

Superficies regladas

José Ignacio Escribano



23 de abril de 2015

1 Introducción

2 Algunas superficies regladas

- Superficie cilíndrica
- Superficie cónica
- Conoides
 - Conoide de Wallis
 - Conoide de Plücker
 - Conoide de Plücker generalizado
 - Paraguas de Whitney
- Otras
 - Banda de Möbius
 - Helicoide
 - Hiperboloide

3 Aplicaciones a la arquitectura

Introducción

Definición

Una superficie es una aplicación

$$r : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Ejemplo (de superficie)

Imagen de superficie

Definición

Una superficie reglada es aquella generada por una recta en el espacio llamada generatriz, a lo largo de una curva llamada directriz.

Definición

Una superficie es reglada si es generada por una familia uniparamétrica de rectas (llamadas generatrices).

La parametrización de una superficie reglada es

$$r(u, v) = \rho(u) + va(u) \quad (2)$$

donde $\rho, a : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos curvas en el espacio.

Definición

Un conjunto de curvas de una superficie reglada que interseca a cada generatriz en un punto se llama curva generatriz.

Definición

Una superficie reglada es cilíndrica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + va_0 \quad (3)$$

con $a_0 \in \mathbb{R}^3$.

Definición

Una superficie reglada es cónica si es de la forma

$$r(u, v) = \rho_0 + va(u) \quad (4)$$

con $\rho_0 \in \mathbb{R}^3$.

ρ_0 es el vértice del cono.

Definición

Una superficie reglada es tangente desarrollable si es de la forma

$$r(u, v) = \rho(u) + v\rho'(u) \quad (5)$$

Definición

Una superficie reglada que cumple que $a(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$ se denomina no cilíndrica.

Definición

Una superficie no cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a un plano directriz fijo se llama superficie de Catalan.

Teorema (Caracterización de las superficies de Catalan)

Una superficie reglada $r(u, v) = \rho(u) + va(u)$ es una superficie de Catalan si y sólo si

$$[a(u), a'(u), a''(u)] = 0 \quad \forall u \in I \quad (6)$$

Definición

Una superficie de Catalan se dice conoide si todas las generatrices intersecan una recta constante (el eje del conoide).

Algunas superficies regladas

Superficie cilíndrica

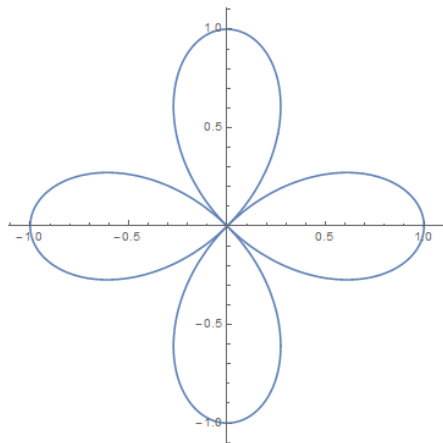


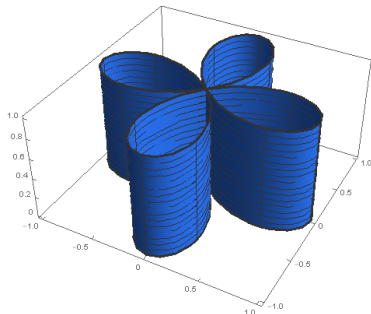
Figura 1: Rosa de cuatro pétalos

$$\begin{aligned} a : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \cos t \\ y(t) = \cos(2t) \sin t \end{cases}$$

Superficie cilíndrica



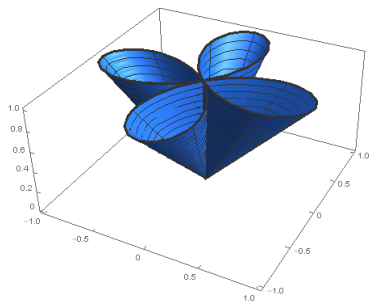
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos(2u) \cos u \\ y(u, v) = \cos(2u) \sin u \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

Figura 2: Superficie cilíndrica a partir de la rosa de cuatro pétalos

Superficie cónica



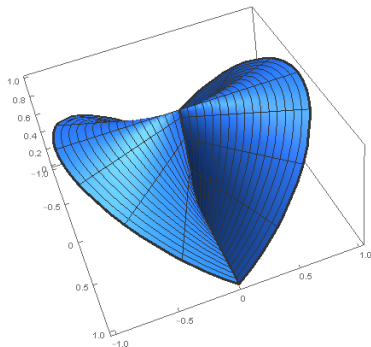
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos(2u) \cos u \\ y(u, v) = v \cos(2u) \sin u \\ z(u, v) = v \end{cases}$$

Figura 3: Superficie cónica a partir de la rosa de cuatro pétalos

Conoide de Wallis



$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 u} \end{cases}$$

Figura 4: Conoide de Wallis con $a = b = c = 1$

Conoide de Wallis

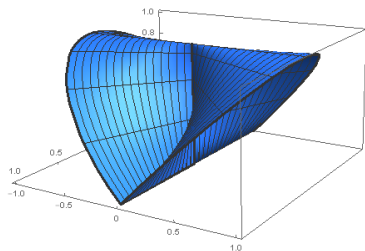
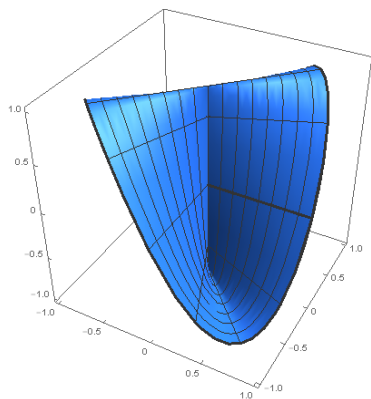


Figura 5: Otra vista del conoide de Wallis
con $a = b = c = 1$

Conoide de Plücker



$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin 2u \end{cases}$$

Figura 6: Conoide de Plücker

Conoide de Plücker

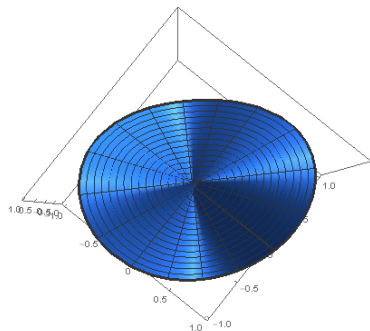
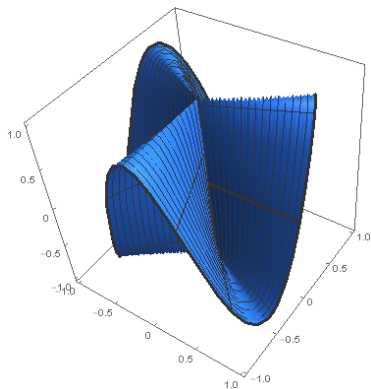


Figura 7: Otra vista del conoide de Plücker

Conoide de Plücker generalizado



$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = \sin nu \end{cases}$$

Figura 8: Conoide de Plücker generalizado con $n = 3$

Conoide de Plücker generalizado

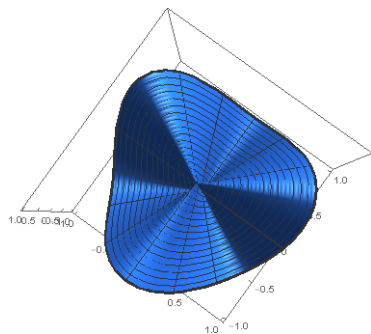
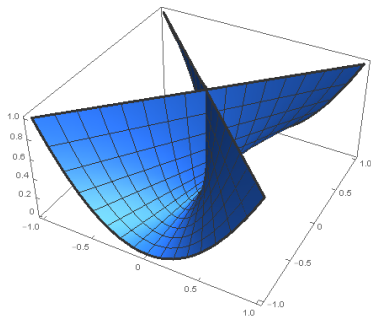


Figura 9: Otra vista del conoide de Plücker generalizado con $n = 3$

Paraguas de Whitney



$$\begin{aligned} r : [-1, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = uv \\ y(u, v) = u \\ z(u, v) = v^2 \end{cases}$$

Figura 10: Paraguas de Whitney

Paraguas de Whitney

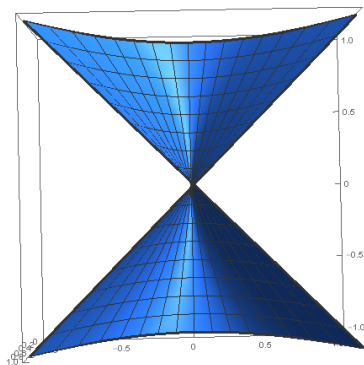


Figura 11: Otra vista del paraguas de Whitney

Banda de Möbius

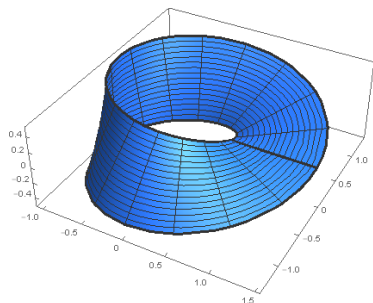


Figura 12: Banda de Möbius

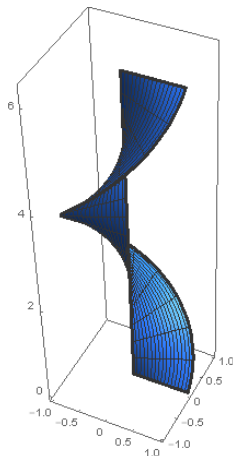
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases}$$

Banda de Möbius

Helicoide



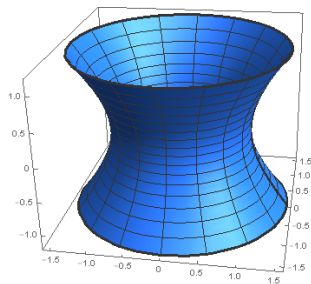
$$\begin{aligned} r : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

Figura 13: Helicoide

Hiperboloide



$$\begin{aligned} r: \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cosh u \cos v \\ y(u, v) = b \cosh u \sin v \\ z(u, v) = c \sinh u \end{cases}$$

Figura 14: Hiperboloide con $a = b = c = 1$

Aplicaciones a la arquitectura



Figura 15: Techo de la Escuela de la Sagrada Familia.

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escuelas_Sagrada_Familia.jpg

Aplicaciones a la arquitectura



Figura 16: Torre de refrigeración en Didcot, Reino Unido
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:
Didcot_power_station_cooling_tower_zootalures.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Didcot_power_station_cooling_tower_zootalures.jpg)



Figura 17: Torre de agua en Ciechanów, Polonia

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ciechanow_water_tower.jpg



Figura 18: Torre del puerto en Kobe, Japón

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kobe_port_tower11s3200.jpg

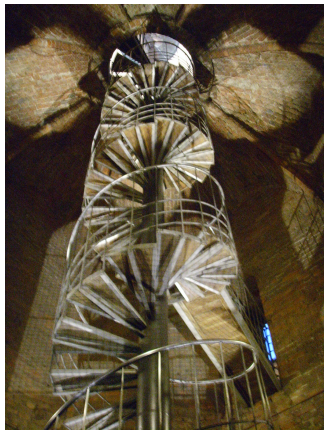


Figura 19: Escaleras en el interior de la Torrazzo di Cremona

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG)

[Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cremona,_torrazzo_interno_02_scala_a_chiocciola.JPG)



Figura 20: Iglesia en Selo, Eslovenia

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nagytotlak.JPG>



Figura 21: Techo de la estación de ferrocarriles de Ochota en Varsovia, Polonia
http://en.wikipedia.org/wiki/File:W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg