수학 : 숫자, 구조, 공간, 변화 등에 대한 추상적인 개념을 연구하는 학문.
이러한 개념들 간의 관계와 패턴을 이해하고 설명하는 데 중점을 둠.

1. 산술학 : 기본적인 수의 개념과 연산 학문. (덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)
2. 대수학 : 수와 그에 대한 연산 학문. (방정식·부등식 해결, 개념을 추상화)
3. 기하학 : 도형과 공간의 속성을 연구 학문. (평면 기하학, 입체 기하학)
4. 미적분학 : 함수와 그래프의 변화. (미분과 적분을 통해 함수의 경향성과 면적을 분석.
5. 확률과 통계학 : 불확실성과 데이터 분석. (확률적인 사건의 발생과 그 패턴을 이해하는 데 초점)
6. 선형대수학 : 벡터와 행렬. (다차원 공간에서의 변환과 선형 방정식)
7. 수리 논리와 집합론 : 수학의 기초와 공리. (집합과 그 연산을 조사)

유리수 : 분모, 분자가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수
(단, 분모는 0이 아니다.) 유리수 $= \{ x \mid x = \frac{b}{a},\ a \neq 0,$ a와 b는 정수 $\}$
- 분수로 나타낼 수 있는 수는 모두 유리수이다. (정수, $-\frac{3}{7}$, $\frac{9}{4}$, 소수 등)

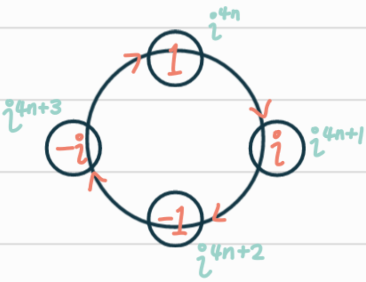
무리수 : 실수 중에서 유리수가 아닌 수
ex) 순환하지 않는 무한소수, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ...

실수 : 유리수와 무리수를 통틀어서 실수.

허수단위 : 제곱해서 -1이 되는 수 $\sqrt{-1}$을 i로 나타낸다. (허수단위)

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$i^7 = -i$
$i^8 = 1$ ...



복소수 : 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수가 복소수.
실수부분 허수 부분

제곱 : 어떤 수를 자기 자신과 곱한 결과. [넓이나 면적 등을 계산하는데 사용 경우 多]

n의 제곱 $= n*n$

제곱근 : 어떤 수의 제곱을 구하면 원래의 수가 되는 값.

- 수의 크기를 알고자 할 때.
- 수의 제곱을 해결하거나 분석할 때.

제곱근 : 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때

$$\underset{a\text{의 제곱근}}{x}^2 = a$$

※ 0은 제곱해도 0이므로 0의 제곱근은 0뿐이다.

$\sqrt{\ }$: 제곱근, 루트, 근호

모든 양수의 제곱근은 $+, -$ 두 개가 존재한다.

4의 제곱근 : ± 2

$\sqrt{4}$: 루트 4, 근호 4, 제곱근 4

3의 제곱근 : $\pm\sqrt{3}$

제곱근 3 : $\sqrt{3}$

제곱근의 성질

① $a>0$ 일 때

1) $(\sqrt{a})^2 = a$

2) $\sqrt{a^2} = a$

3) $(-\sqrt{a})^2 = a$

4) $\sqrt{(-a)^2} = a$

② $\sqrt{a^2}$의 값

$$\sqrt{a^2} = |a| \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

③ 제곱수 : 어떤 자연수의 제곱인 수

$1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16,\ \cdots$

④ 지수법칙 $(\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$

$(\sqrt{4})^2 = (4^{\frac{1}{2}})^2 = 4^{\frac{2}{2}} = 4^1 = 4$

거듭제곱근의 성질 : $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{4} = ?^2 = 2$

제곱근의 사칙연산

$3=\sqrt{9}=9^{\frac{1}{2}}=3$?

$2^{4}=\frac{1}{16}$

$\log 2^{4}=\frac{1}{16}$

$a>0,\ b>0,\ m,\ n$ 이 유리수일 때

① 덧셈과 뺄셈

1) $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

2) $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ← 근호 안의 수가 다르므로 더 이상 계산할 수 없다

$\sqrt{2}+2\sqrt{2}$ ← 〃 같으므로 분배법칙 계산 가능.

② 곱셈과 나눗셈

1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2) $m\times\sqrt{a}=m\sqrt{a}$

3) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

4) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

5) $m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$

i) $3\times\sqrt{2}$ 생략하여 $3\sqrt{2}$

ii) 제곱근끼리 곱·나눗셈

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

iii) 유리수끼리, 제곱근끼리 계산

$3\sqrt{2}\times3\sqrt{5}=6\sqrt{10}$

iv) 근호 안에 제곱인 수는 근호 밖으로 꺼낼 수 있음.

$\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{2^2\times5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

v) 근호 밖의 양수는 근호 안으로 집어 넣을 수 있음.

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{12}$ $2\sqrt{5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2^2\times5}=\sqrt{20}$

$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2}\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times2}=-\sqrt{18}$

예제문제 1) 제곱근 16 = ? $\sqrt{16}=4$

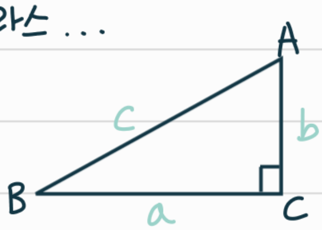
2) 16의 제곱근 = ? $\pm\sqrt{16}=\pm4$

3) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=?$ $5\sqrt{2}$

4) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}=?$ $3\sqrt{16}=3\sqrt{4^2}=3\times4=12$

5) $\sqrt{8}+\sqrt{18}=?$ $\sqrt{2^2\times2}+\sqrt{3^2\times2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

피타고라스 . . .



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b
직각의 대변인 빗변의 길이 c

$c^2 = a^2 + b^2$

1) a.b 길이를 알 때

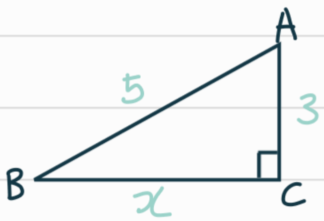
$$c = \sqrt{a^2+b^2}$$

2) a, c 길이를 알 때

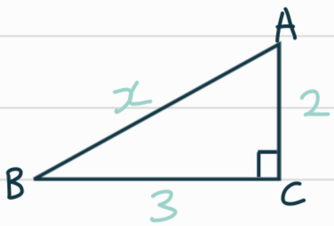
$$b = \sqrt{c^2-a^2}$$

3) b, c 길이를 알 때

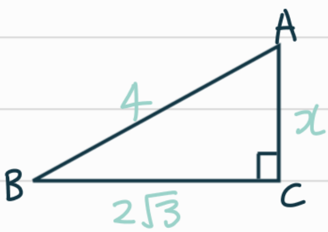
$$a = \sqrt{c^2-b^2}$$



$$x = \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\text{cm}$$

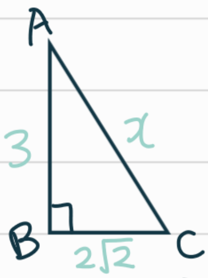


$$x = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ \text{cm}$$

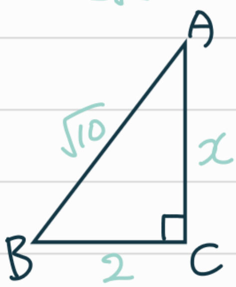


$$x = \sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16-4\times3} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

$x = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,cm$

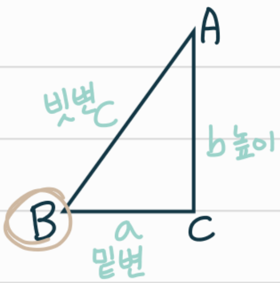


$x = \sqrt{3^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17}\,cm$



$x = \sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2} = \sqrt{10-4} = \sqrt{6}\,cm$

삼각비 $\angle C = 90°$인 직각삼각형 ABC에서

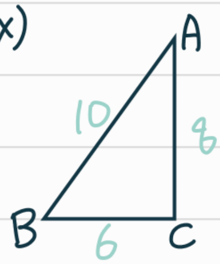


① $\sin B = \dfrac{(\text{높이})}{(\text{빗변})} = \dfrac{b}{c}$

② $\cos B = \dfrac{(\text{밑변})}{(\text{빗변})} = \dfrac{a}{c}$

③ $\tan B = \dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변})} = \dfrac{b}{a}$

ex)



$\sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\quad \sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\quad \cos A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\quad \tan A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\sin A = \dfrac{\text{높이}}{\text{빗변}}$

$\cos A = \dfrac{\text{밑변}}{\text{빗변}}$

$\tan A = \dfrac{\text{높이}}{\text{밑변}}$

지수 : 어떤 수를 다른 수의 거듭제곱으로 나타내는 데 사용되는 수의 부분.

ㄴ밑(base) 수와 함께 사용, 밑 수를 몇 번 거듭제곱하여 얻는지를 나타냄.

- 수를 간결하게 표현 or 처리하기 위해 사용.

- 지수 연산 : 수의 크기를 표현하거나 복잡한 계산을 간단하게 만드는 데에 매우 유용.

ex) 어떤 수 x가 b를 밑으로 하는 지수.

$b^x = y$ y는 b를 x번 제곱하여 얻은 값.

[예시]

$2^3 = 8$ $10^0 = 1$

$3^2 = 9$ 어떤 수든 0번 거듭제곱하면 1이 됨.

log (로그) : 어떤 수를 다른 수의 거듭제곱으로 표현할 때 사용.

ㄴ주어진 밑 (base) 수를 어떤 지수 (exponent)로 거듭제곱한 결과가 특정한 값이 되도록 하는 지수 찾기 연산

- 수의 크기를 비교, 복잡한 지수 연산을 간단하게 처리하는데 활용.

ex) 어떤 수 x에 b가 밑으로 하는 로그

$$\log_{\underset{\text{밑}}{b}} \underset{\text{로그를 취할 값}}{x} = \underset{\text{밑(b)를 몇 번 거듭제곱하여 x가 되는지 나타내는 지수}}{y}$$

[예시]

$\log_{10} 100 = 2$ $\log_e e = 1$ (상용로그 (밑이 10인 로그), 자연로그 (밑이 e인 로그))

$\log_2 8 = 3$ e(자연상수)

e를 1번 제곱하면 e

시그마 (Σ) : 수열의 합을 나타내는 수학 기호.

- 수열의 합, 무한급수, 평균 등 다양한 수학적 표현에서 사용.

- 복잡한 계산을 간단하게 나타내줌.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

n 윗 첨자는 끝값

i=m 아래첨자는 시작값

i = 덧셈을 하기 위한 변수.
일반적으로 정수를 사용.
m 부터 n까지의 값.

m = 시작값. 첫 항의 인덱스.

n = 끝 값. 마지막 항의 인덱스.

a_i = 각 항의 값. i의 값에 따라 항이 변함.

[예시]

$\sum_{i=1}^{5} i^2$ = 1부터 5까지의 정수의 제곱을 모두 더함.

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

리미트 (Limit) : 수열이나 함수의 극한 값을 나타내는 수학적 개념.

- 수열이나 함수가 특정한 값으로 수렴하는 경향을 설명하기 위해 사용.
- 미분, 적분, 극한값 계산 등 다양한 수학적 연산에 필수적으로 사용됨.

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ 수열 a_n의 리미트 L

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ 함수 $f(x)$의 리미트 L

함수의 독립변수

x가 c에 가까워질 때 함수 f(x)의 값이 L에 가까워진다는 것.

미분 (Differentiation) : 함수의 변화율을 나타내는 수학적 연산.

: 함수의 입력값에 대한 출력값의 변화 정도를 나타냄.

: 특정 지점에서의 순간적인 변화율을 구하는 것을 의미.

- 함수의 기울기, 극값, 최솟값, 볼록/오목성, 경사를 분석하는 데 사용.
- 곡선의 특성을 이해하고 예측하는 데 중요한 역할.
- 물리학, 공학, 경제학 등 다양한 분야에서 현상을 모델링하고 예측하는 데에도 활용됨.

함수 $f(x)$의 미분 $f'(x)$ 또는 $\frac{df}{dx}$

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분 가능하다면, x 위치에서의 미분은 해당 위치의 순간적인 변화율을 나타냄.

미분의 기본 아이디어 : 한 점에서의 기울기를 구하는 것.

함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 미분 가능하다면, $x=a$ 에서의 미분 정의

점 a 에서의 함수값의 변화된 위치

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

아주 작은 변화량

적분 (Integration) : 함수의 면적 또는 누적 합을 계산하는 수학적 연산.

: 함수의 변화율을 역으로 추적하여 원래 함수를 구하는 과정으로도 이해.

: 미분과 반대 개념.

- 함수의 면적, 누적된 값, 물리학적 양 등을 계산하는 데 사용.

함수 $f(x)$의 적분 $\int f(x)\,dx$

의 면적이나 누적 합

정의역 [a, b] 에서 함수 $f(x)$를 고려, 이 함수 아래의 영역을 x 축에 대해 면적으로 계산

적분 구간의 끝점

적분하려는 함수

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

적분 구간의 시작점

연쇄법칙 (Chain Rule) : 미분학에서 복합 함수의 미분을 구하는 규칙 중 하나. 클로저??

두 개 이상의 함수가 합쳐져 만들어진 함수

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 있고, $h(x) = f(g(x))$ 로 정의된 복합 함수 $h(x)$ 가 있다.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{\text{함수 } h(x)\text{의 미분}} = \underbrace{\frac{df}{dg}}_{\text{함수 } f(x)\text{의 } g\text{에 대한 미분}} \cdot \underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{함수 } g(x)\text{의 미분}}$$

[예시]

$h(x) = f(g(x))$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = 2g(x) \cdot 3 = 18x$$

선형대수 : 벡터, 행렬, 벡터 공간 등을 연구하는 수학 분야.

벡터 : 크기와 방향을 가지는 양을 나타내는 수학적 개념.

: 숫자의 배열로 표현

: 벡터 공간 내에서 위치를 나타내기도 함.

- 다차원 공간에서의 이동, 방향, 세기 등을 나타내는 데도 사용됨.

덧셈과 뺄셈, 스칼라 곱 (숫자와의 곱), 내적 (스칼라 곱의 확장) 등의 연산을 통해 조작할 수 있음.

- 물리학, 공학, 컴퓨터 그래픽스, 머신 러닝, 경제학 등 다양한 분야에서 활용.
- 공간의 위치, 힘, 속도, 방향 등을 모델링하거나 표현하는 데 사용됨.

v 또는 $\vec{v}$.

주요 특성
- 크기 (Magnitude) : 벡터의 길이, 표기 - $|v|$ 또는 $\|v\|$
- 방향 (Direction) : 벡터의 화살표의 방향
- 성분 (Components) : 벡터는 숫자의 배열로 표현, 각각의 숫자를 벡터의 숫자라고 함.

스칼라 : 크기만을 나타내는 수학적 개념. 방향이나 위치와는 무관한 양.

: 실수 (real number)로 표현.

: 양의 크기만을 나타내어 벡터와 대조됨.

- 온도, 질량, 시간, 거리, 속도의 크기 등.
- 벡터와 연산 가능. = 스칼라 곱 (scalar multiplication)

└ 벡터의 각 성분에 스칼라 값을 곱하여 벡터의 크기나 방향을 변경.

내적 (Inner Product) = 스칼라 곱 = 도트 곱 : 두 개의 벡터 간의 곱셈을 정의하는 연산

: 벡터의 성분들 간의 곱셈과 덧셈을 통해 계산.

: 수학적으로 다양한 성질을 가지고 있음.

- 다차원 공간에서 두 벡터의 유사성이나 직교성 등을 분석하거나 벡터들 사이의 각도와 방향을 알아내는 데 사용.
- 물리학, 공학, 컴퓨터 그래픽스, 머신 러닝 등 다양한 분야에서 활용.
- 벡터의 길이와 각도를 통해 힘, 속도, 방향 등을 계산하거나, 데이터 분석에서 특성 간의 상관관계를 파악하는 데 사용될 수 있음.

두 개의 벡터 a와 b의 내적은 $a \cdot b$

$$a \cdot b = \underbrace{|a|}_{\text{벡터 a의 크기}} \cdot \underbrace{|b|}_{\text{벡터 b의 크기}} \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{두 벡터 사이의 각도}}$$

선형결합 (Linear Combination) : 주어진 벡터들을 스칼라 값과 벡터들의 곱셈을 통해 합산하는 과정.

: 벡터들을 조합하여 새로운 벡터를 생성하는 과정.

- 벡터들 사이의 선형 관계를 나타내는 중요한 개념.
- 벡터 공간의 생성 (subspace)과 기저 (basis) 등과 관련된 다양한 개념을 이해하고 설명하는 데 사용됨.

벡터 $v_1, v_2, v_3, \cdots v_n$ 들의 선형결합

$\Rightarrow c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$

스칼라 상수 : 벡터들을 어떤 비율로 조합할지 결정.
선형결합의 계수 (coefficients)

행렬 (Matrix) : 숫자들을 격자 형태로 배열한 2차원 데이터 구조

: 각각의 원소는 숫자.

: 일반적으로 $m \times n$ 의 형태, m = 행(row)의 개수, n = 열(column)의 개수

- 여러 종류의 연산에 사용 (행렬 덧셈과 뺄셈, 행렬 곱셈, 스칼라 곱, 전치 행렬, 역행렬)

행렬의 각 원소를 스칼라 곱과 곱하는 연산 / 원래 행렬의 행과 열을 뒤바꾼 행렬 / 정사각 행렬에 대한 곱셈에서 역원과 비슷한 역할

- 선형변환, 데이터 분석, 컴퓨터 그래픽스, 머신 러닝 등
- 선형방정식의 해를 구하거나 고유값과 고유벡터를 분석하는 등