

Neural Network Basic Assignment

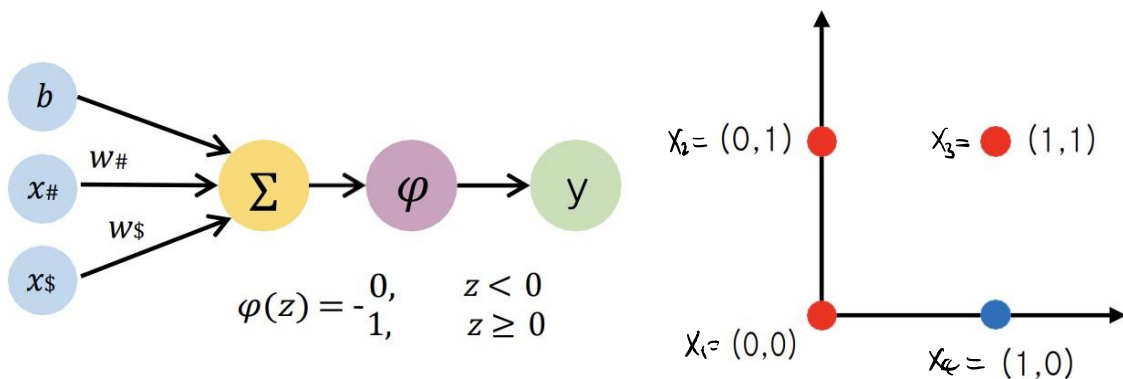
이름: 김지은

1. Sigmoid Function을 z 에 대해 미분하세요.

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

$$\frac{\partial \sigma(z)}{\partial z} = ((1 + e^{-z})^{-1})' = e^{-z} (1 + e^{-z})^{-2} = \frac{1}{1 + e^{-z}} \cdot \frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^{-z}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-z}}\right) = \sigma(z)(1 - \sigma(z))$$

2. 다음과 같은 구조의 Perceptron과 ● (=1), ● (=0)을 평면좌표상에 나타낸 그림이 있습니다.



2-1. ●, ●을 분류하는 임의의 b, w 를 선정하고 분류해보세요.

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = 0.5$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x_1 = (0, 0) & \quad x_1 w + b = (0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T + 0.5 = 0.5, \quad \phi(0.5) = 1 \\ \text{ii) } x_2 = (0, 1) & \quad x_2 w + b = (0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T + 0.5 = 1.5, \quad \phi(1.5) = 1 \\ \text{iii) } x_3 = (1, 1) & \quad x_3 w + b = (1, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T + 0.5 = 0.5, \quad \phi(0.5) = 1 \\ \text{iv) } x_4 = (1, 0) & \quad x_4 w + b = (1, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T + 0.5 = -0.5, \quad \phi(-0.5) = 0 \end{aligned}$$

2-2. Perceptron 학습 규칙에 따라 임의의 학습률을 정하고 b, w 를 1회 업데이트 해주세요.

$$w_{\#} \leftarrow w_{\#} - \eta (y - 0) x_{\#}$$

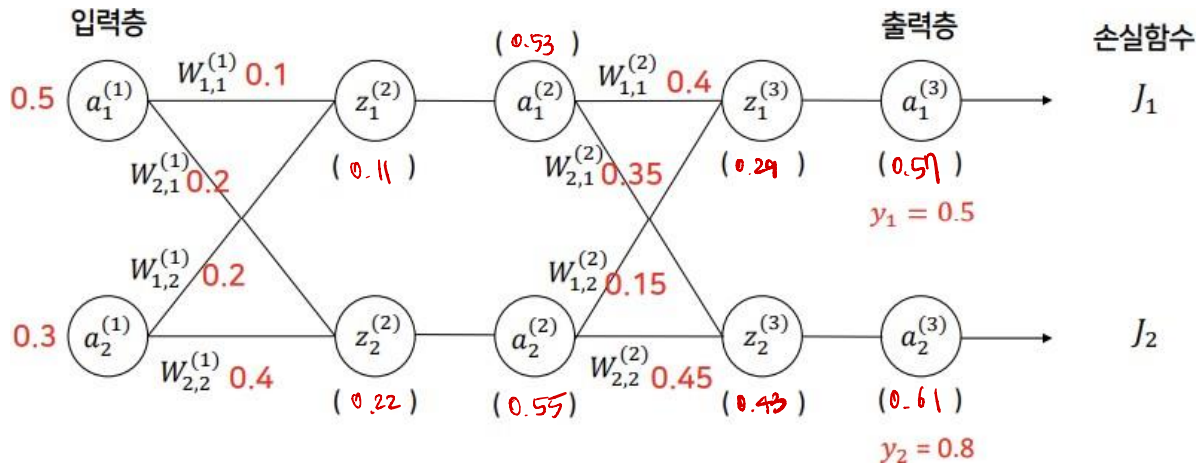
$$\eta = 0.1$$

$$w = w - 0.1 (1 - 1) x = w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$$b = b - 0.1 (1 - 1) x = b = 0.5$$

$$y = 0 \text{ 이므로 } b, w \text{ 동일}$$

3. 다음과 같이 입력과 가중치가 주어진 퍼셉트론이 있을 때, 아래의 물음에 답해주세요. 모든 문제는 풀이과정을 자세하게 적어주세요! (3-3까지 있습니다.)



- 3-1. FeedForward가 일어날 때, 각 노드가 갖는 값을 빈칸에 써주세요. 단, 활성화함수는 sigmoid 함수입니다. (모든 계산의 결과는 소수점 셋째자리에서 반올림하여 둘째자리까지만 써주세요.)

$$z_1^{(2)} = 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.11$$

$$z_2^{(2)} = 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.22$$

$$a_1^{(2)} = (1 + e^{-0.11})^{-1} = 0.53$$

$$a_2^{(2)} = (1 + e^{-0.22})^{-1} = 0.55$$

$$z_1^{(3)} = 0.53 \cdot 0.4 + 0.55 \cdot 0.15 = 0.29$$

$$z_2^{(3)} = 0.53 \cdot 0.35 + 0.55 \cdot 0.45 = 0.43$$

$$a_1^{(3)} = (1 + e^{-0.29})^{-1} = 0.57$$

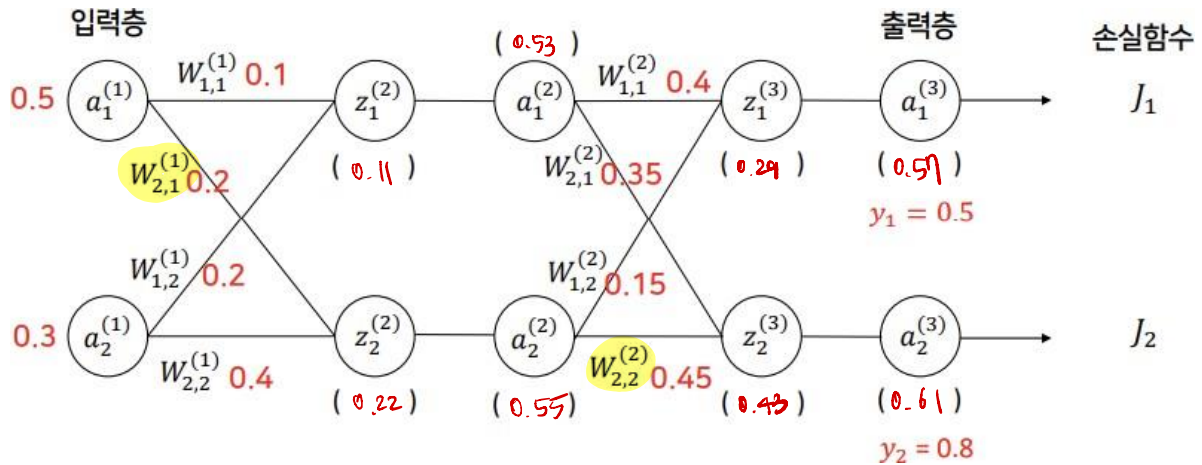
$$a_2^{(3)} = (1 + e^{-0.43})^{-1} = 0.61$$

- 3-2. 3-1에서 구한 값을 이용하여 손실함수 J_1 과 J_2 의 값을 구해주세요. (J_1 과 J_2 는 반올림하지 말고 써주세요.)

$$\text{Cost Function: } MSE = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} (y_1 - a_1^{(3)})^2 = \frac{1}{2} (0.5 - 0.57)^2 = 0.002449$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (y_2 - a_2^{(3)})^2 = \frac{1}{2} (0.8 - 0.61)^2 = 0.01805$$



- 3-3. 위에서 구한 값을 토대로, BackPropagation이 일어날 때 $w_{2,2}^{(2)}$ 과 $w_{2,1}^{(1)}$ 의 조정된 값을 구해주세요.
단, learning rate는 0.1입니다. (계산 과정에서 소수점 넷째자리에서 반올림하여 셋째자리까지만 써주시고, 마지막 결과인 $w_{2,1}^{(1)}$ 과 $w_{2,2}^{(2)}$ 의 값만 반올림하지 말고 써주세요.)

$$w_{2,2}^{(2)} = w_{2,2}^{(2)} - 0.1 \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial w_{2,2}^{(2)}}, \quad w_{2,1}^{(1)} = w_{2,1}^{(1)} - 0.1 \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial w_{2,1}^{(1)}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} &= \frac{\partial J_2}{\partial w_{2,2}^{(2)}} \\ &= \frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial z_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} \\ &= \frac{\partial (a_2^{(3)} - y_2)^2 / 2}{\partial a_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial \sigma(z_2^{(3)})}{\partial z_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial a_2^{(3)} w_{2,2}^{(2)}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} \\ &= (a_2^{(3)} - y_2) \cdot \sigma(z_2^{(3)}) (1 - \sigma(z_2^{(3)})) \cdot a_2^{(2)} \\ &= -0.025 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{update: } w_{2,2}^{(2)} = 0.45 - 0.1(-0.025) = 0.4525$$

$$\bullet \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial w_{2,1}^{(1)}} = \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial a_2^{(2)}} \cdot \frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \cdot \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial w_{2,1}^{(1)}} = -0.018 \cdot \sigma(z_2^{(2)}) (1 - \sigma(z_2^{(2)})) \cdot a_1^{(1)} = -0.002$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\text{total}}}{\partial a_2^{(2)}} &= \frac{\partial J_1}{\partial a_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial a_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}} + \frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial z_2^{(3)}} \cdot \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}} \\ &= (a_1^{(3)} - y_1) \cdot \sigma(z_1^{(3)}) (1 - \sigma(z_1^{(3)})) \cdot w_{1,2}^{(2)} + (a_2^{(3)} - y_2) \cdot \sigma(z_2^{(3)}) (1 - \sigma(z_2^{(3)})) \cdot w_{2,2}^{(2)} \\ &= -0.018 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{update: } w_{2,1}^{(1)} = 0.2 - 0.1(-0.002) = 0.2002$$