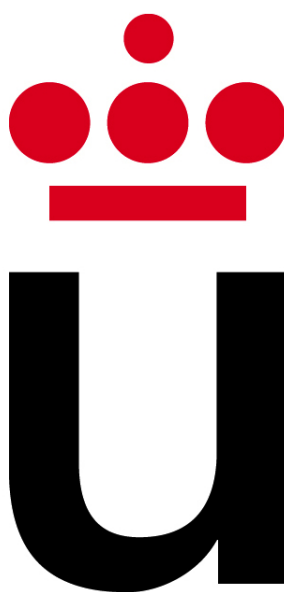


CASO PRÁCTICO I

Gestión y planificación

PROGRAMACIÓN LINEAL

José Ignacio Escribano



MÓSTOLES, 17 DE ENERO DE 2016

Índice

1. Introducción	1
2. Resolución del problema	1
2.1. Objetivo 1	3
2.2. Objetivo 2	4
2.3. Objetivo 3	6
2.4. Objetivo 4	9
3. Conclusiones	12

1. Introducción

En este caso práctico, modelaremos un problema de programación lineal para ayudar a una empresa a tomar decisiones acerca de un producto que deben elaborar. El producto se mezcla entre varios aceites: de origen vegetal (VEG1, VEG2, VEG3) y de origen animal (OIL1, OIL2 y OIL3). Antes de su uso, se deben refinar estos aceites, perdiendo un 5 % del producto. Además, se tienen otras restricciones como la dureza del producto final, la cantidad de producto a refinar, entre otras. La empresa quiere obtener el máximo beneficio.

2. Resolución del problema

Para resolver el problema necesitamos definir nuestras variables de decisión. Éstas son:

x_i = cantidad de aceite i refinado (en toneladas), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

\tilde{x}_i = cantidad de aceite i sin refinar (en toneladas), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Notar que tanto las variables x_i como \tilde{x}_i están relacionadas por la ecuación

$$x_i = 0.95\tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

Es decir, la cantidad de aceite i refinada es igual al 95 % de la no refinada, o lo que es lo mismo, se pierde un 5 % de producto en el proceso de refinado.

Al finalizar la mezcla, tendremos una cantidad, que llamaremos producto, que definimos de la siguiente manera:

$$\text{producto} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Es la cantidad de producto total, como suma de cada de las cantidades de cada aceite refinado.

De forma análoga, definimos producto_sin_refinar,

$$\text{producto_sin_refinar} = 1.05 * \text{producto}$$

Notar que el factor 1.05 indica que el producto sin refinar es un 5 % más que el producto refinado.

También tenemos unos coste asociados: costes de producción y coste de refino. Los primeros vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\text{costes_producción} = \sum_{i=1}^6 c_i x_i$$

donde c_i el coste de producción del aceite i .

Si sustituimos en la ecuación el coste de cada c_i se tiene que

$$\text{costes_producción} = 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

Los costes de refinado vienen dados por la siguiente ecuación

$$\text{costes_refinado} = 5 * \text{producto_sin_refinar}$$

Es decir, supone un gasto de 5 euros por cada tonelada de producto sin refinar.

La función objetivo será

$$\text{beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes_producción} - \text{costes_refinado}$$

donde ingresos vendrá dado por

$$\text{ingresos} = 150 * \text{producto}$$

Tenemos distintas restricciones en la capacidad de refinado, según sea la naturaleza del aceite. En el caso del aceite vegetal disponemos de un máximo de 225 toneladas, y 350 toneladas en el caso de los aceites de origen animal.

Matemáticamente, se tiene las ecuaciones siguientes

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350$$

Por último, tenemos la ecuación de la dureza, que debe estar comprendida entre 3 y 6 unidades. Viene dada como media ponderada de las durezas. Es decir,

$$3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

O de forma equivalente, con dos inecuaciones,

$$2.8x_1 + 0.1x_2 + 1.5x_3 - 4x_4 - 0.8x_5 - 1.1x_6 \leq 0$$

$$-5.3x_1 - 3.1x_2 - 4.5x_3 + x_4 - 2.2x_5 + 1.9x_6 \leq 0$$

Sólo nos falta añadir las variables de no negatividad, es decir, $\tilde{x}_i, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 6$.

Por tanto, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\max \text{beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes_producción} - \text{costes_refinado}$$

$$\text{s.a } x_i = 0.95\tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{producto} = \sum_{i=1}^6 x_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{producto_sin_refinar} = \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{costes_producción} = 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

$$\text{costes_refinado} = 5\text{producto_sin_refinar}$$

$$3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350$$

$$\tilde{x}_i, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 6$$

2.1. Objetivo 1

Usando GAMS para resolver el problema de programación lineal anterior, se tiene la siguiente salida¹:

	LOWER	LEVEL	UPPER
---- VAR X1	.	.	+INF
---- VAR X2	.	.	+INF
---- VAR X3	.	213.7500	+INF
---- VAR X4	.	17.0703	+INF
---- VAR X5	.	315.4297	+INF
---- VAR X6	.	.	+INF
---- VAR X_1	.	.	+INF
---- VAR X_2	.	.	+INF
---- VAR X_3	.	225.0000	+INF
---- VAR X_4	.	17.9688	+INF
---- VAR X_5	.	332.0312	+INF
---- VAR X_6	.	.	+INF
---- VAR BENEFICIOS	-INF	13179.6875	+INF
---- VAR INGRESOS	-INF	81937.5000	+INF
---- VAR COSTES_PR~	-INF	65882.8125	+INF

¹Notar que no es posible poner escribir las variables \tilde{x}_i en GAMS, por lo que estas variables son del tipo X_i

----	VAR COSTES_RE~	-INF	2875.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	546.2500	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	575.0000	+INF

Así pues, la mezcla óptima se consigue con 213.75 toneladas del aceite VEG3, 17.0703 toneladas del aceite OIL1 y 315.4297 toneladas de aceite OIL2. Estas cantidades son ya refinadas. Las cantidades no refinadas son 225 toneladas de VEG3, 17.9688 de OIL1 y 332.0312 de OIL2.

En total, se debe producir un total de 546.25 toneladas de aceites no refinado, o 575 toneladas si no está refinado.

Se obtienen un total de 81937.5 euros de ingresos, los costes de producción son de 65882.81 euros y los costes de refinado son de 2875 euros, haciendo que los beneficios sean de 13179.69 euros.

Queda comprobar si la solución es óptima en el modelo planteado. Esto lo comprobamos en el sumario de la salida de GAMS. Es el siguiente:

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	LINEAL	OBJECTIVE	BENEFICIOS
TYPE	LP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	42
**** SOLVER STATUS	1 Normal Completion		
**** MODEL STATUS	1 Optimal		
**** OBJECTIVE VALUE	13179.6875		
RESOURCE USAGE, LIMIT	0.020	1000.000	
ITERATION COUNT, LIMIT	4	2000000000	

Observamos, que en efecto, la solución es óptima. Por lo que los 13179.69 euros obtenidos son el máximo beneficio que se puede obtener de acuerdo al modelo planteado.

2.2. Objetivo 2

Si aumentamos la capacidad con una tonelada adicional para refinar aceite vegetal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

LOWER	LEVEL	UPPER
-------	-------	-------

----	VAR X1	.	.	+INF
----	VAR X2	.	.	+INF
----	VAR X3	.	214.7000	+INF
----	VAR X4	.	17.5156	+INF
----	VAR X5	.	314.9844	+INF
----	VAR X6	.	.	+INF
----	VAR X_1	.	.	+INF
----	VAR X_2	.	.	+INF
----	VAR X_3	.	226.0000	+INF
----	VAR X_4	.	18.4375	+INF
----	VAR X_5	.	331.5625	+INF
----	VAR X_6	.	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	13199.3750	+INF
----	VAR INGRESOS	-INF	82080.0000	+INF
----	VAR COSTES_PR~	-INF	66000.6250	+INF
----	VAR COSTES_RE~	-INF	2880.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	547.2000	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	576.0000	+INF

Es decir, tenemos una producción de 547.20 toneladas refinadas, de las cuales 214.7 corresponden con el aceite VEG3, 17.5156 corresponden al aceite OIL1 y 314.9844 con el aceite OIL2. Obtenemos un beneficio de 13199.38 euros.

Si aumentamos en una tonelada la capacidad de refinado del aceite de origen animal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

	LOWER	LEVEL	UPPER
----	VAR X1	.	+INF
----	VAR X2	.	+INF
----	VAR X3	.	213.7500
----	VAR X4	.	16.8328
----	VAR X5	.	316.6172
----	VAR X6	.	+INF
----	VAR X_1	.	+INF
----	VAR X_2	.	+INF
----	VAR X_3	.	225.0000
----	VAR X_4	.	17.7188
----	VAR X_5	.	333.2812
----	VAR X_6	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	13204.6875
----	VAR INGRESOS	-INF	82080.0000
----	VAR COSTES_PR~	-INF	65995.3125

----	VAR COSTES_RE~	-INF	2880.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	547.2000	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	576.0000	+INF

Tenemos que el producto es de 547.20 toneladas, igual que el caso anterior, de las cuales 213.75 toneladas son del aceite VEG3, 16.8328 del aceite OIL1 y 316.6172 del aceite OIL2. Se obtiene un beneficio de 13204.69 euros.

En los dos casos anteriores tenemos la misma cantidad de aceites, 547 toneladas, aunque con el aumento de una tonelada para refinar aceite animal se obtiene un beneficio mayor, aunque muy similar al que se obtiene al aumentar una tonelada la capacidad de refino de aceite de origen vegetal (la diferencia apenas llega a los 5 euros).

2.3. Objetivo 3

Modificamos el modelo anterior, introduciendo las nuevas restricciones del modelo.

En primer lugar comenzamos definiendo unas nuevas variables de decisión, aunque en este caso serán binarias.

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{si el aceite } i \text{ está presente en la mezcla} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Si nos obligan a comprar un mínimo de 15 toneladas de cada tipo de aceite seleccionado en la mezcla tendremos la siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 15\delta_i &\leq \tilde{x}_i \leq 225\delta_i, & i = 1, 2, 3 \\ 15\delta_i &\leq \tilde{x}_i \leq 350\delta_i, & i = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Es decir, por un lado, se debe cumplir que la cantidad de aceite debe ser mayor de 15, y por el otro, que sea menor que la cantidad que se puede refinar. Además, incluimos a ambos lados la variable binaria para, que en el caso, de que valga un aceite no se incluya en la mezcla, automáticamente el valor de \tilde{x} sea 0.

Si la mezcla final sólo puede tener tres aceites, la restricción queda de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^6 \delta_i \leq 3$$

Es decir, la presencia de los aceites sólo puede ser como máximo de 3, que se consigue sumando el valor de cada variable binaria δ_i .

Por último, si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal, no puede contener aceite OIL3. Esta restricción se puede obtener de dos manera: con tres restricciones o con una sola.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 3(1 - \delta_6) \iff \begin{cases} \delta_1 \leq 1 - \delta_6 \\ \delta_2 \leq 1 - \delta_6 \\ \delta_3 \leq 1 - \delta_6 \end{cases}$$

El nuevo modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max \text{beneficios} &= \text{ingresos} - \text{costes_producción} - \text{costes_refinado} \\ \text{s.a } x_i &= 0.95\tilde{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, 6 \\ \text{producto} &= \sum_{i=1}^6 x_i \quad \forall i = 1, \dots, 6 \\ \text{producto_sin_refinar} &= \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, 6 \\ \text{costes_producción} &= 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6 \\ \text{costes_refinado} &= 5\text{producto_sin_refinar} \\ 3 &\leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6 \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &\leq 225 \\ \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 &\leq 350 \\ 15\delta_i &\leq \tilde{x}_i \leq 225\delta_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ 15\delta_i &\leq \tilde{x}_i \leq 350\delta_i, \quad i = 4, 5, 6 \\ \sum_{i=1}^6 \delta_i &\leq 3 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &\leq 3(1 - \delta_6) \\ \tilde{x}_i, x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Si resolvemos este nuevo modelo con GAMS, se obtiene la siguiente solución:

	LOWER	LEVEL	UPPER
---- VAR X1	.	.	+INF
---- VAR X2	.	.	+INF
---- VAR X3	.	213.7500	+INF
---- VAR X4	.	17.0703	+INF
---- VAR X5	.	315.4297	+INF
---- VAR X6	.	.	+INF

----	VAR X_1	.	.	+INF
----	VAR X_2	.	.	+INF
----	VAR X_3	.	225.0000	+INF
----	VAR X_4	.	17.9688	+INF
----	VAR X_5	.	332.0312	+INF
----	VAR X_6	.	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	13179.6875	+INF
----	VAR INGRESOS	-INF	81937.5000	+INF
----	VAR COSTES_PR~	-INF	65882.8125	+INF
----	VAR COSTES_RE~	-INF	2875.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	546.2500	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	575.0000	+INF
----	VAR DELTA1	.	.	1.0000
----	VAR DELTA2	.	.	1.0000
----	VAR DELTA3	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA4	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA5	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA6	.	.	1.0000

En este caso, se obtiene como solución que la cantidad óptima de aceite refinado es de 546.75 toneladas (213.75 de VEG3, 17.0703 de OIL1 y 315.4297 de OIL2), obteniendo unos beneficios de 13179.69 euros (81937.50 euros en ingresos, 65882.81 euros en costes de producción y 2875 euros en costes de refinado).

Comprobemos que si la solución obtenida es óptima. Comprobamos de nuevo el resumen de GAMS, que es el siguiente:

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	LINEAL	OBJECTIVE	BENEFICIOS
TYPE	MIP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	76
**** SOLVER STATUS	1 Normal Completion		
**** MODEL STATUS	1 Optimal		
**** OBJECTIVE VALUE	13179.6875		
RESOURCE USAGE, LIMIT	0.019	1000.000	
ITERATION COUNT, LIMIT	9	2000000000	

Se tiene, por tanto, que la solución es óptima.

2.4. Objetivo 4

Modificamos el modelo anterior para añadir las nuevas restricciones.

Definimos dos nuevos tipos de variables binarias para decidir si se compra un tipo de almacén u otro.

$$\delta_{Ii} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el almacén de tipo I con el aceite } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\delta_{IIi} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el almacén de tipo II con el aceite } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6$$

Tenemos que modificar la función objetivo quedando de la siguiente manera:

$$\text{beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes_produccion} - \text{costes_refinado} - \text{costes_almacenes}$$

donde

$$\text{costes_almacenes} = \sum_{i=1}^6 (650\delta_{Ii} + 450\delta_{IIi})$$

Añadimos las restricciones siguientes:

$$\delta_{Ii} + \delta_{IIi} = \delta_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

Y sustituimos $x_i \leq 225\delta_i$ ó $x_i \leq 350\delta_i$ por $x_i \leq 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}$, $i = 1, \dots, 6$.

Por tanto, el nuevo modelo es el siguiente:

max beneficios = ingresos – costes_producción – costes_refinado – costes_almacenes

s.a $x_i = 0.95\tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$

$$\text{producto} = \sum_{i=1}^6 x_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{producto_sin_refinar} = \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{costes_producción} = 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

$$\text{costes_refinado} = 5\text{producto_sin_refinar}$$

$$\text{costes_almacenes} = \sum_{i=1}^6 (650\delta_{Ii} + 450\delta_{IIi})$$

$$3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350$$

$$15\delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$15\delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}, \quad i = 4, 5, 6$$

$$\sum_{i=1}^6 \delta_i \leq 3$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 3(1 - \delta_6)$$

$$\delta_{Ii} + \delta_{IIi} = \delta_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\tilde{x}_i, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 6$$

Resolviendo este modelo con GAMS, se obtiene la siguiente solución:

	LOWER	LEVEL	UPPER
---- VAR X1	.	152.0000	+INF
---- VAR X2	.	.	+INF
---- VAR X3	.	.	+INF
---- VAR X4	.	152.0000	+INF
---- VAR X5	.	152.0000	+INF
---- VAR X6	.	.	+INF
---- VAR X_1	.	160.0000	+INF
---- VAR X_2	.	.	+INF
---- VAR X_3	.	.	+INF
---- VAR X_4	.	160.0000	+INF
---- VAR X_5	.	160.0000	+INF

----	VAR X_6	.	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	8210.0000	+INF
----	VAR INGRESOS	-INF	68400.0000	+INF
----	VAR COSTES_PR~	-INF	55840.0000	+INF
----	VAR COSTES_RE~	-INF	2400.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	456.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	480.0000	+INF
----	VAR COSTES_AL~	-INF	1950.0000	+INF
----	VAR DELTA1	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA2	.	.	1.0000
----	VAR DELTA3	.	.	1.0000
----	VAR DELTA4	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA5	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA6	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_I1	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA_I2	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_I3	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_I4	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA_I5	.	1.0000	1.0000
----	VAR DELTA_I6	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II1	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II2	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II3	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II4	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II5	.	.	1.0000
----	VAR DELTA_II6	.	.	1.0000

Se produce con este modelo una cantidad de 456 toneladas refinadas (152 toneladas de VEG1, OIL1 y OIL2), obteniendo unos beneficios de 8210 euros, que corresponden con 68400 euros de ingresos, 55840 euros de costes de producción, 2400 euros de costes de refinado y 1950 costes de almacenes.

Los tres tipos de aceite se guardan en almacenes de tipo II.

Nos queda comprobar si se obtiene una solución óptima. Usamos el resumen de GAMS.

S O L V E S U M M A R Y

MODEL	LINEAL	OBJECTIVE	BENEFICIOS
TYPE	MIP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	95

**** SOLVER STATUS 1 Normal Completion

```

**** MODEL STATUS          1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE              8210.0000

RESOURCE USAGE, LIMIT          0.049          1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT         18          20000000000

```

De nuevo, tenemos que la solución es óptima.

3. Conclusiones

En este caso práctico, hemos modelado un problema de programación lineal para mezclar distintos tipos de aceites. En primer lugar, hemos realizado un modelo de programación lineal continua, y lo hemos modificado, convirtiéndolo en un modelo de programación lineal entera para hacer frente a las nuevas restricciones a las que nos enfrentábamos.

Para resolver los distintos tipos de problemas, hemos usado el software de programación y optimización GAMS. En un primer vistazo, su sintaxis es un poco engorrosa, aunque con un poco de práctica se consigue manejar de forma básica. Tener un dominio avanzado (manejar tablas, sets, parámetros, etc.) requiere bastante más práctica y dedicación que el dominio básico, aunque la gran potencia de cálculo de este software hace que el dominio de estos elementos permite resolver problemas con gran cantidad de dimensiones cambiando los parámetros adecuados, pudiendo reutilizar modelos en numerosas ocasiones.