COURSE: Concrete Mathematics
THEME: chap1 recurrent problem exercises
NAME: JHD

1.15 $\begin{cases} I(2)=2,\ I(3)=1 \\ I(2n)=2\ (n)-1 & ,n\geq 1 \\ I(2n+1)=2\ (n)+1 & ,n\geq 1 \end{cases}$ 递归式不变

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1
$I(n)$	X	2	1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9
$I(n)-J(n)$	X	1	-2	2	2	-4	-4	4	4	4	4	-8	-8	-8	-8	8

发现规律

令 $K(n)=I(n)-J(n)$

最高位 / 次高位 / 其余位

$K(2^m+s\cdot 2^{m-1}+l)=(-1)^s\cdot 2^{m-[s=1]}$ $s=0$或1, $0\leq l<2^{m-1}$

$K(7)=I(2^2+1\cdot 2^1+1)=-2^2$

$n=(\underbrace{1}\ \underbrace{b_{m-1}}_{s}\ \underbrace{b_{m-2}\cdots b_1\ b_0}_{l})_2$

$K(n)\begin{cases} +(0\ 1\ 0\ \dots\ 0\ 0)_2 &, b_{m-1}=0 \\ -(1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0)_2 &, b_{m-1}=1 \end{cases}$

$(1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0)_2$ 补码相同

$\therefore K(n)=(b_{m-1}\overline{b_{m-1}}\,0\ \dots\ 0\ 0)_2$ 补码

$J(n)=(b_{m-1}b_{m-2}b_{m-3}\cdots b_0\ b_m)_2$

$\therefore I(n)=(\underbrace{(\overline{b_{m-1}}\cdot b_{m-2})}_{\text{最高位}}\underbrace{(\overline{b_{m-1}}\oplus b_{m-2})}_{\text{次高位}}\dots b_0\ b_m)_2$

例:

$7=(1\ 1\ 1)_2$　　$5=(1\ 0\ 1)_2$

$K(7)=-(1\ 0\ 0)_2$　　$K(5)=+(0\ 1\ 0)_2$

$J(7)=(1\ 1\ 1)_2$　　$J(5)=(0\ 1\ 1)_2$

$I(7)=(0\ 1\ 1)_2$　　$I(5)=(1\ 0\ 1)_2$