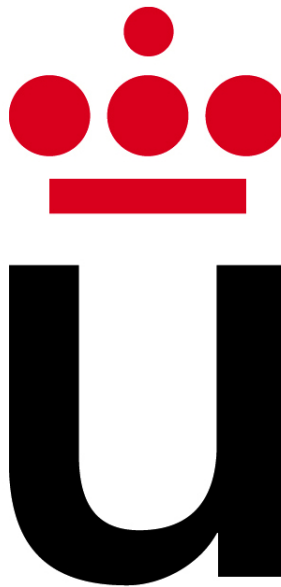


CASO PRÁCTICO III  
Gestión y planificación  
PROGRAMACIÓN DINÁMICA

*José Ignacio Escribano*



MÓSTOLES, 6 DE ENERO DE 2016

## Índice de tablas

1.	Demanda y coste de inversión por generador por año . . . . .	1
2.	Resolución del problema mediante programación dinámica hacia atrás .	1
3.	Etapa 2010 . . . . .	2
4.	Etapa 2011 . . . . .	3
5.	Etapa 2012 . . . . .	4
6.	Etapa 2013 . . . . .	5
7.	Etapa 2014 . . . . .	6
8.	Etapa 2015 . . . . .	7
9.	Solución del problema mediante programación dinámica hacia adelante	8
10.	Etapa 2011 con cálculos . . . . .	9
11.	Etapa 2012 con cálculos . . . . .	10
12.	Etapa 2013 con cálculos . . . . .	10
13.	Etapa 2014 con cálculos . . . . .	11
14.	Etapa 2015 con cálculos . . . . .	11

# Índice

Índice de figuras	b
Índice de tablas	c
1. Introducción	1
2. Resolución de la cuestión de evaluación	2
2.1. Etapa 2010 . . . . .	2
2.2. Etapa 2011 . . . . .	2
2.3. Etapa 2012 . . . . .	3
2.4. Etapa 2013 . . . . .	4
2.5. Etapa 2014 . . . . .	6
2.6. Etapa 2015 . . . . .	6
3. Conclusiones	8
4. Tablas con cálculos	9

# 1. Introducción

La empresa ELEKTRASA debe planificar la expansión de la generación de energía durante los próximos años. Sus ingenieros deben minimizar los costes totales, tanto fijos como variables de expansión del equipo generador para un alcance de varios años. Las decisiones a tomar son la potencia a instalar de cada tipo de generación en cada año del alcance del modelo. Se deben tener en cuenta ciertas restricciones en la expansión: potencia instalada inicial conocida, máxima potencia instalable, o número máximo de generadores instalables en cada año. Además, se deben considerar algunas restricciones como el balance entre generación y demanda de cada año. La demanda y el coste de inversión de cada año viene dado en la Tabla 1.

Tabla 1: Demanda y coste de inversión por generador por año

Año	Demanda (MW)	Coste de inversión por generador de 1 GW (euros/GW año)
2010	1000	50
2011	2000	55
2012	4000	60
2013	6000	65
2014	7000	45
2015	8000	40

Existe un coste adicional de 15 euros/año si se construye al menos un generador. No se pueden instalar más de 3000 MW de generación en ningún año y se parte de un sistema eléctrico sin ningún generador instalado.

Haciendo uso de la programación dinámica hacia atrás se obtiene el resultado de la Tabla 2.

Tabla 2: Resolución del problema mediante programación dinámica hacia atrás

Año	Producción (MW)	Coste (euros)
2010	3000	165
2011	3000	180
2012	0	0
2013	0	0
2014	2000	105
2015	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>8000</b>	<b>450</b>

Es decir, se deben aumentar en 8000 MW la potencia entre los años 2010 y 2015 (3000 MW en 2010 y 2011, y 2000 MW en 2014), teniendo un coste de 450 euros totales (165 euros en el año 2010, 180 en el 2011 y 105 en 2014).

## 2. Resolución de la cuestión de evaluación

A continuación resolveremos el mismo problema haciendo uso de la programación dinámica hacia delante.

### 2.1. Etapa 2010

En 2010 no tenemos ningún generador construido, por lo que los estados de la fila superior será sólo uno, 0, que indica que no tenemos ningún generador. Para satisfacer la demanda este año (1000 MW), tenemos 3 estados: 1000, 2000 y 3000 MW. No hay más estados porque no se pueden instalar más de 3000 MW en un año.

Si en 2010 hubiera 1000 MW, el coste de pasar de 0 a 1000 MW sería de 65 euros (15 del coste fijo más 50 del coste de construir un generador –Tabla 1–). Si en vez de 1000 MW hubiera 2000 MW tendríamos un coste de 115 euros (15 euros del coste fijo, más el coste de 2 generadores en el año 2010). De igual forma, si pasáramos de 0 a 3000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 3\*50 (coste de 3 generadores en el año 2010) = 165 euros.

Toda la información anterior se puede ver en la Tabla 3.

Tabla 3: Etapa 2010

	Estado	0	Coste acumulado	Instalación óptima
2010	1000	$15+50=65$	65	1000
	2000	$15+2*50=115$	115	2000
	3000	$15+3*50=165$	165	3000

### 2.2. Etapa 2011

Para satisfacer la demanda del año 2010 tenemos tres estados: 1000, 2000 y 3000 MW. Estos tres estados estarán en la fila superior de la tabla. Para satisfacer la demanda del año 2011, tenemos 5 estados posibles: 2000, 3000, 4000, 5000 y 6000 MW. Debido a la limitación de 3000 MW por año no hay más estados posibles. Notar, además, que todos los estados no serán válidos: debido a sobrepasar los 3000 MW de un año o por quitar potencia.

Si pasáramos de 1000 MW (del año 2010) a 2000 MW tendríamos un coste de 15 euros (coste fijo) + 55 euros (coste de construcción de un generador en el año 2011 de acuerdo a la Tabla 1) + 65 (coste de pasar a 1000 MW en la etapa 2010) = 135 euros.

Si mantuviéramos los 2000 MW en el año 2011, tendríamos sólo el coste de la etapa 2010, es decir, 115 euros.

Si pasáramos de 3000 MW a 2000 MW, no lo contemplamos puesto que el modelo no indica cómo eliminar generadores ni su coste asociado.

Así pues el coste mínimo es el mínimo entre 115 y 135 es 115, por lo que la instalación óptima es de 0 MW.

Si pasáramos de 1000 MW a 3000 MW en el año 2011, tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 2\*55 (coste de instalar dos generadores en el año 2011) + 65 (coste de la etapa 2010) = 190 euros. Si pasáramos de 2000 a 3000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 55 (coste de un generador) + 115 (coste de la etapa anterior) = 185 euros. Si mantuviéramos los 3000 MW en el año 2011, sólo tendríamos el coste de la etapa anterior 165. El mínimo entre 190, 185 y 165 es 165, por lo que la instalación óptima para este año es de 0 MW.

De igual forma se obtienen los estados restantes (Tabla 4). Notar que los estados que no cumplen alguna restricción (más de 3000 MW de incremento en un año, o eliminación de potencia) aparecen marcados con “—”. En la parte superior derecha aparecen los que eliminan potencia, y en la parte inferior izquierda los que superan el incremento de 3000 MW anuales.

Tabla 4: Etapa 2011

		2010			Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	1000	2000	3000		
2011	2000	135	115	—	115	0
	3000	190	185	165	165	0
	4000	245	240	235	235	1000
	5000	—	295	290	290	2000
	6000	—	—	345	345	3000

### 2.3. Etapa 2012

En el año 2011 teníamos cinco estados posibles: 2000, 3000, 4000, 5000 ó 6000 MW. Estos estados los colocamos en la fila superior de la tabla. Para satisfacer la demanda del año 2012, tenemos seis estados posibles: 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 ó 9000 MW. Notar que

todos los estados no podrán ser calculados por no cumplir las restricciones.

Si pasáramos de 2000 MW de 4000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo por la construcción de algún generador) + 2\*60 (coste de instalación de dos generadores en el año 2012 de acuerdo a la Tabla 1) + 115 (coste de la etapa anterior) = 250 euros. Si pasáramos de 3000 a 4000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 1\*60 (coste de la instalación de un generador) + 165 (coste de la etapa anterior) = 240 euros. Si mantuviéramos los 4000 MW en el año 2012, sólo tendríamos el coste de la etapa anterior, es decir, 235 euros. Notar que no podemos eliminar potencia, por lo que pasar de 5000 a 4000 MW y de 6000 a 4000 MW no los consideraremos. El mínimo entre 250, 240 y 235 es 235, por lo que la instalación óptima es de 0 MW.

Si pasáramos de 2000 a 5000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 3\*60 (coste de instalación de tres generadores) + 115 (coste de la etapa anterior) = 310 euros. Si pasáramos de 3000 a 5000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo por la instalación de un nuevo generador) + 2\*60 (coste de la instalación de dos generadores) + 165 (coste de la etapa anterior) = 300 euros. Si pasáramos de 4000 a 5000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 1\*60 (coste de instalación de un generador) + 235 (coste de la etapa anterior) = 310 euros. Si mantuviéramos los 5000 MW del año 2011, sólo tendríamos el coste de la etapa anterior, es decir, 290 euros. Notar que no podemos pasar de 6000 a 5000 MW, por lo que este caso no lo consideramos. El mínimo entre 310, 300 y 290 es 290, por lo que la instalación óptima es de instalar 0 MW.

De igual forma se obtienen las filas restantes (Tabla 5).

Tabla 5: Etapa 2012

		2012					Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	2000	3000	4000	5000	6000		
2013	4000	250	240	235	—	—	235	0
	5000	310	300	310	290	—	290	0
	6000	—	360	370	365	345	345	0
	7000	—	—	430	425	420	420	1000
	8000	—	—	—	485	480	480	2000
	9000	—	—	—	—	540	540	2000

## 2.4. Etapa 2013

En la etapa anterior teníamos seis estados: 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 ó 9000 MW. Estos estados irán en la fila superior de la tabla. Para cumplir la demanda para el año 2013

los estados serán siete: 6000, 7000, 8000, 9000, 10000, 11000 y 12000. Notar que todos los estados no serán calculables debido a nuestras restricciones.

Si pasáramos de 4000 a 7000 MW en el año 2013, tendríamos un coste de 15 (coste fijo por la instalación de algún generador) +  $2 \cdot 65$  (coste de la instalación de dos generadores en el año 2013 de acuerdo a la Tabla 1) + 235 (coste de la etapa anterior) = 380 euros. Si pasáramos de 5000 a 6000 MW, tendríamos un coste de 15 (coste de la instalación de algún generador) +  $1 \cdot 65$  (coste de la instalación de un generador) + 290 (coste de la etapa anterior) = 370 euros. Si mantuviéramos los 6000 MW del año 2012, sólo tendríamos el coste de la etapa anterior, por lo que el coste es 345 euros. Notar que no es posible pasar de 7000, 8000 ó 9000 a 6000 MW, por lo que estos estados no los consideraremos. El mínimo entre 380, 370 y 345 es 345, por lo que la instalación óptima es de 0 MW.

Si pasáramos de 4000 a 7000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo por la instalación de algún generador) +  $3 \cdot 65$  (coste de la instalación de tres generadores) + 235 (coste de la etapa anterior) = 445 euros. Si pasáramos de 5000 a 7000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) +  $2 \cdot 65$  (coste de instalación de dos generadores) + 290 (coste de la etapa anterior) = 435 euros. Si pasáramos de 6000 a 7000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) +  $1 \cdot 65$  (coste de instalación de un generador) + 345 (coste de la etapa anterior) = 425 euros. Si mantuviéramos los 7000 MW de la etapa anterior, sólo tendríamos el coste de la etapa 2012, es decir, 420 euros. No consideraremos pasar de 8000 ó 9000 MW a 7000 MW ya que no se dice cómo se quita la potencia ni cuál es el coste asociado. El mínimo entre 445, 435, 425, 420 es 420, por lo que la instalación óptima es la de instalar 0 MW de potencia.

Las filas restantes se consiguen de forma similar (Tabla 6).

Tabla 6: Etapa 2013

		2012						Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	4000	5000	6000	7000	8000	9000		
2013	6000	380	370	345	—	—	—	345	0
	7000	445	435	425	420	—	—	420	0
	8000	—	500	490	500	480	—	480	0
	9000	—	—	555	565	560	540	540	0
	10000	—	—	—	630	625	620	620	1000
	11000	—	—	—	—	690	685	685	2000
	12000	—	—	—	—	—	750	750	3000



## 2.5. Etapa 2014

En la etapa 2013 teníamos siete estados: 6000, 7000, 8000, 9000, 10000, 11000, 12000. Estos estados irán en la fila superior de la tabla. En la etapa 2014 tendremos nueve estados para satisfacer la demanda: 7000, 8000, 9000, 10000, 11000, 12000, 13000, 14000, 15000. Todos los estados no serán posibles de calcular, ya que alguno no cumplirá las restricciones.

Si pasáramos de 6000 a 7000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo por instalar algún generador) +  $1 \cdot 45$  (coste de instalar un generador en 2014 de acuerdo a la Tabla 1) + 345 (coste de la etapa anterior) = 405 euros. Si mantuviéramos los 7000 MW del año 2013, sólo tendríamos el coste de la etapa anterior, es decir, 420 euros. Notar que no es posible pasar de 8000–12000 MW a sólo 7000 MW, por lo que estos estados no son calculables. El mínimo entre 405 y 420 es 405, por lo que la instalación óptima será de 1000 MW.

Si pasáramos de 6000 a 8000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) +  $2 \cdot 45$  (coste de la instalación de dos generadores en el año 2014) + 345 (coste de la etapa anterior) = 450 euros. Si pasáramos de 7000 a 8000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) +  $1 \cdot 45$  (coste de instalación de un generador) + 420 (coste de la etapa anterior) = 480 euros. Si mantuviéramos los 8000 MW del año 2013, sólo tendríamos los costes de la etapa anterior, es decir, 480 euros. Notar que no es posible reducir la potencia de 9000–12000 MW a 8000 MW. El mínimo entre 450 y 480 es 450, por lo que la instalación óptima es 2000 MW.

El resto de filas se obtiene de manera similar (Tabla 7).

Tabla 7: Etapa 2014

		2013							Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000		
2014	7000	405	420	—	—	—	—	—	405	1000
	8000	450	480	480	—	—	—	—	450	2000
	9000	495	525	540	540	—	—	—	495	3000
	10000	—	570	585	600	620	—	—	570	3000
	11000	—	—	630	645	680	690	—	630	3000
	12000	—	—	—	690	725	750	750	690	3000
	13000	—	—	—	—	770	795	810	770	3000
	14000	—	—	—	—	—	840	855	840	3000
	15000	—	—	—	—	—	—	900	900	3000

## 2.6. Etapa 2015

En la etapa 2014 teníamos 9 estados: desde 7000 MW a 15000 MW, en cuantos de 1000 MW, que irán en la fila superior de la tabla. Para satisfacer la demanda del año 2015

tendremos 11 estados: desde 8000 MW hasta 18000 MW, de 1000 en 1000 MW.

Si pasáramos de 7000 a 8000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo de instalar algún generador) + 1\*40 (coste de instalar un generador en 2015 de acuerdo a la Tabla 1) + 405 (coste de la etapa anterior) = 460 euros. Si mantuviéramos los 8000 MW del año 2014, sólo tendríamos los costes de la etapa anterior, es decir, 450. Notar que no es posible reducir la potencia, por lo que los estados restantes no los consideraremos. Así, el mínimo entre 450 y 460 es 450, por lo que la instalación óptima es de 0 MW.

Si pasáramos de 7000 a 9000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 2\*40 (coste de instalar dos generadores en el año 2015) + 405 (coste de la etapa anterior). Si pasáramos de 8000 a 9000 MW tendríamos un coste de 15 (coste fijo) + 1\*40 (coste de instalar un generador) + 450 (coste de la etapa anterior) = 505 euros. Si mantuviéramos los 9000 MW del año anterior, tendríamos sólo el coste de la etapa anterior, es decir, 495 euros. Todos los demás estados no son calculables debido a que no se puede reducir la potencia. El mínimo entre 500, 505 y 495 es 495, por lo que la instalación óptima es de 0 MW.

El resto de las filas se obtienen de forma análoga (Tabla 8).

Tabla 8: Etapa 2015

		2014									Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000		
2015	8000	460	450	—	—	—	—	—	—	—	450	0
	9000	500	505	495	—	—	—	—	—	—	495	0
	10000	540	545	550	570	—	—	—	—	—	540	3000
	11000	—	585	590	625	630	—	—	—	—	585	3000
	12000	—	—	630	665	685	690	—	—	—	630	3000
	13000	—	—	—	705	725	745	770	—	—	705	3000
	14000	—	—	—	—	765	785	825	840	—	765	3000
	15000	—	—	—	—	—	825	865	895	900	825	3000
	16000	—	—	—	—	—	—	905	935	955	905	3000
	17000	—	—	—	—	—	—	—	975	995	975	3000
	18000	—	—	—	—	—	—	—	—	1035	1035	3000

En la etapa 2015 tenemos que el coste mínimo es de 450 euros con una producción de energía de 8000 MW. Ésta es nuestra solución. Para ver el coste y la producción asociada a cada etapa, vamos a la etapa 2014 y vemos que el coste mínimo del estado 8000 es de 450, que se corresponde al estado 6000 de la etapa 2013. En esta etapa, buscamos el estado 6000 y cogemos el el mínimo, que es 345, que se corresponde con el estado 6000 de la etapa 2012. En esta etapa, buscamos el estado 6000 y elegimos el mínimo que es 345, que se corresponde con el estado 6000 de la etapa 2012. Buscamos en esta etapa el estado 6000 y buscamos el mínimo que es 345, que se corresponde con el estado 6000 de la etapa 2011. En esta etapa el coste de 345, que se corresponde con el estado 3000 de la etapa 2010. En la etapa 2010, el estado 3000 tiene un coste de 165.

En la Tabla 9 se puede ver un resumen de lo anterior.

Tabla 9: Solución del problema mediante programación dinámica hacia adelante

Año	Producción acumulada (MW)	Producción (MW)	Coste acumulado (euros)	Coste etapa (euros)
2015	8000	0	450	0
2014	8000	2000	450	105
2013	6000	0	345	0
2012	6000	0	345	0
2011	6000	3000	345	180
2010	3000	3000	165	165

Si comparamos la solución de las Tablas 2 y 9 vemos que ambas soluciones, como queríamos comprobar.

### 3. Conclusiones

En este caso práctico, hemos visto cómo aplicar la programación dinámica en un problema real, como puede ser la planificación de producción de energía.

Además, hemos comprobamos que tanto la programación dinámica hacia delante como hacia atrás proporcionan la misma solución al problema planteado.

## 4. Tablas con cálculos

A continuación se muestran las tablas con los cálculos detallados de cada etapa.

Tabla 10: Etapa 2011 con cálculos

		2010			Coste acumulado	Instalación óptima
	Estado	1000	2000	3000		
2011	2000	$15+1*55+65$ =135	$0+115$ =115	—	115	0
	3000	$15+2*55+65$ =190	$15+1*55+115$ =185	$0+165$ =165	165	0
	4000	$15+3*55+65$ =245	$15+2*55+115$ =240	$15+1*55+165$ =235	235	1000
	5000	—	$15+3*55+115$ =295	$15+2*55+165$ =290	290	2000
	6000	—	—	$15+3*55+165$ =295	345	3000

Tabla 11: Etapa 2012 con cálculos

		2011					Coste acumulado	Instalación óptima
2012	Estado	2000	3000	4000	5000	6000		
	4000	15+2*60+115 =250	15+1*60+165 =240	0+235 =235	—	—	235	0
	5000	15+3*60+115 =310	15+2*60+165 =300	15+1*60+235 =310	0+290 =290	—	290	0
	6000	—	15+3*60+165 =360	15+2*60+235 =370	15+1*60+290 =365	0+345 =345	345	0
	7000	—	—	15+3*60+235 =430	15+2*60+290 =425	15+1*60+345 =420	420	1000
	8000	—	—	—	15+3*60+290 =485	15+2*60+345 =480	480	2000
	9000	—	—	—	—	15*3*60+345 =540	540	2000

Tabla 12: Etapa 2013 con cálculos

		2012						Coste acumulado	Instalación óptima
2013	Estado	4000	5000	6000	7000	8000	9000		
	6000	15+2*65+235 =380	15+1*65+290 =370	0+345 =345	—	—	—	345	0
	7000	15+3*65+235 =445	15+2*65+290 =435	15+1*65+345 =425	0+420 =420	—	—	420	0
	8000	—	15+3*65+290 =500	15+2*65+345 =490	15+1*65+420 =500	0+480 =480	—	480	0
	9000	—	—	15+3*65+345 =555	15+2*65+420 =565	15+1*65+480 =560	0+540= 540	540	0
	10000	—	—	—	15+3*65+420 =630	15+2*65+480 =625	15+1*65+540 =620	620	1000
	11000	—	—	—	—	15+3*65+480 =690	15+2*65+540 =685	685	2000
	12000	—	—	—	—	—	15+3*65+540 =750	750	3000

Tabla 13: Etapa 2014 con cálculos

		2013							Coste acumulado	Instalación óptima
2014	Estado	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000		
	7000	15+1*45+345 =405	0+420 =420	—	—	—	—	—	405	1000
	8000	15+2*45+345 =450	15+1*45+420 =480	0+480 =480	—	—	—	—	450	2000
	9000	15+3*45+345 =495	15+2*45+420 =525	15+1*45+480 =540	0+540 =540	—	—	—	495	3000
	10000	—	15+3*45+420 =570	15+2*45+480 =585	15+1*45+540 =600	0+620 =620	—	—	570	3000
	11000	—	—	15+3*45+480 =630	15+2*45+540 =645	15+1*45+620 =680	0+690 =690	—	630	3000
	12000	—	—	—	15+3*45+540 =690	15+2*45+620 =725	15+1*45+690 =750	0+750 =750	690	3000
	13000	—	—	—	—	15+3*45+620 =770	15+2*45+690 =795	15+1*45+750 =810	770	3000
	14000	—	—	—	—	—	15+3*45+690 =840	15+2*45+750 =855	840	3000
	15000	—	—	—	—	—	—	15+3*45+750 =900	900	3000

Tabla 14: Etapa 2015 con cálculos

		2014									Coste acumulado	Instalación óptima
2015	Estado	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000		
	8000	15+1*40+405 =460	0+450 =450	—	—	—	—	—	—	—	450	0
	9000	15+2*40+405 =500	15+1*40+450 =505	0+495 =495	—	—	—	—	—	—	495	0
	10000	15+3*40+405 =540	15+2*40+450 =545	15+1*40+495 =550	0+570 =570	—	—	—	—	—	540	3000
	11000	—	15+3*40+450 =585	15+2*40+495 =590	15+1*40+495 =625	0+630 =630	—	—	—	—	585	3000
	12000	—	—	15+3*40+495 =630	15+2*40+495 =665	15+1*40+630 =685	0+690 =690	—	—	—	630	3000
	13000	—	—	—	15+3*40+495 =705	15+2*40+630 =725	15+1*40+690 =745	0+770 =770	—	—	705	3000
	14000	—	—	—	—	15+3*40+630 =765	15+2*40+690 =785	15+1*40+770 =825	0+840 =840	—	765	3000
	15000	—	—	—	—	—	15+3*40+690 =825	15+2*40+770 =865	15+1*40+840 =895	0+900 =900	825	3000
	16000	—	—	—	—	—	—	15+3*40+770 =905	15+2*40+840 =935	15+1*40+900 =955	905	3000
	17000	—	—	—	—	—	—	—	15+3*975+840 =975	15+2*40+900 =995	975	3000
	18000	—	—	—	—	—	—	—	—	15+3*40+900 =1035	1035	3000