数学分析与线性代数例题

佚名

2019 年 12 月 6 日

目录

1 微分中值定理及其应用

定理 1 (极值的第二充分条件). 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$ 可导且 $f'(x_0)=0$，又 $f''(x_0)$ 存在

1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是严格极大值;

2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是严格极小值.

例 1. 求 $y=\frac{1}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的极值点和极值[1]

解. 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，当 $x\neq 5$ 时有

$$y=\frac{1}{3}((x-5)^{\frac{2}{3}}+\frac{2x}{3}(x-5)^{-}\frac{1}{3})=\frac{5(x-3)}{9(x-5)^{\frac{1}{3}}} \tag{1}$$

令 $y_0=0$ 得稳定点 $x=3$，现列表如下：

x	$(-\infty,3)$	3	$(3,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$
y	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

从表中可见 $x=3$ 是极大值点，极大值为 $f(3)=\sqrt[3]{4}$;$x=5$ 为极小值点，极小值为 $f(5)=0$. 我们可以大致地画出函数的图形，如图 1所示.

[1]原题摘自《数学分析简明教程》（上册）P142.

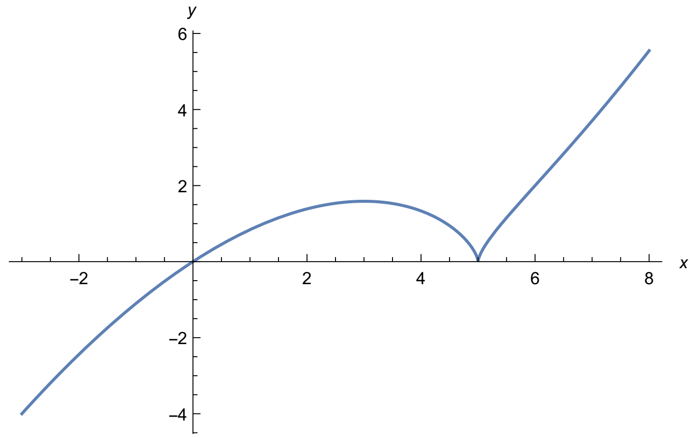

图 1: $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的函数图像

2 行列式

例 2. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$，求由方程为 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ 的椭圆为边界的区域 E 的面积[2]

解. 断言 E 是单位圆盘 D 在线性变换 T 下的像. 这里 T 由矩阵

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 确定，这是因为若 $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$,$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ，且 $x = Au$，则

$$u_1 = \frac{x_1}{a}, u_2 = \frac{x_2}{b}$$

从而得 u 在此单位圆内，即满足 $u_1^2 + u_2^2$ 1，当且仅当 x 在 E 内，即满足 $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2$ 1. 进而椭圆的面积

$$\begin{aligned}
\{\text{椭圆的面积}\} &= \{T(D)\text{的面积}\} \\
&= |detA| \cdot \{D\text{的面积}\} \\
&= a \cdot b \cdot \pi \cdot (1)^2 \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

[2]原题摘自《线性代数及其应用》（第三版）P1