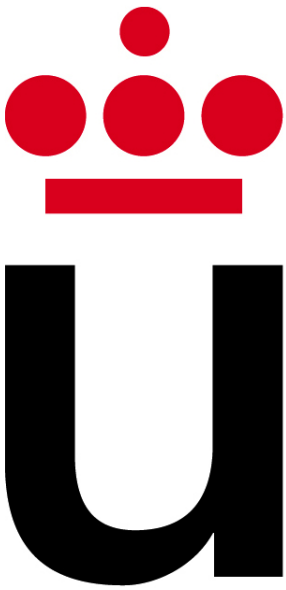
Caso Práctico IV

Modelización y tratamiento de la incertidumbre

Modelos lineales

José Ignacio Escribano



Móstoles, 27 de octubre de 2015

Índice de figuras

Índice

1. Introducción

Este caso práctico buscaremos un modelo lineal para predecir el valor medio de las casas ocupadas por los propietarios, a partir de trece variables como el crimen per cápita, la concentración de óxido nítrico, el número de medio de habitaciones por vivienda, entre otras.

2. Resolución del caso práctico

En primer lugar, observamos el fichero de datos para ver qué variables son cuanitativas y categóricas. Observamos que todas las variables son cuantitativas, excepto una que es categórica: CHAS (1, si las vías cruzan el río y, 0 en caso contrario). Para cada de las variables, calculamos un resumen (mínimo, máximo, primer y tercer cuartil) usando R. El resumen de cada de las variables es el siguiente:

```
      CRIM                ZN              INDUS            CHAS        
 Min.   : 0.0060   Min.   :  0.00   Min.   : 0.46   Min.   :0.00000  
 1st Qu.: 0.0820   1st Qu.:  0.00   1st Qu.: 5.19   1st Qu.:0.00000  
 Median : 0.2565   Median :  0.00   Median : 9.69   Median :0.00000  
 Mean   : 3.6135   Mean   : 11.36   Mean   :11.14   Mean   :0.06917  
 3rd Qu.: 3.6770   3rd Qu.: 12.50   3rd Qu.:18.10   3rd Qu.:0.00000  
 Max.   :88.9760   Max.   :100.00   Max.   :27.74   Max.   :1.00000  
      NOX               RM              AGE              DIS        
 Min.   :0.3850   Min.   :3.561   Min.   :  2.90   Min.   : 1.130  
 1st Qu.:0.4490   1st Qu.:5.886   1st Qu.: 45.02   1st Qu.: 2.100  
 Median :0.5380   Median :6.208   Median : 77.50   Median : 3.208  
 Mean   :0.5547   Mean   :6.285   Mean   : 68.57   Mean   : 3.795  
 3rd Qu.:0.6240   3rd Qu.:6.623   3rd Qu.: 94.08   3rd Qu.: 5.189  
 Max.   :0.8710   Max.   :8.780   Max.   :100.00   Max.   :12.126  
      RAD              TAX            PTRATIO             B        
 Min.   : 1.000   Min.   :187.0   Min.   :12.60   Min.   :  0.32  
 1st Qu.: 4.000   1st Qu.:279.0   1st Qu.:17.40   1st Qu.:375.38  
 Median : 5.000   Median :330.0   Median :19.05   Median :391.44  
 Mean   : 9.549   Mean   :408.2   Mean   :18.46   Mean   :356.67  
 3rd Qu.:24.000   3rd Qu.:666.0   3rd Qu.:20.20   3rd Qu.:396.22  
 Max.   :24.000   Max.   :711.0   Max.   :22.00   Max.   :396.90  
     LSTAT            MEDV      
 Min.   : 1.73   Min.   : 5.00  
 1st Qu.: 6.95   1st Qu.:17.02  
 Median :11.36   Median :21.20  
 Mean   :12.65   Mean   :22.53  
 3rd Qu.:16.95   3rd Qu.:25.00  
 Max.   :37.97   Max.   :50.00  
```

Al tener muchas variables, no podemos obtener mucha información sobre las variables a partir de estos datos, por lo que representamos el histograma de cada variable, que de forma gráfica, nos aportará más información que el resumen de cada variable(Figura 1).

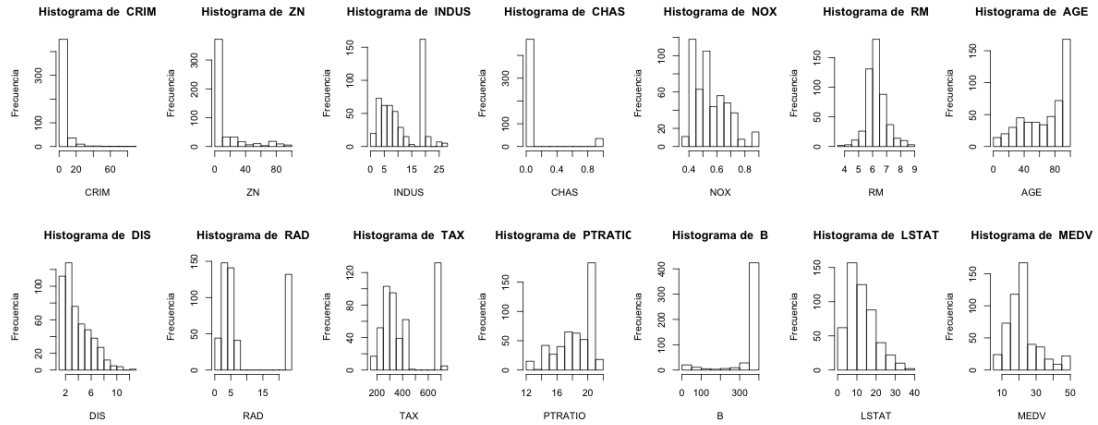


Figura 1: Histograma de cada una de las variables del conjunto de datos

Observamos que existen variables que tienen mucha asimetría como las variables CRIM, ZN, CHAS y B. Para estar convencidos totalmente, calculamos la asimetría de cada variable con R. Los datos se muestran a continuación:

Variable	Asimetría
CRIM	5.192
ZN	2.212
INDUS	0.293
CHAS	3.385
NOX	0.724
RM	0.401
AGE	-0.595
DIS	1.005
RAD	0.998
TAX	0.665
PTRATIO	-0.797
B	-2.873
LSTAT	0.901
MEDV	1.101

Como sospechábamos, las variables CRIM, ZN, CHAS y B tienen una fuerte asimetría, por lo que transformamos cada variable aplicando logaritmos. A estas nuevas variables las llamamos LOGCRIM, LOGZN, LOGCHAS y LOGB.

Así el modelo de regresión lineal queda de la siguiente manera:

$$E[MEDV_i|x,\theta] = \beta_0 + \beta_1 LOGCRIM_i + \beta_2 LOGZN_i + \beta_3 INDUS_i + \beta_4 LOGCHAS_i + \beta_5 NOX_i + \beta_6 RM_i + \beta_7 AGE_i + \beta_8 DIS_i + \beta_9 RAD_i + \beta_{10} TAX_i + \beta_{11} PTRATIO_i + \beta_{12} LOGB_i + \beta_{13} LSTAT_i$$

Al resolver este modelo con R, obtendremos un error puesto que las variables ZN y CHAS tienen elementos que son cero, por lo que $log(0) = -\infty$. No podemos aplicar esta tranformación a estas variables. El nuevo modelo queda:

$$E[MEDV_i|x,\theta] = \beta_0 + \beta_1 LOGCRIM_i + \beta_2 ZN_i + \beta_3 INDUS_i + \beta_4 CHAS_i + \beta_5 NOX_i + \beta_6 RM_i + \beta_7 AGE_i + \beta_8 DIS_i + \beta_9 RAD_i + \beta_{10} TAX_i + \beta_{11} PTRATIO_i + \beta_{12} LOGB_i + \beta_{13} LSTAT_i$$

Si resolvemos con R este modelo se obtiene la siguiente información:

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.9955  -2.6666  -0.5467   1.6758  26.7270

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  36.736482   5.222405   7.034 6.74e-12 ***
LOGCRIM       0.402651   0.278326   1.447 0.148621
ZN            0.047008   0.014145   3.323 0.000956 ***
INDUS         0.019971   0.062244   0.321 0.748459
CHAS          2.835766   0.868064   3.267 0.001164 **
NOX         -18.495224   3.979490  -4.648 4.32e-06 ***
RM            3.849395   0.421452   9.134  < 2e-16 ***
AGE          -0.001863   0.013429  -0.139 0.889728
DIS          -1.390883   0.199905  -6.958 1.11e-11 ***
RAD           0.189284   0.076145   2.486 0.013256 *
TAX          -0.012084   0.003794  -3.185 0.001540 **
PTRATIO      -0.923299   0.132703  -6.958 1.11e-11 ***
B             0.010909   0.002719   4.013 6.94e-05 ***
LSTAT        -0.560681   0.051076 -10.977  < 2e-16 ***
---
```

```
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.787 on 492 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7361,Adjusted R-squared: 0.7291
F-statistic: 105.5 on 13 and 492 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Vemos que las variables más influyentes son RM (número medio de habitaciones por vivienda), LSTAT (porcentaje de clase baja), PTRATIO (ratio alumno-profesor) y DIS (distancia a cinco centros de salud). El coeficiente de determinación de este modelo es 0.7291, que es bastante alto, pero queremos un modelo que tenga un mejor ajuste.

Para obtener un nuevo modelo, aplicamos lo visto en el ejemplo resuelto. Aplicamos una transformación logarítima a la variable dependeniente, MEDV. Esta nueva variable la llamaremos LOGMEDV.

El nuevo modelo es

$$\begin{aligned} E[LOGMEDV_i|x,\theta] = \beta_0 + \beta_1 CRIM_i + \beta_2 ZN_i + \beta_3 INDUS_i + \beta_4 CHAS_i \\ + \beta_5 NOX_i + \beta_6 RM_i + \beta_7 AGE_i + \beta_8 DIS_i + \beta_9 RAD_i + \beta_{10} TAX_i \\ + \beta_{11} PTRATIO_i + \beta_{12} B_i + \beta_{13} LSTAT_i \end{aligned}$$

Resolvemos el modelo con R, y el resumen es el siguiente:

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  4.1020911  0.2042738  20.081  < 2e-16 ***
CRIM        -0.0102716  0.0013155  -7.808 3.52e-14 ***
ZN           0.0011724  0.0005495   2.134 0.033358 *
INDUS        0.0024666  0.0024614   1.002 0.316794
CHAS         0.1008924  0.0344857   2.926 0.003596 **
NOX         -0.7784407  0.1528904  -5.091 5.07e-07 ***
RM           0.0908326  0.0167279   5.430 8.87e-08 ***
AGE          0.0002106  0.0005287   0.398 0.690614
DIS         -0.0490883  0.0079834  -6.149 1.62e-09 ***
RAD          0.0142670  0.0026556   5.372 1.20e-07 ***
TAX         -0.0006257  0.0001505  -4.157 3.80e-05 ***
PTRATIO     -0.0382727  0.0052365  -7.309 1.10e-12 ***
B            0.0004136  0.0001075   3.847 0.000135 ***
LSTAT       -0.0290353  0.0020299 -14.304  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.1899 on 492 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared: 0.7896,Adjusted R-squared: 0.7841
F-statistic: 142.1 on 13 and 492 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Este nuevo modelo mejora al anterior: el anterior tenía $R^2 = 0.7291$ y, este nuevo, $R^2 = 0.7841$. Las variables más influyentes de este modelo son LSTAT, PTRATIO, DIS y CRIM (crimen per cápita). Este modelo considera más importante el crimen para calcular el valor de las casas, mientras que el modelo anterior consideraba el número de habitaciones.

Para cada de las variables anteriores, representamos el diagrama de dispersión con respecto al valor de las casas (MEDV)(Figura 2).

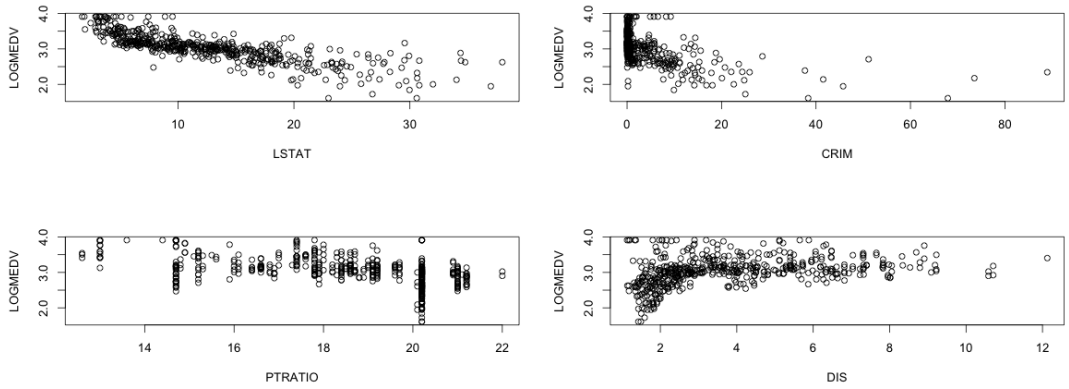


Figura 2: Variables más relevantes del modelo lineal

Vemos que cuanto más bajo es el porcentaje de clase baja, el valor de las casas es mayor. En el caso del crimen, el valor de las casas es mayor cuanto menos crimen hay. En el caso del ratio alumno-profesor, cuanto mayor es el valor de las casas, menor es el ratio alumno-profesor. Por último, cuanto mayor es el valor de las casas, mayor es la distancia a centros de empleo.

Calculamos la distribución conjunta a posteriori de β y σ. La Figura 3 muestra los histogramas de los coeficientes β_i y la desviación estándar a posteriori.
Calculamos los percentiles 5, 50 y 95 de cada parámetro del modelo lineal (β y σ) . Para cada β_i son los siguientes:

```
    X(Intercept)        XCRIM          XZN       XINDUS      XCHAS
5%      3.774508 -0.012409392 0.0002397377 -0.001546935 0.04536597
50%     4.101824 -0.010275002 0.0011665871  0.002396406 0.10146128
95%     4.436175 -0.008135323 0.0020905808  0.006668220 0.15781939

            XNOX        XRM           XAGE        XDIS        XRAD
5%    -1.0349746 0.06376497 -0.0006742242 -0.06235639 0.009770426
```

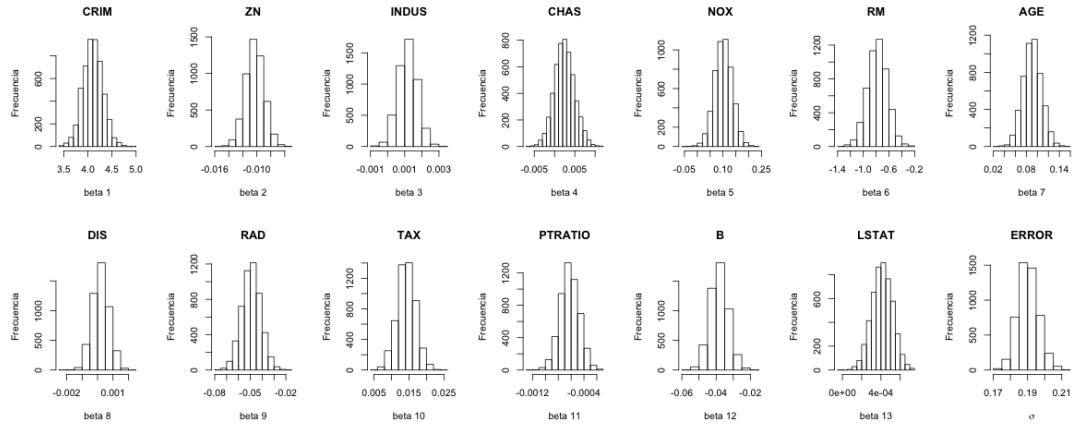


Figura 3: Histograma de los coeficientes β_i y la desviación estándar a posteriori

```
50%   -0.7789356 0.09074896  0.0001967401 -0.04922668 0.014234135
95%   -0.5268495 0.11861673  0.0010928985 -0.03593865 0.018509219

              XTAX    XPTRATIO           XB      XLSTAT
5%   -0.0008676581 -0.04668706 0.0002355121 -0.03236402
50%  -0.0006270491 -0.03829977 0.0004124994 -0.02902430
95%  -0.0003784013 -0.02951471 0.0005861068 -0.02565000
```

Y para σ, los valores son los siguientes:

```
       5%       50%       95%
0.1809709 0.1901171 0.2006010
```

3. Conclusiones

4. Código R