1. $f(x) = x^3$의 도함수가 $f'(x) = 3x^2$ 임을 도함수 정의

풀이. $f(x) = x^3$은 항상 연속이고 이때 도함수는 구할 수 있다.

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h}{h} + \frac{3xh^2}{h} + \frac{h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$f'(x) = 3x^2$ 이 된다.

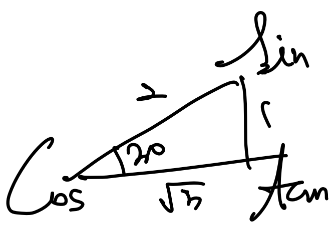
2. $f(x) = \cos x$의 Taylor 1차 근사식을 사용하여 $\cos(31)$을 구해라.

풀이. Taylor 공식

$$f(x) = f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots \frac{(x-a)^n}{n!}f^{n}(a)$$

Taylor 1차근사식 = $f(x) = f(a) - (x-a)f'(a)$ 까지이다.

a ↖ 30



$$\cos(31) = \cos(30) - (31-30)f'(30)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180} \cdot (-\sin(30))$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{180} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

3. 주어진 알고리즘 이용 $x^2-2x-3=0$ 의 근사해 x_2 구하고자 한다.

$y = f(x_0)$

for (i=1 to kmax) ⇒ 뉴턴방법 접선의 기울기를 활용하여 0과 가까운 점까지 이동하도록 계속 계산

  $dy = f'(x_0)$;

  if ($|dy| < e$) stop ⇒ 미분값이 0과 가까운수가 되면 stop

  $C = x_0 - \frac{y}{dy}$; ⇒ 그게 아니면 C는 $x_0 - \frac{y}{dy}$ 의 방식은 뉴턴방법이다.

  $y = f(c)$;

  if ($|y| < e$) stop 이다.

  $x_0 = C$

end

① $x_0 = 1$ $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 2x - 2$

계산 $C = x_0 - \frac{x_0^2 - 2x_0 - 3}{2x_0 - 2}$

$= 1 - \frac{1-2-3}{0}$ (분모가 0 이므로 계산 불가능)

② $x_0 = 2$

$C = x_0 - \frac{x_0^2 - 2x_0 - 3}{2x_0 - 2}$

$= 2 - \frac{4-4-3}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

$x_1 = \frac{7}{2} = C$

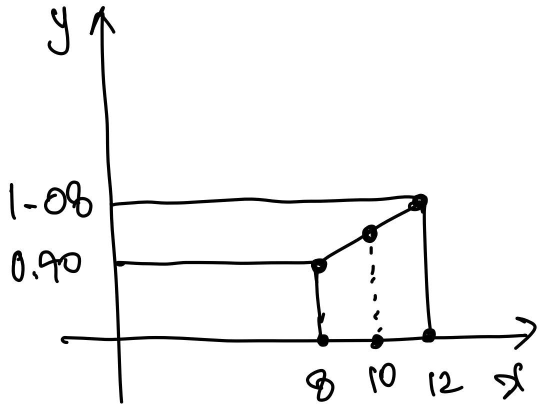
$C = \frac{7}{2} - \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right) - 3}{2\left(\frac{7}{2}\right) - 2}$

$= \frac{7}{2} - \frac{\frac{9}{4}}{5} = \frac{7}{2} - \frac{9}{20}$

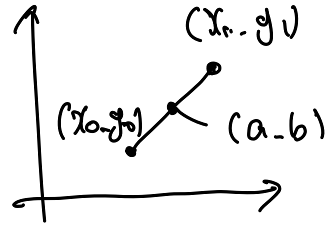
$= \frac{70}{20} - \frac{9}{20} = \frac{61}{20}$ $\boxed{x_2 = \frac{61}{20}}$

4. $f(x) = \log x$ 선형 보간법을 이용 $f(10)$을 구하여라.

$(f(8) \simeq 0.90)$ $(f(12) \simeq 1.08)$



ex)



선형보간법 : 기울기 이용 ⇒

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b - y_0}{a - x_0} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

하나의 직선상에 있으면, 기울기가 같은값이고

이것으로 인해 근사값을 찾을수 있다.

$\Rightarrow (8, 0.90)\ (10, f(10))\ (12, 1.08)$

$$\frac{1.08 - 0.90}{12 - 8} = \frac{f(10) - 0.90}{10 - 8}$$

$$= 4\times\left(\frac{0.18}{4}\right) = \left(\frac{f(10) - 0.90}{2}\right)\times 4 \Rightarrow 0.18 = 2f(10) - 1.80$$

$$2f(10) = 1.98$$

$$f(10) = 0.99$$

5. 다음 데이터를 주어진 방법에 의해 보간다항식을 구하고 $x=\frac{3}{2}$ 에서 보간값을 구하시오.

$\{(0,2),\ (1,3),\ (2,1)\}$

① 라그랑주 보간법

↳ 자기자신은 빼고 계산 $x_0-x_0=0$이기때문

$x_0=0 \quad f(x_0)=2$

$x_1=1 \quad f(x_1)=3$

$x_2=2 \quad f(x_2)=1$

$$L_0(x_0)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x_1)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x_2)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_0(x_0)=\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_1(x_1)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1)(-1)}=-x(x-2)$$

$$L_2(x_2)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{1}{2}x(x-1)$$

보간다항식

$$P(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)$$

$$=2\times\frac{(x-1)(x-2)}{2}+3(-x(x-2))+\frac{1}{2}(x-1)x$$

$$=x^2-3x+2-3x^2+6x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+2$$

$$P\left(\tfrac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}\times\frac{9}{4} + \frac{5}{2}\times\frac{3}{2} + 2$$

$$= -\frac{27}{8} + \frac{15}{4} + 2 = -\frac{27}{8} + \frac{30}{8} + \frac{16}{8}$$

$$= \frac{19}{8}$$

② 뉴턴 분할 차분법

	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
$x_0 = 0$	2	$\frac{3-2}{1-0} = 1$	$\frac{-2-1}{2-0} = \frac{-3}{2}$
$x_1 = 1$	3	$\frac{1-3}{2-1} = -2$	
$x_2 = 2$	1		

$$P(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 2 + 1(x-0) + \frac{-3}{2}(x)(x-1)$$

$$= 2 + x + -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$$

$$= -\frac{3}{2}\times\frac{9}{4} + \frac{5}{2}\times\frac{3}{2} + 2$$

$$= -\frac{27}{8} + \frac{15}{4} + 2 = -\frac{27}{8} + \frac{30}{8} + \frac{16}{8}$$

$$= \frac{19}{8}$$

6. 최소 제곱 직선을 구하시오.

$\{(-2, -1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)\}$ → 4개

$n=4$

$$dis(P, l) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

(P= 점들의 집합
l= 최소제곱직선)

(a에 대하여 미분)

$$\frac{d}{da} dis(P, l) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b))(-x_i) = 0$$

(b에 대해 미분)

$$\frac{d}{db} dis(P, l) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b))(-1) = 0$$

정리 ① ⇒ $\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = 0$

정리 ② ⇒ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0$

(이때 나타나는 1차연립방정식 풀이)

① = $(4+0+1+4)a + (-2+0+1+2)b - (2+0+5+14) = 0$

$= 9a + b - 17 = 0$

② $(-2+0+1+2)a + 4b - (-1+3+5+7) = 0$

$a + 4b - 14 = 0$

① 와 ② 를 연립

$$\begin{cases} 9a + b = 17 & (\times 4) \\ a + 4b = 14 & ② \end{cases}$$

$\Downarrow$

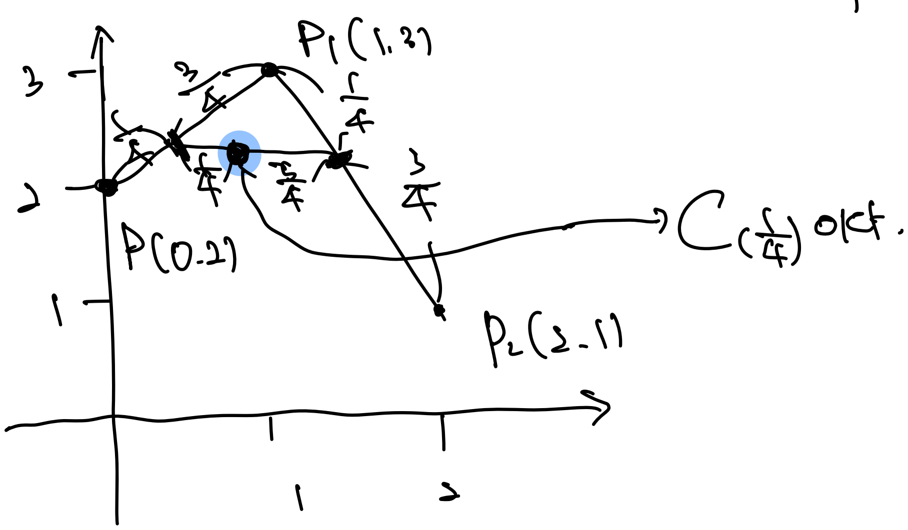
$$\begin{array}{r} 36a + 4b = 68 \\ - \quad a + 4b = 14 \\ \hline 35a = 54 \end{array}$$

$a = \frac{54}{35}$ $b = \frac{84}{35}$

$\Rightarrow$ 최소제곱 직선 $\boxed{y = \frac{54}{35}x + \frac{84}{35}}$

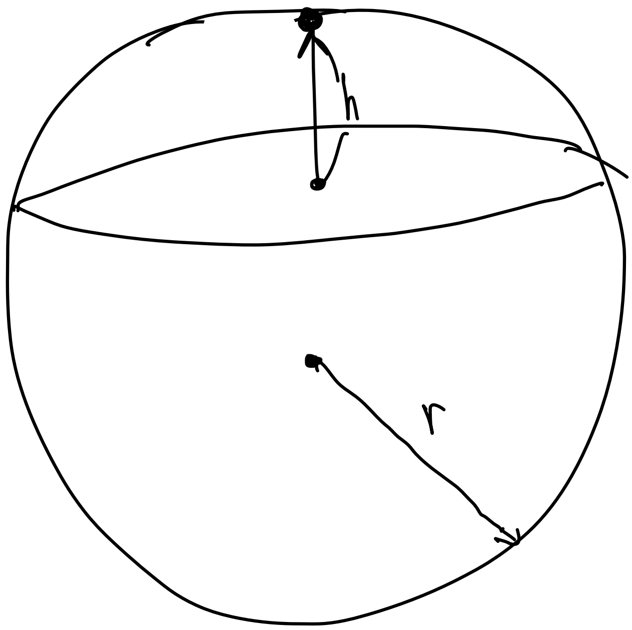
7. 세 점 $P_0(0, 2)$ $P_1(1, 3)$ $P_2(2, 1)$을 순서대로 평면 상에 찍을 때.

그려지는 2차 Bezier 곡선 $C(t)$ 상의 점 $(\frac{1}{4})$에 위치 표시.



$\frac{1}{4}$ 지점

8. 문제는 사진으로 보고.



물에 잠긴 물체가 받는 부력

=

$\boxed{\text{물체의 잠긴 부피와}}$ 같은 $\boxed{\text{물의 무게.}}$

(h를 이분법으로 구하여라)

$r = 1\,m$

구의 밀도 $= \rho_s = 200\,kg/m^3$

물의 밀도 $= \rho_w = 1000\,kg/m^3$

구의 물위 체적구하는 공식

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

구의 부피: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$

$$\rho = \frac{M\ (\text{질량})}{V\ (\text{부피})}$$

$M = \rho V$

$M = \boxed{200 \times \frac{4}{3}\pi}$ → 구의 질량

$$\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi h^2}{3}(3-h)\right) \times 1000 = 200 \times \frac{4}{3}\pi$$

$$1000\left(\frac{\pi h^2}{3}(3-h)\right) = 1000 \times \frac{4}{3}\pi - 200 \times \frac{4}{3}\pi$$

$$10\cancel{00}\left(\frac{\pi h^2}{3}(3-h)\right) = \frac{4}{3}\pi \times 8\cancel{00}$$

$$10\left(\frac{\pi h^2}{3}(3-h)\right) = \frac{4}{3}\pi \times 8$$

$$\frac{\cancel{\pi} h^2}{\cancel{3}}(3-h) = \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi} \times \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$h^2(3-h) = \frac{16}{5}$$

$$-h^3 + 3h^2 = \frac{16}{5}$$

$$\boxed{h^3 - 3h^2 + \frac{16}{5} = 0}$$

이분법 사용

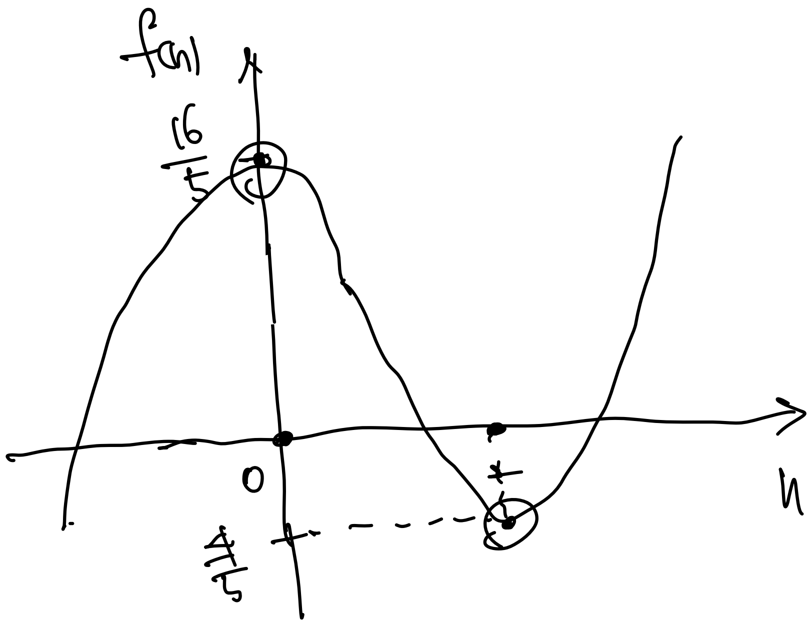
미분 $= 3h^2 - 6h = 0$

$3h(h-2) = 0$

$h=0$ 과 2에서 변곡점

$8 - 12 + \frac{16}{5} = 0$

$-4 \quad -\frac{4}{5}$



0과 2 사이의 이분법

① $f(1) = 1 - 3 + \frac{16}{5} = \frac{-10}{5} + \frac{16}{5}$

$= \boxed{\frac{6}{5}}$