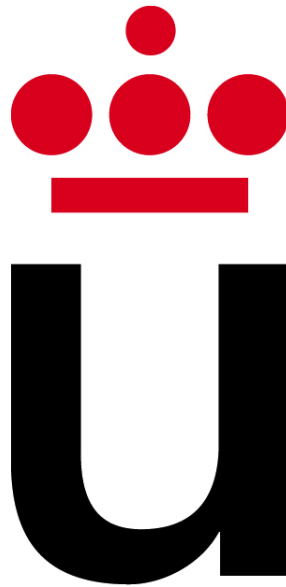


SUPERFICIES REGLADAS

José Ignacio Escribano (GIS + MAT)



MÓSTOLES, 16 DE ABRIL DE 2015

Índice

1. Introducción	1
1.1. Superficies regladas	3
2. Algunas superficies regladas	4
2.1. Superficies cilíndricas y cónicas	4
2.2. Conoide de Wallis	4
2.3. Conoide de Plücker	7
2.4. Conoide de Plücker generalizado	7
2.5. Paraguas de Whitney	9
2.6. Banda de Möbius	9
2.7. Helicoide	10
2.8. Hiperboloide	11
2.9. Paraboloide hiperbólico	12
2.10. Cola de milano	12
3. Aplicaciones a la arquitectura	13

Índice de figuras

1.	Esfera de radio 1	1
2.	Plano	2
3.	Plano	2
4.	Rosa de cuatro pétalos	4
5.	Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos	5
6.	Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos	5
7.	Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$	6
8.	Conoide de Plücker	7
9.	Conoide de Plücker generalizado	8
10.	Paraguas de Whitney	9
11.	Banda de Möbius	10
12.	Helicoide	10
13.	Hiperboloide con $a = b = c = 1$	11
14.	Paraboloide hiperbólico con $a = b = 1$	12
15.	Cola de milano	13
16.	The Swallow's Tail	13
17.	Superficies cónicas y cilíndricas en la arquitectura	14
18.	Superficies hiperbólicas en la arquitectura	15
19.	Paraboloides hiperbólicos en la arquitectura	16
20.	Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona	16

1. Introducción

Antes de comenzar a definir los conceptos básicos de superficies regladas, recordaremos la definición de superficie.

Definición 1. *Una superficie es una aplicación*

$$r : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Aunque existen definiciones más elaboradas de superficies para nuestros propósitos es suficiente.

Veamos algunos ejemplos de superficies:

Ejemplo (Esfera). *Uno de los ejemplos típicos de superficie es la esfera de radio r (centrada en $(0, 0, 0)$) que viene dada por la aplicación siguiente:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = r \cos u \cos v \\ y(u, v) = r \sin u \cos v \\ z(u, v) = r \sin v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 1.

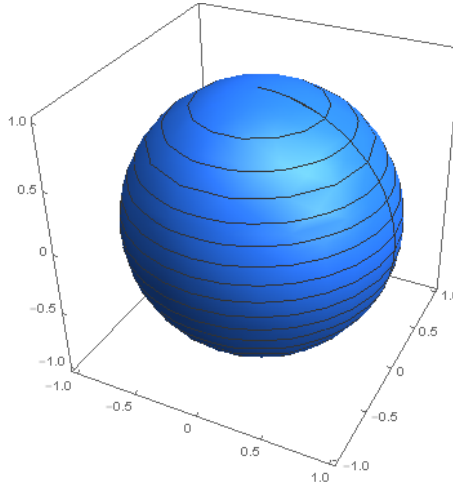


Figura 1: Esfera de radio 1

Ejemplo (Plano). *Otro ejemplo típico de superficie es el plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vectores directores a (w_1, w_2, w_3) y (p_1, p_2, p_3) , que puede parametrizarse con la aplicación siguiente:*

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = x_0 + w_1 u + p_1 v \\ y(u, v) = y_0 + w_2 u + p_2 v \\ z(u, v) = z_0 + w_3 u + p_3 v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 2.

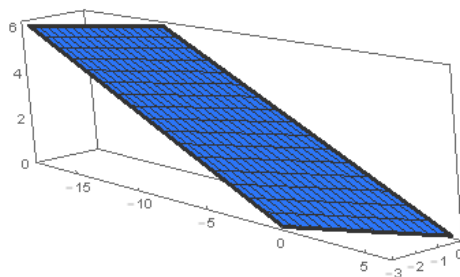


Figura 2: Plano

Ejemplo (Cilindro). Por último consideraremos, el cilindro de radio r , que viene parametrizado por la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = r \cos u \\ y(u, v) = r \sin u \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

La representación en Mathematica se puede ver en la Figura 3.

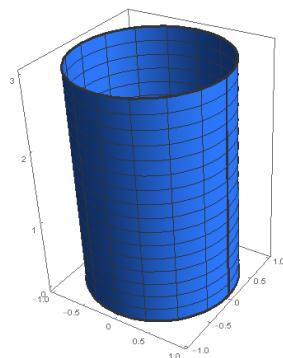


Figura 3: Plano

1.1. Superficies regladas

La idea de una superficie reglada es que puede ser generada por una recta en el espacio.

Definición 2. Una superficie reglada es aquella generada por una recta en el espacio llamada generatriz, a lo largo de una curva llamada directriz.

La parametrización de una superficie reglada es

$$r(u, v) = \rho(u) + v a(u) \quad (2)$$

donde $\rho, a : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos curvas en el espacio.

Algunos tipos de superficies regladas son las superficies cilíndricas, superficies cónicas, las superficies de Catalan o los conoides.

Definición 3. Una superficie reglada es cilíndrica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + v a_0 \quad (3)$$

con $a_0 \in \mathbb{R}^3$.

Definición 4. Una superficie reglada es cónica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho_0 + v a(u) \quad (4)$$

con $\rho_0 \in \mathbb{R}^3$.

ρ_0 es el vértice del cono.

Definición 5. Una superficie reglada es tangente desarrollable si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + v \rho'(u) \quad (5)$$

Definición 6. Una superficie reglada que cumple que $a'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$ se denomina no cilíndrica.

Definición 7. Una superficie no cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a un plano directriz fijo se llama superficie de Catalan.

Teorema 1 (Caracterización de las superficies de Catalan). Una superficie reglada $r(u, v) = \rho(u) + v a(u)$ es una superficie de Catalan si y sólo si

$$[a(u), a'(u), a''(u)] = 0, a''(u) \neq 0 \quad \forall u \in I \quad (6)$$

Definición 8. Una superficie de Catalan se dice conoide si todas las generatrices intersecan una recta constante (el eje del conoide).

Definición 9. Una superficie reglada se dice que es doblemente reglada si existen dos rectas que generan la superficie.

2. Algunas superficies regladas

2.1. Superficies cilíndricas y cónicas

Ejemplo (Superficie cilíndrica y cónica). *Supongamos que queremos generar un cilindro y un cono a partir de una curva (ver Figura 4) dada por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} a : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \cos t \\ y(t) = \cos(2t) \sin t \end{cases}$$

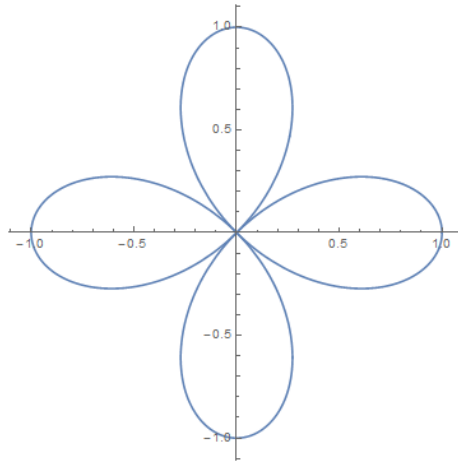


Figura 4: Rosa de cuatro pétalos

Comencemos con generando la superficie cilíndrica. Para ello, debemos fijar un punto a_0 . En nuestro caso será el punto $(0, 0, 1)$. Con esto, una superficie cónica queda de la siguiente manera:

$$r(u, v) = (\cos(2u) \cos u, \cos(2u) \sin u, v)$$

La Figura 5 muestra la superficie cilíndrica obtenida a partir de la curva. Para obtener la superficie cónica, fijamos $\rho_0 = (0, 0, 1)$. De esta manera obtenemos la superficie con parametrización siguiente

$$r(u, v) = (v \cos(2u) \cos u, v \cos(2u) \sin u, v)$$

La Figura 6 muestra superficie cónica obtenida a partir de la curva.

2.2. Conoide de Wallis

Definición 10. *El conoide de Wallis viene dado por la siguiente parametrización:*

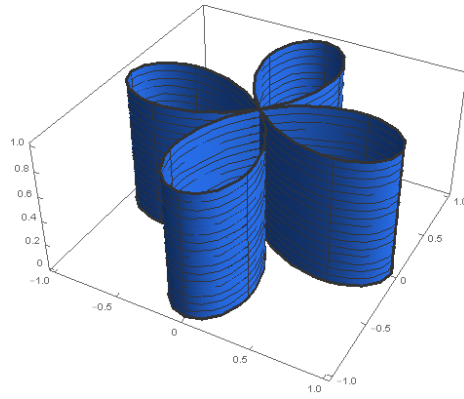


Figura 5: Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos

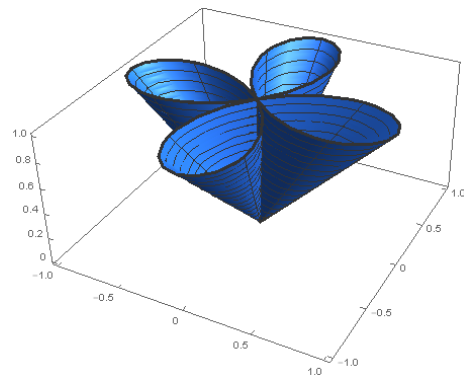


Figura 6: Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos

$$r : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u} \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La Figura 7 muestra el conoide de Wallis con $a = b = c = 1$.

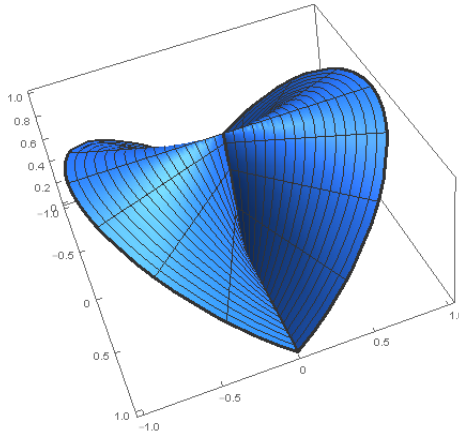


Figura 7: Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$

Ejemplo. *Comprobemos que el conoide de Wallis es una superficie de Catalan. Para ello escribimos $r(u, v)$ de la siguiente forma para poder aplicar el teorema de caracterización de las superficies de Catalan:*

$$r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u}) = (0, 0, c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u}) + v(\cos u, \sin u, 0) = \rho(u) + va(u)$$

Calculamos la primera y la segunda derivada de a :

$$a'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$a''(u) = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

Calculamos el producto mixto de $a(u)$, $a'(u)$ y $a''(u)$,

$$\begin{vmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Además se cumple que $a''(u) \neq 0$ para todo $u \in [0, 2\pi]$ puesto que seno y coseno no se anulan simultáneamente.

Por tanto, el conoide de Wallis es una superficie de Catalan.

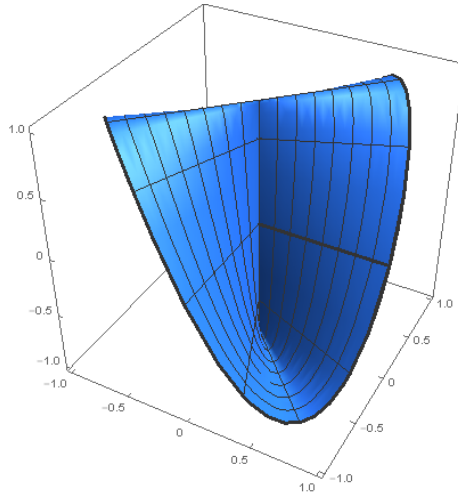


Figura 8: Conoide de Plücker

2.3. Conoide de Plücker

Definición 11. *El conoide de Plücker es una superficie reglada dada por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin 2u \end{cases}$$

La Figura 8 muestra el conoide de Plücker

2.4. Conoide de Plücker generalizado

Existe una generalización del conoide de Plücker que describimos a continuación:

Definición 12. *El conoide de Plücker generalizado viene dado por la siguiente parametrización:*

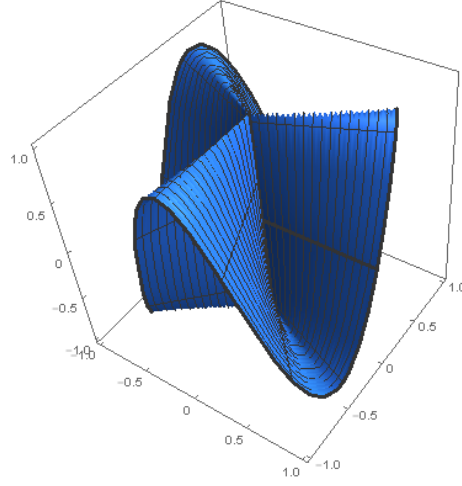
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

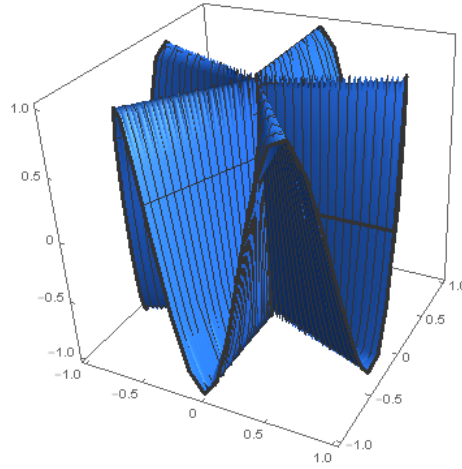
$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin nu \end{cases}$$

En efecto se trata de una generalización del conoide de Plücker visto anteriormente, poniendo $n = 2$.

La Figura 9 muestra dos conoides de Plücker generalizados, con $n = 2$ y $n = 5$, respectivamente.



(a) Conoide de Plücker generalizado con $n = 3$



(b) Conoide de Plücker generalizado con $n = 5$

Figura 9: Conoide de Plücker generalizado

Ejemplo. *Comprobemos que el conoide de Plücker es una superficie de Catalan. Escribimos $r(u, v)$ de la siguiente forma:*

$$r(u, v) = (0, 0, \sin nu) + v(\cos u, \sin u, 0) = \rho(u) + v\alpha(u)$$

Calculando las derivadas y el producto mixto se obtiene que es nulo para todo $u \in [0, 2\pi]$ y que $\alpha''(u) \neq 0$ para todo $u \in [0, 2\pi]$.

2.5. Paraguas de Whitney

Definición 13. *El paraguas de Whitney es una superficie regular que tiene la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = uv \\ y(u, v) = u \\ z(u, v) = v^2 \end{cases}$$

La Figura 10 muestra el paraguas de Whitney.

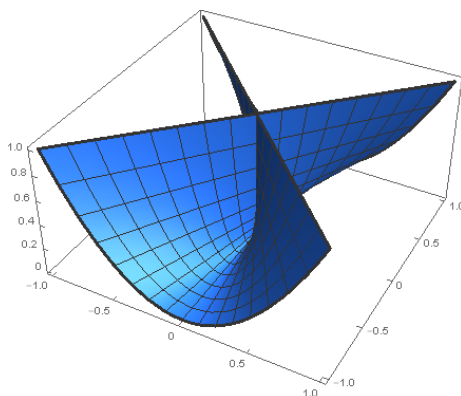


Figura 10: Paraguas de Whitney

2.6. Banda de Möbius

Definición 14. *La banda de Möbius viene dada por la parametrización siguiente:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases}$$

La Figura 11 muestra la banda de Möbius.

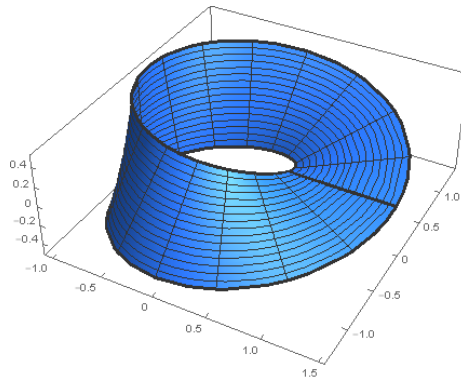


Figura 11: Banda de Möbius

2.7. Helicoide

Definición 15. *El helicoide viene por la siguiente parametrización:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

La Figura 12 muestra una representación del helicoide.

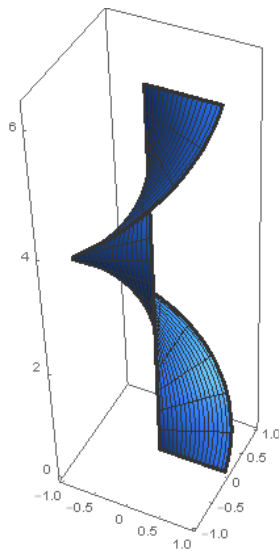


Figura 12: Helicoide

2.8. Hiperboloide

Definición 16. *El hiperboloide es una superficie doblemente reglada que se puede parametrizar de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cosh u \cos v \\ y(u, v) = b \cosh u \sin v \\ z(u, v) = c \sinh u \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La Figura 13 muestra la representación de un hiperboloide con $a = b = c = 1$.

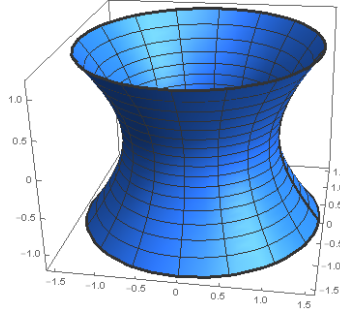


Figura 13: Hiperboloide con $a = b = c = 1$

La parametrización anterior no se puede poner de la forma $r(u, v) = \rho(u) + v a(u)$, por lo que no sería una superficie reglada. Sin embargo, existen parametrizaciones del hiperboloide de la forma anterior:

Definición 17. *El hiperboloide puede parametrizarse de las siguientes maneras:*

$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cos u \mp av \cos u \\ y(u, v) = b \cos u \pm bv \sin u \\ z(u, v) = \pm cv \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Como existen dos parametrizaciones distintas de la forma $\rho(u) + v a(u)$, el hiperboloide se trata de una superficie doblemente reglada.

2.9. Paraboloide hiperbólico

Definición 18. El paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada que está dada por las parametrizaciones siguientes:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a(u + v) \\ y(u, v) = \pm bv \\ z(u, v) = u^2 + 2uv \end{cases}$$

La Figura 14 muestra un paraboloide hiperbólico con $a = b = 1$.

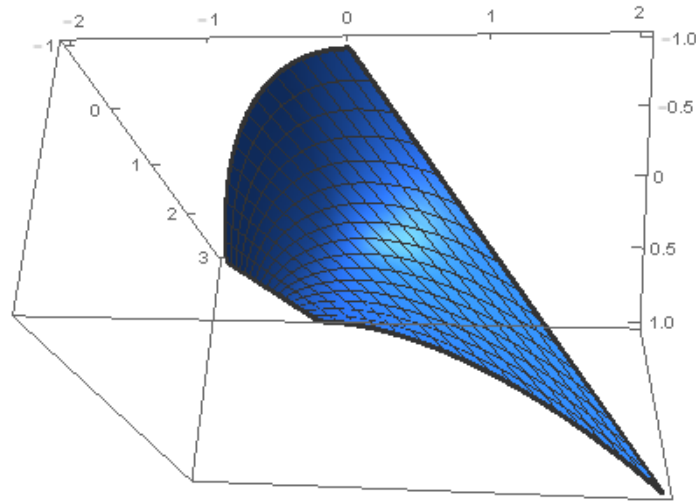


Figura 14: Paraboloide hiperbólico con $a = b = 1$

2.10. Cola de milano

Definición 19. La cola de milano (o Swallowtail) es una superficie reglada con la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} r : [-1, 1] \times [-2, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \\ y(u, v) = -4u^3 - 2uv \\ z(u, v) = 3u^4 + u^2v \end{cases}$$

La Figura 15 muestra la cola de milano.

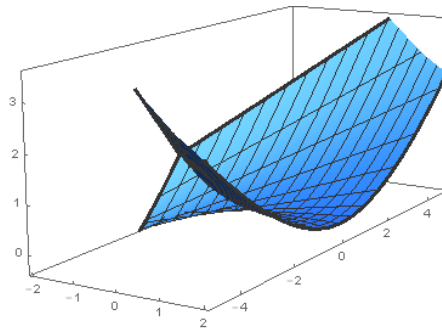


Figura 15: Cola de milano

Esta superficie inspiró a Salvador Dalí para su último cuadro, *The Swallow's Tail*, pintado en 1983.

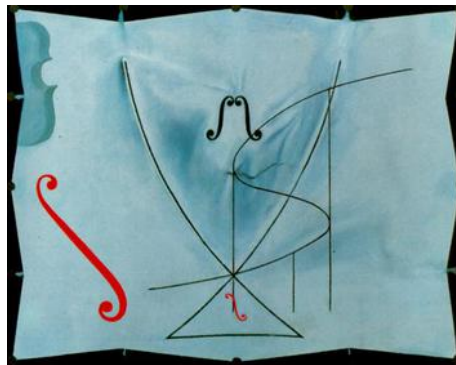


Figura 16: *The Swallow's Tail*, Salvador Dalí http://en.wikipedia.org/wiki/File:The_Swallowtail.jpg

3. Aplicaciones a la arquitectura

Entre las muchas aplicaciones en las que se aplican las superficies regladas, una de las más importantes es la arquitectura donde se han aplicado en numerosas ocasiones. Veamos algunos ejemplos.

Se han aplicado superficies cónicas y cilíndricas en numerosas ocasiones como en la Escuela de la Sagrada Familia o en otros edificios como iglesias (Figura 17) También se han empleado en numerosas estructuras hiperbólicas en torres de refrigeración de centrales nucleares o distintas torres (Figura 18).

Los paraboloides hiperbólicos se han utilizado en numerosos edificios, como estadios o estaciones de ferrocarriles (Figura 19).

Por últimos, los helicoides se han utilizado para escaleras (Figura 20).



(a) Techo de la Escuela de la Sagrada Familia. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escuelas_Sagrada_Familia.jpg (b) Iglesia en Selo, Eslovenia <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nagytotlak.JPG>

Figura 17: Superficies cónicas y cilíndricas en la arquitectura



(a) Torre de refrigeración en Didcot, Reino Unido http://en.wikipedia.org/wiki/File:Didcot_power_station_cooling_tower_zootalures.jpg



(b) Torre de agua en Ciechanów, Polonia http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ciechanow_water_tower.jpg



(c) Torre del puerto en Kobe, Japón http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kobe_port_tower11s3200.jpg

Figura 18: Superficies hiperbólicas en la arquitectura



(a) Techo de la estación de ferrocarriles de Ochota en Varsovia, Polonia http://en.wikipedia.org/wiki/File:W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg



(b) Scotiabank Saddledome en Calgary, Canadá http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pengrowth_Saddledome.jpg

Figura 19: Paraboloïdes hiperbólicos en la arquitectura



Figura 20: Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG

Referencias

- [1] M.K. Agoston. *Computer Graphics and Geometric Modelling: Implementation & Algorithms*. Computer Graphics and Geometric Modeling. Springer London, 2005.
- [2] V. Rovenski. *Modeling of Curves and Surfaces with MATLAB®*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer New York, 2010.
- [3] D. Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 2006.