学院__________姓名 __________ 学号____________任课老师________考场教室_________座位号_________

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

电子科技大学 2013-2014 学年第 2 学期期 末 考试 A 卷答案及评分细则

课程名称：算法分析与设计 考试形式：闭卷 考试日期：2014 年___月 ___日 考试时长：120 分钟

课程成绩构成：平时 10 %， 期中 10 %， 实验 10 %， 期末 70 %

本试卷试题由 七 部分构成，共 8 页。

题号	一	二	三	四	五	六	七	合计
得分								

得 分

一、判断题（共 10 分，共 5 题，每题 2 分）

1、算法时间复杂度主要用来衡量一个算法解决问题所花时间的多少。（ × ）

2、分治算法总是将一个大的问题分割成 2 个及以上的相同类型的小问题进行求解。（ × ）

3、备忘录方法的时间复杂度和动态规划相比没有改进。（ √ ）

4、贪心算法不是对所有问题都能得到整体最优解。（ √ ）

5、当一个图中所有边的权重都不相等时，Prim 算法和 Kruskal 算法找到的是同一个最小生成树。（ √ ）。

得 分

二、选择题（共 10 分，共 5 题，每题 2 分）

2、用贪心算法求解活动安排问题时，将所有活动按（ B ）排列的贪心选择策略能够得到全局最优解。

A. 冲突数非减序 B.结束时间非减序 C. 结束时间非增序 D. 活动持续时间非减序

4、递归经常与哪种算法设计策略同时出现（ A ）。

A. 分治算法 B. 动态规划 C. 贪心算法 D. 回溯法

5、下列递归式不能用主方法求解的是（ A ）。

A. $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$ B. $T(n) = 4T(n/2) + n^3\log n$ C. $T(n) = 3T(n/2) + n^2\log n$

D. $T(n) = 4T(2n/3) + n^4$

得 分

三、综合题（共 40 分）

1、简述动态规划和分治算法的共同点和不同点。（5 分）

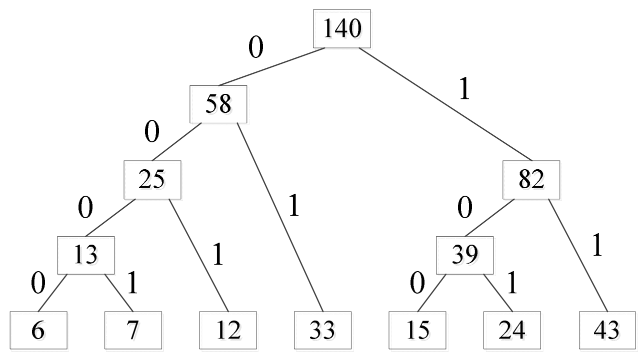
解：共同点-递归子结构：将待求解问题分解成若干个规模较小的相同类型的子问题，先求解子问题，然后从这些子问题的解得到原问题的解。………………………………………………………………（2 分）

不同点-重叠子问题：适合于用动态规划求解的问题，经分解得到子问题往往不是互相独立的。若用分治法来解这类问题，则分解得到的子问题数目太多，有些子问题被重复计算了很多次。……………（3 分）

2、给定包含{a,c,h,i,o,q,u}字符集的文本文件，每个字符在文件中出现次数如下表，试用 huffman 编码对该文件进行编码，要求画出 huffman 树，给出每个字符的编码，并计算编码后的文件 bit 长度。（8 分）

字符	a	c	h	i	o	q	U
次数	33	12	7	43	15	6	24

解：huffman 树和字符编码如下，



q:0000 h:0001 c:001 a:01 o:100 u:101 i:11

…………………………………（左子树 3 分）

…………………………………（右子树 2 分）

……………………………………（编码 2 分）

文件长度 = (6 + 7) × 4 + (12 + 15 + 24) × 3 + (33 + 43) × 2 = 357 bit…………………………（1 分）

3. 如果 $f_1(n)=O(f(n))$， $g_1(n)=O(g(n))$，证明 $f_1(n)\times g_1(n)=O(f(n)\times g(n))$。（7 分）

证明：因为 $f_1(n)=O(f(n))$，则存在正常数 c_1 和自然数 n_1，使得对所有 $n\ge n_1$，有 $f_1(n)\le c_1f(n)$成立。类似，因为 $g_1(n)=O(g(n))$，则存在正常数 c_2 和自然数 n_2，使得对所有 $n\ge n_2$，有 $g_1(n)\le c_2g(n)$成立。

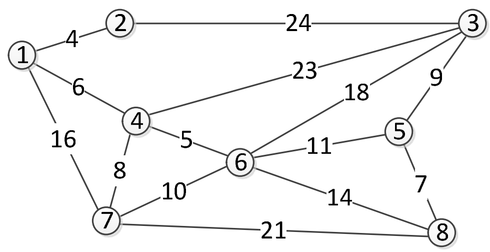
……（2 分）

令 $c_3=c_1\times c_2$，$n_3=\max\{n_1, n_2\}$，则对所有的 $n\ge n_3$，有………………………………………………（2 分）

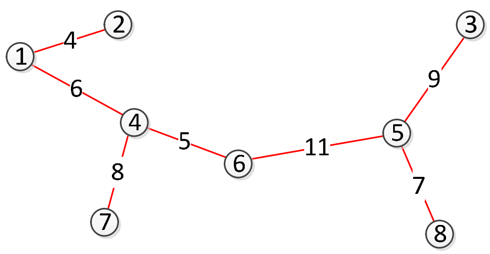
$f_1(n)\times g_1(n)\le c_1f(n)\times c_2g(n)\le c_3f(n)\times g(n)$

即 $f_1(n)\times g_1(n)=O(f(n)\times g(n))$成立。…………………………………………………………（3 分）

4、从节点 1 开始，用 Prim 算法求下图的最小生成树，要求画出最小生成树，并给出最小生成树中边的添加次序和权重之和。（6 分）



解：最小生成树如下，



……………………………………………………（最小生成树 2 分）

边的添加次序为(1, 2), (1, 4) , (4, 6) , (4, 7) , (6, 5) , (5, 8) , (5, 3)……………………………………（3 分）

最小生成树的权重之和为 50. ……………………………………………………………………………（1 分）

5、用数学归纳法证明递归式 $T(n)=9T(n/3)+n^2$ 的渐近界为 $T(n)=O\left(n^2\log n\right)$。（7 分）

证明：假设当 $k<n$ 时，$T(k)\le ck^2\log k$，其中 c 为常数。………………………（归纳假设 2 分）

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 9T(n/3)+n^2 \\
&\le 9c(n/3)^2\log(n/3)+n^2 && \text{……（首次展开 2 分）} \\
&= cn^2(\log n-\log_2 3)+n^2 \\
&= cn^2\log n-(c\log_2 3-1)n^2 && \text{……（}c\text{ 的取值范围 3 分）} \\
&\le cn^2\log n \ \ \text{if}\ \ c\ge\log_3 2
\end{aligned}
$$

因此，命题得证。

6、给定按升序排列的 n 个不同整数存于数组 $a[1:n]$中，请设计 $O(\log n)$ 的算法找到下标 i，$1\le i\le n$，使得 a[i] = i，如不存在这样的下标，则返回 0。（7 分）

解：

令 head = 1, rear = n.

(1) 当 head <= rear 时，令 mid = ⌊(head + rear)/2⌋；………………………………………………（2 分）

(2) 如果 a[mid] = mid，返回 mid 值，结束。…… ………………………………………………（2 分）

如果 a[mid] > mid，令 rear = mid – 1，返回(1)继续执行；

如果 a[mid] < mid，令 head = mid + 1，返回(1) 继续执行；……………………………………（3 分）

(3) 返回 0 值，结束。

得 分

四、将下列 5 个函数按渐近增长率由低至高进行排序，要求写出比较过程。（10 分）

$f_1(n)=n(\log n)^n$，$f_2(n)=\log n^{100\log n}$，$f_3(n)=n^2\log n$，$f_4(n)=2^{\log n+\log\log n}$，$f_5(n)=\sqrt[10]{n}$

解： $f_2(n)=\log n^{100\log n}=100\log^2 n$, $f_4(n)=2^{\log n+\log\log n}=n\log n$,

(1) $f_2(n)$ 是对数函数的幂， $f_5(n)$ 是幂函数，因此 $f_2(n)=O\left(f_5(n)\right)$;…………………（2 分）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_4(n)}{f_5(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\log n}{n^{1/10}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{9/10}\log n\right)=\infty$，因此 $f_5(n)=O\left(f_4(n)\right)$;……………（2 分）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_4(n)}{f_3(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\log n}{n^2\log n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，因此 $f_4(n)=O\left(f_3(n)\right)$;…………………………（2 分）

(4) 对 $f_1(n)$ 和 $f_3(n)$ 取对数，有

$\log f_1(n)=\log n+n\log\log n=\Theta\left(n\log\log n\right)=\Omega\left(n\right)$, $\log f_3(n)=2\log n+\log\log n=\Theta\left(\log n\right)$

因为 $\log n=O\left(n\right)$，所以 $f_3(n)=O\left(f_1(n)\right)$;…………………………………………………………（2 分）

因此，5 个函数按渐近增长率由低至高排序为 $f_2(n), f_5(n), f_4(n), f_3(n), f_1(n)$。………（2 分）

得 分

五、用动态规划算法求解如下 5 个矩阵连乘积 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ 的最优加括号方式，使得所需乘法计算次数最少。要求给出求解过程表格、最优加括号方式和最少乘法次数。（10 分）

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
11×8	8×15	15×12	12×9	9×10

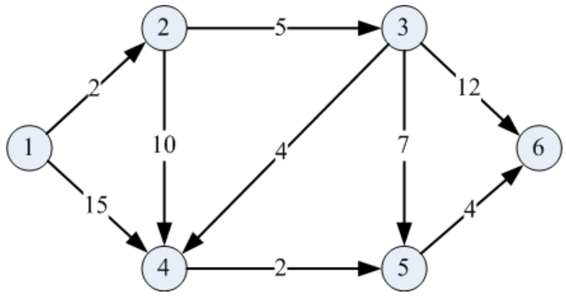
解：设计算矩阵链 A[*i*: *j*]所需要的最少数乘次数 *m*[*i*, *j*]，此时矩阵链 A[*i*: *j*]的最优断开位置为 *s*[*i*, *j*]。

***m*(*i*, *j*)** ***s*(*i*, *j*)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	0 -	1320 1	2496 1	3096 1	3904 1	（2 分）
2		0 -	1440 2	2304 3	3024 4	（2 分）
3			0 -	1620 3	2880 3	（2 分）
4				0 -	1080 4	（2 分）
5					0 -	

最优加括号方式 $A_1\left(\left(\left(A_2A_3\right)A_4\right)A_5\right)$，最少乘法次数为 3904.………………………………………（2 分）

得 分

六、用 Dijkstra 算法求下图中顶点 1 到顶点 6 的最短路径，要求给出计算过程表格和最优解、最优值。（10 分）



解：

迭代	S	u	Distance from node 1 to node #				
			2	3	4	5	6
初始	{1}	-	2	∞	15	∞	∞
1	{1,2}	2	2	7	12	∞	∞
2	{1,2,3}	3	2	7	11	14	19
3	{1,2,3,4}	4	2	7	11	13	19
4	{1,2,3,4,5}	5	2	7	11	13	17
5	{1,2,3,4,5,6}	6	2	7	11	13	17

……（每列 2 分） ……（每列 2 分） ……（每列 2 分） ……（每列 2 分）

1→6 最短路径：1,2,3,4,5,6，长度为 17。……………………………………………（2 分）

得 分

七、(一) 设计一个分治算法找到 n 个元素的序列中的第二大元素，使得最坏情况下比较次数不超过 $n + \log n - 2$；(二) 建立算法所需比较次数的递归式，并用直接展开法求解。（10 分）

解：(一)

(1) 首先将 a[1…n]分为 2 组，a[1…k]和 a[$k+1$…n]，其中 $k = n/2$。然后作 k 次比较：a[i]和 a[$i+k$]，其中 $1 \le i \le k$。当 a[i] > a[$i+k$]时，交换它们的位置。这样经过 k 次比较后我们有 a[i] ≤ a[$i+k$]，其中 $1 \le i \le k$。…………………………………………………………………………………………………（2 分）

(2) 至此，再递归地在 a[$k+1$…n]中找出其中的最大数 a[p]和次大数 a[q]。………………………（2 分）

(3) 容易看出，a[p]即为 a[1…n]中的最大教。而 a[1…n]中的次大数只能是 a[q]或 a[$p-k$]。因此，再用 1 次比较即可求得 a[1…n]中的次大数. ………………………………………………………………（2 分）

(二) 算法所需比较次数的递归式求解：

$T(n) = T(n/2) + n/2 + 1$ ……………………………………………………（递归式 2 分）

$= T(n/2^2) + n/2^2 + 1 + n/2 + 1$

$= T(n/2^2) + (1 - 1/2^2)n + 2$

$= T(n/2^3) + n/2^3 + 1 + (1 - 1/2^2)n + 2$

$= T(n/2^3) + (1 - 1/2^3)n + 3$

$= \cdots$

$= T(n/2^k) + (1 - 1/2^k)n + k$

$= \cdots$

$= T(n/2^{\log n - 1}) + (1 - 1/2^{\log n - 1})n + \log n - 1$ ……………………………………（展开式的一般形式 2 分）

$= 1 + n - 2 + \log n - 1$

$= n + \log n - 2$