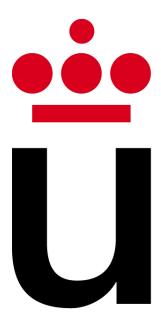
CASO PRÁCTICO I Gestión y planificación

Programación lineal

José Ignacio Escribano



Móstoles, 16 de enero de 2016

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice

Ín	dice de figuras	b
Ín	dice de tablas	C
1.	Introducción	1
2.	Resolución del problema 2.1. Objetivo 1	1
	2.1. Objetivo 1	3
	2.2. Objetivo 2	4
	2.3. Objetivo 3	6
	2.4. Objetivo 4	
3	Conclusiones	12

1. Introducción

En este caso práctico, modelaremos un problema de programación lineal para ayudar a una empresa a tomar decisiones acerca de un producto que deben elaborar. El producto se mezcla entre varios aceites: de origen vegetal (VEG1, VEG2, VEG3) y de origen animal (OIL1, OIL2 y OIL3). Antes de su uso, se deben refinar estos aceites, perdiendo un 5 % del producto. Además, se tienen otras restricciones como la dureza del producto final, la cantidad de producto a refinar, entre otras. La empresa quiere obtener el máximo beneficio.

2. Resolución del problema

Para resolver el problema necesitamos definir nuestras variables de decisión. Éstas son:

```
x_i = \text{cantidad de aceite } i \text{ refinado (en toneladas)}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
```

 $\tilde{x}_i = \text{cantidad de aceite } i \text{sin refinar (en toneladas)}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Notar que tanto las variables x_i como \tilde{x}_i están relacionadas por la ecuación

$$x_i = 0.95\tilde{x}_i$$

Es decir, la cantidad de aceite i refinada es igual al 95 % de la no refinada, o lo que es lo mismo, se pierde un 5 % de producto en el proceso de refinado.

Al finalizar la mezcla, tendremos una cantidad, que llamaremos producto, que definimos de la siguiente manera:

$$producto = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Es la cantidad de producto total, como suma de cada de las cantidades de cada aceite refinado.

De forma análoga, definimos producto_sin_refinar,

$$producto_sin_refinar = 1.05producto$$

Notar que el factor 1.05 indica que el producto sin refinar es un 5 % del producto refinado.

También tenemos unos coste asociados: costes de producción y coste de refino. Los primeros vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\texttt{costes_producción} = \sum_{i=1}^{6} c_i x_i$$

donde c_i el coste de producción del aceite i.

Si sustituimos en la ecuación el coste de cada c_i se tiene que

costes_producción =
$$115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

Los costes de refinado vienen dados por la siguiente ecuación

$$costes_refinado = 5 * producto_sin_refinar$$

Es decir, supone un gasto de 5 euros por cada tonelada de producto sin refinar.

La función objetivo será

beneficios = ingresos - costes_producción - costes_refinado donde ingresos vendrá dado por

$$ingresos = 150 * producto$$

Tenemos distintas restricciones en la capacidad de refinado, según sea la naturaleza del aceite. En el caso del aceite vegetal disponemos de de un máximo de 225 toneladas, y 350 toneladas en el caso de los aceites de origen animal.

Matemáticamente, se tiene las ecuaciones siguientes

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \le 225 \tag{1}$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \le 350 \tag{2}$$

Por último, tenemos la ecuación de la dureza, que debe estar comprendida entre 3 y 6 unidades. Viene dada como media ponderada de las durezas. Es decir,

$$3 \le \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \le 6$$

O de forma equivalente, con dos inecuaciones,

$$2.8x_1 + 0.1x_2 + 1.5x_3 - 4x_4 - 0.8x_5 - 1.1x_6 \le 0$$
$$-5.3x_1 - 3.1x_2 - 4.5x_3 + x_4 - 2.2x_5 + 1.9x_6 \le 0$$

Sólo nos falta añadir las variables de no negatividad, es decir, $\tilde{x}_i, x_i \ge 0 \ \forall i = 1, ..., 6$.

Por tanto, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{max beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes_producción} - \text{costes_refinado} \\ & \text{s.a } x_i = 0.95 \tilde{x}_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{producto} = \sum_{i=1}^6 x_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{producto_sin_refinar} = \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{costes_producción} = 115 \tilde{x}_1 + 120 \tilde{x}_2 + 115 \tilde{x}_3 + 120 \tilde{x}_4 + 114 \tilde{x}_5 + 115 \tilde{x}_6 \\ & \text{costes_refinado} = 5 \text{producto_sin_refinar} \\ & 3 \leq \frac{8.8 x_1 + 6.1 x_2 + 7.5 x_3 + 2 x_4 + 5.2 x_5 + 4.9 x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6 \\ & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225 \\ & \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350 \\ & \tilde{x}_i, x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

2.1. Objetivo 1

Usando GAMS para resolver el problema de programación lineal anterior, se tiene la siguiente salida¹:

	LOWER	LEVEL	UPPER
VAR X1	•	•	+INF
VAR X2	•	•	+INF
VAR X3		213.7500	+INF
VAR X4	•	17.0703	+INF
VAR X5	•	315.4297	+INF
VAR X6		•	+INF
VAR X_1	•	•	+INF
VAR X_2	•	•	+INF
VAR X_3	•	225.0000	+INF
VAR X_4	•	17.9688	+INF
VAR X_5	•	332.0312	+INF
VAR X_6	•	•	+INF
VAR BENEFICIOS	-INF	13179.6875	+INF
VAR INGRESOS	-INF	81937.5000	+INF
VAR COSTES_PR~	-INF	65882.8125	+INF

¹Notar que no es posible poner escribir las variables \tilde{x}_i en GAMS, por lo que estas variables son del tipo X_i

 VAR	COSTES_RE~	-INF	2875.0000	+INF
 VAR	PRODUCTO	-INF	546.2500	+INF
 VAR	PRODUCTO_~	-INF	575.0000	+INF

Así pues, la mezcla óptima se consigue con 213.75 toneladas del aceite VEG3, 17.0703 toneladas del aceite OIL1 y 315.4297 toneladas de aceite OIL2. Estas cantidades son ya refinadas. Las cantidades no refinadas son 225 toneladas de VEG3, 17.9688 de OIL1 y 332.0312 de OIL2.

En total, se debe producir un total de 546.25 toneladas de aceites no refinado, o 575 toneladas si no está refinado.

Se obtienen un total de 81937.5 euros de ingresos, los costes de producción son de 65882.81 euros y los costes de refinado son de 2875 euros, haciendo que los beneficios sean de 13179.69 euros.

Queda comprobar si la solución es óptima en el modelo planteado. Esto lo comprobamos en el sumario de la salida de GAMS. Es el siguiente:

	S O	L V	Ε	S	U M	M	A	R Y		
MODEL TYPE SOLVER					DI	REC	CTI		BENEFI MAXIMI 42	
SOLVER S MODEL ST OBJECTIV	TATUS	UE		Normal Optima	-	-				
OURCE US <i>i</i> RATION CO	•		Γ		0.0			1 0000	.000.00	0

Observamos, que en efecto, la solución en óptima. Por lo que los 13179.69 euros obtenidos son el máximo beneficio que se puede obtener de acuerdo al modelo planteado.

2.2. Objetivo 2

Si aumentamos la capacidad con una tonelada adicional para refinar aceite vegetal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARG
VAR X1		_	+INF	-2.

 VAR	X2	•		+INF
 VAR	Х3	•	214.7000	+INF
 VAR	X4	•	17.5156	+INF
 VAR	X5	•	314.9844	+INF
 VAR	X6	•	•	+INF
 VAR	X_1	•	•	+INF
 VAR	X_2	•	•	+INF
 VAR	X_3	•	226.0000	+INF
 VAR	X_4	•	18.4375	+INF
 VAR	X_5	•	331.5625	+INF
 VAR	X_6	•	•	+INF
 VAR	BENEFICIOS	-INF	13199.3750	+INF
 VAR	INGRESOS	-INF	82080.0000	+INF
 VAR	COSTES_PR~	-INF	66000.6250	+INF
 VAR	COSTES_RE~	-INF	2880.0000	+INF
 VAR	PRODUCTO	-INF	547.2000	+INF
 VAR	PRODUCTO_~	-INF	576.0000	+INF

Es decir, tenemos una producción de 547.20 toneladas refinadas, de las cuales 214.7 corresponden con el aceite VEG3, 17.5156 corresponden al aceite OIL1 y 314.9844 con el aceite OIL2. Obtenemos un beneficio de 13199.38 euros.

Si aumentamos en una tonelada la capacidad de refinado del aceite de origen animal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

		LOWER	LEVEL	UPPER
 VAR	X1	•		+INF
 VAR	X2	•	•	+INF
 VAR	Х3	•	213.7500	+INF
 VAR	X4	•	16.8328	+INF
 VAR	X5	•	316.6172	+INF
 VAR	X6	•	•	+INF
 VAR	X_1	•	•	+INF
 VAR	X_2	•	•	+INF
 VAR	X_3	•	225.0000	+INF
 VAR	X_4	•	17.7188	+INF
 VAR	X_5	•	333.2812	+INF
 VAR	X_6	•	•	+INF
 VAR	BENEFICIOS	-INF	13204.6875	+INF
 VAR	INGRESOS	-INF	82080.0000	+INF
 VAR	COSTES_PR~	-INF	65995.3125	+INF
 VAR	COSTES_RE~	-INF	2880.0000	+INF
 VAR	PRODUCTO	-INF	547.2000	+INF

Tenemos que el producto es de 547.20 toneladas, igual que el caso anterior, de las cuales 213.75 toneladas son del aceite VEG3, 16.8328 del aceite OIL1 y 316.6172 del aceite OIL2. Se obtiene un beneficio de 13204.69 euros.

En los dos casos anteriores tenemos la misma cantidad de aceites, 547 toneladas, aunque con el aumento de una tonelada para refinar aceite animal se obtiene un beneficio mayor, aunque muy similar al que se obtiene al aumentar una tonelada la capacidad de refino de aceite de origen vegetal (la diferencia apenas llega a los 5 euros).

2.3. Objetivo 3

Modificamos el modelo anterior, introduciendo las nuevas restricciones del modelo.

En primer lugar comenzamos definiendo unas nuevas variables de decisión, aunque en este caso serán binarias.

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{si el aceite } i \text{ está presente en la mezcla} \\ 0, & \text{en caso contario} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Si nos obligan a comprar un mínimo de 15 toneladas de cada tipo de aceite seleccionado en la mezcla tendremos la siguientes restricciones:

$$15\delta_i \le \tilde{x}_i \le 225\delta_i, \quad i = 1, 2, 3$$

 $15\delta_i \le \tilde{x}_i \le 350\delta_i, \quad i = 4, 5, 6$

Es decir, por un lado, se debe cumplir que la cantidad de aceite debe ser mayor de 15, y por el otro, que sea menor que la cantidad menor que la cantidad que se puede refinar. Además, incluimos a ambos lados la variable binaria para, que en el caso, de que valga 0, automáticamente \tilde{x} valga también 0.

Si la mezcla final sólo puede tener tres aceites, la restricción queda de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{6} \delta_i \le 3$$

Es decir, la presencia de los aceites sólo puede ser como máximo de 3, que se consigue sumando el valor de cada variable binaria δ_i .

Por último, si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal, no puede contener aceite OIL3. Esta restricción se puede obtener de dos manera: con tres restricciones o con una sola.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \le 3(1 - \delta_6) \iff \begin{cases} \delta_1 \le 1 - \delta_6 \\ \delta_2 \le 1 - \delta_6 \\ \delta_3 \le 1 - \delta_6 \end{cases}$$

El nuevo modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{max beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes_producción} - \text{costes_refinado} \\ & \text{s.a } x_i = 0.95 \tilde{x}_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{producto} = \sum_{i=1}^6 x_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{producto_sin_refinar} = \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \ \forall i = 1, \dots, 6 \\ & \text{costes_producción} = 115 \tilde{x}_1 + 120 \tilde{x}_2 + 115 \tilde{x}_3 + 120 \tilde{x}_4 + 114 \tilde{x}_5 + 115 \tilde{x}_6 \\ & \text{costes_refinado} = 5 \text{producto_sin_refinar} \\ & 3 \leq \frac{8.8 x_1 + 6.1 x_2 + 7.5 x_3 + 2 x_4 + 5.2 x_5 + 4.9 x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6 \\ & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225 \\ & \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350 \\ & 15 \delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 225 \delta_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ & 15 \delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 350 \delta_i, \quad i = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

$$& \sum_{i=1}^6 \delta_i \leq 3 \\ & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 3(1 - \delta_6) \\ & \tilde{x}_i, x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Si resolvemos este nuevo modelo con GAMS, se obtiene la siguiente solución:

	LOWER	LEVEL	UPPER
VAR X1	•	•	+INF
VAR X2	•	•	+INF
VAR X3	•	213.7500	+INF
VAR X4	•	17.0703	+INF
VAR X5	•	315.4297	+INF
VAR X6	•		+INF
VAR X_1	•		+INF
VAR X_2	•		+INF
VAR X_3	•	225.0000	+INF

VAR X_4	•	17.9688	+INF	•
VAR X_5	•	332.0312	+INF	
VAR X_6	•	•	+INF	-O.
VAR BENEFICIOS	-INF	13179.6875	+INF	
VAR INGRESOS	-INF	81937.5000	+INF	•
VAR COSTES_PR~	-INF	65882.8125	+INF	
VAR COSTES_RE~	-INF	2875.0000	+INF	
VAR PRODUCTO	-INF	546.2500	+INF	
VAR PRODUCTO_~	-INF	575.0000	+INF	
VAR DELTA1	•	•	1.0000	3881.
VAR DELTA2	•	•	1.0000	3895.
VAR DELTA3	•	1.0000	1.0000	4429.
VAR DELTA4	•	1.0000	1.0000	EP
VAR DELTA5	•	1.0000	1.0000	EP
VAR DELTA6	•	•	1.0000	EP

En este caso, se obtiene como solución que la cantidad óptima de aceite refinado es de 546.75 toneladas (213.75 de VEG3, 17.0703 de OIL1 y 315.4297 de OIL2), obteniendo unos beneficios de 13179.69 euros (81937.50 euros en ingresos, 65882.81 euros en costes de producción y 2875 euros en costes de refinado).

Comprobemos que si la solución obtenida es óptima. Comprobamos de nuevo el resumen de GAMS, que es el siguiente:

		S	O L	V	Ε	S	U	M N	ΙА	R Y		
		LINE MIP CPLE					Γ	IRE	ECTI ECTI M LI	ON	BENEFIC MAXIMIZ 76	
	SOLVER S	TATUS				Normal Optima	l	-				
RES(OBJECTIV OURCE USA RATION CO	AGE,	LIM					019			.000 . 000)

2.4. Objetivo 4

Modificamos el modelo anterior para añadir las nuevas restricciones.

Definimos dos nuevos tipos de variables binarias para decidir si se compra un tipo de almacén u otro.

$$\delta_{Ii} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el almacén de tipo I con el aceite } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\delta_{IIi} = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el almacén de tipo II con el aceite } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6$$

Tenemos que modificar la función objetivo quedando de la siguiente manera:

 $beneficios = ingresos - costes_produccion - costes_refinado - costes_almacenes$

donde

costes_almacenes =
$$\sum_{i=1}^{6} (650\delta_{Ii} + 450\delta_{IIi})$$

Añadimos las restricciones siguientes:

$$\delta_{Ii} + \delta_{IIi} = \delta_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

Y sustituimos $x_i \le 225\delta_i$ ó $x_i \le 350\delta_i$ por $x_i \le 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}$, $i = 1, \dots, 6$.

Por tanto, el nuevo modelo es el siguiente:

max beneficios = ingresos - costes_producción - costes_refinado - costes_almacenes s.a $x_i=0.95\tilde{x}_i \ \forall i=1,\ldots,6$

$$producto = \sum_{i=1}^{6} x_i \ \forall i = 1, \dots, 6$$

 $\tilde{x}_i, x_i > 0 \ \forall i = 1, ..., 6$

producto_sin_refinar =
$$\sum_{i=1}^{6} \tilde{x}_i \ \forall i = 1, \dots, 6$$

costes_producción = $115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$ costes_refinado = 5producto_sin_refinar

$$\begin{aligned} & \text{costes_almacenes} = \sum_{i=1}^{6} (650\delta_{Ii} + 450\delta_{IIi}) \\ & 3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6 \\ & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225 \\ & \tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350 \\ & 15\delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}, \quad i = 1, 2, 3 \\ & 15\delta_i \leq \tilde{x}_i \leq 160\delta_{Ii} + 80\delta_{IIi}, \quad i = 4, 5, 6 \\ & \sum_{i=1}^{6} \delta_i \leq 3 \\ & \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 3(1 - \delta_6) \\ & \delta_{Ii} + \delta_{IIi} = \delta_i, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Resolviendo este modelo con GAMS, se obtiene la siguiente solución:

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARG
1777		450.0000		
VAR X1	•	152.0000	+INF	•
VAR X2	•	•	+INF	•
VAR X3	•	•	+INF	•
VAR X4	•	152.0000	+INF	•
VAR X5	•	152.0000	+INF	•
VAR X6	•	•	+INF	
VAR X_1	•	160.0000	+INF	•
VAR X_2	•	•	+INF	•
VAR X_3	•	•	+INF	•
VAR X_4	•	160.0000	+INF	•
VAR X_5	•	160.0000	+INF	

 VAR	X_6	•		+INF
 VAR	BENEFICIOS	-INF	8210.0000	+INF
 VAR	INGRESOS	-INF	68400.0000	+INF
 VAR	COSTES_PR~	-INF	55840.0000	+INF
 VAR	COSTES_RE~	-INF	2400.0000	+INF
 VAR	PRODUCTO	-INF	456.0000	+INF
 VAR	PRODUCTO_~	-INF	480.0000	+INF
 VAR	COSTES_AL~	-INF	1950.0000	+INF
 VAR	DELTA1	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA2	•		1.0000
 VAR	DELTA3	•		1.0000
 VAR	DELTA4	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA5	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA6	•		1.0000
 VAR	DELTA_I1	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA_I2	•		1.0000
 VAR	DELTA_I3	•		1.0000
 VAR	DELTA_I4	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA_I5	•	1.0000	1.0000
 VAR	DELTA_I6	•		1.0000
 VAR	DELTA_II1	•		1.0000
 VAR	DELTA_II2	•		1.0000
 VAR	DELTA_II3	•		1.0000
 VAR	DELTA_II4	•	•	1.0000
 VAR	DELTA_II5	•	•	1.0000
 VAR	DELTA_II6	•	•	1.0000

2 2 3

1

Se produce con este modelo una cantidad de 456 toneladas refinadas (152 toneladas de VEG1, OIL1 y OIL2), obteniendo unos beneficios de 8210 euros, que corresponden con 68400 euros de ingresos, 55840 euros de costes de producción, 2400 euros de costes de refinado y 1950 costes de almacenes.

Los tres tipos de aceite se guardan en almacenes de tipo II.

Nos queda comprobar si se obtiene una solución óptima. Usamos el resumen de GAMS.

		S O L V	E S	UMMARY	
	TYPE	LINEAL MIP CPLEX		OBJECTIVE DIRECTION FROM LINE	
****	SOLVER	STATUS	1 Normal	Completion	

```
**** MODEL STATUS 1 Optimal

**** OBJECTIVE VALUE 8210.0000

RESOURCE USAGE, LIMIT 0.049 1000.000

ITERATION COUNT, LIMIT 18 2000000000
```

De nuevo, tenemos que la solución es óptima.

3. Conclusiones

En este caso práctico, hemos modelado un problema de programación lineal para mezclar distintos tipos de aceites. En primer lugar, hemos realizado un modelo de programación lineal continua, y lo hemos modificado, convirtiéndolo en un modelo de programación lineal entera para hacer frente a las nuevas restricciones a las que nos enfrentábamos.

Para resolver los distintos tipos de problemas, hemos usado el software de programación y optimización GAMS. En un primer vistazo, su sintaxis en un poco engorrosa, aunque con un poco de práctica se consigue manejar de forma básica. Tener un dominio avanzado (manejar tablas, sets, parámetros, etc.) requiere bastante más práctica y dedicación que el dominio básico, aunque la gran potencia de cálculo de este software hace que el dominio de estos elementos hace que problemas con muchas dimensiones sean fácilmente manejados cambiando los parámetros adecuados, pudiendo reutilizar modelos de numerosas ocasiones.