参数。

本例使用圣维南浅水方程，显示如下：

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \nabla \cdot (zv) = 0$$

和

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -g\nabla z_s + z^{-1}\nabla \cdot (zv\nabla v)$$

其中， $z$  是水层的厚度 (m)， $v$  是速度 (m/s)， $g$  是重力常数 ( $\text{m/s}^2$ )， $\nu$  是运动黏度 ( $\text{m}^2/\text{s}$ )。水层厚度  $z$  定义为  $z_s - z_f$ ，其中， $z_s$  和  $z_f$  是下面图 1 中的测量值。有关详细信息，请参见参考资料 1。

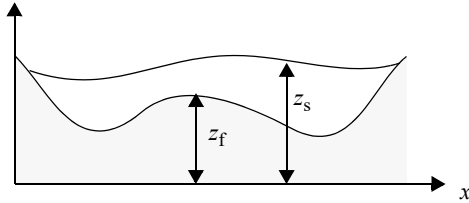


图 1：流体域的典型垂直截面，显示湖床和水面。

## 人工稳定

水的流动随时间会呈现出不连续性，称为水跃。使用人工稳定，用陡峭的峰替代水跃，使其能在网格上求解。深度为  $z$  的静止水面上小幅波动以速度  $\sqrt{gz}$  传播。水波的最大传播速度为  $v_{\text{phase}} = |v| + \sqrt{gz}$ 。

为使湖水稳定，添加选定的人工黏度，使单元雷诺数的阶次统一。为此，将  $\text{tune} v_{\text{phase}} h$  项添加到运动黏度  $\nu$  中。其中， $\text{tune}$  是  $O(1)$  调节参数， $h$  是局部单元大小。将此贡献添加到守恒方程的散度项，使它不影响水波冲击速度。此修改针对一阶单元大小。

## 模型定义

本案例研究具有海底地形的流道中的简单浅水示例，如图 1 所示。注意  $x$  和  $y$  方向上的比例差异。

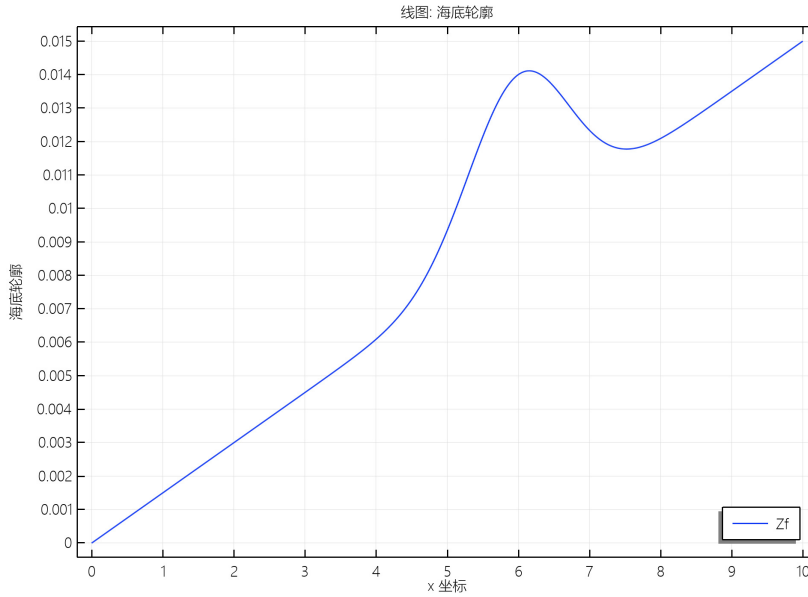


图2：模型中使用 的海床剖面  $z_f$ 。

约束 ( $v=0$ ) 在两端实现，物理场由上述方程描述。初始条件为一个波形，由以下表达式定义：

$$z_0 = 2 \cdot 10^{-2} - z_f + 5 \cdot 10^{-3} e^{-(x-3)^2}$$

其中， $z_f$  是海床剖面的解析表达式（见图2）。水面高度为  $z + z_f$ ，图3显示了  $z_0 + z_f$ 。

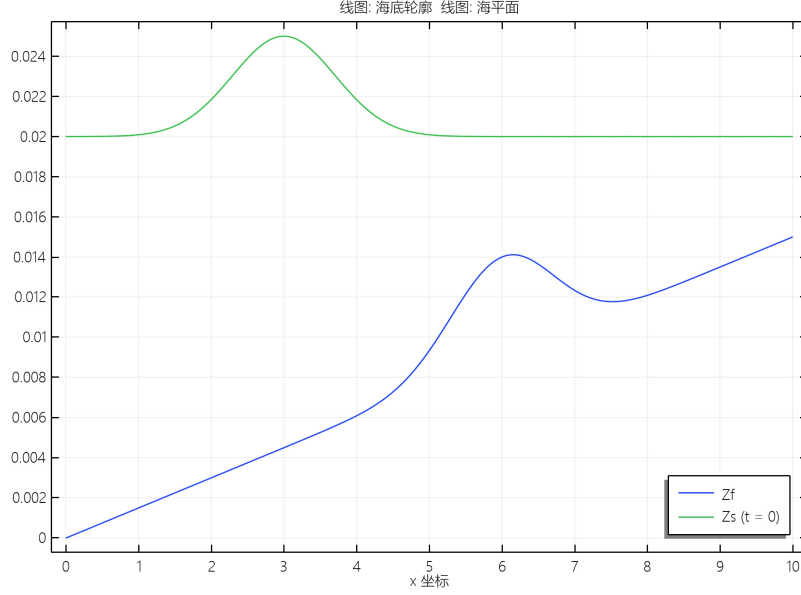


图3：初始水面剖面  $z_0 + z_f$  和海床剖面  $z_f$ 。

# 结果与讨论

仿真运行了 60 秒。图 4 显示了仿真开始后六个输出时步的水面和海床斜坡。

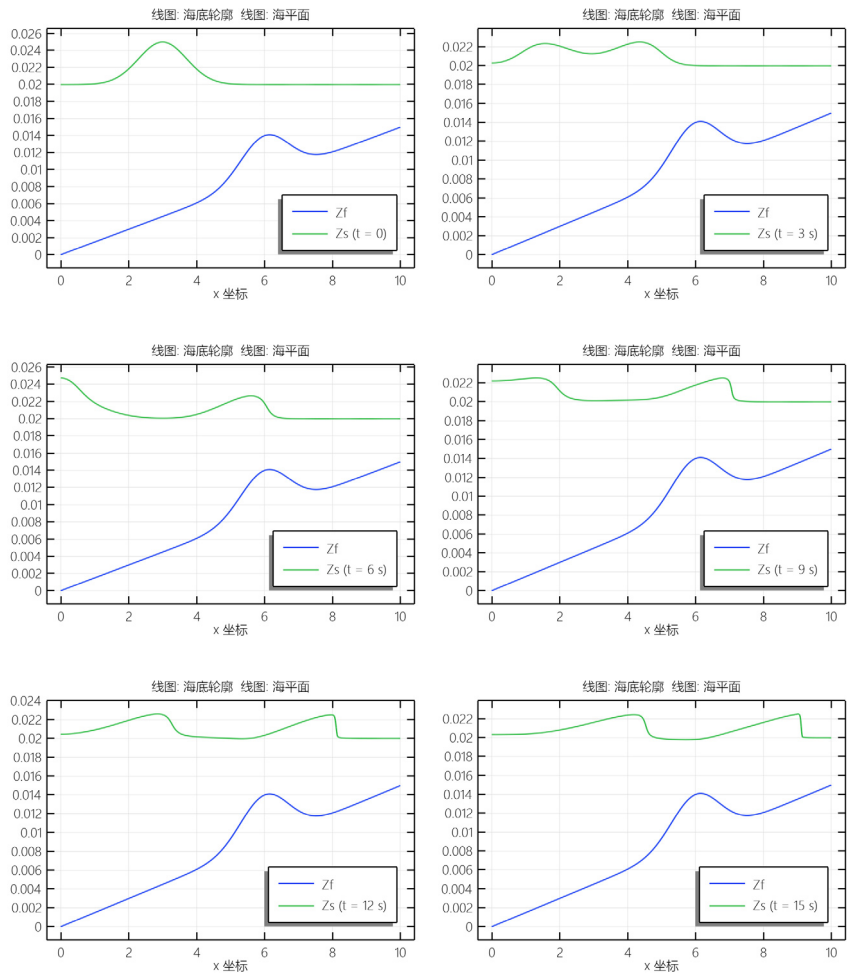


图 4：六个输出时步的水位和海床斜率。时间跨度从  $t = 0$  到  $t = 15$ ，步长为 3 秒。

仿真结果清楚地显示了海床地形对水面高度的影响。仿真结果可视化的另一种方式是动画，使用 COMSOL Multiphysics 可以很轻松地创建动画。

## COMSOL 软件功能实现说明

---

采用“一般形式偏微分方程”接口并使用以下两个因变量来建模非常简单： $z$  和  $v$ 。将诸如描述初始波形  $z_0$  这样的表达式定义为模型中的变量很容易。

## 参考资料

---

1. O. Pironneau, *Finite Element Methods for Fluids*, John Wiley & Sons, 1989.

---

案例库路径: COMSOL\_Multiphysics/Equation\_Based/shallow\_water\_equations


---

## 建模操作说明



---

从文件菜单中选择**新建**。



### 新建

在**新建**窗口中，单击  **模型向导**。

### 模型向导

- 1 在**模型向导**窗口中，单击  **一维**。
- 2 在**选择物理场树**中选择**数学 > 偏微分方程接口 > 一般形式偏微分方程 (g)**。
- 3 单击**添加**。
- 4 单击  **添加因变量**。
- 5 在**因变量表**中，输入以下设置：

$z$
$v$

- 6 单击  **研究**。
- 7 在**选择研究树**中选择**一般研究 > 瞬态**。
- 8 单击  **完成**。

### 根节点

- 1 在**模型开发器**窗口中，单击根节点。
- 2 在根节点的**设置**窗口中，定位到**单位制**栏。

3 从单位制列表中选择无。

由于因变量  $Z$  和  $V$  的量纲不同，因此关闭单位支持，转而采用手动跟踪单位会很方便。

全局定义

参数 1

1 在模型开发器窗口的全局定义节点下，单击参数 1。

2 在参数的设置窗口中，定位到参数栏。

3 在表中输入以下设置：

名称	表达式	值	描述
nu1	1e-6	1E-6	运动黏度 ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
x0	6	6	海底山脊位置 (m)
a	0.005	0.005	海底山脊高度 (m)
k1	0.0015	0.0015	海底斜率参数
tune	0.1	0.1	调节参数

几何 1


线段间隔 1 (i1)

1 在模型开发器窗口的组件 1 (comp1) 节点下，右键单击几何 1 并选择线段间隔。

2 在线段间隔的设置窗口中，定位到线段间隔栏。


3 在表中输入以下设置：

坐标
0
10

4 单击  构建所有对象。

定义

变量 1

1 在主屏幕工具栏中单击   $a=$  变量，然后选择局部变量。

2 在变量的设置窗口中，定位到变量栏。

3 在表中输入以下设置：

名称	表达式	描述
Zf	$a \cdot \exp(-(x-x_0)^2) + k_1 \cdot x$	海底轮廓
dZfdx	$d(Zf, x)$	海床轮廓, $x$ 导数
Zs	$Z + Zf$	海平面
Z0	$0.02 - Zf + 0.005 \cdot \exp(-(x-3)^2)$	初始水深轮廓
vphase	$\text{abs}(V) + \text{sqrt}(g\_const \cdot Z)$	最大波传播速度
nu	$nu_1 + vphase \cdot h \cdot tune$	等效运动黏度

其中，`g_const` 是预定义的重力加速度常数；当关闭单位支持时，它便采用以 SI 单位表示的数值。

一般形式偏微分方程 (G)

一般形式偏微分方程 1

- 1 在模型开发器窗口的组件 1 (comp1)> 一般形式偏微分方程 (g) 节点下，单击一般形式偏微分方程 1。
- 2 在一般形式偏微分方程的设置窗口中，定位到守恒通量栏。
- 3 在  $\Gamma$  文本框数组的第一行键入 “ $v \cdot z$ ”。
- 4 在  $\Gamma$  文本框数组的第二行键入 “ $-nu \cdot v_x$ ”。
- 5 定位到源项栏。在  $f$  文本框数组的第一行键入 “0”。
- 6 在  $f$  文本框数组的第二行键入 “ $-g\_const \cdot (Zx + dZfdx) - v \cdot v_x + nu \cdot v_x \cdot Zx / Z$ ”。

初始值 1

- 1 在模型开发器窗口中，单击初始值 1。
- 2 在初始值的设置窗口中，定位到初始值栏。
- 3 在  $Z$  文本框中键入 “ $Z_0$ ”。


约束 1

- 1 在物理场工具栏中单击——边界，然后选择约束。
- 2 单击图形窗口，然后按 Ctrl+A 选择这两个边界。
- 3 在约束的设置窗口中，定位到约束栏。
- 4 在  $R$  文本框数组的第二行键入 “ $-v$ ”。




## 网格 1

### 边 1

在**网格**工具栏中单击  边。

### 大小



- 1 在**模型开发器**窗口中，单击**大小**。
- 2 在**大小**的**设置**窗口中，定位到**单元大小**栏。
- 3 单击**定制**按钮。
- 4 定位到**单元大小**参数栏。在**最大单元大小**文本框中键入 “0.05”。
- 5 单击  **全部构建**。

## 研究 1

### 步骤 1：瞬态

- 1 在**模型开发器**窗口的**研究 1**节点下，单击**步骤 1：瞬态**。
- 2 在**瞬态**的**设置**窗口中，定位到**研究设置**栏。
- 3 在**输出时间**文本框中键入 “range(0,60)”。
- 4 从**容差**列表中选择**用户控制**。
- 5 在**相对容差**文本框中键入 “1e-5”。

### 解 1 (sol1)

- 1 在**研究**工具栏中单击  显示默认求解器。
- 2 在**模型开发器**窗口中展开**解 1 (sol1)**节点，然后单击**瞬态求解器 1**。
- 3 在**瞬态求解器**的**设置**窗口中，单击以展开**绝对容差**栏。
- 4 从**容差方法**列表中选择**手动**。
- 5 在**绝对容差**文本框中键入 “1e-7”。
- 6 在**研究**工具栏中单击  **计算**。

## 结果

### 一维绘图组 1


- 1 在**一维绘图组**的**设置**窗口中，定位到**图例**栏。
- 2 从**位置**列表中选择**右下角**。

### 线图 1

- 1 在**模型开发器**窗口中展开**一维绘图组 1**节点，然后单击**线图 1**。
- 2 在**线图**的**设置**窗口中，定位到**数据**栏。

- 3 从数据集列表中选择研究 1/ 解 1 (sol1)。
- 4 从时间选择列表中选择来自列表。
- 5 从时间步 (s) 列表中选择 0。
- 6 单击y 轴数据栏右上角的替换表达式。从菜单中选择组件 1 (comp1)>定义>变量>Zf - 海底轮廓。
- 7 单击以展开图例栏。选中显示图例复选框。
- 8 从图例列表中选择手动。
- 9 在表中输入以下设置：


图例
Zf

- 10 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 在仿真结果中还可以观察表示海平面的全局变量 Zs 在不同时间点与海底地形相比较的情况。


线图 2

- 1 右键单击结果 > 一维绘图组 1> 线图 1 并选择复制粘贴。
- 2 在线图的设置窗口中，单击 y 轴数据栏右上角的替换表达式。从菜单中选择组件 1 (comp1)> 定义 > 变量 > Zs - 海平面。
- 3 定位到图例栏。在表中输入以下设置：


图例
Zs (t = 0)

- 4 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 5 定位到数据栏。从时间步 (s) 列表中选择 3。
- 6 定位到图例栏。在表中输入以下设置：


图例
Zs (t = 3 s)

- 7 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 8 定位到数据栏。从时间步 (s) 列表中选择 6。
- 9 定位到图例栏。在表中输入以下设置：


图例
Zs (t = 6 s)

- 10 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 11 定位到数据栏。从时间步 (s) 列表中选择 9。
- 12 定位到图例栏。在表中输入以下设置：


图例
Zs (t = 9 s)

- 13 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 14 定位到数据栏。从时间步 (s) 列表中选择 12。
- 15 定位到图例栏。在表中输入以下设置：

图例
Zs (t = 12 s)

- 16 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。
- 17 定位到数据栏。从时间步 (s) 列表中选择 15。
- 18 定位到图例栏。在表中输入以下设置：

图例
Zs (t = 15 s)

- 19 在一维绘图组 1 工具栏中单击  绘制。