人工智能

沙瀛

信息学院

2020.3

主要内容

- 谓词逻辑归结原理
- 置换
- 合一

鲁宾逊归结原理

谓词逻辑的归结

在谓词逻辑中，由于子句集中的谓词一般都含有变元，因此不能象命题逻辑那样直接消去互补文字。

需要先用一个合一对变元进行代换，然后才能进行归结。

可见，谓词逻辑的归结要比命题逻辑的归结麻烦一些。

谓词逻辑的归结原理

- 问题:如何找归结对?
- 例:
  - $P(x) \vee Q(x),\ \neg P(f(y)) \vee R(y)$
  - $P(A) \vee Q(y),\ \neg P(f(y)) \vee R(y)$
- 谓词中含有变元,不能象命题那样直接消去互补文字。

- **置换**
  - 置换是一个形如$\{ t_1/x_1, t_2/x_2, \cdots, t_n/x_n \}$的有限集合：
  - t_i是项，x_i是变元，t_i/x_i表示用t_i替换x_i。
  - $t_i \neq x_i,\ x_i \neq x_j (i \neq j), i,j=1,2,3 \cdots ,n$
  - x_i不可循环出现在t_j中。
  - 不含任何元素的置换称为空置换，以ε表示

例如：

{ a/x, f(b)/y, w/z }、{ g(a)/x, f(b)/y }

是一个置换，但：

{ g(y)/x, f(x)/y }

不是置换。

- 设E是一个表达式，θ是一个替换，则Eθ表示用θ对表达式E进行替换。E可以是谓词，也可以是某个项。
- 例：
  - $\theta=\{c/x,f(d)/y,t/z\}$
  - $P=Q(x,y,z)$,
  - $u=g(x,y)$
  - $P\theta=Q(c,f(d),t)$,　$u\theta=g(c,f(d))$

- 置换乘法（两个置换的合成）：$\theta \cdot \lambda$
  - 设有2个替换：
  - $\theta=\{\ t_1/x_1, t_2/x_2, \cdots, t_n/x_n\ \}$
  - $\lambda=\{\ u_1/y_1, u_2/y_2, \cdots, u_m/y_m\ \}$
  - 令：$\mu=\{\ t_1 \cdot \lambda/x_1, t_2 \cdot \lambda/x_2, \cdots, t_n \cdot \lambda/x_n, u_1/y_1, u_2/y_2, \cdots, u_m/y_m \}$

概念

- 从上述集合中删去下面两种元素：
  - （1）当$t_i \cdot \lambda = x_i$时，从μ中删除$t_i \cdot \lambda / x_i$
  - （2）当$y_i = x_j$时，从μ中删除u_i / y_i
- 剩余元素所构成的集合仍然是一个置换，称为θ与λ的乘积，记作：$\theta \cdot \lambda$

例子

例1、设有置换：

$\theta=\{ f(y)/x, z/y \}$ ，$\lambda=\{ a/x, b/y, y/z \}$

求：$\theta \cdot \lambda$

解：

先求出集合

$\{f(b/y)/x, (y/z)/y, a/x, b/y , y/z\}=\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y , y/z\}$

其中，

f(b)/x中的f(b)是置换λ作用于f(y)的结果；

y/y 中的y是置换λ作用于z的结果。

在该集合中，

y/y满足定义中的条件①，需要删除；

a/x和b/y满足定义中的条件②，也需要删除。

最后得

$\theta\cdot\lambda=\{ f(b)/x, y/z \}$

- 合一
  - 设有公式集：$F=\{F1, F2, \cdots, Fn\}$，若存在一个置换θ，使得
  - $F1\theta = F2\theta = \cdots = Fn\theta$
  - 则称θ为F的一个合一置换，且称$F1, F2, \cdots, Fn$是可合一的。

例子

例2、设$F=\{ P(x,y,f(y)), P(a,g(x),z) \}$,

证明：$\lambda=\{ a/x, g(a)/y, f(g(a))/z \}$是F的一个合一。

证：

（1）$P(x, y, f(y))\lambda=P(a, g(a), f(g(a)))$

（2）$P(a, g(x), z)\lambda=P(a, g(a), f(g(a)))$

故λ是F的合一。

例子

- {P(x,f(y),B),P(z,f(B),B)}的合一有：
  - s={A/x,B/y,A/z}
  - s={z/x,B/y}
  - s={x/z,B/y}
  - 它们都是这两个谓词公式的合一者。
- **结论：合一者不唯一。**

- **最一般合一(mgu)**
  - 设σ是公式集F的一个合一，如果对于F的任何一个合一θ，都存在置换λ，使得：θ=σ·λ
  - 则称σ是F的最一般合一。
- **例：**

E1=P(y),E2=P(f(z))是可合一的，其合一置换是θ ={f(a)/y,a/z}

但E1和E2的mgu是{f(z)/y}。

- **最一般合一者**
  - 置换最少，限制最小，产生的置换结果最具一般性。
- 例：
  - E1=Q(y),E2=Q(z)
  - 对于E1和E2来说，σ={y/z}和σ={z/y}都是它的mgu
- **结论：mgu也不是唯一的。**

- **差异集**
  - 设F是一个非空原子公式集，且各公式的谓词名相同，依次比较对应项，若某项不完全相同，则由它们不相同的部分组成的集合称为一个差异集。

例3、设F={ P(x,y,z), P(x,f(a),h(b)) }，求其差异集。

解：

两个公式的第2项和第3项都不相同，故可得到两个差异集：

D1={ y, f(a) }, D2={ z, h(b) }

- **求最一般合一算法**

(1) 令 $k=0$, $S_k=S$, $\sigma_k=\varepsilon$（空置换，表示不做置换）

(2) 若S_k只含一个公式，则σ_k即为所求，否则：

(3) 求S_k的差异集D_k

(4) 若D_k中存在元素x_k和t_k，其中x_k是变元，t_k是项，且x_k不在t_k中出现，则令：

$$\sigma_{k+1}=\sigma_k \cdot \{t_k/x_k\}$$

$$S_{k+1}=S_k\{t_k/x_k\}$$

$$K=k+1$$

转（2）

(5) 否则，S的最一般合一不存在。

例4、设

$F=\{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$

求其最一般合一。

例子

$F=\{ P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u)) \}$

解：

- 令 $k=0$, $F_0=F$, $\sigma_0=\varepsilon$，因F_0中含有两个表达式，故σ_0不是解
- 有差异集：$D_0=\{a, z\}$
- $\sigma_1=\sigma_0 \cdot \{a/z\}=\{a/z\}$
- $F_1=\{ P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u)) \}\{a/z\}$
- $=\{ P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) \}$

例子

{ P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) }

- D1={ x, f(a) }
- σ2= σ1 · { f(a)/x }={ a/z, f(a)/x }
- F2={ P(a, x,f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) }{ f(a)/x }
- ={ P(a, f(a), f(g(y))), P(a,f(a),f(u)) }

例子

$\{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a,f(a),f(u)) \}$

- $D_2=\{ g(y), u \}$
- $\sigma_3= \sigma_2 \cdot \{ g(y)/u \}=\{ a/z, f(a)/x, g(y)/u \}$
- $F_3=\{P(a,f(a), f(g(y))), P(a,f(a),f(u)) \}\{g(y)/u\}$
- $\quad =\{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a,f(a),f(g(y))) \}$
- $\quad =\{ P(a, f(a), f(g(y))) \}$
- **因为F3中只含有一个表达式，故其最一般合一是：$\sigma_3=\{ a/z, f(a)/x, g(y)/u \}$**

- **合一定理**

  任何一个可合一的非空有限公式集一定存在最一般合一。

- **二元归结式**
  - 设C_1、C_2是两个无相同变元的子句，且L_1、L_2分别是C_1、C_2中的文字，若L_1与$\neg L_2$存在最一般合一σ，则称

$$C_{12}=\{C_1\sigma-\{L_1\sigma\}\} \cup \{C_2\sigma-\{L_2\sigma\}\}$$

为C_1与C_2的二元归结式，C_1、C_2为C_{12}的亲本子句，L_1、L_2称为消解文字（归结式上的文字）。

二元归结式

例

设$C_1=P(a)\vee R(x)$，$C_2=\neg P(y)\vee Q(b)$，求 C_{12}

解：

取$L_1= P(a)$, $L_2=\neg P(y)$，

则L_1和L_2的最一般合一是$\sigma=\{a/y\}$。

根据定义可得

$$
\begin{aligned}
C_{12} &= (\{C_1\sigma\}-\{L_1\sigma\}) \cup (\{C_2\sigma\}-\{L_2\sigma\}) \\
&= (\{P(a), R(x)\}-\{P(a)\}) \cup (\{\neg P(a), Q(b)\}-\{\neg P(a)\}) \\
&= (\{R(x)\}) \cup (\{Q(b)\}) = \{R(x), Q(b)\} \\
&= R(x)\vee Q(b)
\end{aligned}
$$

例

设$C_1=P(x)\vee Q(a)$，$C_2=\neg P(b)\vee R(x)$，求 C_{12}

解：

由于C_1和C_2有相同的变元x，不符合谓词逻辑归结定义的要求。为了进行归结，需要修改C_2中变元x的名字，令

$C_2=\neg P(b)\vee R(y)$

此时$L_1= P(x)$, $L_2 =\neg P(b)$，L_1和L_2的合一是$\sigma=\{b/x\}$。

则有

$$C_{12}=(\{C_1\sigma\}-\{L_1\sigma\})\cup(\{C_2\sigma\}-\{L_2\sigma\})$$

$$=(\{P(b), Q(a)\}-\{P(b)\})\cup(\{\neg P(b), R(y)\}-\{\neg P(b)\})$$

$$=(\{Q(a)\})\cup(\{R(y)\})=\{Q(a), R(y)\}$$

$$=Q(a)\vee R(y)$$

例子

例、设

$C_1=P(a) \vee \neg Q(x) \vee R(x)$

$C_2= \neg P(y) \vee Q(b)$

求其归结式。

例子

$$C_1 = P(a) \vee \neg Q(x) \vee R(x)$$
$$C_2 = \neg P(y) \vee Q(b)$$

解：

- 令 $L_1 = P(a)$，$L_2 = \neg P(y)$
- 则 $F_0 = \{ L_1, \neg L_2 \} = \{ P(a), P(y) \}$，$\sigma_0 = \varepsilon$
- $D_0 = \{ a, y \}$
- $\sigma_1 = \sigma_0 \cdot \{ a/y \} = \{ a/y \}$
- $F_1 = F_0 \{ a/y \} = \{ P(a), P(y) \} \{ a/y \} = \{ P(a) \}$
- 故 $\sigma = \{ a/y \}$

例子

$$C_{12}=(C_1\sigma-\{L_1\sigma\})\cup(C_2\sigma-\{L_2\sigma\})$$

$$=(\{P(a),\neg Q(x),R(x)\}-\{P(a)\})\cup$$

$$(\{\neg P(a),Q(b)\}-\{\neg P(a)\})$$

$$=(\{\neg Q(x),R(x)\})\cup(\{Q(b)\})$$

$$=\{\neg Q(x),R(x),Q(b)\}$$

$$=\neg Q(x)\vee R(x)\vee Q(b)$$

求归结式不能同时消去两个互补对，其结果不是二元归结式。如在σ={a/y, b/x}下，若同时消去两个互补对所得R(b)不是C_1和C_2的二元归结式。

例 设$C_1=P(x)\vee P(f(a))\vee Q(x)$，$C_2=\neg P(y)\vee R(b)$，求$C_{12}$

解：

对参加归结的某个子句，若其内部有可合一的文字，则在进行归结之前应先进行合一。本例C_1中有$P(x)$与$P(f(a))$，若用它们的最一般合一$\sigma=\{f(a)/x\}$进行代换，可得到

$$C_1\sigma=P(f(a))\vee Q(f(a))$$

此时可对$C_1\sigma$与C_2进行归结。选$L_1=P(f(a))$, $L_2=\neg P(y)$，L_1和L_2的最一般合一是$\sigma=\{f(a)/y\}$，则可得到C_1和C_2的二元归结式为

$$C_{12}=R(b)\vee Q(f(a))$$

其中，$C_1\sigma$为C_1的**因子**。若C中有两个或两个以上的文字具有最一般合一σ，则称Cσ为子句C的**因子**。若Cσ是一个单文字，则称它为C的**单元因子**。

概念

- **注意**
  - 如果C_1,C_2中有相同的变元，需要修改其中一个的变元名字。

    例：$c_1=P(x) \vee Q(a), c_2= \neg P(b) \vee R(x)$
  - 如果参加归结的子句内部有可合一的文字，则在归结前对这些文字先进行合一。

    例：$c1=P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x)$

    $c2 = \neg P(y) \vee R(b)$

归结演绎推理的方法

命题逻辑的归结演绎推理(1/2)

归结原理

假设F为已知前提，G为欲证明的结论，归结原理把证明G为F的逻辑结论转化为证明$F \wedge \neg G$为不可满足。

再根据定理3.1，在不可满足的意义上，公式集$F \wedge \neg G$与其子句集是等价的，即把公式集上的不可满足转化为子句集上的不可满足。

归结反演

应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。

归结反演过程

在命题逻辑中，已知F，证明G为真的归结反演过程如下：

①否定目标公式G，得$\neg G$;

②把$\neg G$并入到公式集F中，得到$\{F, \neg G\}$;

③把$\{F, \neg G\}$化为子句集S。

④ 应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次得到的归结式并入S中。如此反复进行，若出现空子句，则停止归结，此时就证明了G为真。

归结演绎推理的方法

命题逻辑的归结演绎推理(2/2)

例 设已知的公式集为{P, (P∧Q)→R, (S∨T)→Q, T}，求证结论R

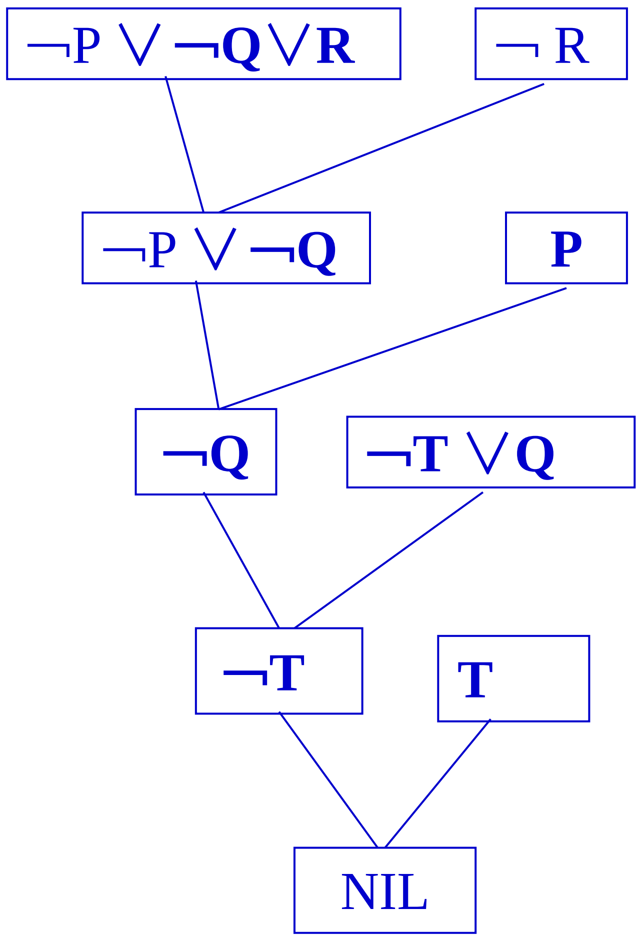
解： 假设结论R为假, 将¬R加入公式集，并化为子句集

S={P,¬P∨¬Q∨R, ¬S∨Q, ¬T∨Q, T, ¬R}

其归结过程如右图的归结树所示。

其含义为： 先假设子句集S中的所有子句均为真，即原公式集为真,¬R也为真；然后利用归结原理，对子句集进行归结，并把所得的归结式并入子句集中；重复这一过程，最后归结出了空子句。

根据归结原理的完备性，可知子句集S是不可满足的，即开始时假设¬R为真是错误的，这就证明了R为真。



例子

例、判断下面的子句集是否可满足：

$S=\{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y), P(a),$

$\neg R(z) \vee L(a,z), R(b), Q(b)\}$

例子

解：已知：

(1) $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)$

(2) $P(a)$

(3) $\neg R(z) \vee L(a,z)$

(4) $R(b)$

(5) $Q(b)$

例子

根据归结原理有：

(6) $\neg Q(y) \vee \neg L(a,y)$　　[(1), (2), σ ={a/x}]

(7) $\neg L(a,b)$　　[(5), (6), σ ={b/y}]

(8) $L(a,b)$　　[(3), (4), σ ={b/z}]

(9) NIL　　[(7), (8)]

故S是不可满足的。

归结演绎推理的方法

谓词逻辑的归结演绎推理(1/3)

谓词逻辑的归结反演

谓词逻辑的归结演绎推过程与命题逻辑的归结演绎推理过程相比，其步骤基本相同，但每步的处理对象不同。例如，在步骤(3)化简子句集时，谓词逻辑需要把由谓词构成的公式集化为子句集；在步骤(4)按归结原理进行归结时，谓词逻辑的归结原理需要考虑两个亲本子句的合一。

例2.30已知

$$F:\ (\forall x)((\exists y)(A(x, y)\wedge B(y))\rightarrow(\exists y)(C(y)\wedge D(x, y)))$$

$$G:\ \neg(\exists x)C(x)\rightarrow(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\rightarrow\neg B(y))$$

求证G是F的逻辑结论。

证明：先把G否定，并放入F中，得到的{F, ¬G}为

$$\{(\forall x)((\exists y)(A(x,y)\wedge B(y))\rightarrow(\exists y)(C(y)\wedge D(x,y))),$$

$$\neg(\neg(\exists x)C(x)\rightarrow(\forall x)(\forall y)(A(x,y)\rightarrow\neg B(y)))\}$$

4. 归结演绎推理的方法

谓词逻辑的归结演绎推理(2/3)

再把{F,¬G}化成子句集，得到

(1) ¬A(x,y)∨¬B(y) ∨C(f(x))

(2) ¬A(u,v)∨¬B(v) ∨D(u,f(u))

(3) ¬C(z)

(4) A(m,n)

(5) B(k)

其中，(1)、(2)是由F 化出的两个子句，(3)、(4)、(5)是由¬G化出的3个子句。

最后应用谓词逻辑的归结原理对上述子句集进行归结，其过程为

(6) ¬A(x,y)∨ ¬B(y) 　由(1)和(3)归结，取σ={f(x)/z}

(7) ¬B(n) 　由(4)和(6)归结，取σ={m/x,n/y}

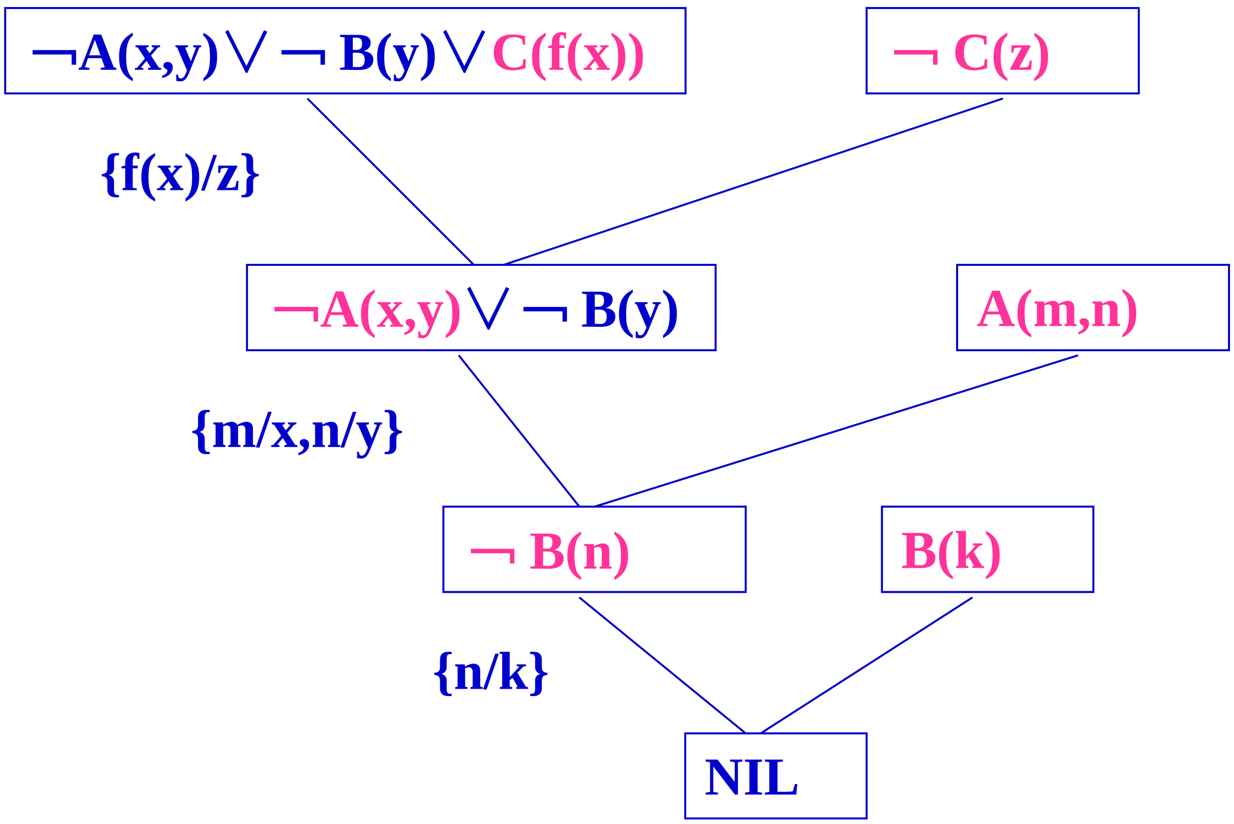
(8) NIL 　由(5)和(7)归结，取σ={n/k}

因此，G是F 的逻辑结论。

上述归结过程可用如下归结树来表示

4. 归结演绎推理的方法

谓词逻辑的归结演绎推理(3/3)



例子

- 例：已知
- F: $(\forall x)((\exists y)(A(x,y) \land B(y)) \rightarrow (\exists y)(C(y) \land D(x,y)))$
- G: $\sim(\exists x)C(x) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x,y) \rightarrow \sim B(y))$
- 求证：G是F的逻辑结论。

练习

- 已知
- F1: $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim L(x,y)))$
- F2: $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(R(y) \rightarrow L(x,y)))$
- G: $(\forall x)(R(x) \rightarrow \sim Q(x))$
- 求证：*G*是*F*的逻辑结论。

本节结束，谢谢！