人工智能

沙瀛

信息学院
2020.2

目录

- 谓词逻辑的基本概念
- 谓词公式的解释
- 谓词公式的永真性和可满足性
- 谓词公式的等价性与永真蕴含
- 置换
- 合一
- 推理及其方法

谓词公式的解释

定义：设D为谓词公式P的个体域，若对P中的个体常量、函数和谓词按如下规则赋值：

- 为每个个体常量指定D中的一个元素
- 为每个n元函数指定一个从D^n到D的映射，其中

$$D^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_1,x_2,\ldots,x_n \in D\}$$

概念

– 为每个n元谓词指定一个从D^n到{F,T}的映射。

则称这些“指定”为公式P在D上的一个解释。若公式P在解释I下其真值为T，则称I为公式P的一个模型。

例子

例1、设个体域D={1,2}，求公式

$$A=(\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

在D上的解释，并指出在每一种解释下A的值。

例子

解：

- 设：$P(1,1)=T$，$P(1,2)=F$，$P(2,1)=T$，$P(2,2)=F$
- 则它们是A在D上的一个解释。因为x=1或2时有y=1使得A的真值为T，故在此解释下公式A的真值为T。

例子

- 又设：
- $P(1,1)=T$, $P(1,2)=T$,
- $P(2,1)=F$, $P(2,2)=F$
- 它们是A在D上的另一个解释。因为对D中的所有x (x=1, x=2) ，不存在y，使得A的真值为T，故在该解释下，公式A的真值为F。

例子

例2、设个体域D={1,2}，求公式

$$B=(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(f(x),b))$$

在D上的某个解释，并指出在该解释下B的值。

例子

解：设对个体常量b，函数f(x)指派的值分别为：

- b=1, f(1)=2, f(2)=1
- 对谓词P，Q：P(1)=F，P(2)=T, Q(1,1)=T, Q(2,1)=F
- 由于b=1，故Q(1,2)，Q(2,2)不可能出现，没必要指定真值。
- 在该解释下：当x=1时，有
- P(1)=F，Q(f(1),1)=Q(2,1)=F
- 所以，P(1) → Q(f(1),b)的真值为T

例子

- 当$x=2$时，有
- $P(2)=T$，$Q(f(2),1)=Q(1,1)=T$
- 所以，$P(2)\rightarrow Q(f(2),1)$的真值为T
- 因此，对D中的任何x，
- $P(x)\rightarrow Q(f(x),b)$的真值为T
- 故在该解释下公式B的真值为T。

谓词公式的永真性

- **永真性与永假性**

 若谓词公式P对个体域D上的任何一个解释都取真值T（F），则称P在D上是永真（假）的，如果P在任何非空个体域上永真（假），则称P永真（假）。

可满足性

- 对于谓词公式P，如果至少存在一个解释使得公式P在此解释下的真值为T，则称公式P是可满足的。
- 对于谓词公式P，如果不存在一个解释使得公式P在此解释下的真值为T，则称公式P是不可满足的。
- 永假性与不可满足是等价的。

谓词公式的等价性

- **常用逻辑等价式**

设P和Q是两个谓词公式，D是它们共同的个体域，若对于D上的任何一个解释P和Q都有相同的真值，则称P和Q在D上等价。若D是任意个体域，则称P和Q等价，记作：$P \Leftrightarrow Q$。

目录

常用的等价式

(1) 双重否定律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 交换律 $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$， $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

(3) 结合律 $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

(4) 分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(5) 摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$， $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(6) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$， $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(7) 补余律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$， $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

(8) 连词化归律 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge P)$

(9) 量词转换律 $\neg(\exists x)P \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P)$， $\neg(\forall x)P \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P)$

(10) 量词分配律 $(\forall x)(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\forall x)P \wedge (\forall x)Q$

$(\exists x)(P \vee Q) \Leftrightarrow (\exists x)P \vee (\exists x)Q$

P52页

例子-1

德摩根定律

（习题）小张是某公司营销部的员工。公司经理对他说：“如果你争取到这个项目，我就奖励你一台笔记本电脑或者给你项目提成。”

已知小张争取到了这个项目，下哪项如果为真，说明该经理没有兑现承诺？

A．该经理给他项目提成，但并未奖励他笔记本电脑。
B．该经理奖励他一台笔记本电脑并给他三天假期。
C．该经理未给他项目提成，但奖励了他一台台式电脑。
D．该经理奖励他一台台式电脑并给他一台笔记本电脑。
E．以上皆不正确。

例子-2

德摩根定律

（习题）总经理：根据本公司目前的实力，我主张环岛绿地和宏达小区这两项工程至少上马一个，但清河桥改造工程不能上马。
董事长：我不同意。
以下哪项，最为准确地表达了董事长实际的意思

A．环岛绿地、宏达小区和清河桥改造这三个工程都上马。
B．环岛绿地、宏达小区和清河桥改造这三个工程都不上马。
C．环岛绿地和宏达小区两个工程中至多上马一个，但清河桥改造工程要上马。
D．环岛绿地和宏达小区两个工程至多上马一个，或保证清河桥改造工程上马。
E．环岛绿地和宏达小区两个工程都不上马，或保证清河桥改造工程上马。

永真蕴含式

- 对于谓词公式P和Q，若P→Q永真，则称P永真蕴含Q，且称Q为P的逻辑结论，称P为Q的前提。

记作：$P \Rightarrow Q$。

常用的永真蕴含式

- 化简式
  - $P \wedge Q \Rightarrow P$
  - $P \wedge Q \Rightarrow Q$
- 附加式
  - $P \Rightarrow P \vee Q$
  - $Q \Rightarrow P \vee Q$

概念

常用的永真蕴含式

- 析取三段论

  – $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

- 假言推理

  – $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

- 拒取式

  – $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

概念

常用的永真蕴含式

- 假言三段论
  - $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
- 二难推理
  - $P \vee Q,\ P \rightarrow R,\ Q \rightarrow R \Rightarrow R$
- 全称固化
  - $(\forall x) P(x) \Rightarrow P(y)$
    - y是个体域中任一个体，消去全称量词
- 存在固化
  - $(\exists x) P(x) \Rightarrow P(y)$
    - y是某个使P(y)为真的个体，消去存在量词

置换(1/3)

在不同谓词公式中，往往会出现谓词名相同但其个体不同的情况，此时推理过程是不能直接进行匹配的，需要先进行置换。

例如，可根据全称固化推理和假言推理由谓词公式

$W_1(A)$ 和 $(\forall x)(W_1(x) \rightarrow W_2(x))$

推出$W_2(A)$。对谓词$W_1(A)$可看作是由全程固化推理（即$(\forall x)(W_1(x) \Rightarrow W_1(A))$推出的，其中A是任一个体常量。

要使用假言推理，首先需要找到项A对变元x的置换，使$W_1(A)$与$W_1(x)$一致。

这种寻找项对变元的置换，使谓词一致的过程叫做合一的过程。

下面讨论置换与合一的有关概念与方法。

置换(2/3)

置换可简单的理解为是在一个谓词公式中用置换项去替换变量。

定义2.6 置换是形如

$\{t_1/x_1,t_2/x_2,\ldots,t_n/x_n\}$

的有限集合。其中，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是项；$x_1,x_2,\ldots,x_n$是互不相同的变元；t_i/x_i表示用t_i替换x_i。并且要求t_i与x_i不能相同，x_i不能循环地出现在另一个t_i中。

例如，{a/x, c/y, f(b)/z} 是一个置换。

但{g(z)/x, f(x)/z}不是一个置换。原因是它在x与z之间出现了循环置换现象。即当用g(z)置换x,用f(g(z))置换z时，既没有消去x，也没有消去z。

若改为{g(a)/x, f(x)/z}即可，原因是用g(a)置换x，用f(g(a))置换z，则消去了x和z。

通常，置换是用希腊字母θ、σ、 α、 λ等来表示的。

定义2.7 设$\theta=\{t_1/x_1,t_2/x_2,\ldots,t_n/x_n\}$是一个置换，F是一个谓词公式，把公式F中出现的所有x_i换成$t_i(i=1,2,\ldots,n)$，得到一个新的公式G，称G为F在置换θ下的例示，记作G=Fθ。

一个谓词公式的任何例示都是该公式的逻辑结论。

置换(3/3)

定义2.8： 设

$\theta=\{t_1/x_1,t_2/x_2,\ldots,t_n/x_n\}$

$\lambda=\{u_1/y_1, u_2/y_2, \ldots, u_m/y_m\}$

是两个置换。则θ与λ的合成也是一个置换，记作θ。λ。它是从集合

$\{t_1\lambda/x_1, t_2\lambda/x_2, \ldots, t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, u_2/y_2, \ldots, u_m/y_m\}$

中删去以下两种元素

① 当$t_i\lambda=x_i$时，删去$t_i\lambda/x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$；

② 当$y_j\in\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$时，删去$u_j/y_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$

最后剩下的元素所构成的集合。

例2.19： 设$\theta=\{f(y)/x, z/y\}$，$\lambda=\{a/x, b/y, y/z\}$，求θ与λ的合成。

解：先求出集合

$\{f(b/y)/x, (y/z)/y, a/x, b/y, y/z\}=\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$

其中，f(b)/x中的f(b)是置换λ作用于f(y)的结果；y/y 中的y是置换λ作用于z的结果。在该集合中，y/y满足定义中的条件①，需要删除；a/x和b/y满足定义中的条件②，也需要删除。最后得

$\theta。\lambda=\{f(b)/x, y/z\}$

合一

合一可理解为是寻找项对变量的置换，使两个谓词公式一致。

定义2.9 设有公式集$F=\{F_1, F_2,\ldots,F_n\}$，若存在一个置换θ，可使

$$F_1\theta=F_2\theta=\ldots=F_n\theta,$$

则称θ是F的一个合一。称$F_1,F_2,\ldots,F_n$是可合一的。

例如，设有公式集$F=\{P(x, y, f(y)), P(a, g(x), z)\}$，则

$$\lambda=\{a/x, g(a)/y, f(g(a))/z\}$$

是它的一个合一。

其它推理规则

- P规则：在推理的任何步骤上都可引入前提。
- T规则：推理时，如果前面步骤中有一个或多个公式永真蕴含公式S，则可把S引入推理过程中。
- 反证法：
  - $P \Rightarrow Q$，当且仅当$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow F$

推理及其方法

- 定义
- 推理方法解决的主要问题
- 推理方法的分类形式
- 推理控制策略及其分类
- 自然演绎推理

定义

- 按照某种策略由已知判断推出另一新判断的思维过程称为推理。
  - 从结构的角度：推理由两个以上的判断所组成，是一种对已有判断进行分析和综合，再得出新的判断的过程。
  - 从过程的角度：认为推理是在给定信息和已有知识的基础上的一系列加工操作，提出了如下人类推理的公式：$y=F(x, k)$

推理方法解决的主要问题

- 推理过程中前提与结论之间的逻辑关系
- 不确定性推理中不确定性的传递问题

概念

推理方法的分类形式

- 分类
  - 按推理的逻辑基础
    - 演绎推理
    - 归纳推理
  - 按知识的确定性
    - 确定性推理
    - 不确定性推理
  - 按推理的控制策略
    - 推理策略
    - 搜索理策略

按推理的逻辑基础分类

- 演绎推理是从全称判断推导出特称判断或单称判断的过程，即由一般到个别。
- 归纳推理是从足够多的事例中归纳出一般性结论的推理方法。即从个别到一般。
- 默认推理又称缺省推理，它是在知识不完全的情况下假设某条件已经具备所进行的推理。

演绎推理与归纳推理的区别

- **演绎推理**所得出的结论实际上早已蕴含在一般性知识的前提中，演绎推理只不过是将已有事实揭露出来，因此它不能增殖新知识。
- **归纳推理**由个别事物或现象推出一般性知识的过程，是增殖新知识的过程。

按所用知识的确定性分类

- **确定性推理**是指在推理过程中所用的知识都是精确的，经典逻辑属于这一种。
  - 自然演绎推理
  - 归结演绎推理
- **不确定性推理**是指在推理过程中所用的知识不都是精确的，是人工智能的重要研究课题之一。
  - 可信度推理、主观Bayes推理、证据理论、模糊推理、概率推理

按推理的单调性分类

- 单调推理是指推理过程中随着推理的向前推进及新知识的加入，推出的结论呈单调增加趋势。
- 非单调推理是指推理过程中随着推理的向前推进及新知识的加入，不仅没有加强已推出的结论，反而否定它，使推理退回某一步重新开始。

启发式推理

- 启发式知识是指与问题有关且能加快推理进程、求得问题最优解的知识。

推理控制策略及其分类

- **推理的控制策略**

  推理的控制策略是指如何使用领域知识使推理过程尽快达到目标的策略。

  – 推理策略：要解决推理方向、冲突消解等问题

  – 搜索策略：主要解决推理线路、推理效果、推理效率等问题。

自然演绎推理

- 它是从一组已知为真的事实出发，直接运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。
- 常用的推理规则是P规则、T规则、假言推理、拒取式推理、假言三段论、全称固化、存在固化。

在使用假言推理、拒取式推理应避免：

- 肯定后件的错误

  –$P \rightarrow Q$， $Q \Rightarrow P$

- 否定前件的错误

  –$\neg P$， $P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q$

例3、设已知如下事实：

$A，B，A \rightarrow C，B \wedge C \rightarrow D，D \rightarrow Q$

求证：Q为真。

证明：因为 $A, A \rightarrow C \Rightarrow C$ 假言推理

$B，C \Rightarrow B \wedge C$ 引入合取词

$B \wedge C，B \wedge C \rightarrow D \Rightarrow D$ 假言推理

$D，D \rightarrow Q \Rightarrow Q$ 假言推理

因此，Q为真

例4、设有以下事实：

（1）凡是容易的课程小王（Wang）都喜欢；

（2）C班的课程都是容易的；

（3）数学（Math）是C班的课程。

求证：小王喜欢数学课。

例子

证明：

定义谓词如下：

EASY(x)：x是容易的。

LIKE(x,y)：x喜欢y。

C(x)：x是C班的一门课程。

例子

则有谓词公式：

$$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang,x))$$

$$(\forall x)\ (C(x) \rightarrow EASY(x))$$

$$C(Math)$$

求：

$$LIKE(Wang, Math)$$

设已知如下事实：

- 如果是需要编程序的课，王程就喜欢。
- 所有的程序设计语言课都是需要编程序的课。
- C是一门程序设计语言课。
- 求证：王程喜欢C这门课。

练习

- 证明：首先定义谓词
- N(x)　　x是需要编程序的课。
- L (x, y)　x喜欢y。
- P(x)　　x是一门程序设计语言课
- 把已知事实及待求解问题用谓词公式表示如下：
- $N(x) \rightarrow L(Wangcheng, x)$
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow N(x))$
- $P(C)$

练习

- 应用推理规则进行推理：
- $P(y) \rightarrow N(y)$ 全称固化
- $P(C)$，$P(y) \rightarrow N(y) \Rightarrow N(C)$
- 假言推理 $\{C/y\}$
- $N(C)$，$N(x) \rightarrow L(Wangcheng, x) \Rightarrow L(Wangcheng, C)$ 假言推理 $\{C/x\}$
- 因此，王程喜欢C这门课。
- 一般来说，自然演绎推理由已知事实推出的结论可能有多个，只要其中包含了所需证明的结论，就认为该问题已解。

自然演绎推理

- 优点
  - 定理证明过程自然，易于理解；
  - 有丰富的推理规则可用；
- 缺点
  - 容易产生知识爆炸
  - 推理过程中得到的中间结论一般按指数规律递增
  - 对复杂问题的推理不利，甚至难以实现

本讲结束!