Année scolaire : 2019 - 2020

L2 TDSI

M. Dione

Exercices

Exercice : 1

On donne l'application f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-2x + y + z, x - 2y + z) \end{array}$$

1°) Montrer que l'application f est linéaire.

2°) Déterminer une base de $ker\, f$, en déduire la dimension de $Im\,(f)$.

3°) Donner une base de $Im\, f$.

Exercice : 2

On donne l'application linéaire f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $f_1 = e_1 - e_2 + e_3, f_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $f_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1°) Montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

3°) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

4°) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

5°) Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

6°) Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Exercice : 3

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :

$f(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$f(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$f(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1°) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

2°) Déterminer clairement l'application f.

3°) Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est égale à 1 et donner un vecteur non nul a de E.

4°) Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.

5°) Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, f(b)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6°) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

7°) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice : 3

On donne les ensembles E et F définis comme suit :

$E = Vect(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (-1, 0, 1, 1)$; $u_2 = (1, 1, -1, 0)$;

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = z = 0\}$

1°) Donner une base et la dimension de E.

2°) Donner une base et la dimension de F.

3°) A-t-on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$?