人工智能

沙瀛

信息学院

2020.2

主要内容

- 归结演绎推理
- 范式
- 子句与子句集
- 将谓词公式转化为子句集
- 命题逻辑鲁宾逊归结原理

概念

- 归结演绎推理是一种基于鲁滨逊归结原理的机器推理技术
- 鲁滨逊归结原理也称为消解原理，是一种基于逻辑“反证法”的机械化定理证明方法，
- 思想：把永真性的证明转化为不可满足性的证明：
  - 定理证明的实质是对前提P和结论Q证明P →Q 的永真性
  - 应用反证法：欲证明P →Q，只要证明
    - $P \land \neg Q \Leftrightarrow F$

归结演绎推理的逻辑基础

- 谓词公式的永真性和可满足性
  - 永真性、永假性、可满足性与不可满足性
- 谓词公式的范式
  - 谓词公式的标准形式。

范式

- **合取范式**

设 $A=B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n$

其中，$B_i = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_{mi}$，而$L_j$为原子公式或其否定。则称A为合取范式。

如：$P(x) \wedge (P(x) \vee Q(y) \vee \neg R(x,y))$

概念

- **析取范式**

  设 $A=B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$

  其中，$B_i = L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_{mi}$，而$L_j$为原子公式或其否定。则称A为析取范式。

如：$P(x) \vee (P(x) \wedge Q(y) \wedge \neg R(x,y))$

谓词演算中的两种范式

- **前束形范式**
  - 一个谓词公式的所有量词均非否定地出现在公式的最前面,且它的辖域一直延伸到公式之末,同时公式中不出现连接词→及↔。
  - 例:$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(P(x) \land F(y, z) \land Q(y,z))$

- 斯克林范式(Skolem标准式)
  - 在前束范式的首标中不出现存在量词，即从前束范式中消去全部存在量词所得的公式。
  - 其一般形式为：
  - $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_3)M(x_1, x_2, \cdots. x_3)$
  - 其中$M(x_1, x_2, \cdots. x_3)$是一个合取范式，称为Skolem标准型的母式

概念

- 用f(x)代替上面前束范式中的y即得到Skolem范式
  - $(\forall x)(\forall z)(P(x) \wedge F(f(x),z) \wedge Q(f(x),z))$
- 其中f(x)称为Skolem函数。其一般式为：
  - $f(x_1,x_2,\cdots.x_n)$

概念

- **文字**
  - 原子谓词公式及其否定称为文字。
  - P(x)、Q(x)、 ¬P(x)、 ¬Q(x)等都是文字
- **子句**
  - 任何文字的析取式称为子句。
  - P(x)∨Q(x)，P(x，f(x))∨Q(x，g(x))都是子句
- **空子句**
  - 不包含任何文字的子句称为空子句，由于它不能被任何解释满足，所以空子句是永假的。
  - 空子句一般被记为□或NIL
- **子句集**
  - 由子句或空子句所构成的集合称为子句集

概念

- 例如：
  - $P(x) \lor Q(x)$,
  - $P(x,f(x)) \lor Q(x,g(x))$
  - 都是子句。

将谓词公式转化为子句集

- 在谓词逻辑中，任何一个谓词公式都可通过等价关系和推理规则化为子句集。
- 例、求公式的子句：

$$A = (\forall x)\,((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$$

概念

化简子句集的九个步骤

- 1、消去连接词“→”和“$\boxed{\leftrightarrow}$”
- 等价公式
  - $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
  - $P \boxed{\leftrightarrow} Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
- 例如，由

$A= (\forall x) ((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg (\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$

- 化为

$A= (\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y) \vee \neg (\forall y)(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$

- 2、减少否定符号的辖域（利用等价关系把“$\neg$”移到紧靠谓词的位置上）。
  - $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg(\forall x)P \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P)$
  - $\neg(\exists x)P \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P)$

  使得每个否定符号最多只作用于一个谓词上。

概念

由

$$A=(\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y)\vee\neg(\forall y)(\neg Q(x,y)\vee R(x,y)))$$

化为

$$A=(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee(\exists y)(Q(x,y)\wedge\neg R(x,y)))$$

- 3、对变元标准化
  - 在一个量词的辖域内，把谓词公式中受该量词约束的变元全部用另一个没有出现过的任意变元代替，使不同量词的约束变元名字不同

由

$$A=(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee(\exists y)(Q(x,y)\wedge\neg R(x,y)))$$

化为

$$A=(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee(\exists z)(Q(x,z)\wedge\neg R(x,z)))$$

- 4、化为前束范式
  - 把所有量词都移到公式的左边，并且在移动时不能改变其相对顺序。由于第(3)步已对变元进行了标准化，每个量词都有自己的变元，这就消除了任何由变元引起冲突的可能，因此这种移动是可行的。

例如，上式化为前束范式后为

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \wedge \neg R(x, z)))$$

概念

- 5、消去存在量词
  - 需要区分以下两种情况：
    - （1）若存在量词不出现在全称量词的辖域内（即它的左边没有全称量词），只要用一个新的个体常量替换受该存在量词约束的变元，就可消去该存在量词。

- （2）若存在量词位于一个或多个全称量词的辖域内，
  - 例如：

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \exists y\, P(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

  - 应替换为：

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\ P(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

  - 其中$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为skolem函数
  - 需要用Skolem函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$替换受该存在量词约束的变元y，然后再消去该存在量词。

- **由**

$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \wedge \neg R(x, z)))$

- **化为**

$(\forall x)(\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x)) \wedge \neg R(x,g(x))))$

- **6、化为Skolem标准形**

应用以下等价关系

$$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

将上步的公式化为Skolem标准形

例如：

由

$$(\forall x)\ (\neg P(x,f(x))\vee(Q(x,g(x))\wedge\ \neg R(x,\ g(x)))$$

化为

$$(\forall x)\ )\ ((\neg P(x,\ f(x))\vee Q(x,\ g(x)))\wedge$$
$$(\neg P(x,\ f(x))\vee\ \neg R(x,\ g(x)))$$

- 7、消去全称量词

由于母式中的全部变元均受全称量词约束，并且与全称量词的次序无关，因此可省掉全称量词。但剩下的母式，仍假设其变元是被全称量词量化的。

由

$$(\forall x)\ (\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x)) \wedge \neg R(x, g(x)))$$

化为

$$(\neg P(x,f(x)) \vee (Q(x,g(x)) \wedge \neg R(x, g(x)))$$

概念

- 8、消去合取词

  在母式中消去所有合取词，把母式用子句集的形式表示出来。其中，子句集中的每一个元素都是一个子句。

例如，上式的子句集中包含以下两个子句

$$\neg P(x, f(x)) \lor Q(x, g(x))$$

$$\neg P(x, f(x)) \lor \neg R(x, g(x))$$

- 9、对变元更名，使不同子句的变元不同名 。

对子句集中的某些变量重新命名，使任意两个子句中不出现相同的变量名。

由于任意两个不同子句的变量之间实际上不存在任何关系。更换变量名是不会影响公式的真值

- 由

$$\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))$$
$$\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))$$

- 化为

$$\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))$$
$$\neg P(y, f(y)) \vee \neg R(y, g(y))$$

例子

例：求谓词公式

$G=\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\,(P(x,y,z) \land \neg Q(u,v,w))$

的子句集

例子

解：

- ∃x未在任何全称量词的辖域内，故用常量a替换约束变元x
- ∃u在∀y ∀z的辖域内，因此用f(y,z)替换约束变元u
- ∃w在∀y ∀z ∀v的辖域内，因此用g(y,z,v)替换约束变元w

例子

- **故有：**

$$G=\forall y\forall z\forall v\,(P(a,y,z)\wedge\neg Q(f(y,z),v,g(y,z,v)))$$

例子

- **去掉全称量词：**

  $G=P(a,y,z)\wedge\neg Q(f(y,z),v,g(y,z,v))$

- **更改变量名：**

  $G=P(a,y,z)\wedge\neg Q(f(u,w),v,g(u,w,v))$

- **子句集为：**

  $\{P(a,y,z),\ \neg Q(f(u,w),v,g(u,w,v))\}$

概念

- ✓ 由于子句集化简过程在消去存在量词时所用的Skolem函数可以不同，因此所得到的标准子句集不唯一。
- ✓ 当原谓词公式为可满足时，它与其标准子句集不一定等价。
- ✓ 但当原谓词公式为不可满足时，其标准子句集则一定是不可满足的，即Skolem化并不影响原谓词公式的不可满足性。
- ✓ 这个结论很重要，是归结原理的主要依据，可用定理的形式来描述

定理：

谓词公式F不可满足的充要条件是其子句集S不可满足。

由定理可知：

要证明一个谓词公式是不可满足的，只要证明其相应的标准子句集是不可满足的就可以了。

证明一个子句集的不可满足性可以用鲁滨逊归结原理

概念

鲁宾逊归结原理

- 由谓词公式转化为子句集的过程可以看出，在子句集中子句之间是合取关系，其中只要一个子句不可满足，则子句集不可满足
- 因此若一个子句集中包含空子句，则这个子句集一定不可满足

概念

- **其基本思想：**

检查子句集S中是否包含空子句，若包含，则S不可满足，不包含，就在子句集中选择合适的子句进行归结，归结出空子句，则S不可满足

鲁滨逊归结原理包括

命题逻辑归结原理

谓词逻辑归结原理

概念

- **命题逻辑的归结**

归结推理的核心是求两个子句的归结式，因此需要先讨论归结式的定义和性质，再讨论命题逻辑的归结过程。

概念

- **互补文字**
  - 若P是原子谓词公式，则称P和～P为互补文字。
- **归结式**
  - 设C1与C2是子句集中的任意两个子句，且C1中的文字L1与C2中的文字L2互补
  - 那么，可从C1和C2中分别消去L1和L2，并将C1和C2中余下的部分按析取关系构成一个新的子句C12：C12={C1-L1} V {C2-L2}
  - 则称C12为C1与C2的归结式，C1、C2 为C12的亲本子句。

概念

- **例**

设 $C_1 = \neg P \lor Q \lor R$,

$C_2 = \neg Q \lor S$

则 $C_{12} = \neg P \lor R \lor S$

概念

- **例**

设 $C_1 = \neg P$, $C_2 = P$

则 C_{12}=NIL(空子句)

鲁宾逊归结原理

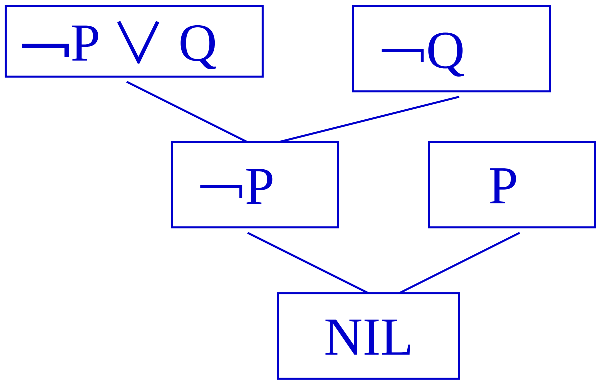
概念

- **例**

设 $C_1=\neg P\vee Q$, $C_2=\neg Q\vee R$, $C_3=P$

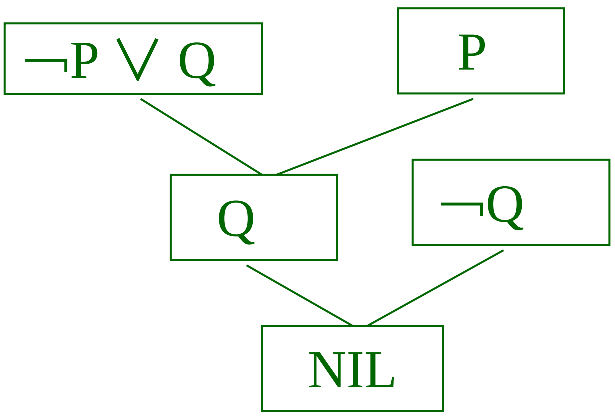
则 $C_{12}=\neg P\vee R$,

则 $C_{123}=R$



如果改变归结顺序，同样可以得到相同的结果，即其归结过程是不唯一的。

其归结归结过程可用右图来表示，该树称为归结树。



命题逻辑归结式的性质

- **定理：**
  - 归结式C_{12}是其亲本子句C_1和C_2的逻辑结论。
- **证明：**
  - 设$C_1=L \vee C_1'$，　$C_2=\neg L \vee C_2'$关于解释I为真，
  - 则只需证明：$C_{12}=C_1' \vee C_2'$关于解释I也为真。
  - 对于解释I，L和$\neg$L中必有一个为假；
  - 若L为假，则必有C_1'为真；
  - 若$\neg$L为假，则必有C_2'为真；
  - 因此，必有$C_{12}=C_1' \vee C_2'$关于解释I为真，即逻辑结论。

命题逻辑归结式的性质

- **定理：**
  - 归结式是其亲本子句的逻辑结论。
- **证明：**
  - 设$C_1=L \vee C_1'$，　$C_2=\neg L \vee C_2'$
  - 则，$C_{12}=C_1' \vee C_2'$
  - 因为 $C_1' \vee L \Leftrightarrow \neg C_1' \rightarrow L$
  - $\neg L \vee C_2' \Leftrightarrow L \rightarrow C_2'$
  - 所以$C_1 \wedge C_2=(\neg C_1' \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow C_2')$

证明

命题逻辑归结式的性质

- 根据假言三段论，有：
- $(\neg C_1' \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow C_2') \Rightarrow \neg C_1' \rightarrow C_2'$
- 故：$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow \neg C_1' \rightarrow C_2'$
- 又：$\neg C_1' \rightarrow C_2' \Leftrightarrow C_1' \vee C_2'$
- 故：$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow C_1' \vee C_2' = C_{12}$

命题逻辑归结式的性质

- **推论**

  – 设C_1、C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式。

  – **推论1、**若用C_{12}代替C_1、C_2后得到的新子句集S_1，则由S_1的不可满足性可以推出原子句集S的不可满足性。

S_1的不可满足性 ⇒ S的不可满足性

- **推论2、**

若将C_{12}加入到S中后得到的新子句集为S_2，则S不可满足的充要条件是S_2不可满足，即S与S_2的不可满足性是等价的。

S_2的不可满足性⇔S的不可满足性

命题逻辑的归结

上述两个推论说明，为证明子句集S的不可满足性，只要对其中可进行归结得子句进行归结，并把归结式加入到子句集S中，或者用归结式代替他的亲本子句，然后对新的子句集证明其不可满足性就可以了。

如果经归结能得到空子句，根据空子句的不可满足性，即可得到原子句集S是不可满足的结论。

在命题逻辑中，对不可满足的子句集S，其归结原理是完备的。

这种不可满足性可用如下定理描述：

定理2.3 子句集S是不可满足的，当且仅当存在一个从S到空子句的归结过程。

- **例、**

证明R是$P, P \wedge Q \rightarrow R, S \vee U \rightarrow Q, U$的逻辑结果。

证：我们有谓词公式如下：

$$A = P \wedge (P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (S \vee U \rightarrow Q) \wedge U \wedge \neg R$$

例子

其子句集S：

(1) P

(2) $\neg P \vee \neg Q \vee R$

(3) $\neg S \vee Q$

(4) $\neg U \vee Q$

(5) U

(6) $\neg R$

由（1）和（2）：$\neg Q \vee R$ （7）

由（4）和（7）：$\neg U \vee R$ （8）

由（5）和（8）：R （9）

由（6）和（9）：NIL

即S不可满足，故R是所述问题的逻辑结果。

本节结束，谢谢！