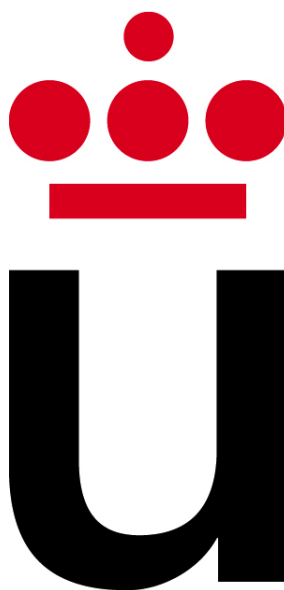


# CASO PRÁCTICO I

## Gestión y planificación

PROGRAMACIÓN LINEAL

*José Ignacio Escribano*



MÓSTOLES, 16 DE ENERO DE 2016

## Índice de figuras

## Índice de tablas

# Índice

Índice de figuras	b
Índice de tablas	c
1. Introducción	1
2. Resolución del problema	1
2.1. Objetivo 1 . . . . .	3
2.2. Objetivo 2 . . . . .	4
2.3. Objetivo 3 . . . . .	4
2.4. Objetivo 4 . . . . .	4
3. Conclusiones	4

## 1. Introducción

En este caso práctico, modelaremos un problema de programación lineal para ayudar a una empresa a tomar decisiones acerca de un producto que deben elaborar. El producto se mezcla entre varios aceites: de origen vegetal (VEG1, VEG2, VEG3) y de origen animal (OIL1, OIL2 y OIL3). Antes de su uso, se deben refinar estos aceites, perdiendo un 5 % del producto. Además, se tienen otras restricciones como la dureza del producto final, la cantidad de producto a refinar, entre otras. La empresa quiere obtener el máximo beneficio.

## 2. Resolución del problema

Para resolver el problema necesitamos definir nuestras variables de decisión. Éstas son:

$x_i$  = cantidad de aceite  $i$  refinado (en toneladas),  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$\tilde{x}_i$  = cantidad de aceite  $i$  sin refinar (en toneladas),  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Notar que tanto las variables  $x_i$  como  $\tilde{x}_i$  están relacionadas por la ecuación

$$x_i = 0.95\tilde{x}_i$$

Es decir, la cantidad de aceite  $i$  refinada es igual al 95 % de la no refinada, o lo que es lo mismo, se pierde un 5 % de producto en el proceso de refinado.

Al finalizar la mezcla, tendremos una cantidad, que llamaremos `producto`, que definimos de la siguiente manera:

$$\text{producto} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Es la cantidad de producto total, como suma de cada de las cantidades de cada aceite refinado.

De forma análoga, definimos `producto_sin_refinar`,

$$\text{producto\_sin\_refinar} = 1.05\text{producto}$$

Notar que el factor 1.05 indica que el producto sin refinar es un 5 % del producto refinado.

También tenemos unos coste asociados: costes de producción y coste de refino. Los primeros vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\text{costes\_producción} = \sum_{i=1}^6 c_i x_i$$

donde  $c_i$  el coste de producción del aceite  $i$ .

Si sustituimos en la ecuación el coste de cada  $c_i$  se tiene que

$$\text{costes\_producción} = 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

Los costes de refinado vienen dados por la siguiente ecuación

$$\text{costes\_refinado} = 5 * \text{producto\_sin\_refinar}$$

Es decir, supone un gasto de 5 euros por cada tonelada de producto sin refinar.

La función objetivo será

$$\text{beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes\_producción} - \text{costes\_refinado}$$

donde ingresos vendrá dado por

$$\text{ingresos} = 150 * \text{producto}$$

Tenemos distintas restricciones en la capacidad de refinado, según sea la naturaleza del aceite. En el caso del aceite vegetal disponemos de un máximo de 225 toneladas, y 350 toneladas en el caso de los aceites de origen animal.

Matemáticamente, se tiene las ecuaciones siguientes

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225 \quad (1)$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350 \quad (2)$$

Por último, tenemos la ecuación de la dureza, que debe estar comprendida entre 3 y 6 unidades. Viene dada como media ponderada de las durezas. Es decir,

$$3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

O de forma equivalente, con dos inecuaciones,

$$2.8x_1 + 0.1x_2 + 1.5x_3 - 4x_4 - 0.8x_5 - 1.1x_6 \leq 0$$

$$-5.3x_1 - 3.1x_2 - 4.5x_3 + x_4 - 2.2x_5 + 1.9x_6 \leq 0$$

Sólo nos falta añadir las variables de no negatividad, es decir,  $\tilde{x}_i, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 6$ .

Por tanto, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\max \text{beneficios} = \text{ingresos} - \text{costes\_producción} - \text{costes\_refinado}$$

$$\text{s.a } x_i = 0.95\tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{producto} = \sum_{i=1}^6 x_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{producto\_sin\_refinar} = \sum_{i=1}^6 \tilde{x}_i \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\text{costes\_producción} = 115\tilde{x}_1 + 120\tilde{x}_2 + 115\tilde{x}_3 + 120\tilde{x}_4 + 114\tilde{x}_5 + 115\tilde{x}_6$$

$$\text{costes\_refinado} = 5\text{producto\_sin\_refinar}$$

$$3 \leq \frac{8.8x_1 + 6.1x_2 + 7.5x_3 + 2x_4 + 5.2x_5 + 4.9x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \leq 225$$

$$\tilde{x}_4 + \tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 \leq 350$$

$$\tilde{x}_i, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, 6$$

## 2.1. Objetivo 1

Usando GAMS para resolver el problema de programación lineal anterior, se tiene la siguiente salida<sup>1</sup>:

	LOWER	LEVEL	UPPER
---- VAR X1	.	.	+INF
---- VAR X2	.	.	+INF
---- VAR X3	.	213.7500	+INF
---- VAR X4	.	17.0703	+INF
---- VAR X5	.	315.4297	+INF
---- VAR X6	.	.	+INF
---- VAR X_1	.	.	+INF
---- VAR X_2	.	.	+INF
---- VAR X_3	.	225.0000	+INF
---- VAR X_4	.	17.9688	+INF
---- VAR X_5	.	332.0312	+INF
---- VAR X_6	.	.	+INF
---- VAR BENEFICIOS	-INF	13179.6875	+INF
---- VAR INGRESOS	-INF	81937.5000	+INF
---- VAR COSTES_PR~	-INF	65882.8125	+INF

<sup>1</sup>Notar que no es posible poner escribir las variables  $\tilde{x}_i$  en GAMS, por lo que estas variables son del tipo X\_i

----	VAR	COSTES_RE~	-INF	2875.0000	+INF	.
----	VAR	PRODUCTO	-INF	546.2500	+INF	.
----	VAR	PRODUCTO_~	-INF	575.0000	+INF	.

Así pues, la mezcla óptima se consigue con 213.75 toneladas del aceite VEG3, 17.0703 toneladas del aceite OIL1 y 315.4297 toneladas de aceite OIL2. Estas cantidades son ya refinadas. Las cantidades no refinadas son 225 toneladas de VEG3, 17.9688 de OIL1 y 332.0312 de OIL2.

En total, se debe producir un total de 546.25 toneladas de aceites no refinado, o 575 toneladas si no está refinado.

Se obtienen un total de 81937.5 euros de ingresos, los costes de producción son de 65882.81 euros y los costes de refinado son de 2875 euros, haciendo que los beneficios sean de 13179.69 euros.

Queda comprobar si la solución es óptima en el modelo planteado. Esto lo comprobamos en el sumario de la salida de GAMS. Es el siguiente:

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	LINEAL	OBJECTIVE	BENEFICIOS
TYPE	LP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	42
**** SOLVER STATUS      1 Normal Completion			
**** MODEL STATUS      1 Optimal			
**** OBJECTIVE VALUE      13179.6875			
RESOURCE USAGE, LIMIT		0.020	1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT		4	2000000000

Observamos, que en efecto, la solución es óptima. Por lo que los 13179.69 euros obtenidos son el máximo beneficio que se puede obtener de acuerdo al modelo planteado.

## 2.2. Objetivo 2

Si aumentamos la capacidad con una tonelada adicional para refinar aceite vegetal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARG		
----	VAR	X1	.	.	+INF	-2.



----	VAR X2	.	.	+INF
----	VAR X3	.	214.7000	+INF
----	VAR X4	.	17.5156	+INF
----	VAR X5	.	314.9844	+INF
----	VAR X6	.	.	+INF
----	VAR X_1	.	.	+INF
----	VAR X_2	.	.	+INF
----	VAR X_3	.	226.0000	+INF
----	VAR X_4	.	18.4375	+INF
----	VAR X_5	.	331.5625	+INF
----	VAR X_6	.	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	13199.3750	+INF
----	VAR INGRESOS	-INF	82080.0000	+INF
----	VAR COSTES_PR~	-INF	66000.6250	+INF
----	VAR COSTES_RE~	-INF	2880.0000	+INF
----	VAR PRODUCTO	-INF	547.2000	+INF
----	VAR PRODUCTO_~	-INF	576.0000	+INF

Es decir, tenemos una producción de 547.20 toneladas refinadas, de las cuales 214.7 corresponden con el aceite VEG3, 17.5156 corresponden al aceite OIL1 y 314.9844 con el aceite OIL2. Obtenemos un beneficio de 13199.38 euros.

Si aumentamos en una tonelada la capacidad de refinado del aceite de origen animal, se obtiene la siguiente salida de GAMS:

	LOWER	LEVEL	UPPER
----	VAR X1	.	+INF
----	VAR X2	.	+INF
----	VAR X3	213.7500	+INF
----	VAR X4	16.8328	+INF
----	VAR X5	316.6172	+INF
----	VAR X6	.	+INF
----	VAR X_1	.	+INF
----	VAR X_2	.	+INF
----	VAR X_3	225.0000	+INF
----	VAR X_4	17.7188	+INF
----	VAR X_5	333.2812	+INF
----	VAR X_6	.	+INF
----	VAR BENEFICIOS	-INF	13204.6875
----	VAR INGRESOS	-INF	82080.0000
----	VAR COSTES_PR~	-INF	65995.3125
----	VAR COSTES_RE~	-INF	2880.0000
----	VAR PRODUCTO	-INF	547.2000

---- VAR PRODUCTO\_~                      -INF                      576.0000                      +INF

Tenemos que el producto es de 547.20 toneladas, igual que el caso anterior, de las cuales 213.75 toneladas son del aceite VEG3, 16.8328 del aceite OIL1 y 316.6172 del aceite OIL2. Se obtiene un beneficio de 13204.69 euros.

En los dos casos anteriores tenemos la misma cantidad de aceites, 547 toneladas, aunque con el aumento de una tonelada para refinar aceite animal se obtiene un beneficio mayor, aunque muy similar al que se obtiene al aumentar una tonelada la capacidad de refino de aceite de origen vegetal (la diferencia apenas llega a los 5 euros).

### **2.3. Objetivo 3**

### **2.4. Objetivo 4**

## **3. Conclusiones**