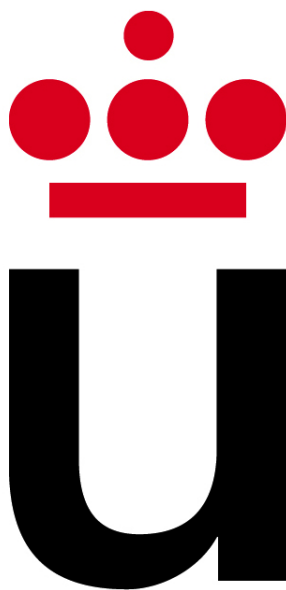


SUPERFICIES REGLADAS

José Ignacio Escribano (GIS + MAT)



MÓSTOLES, 16 DE ABRIL DE 2015

Índice

1. Introducción	3
1.1. Superficies regladas	5
2. Algunas superficies regladas	6
2.1. Superficies cilíndricas y cónicas	6
2.2. Conoide de Wallis	6
2.3. Conoide de Plücker	9
2.4. Conoide de Plücker generalizado	9
2.5. Paraguas de Whitney	11
2.6. Banda de Möbius	11
2.7. Helicoide	12
2.8. Hiperboloide	13
2.9. Cola de milano	14
3. Aplicaciones a la arquitectura	15

Índice de figuras

1.	Esfera de radio 1	3
2.	Plano	4
3.	Plano	4
4.	Rosa de cuatro pétalos	6
5.	Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos	7
6.	Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos	7
7.	Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$	8
8.	Conoide de Plücker	9
9.	Conoide de Plücker generalizado	10
10.	Paraguas de Whitney	11
11.	Banda de Möbius	12
12.	Helicoide	12
13.	Hiperboloide con $a = b = c = 1$	13
14.	Cola de milano	14
15.	The Swallow's Tail	14
16.	Superficies cónicas y cilíndricas en la arquitectura	15
17.	Superficies hiperbólicas en la arquitectura	16
18.	Paraboloides hiperbólicos en la arquitectura	17
19.	Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG	17

1. Introducción

Antes de comenzar a definir los conceptos básicos de superficies regladas, recordaremos la definición de superficie.

Definición 1. *Una superficie es una aplicación*

$$r : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Aunque existen definiciones más elaboradas de superficies para nuestros propósitos es suficiente.

Veamos algunos ejemplos de superficies:

Ejemplo (Esfera). *Uno de los ejemplos típicos de superficie es la esfera de radio r (centrada en $(0, 0, 0)$) que viene dada por la aplicación siguiente:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = r \cos u \cos v \\ y(u, v) = r \sin u \cos v \\ z(u, v) = r \sin v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 1.

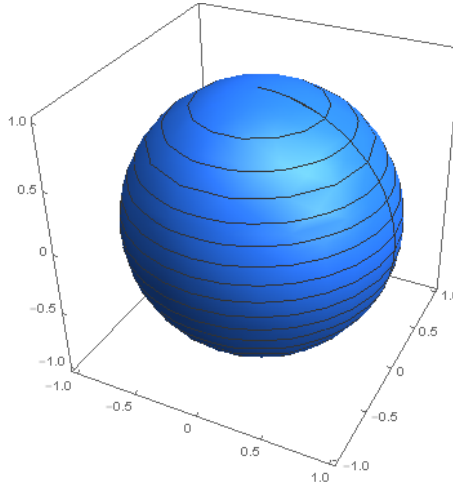


Figura 1: Esfera de radio 1

Ejemplo (Plano). *Otro ejemplo típico de superficie es el plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vectores directores a (w_1, w_2, w_3) y (p_1, p_2, p_3) , que puede parametrizarse con la aplicación siguiente:*

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = x_0 + w_1 u + p_1 v \\ y(u, v) = y_0 + w_2 u + p_2 v \\ z(u, v) = z_0 + w_3 u + p_3 v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 2.

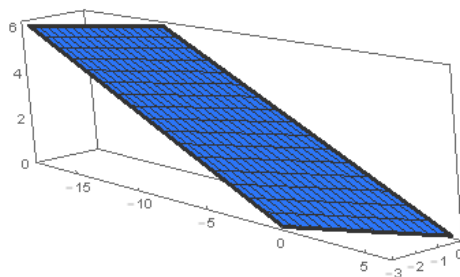


Figura 2: Plano

Ejemplo (Cilindro). Por último consideraremos, el cilindro de radio r , que viene parametrizado por la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = r \cos u \\ y(u, v) = r \sin u \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 3.

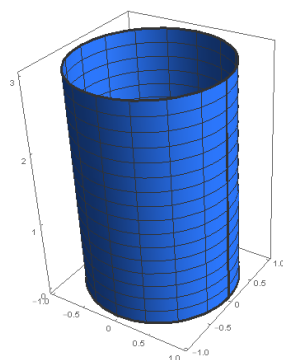


Figura 3: Plano

1.1. Superficies regladas

La idea de una superficie reglada es que puede ser generada por una recta en el espacio.

Definición 2. Una superficie reglada es aquella generada por una recta en el espacio llamada generatriz, a lo largo de una curva llamada directriz.

La parametrización de una superficie reglada es

$$r(u, v) = \rho(u) + va(u) \quad (2)$$

donde $\rho, a : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos curvas en el espacio.

Algunos tipos de superficies regladas son las superficies cilíndricas, superficies cónicas, las superficies de Catalan o los conoides.

Definición 3. Una superficie reglada es cilíndrica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + va_0 \quad (3)$$

con $a_0 \in \mathbb{R}^3$.

Definición 4. Una superficie reglada es cónica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho_0 + va(u) \quad (4)$$

con $\rho_0 \in \mathbb{R}^3$.

ρ_0 es el vértice del cono.

Definición 5. Una superficie reglada es tangente desarrollable si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + v\rho'(u) \quad (5)$$

Definición 6. Una superficie reglada que cumple que $a'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$ se denomina no cilíndrica.

Definición 7. Una superficie no cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a un plano directriz fijo se llama superficie de Catalan.

Teorema 1 (Caracterización de las superficies de Catalan). Una superficie reglada $r(u, v) = \rho(u) + va(u)$ es una superficie de Catalan si y sólo si

$$[a(u), a'(u), a''(u)] = 0, a''(u) \neq 0 \quad \forall u \in I \quad (6)$$

Definición 8. Una superficie de Catalan se dice conoide si todas las generatrices intersecan una recta constante (el eje del conoide).

2. Algunas superficies regladas

2.1. Superficies cilíndricas y cónicas

Ejemplo (Superficie cilíndrica y cónica). *Supongamos que queremos generar un cilindro y un cono a partir de una curva (ver Figura 4) dada por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} a : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \cos t \\ y(t) = \cos(2t) \sin t \end{cases}$$

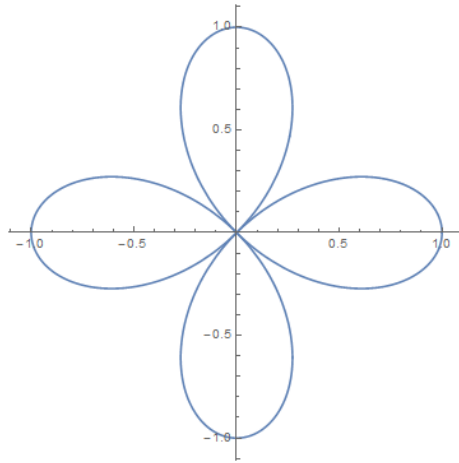


Figura 4: Rosa de cuatro pétalos

Comencemos con generando la superficie cilíndrica. Para ello, debemos fijar un punto a_0 . En nuestro caso será el punto $(0, 0, 1)$. Con esto, una superficie cónica queda de la siguiente manera:

$$r(u, v) = (\cos(2u) \cos u, \cos(2u) \sin u, v)$$

La Figura 5 muestra la superficie cilíndrica obtenida a partir de la curva.

Para obtener la superficie cónica, fijamos $\rho_0 = (0, 0, 1)$. De esta manera obtenemos la superficie con parametrización siguiente

$$r(u, v) = (v \cos(2u) \cos u, v \cos(2u) \sin u, v)$$

La Figura 6 muestra superficie cónica obtenida a partir de la curva.

2.2. Conoide de Wallis

Definición 9. *El conoide de Wallis viene dado por la siguiente parametrización:*

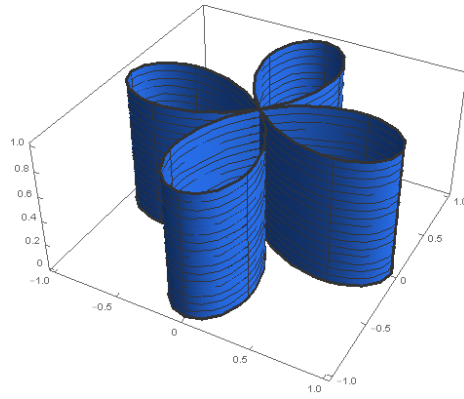


Figura 5: Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos

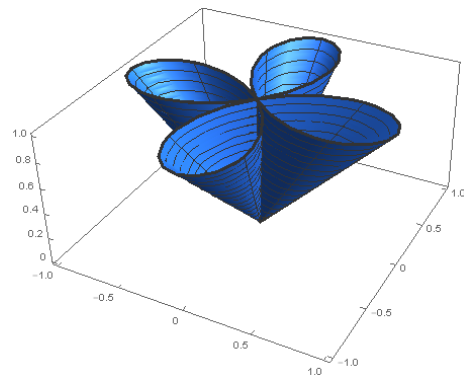


Figura 6: Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u} \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La Figura 7 muestra el conoide de Wallis con $a = b = c = 1$.

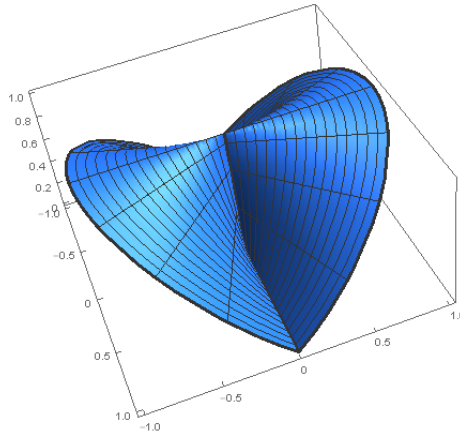


Figura 7: Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$

Ejemplo. *Comprobemos que el conoide de Wallis es una superficie de Catalan. Para ello escribimos $r(u, v)$ de la siguiente forma para poder aplicar el teorema de caracterización de las superficies de Catalan:*

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u}) = (0, 0, c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u}) + v(\cos u, \sin u, 0) = \rho(u) + va(u)$$

Calculamos la primera y la segunda derivada de a :

$$\begin{aligned} a'(u) &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ a''(u) &= (-\cos u, -\sin u, 0) \end{aligned}$$

Calculamos el producto mixto de $a(u)$, $a'(u)$ y $a''(u)$,

$$\begin{vmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Además se cumple que $a''(u) \neq 0$ para todo $u \in [0, 2\pi]$ puesto que seno y coseno no se anulan simultáneamente.

Por tanto, el conoide de Wallis es una superficie de Catalan.

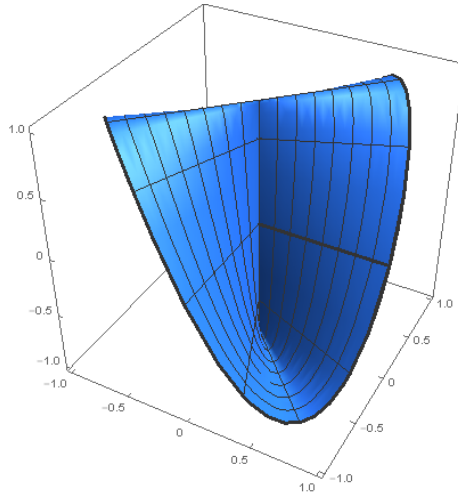


Figura 8: Conoide de Plücker

2.3. Conoide de Plücker

Definición 10. *El conoide de Plücker es una superficie reglada dada por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin 2u \end{cases}$$

La Figura 8 muestra el conoide de Plücker

2.4. Conoide de Plücker generalizado

Existe una generalización del conoide de Plücker que describimos a continuación:

Definición 11. *El conoide de Plücker generalizado viene dado por la siguiente parametrización:*

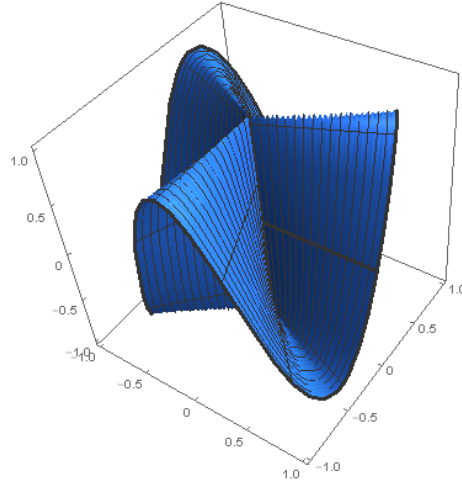
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

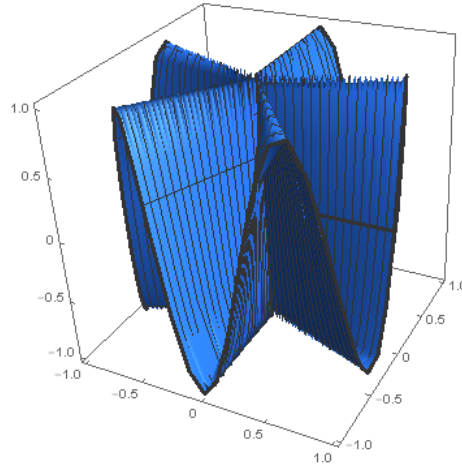
$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin nu \end{cases}$$

En efecto se trata de una generalización del conoide de Plücker visto anteriormente, poniendo $n = 2$.

La Figura 9 muestra dos conoides de Plücker generalizados, con $n = 2$ y $n = 5$, respectivamente.



(a) Conoide de Plücker generalizado con $n = 3$



(b) Conoide de Plücker generalizado con $n = 5$

Figura 9: Conoide de Plücker generalizado

Ejemplo. *Comprobemos que el conoide de Plücker es una superficie de Catalan. Escribimos $r(u, v)$ de la siguiente forma:*

$$r(u, v) = (0, 0, \sin nu) + v(\cos u, \sin u, 0) = \rho(u) + v\alpha(u)$$

Calculando las derivadas y el producto mixto se obtiene que es nulo para todo $u \in [0, 2\pi]$ y que $\alpha''(u) \neq 0$ para todo $u \in [0, 2\pi]$.

2.5. Paraguas de Whitney

Definición 12. *El paraguas de Whitney es una superficie regular que tiene la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = uv \\ y(u, v) = u \\ z(u, v) = v^2 \end{cases}$$

La Figura 10 muestra el paraguas de Whitney.

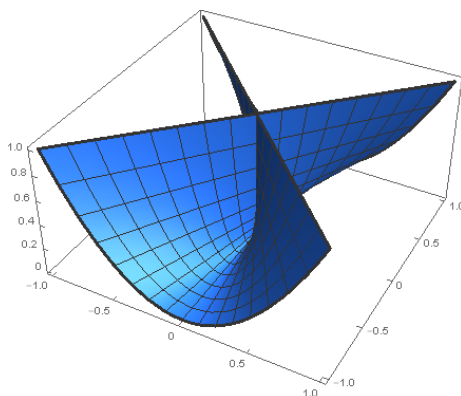


Figura 10: Paraguas de Whitney

2.6. Banda de Möbius

Definición 13. *La banda de Möbius viene dada por la parametrización siguiente:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases}$$

La Figura 11 muestra la banda de Möbius.

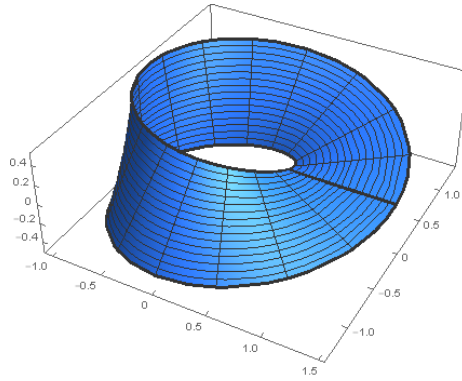


Figura 11: Banda de Möbius

2.7. Helicoide

Definición 14. *El helicoide viene por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

La Figura 12 muestra una representación del helicoide.

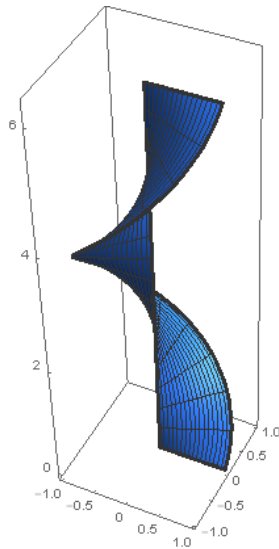


Figura 12: Helicoide

2.8. Hiperboloide

Definición 15. *El hiperboloide es una superficie doblemente reglada que se puede parametrizar de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cosh u \cos v \\ y(u, v) = b \cosh u \sin v \\ z(u, v) = c \sinh u \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La Figura 13 muestra la representación de un hiperboloide con $a = b = c = 1$.

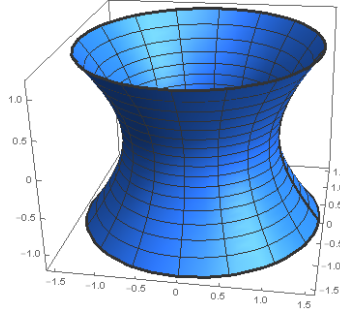


Figura 13: Hiperboloide con $a = b = c = 1$

La parametrización anterior no se puede poner de la forma $r(u, v) = \rho(u) + va(u)$, por lo que no sería una superficie reglada. Sin embargo, existen parametrizaciones del hiperboloide de la forma anterior:

Definición 16. *El hiperboloide puede parametrizarse de las siguientes maneras:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cos u \mp av \cos u \\ y(u, v) = b \cos u \pm bv \sin u \\ z(u, v) = \pm cv \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Como existen dos parametrizaciones distintas de la forma $\rho(u) + va(u)$, el hiperboloide se trata de una superficie doblemente reglada.

Hacer paraboloides hiperbólicos

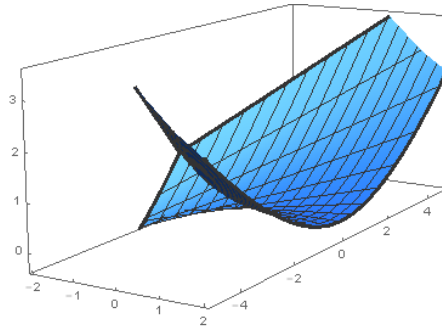


Figura 14: Cola de milano

2.9. Cola de milano

Definición 17. La cola de milano (o Swallowtail) es una superficie reglada con la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} r : [-1, 1] \times [-2, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \\ y(u, v) = -4u^3 - 2uv \\ z(u, v) = 3u^4 + u^2v \end{cases}$$

La Figura 14 muestra la cola de milano.

Esta superficie inspiró a Salvador Dalí para su último cuadro, The Swallow's Tail, pintado en 1983.

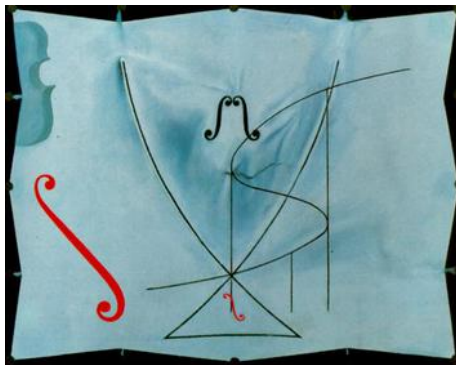


Figura 15: The Swallow's Tail, Salvador Dalí http://en.wikipedia.org/wiki/File:The_Swallowtail.jpg

3. Aplicaciones a la arquitectura

Entre las muchas aplicaciones en las que se aplican las superficies regladas, una de las más importantes es la arquitectura donde se han aplicado en numerosas ocasiones. Veamos algunos ejemplos.

Se han aplicado superficies cónicas y cilíndricas en numerosas ocasiones como en la Escuela de la Sagrada Familia o en otros edificios como iglesias (Figura 16)



(a) Techo de la Escuela de la Sagrada Familia. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escuelas_Sagrada_Familia.jpg (b) Iglesia en Selo, Eslovenia <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nagytotlak.JPG>

Figura 16: Superficies cónicas y cilíndricas en la arquitectura

También se han empleado en numerosas estructuras hiperbólicas en torres de refrigeración de centrales nucleares o distintas torres (Figura 17).

Los paraboloides hiperbólicos se han utilizado en numerosos edificios, como estadios o estaciones de ferrocarriles (Figura 18).

Por últimos, los helicoides se han utilizado para escaleras (Figura 19).



(a) Torre de refrigeración en Didcot, Reino Unido http://en.wikipedia.org/wiki/File:Didcot_power_station_cooling_tower_zootalures.jpg



(b) Torre de agua en Ciechanów, Polonia http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ciechanow_water_tower.jpg



(c) Torre del puerto en Kobe, Japón http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kobe_port_tower11s3200.jpg

Figura 17: Superficies hiperbólicas en la arquitectura



(a) Techo de la estación de ferrocarriles de Ochota en Varsovia, Polonia http://en.wikipedia.org/wiki/File:W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg



(b) Scotiabank Saddledome en Calgary, Canadá http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pengrowth_Saddledome.jpg

Figura 18: Paraboloides hiperbólicos en la arquitectura



Figura 19: Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG