

# Diviseurs dans l'espace de modules des variétés de Debarre-Voisin

## I. Introduction.

(avec Vladimiro Benedetti)

Variétés hyperkähleriennes.

- hyperkählérienne, simple<sup>f</sup> connexe  
admettant une 2-forme holomorphe symplectique

$\omega \in H^0(X, \Omega_X^2)$  partout non-dégénérée

$$H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C} \cdot \omega.$$

Exemple • en dim. 2 surface K3

- quartique  $C_4 \subset \mathbb{P}^3$
- $C_3 \cap C_2 \subset \mathbb{P}^4$
- $C_2 \cap C_2 \cap C_2 \subset \mathbb{P}^5$
- lieu de zéro dans des Grassmanniennes / espaces homogènes (Mukai)

• en dim. sup  $K3^{[m]} = \text{Hilb}_m K3$ .

de dim  $2m$ .

$$\boxed{K3^{[m]}}$$

## Structure de Hodge.

- $H^{2,0}(X) \subset H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C} \cdot \omega.$

$$H^2(\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X).$$

$$\begin{matrix} 1. & b_2 - 2 & 1. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} K3 & 1 & 20 & 1. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} K3^{[2]} & 1 & 21 & 1. \end{matrix}$$

- forme quadratique de Beauville-Bogomolov-Fujiki

$(H^2(X, \mathbb{Z}), q)$ .  $\rightsquigarrow$  réseau de signature  $(3, b_2 - 3)$ .

$K3$  produit d'intersection  $\Lambda_{K3} := H^2(K3, \mathbb{Z})$  unimodulaire

$$= \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$$

$$(3, 3) \quad (0, 16) \rightsquigarrow (3, 19)$$

$$K3^{[2]} \quad 3 \cdot q(\alpha)^2 = \int_X \alpha^4$$

$$\Lambda_{K3^{[2]}} := H^2(K3^{[2]}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{K3} \oplus (-2)$$

dans de disc 2.

## théorème de Torelli

$H^2(X)$  donne un sous-esp. de dim 1 dans  $\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

pour  $\Lambda$  fixé  $X \longmapsto [H^{2,0}(X)] \in P(\Lambda_{\mathbb{C}})$

$(X, \phi: H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Lambda) \longmapsto [\phi(H^{2,0}(X))]$

l'application des périodes

$\dim b_2 = 2$ .

$K3: 20$   
 $K3^{[2]}: 21$

$M_{H^2} + \text{marquage} \longrightarrow \mathcal{D}$  sous-variété complexe

Théorème de Torelli:

$M_{H^2, \phi} \xrightarrow{1:1} \mathcal{D}$

- ↑ surjective
- ↓ étale
- ↓ généralement injective.

Consequence pour  $K3$ ,  $H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S', \mathbb{Z}) \iff S \cong S'$

pour  $K3^{[2]}$ ,  $H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X', \mathbb{Z}) \iff X \xrightarrow{\sim} X'$  fin.

du à la non-separation de  $M_{HK, \phi}$  

lorsque  $X$  contient un sous-esp. proj. lagrangien.

$X > P \rightsquigarrow$  flop de Mukai

---

mais pour  $K3$  flop d'un  $P^1$  reste isomorphe.

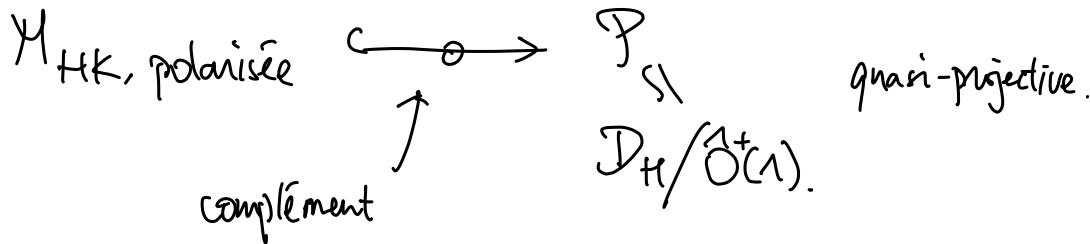
Pour HK projective.  $(X, H)$

avec une classe ample fixée plus de non-separation

$\dim: b_2 - 3$

$K3: 19$

$K3^{[2]}: 20$



certains diviseurs sur lesquels.

$H$  devient non-ample (quasi-polarisation)

II. Exemple. Beauville - Donagi

$X \hookrightarrow \mathbb{P}^5$  cubique  
 $\mathbb{P}(V_6)$

$F_1(x) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(2, V_6)$ . Variété de Fano.  
 de dim 4

[BD]  $\tilde{F}_1(x)$  est HK de degré 6 (Plücker).

$$(g(H) = 6, H^4 = 3 \cdot g(H)^2 = 108)$$

disc 1 disc 2

$$\alpha = q + p^*: H^4(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\tilde{F}_1(x), \mathbb{Z}).$$

[BD] •  $\alpha$  est un isom. de groupe abélien

$$\alpha = h^2 \quad \xrightarrow{\qquad} \quad H.$$

$$(h^2)^2 = 3 \quad \quad \quad g(H) = 6$$

$$\bullet (H^4(X, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, \cdot) \longrightarrow (H^2(\tilde{F}_1(x), \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q)$$

↑  
 est une isométrie.  
 $(-1, 20, 4)$ .

$$I = \{(x, l) \mid \begin{array}{l} x \in X \\ l \in F(x) \\ x \in l \end{array}\}$$

$p \swarrow \quad q \searrow$  fibré en  $\mathbb{P}^1$   
 $X \quad \quad \quad \tilde{F}_1(x)$

1	1	1	1	1
1	2	1	2	3
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1

$$\cdot \left( H^4(X, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, \cdot \right) \longrightarrow \left( H^2(F, \langle x \rangle, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q \right)$$

↑  
(1, 20, 1).

est une isométrie.

pour des cubiques dites (« spéciales »)

classes algébriques supplémentaires.

$(1, 19, 1) \rightsquigarrow K^3$  polarisée associée

avoir lieu sur des diviseurs de Noether-Lefschetz

$D_d \leftarrow$  discriminant (du réseau).

(Debarre-Kurnessov). Minorité de GM de dim. 4  $\longleftrightarrow$  double EPW.

Fano  $\hookrightarrow \text{Gr}(2, V_5)$ .  $\xleftarrow{\text{from}}$  HK.

$\alpha: H^4(GM, \mathbb{Z})_{\text{van}} \longrightarrow (H^2(\text{double EPW}, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q)$

# M Variétés de Debarre-Voisin

$\sigma \in \mathbb{P} V_{10}^{\vee}$  thivecteur

$$X = \left\{ [V_6] \mid \sigma|_{V_6} = 0 \right\}.$$

$\hookrightarrow$

$\mathrm{Gr}(6, V_{10})^{24}$

$\sigma \in \mathbb{P} (\Lambda^3 V_6^{\vee})^{20}$  fibre topologique  
 $X = Z(\sigma)$ .

donc  $X$  lisse de dim 4.  
 pour  $\sigma$  général

[DV]  $X$  est HK de type  $K3^{[2]}$

Plücker  $\rightsquigarrow$  polarisation  $q(H) = 22$

Espace de modules.

$$\mathcal{M}_0^{20} \xrightarrow[\text{[DV]}]{} \sim [\text{D'Grady}]$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbb{P}(\Lambda^3 V_{10}^{\vee}) // \mathrm{SL}(V_{10}). \\ \text{diviseurs} \\ \mathrm{SL}(V_{10})\text{-invariants} \end{array}$

$$M_{\mathrm{HK}, 22}^{20} \xrightarrow[\text{périodes}]{} \mathbb{P}^{20}$$

$\downarrow$

div. de NL.

div. de Heegner.

2 autres variétés de dégénérescence associées.

- $X_6 \hookrightarrow \mathrm{Gr}(6, V_{10})$ .

- $X_3 \hookrightarrow \mathrm{Gr}(3, V_{10})$  section hyperplane de  $\mathrm{Gr}(3, V_{10})$   
 $\hookrightarrow \{[V_3] \mid \sigma(V_3) = 0\}$ . de dim 20.

$X_3$  est lisse en général

si  $\sigma \in \mathrm{Gr}(3, V_{10})^*$  dual proj.

$X_3$  admet un point double.  $[V_3]$  ( $\sigma(V_3, V_3, V_{10}) = 0$ ).

dans ce cas.  $\mathrm{Sing}(X_6) \cap \{V_6 = V_3\}$  est une k3 de degré 22. ( $X_6 \dashv, S^{[2]}$ ).

$$D^{3,3,10} = \{[\sigma] \mid \exists V_3 \text{ tq. } \sigma(V_3, V_3, V_{10}) = 0\} \hookrightarrow M_6.$$

diviseur.

$$M_6 \dashv \dashv M_{\mathrm{K3}, 22} \hookrightarrow P$$

$$D^{3,3,10} \dashv \dashv D_{22}$$

le complément de  $M_{\mathrm{K3}, 22}$   
est  $D_{22}$ .

- $X_1 \hookrightarrow G_1(1, V_{10}) = \mathbb{P}^9$        $\sigma(V_1, -, -)$  forme anti-sym.  
 $\cup \{V_1\} \text{ tq } \sigma(V_1, -, -) \leq 6\}$ . de rang  $\leq 8$ .

de Persine de dim 6, degré 15, Fano d'indice 3.

$X_1$  lisse en général.

mais sing. en 2 cas.

- si  $\exists V_1 \text{ tq. } \sigma(V_1, -, -) \leq 4$ .  $\mathcal{D}^{4,6,10}$
- si  $\exists V_3 \text{ tq. } \sigma(V_3, V_3, V_{10}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(V_3) \text{ sing. } \mathcal{D}^{3,3,10}$

$$\mathcal{D}^{4,6,10} = \{[\sigma] \mid \exists V_1 \subset V_6 \text{ tq. } \sigma(V_1, V_6, V_{10}) = 0\} \hookrightarrow M_6$$

diagramme.

$$\begin{array}{c}
 1 \\ 
 1 \\ 
 2 \\ 
 3 \\ 
 4 \\ 
 5 \\ 
 6 \\ 
 7 \\ 
 8 \\ 
 9 \\ 
 10 \\ 
 1 \\ 
 3 \\ 
 0 \\ 
 1
 \end{array}
 \left\} \text{ classe de Schubert} \quad H^{20}(X_3, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{d'indice 11}]{} j^* H^{20}(\mathrm{Gr}(3, V_{10}), \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{disc 11}]{} + H^{20}(X_3, \mathbb{Z})_{\text{van}}^{\text{disc 11}}$$

$$X_3 \xrightarrow{p} I_{3,6} = \{ V_3 \subset V_6 \mid \sigma|_{V_6} = 0 \} \xrightarrow{q} X_6.
 \begin{matrix}
 & \leftarrow & \\
 & q &
 \end{matrix}
 \quad \text{fibré en } \mathrm{Gr}(3, 6).$$

Théorème. lorsque  $\sigma$  est tel que  $X_3, X_6$  soient lisses. (càd  $\sigma \in \mathcal{D}^{3,10}$ ),

$$\alpha = q_* p^* : (H^2(X_3, \mathbb{Z})_{\text{van}}, -) \longrightarrow (H^2(X_6, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q)$$

est une isométrie

$$\alpha = q_* p^*: \left( H^2(X_3, \mathbb{Z})_{van}, - \right) \xrightarrow{\text{disc 11}} \left( H^2(X_6, \mathbb{Z})_{prim}, -q \right)^{\text{disc 11}},$$

est une isométrie

Démonstration.  $(H^2(X_6, \mathbb{Z})_{prim}, -q)$  est simple pour  $\mathfrak{S}$  général

$\alpha$  n'est pas 0  $\Rightarrow \alpha$  est un élém de  $\mathbb{Q}$ .

et les deux formes quadratiques  
diffèrent par un scalaire.

il suffit de montrer que pour UNE classe.  $x$ .

$$x^2 = -q(x)$$

puis conclure car les discriminants sont le même (11)

$D^{4,7,7} = \{ \text{E} \mid \exists V_4 \subset V_7 \text{ tq. } \sigma(V_4, V_7, V_7) \Rightarrow \}.$   $\hookrightarrow H_0$   
 dans ce cas.  
 divisem.

$$\{V_6 \mid V_4 \subset V_6 \subset V_7\} = P((V_7/V_4)^\vee), \hookrightarrow X_6.$$

$$l \subset P \subset X_6.$$

dwite

$\begin{matrix} \nearrow & \searrow \\ x_3 & & x_6 \end{matrix}$

$$P * q^* l \in H^{20}(x_3, z).$$

||

$$z_0 + z_1$$

$$H^{20}(x_3, z)$$

van

$$z_0^2 = \frac{28}{14}$$

$$z_1^2 = \frac{5}{11}$$

$$q(x(z_0)) = -\frac{28}{11}$$

proviennent des classes de Schubert

$$D^{4,7,7} \rightarrow D_{28}.$$

[3 de degré 28. (modèle inconnu).]

$$P_* q^*: H^6(X_6, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^{20}(X_3, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(X_6, \mathbb{Z})$$

saturé : noyau sans-torsion

$$\alpha: H^{20}(X_3, \mathbb{Z})_{\text{van}} \xrightarrow{\sim} H^2(X_6, \mathbb{Z})_{\text{prim}} \hookrightarrow H^2(X_6, \mathbb{Z})$$

$$\alpha^*: H^2(X_6, \mathbb{Z})^\vee \longrightarrow (H^{20}(X_3, \mathbb{Z})_{\text{van}})^\vee$$

$$\downarrow \varsigma \\ H^6(X_6, \mathbb{Z}).$$

$$c \longmapsto (x \mapsto P_* q^* c \cdot x)$$

[Mongardi-Ottem]. Mais

$$H^{20}(X_3, \mathbb{Z}) \supseteq (H^{20}(X_3, \mathbb{Z}))^\vee \longrightarrow (H^{20}(X_3, \mathbb{Z})_{\text{van}})^\vee$$

avec noyau  $j^* H^{20}(G_3, V_{10}), \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow P_* q^* H^6(X_6, \mathbb{Z}) + j^* H^{20}(G_3, V_{10}), \mathbb{Z}) = H^{20}(X_3, \mathbb{Z})$$

tant pour  $H^6(X_6, \mathbb{Z})$   
 (et  $H^{(n-2)}(X_3^{[n]}, \mathbb{Z})$ )

Corollaire.  $H^6(X_3, \mathbb{Z})$  satisfait la conj. de Hodge entière.

pour les autres degrés c'est trivial

$$X_1 \xrightarrow{I_{1,6}} H^6(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}} \stackrel{+}{\oplus} (\mathbb{H}^3, \pi) \subset H^6(X_1, \mathbb{Z}).$$

où  $\pi$  est la classe  $\{[V_i] \mid V_i \subset V_6\}$ .

$X_6$

non lisse  
mais de bonne dimension  
lien de sing.  
domaine un diviseur dans  $X_6$ .

c'est une variété de dim 3.  
dite de Rota-Balinti

pour un  $V_6$  fixé  
dans  $X_6$ .

Théorème. lorsque  $X_1, X_6$  lisse. (càd  $5 \notin D^{3,3,10} \cup D^{2,6,10}$ )

$$g \circ p^* L_h : (H^6(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}}) \xrightarrow{\quad \cong \in D^{4,7,3} \quad} (H^2(X_6, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q) \xrightarrow{20 + 21}$$

Preuve : la même idée  $e \in PC(X_6) \rightsquigarrow h \circ p^* g^* e \in H^6(X_1, \mathbb{Z})$

$$20 = \frac{28}{14}$$

théorème lorsque  $X_1, X_6$  lisses (càd.  $\alpha \notin D^{3,3,10} \cup D^{4,6,10}$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 & H^4(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}} & \\
 L_h \hookrightarrow & H^6(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}} & \\
 \text{isom de groupe} \rightarrow L_h \hookrightarrow & H^8(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}} & \\
 \text{sur } \mathbb{Z}. & &
 \end{array}
 \xrightarrow{q+p^*} H^2(X_6, \mathbb{Z})_{\text{prim}}$$

$$q+p^* L_h : (H^6(X_1, \mathbb{Z})_{\text{van}}, \cdot) \longrightarrow (H^2(X_6, \mathbb{Z})_{\text{prim}}, -q).$$

est une isométrie.

De plus la conj. de Hodge entière vaut

$$\text{pour } H^{4,6,8}(X_1, \mathbb{Z}).$$

Preuve. même idée en regardant  $D^{4,7,7}$  et la classe  $\lambda \subset P \subset X_6$ .

$D^{1,6,10}$   $\text{Sing}(X_1) = [V_1]$ . mais  $X_3, X_6$  restent lisses.

le discriminant ?

$$\sigma(V_1, V_6, V_{10}) \Rightarrow \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \text{tg. } \sigma(V_1, V_6, V_8) \geq 0.$$

$$\text{Gr}(2, V_8/V_1) \hookrightarrow X_3.$$

dim 70.

$\rightarrow$  sa classe dans  $H^0(X_3, \mathbb{Z})$ .

$$g = [\text{Gr}(2, V_8/V_1)]. \quad \exists g + \text{classe stable}$$

$\leadsto$  réseau de disc 24.  $\Rightarrow D^{1,6,10} \rightarrow D_{24}$

le  $V_8$  tg.  $\sigma(V_1, V_6, V_8) \geq 0$

n'est pas unique.

dans  $\text{Gr}(2, V_{10}/V_6)$ . tels  $V_8$  forment une section hyperplane dans une quadrique de dim 3.  $\cong \mathbb{P}^3 \mathbb{Q}^3$  de degré 2).

il existe une autre équation cubique canonique. On demande que  $\sigma(V_8/V_1)$  soit contenue dans l'hyperfläche de disc.

et celle sun  
(le dual  $\text{Gr}(3, 7)^*$ )

Prop  $S = \left\{ v_8 \in G_1(2, V_{10}/V_6) \mid \begin{array}{l} \sigma(v_1, v_8, v_6) = 0, \\ \sigma(v_8/v_1) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{P}^3 \mathbb{C} \end{array} \right\}$ .  
 est une surface  $\mathbb{P}^3$  de degré 6. (disc est 24  $\leadsto$   $\mathbb{P}^3$  degré 6 ?)

Prop  $D = \left\{ [v_6] \in X_6 \mid v_6 \subset v_8 \text{ pour } [v_8] \in S \right\}$ .  
 est un diviseur. et  $D \xrightarrow{\pi} S$  est une fibration en conique lisse.  
 $[v_6] \mapsto [v_8]$ .

En fait  $D = \left\{ [v_6] \mid v_1 \subset v_6 \right\}$ , où  $[v_i] \in \text{Sing}(x_i)$ .

Ce fibré en  $\mathbb{P}^1$  donne une variété de Brauer-Severi / S.

étale/analytique localement trivial, mais pas zariski —.

un invariant topologique. Classe de Brauer  $\beta \in Br(S)$ .  $\exists H^2_{\text{ét}}(S, \mathbb{G}_m) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$   
 peut être représenté par une  $B \in H^2_{\text{ét}}(S, \mathbb{Z})$ . "B-field" <sup>top</sup>

$$D \xrightarrow{i} X_6. \quad H^2(D, \mathbb{Z}) \xleftarrow{i^*} H^2(X_6, \mathbb{Z}).$$

$$\begin{matrix} \pi \\ \downarrow \\ S \end{matrix} \hookleftarrow \text{fibre en } \mathbb{P}^1. \quad H^2(S, \mathbb{Z})$$

(Leray-Hirsch).

$$\underline{\text{Prop.}} \quad (H^2(X_6, \mathbb{Z})^{+D}, q) \xrightarrow[\text{disc } D]{\text{d'indice 2.}} (H^2(S, \mathbb{Z}), \cdot)$$

disc 2.

disc 6.

est un sous espace d'indice 2.

de plus l'image est caractérisée comme.

$$\{x \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid x \cdot B \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{où } B \in H^2(S, \mathbb{Q}). \quad (B \in \frac{1}{2} H^2(S, \mathbb{Z})).$$

est un  $\mathbb{R}$ -field pour la classe de Brauer  $B$

Démonstration: Comparer les deux dans  $H^2(D, \mathbb{Z})$ .  
du fibré  $\pi: D \rightarrow S$ .

Corollaire. Si on considère

Prop 5

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(S, v, B).$$

(très général)

l'espace de modules des faisceaux twisté d'un certain type  $v$ .  
(de vecteur de Mukai  $(2, 2\beta, 0)$ ).

Il existe  $H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X_6, \mathbb{Z})$  isom.

Torelli  $\Rightarrow M \xrightarrow{\sim} X_6$ .

C'est un isom car il n'y a pas de classe  $f \neq 0$

pas de flop de Mukai.

Rang. Il serait bien

de préciser ce faisceau

Une dernière chose.

(Deligne-Margardin) double EPW admettant une action fidèle de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{11}) = G_7$   
(Hilc)

Drap simple d'ordre 660  
 $\exists$  une DV admettant une action fidèle de  $G_7$  différente que celle de  $D^4$ .

Idee  $\Rightarrow$  une rép lin. de  $G_7$  de dim 10.  $V_{10} \cong V_{10}^\vee$

$\hookrightarrow \Lambda^3 V_{10}^\vee$  admet une composante lin. de dim 1,  $\hookrightarrow \sigma$  un trivecteur

- Pour ce  $\sigma$ ,  $X_3$  et  $X_6$  sont lisses.
- $X_1$  admet 55 points singuliers de type  $(1, 6, 10)$ .

chaque tel point singulier  $\hookrightarrow D$  diviseur dans  $X_6$ .

on obtient 55 diviseurs dans  $X_6$ .  
 $\downarrow \pi_1$

ils engendrent un réseau de rang 21 de disc 22.

$\Rightarrow$  C'est le groupe de Picard  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{tf}}^{\mathrm{Symp}}(X_6) \cong G_7$   
660.

pour la  $\hookrightarrow S$ .  
si elle reste lisse alors  $P(S) = 20$   
disc  $Pic(S) = 11$ , unique