Superficies regladas

José Ignacio Escribano

23 de abril de 2015

Índice

Introducción

Introducción

Definición

Una superficie es una aplicación

$$r : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

Ejemplo (de superficie)

Imagen de superficie

Introducción

Definición

Una superficie reglada es aquella generada por una recta en el espacio llamada generatriz, a lo largo de una curva llamada directriz.

Definición

Una superficie es reglada si es generada por una familia uniparamétrica de rectas (llamadas generatrices).
La parametrización de una superficie reglada es

$$r(u, v) = \rho(u) + va(u) \tag{2}$$

donde $\rho, a : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *son dos curvas en el espacio.*

Definición

Un conjunto de curvas de una superficie reglada que interseca a cada generatriz en un punto se llama curva generatriz.

Introducción

Definición

Una superficie reglada es cilíndrica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + va_0 \tag{3}$$

con $a_0 \in \mathbb{R}^3$.

Definición

Una superficie reglada es cónica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho_0 + va(u) \tag{4}$$

con $\rho_0 \in \mathbb{R}^3$.
ρ_0 *es el vértice del cono.*

Introducción

Definición

Una superficie reglada es tangente desarrollable si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + v\rho'(u) \tag{5}$$

Definición

Una superficie reglada que cumple que $a(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$ *se denomina no cilíndrica.*

Definición

Una superficie no cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a un plano directriz fijo se llama superficie de Catalan.

Introducción

Teorema (Caracterización de las superficies de Catalan)

Una superficie reglada $r(u,v) = \rho(u) + va(u)$ *es una superficie de Catalan si y sólo si*

$$[a(u), a'(a), a''(u)] = 0 \quad \forall u \in I \tag{6}$$

.

Definición

Una superfie de Catalan se dice conoide si todas las generatrices intersecan una recta constante (el eje del conoide).

Algunas superficies regladas

Superficie cilíndrica

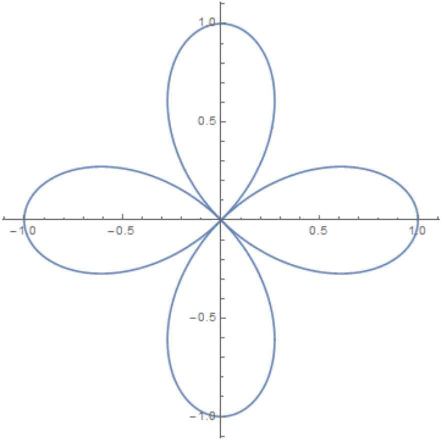

Figura 1: Rosa de cuatro pétalos

$$\begin{array}{rccc} a: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t)\cos t \\ y(t) = \cos(2t)\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$$

Superficie cilíndrica

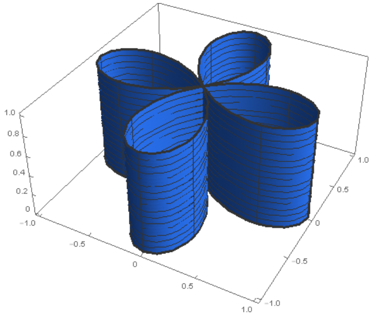

Figura 2: Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos

$$
\begin{array}{rccl}
r: & [0,2\pi]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\
 & (u,v) & \mapsto & (x,y,z)
\end{array}
$$

donde

$$
\begin{cases}
x(u,v) = \cos(2u)\cos u \\
y(u,v) = \cos(2u)\,\mathrm{sen}\,u \\
z(u,v) = v
\end{cases}
$$

Superficie cónica

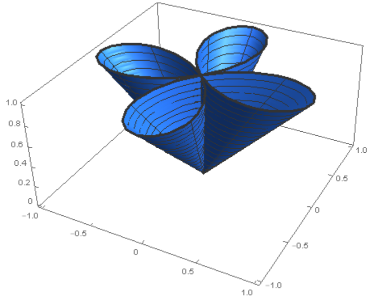

Figura 3: Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2\pi]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = v\cos(2u)\cos u \\ y(u,v) = v\cos(2u)\,\mathrm{sen}\, u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

Conoide de Wallis

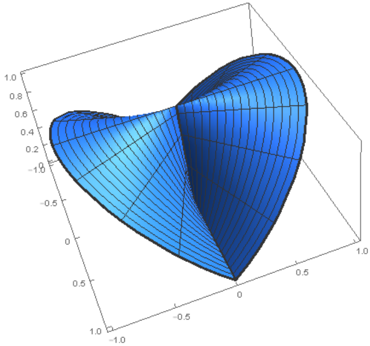

Figura 4: Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$

$$\begin{array}{cccc} r: & [0, 2\pi] \times [0, 1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \mapsto & (x, y, z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \operatorname{sen} u \\ z(u, v) = c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u} \end{cases}$$

Conoide de Wallis

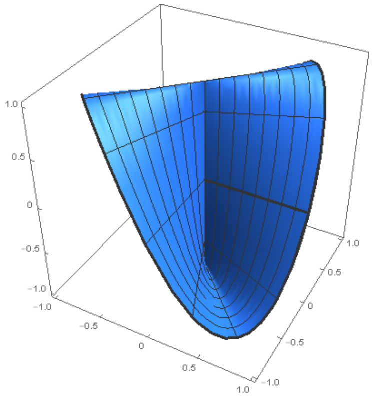

Figura 6: Conoide de Plücker

$$
\begin{array}{rccc}
r: & [0,2\pi]\times[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (u,v) & \mapsto & (x,y,z)
\end{array}
$$

donde

$$
\begin{cases}
x(u,v) = v\cos u \\
y(u,v) = v \operatorname{sen} u \\
z(u,v) = \operatorname{sen} 2u
\end{cases}
$$

Conoide de Plücker

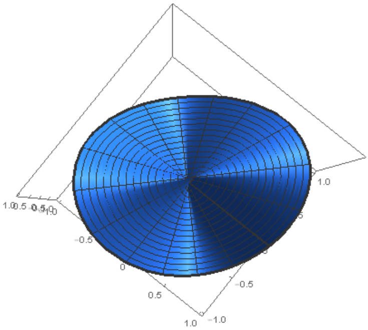

Figura 7: Otra vista del conoide de Plücker

Conoide de Plücker generalizado

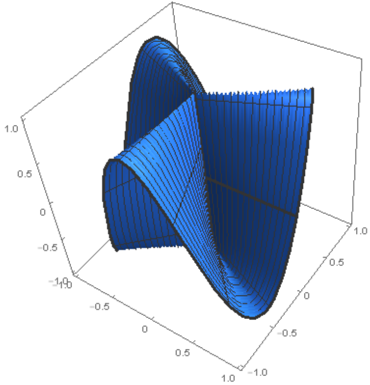

Figura 8: Conoide de Plücker generalizado con $n = 3$

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2\pi]\times[0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = v\cos u \\ y(u,v) = v \operatorname{sen} u \\ z(u,v) = \operatorname{sen} nu \end{cases}$$

Conoide de Plücker generalizado

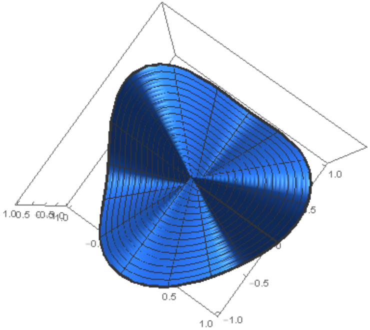

Figura 9: Otra vista del conoide de Plücker generalizado con $n = 3$

Paraguas de Whitney

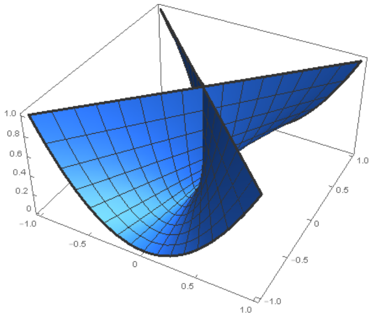

Figura 10: Paraguas de Whitney

$$\begin{array}{rccc} r: & [-1,1]^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = uv \\ y(u,v) = u \\ z(u,v) = v^2 \end{cases}$$

Paraguas de Whitney

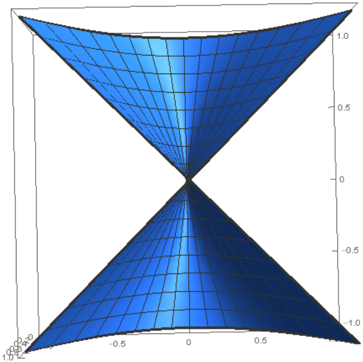

Figura 11: Otra vista del paraguas de Whitney

Banda de Möbius

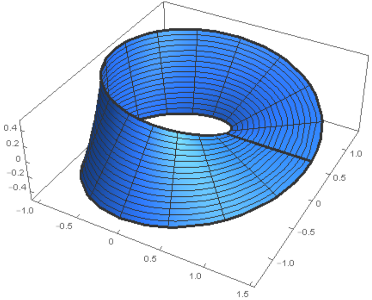

Figura 12: Banda de Möbius

$$\begin{array}{rccc} r: & [0,2\pi]\times[-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u \\ y(u,v) = \left(1+\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen} u \\ z(u,v) = \frac{v}{2}\operatorname{sen}\frac{u}{2} \end{cases}$$

Banda de Möbius

Helicoide

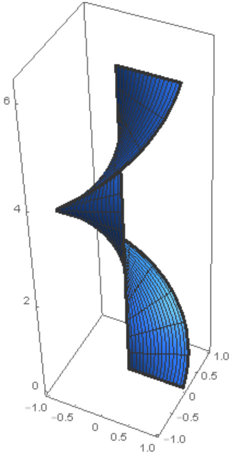

Figura 13: Helicoide

$$r: \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} x(u,v) = v\cos u \\ y(u,v) = v \operatorname{sen} u \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

Helicoide

Hiperboloide

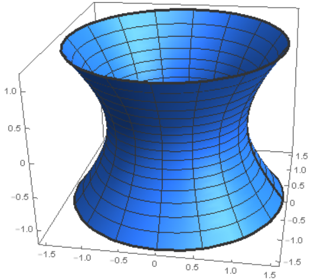

Figura 14: Hiperboloide con $a = b = c = 1$

$$
\begin{array}{rccc}
r: & \mathbb{R} \times [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (u, v) & \mapsto & (x, y, z)
\end{array}
$$

donde

$$
\begin{cases}
x(u, v) = a \cosh u \cos v \\
y(u, v) = b \cosh u \operatorname{sen} v \\
z(u, v) = c \operatorname{senh} u
\end{cases}
$$

Aplicaciones a la arquitectura

Aplicaciones a la arquitectura

Figura 15: Techo de la Escuela de la Sagrada Familia.
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escuelas_Sagrada_Familia.jpg

Aplicaciones a la arquitectura

Figura 16: Torre de refrigeración en Didcot, Reino Unido
http://en.wikipedia.org/wiki/File:
Didcot_power_station_cooling_tower_zootalures.jpg

Aplicaciones a la arquitectura

Figura 17: Torre de agua en Ciechanów, Polonia
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ciechanow_water_tower.jpg

Figura 18: Torre del puerto en Kobe, Japón
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kobe_port_tower11s3200.jpg

Aplicaciones a la arquitectura

Figura 19: Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona
http://en.wikipedia.org/wiki/File:
Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG

Aplicaciones a la arquitectura

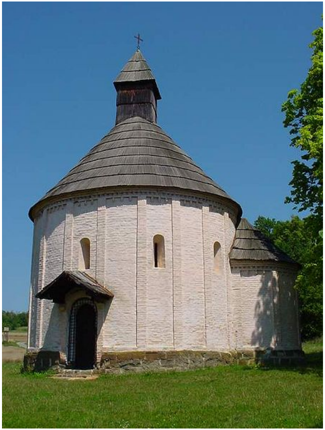

Figura 20: Iglesia en Selo, Eslovenia
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nagytotlak.JPG

Aplicaciones a la arquitectura

Figura 21: Techo de la estación de ferrocarriles de Ochota en Varsovia, Polonia
http://en.wikipedia.org/wiki/File:W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg