『철학사상』 별책 제2권 제13호

철학 텍스트들의 내용 분석에 의거한
디지털 지식 자원 구축을 위한 기초적 연구

프레게 『산수의 기초』

최 훈

서울대학교 철학사상연구소
2003

『철학사상』별책 제2권 제13호

철학 텍스트들의 내용 분석에 의거한
디지털 지식 자원 구축을 위한 기초적 연구

프레게 『산수의 기초』

최 훈

서울대학교 철학사상연구소
2003

발간사

2002년 8월부터 한국학술진흥재단의 기초학문육성지원 아래 우리 연구소의 전임연구팀이 수행하고 있는 <철학 텍스트들의 내용 분석에 의거한 디지털 지식 자원 구축을 위한 기초적 연구>의 1차 년도 연구결과 총서를 『철학사상』 별책 제2권으로 엮어낸다.

박사 전임연구원들이 주축을 이루고 있는 서울대학교 철학사상연구소의 특별연구팀은 우리 사회 문화 형성에 크게 영향을 미친 동서양 주요 철학 문헌들의 내용을 근간 개념들과 그 개념들 사이의 관계를 중심으로 분석하고 있다. 우리 연구팀은 이 작업의 일차적 성과물로서 이 연구총서를 펴냄과 아울러, 이것을 바탕으로 궁극적으로는 여러 서양어 또는 한문으로 쓰여진 철학 고전의 텍스트들을 한국어 표준판본이 확보되는 대로 디지털화하여 상식인에서부터 전문가에 이르기까지 누구나 이를 쉽게 활용할 수 있도록 하고자 한다. 이와 같은 연구 작업은 오늘날의 지식정보 사회에서 철학이 지식 산업과 지식 경제의 토대가 되는 디지털 지식 자원을 생산하는데 있어 중요한 역할을 수행하기 위한 필수적인 기초 연구라 할 것이다.

우리 연구팀은 장시간의 논의 과정을 거쳐 중요한 동서양의 철학 고전들을 선정하고 이를 전문 연구가가 나누어 맡아, 우선 각자가 분담한 저작의 개요를 작성하고 이어서 중심 개념들과 연관 개념들의 관계를 밝혀 개념 지도를 만들고, 그 틀에 맞춰 주요 개념들의 의미를 상술했다. 이 같은 문헌 분석 작업만으로써도 대표적인 철학 저술의 독해 작업은 완료되었다고 볼 수 있다. 그러나 이 기획 사업은 이에서 더 나아가 이 작업의 성과물을 디지털화된 철학 텍스트들에 접목시켜 누구나 각자의 수준과 필요에 따라 철학 고전의 텍스트에 접근 이해할 수 있도록 하려는 것이다.

우리가 대표적인 것으로 꼽는 철학 고전들은 모두 외국어나 한문으로 쓰여져 있기 때문에, 이를 지식 자원으로서 누구나 활용할 수 있도록 하기 위해서는 디지털화에 앞서 현대 한국어로의 번역이 절실히 요구된다. 그러나 적절한 한국어 번역이 아직 없는 경우에도 원전의 사상을 이루는 개념 체계를 소상히 안다면 원전에 대한 접근과 이용이 한결 수월해질 것

이다. 우리 연구 작업의 성과는 우선은 이를 위해 활용될 수 있을 것이고, 더욱이는 장차 한국어 철학 텍스트들이 확보되면 이를 효율적으로 활용하기 위한 기초가 될 것이다.

아무쪼록 우리 공동연구 사업의 성과물이 인류 사회 문화의 교류를 증진시키고 한국 사회 철학 문화 향상에 작으나마 이바지하는 바 있기를 바란다.

2003년 5월 15일

서울대학교 철학사상연구소 소장·「철학 텍스트들의 내용 분석에 의거한 디지털 지식 자원 구축을 위한 기초적 연구」 연구책임자

백 종 현

『철학사상』 별책 제2권 제13호

프레게 『산수의 기초』

최 훈

서울대학교 철학사상연구소
2003

머리말

서울대학교 철학사상연구소는 철학의 고전에 전문가와 일반인들 모두 접근하기 쉽도록 철학 텍스트들을 디지털화하는 작업을 구상하였다. 철학 텍스트들의 단순한 디지털화가 아니라 XML로 구현된 토픽맵으로서 유기적으로 텍스트들에 접근하게 하는 것이 목적이다. 토픽맵(topic map)은 컴퓨터에서 사용될 수 있는 정보 자원(resources)에 대한 지식을 전달하기 위한 자원의 지도(map)를 말한다. 이런 목적을 달성하기 위해 2002년 8월부터 한국학술진흥재단의 기초학문육성지원 프로그램으로 「철학 텍스트들의 내용분석에 의거한 디지털 지식 자원 구축을 위한 기초적 연구」를 수행하게 된 것이다. 이 보고서는 그 작업의 하나로서 프레게의 『산수의 기초』를 연구 대상으로 삼았다.

철학에서 최초로 수행되는 과제라서 연구팀 내부에서도 연구 수행이 수월하지만은 않았다. 무엇보다 철학의 개념이라는 것이 토픽맵으로 깨끗하게 정리될 수 있는 성격의 것이 아니기 때문이다. 최선의 것은 아니지만 철학의 디지털화라는 목표 달성을 위한 기초 작업이라는 데 의의를 두고 주어진 여건 아래에서 노력하였다.

주제어 선정과 주제어간의 연관 관계는, 연구대상서인 『산수의 기초』의 논리적 전개과정을 중심으로 구성하는 방법과 『산수의 기초』에서 다루어지는 주요 철학적 술어(개념)들을 중심으로 구성하는 방법을 혼용하였다. 그리고 주제어 서술은 가급적 일차자료로서의 사용가치를 높이기 위해 『산수의 기초』의 내용을 객관적으로 설명하고 인용하는 데 주안점을 두었다.

이 보고서는 3부로 구성된다. Ⅰ부에서는 프레게의 생애를 간단하게 소개하고 그의 철학에 대해 소개하였다. 그리고 『산수의 기초』를 개괄하였다. 마지막으로 『산수의 기초』의 차례를 제시하였다.

Ⅱ부가 이 연구에서 가장 중요한 부분이다. 이 부분은 『산수의 기초』의 내용을 체계적으로 분석하여 내용 전개를 개략적으로 이해할 수 있도록 일종의 상세한 목차를 만드는 작업이라고 이해하면 된다. 먼저 주요 개념을 사전식으로 정의하였다.

그리고 두 번째 부분에서 개념의 상하 관계(트리 구조)를 표현하는 계층

도를 작성하였다. 개념들간의 상하 관계는 최상위 개념(트리의 루트)에서부터 하위 개념들을 계층 구조로 나열하는 것이다. 여기서는『산수의 기초』를 네 개의 주요 개념으로 나누어 계층도를 작성하였다. 디지털화를 위해서는 태깅이 필요하나 이 보고서에서는 읽기 편하도록 태깅을 생략하였다.

세 번째 부분에서는 개념들간의 연관 관계를 표현하는 관계 테이블을 작성했다. 연관 관계는 토픽맵에서의 어소시에이션(association)에 해당하는 부분이다. 위에서 작성한 계층도의 각 개념들 사이에 상하 관계가 아닌 연관성이 있는 것들끼리 어떤 연관성이 있는지 표현하는 것이다. 앞에서도 말한 것처럼 철학 개념의 체계도를 기계적으로 만든다는 것은 쉽지 않은 일이다. 적절한 어소시에이션을 찾는 일이 만만치 않았다. 현재는 이항 관계의 어소시에이션만 개발했지만 장차 삼항, 사항 등의 어소시에이션의 개발도 필요하다고 생각한다.

Ⅲ부는 주제어 서술이다. 주제어 서술은 두 부분으로 이루어진다. 대체로 Ⅱ부에서 제시한 계층도의 순서에 따라 먼저 나의 설명이 이루어지고 그 다음에 그 설명에 해당하는『산수의 기초』의 원문이 제시된다. 나의 설명은 <설명ch>으로 구분이 되어 있고 인용은 <인용>으로 구분이 되었다. 해당하는 인용문이 여러 곳일 경우에는 <인용 1>, <인용 2>, …로 제시하였다. 설명은 원문을 읽지 않고도 특정 개념을 이해할 수 있도록 객관적인 자료와 정보를 토대로 서술한 부분이다. 그리고『산수의 기초』의 서술을 직접 읽기를 원하는 독자를 위하여 본문을 충분히 인용 제시했다.

Ⅱ부에서 제시한 계층도와 III부의 설명, 인용 부분은 나중에 디지털화할 경우에 유기적으로 연관될 것이다. 예를 들어 ‘수’라는 개념을 클릭하면 그 개념의 설명을 볼 수 있고 또 그 개념에 해당하는『산수의 기초』의 내용을 볼 수 있는 식이다. 그리고 ‘수’와 어떤 식으로든 연관 관계가 있는 개념들을 계속해서 볼 수 있을 것이다.

새로운 연구 방법을 수행하느라 연구원들의 수고가 많았다. 어려운 과제를 이끄신 연구책임자 백종현 교수님과 윤선구 박사님이 아니었으면 보고서가 나오기 힘들었을 것이다. 이 자리를 빌어 감사드린다. 그리고『산수의 기초』를 번역한 최원배 박사님(박준용과 공역, 아카넷, 2003)은 번역문의 파일을 보내주셔서 연구에 많은 도움이 되었다. 무엇보다 이 연구

를 지원해준 한국학술진흥재단에 감사드린다. 척박한 연구 환경에 재단의 지원이 없었으면 연구에 전념하기 힘들었을 것이다.

2003년 5월 12일

최　훈

목차

Ⅰ. 텍스트 내용 분석 ······1
1. 프레게의 생애 ······1
2. 프레게 저술 목록 ······2
3. 프레게 저작의 연대순 정리 ······3
4. 국내의 프레게 연구 논문 ······10
5. 프레게 대표 저작들에 대한 해설 ······11
(1) 진리 함수적 논리학 ······12
(2) 언어철학 ······13
1) 심리주의 배격 ······13
2) 맥락 원리 ······15
3) 개념과 대상의 구분 ······15
6. 산수의 기초 개관 ······27
7. 『산수의 기초』의 차례 ······31

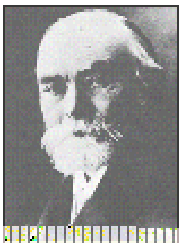
Ⅱ. 개념 체계도 ······39
1. 개념을 나타내는 용어의 정의 ······39
2. 개념의 상하 관계(트리 구조)를 표현하는 계층도 ······43
3. 개념들간의 연관 관계를 표현하는 관계 테이블 ······46
(1) 논리학 ······46
(2) 산수 법칙 ······46
(3) 수 ······47
(4) 대상 ······48

Ⅲ. 주제어 서술 ······49
1. 논리학 ······49
(1) 논리주의 ······49
(2) 수학에서 표상의 역할 ······51
(3) 관념과 개념의 구분 ······60

2. 산수 법칙 ····· 60
(1) 산수 법칙의 본성 ····· 60
(2) 산수 ····· 63
(3) 칸트의 견해 반박 ····· 65
(4) 밀의 견해 반박 ····· 67
(5) 귀납 ····· 72
(6) 기학학 ····· 78
(7) 산수와 기하학의 차이 ····· 80
3. 수 ····· 82
(1) 외부 사물의 속성 ····· 83
(2) 주관적 창조물 ····· 88
(3) 집합 ····· 93
(4) 하나 ····· 94
(5) 동일성 ····· 99
(6) 다양성 ····· 102
(7) 개념 ····· 111
(8) 존재와 수의 유사성 ····· 119
(9) 단위의 동일성과 구별가능성의 조화 ····· 121
4. 대상 ····· 122
(1) 자립적 대상 ····· 126
(2) 수 동일성 ····· 131
(3) 흄의 제안 ····· 135
(4) 평행 ····· 136
(5) 대치가능성 ····· 138
(6) 방향 개념 ····· 140
(7) 개념의 외연 ····· 142
(8) 관계 개념 ····· 144
(9) 수의 정의 ····· 148
(10) 0의 정의 ····· 151
(11) 1과 다음수의 정의 ····· 154
(12) 유한수와 무한수 ····· 161

Ⅰ. 텍스트 내용 분석

1. 프레게의 생애



프레게(Gottlbo Frege, 1848~1925)는 독일의 수학자이며 논리학자이다. 예나 대학교의 수학 교수였다. 비교적 최근에 와서 본격적으로 평가되기 시작했으나 분석철학적 전통의 초기 단계에서부터 깊은 영향을 끼친 사람이다. 그리고 현대 수리 논리학의 창시자로 인정받고 있다. 러셀(Bertrand Russell)은 『수학의 원리』(Principles Of Mathematics)에서 프레게가 자신이나 비트겐슈타인(Ludwig Wittgenstein)에 큰 영향을 끼쳤다고 언급하였다. 그리고 무니츠(Munitz)는 『현대분석철학』(Contemporary Analytic Philosophy)에서 "한 철학자가 분석철학적인 전통에 속해 있는가 안 속해 있는가를 판가름하는 것은 그가 프레게의 사상에 얼마나 가깝게 접근해 있느냐에 달려 있다" 고 말한다. 한편 닐(Kneal & Kneal)은 『논리학의 발전』에서 논리학의 역사를 프레게 이전과 프레게 이후로 구분하여 서술하고 있다.

프레게의 생애를 정리해 보면 다음과 같다.

- 1848년 11월 8일, 비스마르(Wismar, Mecklenburg-Schwerin))에서 태어남. 아버지는 Alexander Frege이고 어머니는 Auguste Bialloblotzky. 아버지는 비스마르에 있는 여자고등학교 교장이었다.
- 1869년, 예나 대학 입학, 4학기를 다녔다.
- 1871년, 괴팅겐 대학 입학, 5학기를 더 다니면서 철학과 물리학 및 수학을 공부하였다.
- 1873년, 12월 괴팅겐 대학에서 수학(기하학)으로 박사학위 수여
- 1874년, 예나 대학에서 수학의 교수자격취득. 사강사 지원을 위해 "양개념의 확장에 기반을 둔 계산 방법" (CP, pp.56-92)이란 논

문을 제출.

- 1874년, 예나 대학의 사강사(Privatdozent)가 됨
- 1879년, 예나 대학의 Professor Extraordinarius가 됨
- 1896년, 예나 대학의 ordentlicher Honorarprofessor가 됨
- 1917년, 예나 대학 은퇴
- 1925년 7월 26일, Bad Kleinen(지금의 Mecklenburg-Vorpommern)에서 죽음

2. 프레게 저술 목록

Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege., trans. and ed. P. Geach and M. Black (Oxford: Blackwell, 1952, 1960).

The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number., trans. J. L. Austin (Evanston, Illinois: Northwestern University Press, 1980).

The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System, Volume I., trans. and ed. M. Furth (Los Angeles: University of California Press, 1964).

Conceptual Notation and Related Articles., trans. and ed. T. W. Bynum (Oxford: Clarendon Press, 1972).

Gottlob Frege: Posthumous Writings., trans. Long and White, ed. Hermes, Kambartel, and Kaulbach (Oxford: Basil Blackwell, 1979).

Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence., trans. H. Kaal, ed. B. McGuinness (Chicago: University of Chicago Press, 1980).

Gottlob Frege: Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy., trans. Black, Dudman, Geach, Kaal, Kluge, McGuinness, and Stoothoff, ed. B. McGuinness (Oxford:

Basil Blackwell, 1984).

On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic, trans. Eike-Henner W. Kluge. (New Haven: Yale University Press, 1971.) Reproduced as Photocopy by (Ann Arbor, Mich.: U.M.I. Out-of-Print Books on Demand, 1990.)

The Frege Reader., ed. Michael Beaney (Oxford: Blackwell, 1997).

3. 프레게 저작의 연대순 정리

*On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane.*Doctoral dissertation in the Philosophical Faculty of Gttingen (Jena: A. Neuenhahn, 1873). Reprinted in Collected Papers.

Methods of Calculation based on an Extension of the Concept of Quantity. Dissertation for the Venia docendi in the Philosophical Faculty of Jena (Jena: Friedrich Rommann, 1874). Reprinted in Collected Papers.

Review of H. Seeger, The Elements of Arithmetic. Jenaer Literaturzeitung, I (1874), 722. Reprinted in Collected Papers.

Review of A. v. Gall and E. Winter, The Analytical Geometry of Point and Line and its Application to Problems. Jenaer Literaturzeitung, Ⅳ (1877), 133-134. Reprinted in Collected Papers.

Review of J. Thomae, Collection of Formulae used in the Application of Elliptical and Rosenhain Functions. Jenaer Literaturzeitung, Ⅳ (1877), 472. Reprinted in Collected Papers.

Lecture on a Way of Conceiving the Shape of a Triangle as a Complex Quantity. Sitzungberichte der Jenaischen

Gesellschaft fr Medizin und Naturwissenschaft 12 (1878), Supplement, XVIII. Reprinted in Collected Papers.

Conceptual Notation, a Formula language of pure Thought modelled upon the Formula language of Arithmetic. (Halle: L. Nebert, 1879). Reprinted in Conceptual Notation and related articles.

Applications of the Conceptual Notation. Jenaische Zeitschrift fr Naturwissenschaft, XIII (1879), Supplement II, 29-33. Reprinted in Conceptual Notation and related articles.

Logic. (Unpublished, 1879-1891). Published in Posthumous Writings.

Review of Hoppe, Textbook of Analytic Geometry I. Deutsche Literaturzeitung, 1 (1880), columns 210-211. Reprinted in Collected Papers.

Boole's logical Calculus and the Concept-script. (Unpublished, 1880/81). Published in Posthumous Writings.

Ueber den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin. Jenaische Zeitschrift fr Naturwissenschaft, XV (1882) Supplement, 29-32. Reproduktion in Begriffsschrift (1964). [Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 15. Juli 1881 der Jenaischen Gesellschaft fr Medizin und Naturwissenschaft.] (Not translated into English?)

Boole's logical Formula-language and my Concept-script. (Unpublished, 1882). Published in Posthumous Writings.

On the scientific Justification of a Conceptual Notation. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, LXXXI (1882), 48-56. Reprinted in Conceptual Notation and related articles.

On the Aim of the Conceptual Notation. Jenaische Zeitschrift fr Naturwissenschaft, XVI (1883), Supplement, 1-10. Reprinted

in Conceptual Notation and related articles.
Dialogue with Punjer on Existence. (Unpublished, Before 1884). Published in Posthumous Writings.
The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number. (Breslau: W. Koebner, 1884). Available in paperback from Northwestern University Press.
Lecture on the Geometry of Pairs of Points in the Plane. Sitzungberichte der Jenaischen Gesellschaft fr Medizin und Naturwissenschaft, XVII (1884), Supplement, 98-102. Reprinted in Collected Papers.
Review of H. Cohen, The Principle of the Method of Infinitesimals and its History. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, LXXXVII (1885), 324-329. Reprinted in Collected Papers.
Reply to Cantor's Review of Foundations of Arithmetic. Deutsche Literaturzeitung, VI (1885), column 1030. Reprinted in Collected Papers.
On Formal Theories of Arithmetic. Sitzungberichte der Jenaischen Gesellschaft fr Medizin und Naturwissenschaft, XIX (1886), Supplement 2, 94-104. Reprinted in Collected Papers.
[Draft towards a Review of Cantor's Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten]. (Unpublished, 1890-1892). Published in Posthumous Writings.
On the Law of Inertia. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, XCVIII (1891), 145-161. Reprinted in Collected Papers.
Function and Concept. (Jena: H. Pohle, 1891). Reprinted in Geach and Black.
On the Concept of Number. (Unpublished, 1891/92). Published in Posthumous Writings.

On Sense and Reference. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, C (1892), 25-50. Reprinted in Geach and Black.

Comments on Sense and Reference. (Unpublished, 1892-1895). Published in Posthumous Writings.

Review of Georg Cantor, Contributions to the Theory of the Transfinite: Collected Articles from Zeitschrift fr Philosophie und Philosophische Kritik. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, C (1892), 269-272. Reprinted in Collected Papers.

Draft of On Concept and Object. (Unpublished, 1892). Published in Posthumous Writings.

On Concept and Object. Vierteljahrsschrift fr wissenschaftliche Philosophie, XVI (1892), 192-205. Reprinted in Geach and Black.

The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System. Volume I. (Jena: H. Pohle, 1893). Reprinted in Furth.

Review of E. G. Husserl, Philosophy of Arithmetic I. Zeitschrift fr Philosophie und philosophische Kritik, CIII (1894) 313-332. Reprinted in Collected Papers.

A Critical Elucidation of some Points in E. Schrder, Lectures on the Algebra of Logic. Archiv fr systematische Philosophie, I (1895), 433-456. Reprinted in Geach and Black.

Whole Numbers. Revue de Metaphysique et de Morale, III (1895) 73-78. Reprinted in Collected Papers.

Logic. (Unpublished, 1897). Published in Posthumous Writings.

On Mr. Peano's Conceptual Notation and My Own. Berichte ber die Verhandlungen der Kniglich Schsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, XLVIII (1897), 361-378. Reprinted in Collected Papers.

The Argument for my stricter Canons of Definition. (Unpublished, 1897/98 or shortly afterwards). Published in Posthumous Writings.

On Mr. H. Schubert's Numbers. (Jena: H. Pohle, 1899). Reprinted in Collected Papers.

Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System. Volume II. (Jena: H. Pohle, 1903). Portions Reprinted in Geach and Black.

Logical Defects in Mathematics. (Unpublished, 1898/99 or later, probably not after 1903). Published in Posthumous Writings.

On Euclidean Geometry. (Unpublished, 1899-1906?). Published in Posthumous Writings.

On the Foundations of Geometry: First Series. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XII (1903), 319-324. Reprinted in Collected Papers.

On the Foundations of Geometry: Second Series. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XII (1903), 368-375. Reprinted in Collected Papers.

[Frege's Notes on Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie']. (Unpublished, After 1903). Published in Posthumous Writings.

What is a Function? in: Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904. (Leipzig: J. A. Barth, 1904), 656-666. Reprinted in Geach and Black.

[17 Key Sentences on Logic]. (Unpublished, 1906 or earlier). Published in Posthumous Writings.

ber die Grundlagen der Geometrie. I. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XV (1906) 293-309. Neudruck in Kleine Schriften (1967). Reprinted in On the Foundations of

Geometry and Formal Theories of Arithmetic

ber die Grundlagen der Geometrie. (Fortsetzung.) Ⅱ. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV (1906) 377-403. Neudruck in Kleine Schriften (1967). Reprinted in On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic

ber die Grundlagen der Geometrie. (Schlu.) Ⅲ. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV (1906) 423-430. Neudruck in Kleine Schriften (1967). Reprinted in On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic

On Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre. (Unpublished, 1906). Published in Posthumous Writings.

Reply to Mr. Thomae's Holiday Causerie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XV (1906), 586-590. Reprinted in Collected Papers.

What may I regard as the Result of my Work? (Unpublished, Aug. 1906). Published in Posthumous Writings.

Introduction to Logic. (Unpublished, August 1906). Published in Posthumous Writings.

A brief Survey of my logical Doctrines. (Unpublished, 1906). Published in Posthumous Writings.

Renewed Proof of the Impossibility of Mr. Thomae's Formal Arithmetic. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XVII (1908), 52-55. Reprinted in Collected Papers.

Concluding Remarks. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XVII (1908), 56. Reprinted in Collected Papers.

[Footnotes to] Philip E. B. Jourdain: The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of

*Mathematics: Gottlob Frege.*The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, XLIII (1912), 237-269. The remarks are translated into English by P. Jourdain. Reprinted in Philosophical and Mathematical Correspondence.

Logic in Mathematics. (Unpublished, Spring 1914). Published in Posthumous Writings.

My basic logical Insights. (Unpublished, 1915). Published in Posthumous Writings.

The Thought: A Logical Investigation. Beitrge zur Philosophie des deutschen Idealismus, I (1918), 58-77. Reprinted in Collected Papers.

Negation. A Logical Investigation. Beitrge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 1 (1918), 143-157. Reprinted in Geach and Black.

[Notes for Ludwig Darmstaedter]. (Unpublished, July 1919). Published in Posthumous Writings.

Logical Investigations, Part Ⅲ: Compound Thoughts. Beitrge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 111 (1923), 36-51. Reprinted in Collected Papers.

Logical Generality. (Unpublished, Not before 1923). Published in Posthumous Writings.

[Diary Entries on the Concept of Numbers]. (Unpublished, 23.3.1924-25.3.1924). Published in Posthumous Writings.

Diary: Written by Professor Dr. Gottlob Frege in the Time from 10 March to 9 April 1924. Inquiry, 39, (1996) 303-42.

Number. (Unpublished, September 1924). Published in Posthumous Writings.

Sources of Knowledge of Mathematics and the mathematical natural Sciences. (Unpublished, 1924/5). Published in Posthumous

Writings.
Numbers and Arithmetic. (Unpublished, 1924/25). Published in Posthumous Writings.
A new Attempt at a Foundation for Arithmetic. (Unpublished, 1924/25). Published in Posthumous Writings.

4. 국내의 프레게 연구 논문

권병진,『프레게의 플라톤주의와 논리주의에 대한 재고찰』, 서울대학교, 2002.
______, 프레게의 플라톤주의와 수 동일성 기준,『철학』69, 2001.
______, 프레게의 진리개념: 문장의 지시체가 왜 진리치인가?,『철학』59, 1999.
박준용, 쥴리어스 시이저 반론 : 프레게는 왜 맥락적 추상화 방법을 받아들이지 않았는가?『철학연구』, 57, 2002,.
______, 고차 개념으로서 수,『논리연구』5, 2001.
______,『프레게의 논리주의 연구』, 고려대학교, 1999
______, 프레게의 치역개념:『산수의 근본 법칙』10절의 분석,『철학연구』42, 1998.
______, 프레게의 치역개념과 변환 논증,『한국철학자 연합학술대회 대회보』, 1996
______, 프레게의 논리주의와 수의 동일성 기준,『논리와 진리』, 철학과 현실사(1996)
심철호,『프레게의 뜻과 지시 이론에 관하여』, 서울대학교, 1998.
______, 프레게의 퍼즐,『철학논구』24. 1996.
______, 프레게의 수 개념과 논리주의,『철학논구』18, 1990.
______,『산수의 기초』의 세 원리에 대한 해석,『제9회 한국철학자대회 대회보(별쇄본)』, 1996.
최원배, 프레게와 논리법칙,『철학연구』, 59, 2002.
______, 프레게의 수 언명 분석과 상대성 논증,『철학』62, 2000.

______, 프레게와 사상의 분석,『철학연구』43, 1998.
______, 프레게 철학에있어서 개념, 대상 그리고 함수,『철학』57, 1998.
______, 프레게 맥락원리의 한 해석,『논리연구』1, 1997.
______, 프레게의 객관성 개념, 논리와 진리,『철학과현실사』, 1996.

5. 프레게 대표 저작들에 대한 해설

『개념 표기법』(Begriffsschrift)에서 프레게가 목표로 삼는 것은 19세기 중엽에 수학자의 입장에서 가장 큰 문제는 수학의 기초를 경험주의적으로 해석하려는 경향이었다. 즉 개연론적으로 수학을 보는 것이다. 대부분의 수학자들은 이에 부정적으로 생각한다.

산술의 여러 가지 증명에 대한 엄정한 논리적 기초를 제공하겠다는 것이『개념 표기법』에서의 프레게의 목표였다. 그는 두 가지 방식으로 전개해 나간다.

첫째, 수학적인 체계의 기본적인 개념들을 전면적으로 재검토한다. 수학의 언어를 아주 엄격한 개념적인 기호로 바꿔 놓는 것이 그 방법이다. 그렇게 함으로써 우리 일상 언어에 잠재해 있는 모든 다의성, 애매성을 제거한다. 이렇게 수학을 기호화하는 과정에서 수리 논리학이 체계화된다.

둘째, 이러한 과제는 그의 본래적인 목적인, 산술의 증명에 대한 엄정한 논리적 기반 정립에 도움이 되며, 그 구체적 방법은 논리주의(logicism)가 수학과 논리학의 관계를 보여주는 올바른 방법이라는 것을 제공해 준다. 논리주의에 의하면 수학의 기본적인 개념들을 모두 논리적인 개념들로 환원시킬 수 있다. 그러면 수학의 증명에 대해 논리적인 기초를 제공하게 되는 것이다. 논리주의는 환원적인 프로젝트이다. 수학의 증명(개념)을 모두 논리학의 증명(개념)으로 환원시킨다. 예를 들어서 2+2=4라는 수식을 1+1+1+1=1+1+1+1와 같이 동일성의 개념으로 환원한다. 19세기 후반 이후 50년간 논리주의의 타당성을 증명하려는 노력이 계속된다. 그러나 결국은 완전무결하게 증명될 수 없다고 밝혀진다. 페아노(Peano)는 산술 체계를 단지 세 개의 무정의 술어(0, 수, 다음수)와 다

섯 개의 규칙으로 완전하게 연역을해낸다. 그 방법이 세련되면서 이런 작업을 프레게 자신도 반복해서 하고 러셀과 화이트헤드의 『프리키피아 마테마티카』(Principia Mathematica)에서 본격적으로 이루어진다.

(1) 진리 함수적 논리학

프레게의 논리적인 도구는 진리 함수적 논리학(truth-function logic)이다. 논리학을 기호화하여 계산 방식을 체계화함으로써 계산 방식에서의 착오의 가능성을 줄이며 계산 가능한 영역을 확대시킨다.

진리 함수적 논리학의 기본적인 구성 요소는 다음과 같다.

- p, q, r, (단순 문장)
- a, b, c, (대상)
- A, B, C, (속성)
- 논리적 연결사(logical connective): ~ & V ⊃
- 양화 기호
  (∀x) Fx 모든 x는 F다.
  (∃x) Fx 어떤 x는 F다.
- 변형 규칙(transformation rules)

아무리 복잡한 언어적인 표현도위의 도구로써 표현될 수 있다. 그리고 복합 문장도 진리 조건이 분명히 주어질 수 있다.

프레게가 단순히 논리학자에 머물지 않고 분석철학의 전통에 결정적인 영향을 끼치게 된 이유는 논리적인 도구를 수학 체계를 구성하는 데 사용하는 데서 그치지 않고, 과학, 철학을 포함한 자연 언어에도 논리학의 엄정성이 결여되어 있을 때는 논리학을 도구로써 재구성해야 된다고 생각했기 때문이다. 그럼으로써 진리 조건을 분명히 한다. 즉 우리언어에서의 모든 채색(Farbung)을 없앤다. 그렇게 함으로써 우리 언어를 일의적이고 의미가 명료한 진술의 체계로 만든다. 그럼으로써 우리 언어의 의미의 진리 조건을 분명히 한다.

프레게는 우리 언어를 논리학을 토대로 개혁하고 재구성하는 데 있어

그 구체적인 내용을 보여준 것이다. 그 보여주는 과정에서 철학의 많은 문제들이 우리 언어의 구조를 잘못 이해 한데 비롯됐다는 사실을 밝힌다. 이런 과정에서 언어 철학적인 기반을 형성한다.

프레게의 철학적인 목표는 수학의 여러 가지 증명에 대해 엄정한 논리적인 기초를 제공하려는 것이었다. 그 것은 다음의 두 가지 길을 통해서이다.

첫째, 새로운 기호(개념 기호)를 창안해서 수학 체계의 기본적인 관념을 그 새로운 기호로써 표현한다. 그럼으로써 일상 언어의 내포된 다의성, 애매성이 제거될 수 있다. 즉 논리학의 범위를 확대함으로써 논리 체계 속에서 수학의 기본적 관념을 표현하도록 한다.

둘째, 수학의 기본적 개념들은 소수의 논리적 개념으로 환원된다. 곧 논리주의이다.

그의 일련의 작업 결과 그가 현대 철학에 기여한 점은 첫째, 기호(수리) 논리학을 현대적인 형태로 발전시키고 체계화했으며, 둘째, 분석철학의 전통의 전개에 있어 핵심적 역할을 하는 언어철학을 발전시켰다는 점이다.

(2) 언어철학

프레게가 논리주의를 확립시키기 위해 진행시킨 언어철학의 작업에 대해 알아보자. 프레게는『산수의 기초』에서 이런 논리 철학적 작업에서 존중해야 할 세 가지 원칙을 말한다.

1. 논리적인 것으로부터 심리적인 것을 분리해야 한다. 객관적인 것으로부터 주관적인 것을 분리해야 한다. (이것은 19세기 중엽에서 말엽 무렵 성행하던 심리주의(psycholosism)를 배격한 원칙이다.)
2. 언어적인 표현의 의미는 반드시 그 언어적인 표현이 사용된 문장의 맥락 속에서 물어야 한다. 고립된 상황에서 그 언어의 의미를 물어서는 안 된다.
3. 개념(Begriff)과 대상(Gegenstand)을 철저히 구분해야 한다.

이 세 가지 원칙은 서로 밀접히 연관되어 있다. 구체적으로 논의해 보자.

1) 심리주의 배격

프레게의 일차적인 관심은 수학의 논리적인 정초이다. 그러면 이 첫 번째 원칙은 의미 또는 개념으로서의 수학적 대상(수 등)들의 성격은 무엇인가? 수 같은 것들은 나무, 새… 등과는 다른 의미에서의 존재론적 위치를 가지고 있을 것이다. 전통적인 두 견해는 다음과 같다.

① 형이상학적으로 실체화시키는 입장
② 심리주의 적인 대답: 마음속의 관념과 연관하여 수를 이해한다

프레게는 수학적인 대상의 성격에 대한 이러한 두 가지 전통적인 견해를 모두 배격한다. 형이상학적 입장이나 심리주의적 입장이나 모두가 공통된 잘못된 전제를 가지고 있기 때문이다. 모든 객관적인 것은 공간 속에 존재해야 한다. 공간 속에 존재하지 않으면 주관적이다. 그런데 ①에서는 공간을 플라톤적인 이데아의 세계로 생각하고 ②에서는 수학적인 대상이 공간에 있지 않고 마음 속에 있으므로 주관적이라 한다.

수학적인 대상의 성격은 두 가지 특성을 갖는다.

- 객관성
- 그 객관성은 비감각적인 객관성(주관에서 오는 객관성은 아니니다)

그럼 이 의미로서의 수학적 대상이 갖는 객관성을 어떤 방식으로 설명해야 될 것인가? 의미의 객관성은 언어사용과 밀접히 관련되어 있다. 하나의 표현의 의미를 결정한다는 것은 그 낱말이 한 부분을 이루고 있는 문장의 참, 거짓을 결정하는 과정에서(진리 조건을 결정하는 과정에서) 그 낱말이 어떤 역할을 하느냐 그 것을 밝힘으로써 그 표현의 의미가 밝혀진다. (의미의 객관성을 언어사용과 관련시켜 정립하려는 점을 우선 주목하자.) 한 낱말이 그 것이 속해 있는 문장 속에서 어떤 논리적인 역할

을 하느냐를 결정하기 위해서는 이 낱말과 문장이 갖고 있는 애매성과 다의성이 제거되어야 한다. 그 방법은 무엇인가?

일상 언어를 논리적으로 개혁하고 재구성함으로써 제거할 수 있다. 따라서 낱말의 의미를 결정하는 데의 선행 조건은 일상 언어가 논리적으로 개혁되고 재구성되어야 하는 것이다. 이 것은 의미에 관한 철학적인 탐구를 심리의 영역에서 논리적인 언어의 영역으로 옮겨 놓는 것이다.

언어의 사용은 상당히 객관적이다. 언어 사용자가 언어사용의 규칙과 언어 표현의 의미를 마음대로 바꿀 수 없다. 즉 독립적이고 객관성이 있다. 이런 언어사용의 객관성을 토대로 의미의 객관성을 밝히겠다는 것이다. 이 점이 두 번째 원칙과 연결된다.

2) 맥락 원리

언어사용의 기본적 목표는 무엇인가? 대부분의 경우 일정한 주장을 하기 위해서다. 달리 표현하면 이 것이 참이라는 주장을 하는 것이다. 그렇다면 무엇이 참이다라는 주장을 하기 위해서 내가 말을 한다는 것은 언어사용의 기본적인 단위는 문장이 될 수밖에 없다는 것을 뜻한다. 단어만 내뱉어서는 주장이 안 된다.

그래서 언어사용의 기본적 목표가 참, 거짓이 판명되기 위한 주장을 하는 것이고, 언어사용의 기본적 단위가 문장이라면, 문장을 구성하는 낱말의 뜻을 언어사용의 기본적 단위인 문장과 독립시켜 밝히는 것은 무리이다. 문장의 맥락 안에서 그 의미가 밝혀져야 한다.

이것은 그 낱말의 의미는 그 문장의 참, 거짓을 밝히는 과정에서 어떤 역할을 하느냐에 의해 결정된다는 뜻이다. 보통 진리조건적 의미론의 최초로 체계화한 사람으로 프레게를 생각하는 이유가 여기에 있다.

3) 개념과 대상의 구분

『산수의 기초』가 출판된 후 9년 동안 프레게는 논리학에서 산수를 이끌어내는 논리주의 계획에 관한 작업을 주로 해왔다. 그러나 이 시기에 그가 출판한 것은 특히 언어 철학의 문제와 관련된 것이다. 1891년부터

1892년 사이 세 편의 논문 “함수와 개념”, “뜻과 지시체에 관하여”, “개념과 대상에 관하여”가 나왔다. 이들 권위 있는 논문 각각에는 철학적으로 아주 중요한 사상이 놀랄 만큼 간결하고 명쾌하게 제시되고 있다. 이 논문들은 분명히 프레게가 논리주의 계획에 보조적인 것으로 여겼던 것들이지만, 지금 와서는 현대 의미 이론의 토대를 이루는 고전적 논문으로 간주된다.

<u>소크라테스</u>는 <u>철학자</u>다. : 문장
고유명사(Eigenname) 개념명사(Begriffswort, 개념을 나타내는 명사)

전통적으로 고유명사의 경우 그 것이 지시하는 대상(Gegenstand)이 분명하다. 그러나 개념명사가 지시하는 것은 무엇인가? 이에 대해 전통적으로 두 가지 대답이 있어 왔다.

① 형이상학적 실재론: 플라톤적 이데아, 에이도스(Eidos)의 대상(Gegenstand)이 있다.
② 심리주의적 입장: 우리 마음속에 있는 관념이다. (Idea, Concept)

고유명사가 지시하는 대상이 있는 것은 분명하다. 그러나 개념 명사가 지시하는 것에 해당하는 것은 철학적인 이론을 내세우기 전에는 불분명하다.

프레게는, 개념 명사도 고유명사처럼 일정한 대상을 지시한다고 생각하므로 ①과 ②와 같이 쓸데없는 노력을 하게 됐다고 말한다. 그러나 그런 식의 접근을 할 필요가 없다. 개념 명사와 고유명사의 의미를 그 것의 지시 관계로 볼 때 문제가 생긴다.

그 낱말의 ‘지시적인 기능’만으로는 그 낱말의 참이냐 거짓이냐를 결정하는 과정이 굉장히 복잡해진다. ‘소크라테스’가 지시하는 대상과 ‘철학자’가 지시하는 대상 사이의 관계를 어떻게 맺어 주는가? 그 방법이 없다. 문장의 참, 거짓을 결정할 수 있는 별도의 방법을 도입할 수밖에 없다.

또 개념 명사가 지시하는 것의 형이상학적성격이 무엇인가를 밝히는 이론이 나와야 한다. 그런데 이 이론간의 우열을 가리기는 실제로 불분명하다. 사실상 고유명사가 지시하는 대상과 개념 명사가 지시하는 지시체 사이의 구분이 분명하지 않으므로 많은 철학적 문제가 생겨났다.

개념 명사도 고유명사처럼 대상이 있다는 생각은 이 문장에 대한 논리적인 분석이 미흡하기 때문이다. 이 문장의 심층적인 논리적 구조를 밝히면 그 것을 피할 수 있다.

프레게는 철학에 있어서 개념(Begriff)라는 개념을 수학에 있어서의 함수 개념과의 유사점에 착안하여 생각한다. 함수를 보자.

$(2\times x) + 1$: 함수

x : 자변수 자리(Argument-Stelle) 여기에 특정 수가 들어가면

$x = 1 \rightarrow (2\times 1) + 1 = 3$

$x = 2 \rightarrow (2\times 2) + 1 = 5$

$x = 3 \rightarrow (2\times 3) + 1 = 7$

수학에 있어서 함수는 일정한 일련의 수학적 표현들이 공통적으로 가지고 있는 일종의 틀이다. 함수식은 그 값이 알려지지 않은 변수로 구성되어 있다. 그 함수값은 어떤 특정수로 고정되어 있지 않다. 그래서 함수는 ‘불완전하다’(unvollstandig). 또는 ‘차 있지 않다’(ungesattigt). 반면에 자변수들은 함수식과는 달리 항상 특정 수로 표현된다. 자변수 그 자체는 그러므로 완전하다(vollstandig). 즉 차있다(gesattigt).

수학에 있어서 함수식과 자변수는 이러한 관계에 있다. 우리의 관심의 초점이 되는 대상과 개념 사이의 관계는 수학에 있어서 함수식과 자변수 사이의 관계와 같다. 개념을 나타내는 언어적인 표현은 불완전하며 차 있지 않으나, 반면에 고유명사(대상)를 나타내는 언어적인 표현은 완전한, 차 있는 표현이다.

① ‘소크라테스’는 철학자이다.

이 문장의 논리적인 구조는

② _________는 철학자이다.

이다.

개념은 일정한 형이상학적 실체를 지시하는 독립된 언어적인 표현이 아니다. 개념은 수학에 있어서의 함수와 마찬가지로 불완전한, 채워지지 않은 개념이다. ②에 대상을 지시하는 완전하고 채워진 이름이 자변수 자리에 채워짐으로써 하나의 완전한 문장이 된다. 자변수 자리에 '칸트', '소크라테스' 등을 집어넣으면 그 문장은 참이 되고, '이광수', '훼밍웨이'를 집어넣으면 거짓이 된다. 그러므로 이 문장의 참, 거짓을 결정하는 것은 이 이름들이 어떤 논리적인 역할을 하느냐에 따라 달려 있다.

개념과 대상은 이렇게 논리적인성격이 다르다. 언어적인 표현이므로 이들이 문장 속에서 수행하는 논리적인 역할도 다를 수밖에 없다. 그러므로 문장 안에서의 고유명사와 개념 명사의 역할은 전적으로 다르다.

고유명사: 문장의 술어부에 위치할 수 없다.
개념명사: 문장의 주어부에 위치할 수 없다.

예를 들어,

소크라테스는 철학자다.

개념명사의 논리적인 구조는 함수적인 구조이다. 곧,

_________는 철학자다.

그런데,

철학자는 현명하다.

의 경우

______는 현명하다.

와 같은 구조가 된다. 개념 명사는 주어의 위치에 갈 수 없다고 했는데 이 경우 ‘철학자’는 주어의 위치에 가 있다. 그러므로 ‘철학자’는 고유명사가 아닌가? 이런 식의 반론이 있을 수 있다.

프레게는 이런 반론이야말로 자연 언어의 심층적인 구조와 논리적인 구조의 괴리를 보여주는 단적인 예라고 한다. 문장에 대한 논리적인 분석의 미흡함을 드러내 주는 것이다. 이 논리적인 분석의 미흡함 때문에 철학적인 혼란과 오류가 생겨난다.

여기에서 수학에 있어서의 일계 함수(first-level function)와 이계 함수(second-level function)의 개념을 도입한다.

일계함수: 자변수의 자리에특정 수가 들어가는 함수
이계함수: 자변수의 자리에 함수식이 들어가는 함수

$(2\times x) + 1$
x에 1, 2, 3, 의 확정된 수가 들어가면 일계 함수
x의 자리에 함수가 들어가면 이계 함수. 예를 들어, $(2\times(y-2)) + 1$

위 개념을 그대로 철학적인 개념에 적용한다.

철학자는 현명하다.

에서 ‘철학자’는 고유명사가 아니라 함수식이다. 이것을 함수식으로 표현해 보면,

(_____는 철학자다)는 현명하다.

그런데 이 것은 자연언어에서 무의미한 표현이다. 그러므로 정확한 표

현이 되려면 새로운 진리 함수 논리학에서 양화사가 중요한 역할을 한다.

철학자는 현명하다: 전칭명제 A (All is P)

“(_____는 철학자다)는 현명하다”를 양화사로 해석하면,

“무엇이든지 간에 그것이 만약 철학자라면, 그것은 현명하다”

식의 표현이 된다.

이것을 다시 표현하면,

모든 x에 대하여, x가 철학자이면 x는 현명하다.

A 명제의 내용을 이런 식으로 표현할 수 있는 것이다. ‘철학자’는 여기에서 주어 부분에 쓰이지 않는다. 위 조건문에서 전건의 ‘철학자’는 술어부에 가 있다.

위 명제는 새로운 진리 함수 논리학의 기호로 표현해 보면 다음과 같다.

$(\forall x)(Px \supset Wx)$

이런 식으로 표현하면 철학자라는 개념 명사가 문장의 주어부분에 쓰이지 않는다. “철학자는 현명하다”라는 자연언어에서는 ‘철학자’라는 개념 명사가 주어부에 위치하여 ‘철학자’가 개념 명사도 되고 고유 명사도 되는 것으로 오해되기 쉬우나, 이것은 자연 언어의 논리적인 구조가 애매하기 때문이다. 이 자연 언어의 논리적인 구조를 제대로 분석하면 ‘철학자’라는 개념 명사는 술어 부분에 쓰일 수밖에 없다. 이계 함수가 자변수 자리에 함수를 갖는 경우인 것처럼 이계 개념(second-order concept)은 개념의 자변수 자리에 또 하나의 개념(일계 개념, 곧 대상이 아닌)이 들어가는 개념이다.

일계 개념과 이계 개념을 구분함으로써 프레게는 대상을 지시하는 언어적인 표현으로서의 고유명사는 문장의 주어부에만 쓰일 수 있고 개념명사는 문장의 술어 부에만 쓰일 수 있다는 당초의 주장을 보다 강화시켰다.

고유명사가 지시하는 대상의 성격을 어떻게 보아야 하는가? 프레게는 고유명사라는 언어적인 표현이 문장 속에서 보이는 논리적인 기능을 통해 그 것을 밝히려고 한다. 문장 속에서 주어의 역할을 하는 표현이면 그 것이 어떤 개체를 지시하는 표현이든 아니든 그 것은 전부 대상(Gegenstand)이 된다. 프레게에 있어서는 페가수스, 소크라테스, 크산티페, 수 등이 모두 대상이다. 그러면 그 대상이 실제로 있어야 하는가? 있어야 한다면 그는 실재론자이고, 아니라고 한다면 그것은 우리가 붙여 놓은 이름에 불과하다는 것이고, 그는 곧 유명론자일 것이다. 그러나 프레게는 이 두 가지를 논의의 대상으로 삼지 않는다. 관심 밖의 일이다.

문장의 진리 조건이 결정되는 과정에서 그 문장이 어떤 논리적 기능을 하느냐에 따라 언어적인 표현의 논리적 성격이 규정된다. 그러므로 동어반복이나 모순 명제는 어떤 경우에도 참 또는 거짓이므로 참, 거짓을 구분할 필요가 없다. 따라서 프레게를 따르자면 그것들은 우리의 자연 언어의 한 부분이 아니다.

다음 두 가지를 구분해 볼 수 있다.

- 존재(being). 보기: 페가수스가 있다.
- 실재(existence) 시간과공간 속에서 존재할 때. 보기: 나무가 있다.

그러나 이런 구분도 문제가 있다. 시간과 공간을 점하면서 존재하지 않는 존재란 도대체 무엇인가? 이런 애매성을 탈피해보고자 하는 것이 프레게의 생각이다.

“페가수스는 하늘을 나는 말이다”라는 의미 있는 언어적 표현에서, 논리적인 기능이 제대로 된 언어적인 표현의 객관적인 상대자의 존재론적 성격에 구애받지 말고, 그 표현이 의미 있는 것을 알고 의미 있는 언어적인 표현의 주어부에 있는 고유명사가 일정한 논리적인 기능을 하면 그 표현이 지시하는 객관적인 상대자(objective correlate)를 있는 것으로 상

정해야 한다. 이때 객관적인 상대자가 무엇이냐 하는 논의는 비생산적이다. 의미의 객관성은 언어사용의 틀 속에서 이미 결정되는 것이다. 의미의 객관성은 객관적인 상대자의 있고 없고에 달려 있지 않다. 의미의 객관성은 언어 사용의 객관성에 기인하는 것이지 플라톤의 이데아간은 초월적인 존재자에 의존하지 않는다.

“페가수스는 하늘을 나는 말이다”의 경우, ‘페가수스’라는 고유명사에 부여된 문장 전체의 참, 거짓을 결정한다는 논리적인 역할을 제대로 할 수 없다. 사실상 ‘페가수스’라는 고유명사는 이 문장의 참, 거짓을 결정 못하는 기능이다. 그러나 논리적으로 진리조건을 제시할 수는 있다. 그 참, 거짓을 다른 어떤 방법으로 결정할 것이다. 이런 의미에서 ‘페가수스’는 최소한 고유명사이다. 위 문장의 의미는, 적어도 사실적인 참, 거짓의 판단(즉 실제 대상과의 일치 여부 등)과는 상관없다.

고유명사와 개념 명사의 구분은 지시하는 대상이 있고 없고에 달려 있지 않다. 문장 속의 논리적인 기능에 달려 있다. 프레게가 유명론자인가, 실재론자인가 하는 해석은 프레게 해석에 있어서 그리 중요한 문제가 아니다. 적어도 프레게의 의도는, 개념이나 대상 같은 문제는 존재론과 인식론과 분리해서 생각해야 한다는 것이다.

$$(\forall x)(Px \supset Fx)$$

이 함수식을 만족시키는 x는 있을 수도 있고 없을 수도 있다. x의 존재의 문제는 프레게에 있어서 언급이 없다.

여기서 잠시 프레게와 러셀의 논점을 비교해 보자. 프레게에서는 한 문장에서 고유명사의 역할을 하는 것이면 모두 고유명사이다. 예를 들어,

소크라테스는 철학자이다.
크산티페의 남편은 철학자이다.
플라톤의 스승은 철학자이다.

에서 ‘소크라테스’는 고유명사이다. 그러면 ‘크산티페의 남편’, ‘플라톤의 스승’은 고유명사인가? 프레게는 한 문장에서 고유명사의 역

할을 하는 모든 표현은 고유명사라고 한다. 그러나 러셀은 서로 구별한다 이름(name)과 기술구(discription)를 구분하다.

프레게에 의하면 의미있는 언어적 표현에서 정당하게 주어부에 위치하는 고유명사는 모두 고유명사이다. 따라서 수도 고유명사일 수 있다. 수라는 대상이 존재하는가 존재하지 않는가는 무관하게 말이다.

프레게는 뜻(Sinn)과 지시체(Bedeutung)의 구분이 문제가 되는 계기를, 두 개의 동일성 명제의 경우에 만약에 하나의 언어적 표현의 의미가 단순히 그 표현이 지시하는 지시체라고 한다면 두 개의 동일성 명제 사이의 차이가 설명되지 않는다는 점에서 찾는다.

① 소크라테스는 소크라테스이다.
② 소크라테스는 크산티페의 남편이다.

여기서 언어적인 표현의 의미는 그 언어적인 표현이 지시하는 대상이라는 가정을 가지고 있자. 그러면 ①, ② 모두 동어반복이다. 그러나 ①이 동어반복이라는 데 대해 반론의 여지가 없으나 ②가 동어반복이라는 데에는 무리가 있다. 동어반복은 논리적 성격상 세계에 있어서 어떤 정보도 나에게 제공할 수 없는 것이기 때문이다. 그러나 ②는 소크라테스 에 대한 새로운 정보를 전달하는 인식적 내용이 있다.

그러므로 위와 같은 의미론적인 전제는 틀렸다고 하든지, 또는 그 전제를 유지하고 싶으면 다른 식으로 ①, ②를 분석해야 한다. 러셀이 시도한 것이 뒤의 것이다.

프레게는, 그 것이 지시하는 대상과 그 것이 함축하는 의미들을 하나의 언어적인 표현이 항상 가지고 있다고 한다. 그런데 지시체 없이 뜻만 가지고 있는 표현들은 예를 들어 ‘페가수스’ 같은 것이다.

개념들의 성격은 어떻게 밝혀야 하는가? 프레게는 불완전 표현으로서(차지 않은) 개념을 해석했었다. 개념 명사와 연관되는 개념이 있다. 그 개념은 문장의 한 부분이 아니다. 그러면 무엇인가? 프레게는 심리주의나 형이상학 실체 모두 배격하는 입장이다. 그에 따르면 개념은 일정한 논리적 특성을 가진 개념 명사의 객관적 상대자(objective correlative)이

다. 객관적 상대자란 무엇인가? 개념이 개념 명사가 지시하는 객관적 상대자라면 그 객관성은 어떤 종류의 것인가? 다음 두 명제를 보자.

① 샛별은 샛별이다.
② 샛별은 개밥바라기이다.

①은 분명히 동어반복(tautology)이다. ②는 어떤 정보를 제공해 준다. 이 차이를 어떻게 설명해야 하는가? 언어적인 표현의 의미가 그 것이 지시하는 대상이라고 한다면 ①, ② 사이의 인식적인 차이를 설명할 길이 없다. 그러므로 뜻과 지시체는 구별해야 한다. 모든 언어적인 표현은 그 것이 지시하는 지시체가 있고 동시에 그 지시체가 우리에게 어떤 식으로 주어지느냐에 따라 그 언어적인 표현은 각기 다른 뜻이 있다. 그러므로 하나의 언어적인 표현은 뜻(Sinn:connotation, intesion, meaning)과 지시체(Bedeutung:denotation, extension, nominatum)를 갖는 것으로 구분해야 한다.

프레게에 따르면 뜻은 그 대상이 주어지는 방식(Art des Gegebenseins)이다. 그는 삼각형 ABC를 예로 든다. 교점 O는 A와 B의 교점이라고 말할 수 있다. 그리고 A와 C의 교점이라고 말할 수 있다. 또 B와 C의 교점이라고 말할 수 있다. 교점은 같은데 그 교점이 주어지는 방식은 여러 가지일 수 있는 것이다. 이런 의미에서 뜻은 그 대상이 주어지는 방식이다. 마찬가지로 소크라테스는 플라톤의 스승이기도 하지만 크산티페의 남편이기도 하다. 이것들은 바로 주어지는 방식인 것이다.

그러면 뜻의 객관성을 어떻게 설명하느냐?

언어적인 표현(sign)
|
관념(ideas)
|
뜻(sense)
|
대상(object)

보통 언어적인 표현과 대상이 어떤 식으로 이어진다고 생각하는가? 일정한 매개가 필요할 것이다. 언어적인 표현과 대상이 연결되는 것은 마음속에서 일어나는 지각(관념) 등을 가지고 있기 때문이라고 대부분의 사람들은 생각한다. 그러나 관념은 주관적이다. 그 것은 내 마음속에서 일어난다. 다른 사람의 마음속에서도 내 마음에서처럼 일어난다고 가정할 근거가 없다. 그리고 주관적일 경우에는 언어 기능을 못한다. 객관성이 있어야 한다. 그 객관성은 우리의 언어사용과 관계되어야 한다. 언어사용에 있어서의 의미의 객관성이 보존되기 때문에 우리가 의사 소통을 할 수가 있는 것이다.

실제 언어생활에서 의미가 전달되는 것이 가능한 것은 바로 뜻이 있기 때문이다. 많은 경우 언어적인 표현의 지시체를 실제로 접할 기회가 적다. 그런데도 불구하고 우리는 언어적 표현의 의미를 안다. 그 이유가 지시체 자체는 접하지 못하나 뜻이 있으므로 의사가 전달되고 의사 소통이 가능해지기 때문이다.

지식이 말을 통해 전수되기 위해서는 의미의 객관성이 있어야 한다. 언어적 표현이 갖는 의미가 사용하는 사람에 따라 전부 달라서는 안 된다. 이 언어적 표현의 의미의 객관성은 어떻게 정립되는가? 전통적으로는 형이상학적 견해와 심리주의적 견해가 있다. 그러나 이 두 가지 모두 문제가 있다. 그렇다면 어떻게 언어적 표현의 의미의 객관성을 밝히는가? 우리 언어사용의 객관성과 관련시켜 풀어 나간다. 언어의 사실적 객관성, 자율성(언어는 언어 사용자의 의도와는 상관없이 객관성을 갖는다는 의미에서의)에 토대를 두고 의미의 객관성을 밝혀 나가야 된다.

일상 언어는 애매하고 다의적인 경우가 많다. 그러므로 일상 언어의 논리적인 구조를 정확히 밝힐 수 있어야 한다. 일상 언어의 논리적인 분석이 선행되어야 의미가 정확히 밝혀진다. 언어적 표현이 말속에서 수행하는 논리적 역할을 우리 일상 언어의 틀 속에서만 보면 분명히 드러나지 않는다. 그러므로 논리적 분석을 통해야 한다. 언어에 대한 논리적 분석의 대표적 예가 바로 대상과 개념의 구별이었다.

우리는 여태까지 낱말에 대해서만 이야기 해 왔다. 일반적으로, ‘소크라테스’라는 낱말 자체뿐만 아니라,

① 소크라테스는 플라톤의 스승이다

라는 문장 자체도 언어적 표현이다. 언어적 표현으로서의 이 문장도 지시체가 있고 뜻이 있어야 한다. 이 문제에 대한 대답으로써, 프레게의 언어현상에 대한 명료화, 분석은 그 언어적 표현이 사용되는 언어사용의 틀 속에서 밝혀져야 한다는 기본적 원칙이 적용된다.

①의 지시체는 무엇일까?

② 소크라테스는 크산티페의 남편이다.
③ 소크라테스는 소크라테스이다.

만일 ①의 지시체가 사태(states of affairs)라면 ①, ②, ③의 사태가 모두 다르므로 ①, ②. ③의 지시체는 모두 다를 것이다.

④ 크산티페의 남편은 플라톤의 스승이다.

①이 나타내는 생각(der Gedanke)과 ④가 나타내는 생각은 서로 다르다. 그러나 ①이 참이면 ④도 참이어야 한다. 그러면 ①이 지시하는 사태와 ②가 지시하는 사태도 같아야 한다. 그러나 실제로 같지 않다. 따라서 사태가 지시체라고 말할 수 없다.

보통 우리는 그 문장이 지시하는 것은 '생각'이라고 생각한다. 그러나 위에서 보았듯이 ①, ④가 나타내는 생각은 서로 다르다.

문장의 지시체를 결정한다고 했을 때 그 문장의 지시체는 그 문장을 구성하는 요소들의 지시체의 함수가 되어야 한다. ①, ④의 경우 구성 요소들의 지시체는 서로 같다.

- '소크라테스'와 '크산티페의 남편'
- '플라톤의 스승'과 '플라톤의 스승'

그런데 ①, ④의 경우 지시체가 생각이라고 한다면 그 문장을 구성하는 요소들의 지시체의 함수가 되지 못한다. 프레게는 일단 이 문장의 뜻이

생각이라고 한다. 그리고 구성 요소의 지시체의 함수가 되는 문장의 지시체는 그 문장의 진리치(참과 거짓)라고 한다. 곧 모든 참인 문장은 그 지시체로서 참(das Wahre)을 갖고 있고, 모든 거짓인 문장은 그 지시체로서 거짓(das Falsche)을 갖는다. 유한 수의 낱말과 유한수의 규칙으로 우리는 무한수의문장을 만들어 낸다. 문장마다 지시체를 갖는다고 할 때 그 지시체는 위와 같은 것이다.

참은 '참인 모든 것', 거짓은 '참이 아닌 모든 것'이라고 한다면 사태(문장이 지시하는 객관적 상황)와 사실상 큰 차이가 없게 된다.

	뜻	지시체
낱말	그것이 주어지는 방식	그것이 지시하는 대상
문장	그문장이 표현하는 생각	참/거짓

프레게는 언어적 표현이 어떤 방식으로 사용되고 있느냐를 구체적으로 검토해 문장의 지시체를, 형이상학화하는 것을 피하고 참과 거짓이라고 한 것이다. (참과 거짓은 어디까지나 논리적인 개념임에 주의하라.)

지금까지 프레게의 주장을 정리해 보자. 고대 철학에서 기초가 되는 분야를 존재론으로 생각해 왔던 것을 데카르트, 로크, 흄 등은 인식론에 주된 관심을 가져왔다. 그런데 프레게로 들어오면서 철학의 주된 관심은 의미론으로 바뀌졌다. 논리학이 잘못되면 철학 이론 자체가 잘못된다. 그러므로 논리학이 가장 기초적인 철학의 분과라고 생각한 것이다.

그런데 논리학이란 무엇인가? 본질적으로 언어 사용과 관계가 된다. 언어 사용에 있어 가장 중요한 것은 '의미'이다. 의미를 밝힌다는 것은 언어가 일반적으로 어떤 기능을 하느냐는 데 대해 이해가 되어야 한다. 이런 의미에서 언어에 대한 철학의 관심이 철학의 가장 기초적인 부분이 된다. 이런 철학관의 근본적인 변화가 프레게 이후의 철학에 중요시된다. 이런 프레게의 철학관의 수행이 러셀과 비트겐슈타인에 의해 20년 후에 이루어지면서 본격적인 분석철학이 시작되는 것이다. 이런 의미에서 프레게를 분석철학의 시조라고 말할 수 있는 것이다.

6. 산수의 기초 개관

프레게의 『개념 표기법』은 논리학과 논리 철학에서 필요한 많은 견해들에 대한 토대를 조성하였다. 그리고 일련의 책들과 논문들 속에서 그의 계획에 관한 구체적인 작업들을 계속해서 수행한다. 그러나 당시의 수학자들과 논리학자들은 그의 업적의 중요성을 이해하지 못하거나 인정하지 않았다. 그럼에도 불구하고 프레게는 자신의 작업을 계속해서 수행하였다. 이후에 그의 주요 연구 작업은 수학의 기초들에 대한 그의 관념들을 명료하게 설명하고 심화시키는 것이었는데 그것이 『산수의 기초』로 나타나게 되었다. (이후의 설명은 심철호 교수의 글과 케니의 저서에서 도움을 받았다.)

『개념 표기법』이 별로 호평을 받지 못했기 때문에 프레게는 아주 다른 문체로 『산수의 기초』를 썼다고 한다. 기호도 비교적 적게 나오고 다른 학자들의 저작과 논의를 연관짓고자 하는 시도가 늘 보인다. 나중에 '논리주의'라는 이름으로 알려지게 될 논제인 산수가 논리학에서 이끌어질 수 있다는 논제는 이 책에서 완전하고 분명하게 제시되지만 대부분 아주 비형식적으로 설명되고 있다. 『산수의 기초』는 아주 굉장한 책이다. 그러나 그것이 세상에 선보였을 때, 그 책은 『개념 표기법』보다도 못한 대접을 받았다고 한다. 달랑 세 편의 서평이 나왔고, 그것들도 모두 적대적이었으며, 거의 20년 동안 그 책은 사실상 전혀 입에 오르내리지 않았다. 프레게는 실망하였지만 이 때문에 그의 원대한 계획을 위한 후속 작업을 포기하지는 않았다.

그는 『산수의 기초』 머리말에서 수학의 가장 기초적인 개념에 대한 제대로 된 정의나 합의된 의견도 없을 뿐더러 도대체 문제 의식조차 없음을 개탄하면서 탐구의 세 가지 방법론적 원리를 다음과 같이 제시한다.

> 심리적인 것과 논리적인 것, 주관적인 것과 객관적인 것이 명확히 구분되어야 한다.
>
> 문장의 맥락 안에서 낱말의 의미를 물어야 하지, 따로 떼어놓고 물어서는 안 된다.
>
> 개념과 대상의 차이를 명심해야 한다.

첫째 원리는 심리적인 것과 논리적인 것의 뚜렷한 구분, 즉 주관적인 것과 객관적인 것을 구분한다는 것이다. 둘째 원리는, 단어의 의미를 그 자체 고립시켜 탐구하지 않고 명제의 맥락 속에서만 탐구한다는 이른바 맥락의 원리를 말한다. 셋째 원리는 개념과 대상의 구분을 망각하지 않는다.

이어지는 본문은 남들의 수론을 비판하는 전반부와 자신의 수론을 피력하는 후반부로 나뉜다. 보다 구체적으로 전반부는 수 진술(Zahlangabe)이 경험적 진술이라거나 칸트 식의 직관에 근거한 선천적, 종합적 진술이라는 입장들에 대한 비판 및 수를 외적 사물의 성질이나 주관적 관념이나 사물의 단위라는 주장에 대한 논박 등이 주조를 이루고 있다. 그에 따르면 수는 주관적 표상도 아니요 물리적 대상도 아니고 물리적 대상들의 집산일 수도 없다. 이 모든 비판을 통해 비로소 그가 내세운 긍정적 주장은 "수 진술의 내용은 개념(Begriff)에 관한 주장이다"는 것과 "개별적인 수들은 대상(Gegenstand)들이라고 정의되어야 한다"는 것이다. 이 두 논제는『산수의 기초』에서 프레게가 아주 중요하게 간주하는 것이다. 첫째는 각각의 개별 수는 자립적 대상이라는 논제이다. 둘째는 수를 부여하는 언명의 내용은 개념에 관한 주장이라는 논제이다. 예를 들어 "지구는 하나의 달을 가지고 있다"는 언명은 달의 지구라는 개념에 수 1을 부여한다.

처음 보기에 이들 논제는 서로 대립하는 것처럼 보일 수 있지만 우리가 '개념'과 '대상'이 프레게에게 무엇을 의미하는지를 이해한다면, 그들은 서로 보완적임을 알게 된다. 수가 대상이라고 말할 때 프레게는 수가 나무나 책상처럼 만질 수 있는 어떤 것임을 주장하는 것이 아니다. 도리어 그는 서로 다른 두 가지 일을 하고 있다. 첫째, 그는 수가 개체이든 아니면 모임이든 어쨌든 어떤 것에 속하는 속성임을 부정하고 있다. 둘째, 그는 수가 주관적인 어떤 것, 어떤 정신적 대상이나 정신적 대상의 어떤 속성임을 부정하고 있는 것이다. 프레게에게 개념은 정신과 독립해 있으며, 그래서 수가 객관적이라는 논제와 수 언명은 개념에 관한 언명이라는 논제 사이에는 아무런 모순도 없다. 그가 논리주의 논제를 기호로 엄밀하게 제시하는데 완벽을 기하고자 노력하는 앞으로 수 년 동안에도 이 두 원리는 프레게 사고의 핵심으로 남아 있게 된다.

“목성은 네 개의 위성을 갖고 있다” 는 말은 목성의 위성에 관한 진술이라기보다는 목성의 위성이라는 개념에 하나의 속성을 할당하는 말이다. 즉, 얼마나 많은 것들이 그 개념 밑에 포섭(unterfallen)되는지를 말하는 것이다. 그렇다면 수들을 지칭하는 방법은 근본적으로 ‘개념 F에 속하는 수’(즉, ‘F의 수’), 예컨대, ‘목성의 위성의 수’의 형식의 기술을 이용한다는 것이다. 한편 개개의 수들이 대상이라는 주장은 수들을 지칭하는 표현들이 단칭명사의 역할을 한다는 점이 주요 근거로 제시된다. 그러나 프레게에 따르면 수들은 경험적으로 표상 가능하거나 직관을 통해 주어지는 대상일 수는 없다. 참된 산수 명제들은 표상 가능하거나 직관 가능한 것들의 영역에만 국한되어 적용되는 것이 아닌 사유 가능한 모든 것들에 적용가능하다는 점에서 산수의 보편타당성이 성립한다고 보았기 때문이다. 어쨌든 우리가 수들에 대한 어떠한 표상이나 직관도 가질 수 없다면 수들은 어떻게 우리에게 주어질 수 있는가를 설명해주어야 한다. 프레게의 답은 “단어의 의미를 고립적으로 묻지 말고 문장의 맥락에서만 물으라”는 유명한 ‘맥락 원리’에 호소하는 것이다. 프레게 철학에서 이 원리의 정확한 의미와 지위는 프레게 학자들에게 오래된 논쟁거리이지만 여하튼 지금의 맥락에서 맥락 원리에 따른다는 것은 수에 관한 인식론적 문제가 의미론적 문제로 전환되는 이른바 ‘언어적 전회’를 이루는 결정적 계기가 된다.

『산수의 기초』의 전반부와 후반부를 더 구체적으로 설명해 보자. 전반부에서는 수와 수 진술의 본성에 대한 프레게 이전의 견해들을 비판한다. 이 비판의 첫 번째 목표는 수 진술이 경험적 진술도 아니고 순수 직관에 근거하는 선천적, 종합적 진술도 아님을 보임으로써, 결국 수 진술이 논리법칙과 정의로부터 연역가능한 분석적 진술임을 간접적으로 드러내는 데 있다(§5-17). 둘째의 목표는 수를 외부사물의 성질이나 주관적 관념이나 사물의 단위라는 주장을 반박하는 가운데, 수 표현은 “F인 사물들이 얼마나 많은가?” 하는 물음에 대한 답변에서 사용된다는 것과 결국 수 진술은 개념에 대한 진술이라는 것을 보여주는 데 있다(§18-54).

후반부에서 프레게는 개별수들이 자립적 대상이고 산술의 진리들이 분석적 진리라는 그의 주장을 적극적으로 옹호한다. 후반부의 첫 부분에서

그는 수 표현이 단칭 용어의 역할을 한다는 사실에 근거하여 개별수들이 자립적 대상들이라고 논변한다(§55-61). 다음으로 맥락 원리에 근거하여 수 동일성의 기준으로서 흄의 원리를 제시하고 이 원리의 난점을 극복하기 위해 수 개념에 대한 명시적 정의를 제시한다(§62-69). 마지막으로 그는 명시적 정의에 의해 흄의 원리를 증명하고 개별수들과 산수의 기초 개념들을 정의한 후, 이들 정의와 흄의 원리로부터 산수의 주요 진리들을 연역해 내는 방법을 묘사한다(§70-86). 흄의 원리는 후반부의 둘째 논의에서 도입한다. 그는 이미 개별수들이 자립적 대상이라는 논제를 정당화하면서 수의 자립성이 어떤 심리적 표상이나 직관에도 의존하지 않는다고 주장하였다. 그렇다면 수들은 우리에게 어떻게 주어지는가? 여기서 그는 낱말을 오직 문장의 맥락 안에서만 의미를 지닌다는 맥락 원리를 내세운다. 그에 따르면 수들이 우리에게 어떻게 주어지는지 이해하기 위해서는 수 표현이 등장하는 문장의 뜻을 이해해야 한다. 그는 이미 수가 자립적 대상이라는 주장을 정당화한 것으로 간주하므로, 수 표현이 등장하는 문장들 중에서 먼저 수들의 동일성 재인식을 표현해 주는 문장(수 동일성 문장)의 뜻을 이해해야 한다고 말한다.

『산수의 기초』는 거의 반이 프레게 이전 사람들과 당대 사람들의 견해를 비판하는 데 할애되었는데, 이에는 칸트와 밀도 포함된다. 이런 비판의 와중에서 논리주의 입장의 근거가 준비된다. 그 책의 핵심 부분에서 프레게는 일반적인 산수 용어인 수(數)가 어떻게 개념이라는 말, 개념 아래 한 대상이 속한다는 말, 개념들 사이의 동수(同數)라는 말, 그리고 개념의 외연이라는 말과 같은 논리적 용어로 대치되는지를 보여주었다. 순수 논리적 용어로 그는 수 0과 1을 정의하였으며, 수 계열에서 각각의 수가 앞선 수와 갖는 관계를 정의하였다. 이들 요소와 논리학의 일반 법칙을 사용하여 그는 전체 수 이론을 도출하였다.

프레게의 수리 철학은 그가 논리학과 철학의 여러 핵심 용어를 어떻게 이해하고 있는가와 밀접히 연관되어 있다. 사실『개념 표기법』과『산수의 기초』에서 프레게는 현대 논리학의 토대를 놓았을 뿐만 아니라, 또한 논리 철학에도 새로운 출발점을 마련하였다. 그는 논리학을 철학적으로 다루는 것과 이것이 자주 혼동되어 왔던 다른 두 학문을 날카롭게 구분함으

로써 그 일을 하였다. 그는 한편으로 논리학을 심리학(경험주의 전통에 서 있는 철학자들은 논리학을 심리학과 혼동해왔다)과 구분하였고, 다른 한편으로 논리학을 인식론(데카르트에서 유래하는 전통에 서 있는 철학자들은 때로 인식론을 논리학과 뒤섞었다)과 구분하였다.

7.『산수의 기초』의 차례

『산수의 기초』는 그 자체가 자세한 차례를 가지고 있다. 그것은 다음과 같다.

머 리 말

§1. 최근 수학에서는 증명을 엄밀하게 하고 개념을 명확히 파악하려는 노력이 보인다.

§2. 우리는 결국 기수 개념까지 검토하지 않으면 안 된다. 증명의 목적.

§3. 그러한 탐구의 철학적 동기: 수의 법칙이 분석적 진리인가 종합적 진리인가, 선천적 진리인가 후천적 진리인가를 둘러싼 논란. 이들 표현의 뜻.

§4. 이 책의 과제

Ⅰ. 산수 문장의 본성에 관한 몇몇 사람들의 견해

수식은 증명 가능한가?

§5. 칸트는 수식이 증명 가능하다는 것을 부정하는데, 항켈은 정당하게도 그렇게 하는 것은 역설적이라고 한다.

§6. 2 + 2 = 4에 대한 라이프니츠의 증명은 빈틈이 있다. a + b에 대한 그라스만의 정의는 잘못되었다.

§7. 개별 수의 정의가 관찰된 사실을 주장하며, 이들로부터 계산이 따라나온다는 밀의 견해는 근거가 없다.

§8. 이 정의들이 정당성을 갖기 위해 그런 사실들이 관찰될 필요는 없

다.

산수 법칙은 귀납적 진리인가?

§9. 밀의 자연 법칙. 밀은 산수의 진리가 자연 법칙이라고 말함으로써 산수의 진리와 그 진리의 적용을 혼동한다.

§10. 덧셈 법칙이 귀납적 진리임을 부정하는 여러 근거: 수들은 같은 종류가 아니며, 우리는 정의를 통해 수들의 공통된 성질들의 집합을 얻지 못하며, 거꾸로 귀납이 산수에 근거할 가능성이 높다.

§11. 라이프니츠의 ‘생득적인 것’

산수 법칙은 종합적-선천적인가 아니면 분석적인가?

§12. 칸트. 바우만. 립쉬츠. 항켈. 인식의 근거로서 내적 직관.

§13. 산수와 기하학의 차이

§14. 진리의 지배 영역과 관련해 진리들을 비교

§15. 라이프니츠와 지본스의 견해

§16. 밀은 그 견해에 반대해서 ‘언어의 능숙한 조작’을 경시한다. 기호들이 지각 가능한 것을 의미하지 않는다고 해서 공허한 것은 아니다.

§17. 귀납의 부적합성. 수 법칙이 분석 판단이리라는 추측. 그렇다면 수 법칙은 어떤 점에서 유용한가? 분석 판단의 가치 평가.

Ⅱ. 기수 개념에 관한 몇몇 사람들의 견해

§18. 일반적인 기수 개념을 탐구해야 할 필요성

§19. 정의가 기하학적이어서는 안 된다.

§20. 수는 정의가능한가? 항켈. 라이프니츠.

기수는 외부 사물의 성질인가?

§21. 칸토르와 슈뢰더의 견해

§22. 바우만의 반론: 외부 사물들은 엄밀한 단위들을 제시해주지 않는다. 기수는 우리의 이해에 의존하는 것처럼 보인다.

§23. 수가 사물들의 모임의 성질이라는 밀의 견해는 유지될 수 없다.
§24. 수의 포괄적 적용가능성. 밀. 로크. 라이프니츠의 비물질적인 형이상학적 특징. 수가 감각적인 것이라면, 비감각적인 것에는 수를 부여할 수 없을 것이다.
§25. 2와 3의 물리적 차이에 대한 밀의 견해. 버클리에 따르면 수는 사물 내에 실재하지 않고 정신을 통해 창조된다.

수는 주관적인 것인가?

§26. 수 형성에 대한 립쉬츠의 묘사는 옳지 않으며 개념 규정을 대신하지도 못한다. 수는 심리학의 대상이 아니라 객관적인 것이다.
§27. 슐뢰밀히의 견해처럼 수가 계열에서 대상 자리의 표상인 것은 아니다.

집합으로서의 기수

§28. 토마에의 이름 부여

Ⅲ. 단위와 하나에 관한 여러 견해

수 낱말 '하나'는 대상의 성질을 표현하는가?

§29. 'μον?'와 '단위'란 표현의 다의성. 단위가 셀 대상이라는 슈뢰더의 정의는 쓸모없는 것으로 보인다. '하나'라는 형용사는 더 자세한 규정을 포함하지도 않으며, 술어로 사용될 수도 없다.
§30. 라이프니츠와 바우만이 시도한 정의는 단위 개념을 완전히 사라지게 만드는 것 같다.
§31. 나누어져 있지 않음과 경계지어짐이라는 바우만의 특징들. 어느 대상이나 우리에게 단위 관념을 제시하는 것은 아니다(로크).
§32. 언어는 나누어져 있지 않음과 경계지어짐 사이의 어떤 연관성을 암시하지만, 그 경우 뜻이 변경된다.
§33. 나눌 수 없음(쾨프)도 단위의 특징으로 성립할 수 없다.

단위들은 서로 같은가?

§34. ‘단위’를 [사물의] 이름으로 사용해야 할 근거로서 동일성. 슈뢰더, 홉스, 흄, 토마에. 사물들의 차이를 추상화함으로써 기수 개념을 얻지는 못하며, 그런 추상화를 통해 사물들이 같게 되지도 않는다.

§35. 게다가 다수에 관해 말하려면 차이가 필수적이다. 데카르트, 슈뢰더, 지본스.

§36. 단위들이 다르다는 견해도 다시 난점에 빠진다. 지본스의 서로 다른 하나들.

§37. 로크, 라이프니츠, 헤스의 단위나 하나에 의한 수 설명.

§38. ‘하나’는 고유 이름이고, ‘단위’는 개념어이다. 수는 단위로 정의될 수 없다. ‘그리고’와 +의 차이.

§39. ‘단위’가 다의적이기 때문에, 단위의 동일성과 구별가능성이 조화되기 어렵다는 점이 숨겨져 있다.

난점을 극복하려는 여러 시도

§40. 구별의 수단으로서 공간과 시간. 홉스. 토마에. 대립된 견해: 라이프니츠, 바우만, 지본스.

§41. 목적을 이룰 수 없다.

§42. 구별 수단으로서 계열에서의 위치. 항켈이 말하는 제시함.

§43. 슈뢰더의 기호 1에 의한 대상의 본뜨기

§44. 사실은 유지하면서 서로 다른 특징을 추상화하는 지본스의 방법. 0과 1은 다른 수들과 마찬가지로 수들이다. 난점은 여전히 남아 있다.

난점의 해결

§45. 요약

§46. 수 진술은 개념에 관한 서술을 포함한다. 개념은 변하지 않지만 수는 변한다는 반론.

§47. 수 진술이 사실적인 것이라는 점은 개념의 객관성을 통해 설명된

다.
§48. 몇 가지 난점의 해결
§49. 스피노자에게서 확인됨
§50. 슈뢰더의 설명
§51. 그것[슈뢰더의 설명]의 수정
§52. 독일어 어법에서 확인됨
§53. 개념의 특징과 성질의 구별. 존재와 수.
§54. 우리는 단위를 수 진술의 주어라고 부를 수 있다. 단위의 나눌 수 없음과 경계지어짐. 동일성과 구별 가능성.

Ⅳ. 기수 개념

개별 수는 모두 자립적 대상이다.

§55. 개별 수에 대한 라이프니츠의 정의를 보완해 보려는 시도
§56. 앞에 시도된 정의는 쓸모가 없다. 왜냐하면 그 정의는 수를 부분으로 포함하는 진술을 설명할 뿐이기 때문이다.
§57. 수 진술은 수들에 대한 등식으로 간주될 수 있다.
§58. 수는 자립적 대상으로 표상할 수 없다는 비판. 수는 아예 표상될 수도 없다.
§59. 어떤 대상을 표상할 수 없다고 해서 연구에서 배제해서는 안 된다.
§60. 구체적 사물이라 해서 언제나 표상될 수 있는 것은 아니다. 낱말의 의미를 물을 때는 그 낱말을 문장 안에서 탐구해야 한다.
§61. 수가 비공간적이라는 반론. 객관적 대상이 모두 공간적인 것은 아니다.

기수 개념을 얻기 위해 우리는 수 등식의 뜻을 고정해야 한다.

§62. 우리는 수 동일성에 대한 인식 표시가 필요하다.
§63. 그런 것[인식 표시]으로서 일의적 대응 가능성. 동일성이 수의 경우에 대해 특수하게 설명된 것이 아닌가 하는 논리적 의문.

§64. 유사한 방법의 예: 방향, 평면의 방위, 삼각형의 모양.
§65. 정의의 시도. 둘째 의문: 동일성 법칙이 지켜지는가?
§66. 셋째 의문: 동일성의 인식 표시로는 충분하지 않다.
§67. 대상이 도입되는 방식을 개념의 특징으로 삼는다고 해서 그것을 보충할 수는 없다.
§68. 개념의 외연으로서 기수
§69. 해설

정의의 보충과 확증

§70. 관계 개념
§71. 관계에 의한 대응
§72. 양쪽의 일의적 관계. 기수 개념.
§73. 개념 F 아래 속하는 대상들을 개념 G 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계가 있을 경우, F에 귀속되는 기수는 G에 귀속되는 기수와 같다.
§74. 영은 ‘자기 자신과 같지 않은’이란 개념에 귀속되는 기수이다.
§75. 영은 아무 것도 속하지 않는 개념에 귀속되는 기수이다. 영이 어떤 개념에 귀속되는 기수라면, 그 개념 아래에는 아무 대상도 속하지 않는다.
§76. “n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다”는 표현의 설명.
§77. 1은 ‘0과 같은’이라는 개념에 귀속되는 기수이다.
§78. 이 정의들을 통해 증명될 수 있는 문장들.
§79. 어떤 계열에서 다음에 나옴의 정의.
§80. 이에 대한 고찰. 다음에 나옴의 객관성.
§81. “x는 y로 끝나는 -계열에 속한다”는 표현의 설명.
§82. 자연적 수 계열에서 최종 구성 요소가 없다는 것의 증명의 암시.
§83. 유한 기수의 정의. 어느 유한 기수도 자연적 수 계열에서 자기 자신 다음에 나오지 않는다.

무한 기수

§84. ‘유한 기수’라는 개념에 귀속되는 기수는 무한 기수이다.

§85. 칸토르의 무한 기수 ‘농도’. 용어의 차이.

§86. 칸토르의 연속열에서 다음에 나옴과 내가 말하는 계열에서 다음에 나옴.

V. 결론

§87. 산수 법칙의 본성

§88. 분석 판단에 대한 칸트의 평가 절하

§89. 칸트의 명제: “감성 없이는 우리에게 아무 대상도 주어지지 않는다”. 수학에 대한 칸트의 공헌.

§90. 산수 법칙이 분석적 본성을 지닌다는 점을 완벽하게 증명하려면 빈틈없는 추리 연쇄가 필요하다.

§91. 이런 약점은 나의 개념 표기법에 의해 극복될 수 있다.

다른 수들

§92. 항켈에 따를 때, 수가 가능한가 하는 물음의 뜻

§93. 수는 공간적으로 우리 밖에 있지도 않고 주관적이지도 않다.

§94. 개념에 모순이 없다는 것은 어떤 것이 그 아래 속한다는 것을 보증해 주지 못하며, 그 점은 증명이 필요하다.

§95. 우리는 (c - b)를 다른 고찰 없이 뺄셈 문제의 답이 되는 기호로 간주해서는 안 된다.

§96. 수학자도 어떤 것을 마음대로 창조할 수는 없다.

§97. 개념은 대상과 구별되어야 한다.

§98. 덧셈에 대한 항켈의 설명

§99. 형식주의 이론의 약점

§100. 곱셈의 의미를 특수하게 확장하여 복소수를 확립하려는 시도

§101. [복소수를] 그렇게 확립할 수 있는지는 증명의 설득력과 무관하지 않다.

§102. 어떤 연산을 할 수 있어야 한다는 가정만으로 그 가정이 충족되

는 것은 아니다.

§103. 복소수에 대한 코사크의 설명은 정의의 실마리에 불과하고, 낯선 요소가 끼어드는 일을 피하지 못한다. [복소수의] 기하학적 표현.

§104. 중요한 일은 새로운 수들에 대해 재인식 판단의 뜻을 고정하는 일이다.

§105. 산수의 매력은 그것의 이성적 특성에 있다.

§106. [64절까지의] 요약

§107. [65-69절의] 요약

§108. [70-86절의] 요약

§109. [87-105절의] 요약

Ⅱ. 개념 체계도

1. 개념을 나타내는 용어의 정의

개념 프레게는 수를 부여하는 진술의 내용은 개념에 관한 주장이라고 말한다. 예를 들어 “지구는 하나의 달을 가지고 있다”는 진술은 달의 지구라는 개념에 수 1을 부여한다. 프레게에게 개념은 정신과 독립해 있으며, 그래서 수가 객관적이라는 논제와 수 진술은 개념에 관한 진술이라는 논제 사이에는 아무런 모순도 없다.

객관적/주관적 프레게에서 객관적/주관적의 구분은 논리학/심리학의 구분과 일치한다. 주관적이란 무슨 뜻인가? 프레게는 수가 “물리적”이라는 견해(25)에 대한 대안으로서, 수가 “주관적”이라는 견해를 고찰한다(26). “주관적”이란 정신적인 것, 관념, “우리 안에” 있는 것을 가리킨다(ibid). “모든 대상이 위치를 갖지는 않는다. 우리의 관념들조차도 이런 의미에서는 우리 안에(피부 밑에) 있지 않다. 피부 밑에는 신경절, 혈구, 등등이 있지 관념이 있지는 않다. … 그래도 관념이 우리 안에 있다고 말한다면, 이는 관념들이 주관적임을 의미하는 것이다.”(§1) “우리 안에” 있다는 말은 즉, 그 인식론적 지위를 가리키는 말, 즉 객관적이지 않다는 뜻이다. 그는 수와 같은 것은 “그것을 다루는 누구에게나 정확히 똑같은” 것임을 말하고자 한다(ibid.). 주관적인 것이란 “감각”, “심적 과정”(26), “감각 인상”(27)처럼 간주관적으로 접근불가능한 것이다. 심리학적 의미에서의 관념은 주관적이며(p.x), 심상이나 감각처럼, 남의 것과 일치하는지 알 수 없기 때문이다(26). 객관적인 것이란, “그것을 파악할 수 있는 모든 이성적 존재에게 정확히 동일한” 것, 우리 경험 중에서 “법칙의 지배를 받는 것, 생각되고 판단될 수 있는 것, 말로 표현될 수 있는 것”을 이룬다(26). 특히 말로 표현될 수 있는 것이라는 점이 중요하다. 말로 표현가능하고 문장의 내용의 일부가 될 수 있는 것은 간주관적으로 접근가능하다는 점에서 객관적이다. 이때의 “간주관적 접근가능”은 “모종의 인지 능력을 공유한 모두에 접근

가능”을 의미한다. 프레게는 주관적/객관적 구분을 설명하는 인지 능력으로서의 칸트의 감성-오성 구분을 채택한다. “순수 직관가능한” 것은 “의사소통불가능”하므로 주관적이다(ibid.). 프레게는 직관을 사적 관념이나 감각 인상에 필적하는 것으로 간주한다. 객관성은 “감각, 직관, 상상 및 일체의 이전 감각의 기억으로부터의 정신적 그림의 구성으로부터 독립적이지만 이성 독립적이지는 않다.”(26) 그래서 주관적/객관적 구분은 사적/간주관적 구분에 불과하다. 이 구분은 여러 인지적 능력들간의 구분과 관련되는데, 이 중 이성만이 객관적인 것에 접근할 수 있는 반면 다른 모든 능력들은 주관적인 것에 관련된다. 프레게는 주관적인 것을 관념과 동일시하는 경향이지만 “관념”의 의미의 제한된 해석을 부여: 이는 “심리학적인 뜻에서”(p.x) 또는 “주관적인 뜻에서”(27 주) 쓰이며 “감각적으로 생생한 성격”을 갖는 것을 가리킨다(ibid.).

관념(Idee). 프레게는 관념과 개념을 구분하고 있다. 관념은 심적 이미지이며 심리학의 주제인 심적 현상이다. 이것들은 아마 진화의 대상이지만 산수와는 무관하다. 반면 개념은 수학자의 연구 대상이다. 개념이 개인들의 마음에 싹트고 자라난다고 생각하는 것은 잘못이다. 만약 개념이 역사를 가진다면, 그것은 그것들이 나름대로 발전해 온 역사가 아니라 그것들을 우리가 발견하고 표현해 온 역사이다. 프레게에게서 개념은 심적 이미지와는 아주 다른 어떤 것이며 그것은 주관적이 아니라 객관적인 어떤 것을 의미한다.

기하학 프레게는 기하학과 산수의 차이점을 강조한다. 기하학의 한 점은 그것만으로 고려하면 다른 기하학의 점들과 전혀 구별될 수 없다. 같은 사실이 직선과 평면에 대해서도 성립한다. 점, 직선, 평면을 한 직관 안에서 동시에 파악할 때에야 비로소 우리는 그것들을 구분할 수 있다. 기하학에서 일반 문장이 직관을 통해 얻어진다면, 그 이유는 직관된 점, 직선, 평면이 원래 전혀 특별하지 않고 그로 인해 전체 종의 대표자로 간주될 수 있기 때문이라고 할 수 있다. 그런데 수의 경우에는 사정이 다르다: 각각의 수는 고유한 성질을 지니고 있다. 우리는 특정 수가 다른 모

든 수를 어디까지 대신할 수 있는지, 어느 경우에 그 수의 특수성이 성립하는지를 쉽게 말할 수 없다(§13).

프레게는 기하학의 법칙은 선천적이고 종합적이라고 말하는데 이는 칸트와 같은 견해이다. 기하학의 법칙이 선천적인 이유는 기하학의 정의가 일반 법칙으로부터 증명될 수 있고 특정 선이나 도형 혹은 고체에 전혀 호소하지 않기 때문에 선천적이다. 그러나 기하학은 그 공리가 공간적인 개념을 포함하고 있기 때문에 분석적이지는 않다. 프레게는 그러나 기하학의 공리는 서로 독립해 있으며 원초적인 논리 법칙과도 독립해 있고 결과적으로 종합적임을 보여 준다고 강조한다. 기하학의 공리는 공간적인 개념을 포함하고 있기 때문에 분석적이지는 않다.

논리주의 프레게가 직접 쓴 표현은 아니다. 논리주의에 의하면 수학의 기본적인 개념들을 모두 논리적인 개념들로 환원시킬 수 있다. 그러면 수학의 증명에 대해 논리적인 기초를 제공하게 되는 것이다. 논리주의는 환원적인 프로젝트이다. 수학의 증명(개념)을 모두 논리학의 증명(개념)으로 환원시킨다. 예를 들어서 2+2=4라는 수식을 1+1+1+1 = 1+1+1+1와 같이 동일성의 개념으로 환원한다. 19세기 후반 이후 50년간 논리주의의 타당성을 증명하려는 노력이 계속된다. 그러나 결국은 완전무결하게 증명될 수 없다고 밝혀진다. 페아노(Peano)는 산술 체계를 단지 세 개의 무정의 술어(0, 수, 다음수)와 다섯 개의 규칙으로 완전하게 연역을 해낸다. 그 방법이 세련되면서 이런 작업을 프레게 자신도 반복해서 하고 러셀과 화이트헤드의 『프리키피아 마테마티카』(Principia Mathematica)에서 본격적으로 이루어진다.

논리학 프레게의 『산수의 기초』의 주요 목적은 수학의 증명과 추리들이 모두 논리학의 일반 법칙에 근거하고 있음을 보여주는 것이다. 이러한 과제는 그의 본래적인 목적인, 산술의 증명에 대한 엄정한 논리적 기반 정립에 도움이 되며, 그 구체적 방법은 논리주의(logicism)가 수학과 논리학의 관계를 보여주는 올바른 방법이라는 것을 제공해 준다. 그리고 프레게는 당대의 많은 수학자들이 철학에 대해 의심의 눈초리를 지니고 있음

을 알고 있었다. 그는 그 이유가 철학 자체 내에서의 해로운 혼동, 즉 논리학의 영역과 심리학의 영역을 구분하지 못하는 혼동 때문이라고 주장한다. 그는 심리학이 순수 수학자에게는 아무런 관심거리도 되지 못한다는 데 동의하고, 마찬가지로 논리학은 바르게 이해될 때 심리학과는 아주 다른 어떤 것이다. 그래서 『산수의 기초』에서 많은 부분을 논리학이 심리학과 다름을 논증한다.

대상 프레게는 각각의 개별 수는 자립적 대상이라고 주장한다. 수가 대상이라고 말할 때 프레게는 수가 나무나 책상처럼 만질 수 있는 어떤 것임을 주장하는 것이 아니다. 도리어 그는 서로 다른 두 가지 일을 하고 있다. 첫째, 그는 수가 개체이든 아니면 모임이든 어쨌든 어떤 것에 속하는 성질임을 부정하고 있다. 둘째, 그는 수가 주관적인 어떤 것, 어떤 정신적 대상이나 정신적 대상의 어떤 성질임을 부정하고 있는 것이다.

분석적/종합적 우리가 증명을 찾아내고 그것을 근원적 진리에 이를 때까지 소급해서 추적하는 과정에서 오로지 일반적인 논리 법칙과 정의들만 마주칠 경우, 그 정의의 허용 가능성이 의존하고 있는 문장들도 고려해야 한다는 것을 전제한다면, 우리는 분석적 진리를 지닌다. 그러나 일반적인 논리적 본성을 지닌 것이 아니라 특수한 지식 영역에 관계하고 있는 진리들을 이용하지 않으면 증명할 수 없는 경우, 그 문장은 종합적이다(§3).

산수 프레게의 산수 이론에는 기수 이론, 실수 및 복소수 이론 등이 포함된다. 『산수의 기초』에서 프레게의 목표는 산수의 법칙들이 모두 논리학의 일반 법칙에 근거하고 있음을 보여주는 것이다.

선천적/후천적 어떤진리가 후천적이려면 사실, 즉 특정 대상에 관한 주장을 포함하고 있는 증명 불가능하고 일반적이지 않은 진리에 호소하지 않고는 증명될 수 없어야 한다. 반대로 어떤 진리가 증명이 가능하지도 않고 증명이 필요하지도 않은 일반 법칙으로부터 증명될 수 있다면, 그 진리는 선천적이다(§3).

수 기수(cardinal number)라고 할 수도 있다. 『산수의 기초』에서 수는 개별 수와 일반적인 기수 개념 모두를 가리킨다. 그리고 일반적인 기수 개념의 본성의 무엇인지 탐구한다.

심리학(psychology). 심리학은 정신에 대한 실험적 연구이며 정신 현상을 지배하는 규칙성을 추구한다. 프레게 시대에 심리학은 경험주의 학파에 속하는 철학자들, 즉 모든 인간 지식을 감각 경험에 근거해 설명하고자 하는 철학자들 사이에 특별한 권위를 지니고 있었다. 프레게는 논리학이 심리학과 다름을 강력하게 논증한다.

표상(Vorstellung). 프레게는 'Vorstellung'이란 단어를 언제나 심리적이고 주관적인 의미로 사용한다. 이 때문에 오스틴은 이를 영어로 'representation'이 아니라 'idea'로 옮기고 있다. 대략 이것은 단어와 결부되어 우리에게 떠오르는 어떤 영상을 의미한다.

2. 개념의 상하 관계(트리 구조)를 표현하는 계층도

* 개념 다음의 숫자는 해당 개념이 서술된 Ⅲ장의 절을 표시한다.

논리학 1
- 논리주의 1, (1)
  - 개념 1, (3)
    - 객관적 1, (3)
  - 수학 1, (2)
      - 심리학(과 다름) 1, (2)
      - 경험주의 1, (2)
        - 밀, 존 스튜어트 1, (2)
      - 표상 1, (2)
        - 감각 인상 1, (2)
        - 정신적 이미지 1, (2)
        - 관념 1, (3)
          - 개념(과 다름) 1, (2)

주관적 1, (2)
발견, 사고 1, (2)
정당화(와 다름) 1, (2)

산수 법칙 2
기하학 2, (2); 2, (6)
칸트 2, (1)
선천적/종합적2, (1)
수학 2, (2)
선천적/후천적2, (2)
종합적/분석적 2, (2)
칸트 2, (3)
직관 2, (3)
밀 2, (4)
물리적 사실 2, (4)
귀납적 진리 2, (4)

수 3
기수 3
외부 사물의 속성 3, (1)
칸토르 3, (1)
슈레더 3, (1)
밀 3, (1)
감각 3, (1)
주관적 창조물 3, (2)
집합 3, (3)
단위들의 집합 3, (3)
단위 3, (3)
하나 3, (4)
성질 3, (4)
슈레더 3, (4)
직관 3, (4)
라이프니츠 3, (4)

나누어져 있지 않음과 경계지어짐 3, (4)
바우만 3, (4)
나눌 수 없음3, (4)
쾨프 3, (4)
동일성 3, (5)
다양성 3, (6)
지본스 3, (6)
수의 추상화 3, (6)
개념 3, (7)
개념의 특징과 개념의 성질 3, (8)
존재와 수의 유사성 3, (8)
단위의 동일성과 구별가능성의 조화 3, (9)

대상 4
자립적 대상 4, (1)
표상 4, (1)
맥락의 원리 4, (1)
비공간적 4, (1)
주관적/객관적 4, (1)
수 동일성 4, (2)
흄의 제안 4, (3)
평행 4, (4)
방향 4, (4)
대치가능성 4, (5)
라이프니츠 4, (5)
방향 개념4, (6)
개념의 외연 4, (7)
관계 개념 4, (8)
수의 정의 4, (9)
0의 정의 4, (10)
1과 다음수의 정의 4, (11)
유한수와 무한수 4, (12)

3. 개념들간의 연관 관계를 표현하는 관계 테이블

(1) 논리학

관계	토픽 1	토픽 2
실체속성	논리학	논리주의
실체속성	심리학	경험주의
조건현실	논리학	수학
대립	논리학	심리학
대립	수학	심리학
동일	표상	감각 인상
동일	표상	정신적 이미지
동일	표상	관념
대립	개념	표상
주체성질	관념	주관적
주체성질	개념	객관적
실체속성	심리학	경험주의
주장	밀	경험주의
주장	프레게	논리주의
반대	프레게	심리주의
주체성질	관념	발견
주체성질	개념	정당화

(2) 산수 법칙

관계	토픽 1	토픽 2
실체속성	산수 법칙	선천적/후천적
실체속성	산수 법칙	분석적/경험적
용어사용자	선천적/후천적	칸트
용어사용자	분석적/경험적	칸트
내포외연	수학	산수
내포외연	수학	기하학
대립	프레게	칸트
대립	프레게	밀

관계	토픽 1	토픽 2
주장	칸트	직관
주장	밀	물리적 사실
주장	밀	귀납적 진리
반대	프레게	귀납적 진리
대립	산수	기하학

(3) 수

관계	토픽 1	토픽 2
동일	수	기수
주체성질	수	외부사물의 속성
실체속성	수	주관적 창조물
실체속성	수	집합
실체속성	수	대상
주장	외부사물의 속성	칸토르
주장	외부사물의 속성	슈레더
주장	외부사물의 속성	밀
주장	대상	프레게
주장근거	외부사물의 속성	감각
내포	집합	단위
내포	단위	하나
실체속성	하나	성질
실체속성	하나	직관
실체속성	하나	나누어져 있지 않음과 경계지어짐
실체속성	하나	나눌 수 없음
실체속성	하나	동일성
실체속성	하나	다양성
주장	성질	슈레더
주장	직관	라이프니츠
주장	나누어져 있지 않음과 경계지어짐	바우만
주장	나눌 수 없음	쾨프
주장	다양성	지본스
주장	지본스	수의 추상화
주장	프레게	개념
유사	존재	수
결합	단위의 동일성	단위의 구별가능성

(4) 대상

관계	토픽 1	토픽 2
실체속성	대상	자립적 대상
대립	자립적 대상	표상
주장근거	자립적 대상	맥락의 원리
대립	자립적 대상	비공간적
주장근거	자립적 대상	수 동일성
용어사용자	수 동일성	흄
주장근거	자립적 대상	평행
결합	평행	방향
주장근거	수 동일성	대치가능성
용어사용자	대치가능성	라이프니츠
주장근거	수 동일성	방향 개념
실체속성	수	개념의 외연
결합	개념의 외연	관계 개념
내포	수의 정의	0의 정의
내포	수의 정의	1과 다음수의 정의
내포	수의 정의	유한수와 무한수

Ⅲ. 주제어 서술

1. 논리학

(1) 논리주의

<설명ch> 프레게의 『산수의 기초』의 주요 목적은 수학의 증명과 추리들이 모두 논리학의 일반 법칙에 근거하고 있음을 보여주는 것이다. 이러한 과제는 그의 본래적인 목적인, 산술의 증명에 대한 엄정한 논리적 기반 정립에 도움이 되며, 그 구체적 방법은 논리주의(logicism)가 수학과 논리학의 관계를 보여주는 올바른 방법이라는 것을 제공해 준다. 논리주의에 의하면 수학의 기본적인 개념들을 모두 논리적인 개념들로 환원시킬 수 있다. 그러면 수학의 증명에 대해 논리적인 기초를 제공하게 되는 것이다. 논리주의는 환원적인 프로젝트이다. 수학의 증명(개념)을 모두 논리학의 증명(개념)으로 환원시킨다. 예를 들어서 2+2=4라는 수식을 1+1+1+1 = 1+1+1+1와 같이 동일성의 개념으로 환원한다. 19세기 후반 이후 50년간 논리주의의 타당성을 증명하려는 노력이 계속된다. 그러나 결국은 완전무결하게 증명될 수 없다고 밝혀진다. 페아노(Peano)는 산술 체계를 단지 세 개의 무정의 술어(0, 수, 다음수)와 다섯 개의 규칙으로 완전하게 연역을 해낸다. 그 방법이 세련되면서 이런 작업을 프레게 자신도 반복해서 하고 러셀과 화이트헤드의 『프리키피아 마테마티카』(Principia Mathematica)에서 본격적으로 이루어진다.

그리고 프레게는 당대의 많은 수학자들이 철학에 대해 의심의 눈초리를 지니고 있음을 알고 있었다. 그는 그 이유가 철학 자체 내에서의 해로운 혼동, 즉 논리학의 영역과 심리학의 영역을 구분하지 못하는 혼동 때문이라고 주장한다. 그는 심리학이 순수 수학자에게는 아무런 관심거리도 되지 못한다는 데 동의하고, 마찬가지로 논리학은 바르게 이해될 때 심리학과는 아주 다른 어떤 것이다. 그래서 『산수의 기초』에서 많은 부분을 논리학이 심리학과 다름을 논증한다.

<인용 1> 사람들은 이 책을 통해 수학에 고유한 것으로 보이는 n에서 n + 1로 나아가는 추리도 논리학의 일반 법칙에 근거하고 있으며, 총체적 사고를 위한 특수 법칙이 필요하지 않다는 점을 깨달을 수 있을 것이다. 물론 우리가 앵무새처럼 말할 수 있듯이, 수 기호를 기계적으로 사용할 수는 있다. 그러나 그것은 결코 사고라고 불릴 수 없을 것이다. 수학의 기호 언어는 진정한 사고를 통해 형성된 후에야, 말하자면 우리를 대신하여 사고하는 일이 가능하다. 이것은 모래가 석영 입자로 이루어진 것처럼 수가 어떤 기계적인 방식으로 특수하게 이루어져 있다는 것을 보여주는 것이 아니다. 내 생각에 수학의 주요 대상과 수학 자체의 지위를 떨어뜨리기에 알맞는 그런 견해를 반박하는 일이 수학자의 관심거리이다. 그러나 우리는 그와 아주 비슷한 말을 수학자들한테서도 듣게 된다. 그 반대로 우리는 수 개념이 산수에서 가장 단순한 개념 가운데 하나지만 다른 과학의 대부분의 개념보다 더 정교한 구조를 가진다는 점을 인정해야 한다(머리말).

<인용 2> 수학과 철학이라는 두 학문의 협력이 양편에서 여러 차례 시도되었지만 바라는 만큼 그리고 아마도 가능한 만큼 성공하지 못했다면, 내 생각에 그 이유는 철학, 심지어는 논리학에까지 심리학적 탐구 방법이 지배하고 있기 때문이다. 수학은 이런 경향과 아무런 관계도 없으며, 이것은 철학적 탐구에 대한 여러 수학자의 혐오를 잘 설명해준다. 예를 들어, 슈트리커처럼 수의 표상은 자동적이며 근육 감각에 의존한다고 말한다면, 수학자는 거기에서 수를 재인식할 수 없으며 그런 문장으로는 아무것도 시작할 수 없게 된다. 근육 감각에 기초를 둔 산수는 확실히 감각적이겠지만, 그 기초만큼이나 모호할 것이다. 그러나 감각은 산수에서 아무런 역할도 하지 못한다. 이전의 감각 인상의 흔적들이 결합된 내부 영상들도 똑같이 아무런 역할도 하지 못한다. 이런 온갖 형상이 지니는 동요나 미결정성은 수학의 개념과 대상이 지니는 결정성이나 고정성과는 뚜렷이 대립된다(머리말).

<인용 3> 한편 수학이 심리학의 어떠한 도움도 거부해야 하는 만큼, 수

학은 논리학과의 밀접한 연관성을 받아들여야 한다. 사실 나는 어떤 식의 명확한 구분도 할 수 없다는 견해에 동의한다. 사람들은 증명의 설득력이나 정의의 정당성에 관한 탐구가 언제나 논리적이어야 한다는 것만큼은 동의할 것이다. 하지만 그런 물음에 대답하지 않고는 필연적 확실성에 도달할 수 없기 때문에, 수학은 결코 그런 물음을 배제할 수 없다(머리말).

<인용 4> 산수 법칙의 본성

나는 이 책에서 산수 법칙이 분석 판단이고, 그래서 선천적일 확률이 높다는 것을 보였기를 바란다. 따라서 산수는 다만 좀더 발전된 논리학일 뿐이며, 모든 산수 문장은, 비록 도출된 것이긴 하지만, 논리 법칙일 것이다. 자연을 설명하는데 산수를 적용하는 일은 관찰된 사실에 대한 논리적인 연구 작업일 것이고, 계산은 결론의 도출일 것이다. 바우만이 생각하듯, 외부 세계에 수 법칙이 적용되기 위해 실제적 검증을 거쳐야 하는 것은 아니다. 왜냐하면 공간적인 것의 총체인 외부 세계에는 개념도 없고 개념의 성질도 없으며 수도 없기 때문이다. 또한 수 법칙은 원래 외부 사물에 적용 가능하지도 않다: 수 법칙은 자연 법칙이 아니다. 그러나 수 법칙은 외부 세계의 사물들에 대해 성립하는 판단들에 적용될 수 있다: 수 법칙은 자연 법칙들의 법칙이다. 수 법칙은 자연 현상들간의 관계를 주장하는 것이 아니라 판단들간의 관계를 주장한다. 그리고 판단에는 자연 법칙도 포함된다(§87).

(2) 수학에서 표상의 역할

<설명ch> 그런데 프레게가 수학에서 심리학적인 사고 과정을 완전히 무시하는 것은 아니다. 수학자도 위에서 말한 감각, 심적 영상, 표상 같은 것을 가지며, 그런 것들이 수학적 사고 과정에서 일정한 역할을 한다는 것을 부정하지 않는다. 다만 그런 것들이 산수의 기초를 제공하는 것은 아니라는 것이다.

프레게는 수학적 사고 과정에서 나타나는 내적 영상이 수학 그 자체와는 아무런 상관이 없다는 것을 보여주기 위해 두 가지 논증을 한다. 첫째는 같은 수에 대해서 사람들이 생각하는 영상이 서로 다르다는 것이다.

수 100에 대해서 어떤 사람은 낱말 ‘백’을 어떤 사람은 글자 C를 떠올릴 수 있기 때문이다. 그러므로 내적 영상은 수학의 본질과 관련이 없다. 둘째는 현대 과학 철학의 용어로 말해 보면 정당화 과정과 발견 과정의 구분에 의한 논증이다. 수학자가 어떤 증명을 하게 되는 과정을 심리학적으로 설명했다고 하자. 그것은 그 증명이 나타나게 되는 인과적 설명일 것이다. 그러나 그것은 그 증명의 타당성과 아무런 상관이 없다. 가령 그 수학자가 꿈에서 어떤 영감을 얻어 증명을 했다 하더라도 수학자들의 관심은 거기에 있는 것이 아니라 증명 과정에 있을 뿐이다. “어떤 문장에 관한 사고 과정을 그 문장의 진리와 혼동해서도 안 된다!” 신경 과학의 발달로 수학자들의 증명 과정이 뇌의 영상 촬영에 의해 드러날지도 모른다. 설령 그런 것이 드러난다고 하더라도 산수의 진리와는 아무런 상관이 없다. 이 주장을 하기 위해 신경 과학이 발달하지 않은 당시에 프레게가 “피타고라스의 정리를 증명하기 위해서는 우리 뇌 속의 인산 성분을 기억해 내는 일이 필수적이라고 생각”(머리말)할 필요가 없다고 말하는 것은 놀랍다.

프레게가 이렇게 정당화 과정과 발견 과정을 구분하는 이유는 다름이 아니라 발생 과정은 주관적이기 때문이다. 그러나 프레게는 산수의 참은 객관적이라는 신념을 가지고 있다. 어떤 수학자가 그 증명을 생각해 내지 못했더라도 그 증명은 이미 존재하고 있었다는 것이다. 그래서 프레게는 “내가 눈을 감는다고 해서 태양이 사라지는 것이 아니듯이, 내가 어떤 문장을 생각하지 않는다고 해서 그 문장이 더 이상 참이 아니게 되는 것은 아니라는 사실을 명심해야 할 것이다”(머리말)라고 말한다. 내가 알든 모르든 2+2= 4인 것이다. 여기에는 발견을 하는 인간의 의식은 진화하지만 정당화되는 산수의 참은 변화(진화)하는 것이 아니라는 생각이 깔려 있다. 만약 산수의 참도 인간의 의식처럼 진화한다면 그것은 변화할 수 있는 것, 곧 주관적인 것이 될 것이다. 프레게는 그러면 다음과 같은 비난이 가능하다고 본다. “그 경우 당신은 2x2= 4라고 생각하지만, 수의 표상에도 발전과 역사가 있다! 우리는 그때 이미 그런 정도의 표상이 존재했는지 의심할 수 있다. 그런 과거에도 이 문장이 성립했다는 것을 당신은 어떻게 아는가? 그 당시 살던 존재는 2x2= 5라는 문장을 믿었는데,

생존 경쟁에서 이루어진 자연 도태를 통해 2x2= 4라는 문장이 발전해 나왔을 수는 없을까? 그리고 같은 방식으로 그 문장은 2x2= 3으로 계속 발전해 갈 수는 없을까?” (머리말) 그러나 프레게는 산수의 참은 고정적인 것이고 불변의 것이며 객관적인 것이라고 생각하고 심리학으로서는 이것을 설명할 수 없다고 주장하는 것이다.

<인용 1> 물론 수학적 사고 과정에서 나오는 표상이나 그런 표상의 변화를 탐구하는 일은 쓸모가 있다. 그러나 심리학이 산수의 기초를 제시하는 데 어떤 식으로든 기여할 수 있다고 생각할 수는 없다. 이런 내적 영상이나 그런 영상의 발생과 변형은 수학자 자신과는 아무런 상관도 없다. 슈트리커 자신은 ‘백’이라는 낱말에서 기호 100 이외에는 아무 것도 표상하지 못한다고 말한다. 다른 사람은 문자 C나 또는 그밖의 것을 표상할 수도 있을 것이다. 그러므로 이로부터 이런 내적 영상들은 우리가 관심을 갖는 문제의 본질과는 무관하며, 칠판과 분필처럼 우연적이고, 그런 영상이 결코 백이라는 수의 표상을 의미하도록 사용되지는 않는다는 점이 따라나오지 않는가? 우리는 문제의 본질이 그런 표상에 있다고 보아서는 안 된다! 우리는 표상이 생기는 방식의 묘사를 정의로 간주해서도 안 되고, 문장을 의식하기 위한 정신적? 육체적 조건의 서술을 증명으로 간주해서도 안 되며, 어떤 문장에 관한 사고 과정을 그 문장의 진리와 혼동해서도 안 된다! 내가 눈을 감는다고 해서 태양이 사라지는 것이 아니듯이, 내가 어떤 문장을 생각하지 않는다고 해서 그 문장이 더 이상 참이 아니게 되는 것은 아니라는 사실을 명심해야 할 것이다. 만약 그렇지 않다면, 우리는 피타고라스의 정리를 증명하기 위해서는 우리 뇌 속의 인산 성분을 기억해 내는 일이 필수적이라고 생각하게 될 것이고, 천문학자는 누군가가 다음과 같이 자신을 비판할까 두려워 자신의 추리를 아주 오래 전의 과거까지 확장하는 일을 꺼리게 될 것이다. “그 경우 당신은 2x2= 4라고 생각하지만, 수의 표상에도 발전과 역사가 있다! 우리는 그때 이미 그런 정도의 표상이 존재했는지 의심할 수 있다. 그런 과거에도 이 문장이 성립했다는 것을 당신은 어떻게 아는가? 그 당시 살던 존재는 2x 2= 5라는 문장을 믿었는데, 생존 경쟁에서 이루어진 자연 도태를 통해 2x2= 4라는 문

장이 발전해 나왔을 수는 없을까? 그리고 같은 방식으로 그 문장은 2x2=3으로 계속 발전해 갈 수는 없을까?" 실재에는 분수가 있고, 요컨대 고정된 한계가 있다! 사물의 과정을 추적하고, 그 과정에서 사물의 본성을 인식하려는 역사적 탐구 방법은 확실히 정당하지만, 그 방법에는 한계도 있다. 만약 사물의 끝없는 흐름 속에서 고정된 것, 영원한 것이 전혀 남지 않는다면, 우리는 더 이상 세계를 인식할 수 없을 테고, 모든 것은 혼란에 빠질 것이다. 사람들은 나무에서 잎이 피어나듯, 마치 개념도 개인의 정신에서 생겨난다고 생각하며, 개념의 발생을 탐구하고 인간 정신의 본성에 근거하여 개념을 심리학적으로 설명함으로써 개념의 본성을 인식할 수 있다고 믿는 것 같다. 그러나 이런 견해는 모든 것을 주관적인 것으로 바꾸어 버리며, 그 견해를 끝까지 밀고 나가면 진리마저 사라지게 된다. 개념의 역사라고 하는 것은 사실 개념 인식의 역사이거나 낱말의 의미에 대한 인식의 역사이다. 어떤 개념을 순수하게 인식하고 그리고 그 개념에서 정신의 눈을 가리는 낯선 이물질들을 성공적으로 제거해 내기 위해서는 수세기가 걸리는 엄청난 정신적 노력을 들여야 하는 경우도 있다. 만약 어떤 사람이 우리가 보기에 아직 완성되지도 않은 그 일을 계속하기보다는 그것을 아무 것도 아닌 것처럼 무시하고, 유치원이나 인류 발달의 아주 초기 단계로 돌아가 가령 존 스튜어트 밀처럼 거기서 과자 산수나 조약돌 산수를 발견하려 한다면, 도대체 우리는 무슨 말을 해야 하는가! 남은 일은 수 개념의 특수한 의미를 과자의 감칠맛에 부여하는 일밖에 없을 것이다. 그러나 이것은 합리적인 절차와는 정반대의 절차이며, 어느 모로 보든지 가장 비수학적이다. 수학자들이 그런 절차에 대해 아무것도 알고 싶어하지 않는 것은 아주 당연하다! 개념의 원천이라고 여겨지는 곳에 가까이 갔다고 해서 개념을 특히 순수하게 발견하는 것은 아니며, 모든 것은 마치 안개 속에서처럼 희미하고 구분되지 않은 것으로 보인다. 이것은 마치 아메리카에 관해 배우고 싶어하는 사람이 인도라고 생각한 곳에 대한 희미한 느낌을 처음으로 가졌을 때의 콜롬부스가 처했던 상황으로 되돌아가려는 것과 같다. 물론 그런 비교는 아무 것도 입증해주지 않는다. 하지만 바라건대 그런 비교는 내 견해를 분명히 해 줄 것이다. 사실 발견의 역사는 또 다른 연구를 위한 준비에 도움이 될 수도 있

다. 그러나 그런 준비가 연구의 자리를 차지하려 해서는 안 된다.

사실 수학자들을 위해서라면 그런 견해를 비판하는 일은 별로 필요하지 않았을 것이다. 그러나 나는 철학자들을 위해서도 관련된 논쟁점을 가능한 한 해결하고 싶었기 때문에, 수학에 대한 심리학의 영향을 막아내기 위한 것이긴 하지만, 어느 정도 심리학에 끼어들지 않을 수 없었다.

게다가 수학 교과서에도 심리학적 용도의 말들이 나온다. 어떤 사람이 정의를 해야 한다고 느끼지만 그럴 수 없을 때, 그는 적어도 문제의 대상이나 개념에 도달하는 방법을 묘사하려 할 것이다. 이런 사례는 그런 설명이 이후의 절차에서 더 이상 언급되지 않는다는 사실에 비추어 쉽게 찾을 수 있다. 가르칠 목적으로 어떤 주제를 소개하는 일은 아주 적절하지만, 그런 소개는 언제나 정의와는 분명하게 구분되어야 한다. 수학자들마저도 증명의 근거와 증명을 하기 위한 내적, 외적 조건을 혼동할 수 있음을 보여주는 재미있는 예는 슈뢰더에서 찾아볼 수 있다. 그는 '유일 공리'라는 제목으로 다음과 같이 말하고 있다. "의도된 원리는 사실 기호 지탱의 공리라고 불릴 수도 있다. 그 공리는 기호가 우리의 논의 전개 및 추리의 귀결에서 언제나 우리 기억 속에 하지만 종이 위에서는 더 확고하게 유지된다는 것을 보증해 준다" 등등(머리말).

<인용 2> 나는 이 연구의 근본 원리로 다음 원리들을 세워놓았다.

심리적인 것과 논리적인 것, 주관적인 것과 객관적인 것이 명확히 구분되어야 한다.

첫째 원리를 따르기 위해 나는 '표상'이라는 낱말을 언제나 심리적인 뜻으로 사용하고, 개념과 대상을 표상과 구분하였다. 만일 우리가 둘째 원리를 지키지 않는다면, 우리는 내부 영상이나 개인 정신의 작용을 낱말의 의미로 간주하여 첫째 원리도 어기지 않을 수 없게 된다. 셋째 논점과 관련해서 보면, 개념을 바꾸지 않고도 개념이 대상으로 될 수 있다고 생각하는 것은 환상일 뿐이다. 이로부터 분수, 음수 등에 관해 널리 퍼진 형식주의 이론은 유지될 수 없다는 사실이 따라나온다. 내가 생각하는 개선 방안에 관해서는 이 책에서 단지 암시될 수 있을 뿐이다. 결국 이런

모든 경우에도, 양의 정수의 경우와 마찬가지로, 등식의 뜻을 고정하는 것이 중요하다(머리말).

<인용 3> 수 형성에 대한 립쉬츠의 묘사는 옳지 않으며 개념 규정을 대신하지도 못한다. 수는 심리학의 대상이 아니라 객관적인 것이다.

이런 사고 노선을 따르게 되면 수를 주관적인 것으로 여기게 되기 쉽다. 수가 우리에게 생겨나게 되는 방식이 수의 본질을 밝혀주는 열쇠인 듯이 보인다. 따라서 그것은 심리학적 탐구의 문제가 된다. 이런 뜻에서 립쉬츠는 다음과 같이 말한다.

"어떤 사물들을 한꺼번에 보려는 사람은 하나의 특정 사물에서 시작하여 그 사물에다가 새로운 사물을 계속 덧붙일 것이다." 이것은 수의 구성 방법이라기보다는 아마 가령 별자리의 직관을 얻는 방법에 훨씬 더 가까운 것으로 보인다. 한꺼번에 보고자 하는 의도는 본질적인 것이 아니다. 왜냐하면 우리는 한 떼의 가축을 볼 때 머리가 몇 개인지 안다고 해서 그 가축 떼를 더 잘 볼 수 있다고 말할 수는 없기 때문이다.

수 판단을 내리기에 앞서 일어나는 심리 과정에 대한 이런 식의 묘사는 수 판단에 맞는 것이라 하더라도 원래의 개념 규정을 결코 대신할 수는 없다. 그런 묘사가 결코 산수 문장의 증명일 수는 없다. 이는 우리에게 수의 성질에 대해 아무 것도 알려주지 않는다. 왜냐하면 가령 북해가 심리학의 탐구 대상이나 심리 과정의 산물이 아니듯이 수도 심리학의 대상이나 심리 과정의 결과가 아니기 때문이다. 지구 표면의 물 가운데 어느 부분을 골라내 그것을 '북해'라고 부르는가는 우리의 임의적 선택의 문제라고 하더라도 이 점이 북해의 객관성에 영향을 주는 것은 절대 아니다. 그것은 북해를 심리학적 방법으로 탐구해야 할 이유가 아니다. "북해는 10,000평방 마일에 걸쳐 있다"고 말할 때 우리는 '북해'를 통해서도 '10,000'을 통해서도 우리 마음속의 상태나 과정을 말하는 것이 아니다. 도리어 우리는 우리의 표상이나 이런 종류의 어떤 것과도 독립되어 있는 아주 객관적인 것을 주장한다. 다른 기회에 우리가 북해의 경계를 이전과는 다른 식으로 정하거나 '10,000'을 다른 어떤 것으로 이해하려 할지라도, 이전에 옳던 동일한 내용이 거짓이 되는 것은 아니다. 오

히려 참인 내용의 자리에 거짓 내용이 들어온 것일 뿐이어서, 그 때문에 처음 내용의 진리가 거부되는 것은 결코 아니다.

식물학자가 어떤 꽃의 색에 대해 말할 때 그는 사실적인 무엇을 주장하는 것이듯이, 그가 꽃잎의 수에 대해 말할 때에도 그는 사실적인 것을 주장한 것이다. 전자와 마찬가지로 후자도 우리의 자의적 선택에 달린 것이 아니다. 따라서 수와 색 사이에는 일정한 유사성이 있다. 그러나 그 유사성은 감각을 통해 외부 사물에서 그 둘을 알 수 있다는 데 있는 것이 아니라, 그 둘 모두 객관적이라는데 있다. 나는 객관적인 것을 손으로 잡을 수 있는 것, 공간적인 것, 현실적인 것과 구분한다. 지구 축, 태양계의 질량 중심은 객관적이지만, 나는 그것들을 지구 자체처럼 현실적이라고 부르고 싶지는 않다. 우리는 흔히 적도를 가상의 선이라 부른다. 그러나 그것을 허구의 선이라고 부르는 것은 잘못일 것이다. 적도는 사고를 통해 생긴 심리 과정의 산물이 아니라 사고를 통해 인식되고 파악될 뿐이다. 만일 인식되는 것이 곧 생겨나는 것이라면, 우리는 이른바 그것이 생기기 이전 시기의 적도에 대해서는 어떠한 적극적인 주장도 할 수 없어야 할 것이다.

칸트에 따르면 공간은 현상에 속한다. 우리와 다른 이성적 존재는 우리와는 아주 다르게 공간을 표상할 지도 모른다. 사실 우리는 한 사람에게 나타나는 공간이 다른 사람에게 나타나는 공간과 똑 같은 지도 알 수 없다. 왜냐하면 이들을 비교하기 위해 한 사람의 공간 직관을 다른 사람의 공간 직관과 나란히 놓을 수가 없기 때문이다. 그렇지만 그 안에는 객관적인 것이 포함되어 있다. 모든 사람은, 오직 행동을 통해서라고 하더라도, 동일한 기하학적 공리들을 인정하며, 적어도 자신이 갈 길을 제대로 알려면 그렇게 해야만 한다. 이 경우 객관적인 것은 법칙에 맞는 것, 개념적인 것, 판단 가능한 것, 말로 표현 가능한 것이다. 순전히 직관적인 것은 전달될 수 없다. 이 점을 명확히 하기 위해 두 이성적 존재를 가정하자. 그리고 그들은 한 직선에 세 점이 있음, 한 평면에 네 점이 있음 등과 같이 오직 투사된 성질과 관계만을 직관할 수 있다고 해보자. 그렇다면 한 사람에게 점으로 직관되는 것이 다른 사람에게는 평면으로 보일 수도 있고 그 반대일 수도 있다. 한 사람에게는 점들이 결합된 선인데 다

른 사람에게는 평면들의 교차 선으로 보이는 등, 항상 두 직관이 대응하게 될 것이다. 사영 기하학에서는 각 정리에 또 다른 정리가 이원적으로 맞서 있으므로 그들은 상대의 말을 아주 잘 이해하면서도 직관의 차이는 알아채지 못할 수도 있다. 왜냐하면 감성적인 평가가 다르다는 것이 결정적 증거가 될 수는 없을 것이기 때문이다. 그들은 모든 기하학적 정리와 관련하여 완전한 견해의 일치를 볼 것이고, 단지 그 말들을 그들 각자의 직관에 의해 번역할 때만 차이를 보일 것이다. 한 사람은 '점'이란 낱말에 이 직관을 다른 사람은 저 직관을 연결할 것이다. 따라서 우리는 여전히 그들에게는 이 낱말이 객관적인 것을 의미한다고 말할 수 있다. 다만 우리는 이 의미를 그들의 직관의 특성으로 이해해서는 안 된다. 그리고 이런 뜻에서 지구 축도 객관적이다.

우리는 보통 '흰'이란 말로 어떤 감각에 대해 생각하며, 이것은 물론 전적으로 주관적이다. 그러나 일상적인 언어 사용에서도 그 말은 내가 보기에 종종 객관적인 뜻을 지니고 있다. 눈이 희다고 할 때, 우리는 통상적인 빛에서 어떤 감각을 통해 인식된 객관적 특성을 표현하려는 것이다. 만약 눈이 색깔을 가진 것으로 보인다면, 우리는 이를 고려해 판단한다. 사람들은 아마도 다음과 같이 말하게 된다. "눈이 지금은 붉게 보이지만 눈은 실제로 희다." 또한 색을 감각으로 구분하지 못하는 색맹인 사람도 빨강과 파랑에 대해 말할 수 있다. 그는 다른 사람들이 구분한 바에 따라 혹은 물리학적 실험을 통해 그 차이를 인식한다. 따라서 색 표현은 우리의 주관적인 감각, 즉 다른 사람의 감각과 일치하는지를 알 수 없는 왜냐하면 같게 불린다고 해서 이들이 일치한다는 것이 보장되는 것은 결코 아니기 때문이다 그런 감각을 나타내는 것이 아니라 오히려 객관적 특성을 나타낸다. 바로 이런 식으로 나는 객관성을 우리의 감각이나 직관, 표상과 독립해 있고, 이전 감각의 기억에서 내적 영상을 구성하는 일로부터 독립해 있는 것으로 이해하지만, 이성으로부터 독립해 있는 것으로는 이해하지 않는다. 왜냐하면 이성으로부터 독립해 있는 것이 무엇인가 하는 물음에 대답하는 것은 판단하지 않고 판단하는 것이며, 물 안 묻히고 옷을 빠는 것이기 때문이다(§26).

<인용 4> 슐뢰밀히의 견해처럼 수가 계열에서 대상 자리의 표상인 것은 아니다.

그 때문에 나는 수를 계열에서 대상 자리의 표상이라 부르는 슐뢰밀히의 견해에도 동의할 수 없다. 만약 수가 표상이라면, 산수는 심리학일 것이다. 그러나 가령 천문학이 심리학이 아니듯이, 산수도 심리학이 아니다. 천문학이 행성의 표상이 아니라 행성 자체를 다루듯, 산수의 대상도 표상이 아니다. 만약 2가 하나의 표상이라면, 그것은 무엇보다도 나만의 표상일 것이다. 다른 사람의 표상은 이미 그 자체로 다른 표상이다. 그렇다면 우리는 아마도 수백만 개의 2를 가지게 될 것이다. 우리는 나의 2, 너의 2, 하나의 2, 모든 2라고 말해야 할 것이다. 우리가 잠재적인 무의식적 표상도 인정한다면, 나중에 다시 의식될 무의식적인 2들도 있을 것이다. 새 세대의 어린이들이 자라남에 따라 새로운 세대의 2가 끊임없이 생겨날 것이고, 몇 천년 뒤에는 2들이 진화해서 2+ 2가 5가 될지 누가 알겠는가? 그렇게 된다고 할지라도 우리는 여전히, 일상적으로 생각하듯이, 무한히 많은 수가 있는지는 의심스러울 것이다. 아마 1010이 단지 빈 기호일지도 모르고, 그렇게 불릴 수 있는 표상은 아무 것도 없을지 모른다.

우리는 수가 표상이라는 생각을 더 밀고 나가면 어떤 놀라운 결과에 이르는지 보았다. 그리고 수는 밀의 조약돌이나 과자 무더기처럼 공간적이고 물리적인 것이 아니며, 표상처럼 주관적인 것도 아니고, 비감각적이고 객관적인 것이라는 결론에 도달하였다. 객관성의 근거는 우리 마음의 영향을 받아 전적으로 주관적인 감각 인상에 있지 않으며, 내가 아는 한, 오직 이성에 있다.

가장 정확한 학문이 아직도 불확실하게 더듬거리는 심리학에 기초를 두고 있다면 그것은 기괴한 일일 것이다(§27).

<인용 5> 우리는 그의 견해에 대해 다음의 반론을 제기할 수도 있다: 그 경우에는 같은 수가 등장할 때마다 언제나 동일한 위치 표상이 나타나야 하지만, 그것은 분명히 거짓이다. 그가 표상을 객관적인 관념(Idee)으로 이해하려 했다면, 다음의 논의는 그에게는 해당되지 않을 것이다. 그러나 그렇다면 위치 표상과 위치 자체 사이에 무슨 차이가 있겠는가?

주관적인 뜻의 표상은 심리학의 연상 법칙과 관련된 것이다. 그것은 감각 가능하고 시각적 영상의 성격을 지니고 있다. 객관적인 뜻의 표상은 논리학에 속하며, 원리상 감각할 수 없다. 물론 객관적인 표상을 의미하는 낱말이 때때로 주관적인 표상을 동반하기도 하지만, 그럼에도 그런 주관적 표상이 낱말의 의미는 아니다. 주관적 표상은 사람마다 분명히 서로 다르게 나타나는 경우가 많지만, 객관적인 표상은 누구에게나 동일하다. 우리는 객관적인 표상을 대상과 개념으로 나눌 수 있다. 나는 혼란을 피하기 위해서 '표상'이란 낱말을 주관적인 뜻으로만 사용할 것이다. 칸트는 그 낱말을 두 가지 의미로 사용하였기 때문에, 그의 이론은 그처럼 매우 주관적이고 관념론적인 색조를 지니게 되었고, 그의 진짜 견해가 무엇인지 알기가 어려웠다. 여기서 구분한 것은 심리학과 논리학의 구분만큼 정당하다. 이 구분을 언제나 엄밀하게 유지해야 할 것이다!(§27 주석)

(3) 관념과 개념의 구분

<설명ch> 프레게는 수학과 심리학을 구분하기 위해 관념과 개념을 구분한다. 곧 관념은 심리학의 연구 대상인 심적 이미지이며, 개념은 수학자의 연구 대상이라는 것이다. 프레게는 '개념'에 대해서는『산수의 기초』보다『개념 표기법』에서, 그리고 그의 언어 철학에서 개념과 대상을 구분하면서 자세히 설명된다. 곧 개념은 수학의 함수 개념과 비슷한데, 일정한 형이상학적 실체를 지시하는 독립된 언어적인 표현이 아니라, 수학에 있어서의 함수와마찬가지로 불완전한, 채워지지 않은 것이다.

<인용 1> 첫째 원리를 따르기 위해 나는 '표상'이라는 낱말을 언제나 심리적인 뜻으로 사용하고, 개념과 대상을 표상과 구분하였다(머리말).

2. 산수 법칙

(1) 산수 법칙의 본성

<해설ch> 산수 법칙의 본성에 관한 문제 산수 법칙은 선천적인가 또는 후천적인가, 산수 법칙은 종합적인가 또는 분석적인가? 이다. 그는 이 문제에 대한 탐구는 철학적이면서 동시에 수학적이라고 밝히고 있다(§3). 산수 법칙의 본성에 대한 물음, 즉 산수의 진리가 선천적인가 아니면 후천적인가, 종합적인가 아니면 분석적인가 하는 물음에서 이 개념들 자체는 철학에 속하지만, 수학의 도움이 없다면 어떤 결정도 할 수 없기 때문이다. 그리고 그는 이 탐구는 절대 심리학의 영역은 아님을 다시 한번 강조하고 있다.

프레게는 칸트와 밀의 견해를 소개하고 이를 논박하는 방식으로 자신의 견해를 주장한다.

<인용 1> 그러한 탐구의 철학적 동기: 수의 법칙이 분석적 진리인가 종합적 진리인가, 선천적 진리인가 후천적 진리인가를 둘러싼 논란. 이들 표현의 뜻.

내가 이런 탐구를 하게 된 데는 철학적인 동기도 있었다. 이 경우 산수의 진리의 본성에 대한 물음, 즉 산수의 진리가 선천적인가 아니면 후천적인가, 종합적인가 아니면 분석적인가 하는 물음이 대답되어야 한다. 왜냐하면 이 개념들 자체는 철학에 속하지만, 내가 믿기로는 수학의 도움이 없다면 어떤 결정도 할 수 없기 때문이다. 물론 이 결정은 우리가 그 물음을 어떤 뜻으로 해석하는가에 달려 있다.

어떤 문장의 내용이 알려지고 난 후에, 다른 어려운 경로를 통해 엄밀한 증명이 이루어지는 경우도 드물지 않게 있다. 그리고 이런 증명을 통해서야 그 문장의 타당성의 조건이 더 정확히 알려지는 경우도 자주 있다. 따라서 어떻게 우리가 판단의 내용에 도달했는가 하는 물음은 그 주장의 정당성을 우리가 어디에서 끌어냈는가 하는 물음과는 일반적으로 구별되어야 한다.

내 생각으로는 선천적인 것과 후천적인 것의 구분, 종합적인 것과 분석적인 것의 구분은 판단의 내용과 관련된 것이 아니라, 판단을 하는 정당성과 관련된 것이다. 이런 정당성이 없을 경우에는 그런 분류의 가능성도 사라진다. 그렇다면 선천적 오류란 푸른 개념처럼 무의미한 것이다. 만일

우리가 어떤 문장을, 내가 의도한 뜻에서, 후천적이라거나 분석적이라고 한다면, 우리는 이 경우 우리 의식 안에 그 문장의 내용을 형성할 수 있게 해주는 심리학적, 생리학적, 물리학적 조건에 대해 판단하는 것이 아니다. 또한 그것은 어떻게 다른 사람이, 아마도 잘못해서, 그것을 참이라고 간주하게 되는지에 대해 판단하는 것도 아니다. 오히려 그 경우 우리는 그것을 참이라고 간주하기 위한 궁극적 정당성이 무엇에 근거하는지에 대해 판단하고 있는 것이다(§3).

<해설ch> 프레게는 분석적/경험적, 선천적/후천적의 개념을 일단 칸트가 정의한 용어대로 사용하고 있다. 단 칸트의 용어가 심리학적으로 해석될 여지가 있다면 그것은 배제해야 한다고 지적한다. 프레게는 내용보다는 증명 또는 정당화의 과정을 보고 분석적/경험적, 선천적/후천적의 기준을 정의해야 한다고 생각한다. 어떻게 보면 인식론적 기분보다는 논리학적 기준을 채택한 것 같다. 증명 또는 정당화 과정을 따라가 보아 일반 논리 법칙과 정의의 허용가능성이 그런 법칙에 의해 확립되는 정의에만 도달하게 된다면 그것은 분석적이다. 그러나 다른 특수 과학에 속하는 진리를 그 증명이 포함한다면 그 명제는 종합적이라고 말한다. 또 어떤 진리가 증명이 가능하지도 않고 증명이 필요하지도 않은 일반 법칙으로부터 증명될 수 있다면, 그 진리는 선천적이다. 반대로 진리가 특정 대상에 관한 주장을 포함하고 있는 증명 불가능하고 일반적이지 않은 진리에 호소하지 않고는 증명될 수 없어야 한다.

<인용 1> 따라서 그 물음은 심리학의 영역을 벗어나 있고, 만일 관련된 것이 수학의 진리일 경우, 그 물음은 수학의 영역에 속한다. 문제는 증명을 찾아내고 그것을 근원적 진리에 이를 때까지 소급해서 추적하는 일이다. 우리가 이 과정에서 오로지 일반적인 논리 법칙과 정의들만 마주칠 경우, 그 정의의 허용 가능성이 의존하고 있는 문장들도 고려해야 한다는 것을 전제한다면, 우리는 분석적 진리를 지닌다. 그러나 일반적인 논리적 본성을 지닌 것이 아니라 특수한 지식 영역에 관계하고 있는 진리들을 이용하지 않으면 증명할 수 없는 경우, 그 문장은 종합적이다. 어떤 진리가

후천적이려면 사실, 즉 특정 대상에 관한 주장을 포함하고 있는 증명 불가능하고 일반적이지 않은 진리에 호소하지 않고는 증명될 수 없어야 한다. 반대로 어떤 진리가 증명이 가능하지도 않고 증명이 필요하지도 않은 일반 법칙으로부터 증명될 수 있다면, 그 진리는 선천적이다(§3).

(2) 산수

<해설ch> 프레게는 기학학과 산수를 예로 들어 산수 법칙의 본성에 대해 밝힌다. 프레게는 먼저 산수의 법칙은 어떤가 하고 묻는다. 그는 산수의 법칙은 선천적이며 법칙적이라고 결론 내린다. 법칙이 선천적이라는 것은 그것이 특정 사실에 호소하지 않고 일반 법칙으로부터 증명될 수 있다는 뜻이라고 했다. 산수의 법칙은 경험에 호소하지 않으므로 선천적이다. 그리고 산수의 법칙은 귀납에 의해 성립하는 경험 과학이 아니고 논리학의 법칙으로부터 순수하게 증명될 수 있기 때문에 분석적이라고 말한다.

프레게가 산수가 분석적임을 보여주는 방법은 산수가 공리화되는 것이 아니라 수식이 증명가능하다는 것을 보여주는 것을 통해서이다.

<인용 1> 2 + 2 = 4에 대한 라이프니츠의 증명은 빈틈이 있다. a + b에 대한 그라스만의 정의는 잘못되었다.

다른 철학자나 수학자들은 수식도 증명될 수 있다고 주장하였다. 라이프니츠는 다음과 같이 말한다.

> "4가 3 더하기 1을 나타낸다는 것을 전제한다면, 2 더하기 2가 4라는 것은 직접적 진리가 아니다. 우리는 그것을 다음과 같이 증명할 수 있다.
> 정의: 1) 2는 1 더하기 1이고,
> 2) 3은 2 더하기 1이고,
> 3) 4는 3 더하기 1이다.
> 공리: 우리가 같은 것들을 대신해서 집어넣으면, 등식은 계속 성립한다.
> 증명: 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4
> 정의 1) 정의 2) 정의 3)

따라서 공리에 따라, 2 + 2 = 4."

언뜻 보면, 이 증명은 정의와 도입된 공리만으로 이루어진 것처럼 보인다. 라이프니츠 자신이 다른 곳에서 그렇게 했던 것처럼 공리도 정의로 변형될 수 있을 것이다. 우리는 1, 2, 3, 4에 대해 정의에 포함된 것 이상의 아무 것도 알 필요가 없는 것처럼 보인다. 그렇지만 더 자세히 생각해 보면, 우리는 빈틈을 발견하는데, 그 빈틈은 괄호가 빠져 있기 때문에 숨겨져 있다. 말하자면 다음과 같이 더 정확하게 적어야 할 것이다.

2 + 2 = 2 + (1 + 1)
(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.

여기에는 다음 문장

2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1

이 빠져 있는데, 이 문장은

a + (b + c) = (a + b) + c

의 특수 경우이다. 이 법칙을 전제한다면 우리는 하나 더하기 하나의 식이 모두 그렇게 증명될 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 그렇다면 그것은 수를 모두 선행자에 의해 정의하는 것이다. 사실 나는 어떻게 437986과 같은 수가 라이프니츠의 방법보다 더 적절히 주어질 수 있을지 모르겠다. 그 수에 대한 표상이 전혀 없더라도 우리는 그런 식으로 그 수를 얻을 수 있다. 수들의 무한 집합은 그런 정의를 통해 하나 및 하나씩 더하는 것으로 환원되며, 무한히 많은 수식은 모두 몇 안되는 일반 문장으로부터 증명될 수 있다.

이것은 그라스만과 항켈의 견해이기도 하다. 그라스만은 아래 법칙

a + (b + 1) = (a + b) + 1

을 정의를 통해 얻기 위해 다음과 같이 말한다.

> “a와 b가 기초 계열의 임의의 구성 요소라면, 우리는 합 a + b를 다음 식
> a + (b + e) = (a + b) + e
> 가 성립하는 기초 계열의 구성 요소로 이해한다.”

여기서 e는 양(陽)의 단위를 의미하는 것으로 이해되어야 할 것이다. 우리는 이 설명을 두 가지 이유에서 비판할 수 있다. 첫째, 합이 그 자체에 의해 설명되고 있다. a + b가 무엇을 의미하는지 아직 모른다면, 우리는 a + (b + e)라는 표현도 이해하지 못할 것이다. 그러나 아마 이런 반박은 말 그대로의 표현과는 모순되지만 사실 우리가 합이 아니라 더하기를 설명하고 있다고 말한다면 피할 수 있을지도 모른다. 그러나 그 경우 필요한 종류의 기초 계열의 구성 요소가 하나도 없거나 여러 개라면, a + b는 빈 기호에 불과하다고 여전히 비판할 수 있다. 그라스만은 그런 일이 일어나지 않는다는 것을 전제하고 있을 뿐 증명하지 않고 있으므로, 겉보기에만 엄밀할 뿐이다(§6).

(3) 칸트의 견해 반박

이 설명 과정에서 프레게는 자신과 견해가 다른 칸트와 밀을 반박한다. 칸트는 산수의 법칙이 선천적이지만 종합적이라고 생각하고 밀은 후천적이며 종합적이라고 생각한다. 잘 알다시피 칸트는 합리주의 진영을 대표하고 밀은 경험주의 진영을 대표한다.

칸트는 2+3=5와 같은 수식이 직관적으로 분명하다고 생각하는데 이때 직관이란 손가락을 의미하는 것 같다고 프레게는 말한다. 그것은 분명히 경험적이다. 그러나 프레게는 2+3=5같은 수식이야 정말로 직관적으로 분명할지 모르지만 135664 + 37863 = 173527같은 계산을 손가락으로 어떻게 직관적으로 분명하게 계산할 수 있는지 묻는다. 분명히 그래서 그는 칸트가 작은 수만을 염두에 두고 있었다고 말한다. 작은 수에 관한 식은 직관을 통해 직접 분명하다 할지라도, 큰 수에 관한 식은 증명 가능하다고 보아야 한다. 그러나 작은 수와 큰 수를 구분하기란 모호하다. 10은

큰 수인가 작은 수인가? 10 이상의 수식을 증명할 수 있다면 아까 말한 2+3=5도 증명할 수 있지 않겠는가?

<인용 1> 칸트는 수식이 증명 가능하다는 것을 부정하는데, 항켈은 정당하게도 그렇게 하는 것은 역설적이라고 한다.

우리는 2 + 3 = 5처럼 특정 수를 다루는 수식과 모든 정수에 대해 성립하는 일반 법칙을 구별해야 한다.

몇몇 철학자들은 수식이란 공리처럼 증명 불가능하고 직접적으로 명확하다고 주장한다. 칸트는 수식이 증명 불가능하고 종합적인 것이라고 설명하지만, 수식을 공리라고 부르기는 꺼린다. 왜냐하면 수식은 일반적이지 않으며, 수식의 수도 무한하기 때문이다. 항켈은 정당하게도 이처럼 증명 불가능한 진리들이 무한히 많다는 가정은 부적합하며 역설적이라고 말한다. 사실 그런 가정은 모든 제일원리들을 한번에 다 개괄할 수 있어야 한다는 이성의 요구와 모순된다. 게다가

135664 + 37863 = 173527

은 정말 직접적으로 분명한가? 그렇지 않다! 바로 이 때문에 칸트는 이런 문장이 종합적 본성을 지닌다고 여겼다. 그러나 그 점은 오히려 그런 문장이 증명 불가능하지 않음을 말해 준다. 왜냐하면 그런 문장이 직접적으로 분명하지 않다고 할 경우, 증명을 통해서가 아니라면, 어떻게 우리가 그것을 알 수 있겠는가? 칸트는 손가락이나 점에 대한 직관을 이용할 텐데, 이렇게 되면 그는 자신의 견해와는 상반되게 그런 문장을 경험적인 것으로 보이게 할 위험에 빠지게 된다. 왜냐하면 37863개의 손가락이나 점에 대한 직관은 어느 경우에도 순수하지 않기 때문이다. 또한 '직관' 이란 말도 적절하게 쓰이지 않은 것 같다. 왜냐하면 10개의 손가락도 서로의 위치에 따라 서로 다른 직관을 일으킬 수 있기 때문이다. 그리고 도대체 우리가 135664개의 손가락이나 점에 대한 직관을 가지고 있기나 한가? 만일 우리가 그런 직관을 가지고 있고 37863개의 손가락에 대한 직관과 173527개의 손가락에 대한 직관도 가지고 있다면, 앞의 등식이 증명될 수 없을 경우, 적어도 손가락에 관해서는 그 등식이 옳다는 것이 곧바로 분명해야 할 것이다. 그러나 그렇지 않다.

분명히 칸트는 작은 수들만 염두에 두고 있었다. 그렇다면 작은 수에 관한 식은 직관을 통해 직접 분명하다 할지라도, 큰 수에 관한 식은 증명 가능할 것이다. 그러나 작은 수와 큰 수를 근본적으로 구분하기란 어려우며, 특히 명확한 경계를 그을 수는 없을 것이다. 예컨대 10 이상의 수부터는 수식이 증명될 수 있다면, "왜 5 이상, 2 이상, 1 이상의 경우에는 증명될 수 없는가?" 라고 정당하게 물을 수 있다(§5).

(4) 밀의 견해 반박

<설명ch> 밀은 계산은 정의 자체로부터 따라나오지 않고 관찰된 사실로부터 따라나온다 말한다. 그는 2, 3, 4 등의 수는 각각 물리적 현상을 가리키며 이들 현상의 물리적 속성을 내포한다고 생각한다. 예를 들어 2는 사물의 모든 쌍을 의미하며, 12는 12개짜리의 사물을 의미한다고 본다. 그것들을 그렇게 만드는 것은 물리적인 어떤 것이다. 두 개의 사과와 세 개의 사과가 물리적으로 구분될 수 있음은 부인할 수 없으며, 두 마리의 말과 한 마리의 말 등이 물리적으로 구분될 수 있음도 부인할 수 없다. 그것들은 눈으로 보고 만져보아 서로 다른 현상임을 부인할 수 없기 때문이다 곧 밀에게서 개별 수의 정의는 물리적 사실에 관한 주장을 포함한다. 그래서 대상의 덩어리가 존재하며 그런 물리적 사실은 감각에 ∵ 같은 인상을 만들어 준다. 그리고 이는 ‥ 처럼 두 부분으로 나누어질 수 있는 대상들의 결합이다. 그러면 그것을 우리는 그런 모든 것을 3이라고 받아들이는 것이다. 밀은 세상 모든 것이 굳게 못 박혀 있지 않다는 것이 굉장히 다행스러운 일이라고 말한다. 만일 안 그렇다면 이런 분리는 할 수 없을 것이고 2 + 1도 3이 아닐 것이기 때문이다.

프레게는 밀의 이런 생각의 몇 가지 문제점을 지적한다. 개별 수의 정의는 모두 실제로 특정 물리적 사실을 주장한다면, 우리는 아홉 자리 수를 계산하는 사람의 물리적 지식을 두고 무척이나 놀라워해야 할 것이다. 아마 밀의 견해는 이 사실들을 모두 개별적으로 관찰해야 한다는 것이 아니라 귀납을 통해 그것들을 전체적으로 포괄하는 일반 법칙을 이끌어내면 된다는 것인 듯 하다. 그러나 그런 법칙을 표현하려고 해보면 우리는 그 일이 불가능함을 알게 된다. 나누어질 수 있는 사물들의 커다란 묶음이

있다고 말하는 것으로는 충분하지 않다. 왜냐하면 이 말은 가령 수 1,000,000의 정의에 필요하다고 하는 그런 크기와 그런 종류의 묶음이 있다는 말이 아니며, 그 묶음이 나누어지는 방식을 정확히 말해주는 것도 아니기 때문이다. 밀의 견해에 따르면, 수마다 특별히 하나의 사실이 관찰되어야 한다. 왜냐하면 수 1,000,000의 정의에는 그 수의 고유한 성질이 반드시 속해야 하지만, 일반 법칙에서는 그런 고유성이 바로 사라지기 때문이다. 사실 밀에 따를 때, 우리가 1,000,000 = 999,999 + 1이라고 실제로 표현할 수 있으려면, 어떠한 다른 수의 경우와도 다른 바로 이런 고유한 방식으로 나누어지는 사물들의 묶음을 관찰해야만 한다.

또 수 0은 수수께끼일 뿐이다. 왜냐하면 지금까지 누구도 0개의 조약돌을 보거나 만져본 적이 없기 때문이다. 프레게는 칸트의 경우처럼 밀도 비교적 작은 수에 대해서만, 예컨대 10까지의 수에 대해서만 물리적 사실이 필요하고 나머지 수는 작은 수들을 결합하여 얻을 수 있다고 생각하는 것 같다고 추측한다. 그러나 칸트에 대한 비판에서도 지적했지만 10 이상과 10 이하 수의 구분이 그리 명확한 것이 아니다. 대응하는 묶음을 보지 않고도 순전히 정의를 통해 10+1에서 11이 형성될 수 있다면, 2도 1+1에서 그렇게 결합되지 못할 까닭이 없다.

<인용 1> 개별 수의 정의가 관찰된 사실을 주장하며, 이들로부터 계산이 따라나온다는 밀의 견해는 근거가 없다.

우리는 수식을 증명하기 위한 근거가 되는 일반 법칙이 종합적인지 분석적인지, 후천적인지 선천적인지에 따라 수식도 그렇게 된다고 생각할 것이다. 그러나 존 스튜어트 밀의 견해는 이와 정반대이다. 처음 보기에는 그도 라이프니츠처럼 개별 수를 설명하기 때문에 라이프니츠와 마찬가지로 그 학문을 정의에 근거지우려는 것처럼 보인다. 하지만 그는 모든 지식이 경험적이라는 선입견 때문에 곧 옳은 사상에서 벗어나게 된다. 그래서 밀은 개별 수에 대한 정의들은 논리적인 뜻의 정의가 아니며, 그 정의들은 표현의 의미를 고정할 뿐 아니라 그와 함께 관찰된 사실도 주장한다고 말한다. 도대체 수 777864의 정의에서 주장된다고 하는 관찰된 사실, 또는 밀의 말대로, 물리적 사실이 무엇이겠는가? 우리에게 나타나는

막대한 전체 물리적 사실 가운데 밀은 고작 수 3의 정의에서 주장된다고 하는 사실만을 말하고 있다. 그에 따르면 그 물리적 사실은 감각에 ∵ 같은 인상을 만들어 주면서 ‥ 처럼 두 부분으로 나누어질 수 있는 대상들의 결합이 있다는 것이다. 세상 모든 것이 굳게 못 박혀 있지 않다는 것이 얼마나 다행스러운가! 만일 그렇다면 이런 분리는 할 수 없을 것이고 2 + 1도 3이 아닐 것이다! 밀이 수 0과 1의 기초가 되는 물리적 사실을 묘사하지 않았다는 것이 얼마나 유감스러운가!

이어서 밀은 말한다. "이 명제가 인정되고 나면, 우리는 그런 모든 부분들을 3이라 부른다." 우리는 이로부터 시계가 세 번 칠 때 세 번 침이라고 말하거나 단맛, 신맛, 쓴맛을 세 가지 미각이라고 부르는 것은 사실상 옳지 않다는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 '등식을 푸는 세 가지 방법'이라는 표현도 인정될 수 없다. 왜냐하면 우리는 그것들에 관해 ∵ 같은 감각 인상을 한번도 가진 적이 없기 때문이다.

그런데 밀은 이렇게 말한다. "계산은 정의 자체로부터 따라나오지 않고 관찰된 사실로부터 따라나온다." 그렇다면 라이프니츠는 앞에 나온 문장 2 + 2 = 4를 증명할 때, 어디에서 문제의 그 사실에 호소해야 하는가? 밀은 5 + 2 = 7이란 문장을 라이프니츠와 꼭 같은 방식으로 증명하면서도 빈틈을 지적하는 일은 빠뜨린다. 그는 라이프니츠처럼 괄호를 빠뜨림으로써 실제로 존재하는 빈틈을 간과한다.

개별 수의 정의는 모두 실제로 특정 물리적 사실을 주장한다면, 우리는 아홉 자리 수를 계산하는 사람의 물리적 지식을 두고 무척이나 놀라워 해야 할 것이다. 아마 밀의 견해는 이 사실들을 모두 개별적으로 관찰해야 한다는 것이 아니라 귀납을 통해 그것들을 전체적으로 포괄하는 일반 법칙을 이끌어내면 된다는 것인 듯 하다. 그러나 그런 법칙을 표현하려고 해보면 우리는 그 일이 불가능함을 알게 된다. 나누어질 수 있는 사물들의 커다란 묶음이 있다고 말하는 것으로는 충분하지 않다. 왜냐하면 이 말은 가령 수 1,000,000의 정의에 필요하다고 하는 그런 크기와 그런 종류의 묶음이 있다는 말이 아니며, 그 묶음이 나누어지는 방식을 정확히 말해주는 것도 아니기 때문이다. 밀의 견해에 따르면, 수마다 특별히 하나의 사실이 관찰되어야 한다. 왜냐하면 수 1,000,000의 정의에는 그 수

의 고유한 성질이 반드시 속해야 하지만, 일반 법칙에서는 그런 고유성이 바로 사라지기 때문이다. 사실 밀에 따를 때, 우리가 1,000,000 = 999,999 + 1이라고 실제로 표현할 수 있으려면, 어떠한 다른 수의 경우와도 다른 바로 이런 고유한 방식으로 나누어지는 사물들의 묶음을 관찰해야만 한다(§7).

<인용 2> 이 정의들이 정당성을 갖기 위해 그런 사실들이 관찰될 필요는 없다.

밀은 그가 말하는 사실들이 관찰되기 전에는 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1 등의 정의가 허용되지 않는다고 생각하는 것 같다. 사실 2 + 1과 결부되는 뜻이 전혀 없다면, 우리는 3을 2 + 1로 정의해서는 안 된다. 그러나 그런 정의를 위해 어떤 묶음과 그 묶음의 분리를 관찰할 필요가 있는지는 의문이다. 만약 그렇다면 수 0은 수수께끼일 뿐이다. 왜냐하면 지금까지 누구도 0개의 조약돌을 보거나 만져본 적이 없기 때문이다. 물론 밀은 0을 아무런 뜻도 없는 것이라고, 순전히 말하는 방식이라고 설명할 것이다. 그러면 0이 나오는 계산은 순전히 빈 기호를 가지고 하는 놀이가 될 것이고 그런 놀이에서 어떻게 합리적인 일이 생길 수 있는지 놀라울 뿐이다. 그러나 이런 계산이 중요한 의미를 지닌 것이라면, 기호 0도 전혀 뜻이 없지는 않을 것이다. 그리고 이 점은 밀이 언급한 사실이 관찰되지 않더라도, 2 + 1이 0과 비슷한 방식으로 여전히 뜻을 지닐 수 있음을 보여준다. 밀이 18자리 수의 정의에 포함되어 있다고 하는 사실을 과연 누가 관찰했다고 주장하겠는가? 그런데도 그런 수 기호가 뜻이 있다는 것을 누가 부정하겠는가?

아마도 비교적 작은 수에 대해서만, 예컨대 10까지의 수에 대해서만 물리적 사실이 필요하고 나머지 수는 작은 수들을 결합하여 얻을 수 있다고 생각하는 사람이 있을지 모른다. 그러나 대응하는 묶음을 보지 않고도 순전히 정의를 통해 10과 1(10 und 1)에서 11이 형성될 수 있다면, 2도 1과 1(1 und 1)에서 그렇게 결합되지 못할 까닭이 없다. 수 11이 나오는 계산이 그것을 나타내는 사실에서 따라나오지 않는다면, 2가 나오는 계산은 어떤 묶음과 그 묶음의 고유한 분리에 대한 관찰에 근거해야 한다는

것이 어떻게 가능하겠는가?

우리가 감각을 통해서는 어느 사물도 구별할 수 없거나 세 사물만을 구별할 수 있다면, 산수가 어떻게 성립할 수 있는지 물을 수도 있을 것이다. 산수 문장과 산수 문장의 사용에 대한 우리의 지식이 그런 처지에 있다는 것은 걱정되는 일이긴 하지만, 그 사실이 산수 문장의 진리에 영향을 주는가? 어떤 문장의 내용을 의식하기 위해서는 관찰을 해야 한다는 이유로 그 문장을 '경험적'이라 부른다면, 그 말은 '선천적'이라는 말과 대립된 뜻으로 사용된 것이 아니다. 그 경우 우리는 문장의 내용과 관련된 심리학적 주장을 표명하고 있을 뿐, 문장이 참인지를 탐구하는 것은 아니다. 그런 뜻이라면 뮌히하우젠의 이야기도 모두 경험적일 것이다. 왜냐하면 그런 이야기를 지어낼 수 있기 위해서는 확실히 여러 종류의 관찰이 필요할 것이기 때문이다(§8).

<설명ch> 밀은 언어의 능숙한 조작을 경시한다. 어떻게 논리학의 공허한 형식에서 그런 [풍부한] 내용이 산출될 수 있는가 하고 묻는다. "우리가 언어의 능숙한 조작을 통해 사실들을 발견하고 숨은 자연의 과정을 드러낼 수 있다는 학설은 상식과는 배치된다. 따라서 우리는 그 학설을 믿기 위해서는 이미 철학에서 어떤 진전을 이루었어야만 한다." 밀은 형식주의를 비판하고 있는 것이다. 이에 대한 프레게의 답은 기호는 내용을 가지며 그 내용은 인지 가능하다는 것이다. 그러나 수학자는 기호에서 감각으로 지각할 수 있는 것, 직관할 수 있는 것을 이해하지 않고도 긴 계산을 해낼 수 있다. 그렇다고 해서 그 기호들이 무의미한 것은 아니다. 아마 기호의 내용이 기호의 도움 없이 파악될 수는 없겠지만, 우리는 여전히 기호의 내용과 기호 자체를 구분한다. 우리는 같은 것에 대해 서로 다른 기호가 부여될 수 있음을 잘 알고 있다. 우리는 기호로 구체화된 내용을 논리적으로 다룰 수 있는 방법을 알기만 하면 되는 것이다.

<인용 1> 밀은 그 견해에 반대해서 '언어의 능숙한 조작'을 경시한다. 기호들이 지각 가능한 것을 의미하지 않는다고 해서 공허한 것은 아니다.

그러나 이 견해에도 어려움이 있다. 이처럼 높이 솟아 있고, 가지가 널리 뻗어 있고, 계속해서 자라고 있는 수의 학문이라는 나무가 단지 동일성에 뿌리를 두고 있다는 말인가? 그리고 어떻게 논리학의 공허한 형식에서 그런 [풍부한] 내용이 산출될 수 있는가?

밀은 다음과 같이 말한다. "우리가 언어의 능숙한 조작을 통해 사실들을 발견하고 숨은 자연의 과정을 드러낼 수 있다는 학설은 상식과는 배치된다. 따라서 우리는 그 학설을 믿기 위해서는 이미 철학에서 어떤 진전을 이루었어야만 한다."

만일 우리가 능숙한 조작을 할 때 아무 것도 생각하지 않는다면 그 말은 확실히 옳다. 여기서 밀은 누구도 대변하지 않을 형식주의를 비판하고 있다. 낱말이나 수학 기호를 사용하는 사람은 누구나 그것이 무언가 의미할 것을 요구하며, 아무도 공허한 기호에서 의미있는 것이 나오리라고는 기대하지 않는다. 그러나 수학자는 기호에서 감각으로 지각할 수 있는 것, 직관할 수 있는 것을 이해하지 않고도 긴 계산을 해낼 수 있다. 그렇다고 해서 그 기호들이 무의미한 것은 아니다. 아마 기호의 내용이 기호의 도움 없이 파악될 수는 없겠지만, 우리는 여전히 기호의 내용과 기호 자체를 구분한다. 우리는 같은 것에 대해 서로 다른 기호가 부여될 수 있음을 잘 알고 있다. 우리는 기호로 구체화된 내용을 논리적으로 다룰 수 있는 방법을 알기만 하면 되며, 물리학에 응용할 경우에는 어떻게 현상으로 이행하는지를 알기만 하면 된다. 그러나 그 문장의 진짜 뜻이 그런 응용에 있다고 보아서는 안 된다. 응용의 경우에는 언제나 대부분의 일반성이 상실되고, 특수한 것이 들어오며, 다른 응용 사례에서는 이 특수한 것이 또 다른 것으로 대치된다(§16).

(5) 귀납

<해설ch> 프레게는 산수가 본질적으로 경험 과학이라는 주장을 반박하기 위해 산수가 귀납적 진리라는 것을 반박한다. 밀은 가령 "동일한 것들의 합은 동일하다"는 문장이 귀납적 진리이자 가장 높은 단계의 자연법칙이라 부른다. 그러나 프레게는 그런 법칙이 귀납적 진리이며 자연 법칙이라는 것을 반대한다. 그는 밀이 산수와 산수의 적용을 혼동하고 있다

는 것을 그 근거로 댄다. 밀은 + 기호가 물체나 무더기의 부분들과 전체가 지니는 관계를 표현한다고 생각하는데, 프레게가 보기에 그런 관계가 이 기호의 뜻은 아니다. 5 + 2 = 7은 부피 5인 액체에 부피 2인 액체를 부으면 부피 7인 액체를 얻는다는 사실을 의미하지 않는다. 오히려 이 사실은 그 문장의 응용 사례로서 어떤 특정한 화학 작용이 일어나도 부피가 변하지 않는 경우에만 성립한다. 밀은 언제나 산수 문장의 응용 사례, 흔히 물리적이고 관찰된 사실이 전제가 되는 응용 사례와 순수 수학 문장 자체를 혼동하는 것이다. 덧셈 기호는 여러 응용 사례에서 무더기를 만드는 것과 같은 것처럼 보이지만, 무더기의 형성이 덧셈 기호의 의미는 아니다. 왜냐하면 예를 들어 사건들에 계산을 적용하는 경우처럼 다른 응용 사례에서는 그 문장이 무더기나 모임, 또는 물체와 그 부분들의 관계에 관해 아무 것도 말해 주지 않을 수 있기 때문이다. 덧셈은 일반적으로 물리적 관계와는 일치하지 않는다. 산수는 물리적 관계 이외의 많은 경우에 적용될 수 있다. 따라서 덧셈의 일반 법칙도 자연 법칙일 수 없다.

<인용 1> 밀의 자연 법칙. 밀은 산수의 진리가 자연 법칙이라고 말함으로써 산수의 진리와 그 진리의 적용을 혼동한다.

지금까지 논의된 것을 볼 때 수식은 개별 수의 정의로부터 몇몇 일반 법칙에 의해 이끌어질 수 있으며, 이들 정의는 관찰된 사실을 주장하지 않으며, 그들 정의가 정당하기 위해 관찰된 사실을 전제하지도 않을 것 같다는 점이 드러났다. 따라서 이제 문제는 그런 법칙의 본성을 인식하는 일이다.

밀은 앞에서 말한 식 5 + 2 = 7을 증명하는데 “부분들로 구성된 것은 부분들의 부분들로 구성된다”는 문장을 이용하려 한다. 그는 이 말이 “동일한 것들의 합은 동일하다”는 식으로 알려진 문장의 특징을 아주 잘 표현해 준다고 간주한다. 그는 이 문장을 귀납적 진리이자 가장 높은 단계의 자연 법칙이라 부른다. 그의 견해에 따를 때 증명에서 이 문장이 반드시 필요한 단계인데도 밀은 이 문장을 전혀 언급하지 않는다는 것은 그의 설명이 정확하지 못하다는 점을 드러내 준다. 그러나 그가 말하는 귀납적 진리는 “같은 것들을 대신 집어넣으면, 등식은 계속 성립한다”는 라이프니츠의 공리의 역할을 하기 위한 것으로 보인다. 하지만 밀은

산수의 진리를 자연 법칙이라 부를 수 있게 하기 위해 원래 없던 뜻을 그 진리에 부여한다. 그는 예를 들어 어떤 1파운드의 물건이 다른 1파운드의 물건과 언제나 정확히 같은 무게를 가지는 것은 아니므로, 등식 1 = 1도 거짓일 수 있다고 생각한다. 그러나 문장 1 = 1은 결코 그것을 주장하지 않는다.

밀은 + 기호가 물체나 무더기의 부분들과 전체가 지니는 관계를 표현한다고 생각한다. 그러나 그런 관계가 이 기호의 뜻은 아니다. 5 + 2 = 7은 부피 5인 액체에 부피 2인 액체를 부으면 부피 7인 액체를 얻는다는 사실을 의미하지 않는다. 오히려 이 사실은 그 문장의 응용 사례로서 어떤 특정한 화학 작용이 일어나도 부피가 변하지 않는 경우에만 성립한다. 밀은 언제나 산수 문장의 응용 사례, 흔히 물리적이고 관찰된 사실이 전제가 되는 응용 사례와 순수 수학 문장 자체를 혼동한다. 덧셈 기호는 여러 응용 사례에서 무더기를 만드는 것과 같은 것처럼 보이지만, 무더기의 형성이 덧셈 기호의 의미는 아니다. 왜냐하면 예를 들어 사건들에 계산을 적용하는 경우처럼 다른 응용 사례에서는 그 문장이 무더기나 모임, 또는 물체와 그 부분들의 관계에 관해 아무 것도 말해 주지 않을 수 있기 때문이다. 물론 이 경우에도 우리는 부분들이란 말을 할 수 있다. 그러나 그 경우 우리는 그 말을 물리적인 뜻이나 기하학적 뜻으로 사용하는 것이 아니라, 국가 원수의 살해를 살인 일반의 부분이라고 부르는 것처럼 논리적인 뜻으로 사용한다. 여기서 우리는 논리적 종속을 문제삼는다. 마찬가지로 덧셈은 일반적으로 물리적 관계와는 일치하지 않는다. 따라서 덧셈의 일반 법칙도 자연 법칙일 수 없다(§9).

<설명ch> 프레게는 산수의 법칙이 귀납적 진리가 아니라는 근거를 더 제시한다. 귀납이 성립하려면 귀납 대상의 집합을 이루는 요소들끼리 유사성이 있어야 한다. 그 유사한 사례들에 대해서 일반화를 하는 것이 귀납이다. 그러나 산수의 개별 수는 그렇지 못하다는 것이 프레게의 견해이다. 그는 수에는 유사성이 있다는 필라레테의 주장에 대해 라이프니츠가 대답한 것을 반대 주장으로 내놓는다. 곧 수는 단지 양만 다를 뿐 아니라 유사하지도 않다. 왜냐하면 짝수는 두 개의 같은 부분으로 나눌 수 있고

홀수는 그럴 수 없으며, 3과 6은 3의 배수이고, 4와 9는 제곱수이고, 8은 세제곱수이기 때문이다. 또 도형은 합동은 아니더라도 서로 닮은꼴일 수 있지만, 두 수의 경우에는 절대 그럴 수 없기 때문이다

<인용 1> 덧셈 법칙이 귀납적 진리임을 부정하는 여러 근거: 수들은 같은 종류가 아니며, 우리는 정의를 통해 수들의 공통된 성질들의 집합을 얻지 못하며, 거꾸로 귀납이 산수에 근거할 가능성이 높다.

그래도 아마 덧셈의 일반 법칙이 귀납적 진리일지도 모른다. 어떻게 그렇게 생각할 수 있는가? 어떤 사실로부터 출발해야 일반적인 것으로 나아갈 수 있을까? 분명히 이들 사실은 수식 이외의 것일 수 없다. 그 경우 물론 우리는 개별 수를 정의함으로써 얻게 된 장점을 다시 잃게 되고, 수식들의 기초를 제시하기 위해서는 다른 방법을 찾아야 한다. 쉽게 넘어갈 수 없는 이런 의심들은 제쳐두더라도, 우리는 귀납의 토대가 그리 튼튼하지 않다는 것을 안다. 왜냐하면 다른 경우라면 일률성 때문에 이 방법이 높은 신뢰성을 지닐 수 있게 되지만, 이 경우에는 이 일률성이 빠져 있기 때문이다. 이미 라이프니츠는

"수의 여러 양상은 더 많거나 적은 것 이외에 다른 차이가 있을 수 없다. 따라서 수는 공간과 마찬가지로 단순한 양상을 지닌다."

라고 주장하는 필라레테에게 다음과 같이 대답하였다.

"시간과 직선에 대해서는 그런 말을 할 수 있지만 도형에 대해서는 전혀 그럴 수 없고 수에 대해서는 더더욱 그럴 수 없다. 수는 단지 양만 다를 뿐 아니라 유사하지도 않다. 짝수는 두 개의 같은 부분으로 나눌 수 있고 홀수는 그럴 수 없다. 3과 6은 3의 배수이고, 4와 9는 제곱수이고, 8은 세제곱수이다. 그리고 이 점은 도형의 경우보다 수의 경우에 더욱 더 그렇다. 왜냐하면 두 도형은 합동은 아니더라도 서로 닮은꼴일 수 있지만, 두 수의 경우에는 절대 그럴 수 없기 때문이다."

우리는 여러 관계에 있는 수들을 같은 종류의 것으로 여기는데 익숙하다. 그러나 이렇게 할 수 있는 이유는 오직 우리가 모든 수에 대해 성립하는 일반 문장들을 알고 있기 때문이다. 그러나 지금 우리 입장에서는 아직 그런 문장들 중 어느 것도 알지 못한다고 가정해야 한다. 사실 이

경우에 맞는 귀납 추리의 예를 찾기란 어려울 것이다. 다른 경우에는 대신 보통 공간상의 위치나 시간상의 점은 모두 다른 위치나 점과 마찬가지라는 문장을 예로 든다. 조건이 같기만 하다면, 위치나 시간이 다르더라도 결과는 성립해야 한다. 그러나 수는 공간적이지도 시간적이지도 않으므로 이 경우에는 그렇게 되지 않는다. 수 계열에서의 위치는 공간에서의 위치처럼 아무런 차이가 없는 것이 아니다.

수가 서로 관계맺는 방식은 예를 들어 동물 유의 개별 종이 서로 관계맺는 방식과도 아주 다르다. 왜냐하면 수들은 사태의 본성에 의해 규정되는 등급 순서를 지니고 있고, 각 수는 특별한 방식으로 형성되며, 각자 고유한 성질을 지니고 있기 때문이다. 이런 점은 0, 1, 2에서 특히 두드러지게 나타난다. 이와는 달리 귀납을 통해 어떤 종에 관한 문장을 확립하려 할 경우, 우리는 보통 종 개념의 정의만으로도 이미 어떤 공통된 성질의 계열 전체를 얻게 된다. 반면 수들의 경우에는 먼저 실제로 공통적임을 증명하지 않아도 되는 성질은 하나라도 찾기가 어렵다.

우리의 사례는 다음 사례와 가장 쉽게 비교될 수 있다. 우리가 어떤 땅굴에서 깊이에 따라 온도가 규칙적으로 올라감을 확인하였고, 이제까지 우리는 매우 다양한 암석층과 마주쳤다고 하자. 그 경우 분명히 이 땅굴에서 우리가 관찰한 것만으로는 더 깊은 지층의 특성에 대해 아무 것도 추리할 수 없으며, 온도 분포의 규칙성이 계속해서 유지되는지도 미정으로 남아 있다. '계속 파고 들어갈 때 만나는 것'이라는 개념 아래에는 더 깊이 있는 것만이 아니라 지금까지 관찰된 것도 속한다. 그러나 그 점은 이 경우에 거의 소용이 없다. 마찬가지로 '하나씩 계속 더해서 얻는 것'이라는 개념 아래 수들이 모두 속한다는 것도 아무 소용이 없다. 지층은 단지 마주치는 것이지만 수들은 하나씩 계속 더함으로써 실제로 창조될 뿐만 아니라 자신의 모든 본성이 결정된다는 점에서 우리는 양자의 차이를 알 수 있다. 이것은 하나씩 더함으로써 어떤 수, 예컨대 8을 형성하는 방식으로부터 그 수의 모든 성질이 도출될 수 있다는 것을 의미할 뿐이다. 이로 인해 우리는 수들의 성질이 정의로부터 따라나온다는 것을 근본적으로 인정하게 되며, 이 점을 통해 수들의 일반 법칙을 모든 수에 공통된 형성 방식으로부터 증명할 가능성이 열린다. 반면 개별 수의 특별

한 성질은 하나씩 계속 더함으로써 각 수를 형성하는 특별한 방식으로부터 따라나올 것이다. 지층의 경우에도 우리는 어떤 지층과 만나는 깊이만으로도 이미 정해지는 것, 즉 지층의 위치 관계를 반드시 귀납에 의존하지 않더라도 깊이로부터 바로 추리할 수 있다. 그러나 깊이에 의해 결정되지 않는 것에 관해서는 귀납도 아무 것도 가르쳐 줄 수 없다.

추측하건대 우리가 귀납을 단순한 습관으로 이해하지 않는다면 귀납의 방법 자체는 산수의 일반 문장에 의해서만 정당화될 수 있다. 말하자면, 습관은 진리를 보증할 만한 능력이 전혀 없다. 객관적 척도에 따른 과학적 방법에서는 어떤 경우에 단 하나의 증거만으로도 높은 확률이 보증되고, 다른 경우에는 천배의 일치 사례도 무가치한 것으로 경시되는 반면, 습관은 판단에 전혀 영향을 줄 권리가 없는 회수와 인상의 강도 및 주관적 상황을 통해 결정된다. 귀납은 한 문장이 [참일] 확률이 높다는 것 그 이상을 보여줄 수 없으므로 확률 이론에 근거해야 한다. 이 이론이 산수 법칙을 전제하지 않고 어떻게 전개될 수 있는지 모르겠다(§10).

<인용 2> 귀납의 부적합성. 수 법칙이 분석 판단이리라는 추측. 그렇다면 수 법칙은 어떤 점에서 유용한가? 분석 판단의 가치 평가.

우리가 연역을 아무리 경시한다 하더라도, 귀납에 의해 확립된 법칙들만으로는 충분치 않다는 점은 부인될 수 없다. 그 자체로는 어느 법칙에도 포함되어 있지 않은 새로운 문장이 법칙으로부터 이끌어져야만 한다. 이들 새 문장들이 이미 어떤 식으로 법칙들의 총체 내에 숨어있다고 해서, 법칙들로부터 그 문장들을 이끌어내고 그 문장들을 따로 제시할 필요가 없는 것은 아니다. 이와 함께 다음의 가능성이 열린다. 우리는 추리 계열을 직접 한 사실에 연결시키는 대신 그 사실은 그대로 둔 채 그것의 내용을 조건으로 택할 수 있다. 그렇게 해서 한 사고 계열 내의 모든 사실을 조건으로 대치하면, 우리는 일련의 조건들에 성패가 달려 있는 그런 형식의 결과를 얻는다. 이 진리는 오직 사고에 근거할 것이다. 또는 그것은, 밀의 말을 빌린다면, 언어의 능숙한 조작에만 근거할 것이다. 수의 법칙이 이런 종류의 법칙일 수 없는 것은 아니다. 그렇다면 수의 법칙이 사고만으로 발견될 필요는 없더라도, 그런 법칙은 분석 판단이 될 것이

다. 왜냐하면 여기서는 발견의 방법이 문제되는 것이 아니라 증명 근거의 종류가 문제되기 때문이다. 또는 라이프니츠의 말대로 “여기서는 사람마다 다른 발견의 역사가 문제되는 것이 아니라 언제나 동일한 진리들의 연관성 및 자연적 질서가 문제된다.” 그렇다면 결국 그렇게 확립된 법칙들에 포함된 조건들이 만족되었는지는 관찰에 의해 결정되어야 할 것이다. 따라서 우리는 결국 추리 계열을 관찰된 사실에 직접 연결시킬 때 도달하게 될 위치와 동일한 곳에 도달하게 될 것이다. 그러나 여기서 말한 종류의 절차에 따라 도달하는 일반 문장은 바로 당면한 사실들 이외에도 응용될 수 있기 때문에 그 절차는 여러 경우에 선호될 만하다. 그렇다면 산수의 진리가 논리학의 진리에 대해 지니는 관계는 기하학의 정리가 공리에 대해 지니는 관계와 비슷하다. 산수의 진리는 나중에 사용되기 위해 전체 추리 계열을 집약적으로 자신 안에 포함하게 될 것이고, 우리는 개별적으로 결론을 이끌어낼 필요 없이 전체 [추리] 계열의 결과를 동시에 표현할 수 있다는 이점을 얻게 될 것이다. 산수 이론의 놀랄 만한 발전과 다양한 응용을 볼 때, 분석 판단에 대해 널리 퍼져 있는 평가 절하나 순수 논리학이 전혀 생산성이 없다는 옛날 얘기는 분명히 성립하지 않는다.

내가 보기에 여기서 처음 표명되는 것은 아닌 이 견해를 하나하나 엄격히 관철함으로써 조금도 의심의 여지가 없도록 할 수 있다면, 그것은 결코 사소한 결과가 아닐 것이다(§17).

(6) 기하학

<해설ch> 프레게는 산수에 이어 기하학의 법칙은 선천적이고 종합적이라고 말하는데 이는 칸트와 같은 견해이다. 기하학의 법칙이 선천적인 이유는 기하학의 정의가 일반 법칙으로부터 증명될 수 있고 특정 선이나 도형 혹은 고체에 전혀 호소하지 않기 때문에 선천적이다. 프레게는 그러나 기하학의 공리는 서로 독립해 있으며 원초적인 논리 법칙과도 독립해 있고 결과적으로 종합적임을 보여 준다고 강조한다. 기하학의 공리는 공간적인 개념을 포함하고 있기 때문에 분석적이지는 않다.

<인용 1> 진리의 지배 영역과 관련해 진리들을 비교

진리가 지배하는 영역과 관련해서 진리를 비교해 보더라도, 산수 법칙은 경험적이고 종합적 본성을 지닌 것은 아님이 드러난다.

경험적인 문장들은 물리적 현실이나 심리적 현실에 대해 성립하며, 기하학의 진리들은 현실이든 상상력의 산물이든 상관없이 공간적으로 직관 가능한 것의 영역을 지배한다. 아무리 해괴한 환각 증상이라 해도, 아무리 황당무계한 전설적 이야기나 시인의 창작물이라 해도, 동물이 말을 하고, 별이 가만히 서 있고, 돌이 사람으로 변하고, 사람이 나무로 변하고, 사람이 자기 머리카락을 잡아당겨 늪에서 어떻게 빠져 나오는지를 가르치는 이야기라고 하더라도, 직관할 수 있는 것이기만 하다면 그것들은 여전히 기하학의 공리에 종속된다. 개념적 사고만이 이런 구속에서 어렵게나마 빠져나올 수 있는데, 4차원 공간이나 양의 곡률의 공간을 가정할 경우 그런 일이 가능하다. 그런 탐구가 전혀 쓸모 없는 것은 아니지만, 그것은 직관의 토대를 전적으로 벗어나 있다. 이 경우에도 우리가 직관의 도움을 받는다면, 그것은 언제나 유클리드 공간의 직관이며, 유클리드 공간이 우리가 형상에 대한 직관을 가지는 유일한 공간이다. 다만 그럴 경우에는 직관을 있는 그대로 취급해서는 안 되며 다른 어떤 것에 대한 상징으로 간주해야 한다. 예를 들어 우리는 실제로는 굽은 것으로 직관하는 것을 직선이나 평면이라 부른다. 개념적인 사고의 경우 우리는 언제나 이런저런 기하학의 공리와 반대되는 것을 가정할 수 있는데, 그처럼 직관과 대립된 가정으로부터 결론을 이끌어낼 경우에도 우리 스스로는 모순에 빠지지 않는다. 그런 가정이 가능하다는 것은 기하학의 공리들이 서로 독립적이며 논리학의 근본 법칙들과도 독립적이고 그에 따라 종합적이라는 것을 보여준다. 같은 얘기를 수의 학문의 기초 문장들에 대해서도 할 수 있을까? 우리가 수의 학문의 기초 문장들 가운데 하나라도 부정하려 한다면 모든 것이 혼란에 빠지지 않을까? 그렇게 되면 사고가 불가능하지 않을까? 산수의 기초는 모든 경험적 지식의 기초보다 더 깊은 곳에, 기하학의 지식의 기초보다 더 깊은 곳에 있지 않을까? 산수의 진리들은 셀 수 있는 것의 영역을 지배한다. 그 영역은 가장 넓다. 왜냐하면 현실적인 것, 직관 가능한 것만이 아니라 사고 가능한 모든 것이 그 영역에 속하기 때문이다. 그러므로 수의 법칙은 사고 법칙과 가장 밀접한 관계에 있어야 하

지 않겠는가?(§14)

<인용 2> 분석 판단에 대한 칸트의 평가 절하

칸트는 분명히 개념을 좁게 규정한 탓에 분석 판단의 가치를 낮게 평가하였다. 물론 여기서 사용된 더 넓은 개념이 그에게도 떠오른 것 같기는 하다. 2) 우리가 칸트의 정의를 기초로 삼게 되면, 분석 판단과 종합 판단의 구분은 모든 판단을 다 망라하지 못하게 된다. 그는 전칭 긍정 판단의 경우를 생각하고 있다. 그 경우 우리는 주어 개념이란 말을 할 수 있고, 술어 개념이 정의에 따라 주어 개념에 포함되는지 여부를 물을 수 있다. 그러나 주어가 개별 대상일 경우에는 어떻게 되는가? 존재 판단이 문제가 될 경우에는 어떻게 되는가? 이런 경우에는 그런 뜻의 주어 개념이란 말을 전혀 할 수 없다. 칸트는 특징들을 나열함으로써 개념이 규정된다고 생각한 것 같다. 그러나 그것은 생산성이 거의 없는 개념 형성 방법이다. 우리가 앞에서 다룬 정의들을 다 훑어보더라도 그런 종류의 정의는 전혀 찾아볼 수 없을 것이다. 실제로 수학에서 생산적인 정의들, 예컨대 함수의 연속의 정의에 있어서도 같은 사실이 성립한다. 이 경우 특징들이 그냥 일렬로 나열되는 것이 아니라, 규정들이 긴밀하게, 유기적이라고까지 할 수 있을 정도로, 결합되는 것이다. 우리는 그런 차이가 기하학적인 도형을 통해 직관적으로 드러나도록 할 수 있다. 우리가 개념(또는 개념의 외연)을 평면 위의 영역으로 나타낸다면, 특징들을 나열해 정의한 개념은 그런 특징들을 나타내는 모든 영역이 공통으로 지니는 구역에 해당한다. 그리고 이 영역의 경계는 이미 설정된 경계선들의 부분들로 이루어져 있다. 이런 정의에서 중요한 것은 도형으로 말한다면 어떤 영역을 구획짓기 위해 이미 주어진 선을 새롭게 이용하는 일이다. 그러나 그런 경우에는 본질적으로 새로운 것이라고는 나오지 않는다. 생산적인 개념 규정에서는 이전에 없던 새로운 경계선이 그어진다. 그 규정을 통해 무엇이 귀결될지는 미리 알 수 없다. 여기서 우리는 상자에 집어넣었던 것을 단순히 다시 꺼내는 것이 아니다. 이들 귀결은 우리의 인식을 넓혀주며, 그에 따라 칸트의 견해에서 보면 그것들은 종합적인 것으로 간주되어야 한다. 그러나 그 귀결들은 순수 논리적으로 증명되며 또한 분석적이다. 사

실 그 귀결들은 정의에 포함되어 있지만, [포함되어 있는 방식은] 식물이 씨앗에 포함되어 있는 것처럼 포함되어 있는 것이지 기둥이 집에 포함되어 있는 것처럼 포함되어 있는 것은 아니다. 한 문장을 증명하는데 여러 정의가 필요한 경우도 있는데, 이 경우에도 그 문장은 결과적으로 각각의 개별 정의에는 포함되어 있지 않지만 정의들 전체로부터 순수 논리적으로 귀결된다(§88).

(7) 산수와 기하학의 차이

<설명ch> 프레게는 산수와 기하학을 예로 들어 산수 법칙의 본성에 대해 밝혔다. 그러면서 산수의 법칙은 선천적이면서 분석적이고, 기하학의 법칙은 선천적이며 종합적이라고 말한다. 그래서 산수와 기하학의 차이점에 주목한다. 그는 산수가 진리의 지배 영역에서 다른 학문보다 훨씬 넓음을 강조한다. 산수의 진리들은 셀 수 있는 것의 영역을 지배한다. 그 영역은 가장 넓다. 왜냐하면 기하학이나 심리학이나 물리학은 현실적인 것, 직관 가능한 것만을 다루지만, 사고 가능한 모든 것이 산수의 영역에 속하기 때문이다. 그러므로 수의 법칙은 사고 법칙과 가장 밀접한 관계에 있다. 산수의 기초는 모든 경험적 지식의 기초보다 더 깊은 곳에, 기하학의 지식의 기초보다 더 깊은 곳에 있지 않다.

<인용 1> 산수와 기하학의 차이

일반적으로 산수와 기하학이 밀접하다는 점을 지나치게 강조하지 않는 것이 좋을 것이다. 나는 이에[산수와 기하학이 밀접하다는 점에] 반대하는 라이프니츠의 입장을 이미 인용하였다. 기하학의 한 점은 그것만으로 고려하면 다른 기하학의 점들과 전혀 구별될 수 없다. 같은 사실이 직선과 평면에 대해서도 성립한다. 점, 직선, 평면을 한 직관 안에서 동시에 파악할 때에야 비로소 우리는 그것들을 구분할 수 있다. 기하학에서 일반 문장이 직관을 통해 얻어진다면, 그 이유는 직관된 점, 직선, 평면이 원래 전혀 특별하지 않고 그로 인해 전체 종의 대표자로 간주될 수 있기 때문이라고 할 수 있다. 수의 경우에는 사정이 다르다: 각각의 수는 고유한 성질을 지니고 있다. 우리는 특정 수가 다른 모든 수를 어디까지 대신할

수 있는지, 어느 경우에 그 수의 특수성이 성립하는지를 쉽게 말할 수 없다(§13).

<인용 2> 진리의 지배 영역과 관련해 진리들을 비교

진리가 지배하는 영역과 관련해서 진리를 비교해 보더라도, 산수 법칙은 경험적이고 종합적 본성을 지닌 것은 아님이 드러난다.

경험적인 문장들은 물리적 현실이나 심리적 현실에 대해 성립하며, 기하학의 진리들은 현실이든 상상력의 산물이든 상관없이 공간적으로 직관 가능한 것의 영역을 지배한다. 아무리 해괴한 환각 증상이라 해도, 아무리 황당무계한 전설적 이야기나 시인의 창작물이라 해도, 동물이 말을 하고, 별이 가만히 서 있고, 돌이 사람으로 변하고, 사람이 나무로 변하고, 사람이 자기 머리카락을 잡아당겨 늪에서 어떻게 빠져 나오는지를 가르치는 이야기라고 하더라도, 직관할 수 있는 것이기만 하다면 그것들은 여전히 기하학의 공리에 종속된다. 개념적 사고만이 이런 구속에서 어렵게나마 빠져나올 수 있는데, 4차원 공간이나 양의 곡률의 공간을 가정할 경우 그런 일이 가능하다. 그런 탐구가 전혀 쓸모 없는 것은 아니지만, 그것은 직관의 토대를 전적으로 벗어나 있다. 이 경우에도 우리가 직관의 도움을 받는다면, 그것은 언제나 유클리드 공간의 직관이며, 유클리드 공간이 우리가 형상에 대한 직관을 가지는 유일한 공간이다. 다만 그럴 경우에는 직관을 있는 그대로 취급해서는 안 되며 다른 어떤 것에 대한 상징으로 간주해야 한다. 예를 들어 우리는 실제로는 굽은 것으로 직관하는 것을 직선이나 평면이라 부른다. 개념적인 사고의 경우 우리는 언제나 이런저런 기하학의 공리와 반대되는 것을 가정할 수 있는데, 그처럼 직관과 대립된 가정으로부터 결론을 이끌어낼 경우에도 우리 스스로는 모순에 빠지지 않는다. 그런 가정이 가능하다는 것은 기하학의 공리들이 서로 독립적이며 논리학의 근본 법칙들과도 독립적이고 그에 따라 종합적이라는 것을 보여준다. 같은 얘기를 수의 학문의 기초 문장들에 대해서도 할 수 있을까? 우리가 수의 학문의 기초 문장들 가운데 하나라도 부정하려 한다면 모든 것이 혼란에 빠지지 않을까? 그렇게 되면 사고가 불가능하지 않을까? 산수의 기초는 모든 경험적 지식의 기초보다 더 깊은 곳에, 기하학의

지식의 기초보다 더 깊은 곳에 있지 않을까? 산수의 진리들은 셀 수 있는 것의 영역을 지배한다. 그 영역은 가장 넓다. 왜냐하면 현실적인 것, 직관 가능한 것만이 아니라 사고 가능한 모든 것이 그 영역에 속하기 때문이다. 그러므로 수의 법칙은 사고 법칙과 가장 밀접한 관계에 있어야 하지 않겠는가?(§14)

3. 수

<설명ch> 프레게는 수의 일반 개념, 곧 수가 무엇인지를 묻는다. 더 구체적으로 말하면 3, 4 등의 개별 수와 일반적인 기수(cardinal number) 개념을 구분하여, 기수 개념에 대한 일반적 개념을 찾는다. 개별 수를 하나와 하나씩 더함으로부터 이끌어내는 것이 가장 좋긴 하지만, 하나와 하나씩 더함이 설명되지 않는 한 이런 설명은 여전히 불완전하기 때문이다. 이런 정의로부터 수식을 이끌어내기 위해서는 일반 문장이 필요하다. 그런 법칙은, 바로 그것이 지닌 일반성 때문에, 개별수의 정의로부터 따라나올 수 없고 일반적인 기수 개념으로부터만 따라나올 수 있기 때문이다.

그래서 프레게는 다음과 같은 세 가지 대답을 검토한다.

- 수는 (외부 사물의) 속성이다.
- 수는 주관적 창조물이다.
- 수는 집합이다

그리고 나서 자신의 견해를 밝힌다.

<인용 1> 일반적인 기수 개념을 탐구해야 할 필요성

이제 산수의 근본 대상들을 고려해 보면, 우리는 3, 4 등의 개별 수와 일반적인 기수 개념을 구분하게 된다. 그런데 이미 우리는 라이프니츠, 밀, 그라스만 및 다른 사람들이 했던 방법에 따라 개별 수를 하나와 하나씩 더함으로부터 이끌어내는 것이 가장 좋긴 하지만, 하나와 하나씩 더함이 설명되지 않는 한 이런 설명은 여전히 불완전하다는 것을 분명히 하였다. 이런 정의로부터 수식을 이끌어내기 위해서는 일반 문장이 필요하다

는 것을 우리는 보았다. 그런 법칙은, 바로 그것이 지닌 일반성 때문에, 개별수의 정의로부터 따라나올 수 없고 일반적인 기수 개념으로부터만 따라나올 수 있다. 이제 우리는 이 점을 좀더 정확히 살펴보아야 한다. 이 과정에서 하나 및 하나씩 더함도 틀림없이 논의되리라고 예상할 수 있으며, 이런 논의의 결과로 개별 수를 완전히 정의할 수 있으리라고 기대할 수 있다(§18).

(1) 외부 사물의 속성

<설명ch> 수가 외부 사물의 속성이라는 것은 수가 외부 사물의 성질을 의미하는 단단한, 무거운, 빨간 등의 말과 똑같다는 것이다. 칸토르가 그런 견해를 주장한다. 그는 수학이 외부 세계의 대상에 대한 고찰에서 출발하는 한 경험 과학이라고 부른다. 또 슈뢰더는 빈도는 기수의 다른 표현인데, 빈도나 기수를 색이나 형태와 같은 차원에 두며, 그것들을 사물의 어떤 성질로 여긴다. 나중에 프레게가 이 견해를 비판하기 위해 든 예를 들어 설명해 보면, '네 마리의 멋진 말'이라고 할 때 '멋진'이 '말'을 규정하듯이 '네 마리의'가 '말'을 규정하는 것처럼 보인다.

<인용 1> 칸토르와 슈뢰더의 견해

적어도 우리 개념들 가운데 적절한 위치에 기수를 두고자 해보자! 언어에서 수는 외부 사물의 성질을 의미하는 단단한, 무거운, 빨간 등의 말과 똑같이 대부분 형용사 형태나 관형어로 나타난다. 자연히 개별 수도 그런 성질로 파악되어야 하는지, 그에 따라 기수 개념이 아마도 가령 색 개념과 나란히 분류될 수 있는지 의문이 생긴다.

그렇다는 것이 칸토르의 견해인 것 같다. 그는 수학이 외부 세계의 대상에 대한 고찰에서 출발하는 한 경험 과학이라고 부른다. [그의 견해에 따르면] 수는 오로지 대상들로부터의 추상화에 기원을 두고 있다.

슈뢰더에 따르면 수는 현실에 모형을 두고 있으며, 단위들을 하나들로 본뜨는 과정을 통해 수가 이끌어진다. 그는 이것을 수의 추상화라 부른다. 이렇게 단위들을 본뜨는 과정에서 색, 형태 같은 사물의 다른 성질들

은 모두 무시되고 단위들은 빈도에 따라서만 묘사될 것이다. 여기서 빈도는 기수의 다른 표현일 뿐이다. 따라서 슈뢰더는 빈도나 기수를 색이나 형태와 같은 차원에 두며, 그것들을 사물의 어떤 성질로 여긴다(§21).

<설명ch> 프레게는 수가 외부 사물의 속성이라는 견해에 대해 몇 가지 근거를 들어 반박한다. 첫째, 단단함과 색깔과 같은 외부 사물의 속성이라면 그것은 감각에 의해 지각 가능해야 한다. 그러나 프레게가 여러 번 강조했듯이 그런 감각은 산수 법칙의 대상이 아니다. 파란 표면을 볼 때 우리는 '파란'이란 낱말에 대응하는 고유한 인상을 지닌다. 그리고 다른 파란 표면을 언뜻 보게 될 때 우리는 그 인상을 재인식한다. 그러나 우리는 수 3을 그런 식으로 지각하지 못한다. 우리는 삼각형을 볼 때 아리스토텔레스의 삼단 논법을 생각할 때 3을 지각하지, 곧 직접 보지 못한다. 오히려 우리는 수 3이 나오는 판단을 하게 되는 정신 활동과 결부된 무언가를 보게 된다. 한 켤레의 구두는 두 개의 구두와 눈으로 보고 만져보아 똑같은 현상일 수 있다. 여기서 우리는 어떠한 물리적 차이에도 대응하지 않는 수의 차이를 얻게 된다. 왜냐하면 둘과 한 켤레는 결코 같은 것이 아니기 때문이다. 그런데 감각에 따르면 그 같은 것이 되고 만다.

만약 한 대상을 녹색이라고 말할 수도 있고 동시에 빨갛다고도 말할 수 있다면, 이는 그 대상에 진정으로 녹색이 속하지 않는다는 것을 보여준다. 수가 바로 그렇다. 우리는 한 대상에 다양한 수를 부여할 수 있으므로 수는 대상에 속한 것이 아니다. 가령 일리아드를 한편의 시로 생각할 수도 있고, 24개의 노래로 생각할 수도 있으며, 아주 많은 수의 시구로도 생각할 수 있다. 또 어떤 나무가 1,000개의 잎을 가지고 있다고 말할 수도 있고 그것이 녹색 잎을 가지고 있다고 말할 수도 있다. 그렇다면 성질 1,000은 개별 잎에도 귀속되지 않고 잎 전체에도 귀속되지 않는 것 같다. 곧 감각의 대상이 색깔은 임의적이지 않다. 그 속성이 어디에 속하는지를 분명히 알 수 있다. 파랑과 같은 색은 우리의 임의의 선택과 무관하게 어떤 표면에 귀속된다. 파란 색이란 어떤 광선은 반사하고 다른 광선은 더 많거나 적게 흡수하는 능력이며, 우리가 그것을 파악하는 방식은 아무런 차이도 가져올 수 없다. 그러나 수는 그렇지 않다. 1이나 100이나 아니면

어떤 다른 기수가 그 자체로 카드 뭉치에 귀속된다고 말할 수는 없고, 기껏해야 우리의 자의적인 파악 방식과 관련해서 그렇다고 말할 수 있을 뿐이다. 우리가 무엇을 카드 한 벌이라고 부르는지는 분명히 자의적인 결정이며, 카드 뭉치는 그것에 대해 아무 것도 말해 주지 않는다. 우리는 카드 뭉치를 두 벌이라고 부를 수도 있는 것이다. 그래서 버클리의 다음 말을 인용할 수 있다. “수는 … 고정되고 확정된 것이 아니며 사물 자체에 실제로 존재하는 것이 아니라는 점을 주목해야 한다. 수란 관념 자체이거나 관념들의 조합에 정신이 하나의 이름을 부여해 단위가 되도록 만든 것임을 생각해 보건대, 전적으로 정신의 산물이다. 정신이 관념들을 여러 가지로 조합함에 따라 단위들도 다양하게 되고, 단위들의 모임에 불과한 수도 다양하게 된다. 하나의 창문 = 1, 그 안에 여러 개의 창문이 있는 하나의 집 = 1, 그리고 여러 집이 하나의 도시를 이룬다.”

밀은 다음과 같이 대답한다. “수의 이름은 사물의 모임에 속하는 성질을 내포하며, 우리는 그 이름으로 그 성질을 명명한다. 그 성질은 그 모임이 부분들로 구성되거나 부분들로 나누어질 수 있는 특징적 방식이다.” 그러나 모임을 나눌 수 있는 방식은 아주 여러 가지이며, 우리는 하나의 방식만이 특징적이라고 말할 수 없다. 예를 들어 우리는 짚 한 단을, 짚을 모두 반으로 잘라 나눌 수도 있고, 묶음을 풀어놓아 개개의 짚으로 나눌 수도 있으며, 두 단으로 나눌 수도 있다. ‘독일에 있는 시각 장애인의 수’라는 표현이 뜻을 지니려면, 우리는 독일에 있는 시각 장애인들을 모두 모으는 집회를 열 필요는 없다. 천 개의 밀알은 한 번 뿌려지고 난 후에도 여전히 천 개의 밀알이다.

<인용 1> 바우만의 반론: 외부 사물들은 엄밀한 단위들을 제시해주지 않는다. 기수는 우리의 이해에 의존하는 것처럼 보인다.

바우만은 수가 외부 사물에서 추상화해 낸 개념이라는 견해를 거부한다. “그 이유는 외부 사물들은 우리에게 엄밀한 단위들을 제시해 주지 않기 때문이다. 외부 사물은 우리에게 분리된 집단이나 감각 가능한 점들을 제시하지만, 우리는 마음대로 이런 것들 자체를 또 다시 많은 것(多)으로 간주할 수 있다.” 사실 한 사물을 그냥 다르게 생각한다고 해서 사

물의 색이나 단단함을 조금도 바꿀 수는 없지만, 일리아드를 한편의 시(詩)로 생각할 수도 있고, 24개의 노래로 생각할 수도 있으며, 아주 많은 수의 시구(詩句)로도 생각할 수 있다. 어떤 나무가 1,000개의 잎을 가지고 있다고 말하는 것과 그것이 녹색 잎을 가지고 있다고 말하는 것은 전혀 다른 뜻에서가 아닌가? 우리는 각각의 잎에 녹색이 속한다고 보지만, 각각의 잎에 수 1,000이 속한다고 보지는 않는다. 우리는 어떤 나무의 잎을 통털어 그 나뭇잎이라고 부를 수도 있다. 이런 경우 그 나뭇잎도 녹색이지만 그것은 1,000은 아니다. 그렇다면 성질 1,000은 도대체 무엇에 귀속되는가? 그 성질은 개별 잎에도 귀속되지 않고 잎 전체에도 귀속되지 않는 것 같다. 아마 외부 세계에 있는 사물에 실제로 귀속되지 않는 것은 아닐까? 내가 어떤 사람에게 돌을 주면서 "이것의 무게를 알아보아라" 라고 한다면, 나는 그가 조사해야 할 대상을 전부 제시한 것이다. 그러나 내가 그에게 카드 한 뭉치를 쥐어주면서 "이것의 기수를 알아보아라" 고 말한다면, 그 사람은 내가 카드의 장 수를 알고자 하는지, 아니면 몇 벌의 카드가 있는지를 알고자 하는지, 아니면 스카트 놀이의 점수를 알고자 하는지 파악할 수 없다. 카드 뭉치를 그 사람 손에 쥐어 준 것은 그가 탐구해야 할 대상을 아직 완전하게 제시한 것이 아니다. 나는 카드, 벌, 점수 등의 말을 덧붙여야 한다. 우리는 이 경우 여러 색들이 함께 나란히 존재하듯 여러 수들이 함께 나란히 존재한다고 말할 수도 없다. 나는 말 한마디 하지 않고도 개별 색 부위를 지적할 수 있지만, 개별 수를 똑 같은 식으로 지적할 수는 없다. 만약 내가 어떤 대상을 녹색이라고 말할 수 있는 만큼 빨갛다고도 말할 수 있다면, 이는 그 대상이 진정으로 녹색의 소유자가 아님을 보여주는 확실한 징표이다. 그 대상이 녹색이기 위해서는 먼저 녹색이기만 한 표면을 가져야 한다. 마찬가지로 내가 똑같은 권리로 다양한 수를 부여할 수 있는 대상은 수의 진정한 소유자가 아니다.

따라서 색과 수의 본질적 차이는 파랑과 같은 색은 우리의 임의의 선택과 무관하게 어떤 표면에 귀속된다는 점이다. 파란 색이란 어떤 광선은 반사하고 다른 광선은 더 많거나 적게 흡수하는 능력이며, 우리가 그것을 파악하는 방식은 아무런 차이도 가져올 수 없다. 반면 나는 1이나 100이나 아니면 어떤 다른 기수가 그 자체로 카드 뭉치에 귀속된다고 말할 수

는 없고, 기껏해야 우리의 자의적인 파악 방식과 관련해서 그렇다고 말할 수 있다. 그 경우에도 우리는 그것에 단순히 기수를 술어로서 덧붙여서 그렇게 말할 수는 없다. 우리가 무엇을 [카드] 한 벌이라고 부르는지는 분명히 자의적인 결정이며, 카드 뭉치는 그것에 대해 아무 것도 말해 주지 않는다. 그러나 그 결정에 비추어서 카드 뭉치를 고려하면, 아마도 우리는 그 뭉치를 두 벌이라고 부를 수 있음을 깨닫게 될 것이다. 우리가 무엇을 한 벌이라고 부르는지를 모르는 사람은 카드 뭉치에서 바로 둘과는 다른 어떤 기수를 발견할 가능성이 더 많을 것이다(§22).

<인용 2> 수가 사물들의 모임의 성질이라는 밀의 견해는 유지될 수 없다.

성질로서 수는 무엇에 귀속되는가 하는 물음에 대해 밀은 다음과 같이 대답한다. “수의 이름은 사물의 모임에 속하는 성질을 내포하며, 우리는 그 이름으로 그 성질을 명명한다. 그 성질은 그 모임이 부분들로 구성되거나 부분들로 나누어질 수 있는 특징적 방식(die charakteristische Weise)이다.”

여기서 우선 ‘특징적 방식’이란 표현에 있는 정관사는 잘못된 것이다. 왜냐하면 모임을 나눌 수 있는 방식은 아주 여러 가지이며, 우리는 하나의 방식만이 특징적이라고 말할 수 없기 때문이다. 예를 들어 우리는 짚 한 단을, 짚을 모두 반으로 잘라 나눌 수도 있고, 묶음을 풀어놓아 개개의 짚으로 나눌 수도 있으며, 두 단으로 나눌 수도 있다. 더구나 100개의 모래알이 모래 더미를 이루고 있는 방식은 100개의 짚이 짚 한 단을 이루고 있는 방식과 같기나 한가? 그렇지만 이 경우에도 우리는 같은 수를 갖는다. 그리고 ‘한 개의 짚’이란 표현에서 ‘한 개의’라는 수 표현은 이 짚이 세포나 분자로 이루어진 방식을 표현해주지 못한다. 수 0은 더 많은 난점을 일으킨다. 게다가 짚을 세기 위해서는 하나의 묶음으로 만들어야 하는가? ‘독일에 있는 시각 장애인의 수’라는 표현이 뜻을 지니려면, 우리는 독일에 있는 시각 장애인들을 모두 모으는 집회를 열어야 하는가? 천 개의 밀알이 한 번 뿌려지고 난 후에는 더 이상 천 개의 밀알이 아닌가? 정리의 증명들의 모임이나 사건들의 모임이 정말 있기나 한

가? 그러나 우리는 이것들도 셀 수 있다. 이 경우 사건들이 동시에 일어났는지 아니면 수 천년이나 떨어져 일어났는지는 상관없다(§23).

<인용 3> 색, 무게, 딱딱함과는 달리 수는 사물로부터 추상화되지 않는다. 그리고 색, 무게, 딱딱함이 성질이라는 뜻으로 [수는] 사물의 성질도 아니다. 아직 수 진술을 통해 무엇에 관해 어떤 것이 서술되는가 하는 물음이 남아 있다(§45).

(2) 주관적 창조물

<설명ch> 프레게는 두번째로 수가 주관적 창조물이라는 견해를 다룬다. 그러나 이것도 역시 프레게가 누누이 강조한 심리학적 대상이다. 가령 북해가 심리학의 탐구 대상이나 심리 과정의 산물이 아니듯이 수도 심리학의 대상이나 심리 과정의 결과가 아니다. 지구 표면의 물 가운데 어느 부분을 골라내 그것을 '북해'라고 부르는가는 우리의 임의적 선택의 문제라고 하더라도 이 점이 북해의 객관성에 영향을 주는 것은 절대 아니다. 그것은 북해를 심리학적 방법으로 탐구해야 할 이유가 아니다. "북해는 10,000평방 마일에 걸쳐 있다"고 말할 때 우리는 '북해'를 통해서도 '10,000'을 통해서도 우리 마음속의 상태나 과정을 말하는 것이 아니다. 도리어 우리는 우리의 표상이나 이런 종류의 어떤 것과도 독립되어 있는 아주 객관적인 것을 주장한다. 다른 기회에 우리가 북해의 경계를 이전과는 다른 식으로 정하거나 '10,000'을 다른 어떤 것으로 이해하려 할지라도, 이전에 옳던 동일한 내용이 거짓이 되는 것은 아니다. 오히려 참인 내용의 자리에 거짓 내용이 들어온 것일 뿐이어서, 그 때문에 처음 내용의 진리가 거부되는 것은 결코 아니다.

또 식물학자가 어떤 꽃의 색에 대해 말할 때 그는 사실적인 무엇을 주장하는 것이듯이, 그가 꽃잎의 수에 대해 말할 때에도 그는 사실적인 것을 주장한 것이다. 전자와 마찬가지로 후자도 우리의 자의적 선택에 달린 것이 아니다. 따라서 수와 색 사이에는 일정한 유사성이 있다. 그러나 그 유사성은 감각을 통해 외부 사물에서 그 둘을 알 수 있다는 데 있는 것이 아니라, 그 둘 모두 객관적이라는데 있다.

수가 표상, 곧 주관적 창조물이라고 한다면 놀라운 결과가 일어날 것이라고 프레게는 말한다. 만약 2가 하나의 표상이라면, 그것은 무엇보다도 나만의 표상이고, 다른 사람의 표상은 또 다를 것이다. 그렇다면 우리는 아마도 수백만 개의 2를 가지게 되고, 잠재적인 무의식적 표상과, 새 세대의 어린이들이 자라남에 따라 새로운 세대의 2가 끊임없이 생겨날 것을 생각하면 어마어마하게 많아질 것이다.

그래서 프레게는 이렇게 결론을 맺는다. "그리고 수는 밀의 조약돌이나 과자 무더기처럼 공간적이고 물리적인 것이 아니며, 표상처럼 주관적인 것도 아니고, 비감각적이고 객관적인 것이라는 결론에 도달하였다. 객관성의 근거는 우리 마음의 영향을 받아 전적으로 주관적인 감각 인상에 있지 않으며, 내가 아는 한, 오직 이성에 있다. 가장 정확한 학문이 아직도 불확실하게 더듬거리는 심리학에 기초를 두고 있다면 그것은 기괴한 일일 것이다."

<인용 1> 수 형성에 대한 립쉬츠의 묘사는 옳지 않으며 개념 규정을 대신하지도 못한다. 수는 심리학의 대상이 아니라 객관적인 것이다. 이런 사고 노선을 따르게 되면 수를 주관적인 것으로 여기게 되기 쉽다. 수가 우리에게 생겨나게 되는 방식이 수의 본질을 밝혀주는 열쇠인 듯이 보인다. 따라서 그것은 심리학적 탐구의 문제가 된다. 이런 뜻에서 립쉬츠는 다음과 같이 말한다.

"어떤 사물들을 한꺼번에 보려는 사람은 하나의 특정 사물에서 시작하여 그 사물에다가 새로운 사물을 계속 덧붙일 것이다." 이것은 수의 구성 방법이라기보다는 아마 가령 별자리의 직관을 얻는 방법에 훨씬 더 가까운 것으로 보인다. 한꺼번에 보고자 하는 의도는 본질적인 것이 아니다. 왜냐하면 우리는 한 떼의 가축을 볼 때 머리가 몇 개인지 안다고 해서 그 가축 떼를 더 잘 볼 수 있다고 말할 수는 없기 때문이다.

수 판단을 내리기에 앞서 일어나는 심리 과정에 대한 이런 식의 묘사는 수 판단에 맞는 것이라 하더라도 원래의 개념 규정을 결코 대신할 수는 없다. 그런 묘사가 결코 산수 문장의 증명일 수는 없다. 이는 우리에게 수의 성질에 대해 아무 것도 알려주지 않는다. 왜냐하면 가령 북해가 심

리학의 탐구 대상이나 심리 과정의 산물이 아니듯이 수도 심리학의 대상이나 심리 과정의 결과가 아니기 때문이다. 지구 표면의 물 가운데 어느 부분을 골라내 그것을 '북해'라고 부르는가는 우리의 임의적 선택의 문제라고 하더라도 이 점이 북해의 객관성에 영향을 주는 것은 절대 아니다. 그것은 북해를 심리학적 방법으로 탐구해야 할 이유가 아니다. "북해는 10,000 평방 마일에 걸쳐 있다"고 말할 때 우리는 '북해'를 통해서도 '10,000'을 통해서도 우리 마음속의 상태나 과정을 말하는 것이 아니다. 도리어 우리는 우리의 표상이나 이런 종류의 어떤 것과도 독립되어 있는 아주 객관적인 것을 주장한다. 다른 기회에 우리가 북해의 경계를 이전과는 다른 식으로 정하거나 '10,000'을 다른 어떤 것으로 이해하려 할지라도, 이전에 옳던 동일한 내용이 거짓이 되는 것은 아니다. 오히려 참인 내용의 자리에 거짓 내용이 들어온 것일 뿐이어서, 그 때문에 처음 내용의 진리가 거부되는 것은 결코 아니다.

식물학자가 어떤 꽃의 색에 대해 말할 때 그는 사실적인 무엇을 주장하는 것이듯이, 그가 꽃잎의 수에 대해 말할 때에도 그는 사실적인 것을 주장한 것이다. 전자와 마찬가지로 후자도 우리의 자의적 선택에 달린 것이 아니다. 따라서 수와 색 사이에는 일정한 유사성이 있다. 그러나 그 유사성은 감각을 통해 외부 사물에서 그 둘을 알 수 있다는 데 있는 것이 아니라, 그 둘 모두 객관적이라는데 있다. 나는 객관적인 것을 손으로 잡을 수 있는 것, 공간적인 것, 현실적인 것과 구분한다. 지구 축(軸), 태양계의 질량 중심은 객관적이지만, 나는 그것들을 지구 자체처럼 현실적이라고 부르고 싶지는 않다. 우리는 흔히 적도(赤道)를 가상의 선이라 부른다. 그러나 그것을 허구의 선이라고 부르는 것은 잘못일 것이다. 적도는 사고를 통해 생긴 심리 과정의 산물이 아니라 사고를 통해 인식되고 파악될 뿐이다. 만일 인식되는 것이 곧 생겨나는 것이라면, 우리는 이른바 그것이 생기기 이전 시기의 적도에 대해서는 어떠한 적극적인 주장도 할 수 없어야 할 것이다.

칸트에 따르면 공간은 현상에 속한다. 우리와 다른 이성적 존재는 우리와는 아주 다르게 공간을 표상할지도 모른다. 사실 우리는 한 사람에게 나타나는 공간이 다른 사람에게 나타나는 공간과 똑 같은지도 알 수 없

다. 왜냐하면 이들을 비교하기 위해 한 사람의 공간 직관을 다른 사람의 공간 직관과 나란히 놓을 수가 없기 때문이다. 그렇지만 그 안에는 객관적인 것이 포함되어 있다. 모든 사람은, 오직 행동을 통해서라고 하더라도, 동일한 기하학적 공리들을 인정하며, 적어도 자신이 갈 길을 제대로 알려면 그렇게 해야만 한다. 이 경우 객관적인 것은 법칙에 맞는 것, 개념적인 것, 판단 가능한 것, 말로 표현 가능한 것이다. 순전히 직관적인 것은 전달될 수 없다. 이 점을 명확히 하기 위해 두 이성적 존재를 가정하자. 그리고 그들은 한 직선에 세 점이 있음, 한 평면에 네 점이 있음 등과 같이 오직 투사된 성질과 관계만을 직관할 수 있다고 해보자. 그렇다면 한 사람에게 점으로 직관되는 것이 다른 사람에게는 평면으로 보일 수도 있고 그 반대일 수도 있다. 한 사람에게는 점들이 결합된 선인데 다른 사람에게는 평면들의 교차 선으로 보이는 등, 항상 두 직관이 대응하게 될 것이다. 사영(射影) 기하학에서는 각 정리에 또 다른 정리가 이원적으로 맞서 있으므로 그들은 상대의 말을 아주 잘 이해하면서도 직관의 차이는 알아채지 못할 수도 있다. 왜냐하면 감성적인 평가가 다르다는 것이 결정적 증거가 될 수는 없을 것이기 때문이다. 그들은 모든 기하학적 정리와 관련하여 완전한 견해의 일치를 볼 것이고, 단지 그 말들을 그들 각자의 직관에 의해 번역할 때만 차이를 보일 것이다. 한 사람은 '점'이란 낱말에 이 직관을 다른 사람은 저 직관을 연결할 것이다. 따라서 우리는 여전히 그들에게는 이 낱말이 객관적인 것을 의미한다고 말할 수 있다. 다만 우리는 이 의미를 그들의 직관의 특성으로 이해해서는 안 된다. 그리고 이런 뜻에서 지구 축도 객관적이다.

우리는 보통 '흰'이란 말로 어떤 감각에 대해 생각하며, 이것은 물론 전적으로 주관적이다. 그러나 일상적인 언어 사용에서도 그 말은 내가 보기에 종종 객관적인 뜻을 지니고 있다. 눈(雪)이 희다고 할 때, 우리는 통상적인 빛에서 어떤 감각을 통해 인식된 객관적 특성을 표현하려는 것이다. 만약 눈이 색깔을 가진 것으로 보인다면, 우리는 이를 고려해 판단한다. 사람들은 아마도 다음과 같이 말하게 된다. "눈이 지금은 붉게 보이지만 눈은 실제로 희다." 또한 색을 감각으로 구분하지 못하는 색맹인 사람도 빨강과 파랑에 대해 말할 수 있다. 그는 다른 사람들이 구분한 바

에 따라 혹은 물리학적 실험을 통해 그 차이를 인식한다. 따라서 색 표현은 우리의 주관적인 감각, 즉 다른 사람의 감각과 일치하는지를 알 수 없는 왜냐하면 같게 불린다고 해서 이들이 일치한다는 것이 보장되는 것은 결코 아니기 때문이다 그런 감각을 나타내는 것이 아니라 오히려 객관적 특성을 나타낸다. 바로 이런 식으로 나는 객관성을 우리의 감각이나 직관, 표상과 독립해 있고, 이전 감각의 기억에서 내적 영상을 구성하는 일로부터 독립해 있는 것으로 이해하지만, 이성으로부터 독립해 있는 것으로는 이해하지 않는다. 왜냐하면 이성으로부터 독립해 있는 것이 무엇인가 하는 물음에 대답하는 것은 판단하지 않고 판단하는 것이며, 물 안묻히고 옷을 빠는 것이기 때문이다(§26).

<인용 2> 슐뢰밀히의 견해처럼 수가 계열에서 대상 자리의 표상인 것은 아니다.

그 때문에 나는 수를 계열에서 대상 자리의 표상이라 부르는 슐뢰밀히의 견해에도 동의할 수 없다. 만약 수가 표상이라면, 산수는 심리학일 것이다. 그러나 가령 천문학이 심리학이 아니듯이, 산수도 심리학이 아니다. 천문학이 행성의 표상이 아니라 행성 자체를 다루듯, 산수의 대상도 표상이 아니다. 만약 2가 하나의 표상이라면, 그것은 무엇보다도 나만의 표상일 것이다. 다른 사람의 표상은 이미 그 자체로 다른 표상이다. 그렇다면 우리는 아마도 수백만 개의 2를 가지게 될 것이다. 우리는 나의 2, 너의 2, 하나의 2, 모든 2라고 말해야 할 것이다. 우리가 잠재적인 무의식적 표상도 인정한다면, 나중에 다시 의식될 무의식적인 2들도 있을 것이다. 새 세대의 어린이들이 자라남에 따라 새로운 세대의 2가 끊임없이 생겨날 것이고, 몇 천년 뒤에는 2들이 진화해서 2 2가 5가 될지 누가 알겠는가? 그렇게 된다고 할지라도 우리는 여전히, 일상적으로 생각하듯이, 무한히 많은 수가 있는지는 의심스러울 것이다. 아마 1010이 단지 빈 기호일지도 모르고, 그렇게 불릴 수 있는 표상은 아무 것도 없을지 모른다.

우리는 수가 표상이라는 생각을 더 밀고 나가면 어떤 놀라운 결과에 이르는지 보았다. 그리고 수는 밀의 조약돌이나 과자 무더기처럼 공간적이고 물리적인 것이 아니며, 표상처럼 주관적인 것도 아니고, 비감각적이고

객관적인 것이라는 결론에 도달하였다. 객관성의 근거는 우리 마음의 영향을 받아 전적으로 주관적인 감각 인상에 있지 않으며, 내가 아는 한, 오직 이성에 있다.

가장 정확한 학문이 아직도 불확실하게 더듬거리는 심리학에 기초를 두고 있다면 그것은 기괴한 일일 것이다(§27).

<인용 3> 수는 물리적인 것도 아니지만, 주관적인 것도 아니며 표상도 아니다(§45).

(3) 집합

<설명ch> 몇몇 사람들은 수를 집합, 여럿 또는 다수라고 설명한다. 그 표현들은 '무더기', '무리', '모임'의 의미에 가깝다. 그런데 집합이라고 한다면 무엇의 집합이겠는가? 바로 사물들의 집합일 것이다. 유클리드는 이 사물 또는 대상을 단위와 같은 뜻으로 본다.

<인용 1> '*μονάς*'와 '단위'란 표현의 다의성. 단위가 셀 대상이라는 슈뢰더의 정의는 쓸모없는 것으로 보인다. '하나'라는 형용사는 더 자세한 규정을 포함하지도 않으며, 술어로 사용될 수도 없다.

『원론』7권 서두에 나오는 정의에서, 유클리드는 '*μονάς*'라는 낱말을 통해 때로는 셀 대상을, 때로는 그런 대상의 성질을, 때로는 수 하나를 나타내는 것 같다. 우리는 이 말을 '단위'라고 옮길 수 있는데, 그렇게 할 수 있는 이유는 이 낱말 자체도 그런 여러 가지 의미를 지니기 때문이다(§29).

<인용 2> 수는 사물에 사물을 덧붙임으로써 생기지 않는다. 그렇게 덧붙일 때마다 다시 이름을 부여하더라도 아무것도 달라지지 않는다.

'여럿', '집합', '다수' 등의 표현은 불분명하기 때문에 수를 설명하는데 사용하기에는 부적합하다(§45).

(4) 하나

<설명ch> 프레게는 그 다음에 단위의 개념을 하나라고 생각하는 견해에 대해 소개하고 그 문제점을 지적한다. 먼저 슈뢰더는 "셀 사물들 각각은 [하나의] 단위라 불린다"고 말하는데 어느 사물이나 모든 사물이 하나의 단위라면 또는 일이라고 간주될 수 있다면 단위를 일단 하나라고 생각해 볼 수 있을 것이다. 어떤 철학자들은 하나를 '현명한 사람'에서 '현명한'처럼 사물에 속하는 사물이라고 생각한다. 그러나 솔론은 현명하다는 주장이 뜻을 지니게 되는 것은 현명하지 않은 무엇이 있을 수 있기 때문이다. 개념의 외연이 감소하면 개념의 내용은 증가한다. 그런데 하나는 모든 사물에 적용된다. 개념의 외연이 모든 것을 포괄하게 되면, 개념의 내용은 완전히 사라지게 된다. 하나라는 언어는 어떤 대상을 더 자세히 규정하는데 전혀 도움이 되지 않는 것이다.

라이프니츠는 "하나란 우리가 한번의 이해 작용을 통해 파악하는 것이다"라고 말한다. 그러나 경험적 직관이든 순수 직관이든, 외적 직관 하나하나를 우리는 다시 많은 것(多)으로도 간주할 수 있다. 모든 대상이 우리 이해에 따라 하나일 수 있고 또한 하나가 아닐 수도 있는 것이다. 그렇다면, 어느 대상에든지 '하나'라는 성질이 부여되게 된다는 것은 아주 자의적이다. 프레게는 가장 분명하고 정확하다는 점에서 명성이 나 있는 학문이 그토록 불분명한 개념에 근거를 둘 수 없다고 말한다.

바우만은 나누어져 있지 않음과 경계지어짐을 하나라는 개념의 특징으로 들고 있다. 만일 이것이 옳다면, 우리는 동물도 단위에 대한 일정한 표상을 가지리라고 예상하게 될 것이다. 동물들도 개별적 대상들을 구분하고 예를 들어 여러 마리의 개한테 쫓기는지 아니면 단 한 마리의 개한테 쫓기는지의 차이를 알 것이다. 그렇다고 해서 동물들이 하나의 관념을 가지고 있다고 말할 수 없다는 것이 프레게의 생각이다. 그는 "외부의 모든 대상에 의해, 그리고 내부의 모든 관념에 의해 오성에 제시되는" 것이 아니라는 로크의 견해를 인용하며, 고도의 정신 능력을 통해 우리가 인식하는 것이어서 이 능력이 동물과 우리를 구분해 준다고 결론짓는다. 그렇다면 동물도 우리처럼 잘 알아차리는 나누어져 있지 않음과 경계지어짐 같은 사물들의 성질이 우리 개념에 본질적인 것일 수 없다.

퀴프는 나눌 수 없음을 하나의 성질이라고 말한다. 그러나 그럴 경우 단위라고 불리면서 셀 수 있는 것이 거의 남지 않게 된다.

<인용 1> 슈뢰더는 이렇게 말한다. “셀 사물들 각각은 [하나의] 단위라 불린다.” 우리는 왜 사람들이 우선 사물들을 단위 개념과 결부시키고 다음과 같이 간단히 설명하지는 않는지 의문이 생긴다: 수는 대상들의 집합이다. 이 경우 우리는 첫 번째 견해로 되돌아가게 될 것이다. 무엇보다도 우리는 사물들을 단위라고 부름으로써 더 자세한 규정을 얻으려 하는 것일 테고, 그래서 언어 형식에 따라 ‘하나’를 성질 낱말로 보고 ‘하나의 도시’를 ‘현명한 사람’과 똑같은 방식으로 이해하려 할 것이다. 그 경우 단위는 ‘하나’라는 성질이 귀속되는 대상일 것이며, 단위와 ‘하나’의 관계는 ‘현자’와 형용사 ‘현명한’의 관계와 비슷할 것이다. 앞에서 수가 사물의 성질이라는 견해를 반박하기 위해 제시되었던 올바른 이유들 외에도, 여기서는 특별한 비판이 몇 가지 더 있다. 만약 모든 사물이 이런 성질을 가지고 있다면 그것은 굉장한 일일 것이다. 그렇다면 왜 우리가 하나의 사물에 이 성질을 분명히 부여하게 되는지 이해할 수 없게 될 것이다. 솔론은 현명하다는 주장이 뜻을 지니게 되는 것은 현명하지 않은 무엇이 있을 수 있기 때문이다. 개념의 외연이 감소하면 개념의 내용은 증가한다. 개념의 외연이 모든 것을 포괄하게 되면, 개념의 내용은 완전히 사라지게 된다. 언어가 어떤 대상을 더 자세히 규정하는데 전혀 도움이 되지 않는 성질 표현을 어떻게 만들어낼 수 있는지 생각하기란 쉽지 않다.

만약 ‘한 사람’(Ein Mensch)이 ‘현명한 사람’(weiser Mensch)과 비슷하게 간주된다면, 우리는 ‘하나’(Ein)가 술어로도 사용될 수 있다고 생각해야 할 테고1), 그 때문에 우리는 “솔론은 현명했다”(Solon war weise)처럼 “솔론은 하나였다”(Solon war Ein) 또는 “솔론은 하나인 것이었다”(Solon war Einer)라고 말할 수 있어야 할 것이다. 후자와 같은 표현이 있을 수는 있겠지만, 그 표현은 그 자체로 따로 떼어 이해될 수는 없다. 예를 들어 맥락에 따라 ‘현자’(Weiser)를 보충할 수 있다면, 그 표현은 솔론은 현자였다(Solon war ein Weiser)를 의미할 수

있다. 그러나 ‘하나’만으로는 술어가 될 수 없는 것으로 보인다. 복수의 경우 이 사실이 더 분명히 드러난다. 우리는 “솔론은 현명했다”(Solon war Weise)와 “탈레스는 현명했다”(Thales war weise)를 결합해 “솔론과 탈레스는 현명했다”(Solon und Thales waren weise)라고 할 수는 있지만, “솔론과 탈레스는 하나였다”(Solon und Thales waren Ein)라고 말할 수는 없다. 만약 ‘현명한’(weise)이 솔론과 탈레스 모두의 성질이듯이 ‘하나’(Ein)도 솔론과 탈레스 모두의 성질이라고 한다면, 왜 이것이 불가능한지 이해할 수 없다(§29).

<인용 2> 라이프니츠와 바우만이 시도한 정의는 단위 개념을 완전히 사라지게 만드는 것 같다.

이는 어느 누구도 ‘하나’라는 성질의 정의를 제시할 수 없었다는 사실과 관련이 있다. 라이프니츠가 “하나란 우리가 한번의 이해 작용을 통해 파악하는 것이다”라고 말할 때, 그는 ‘하나’를 그 자체에 의해 설명하고 있다. 더구나 우리는 많은 것(多)도 한번의 이해 작용을 통해 파악할 수 있지 않은가? 라이프니츠도 똑같은 단락에서 이 사실을 인정하고 있다. 비슷한 식으로 바우만도 “하나란 우리가 하나로 이해하는 것이다”라고 말하며, 또한 더 나아가 이렇게 말한다. “우리가 점으로 제시하거나 또는 더 이상 나누어지지 않는 것으로 제시하는 것을 우리는 하나라고 간주한다. 그러나 경험적 직관이든 순수 직관이든, 외적 직관 하나하나를 우리는 다시 많은 것(多)으로 간주할 수 있다. 각각의 표상은 다른 표상과 분리된다면 하나이다. 그러나 각 표상 자체는 다시 많은 것(多)이라고 분류될 수 있다.” 따라서 개념들의 사실적인 경계가 허물어지며, 모든 것이 우리의 이해에 의존하게 된다. 우리는 다시 묻게 된다: 모든 대상이 우리 이해에 따라 하나일 수 있고 또한 하나가 아닐 수도 있다면, 어느 대상에든지 ‘하나’라는 성질이 부여되게 된다는 것이 무슨 뜻을 지닐 수 있겠는가? 가장 분명하고 정확하다는 점에서 명성이 나있는 학문이 어떻게 그토록 불분명한 개념에 근거를 둘 수 있겠는가?(§30)

<인용 3> 나누어져 있지 않음과 경계지어짐이라는 바우만의 특징들. 어

느 대상이나 우리에게 단위 관념을 제시하는 것은 아니다(로크).

그런데 바우만은 하나라는 개념의 근거를 내적 직관에 두기는 하지만, 앞서 인용한 단락에서 나누어져 있지 않음과 경계지어짐을 하나라는 개념의 특징으로 들고 있다. 만일 이것이 옳다면, 우리는 동물도 단위에 대한 일정한 표상을 가지리라고 예상하게 될 것이다. 달을 쳐다보는 개가, 아무리 불분명하더라도, 우리가 ‘하나’라는 낱말을 써서 나타내는 것의 표상을 지닐 수 있을까? 거의 그렇지 않을 것이다! 그러나 개는 분명히 개별적 대상들을 구분한다: 또 다른 개, 그의 주인, 그가 가지고 노는 하나의 돌은 우리에게 그렇듯이 개에게도 경계지어져 있고, 스스로 존립하며, 나누어져 있지 않은 것으로 나타난다. 개는 아마 자신이 여러 마리의 개한테 쫓기는지 아니면 단 한 마리의 개한테 쫓기는지의 차이를 알 것이다. 그러나 이 차이는 밀이 물리적인 것이라 부른 것이다. 예를 들어 그 개가 큰 개 하나한테 물리는 경우와 고양이 하나를 쫓아가는 경우, 우리가 ‘하나’라는 말로 표현하는 공통적인 것을, 희미한 의식에서나마, 가지고 있는지가 문제이다. 내가 보기에는 그럴 것 같지 않다. 이로부터 나는 단위의 관념이 로크가 생각한 것처럼 “외부의 모든 대상에 의해, 그리고 내부의 모든 관념에 의해 오성에 제시되는” 것이 아니라, 고도의 정신 능력을 통해 우리가 인식하는 것이어서 이 능력이 동물과 우리를 구분해 준다고 결론짓는다. 그렇다면 동물도 우리처럼 잘 알아차리는 나누어져 있지 않음과 경계지어짐 같은 사물들의 성질이 우리 개념에 본질적인 것일 수 없다(§31).

<인용 4> 언어는 나누어져 있지 않음과 경계지어짐 사이의 어떤 연관성을 암시하지만, 그 경우 뜻이 변경된다.

그러나 우리는 [단위 개념과 나누어져 있지 않음이나 경계지어짐 사이에] 어떤 연관성이 있다고 추측할 수 있다. 언어는 ‘하나’(Ein)로부터 ‘단일한’(einig)이 파생되었음을 암시해 준다. 사물 안의 내적 차이가 환경과의 차이에 비해 더 희미해질수록, 그리고 그 사물 안의 내적 연관성이 환경과의 연관성보다 압도적으로 많을수록, 우리는 그 사물을 더 특별한 대상으로 간주하게 된다. 따라서 ‘단일한’은 어떤 것을 환경과 분리

해서 이해하고 그것을 따로 탐구하도록 하는 성질을 의미한다. 같은 방식으로 우리는 프랑스어 'uni'가 어떻게 '균일한'이나 '매끄러운'을 의미하게 되는지를 설명할 수 있다. 국가의 정치적 단위나 예술 작품의 단위라고 할 때, '단위'라는 낱말도 비슷한 식으로 사용된다.6) 그러나 이런 뜻의 '단위'(Einheit)는 '하나'(Ein)와 어울리기보다는 '단일한'(einig)이나 '통일적인'(einheitlich)과 더 어울린다. 왜냐하면 지구가 하나의 달을 가지고 있다고 말할 때, 이를 통해 우리는 경계지어져 있고, 스스로 존립하고, 나누어져 있지 않은 달을 설명하려는 것이 아니기 때문이다. 도리어 우리는 이것을 금성에서 나타나는 것이나 화성에서 나타나는 것, 목성에서 나타나는 것과 대비해서 말하고 있는 것이다. 경계지어짐이나 나누어져 있지 않음과 관련해서는, 목성의 달도 지구의 달과 마찬가지이며 그런 뜻에서 똑같이 통일적이다(§32).

<인용 5> 나눌 수 없음(쾨프)도 단위의 특징으로 성립할 수 없다.

어떤 사람들은 나누어져 있지 않음을 나눌 수 없음으로까지 끌어올린다. 쾨프는 나눌 수 없고 스스로 존립하는 것으로 생각되는 사물을, 감각적으로 지각할 수 있든 그렇지 않든, 모두 개체라고 부르며, 셀 개체들을 하나라고 부르는데, 여기서 '하나'는 분명히 '단위'의 뜻으로 쓰이고 있다. 바우만이 외부 사물은 우리가 마음대로 많은 것(多)으로 다룰 수 있기 때문에 엄밀한 뜻의 단위를 제시해 주지 못한다고 주장할 때, 그도 분석할 수 없음을 그런 단위의 특징으로 제시한 셈이다. 사람들은 내적인 연관성을 무한히 증가시켜서 자의적인 이해를 벗어난 단위의 특징을 얻고자 한다. 이런 시도는 실패하기 마련이다. 왜냐하면 그럴 경우 단위라고 불리면서 셀 수 있는 것이 거의 남지 않게 되기 때문이다. 그래서 사람들은 더 물러서서 분석 불가능성 자체가 아니라 분석 불가능하다고 여겨지는 것을 단위의 특징으로 삼게 된다. 결국 우리는 다시 변덕스런 이해로 되돌아오게 된다. 그리고 우리가 사실을 실제로 그런 것과는 다르게 생각한다고 해서 도대체 얻는 것이 있는가? 전혀 없다! 거짓 가정으로부터는 거짓 결론이 이끌어질 수 있다. 그러나 분석 불가능성으로부터 아무 것도 이끌어낼 수 없다면, 그것이 무슨 소용이 있겠는가? 개념을 덜

엄격하게 해도 문제가 없다면, 그리고 정말 그래야 하는데, 그런 엄격함이 무슨 소용이 있겠는가? 그러나 아마도 우리가 다만 분석 가능하다고 생각하지 않으면 된다는 것인지도 모른다. 마치 생각하지 않음으로써 어떤 것에 도달할 수 있는 것처럼! 그러나 예를 들어 하루가 24시간이면, 3일은 몇 시간인가 하는 문제의 경우처럼, 단위의 구성 방식에 어떤 결론이 근거하는 경우, 분석 가능성을 생각해야만 하는 경우도 있다(§33).

<인용 6> 하나 및 단위와 관련해 아직 남은 문제가 있다. 하나와 많은 것(多)의 구분을 모두 없애버리는 것으로 보이는 자의적인 이해를 어떻게 제한할 수 있는가?

경계지어져 있음이나 나누어지지 않음, 분할할 수 없음 등은 우리가 '하나'라는 낱말로 표현하는 것의 특징으로 사용될 수 없다.

하나와 단위는 구분되어야 한다. '하나'라는 낱말은 수학의 연구 대상의 고유 이름으로 복수가 될 수 없다. 또한 하나들을 결합하여 수를 만들어 낸다는 것은 뜻이 없다. 1 + 1 = 2에서 덧셈 기호는 그런 결합을 의미하지 않는다(§45).

(5) 동일성

<설명ch> 프레게는 우리가 이유에 대해 셈의 대상들에 부여한 동일성 때문에 사물을 단위로 부른다는 견해를 검토한다. 셀 수 있으려면 단위들이 모든 속성을 공통으로 가져야 한다는 주장이다. 그러나 프레게는 이 주장이 거짓이라고 주장한다. 어느 경우든 어떠한 두 대상도 완전히 같지는 않다. 다른 한편 우리는 두 대상이 일치하는 측면을 거의 언제나 발견할 수 있다. 따라서 우리가 사실과 달리 사물들에 실제로 지니는 것 이상의 동일성을 부여하려 하지 않는 한, 우리는 다시 자의적인 이해에 다다르게 된다. 사물들에 일정한 동일성을 부여하면 우리는 대상 집합에 속하는 개체들이 지닌 고유한 성질들을 추상화하거나 또는 개개의 사물들을 고찰할 때 사물들을 구별시켜 주는 특징들을 제거해야 한다. 그러나 그러면 '고려된 사물들의 기수 개념'이 남는 것이 아니라, 하나의 일반 개념을 얻게 되고, 그 개념 아래 사물들이 속하게 된다. 그러나 이 과정에

서도 동일성을 주장하는 사람들의 견해와 달리 사물들은 자신의 특성을 전혀 잃지 않는다. 예를 들어 하얀 고양이와 검은 고양이를 구별해주는 성질들을 제외하고 그것들을 고찰한다면, 아마 '고양이'라는 개념을 얻게 될 것이다. 그런데 이 두 고양이를 그 개념 아래 가져와서 그것들을 단위라고 부른다고 해도, 언제나 흰 고양이는 여전히 희고 검은 고양이는 여전히 검다. 또한 색깔을 생각하지 않거나 생각하지 않으려 한다고 해서, 고양이들의 색깔이 없어지는 것은 아니며, 그들은 처음부터 그랬듯이 서로 다르다. 추상화를 통해 얻게 되는 '고양이'란 개념은 더 이상 그 특성들을 지니지 않지만, 바로 그 때문에 하나의 개념일 뿐이다. 프레게가 말하고 싶어하는 것은 그런 단일 개념 '고양이' 아래에 두 사물이 속하는 것은 맞지만 그렇다고 해서 단위가 완전히 같아야 된다는 결론이 나오는 것은 아니라는 것이다.

<인용 1> '단위'를 [사물의] 이름으로 사용해야 할 근거로서 동일성. 슈뢰더, 홉스, 흄, 토마에. 사물들의 차이를 추상화함으로써 기수 개념을 얻지는 못하며, 그런 추상화를 통해 사물들이 같게 되지도 않는다.

이처럼 '하나'를 성질로 설명하려는 시도는 모두 실패했으므로, 결국 우리는 사물을 단위라고 나타냄으로써 더 자세한 규정을 하게 된다는 생각을 버려야 할 것이다. 우리는 다시 한번 다음 물음으로 되돌아오게 된다: '단위'가 사물의 또 다른 이름이라면, 모든 사물이 단위이거나 단위로 이해될 수 있다면, 왜 우리는 사물을 단위라 부르는가? 슈뢰더는 셈의 대상들에 부여된 동일성을 이유로 든다. 우선 왜 '사물'이나 '대상'이란 낱말도 똑 같이 이 점을 암시할 수는 없는지 모르겠다. 그리고 이런 물음이 생긴다: 왜 셈의 대상들에 동일성을 부여하는가? 셈의 대상들에 동일성이 부여될 뿐인가, 아니면 그것들은 실제로 같은가? 어느 경우든 어떠한 두 대상도 완전히 같지는 않다. 다른 한편 우리는 두 대상이 일치하는 측면을 거의 언제나 발견할 수 있다. 따라서 우리가 사실과 달리 사물들에 실제로 지니는 것 이상의 동일성을 부여하려 하지 않는 한, 우리는 다시 자의적인 이해에 다다르게 된다. 사실 많은 사람들은, 아무 제한 없이, 단위들이 같다고 부른다. 홉스는 이렇게 말한다. "절대적으

로 말해, 수학의 수는 동일한 단위들을 전제하며, 그런 단위들로부터 수가 유래한다.” 흄은 양과 수의 구성 부분들을 아주 똑 같은 종류의 것으로 간주한다. 토마에는 집합에 속하는 개체를 단위라 부르고, “단위들은 서로 같다”고 말한다. 우리는 똑같이 정당하게 또는 더 낫게 이렇게 말할 수 있다: 집합의 개체들은 서로 다르다. 그런데 이른바 이런 동일성이 수에 대해 무슨 의미를 갖는가? 사물을 구별해주는 성질들은 사물의 기수와는 무관하고 낯선 것이다. 그 때문에 우리는 그런 성질들과는 거리를 두려 한다. 그러나 이런 식으로는 성공하지 못한다. 만일 토마에가 요구하듯이 ‘대상 집합에 속하는 개체들이 지닌 고유한 성질들을 추상화’하거나 또는 ‘개개의 사물들을 고찰할 때 사물들을 구별시켜 주는 특징들을 제거’한다면, 립쉬츠가 주장했듯이, ‘고려된 사물들의 기수 개념’이 남는 것이 아니라, 하나의 일반 개념을 얻게 되고, 그 개념 아래 사물들이 속하게 된다. 이 과정에서도 사물들은 자신의 특성을 전혀 잃지 않는다. 예를 들어 하얀 고양이와 검은 고양이를 구별해주는 성질들을 제외하고 그것들을 고찰한다면, 아마 나는 ‘고양이’라는 개념을 얻게 될 것이다. 그런데 내가 이 두 고양이를 그 개념 아래 가져와서 그것들을 단위라고 부른다고 해도, 언제나 흰 고양이는 여전히 희고 검은 고양이는 여전히 검다. 또한 내가 색깔을 생각하지 않거나 생각하지 않으려 한다고 해서, 고양이들의 색깔이 없어지는 것은 아니며, 그들은 처음부터 그랬듯이 서로 다르다. 추상화를 통해 얻게 되는 ‘고양이’란 개념은 더 이상 그 특성들을 지니지 않지만, 바로 그 때문에 하나의 개념일 뿐이다(§34).

<인용 2> 만약 우리가 셀 사물들을 단위라 부른다면, 단위들이 같다는 무조건적 주장은 거짓이다. 단위들이 이런저런 면에서 같다는 것은 옳지만 아무런 도움도 되지 않는다. 더구나 1보다 큰 수가 되려면 셀 사물들은 반드시 달라야만 한다.

따라서 우리는 단위에 서로 모순된 두 성질, 즉 동일성과 구별 가능성을 부여할 수밖에 없는 것처럼 보인다(§45).

(6) 다양성

<설명ch> 동일성에 이어 이번에는 다양성이 단위의 본질적 특성이라는 견해를 다룬다. 지본스는 “단위는 같은 문제에서 단위로 간주되는 어떠한 다른 대상과도 구분될 수 있는 사고의 대상이다”라고 말한다. 지본스는 이어서 다음과 같이 설명한다.

내가 기호 5를 쓸 때 사실 나는 언제나

1 + 1 + 1 + 1 + 1

을 의미하며, 이들 각각의 단위가 서로 구분된다는 점은 아주 분명하다. 만약 필요하다면, 나는 그 단위들을 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.

그러나 프레게가 보기에 이런 설명에는 문제가 많다. 만약 1이 나오는 자리가 다르다는 것이 이미 어떤 차이를 의미한다면, 우리는 등식 1 = 1을 버려야 할 것이고, 같은 사물을 두 번 나타낼 수도 없는 황당한 처지에 놓일 것이라고 말한다. 그래서 그렇게 되면 안 된다고 주장한다. 만약 사람들이 서로 다른 사물에는 서로 다른 기호를 부여하게 된다면, 이 기호들에서 공통의 구성 요소를 찾기 힘들다. 또

1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''

라고 쓰기보다는 왜 그냥

a + b + c + d + e

라고는 쓰지 않는지 알 수 없다. 아마 지본스가 그렇게 쓰지 않는 이유는 여러 1들 사이에 차이가 있지만 조금이나마 동일성을 유지하려고 하는 의도 때문일 것이다. 그러나 차이를 나타내기 위해 프라임을 표시했다면 그 프라임 때문에 동일성은 무효가 되고 만다.

그리고 프레게는 단위와 하나의 차이를 엄밀히 구별해야 한다고 주장한다. 그는 서로 다른 수 하나들이 존재하는 것이 아니라, 단 하나의 하나

가 존재함을 강조한다. 가령 우리는 1을 고유 이름으로 여기며, 고유 이름은 '프리드리히 대제' 나 '금이라는 화학 원소' 처럼 그 자체로는 복수가 될 수 없다. 우리가 1을 적을 때 프라임으로 구별하지 않는다는 사실은 우연이 아니며 그것은 부정확한 표시 방식도 아닌 것이다. 지본스대로 하자면

$$3 - 2 = 1$$

을 다음처럼 써야 한다.

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

그러나 이 식과 다음 식은 어떻게 다른가?

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')$$

이 식의 답은 1'은 분명히 아니다. 지본스의 설명대로 하자면 서로 다른 하나들이 있을 뿐만 아니라 서로 다른 둘들도 있게 되는 것이다. $1'' + 1'''$은 $1'''' + 1'''''$과 분명히 다르기 때문이다.

그래서 우리는 수가 사물들의 덩어리가 아니라는 것을 알 수 있다고 프레게는 말한다. 만약 우리가 언제나 동일한 하나 대신 서로 다른 사물들을 도입한다면, 그 기호들이 아무리 비슷하다고 하더라도, 산수는 불가능할 것이기 때문이다. 1을 아일랜드, 알데바란, 솔론 등의 서로 다른 대상들에 대한 기호로 간주할 수도 없다.

지본스는 사실은 유지하면서 서로 다른 특징을 추상화하는 방법을 제시한다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 이제 수의 추상화의 본성에 대한 분명한 개념을 형성하는데 어려움이 없을 것이다. 그것은 사실은 그냥 유지하면서 여럿을 생겨나게 하는 차이의 특징을 추상화하는 것으로 이루어진다. 내가 세 사람이라고 말할 때, 나는 그 사람들을 서로 구분해 주는 특징들을 한꺼번에 명시할 필요는 없다. 만일 그들이 실제로 세 사람이지, 똑 같은 한 사람이 아니라면, 이런 특징들이 있어야만 한다. 그리고 그들을 여러 사람이라고 말할 때, 나는 차이가

분명히 있음을 의미한다. 따라서 무명의[추상적인] 수는 차이의 빈 형식이다.

이 말은 무슨 뜻인가? 두 가지를 생각해 볼 수 있다. 우리는 사물들을 전체로 결합하기 전에 사물을 구별해주는 성질을 추상화할 수도 있고 전체를 형성한 다음 그런 종류의 차이를 추상화할 수도 있다. 첫째 경우라면, 우리는 사물들을 결코 구별할 수 없을 테고 실제의 차이도 유지될 수 없다. 그래서 지본스는 둘째 경우를 의도하는 것 같다. 그러나 프레게는 그렇게 해서는 수 10000을 얻게 될 수 없다고 말한다. 왜냐하면 우리는 그렇게 많은 차이를 동시에 파악할 수 없으며, 그런 실제의 차이를 유지할 수도 없을 것이기 때문이다.

'차이의 빈 형식'이 무슨 뜻일까? "a는 b와 다르다"와 같은 문장이 가령 수 2인가? "지구는 두 극을 가지고 있다"는 "북극은 남극과 다르다"와 같은 의미가 아니다. 둘째 문장은 첫째 문장이 참이 아니어도 참일 수 있기 때문이다. 그리고 우리는 수 1000에 관해서는 차이를 표현하는 문장들을

$$\frac{1000 \times 999}{1 \times 2}$$

개나 가지게 될 것이다.

지본스가 하는 말은 특히 0과 1에 대해서는 전혀 맞지 않는다. 예를 들어 달로부터 수 1에 도달하기 위해서는 무엇을 추상화해야 하는가? 아마 우리는 추상화를 통해 개념은 얻을 것이다: 지구의 위성, 행성의 위성, 스스로 빛을 내지 않는 천체, 천체, 물체, 대상. 그러나 이렇게 나열해도 1을 만날 수는 없다. 왜냐하면 1은 개념이 아니어서 그 아래 달이 속할 수 없기 때문이다. 0의 경우에는 추상화를 시작할 수 있는 대상조차도 없다. 프레게는 마지막으로 0과 1도 분명히 수이기 때문에 0과 1은 2나 3과 같은 뜻에서의 수가 아니라고 반박해도 소용이 없다고 말한다.

결국 지본스 식의 설명으로는 서로 다른 하나들, 둘들, 셋들 등이 생기게 되는데, 이것은 산수의 존재와 결코 양립할 수 없는 것이다.

<인용 1> 단위들이 다르다는 견해도 다시 난점에 빠진다. 지본스의 서로 다른 하나들.

그러나 단위들이 달라야 한다는 견해도 새로운 난점에 부딪힌다는 사실이 금방 드러난다. 지본스는 이렇게 설명한다. “단위는 같은 문제에서 단위로 간주되는 어떠한 다른 대상과도 구분될 수 있는 사고의 대상이다.” 여기서 단위는 그 자체에 의해 설명되고 있으며, “어떠한 다른 대상과도 구분될 수 있다”는 종속절은 뻔하기 때문에 결코 더 자세한 규정을 포함하고 있지 않다. 우리가 이 대상을 다른 대상이라고 부를 수 있는 이유는 오직 우리가 그 대상을 원래의 대상과 구별할 수 있기 때문이다. 지본스는 이어서 다음과 같이 말한다. “내가 기호 5를 쓸 때 사실 나는 언제나

1 + 1 + 1 + 1 + 1

을 의미하며, 이들 각각의 단위가 서로 구분된다는 점은 아주 분명하다. 만약 필요하다면, 나는 그 단위들을 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''.”

만약 그것들이 다르다면, 그 점을 확실히 명시할 필요가 있다. 그렇지 않다면, 정말 커다란 혼동이 생길 것이다. 만약 1이 나오는 자리가 다르다는 것이 이미 어떤 차이를 의미한다면, 그 점이 예외 없는 규칙으로 제시되어야 할 것이다. 왜냐하면 그렇지 않을 경우, 우리는 1 + 1이 2를 의미하는지 1을 의미하는지 전혀 알 수 없을 것이기 때문이다. 그렇다면 우리는 등식 1 = 1을 버려야 할 것이고, 같은 사물을 두 번 나타낼 수도 없는 황당한 처지에 놓일 것이다. 확실히 그렇게 되면 안 된다. 그러나 만약 사람들이 서로 다른 사물에는 서로 다른 기호를 부여하게 된다면, 왜 이 기호들에서는 공통의 구성 요소를 유지하려 하고

1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''

라고 쓰기보다는 왜 그냥

$$a + b + c + d + e$$

라고는 쓰지 않는지 알 수 없다.

그러나 이제 동일성은 다시 사라지고, 어느 정도 비슷하다고 암시하는 것은 아무 도움도 되지 못한다. 따라서 하나들은 우리 손 안에서 빠져나가 버리게 되고, 자신의 온갖 특성들을 가지는 대상들이 남게 된다. 다음 기호들

$$1', 1'', 1'''$$

은 명백히 당황스러움을 드러내는 것이다: 우리는 동일성을 반드시 가져야 하며, 따라서 1이 있어야 한다. 반면 우리는 차이를 반드시 가져야 하며, 따라서 획들이 있어야 한다. 그러나 유감스럽게도 그 획들 때문에 다시 동일성은 무효가 되고 만다(§36).

<인용 2> '하나'는 고유 이름이고, '단위'는 개념어이다. 수는 단위로 정의될 수 없다. '그리고'와 +의 차이.

그러나 혼동이 생기지 않게 하려면 단위와 하나의 차이를 엄밀히 하는 것이 좋을 것이다. 우리는 '하나라는 그 수'(die Zahl Eins)라고 말하며, 정관사를 통해 과학적 탐구를 위한 하나의 특정한 개별 대상을 암시한다. 서로 다른 수 하나들이 존재하는 것이 아니라, 단 하나의 하나가 존재한다. 우리는 1을 고유 이름으로 여기며, 고유 이름은 '프리드리히 대제'(Friedrich der Grosse)나 '금이라는 화학 원소'(das chemische Element Gold)처럼 그 자체로는 복수가 될 수 없다. 우리가 1을 적을 때 획으로 구별하지 않는다는 사실은 우연이 아니며 그것은 부정확한 표시 방식도 아니다. 지본스는 등식

$$3 - 2 = 1$$

을 다음처럼 쓸 것이다:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'.$$

그러나 다음의 결과는 무엇이겠는가?

(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')

1'은 분명히 아니다. 이 사실로부터, 지본스의 이해에 따를 때, 서로 다른 하나들이 있을 뿐만 아니라 서로 다른 둘들도 있고 다른 경우도 마찬가지라는 점이 이끌어진다. 왜냐하면 1'' + 1'''은 1'''' + 1'''''로 대체될 수 없을 것이기 때문이다. 우리는 이로부터 수가 사물들의 덩어리가 아니라는 것을 분명히 알 수 있다. 만약 우리가 언제나 동일한 하나 대신 서로 다른 사물들을 도입한다면, 그 기호들이 아무리 비슷하다고 하더라도, 산수는 불가능할 것이다. 오류가 없다면 그 기호들은 같은 것일 수 없다. 더구나 우리는 산수가 잘못된 쓰기 방식에서 원래 비롯되었다는 사실도 받아들일 수 없다. 그 때문에 1을 아일랜드, 알데바란, 솔론 등의 서로 다른 대상들에 대한 기호로 간주할 수도 없다. 그렇게 하는 것이 무의미하다는 사실은 어떤 등식이 세 개의 근, 즉 2와 5와 4를 가지는 경우를 생각해 볼 때 가장 쉽게 파악될 수 있다. 그런데 우리가 지본스를 따라 3 대신

1' + 1'' + 1'''

이라고 쓰고 여기서 1', 1'', 1'''을 단위들로 이해하고 다시 지본스를 따라 우리가 고려한 사고의 대상들로 이해한다면, 1'은 2, 1''은 5, 1'''은 4를 의미할 것이다. 그렇다면 1' + 1'' + 1''' 대신 다음처럼 쓰는 것이 더 이해하기 쉽지 않은가?

2 + 5 + 4

개념어만 복수가 가능하다. 우리가 '단위들'이라고 말하는 경우, 우리는 이 말을 고유 이름 '하나'와 똑같은 의미로는 사용할 수 없고 개념어로 사용할 수 있다. 만약 '단위'가 '셀 대상들'을 의미한다면, 우리는 수를 단위들로 정의할 수 없다. 우리가 '단위'를 그 안에 하나가 포함되고 그리고 하나만이 포함되는 개념으로 이해한다면, 복수는 아

무 뜻도 가지지 않을 것이고, 다시 라이프니츠처럼 수를 단위들이나 1과 1과 1(1 und 1 und 1)로 정의하는 것도 불가능할 것이다. 만약 우리가 '그리고'(und)를 '분젠과 키르히호프'(Bunsen und Kirchhoff)의 경우처럼 사용한다면, 1과 1과 1(1 und 1 und 1)은 금과 금과 금(Gold und Gold und Gold)이 금 이외의 아무 것도 아닌 것처럼 3이 아니라 1이 된다.

$$1 + 1 + 1 = 3$$

에서 덧셈 기호는 하나의 묶음, 하나의 '집합적 관념'을 나타내는데 도움을 주는 '그리고'와는 다르게 이해되어야 한다(§38).

<인용 3> 만약 우리가 서로 다른 대상들을 결합해서 수가 생긴다고 간주한다면, 우리는 어떤 덩어리를 얻게 되고, 그 덩어리 안의 대상들은 서로 구별되는 성질들을 여전히 지니고 있다. 그런데 그 덩어리가 바로 수는 아니다. 반면 만약 우리가 수를 같은 것들을 결합해서 얻어지는 것으로 간주한다면, 그것들은 곧바로 하나로 합쳐지며, 우리는 결코 다수에 이르지 못하게 된다.

만약 우리가 셀 대상들 각각을 1로 표시하면, 서로 다른 것들이 같은 기호를 가지기 때문에 그것은 잘못이다. 우리가 1을 서로 다른 획을 가진 것으로 이해하려 하면, 그것은 산수에 쓸모없게 된다(§38).

<인용 4> 사실은 유지하면서 서로 다른 특징을 추상화하는 지본스의 방법. 0과 1은 다른 수들과 마찬가지로 수들이다. 난점은 여전히 남아 있다.

사물들을 구별해주는 인식 표시를 수에 떠넘기지 않기 위해, 지본스는 다음과 같이 말한다.

"이제 수의 추상화의 본성에 대한 분명한 개념을 형성하는데 어려움이 없을 것이다. 그것은 사실은 그냥 유지하면서 여럿을 생겨나게 하는 차이의 특징을 추상화하는 것으로 이루어진다. 내가 세 사람이라고 말할 때, 나는 그 사람들을 서로 구분해 주는 특징들을 한꺼번에 명시할 필요는 없

다. 만일 그들이 실제로 세 사람이지, 똑 같은 한 사람이 아니라면, 이런 특징들이 있어야만 한다. 그리고 그들을 여러 사람이라고 말할 때, 나는 차이가 분명히 있음을 의미한다. 따라서 무명의[추상적인] 수는 차이의 빈 형식이다.”

이 말을 어떻게 이해해야 하는가? 우리는 사물들을 전체로 결합하기 전에 사물을 구별해주는 성질을 추상화할 수도 있고 전체를 형성한 다음 그런 종류의 차이를 추상화할 수도 있다. 첫째 경우라면, 우리는 사물들을 결코 구별할 수 없을 테고 실제의 차이도 유지될 수 없다. 지본스는 둘째 경우를 의도하는 것 같다. 그러나 나는 그렇게 해서 수 10000을 얻게 되리라고 믿지 않는다. 왜냐하면 우리는 그렇게 많은 차이를 동시에 파악할 수 없으며, 그런 실제의 차이를 유지할 수도 없을 것이기 때문이다. 그런 일이 차례로 일어난다고 하더라도 그 수는 완성되지도 못할 것이다. 우리는 시간 내에서 수를 센다. 그러나 우리는 이를 통해 수를 얻는 것이 아니라 단지 수를 확정할 뿐이다. 게다가 추상화하는 방법을 제시하는 것이 결코 정의는 아니다.

‘차이의 빈 형식’을 우리는 어떻게 이해해야 하는가? a와 b가 정해지지 않았을 때 아마

“a는 b와 다르다.”

와 같은 문장으로 이해해야 하는가? 이 문장이 가령 수 2인가? 다음 문장

“지구는 두 극을 가지고 있다.”

은

“북극은 남극과 다르다.”

와 같은 의미인가? 분명히 그렇지 않다. 둘째 문장은 첫째 문장이 참이 아니어도 참일 수 있으며, 첫째 문장도 둘째 문장이 참이 아니어도 참일 수 있다. 나아가 우리는 수 1000에 관해서는 차이를 표현하는 문장들을 1000x999

1x2
개 가지게 될 것이다.

지본스가 하는 말은 특히 0과 1에 대해서는 전혀 맞지 않는다. 예를 들어 달로부터 수 1에 도달하기 위해서는 무엇을 추상화해야 하는가? 아마 우리는 추상화를 통해 개념은 얻을 것이다: 지구의 위성, 행성의 위성, 스스로 빛을 내지 않는 천체, 천체, 물체, 대상. 그러나 이렇게 나열해도 1을 만날 수는 없다. 왜냐하면 1은 개념이 아니어서 그 아래 달이 속할 수 없기 때문이다. 0의 경우에는 추상화를 시작할 수 있는 대상조차도 없다. 0과 1은 2나 3과 같은 뜻에서의 수가 아니라고 반박해도 소용이 없다! 수는 "몇 개의?" 라는 물음에 대답해 준다. 예를 들어 우리가 "이 행성은 몇 개의 달을 가지고 있는가?" 라고 묻는다면, 우리는 2나 3이란 대답의 경우와 마찬가지로 0이나 1이란 대답도 잘 이해할 수 있다. 그래도 그 물음의 뜻은 달라지지 않는다. 수 0은 특별한 것이고 수 1도 특별한 것이지만, 이 점은 근본적으로 모든 정수에 대해서도 성립한다. 단지 그 사실은 더 큰 수의 경우에 눈에 덜 띌 뿐이다. 여기서 종류를 구분하는 것은 아주 자의적이다. 0과 1에 대해 성립하지 않는 것은 수 개념에 대해 필수적인 것일 수가 없다.

결국 이런 식으로 수가 생겨난다고 가정해서는 5를

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

처럼 표현하려고 했을 때 부딪혔던 난점들을 결코 극복할 수 없다. 이런 표현법은 추상화에 의한 수의 형성에 관해 지본스가 한 말과 잘 어울린다. 위에서 획들은 어떤 차이인지 정확히 드러내지는 않으면서 그냥 차이가 있다는 것을 암시해 준다. 그러나 우리가 이미 앞에서 보았듯이, 지본스 식으로 이해하면 단지 차이가 있다는 것만으로도 서로 다른 하나들, 둘들, 셋들 등이 이미 생기는데, 이것은 산수의 존재와 결코 양립할 수 없다(§44).

(7) 개념

<설명ch> 프레게는 지금까지 수 진술을 통해 무엇에 관해 어떤 것이 서술되는가 하는 물음에 대한 세 가지 답변을 검토하고 문제점이 있음을 지적하였다. 이제는 자신의 견해를 밝힌다. 그는 수 진술은 개념에 부여된 것이라고 주장한다. 그는 다음과 같은 예를 든다. 우리가 똑 같은 외부 현상을 바라보면서 "이것은 군락(群落)이다"라고 말할 수 있고 "이것은 다섯 그루의 나무이다"라고 말할 수도 있으며, 또한 "여기에는 네 개 중대가 있다"고 말할 수도 있고 "여기에는 500명의 사람이 있다"고 말할 수도 있다. 이때 개별적인 것도 바뀌지 않았고, 그것들의 모임인 전체도 변하지 않았지만 명명 방법만이 바뀌었을 뿐이다. 그것은 곧 다만 한 개념이 다른 개념으로 교체된다는 것을 보여준다. 그래서 프레게는 수 진술은 개념에 대한 서술을 포함한다는 것을 제안한다.

이 제안은 수 0의 경우에 가장 잘 적용된다. 가령 "금성에는 달이 0개 있다"고 말할 경우, 어떤 모임이 있어서 그에 대해 무언가 서술하는 것이 전혀 아니다. 수가 집합이라는 견해는 그래서 받아들일 수 없었다. 오히려 그 문장을 통해 '금성의 달'이란 개념에는 그 아래 아무 것도 포함되어 있지 않다는 성질이 부여된 것이라고 보아야 한다. "황제의 마차는 네 마리의 말이 끌고 있다"고 말한다면, '황제의 마차를 끄는 말' 이란 개념에 수 넷을 부여한 것이다. '네 마리의 멋진 말'이라는 표현은 마치 '멋진'이 '말'이라는 개념을 자세히 규정해 주듯이 '네 마리의'도 '멋진 말'이라는 개념을 더 자세히 규정해 준다는 환상을 불러일으킨다. 그러나 '멋진'만이 그러한 특징이다. '네 마리의'라는 낱말은 어떤 개념에 대해 서술한다.

수 진술이 개념에 대한 서술이라는 견해에 다음과 같은 반박이 가능할 것 같다. 수 진술이 예를 들어 '독일의 주민' 같은 개념에 대해 그런 성질을 서술한다면, 개념의 특징이 변하지 않는데도 그 개념은 해마다 증가하는 성질을 지니게 된다고 말이다. 프레게는 이런 반박에 대해, 사실은 대상도 변하는 것이라고 대답한다. 그 변하는 대상에 대해 개념도 따라서 변하는 것이다. 수학적으로 표현하자면 '독일의 주민'이란 개념은 시간의 함수이다. 그래서 시간이 고정되어 있는 개념, 예를 들어 '베를린 시간으로 1883년 설날의 독일의 주민'이란 개념은 변하지 않고 영원

히 동일한 수가 귀속될 것이다.

프레게는 이 개념이 표상처럼 절대 주관적인 것이 아니라는 것을 강조한다. 곧 개념은 표상과는 다르다는 것이다. 이 점은 수 이외의 다른 개념에 대한 진술에서 알 수 있다. 예를 들어 물체라는 개념을 무게라는 개념에, 고래라는 개념을 포유 동물이라는 개념에 종속시킬 경우 우리는 무언가 객관적인 것을 주장한다. 그런데 개념이 주관적이라면, 개념들 사이의 관계로서 한 개념이 다른 개념에 종속된다는 것도 표상들간의 관계처럼 주관적인 것이 될 것이다. “모든 고래는 포유 동물이다” 라는 문장이 아무리 개별 동물에 대한 관찰을 통해서만 정당화될 수 있다고 하더라도, 이 사실은 문장의 내용과 관련해 아무 것도 보여주는 바가 없다. 그 문장이 참인가 거짓인가, 또는 어떤 근거에서 우리가 그것을 참이라고 간주하는가 하는 점은 그 문장이 무엇에 대해 다루는가 하는 문제와는 무관하다. 따라서 개념이 객관적인 것이면, 개념에 대한 서술도 사실적인 것을 포함할 수 있다.

프레게는 자신의 견해가 그 동안 문제점으로 지적되어온 것을 설명할 수 있다고 말한다. 우선 같은 사물이 여러 수를 지닌다는 환상이 있었다. 이것은 대상을 수의 소유자로 여기기 때문에 생긴 환상이다. 수가 사물에 귀속된다고 생각한 것이다. 그러나 수는 개념에 귀속된다. 그러면 한 대상에 두 가지 색깔이 귀속될 수 없는 것처럼, 가령 한 사물이 동시에 빨가면서 파랄 수 없는 것처럼, 한 개념은 여러 가지 수를 동시에 가질 수 없다.

개념은 추상화를 통해 얻는다. 그래서 개념에서 우리는 수를 발견한다. 따라서 수 판단을 형성하는 일보다 추상화가 먼저 일어나는 경우도 자주 있다. 그러나 그렇다고 해서 추상화가 개념을 형성하는 유일한 방법은 아니라는 것을 프레게는 지적한다. 예를 들어 개념이 지닌 모으는 능력은 종합적 통각이 지닌 통일하는 능력보다 훨씬 뛰어나다. 통각은 독일 주민을 전체로 묶을 수 없다. 그러나 우리는 독일 주민들을 ‘독일 주민’ 이라는 개념 아래 가져올 수 있고 셀 수 있다. 프레게는 이것을 스피노자와 비교한다. 스피노자는 여러 대상들로부터 추상화를 통해서만 직접 개념이 얻어질 수 있다고 생각하는 점에서 잘못을 저지르고 있다. 오히려 우리는

특징들로부터 개념에 이를 수도 있고, 그 경우에는 그 개념 아래 아무 대상도 속하지 않을 수 있다. 그렇지 않다면 우리는 결코 존재를 부정할 수 없을 테고, 따라서 존재의 긍정도 그 내용을 잃고 말 것이다.

그리고 수는 외적인 것과 내적인 것, 공간적인 것과 시간적인 것, 비공간적인 것과 무시간적인 것에도 똑같이 적용된다. 바로 수 진술이 개념에 부여되기 때문에 그것이 가능한 것이라고 프레게는 말한다.

슈레더는 일반 개념어를 사물의 이름이라고 부른다. 우리가 어떤 대상을 완벽하게 파악한다면, 그 대상은 세상에서 하나만 존재할 것이고, 그것과 같은 것은 더 이상 없을 것이다. 그렇다면 그 대상의 이름은 고유 이름의 성격을 지니게 되고, 그 대상은 더 이상 반복하여 나타날 수 없는 것으로 간주될 것이다. 그러나 프레게는 일반 개념어를 사물의 이름이라 부르는 것은 맞지 않다고 주장한다. 이 때문에 마치 수가 사물의 성질이라는 환상이 생겨나게 된다는 것이다. 어떤 개념 아래 오직 하나의 사물이 속하고 그 사물을 통해 그 개념이 완전히 규정된다 하더라도, 그것이 더 이상 개념이 아니게 되는 것은 아니다. 일반 개념어는 바로 개념을 나타낸다. 개념어는 정관사나 지시 대명사와 결합될 경우에만(예를 들어 '그 고양이') 사물의 고유 이름 역할을 하는데, 이 경우 그것은 더 이상 개념어의 역할을 하지 않는다. 사물의 이름은 고유 이름이다. 한 대상이 반복해서 나타나는 것이 아니라, 여러 대상이 한 개념 아래 속한다. 어떤 개념 아래 속하는 대상들을 추상화할 때에만 개념이 얻어지는 것은 아니라는 사실은 스피노자를 비판하면서 이미 지적했다. 바로 그런 개념(예를 들어 지구의 위성이란 개념)에 수 1이 귀속되며, 이때 수 1은 2나 3과 똑같은 뜻의 수이다. 개념의 경우는 무언가가 그 아래 속하는지 그리고 속한다면 무엇이 속하는지가 언제나 문제된다. 고유 이름의 경우에는 그런 물음이 뜻이 없다. 우리는 언어에서 달 같은 고유 이름이 개념어로 사용되기도 하고 개념어가 고유 이름으로 사용되기도 한다는 사실 때문에 속아서는 안 된다: 그 경우에도 여전히 차이는 남는다. 어떤 낱말이 부정관사를 가지고 있거나 관사 없이 복수로 사용될 경우 그것은 개념어이다.

<인용 1> 수 진술은 개념에 대한 서술을 포함한다. 개념은 변하지 않지

만 수는 변한다는 반론.

문제를 제대로 보기 위해서는 수의 근원적인 사용 방법이 드러나는 판단의 맥락 안에서 수를 살펴보는 것이 좋을 것이다. 내가 똑 같은 외부 현상을 바라보면서 "이것은 군락(群落)이다"라고 말할 수 있고 "이것은 다섯 그루의 나무이다"라고 말할 수도 있으며, 또한 "여기에는 네 개 중대가 있다"고 말할 수도 있고 "여기에는 500명의 사람이 있다"고 말할 수도 있다. 이때 개별적인 것도 바뀌지 않았고, 그것들의 모임인 전체도 변하지 않았지만 나의 명명 방법이 바뀌었다. 그러나 그것은 다만 한 개념이 다른 개념으로 교체된다는 것을 보여준다. 이를 통해 우리는 앞 절의 첫 번째 물음에 대한 대답으로 수 진술은 개념에 대한 서술을 포함한다는 것을 제안한다. 아마 이 대답은 수 0의 경우 가장 분명할 것이다. 내가 "금성은 0개의 달을 가지고 있다"고 말할 경우, 어떤 모임이 있어서 그에 대해 무언가 서술하는 것이 전혀 아니다. 오히려 그 문장을 통해 '금성의 달'이란 개념에는 그 아래 아무 것도 포함되어 있지 않다는 성질이 부여된 것이다. "황제의 마차는 네 마리의 말이 끌고 있다"고 말한다면, 나는 '황제의 마차를 끄는 말'이란 개념에 수 넷을 부여한 것이다.

수 진술이 예를 들어 '독일의 주민' 같은 개념에 대해 그런 성질을 서술한다면, 개념의 특징이 변하지 않는데도 그 개념은 해마다 증가하는 성질을 지니게 된다고 비판할지도 모른다. 이를 반박하여, 우리는 대상도 또한 성질이 변하지만 이 때문에 우리가 그것을 같은 것으로 인정할 수 없는 것은 아니라고 주장할 수 있다. 그러나 그 근거를 좀더 정확히 제시할 수 있다. '독일의 주민'이란 개념은 말하자면 시간을 변경 가능한 구성 요소로 포함하고 있다. 즉 그것은 수학적으로 표현하면 시간의 함수이다. 우리는 "a는 독일의 주민이다" 대신 "a는 독일에 살고 있다"라고 말할 수 있고, 이것은 현재 시점과 직접 관련된다. 따라서 그 개념에는 유동적인 것이 이미 포함되어 있다. 반면 '베를린 시간으로 1883년 설날의 독일의 주민'이란 개념에는 영원히 동일한 수가 귀속된다(§46).

<인용 2> 수 진술이 사실적인 것이라는 점은 개념의 객관성을 통해 설

명된다.

수 진술이 우리의 이해와 독립된 사실적인 것을 표현한다는 점은 개념을 표상처럼 주관적인 것으로 간주하는 사람이 아니라면 놀라운 일이 아니다. 그러나 개념도 표상처럼 주관적인 것이라는 견해는 거짓이다. 예를 들어 물체라는 개념을 무게라는 개념에, 고래라는 개념을 포유 동물이라는 개념에 종속시킬 경우 우리는 무언가 객관적인 것을 주장한다. 그런데 개념이 주관적이라면, 개념들 사이의 관계로서 한 개념이 다른 개념에 종속된다는 것도 표상들간의 관계처럼 주관적인 것이 될 것이다. 물론 처음 볼 때

"모든 고래는 포유 동물이다"

라는 문장은 개념에 대해 다루는 것이 아니라 동물에 대해 다루는 것처럼 보인다. 그러나 그 경우 어떤 동물에 대해 말하고 있는지 묻는다면, 우리는 단 한 마리도 지적할 수 없다. 고래 한 마리가 앞에 있다고 가정하더라도, 그 문장은 이 고래에 대해서는 아무 것도 얘기해 주지 않는다. 앞에 있는 그 동물이 고래라는 문장을 덧붙이지 않고는 그 동물이 포유동물이라는 것을 이끌어 낼 수 없다. 그런데 원래 문장은 그 동물에 대해서는 아무 것도 말해주지 않는다. 일반적으로 한 대상에 대해 말하는 일은 그것을 어떤 식으로 나타내거나 가리키지 않고는 불가능하다. 그러나 '고래'라는 말은 결코 개별 존재를 가리키지 않는다. 그 경우 물론 개별적인, 정해진 대상이 아니라 정해지지 않은 대상에 대해 말하는 것이라고 누군가 대꾸한다면, 나는 '정해지지 않은 대상'이란 '개념'의 다른 표현에 불과하며 게다가 더 조잡하고 모순적인 표현이라고 생각한다. 아무리 그 문장이 개별 동물에 대한 관찰을 통해서만 정당화될 수 있다고 하더라도, 이 사실은 문장의 내용과 관련해 아무 것도 보여주는 바가 없다. 그 문장이 참인가 거짓인가, 또는 어떤 근거에서 우리가 그것을 참이라고 간주하는가 하는 점은 그 문장이 무엇에 대해 다루는가 하는 문제와는 무관하다. 따라서 개념이 객관적인 것이면, 개념에 대한 서술도 사실적인 것을 포함할 수 있다(§47).

<인용 3> 몇 가지 난점의 해결

앞의 여러 예에서 생긴 환상, 즉 같은 사물이 여러 수를 지닌다는 환상은 대상을 수의 소유자로 여기는 데서 비롯되었다고 설명할 수 있다. 우리가 대상 대신 개념을 진짜 소유자로 제대로 바꾸어 넣는다면 수도 색깔처럼 자신의 영역 내에서 서로 배타적임이 드러난다.

이제 우리는 왜 사람들이 사물을 추상화하여 수를 얻으려 하는지 알 수 있다. 추상화를 통해 우리가 얻는 것은 개념이며, 개념에서 우리는 수를 발견한다. 따라서 수 판단을 형성하는 일보다 추상화가 먼저 일어나는 경우도 자주 있다. 화재 위험이란 개념을 얻으려면, 벽은 나무로, 지붕은 짚으로, 굴뚝은 허술하게 집을 지어보아야만 된다고 주장하는 것도 비슷한 혼동이다.

개념이 지닌 모으는 능력은 종합적 통각이 지닌 통일하는 능력보다 훨씬 뛰어나다. 통각은 독일 주민을 전체로 묶을 수 없다. 그러나 우리는 독일 주민들을 '독일 주민'이라는 개념 아래 가져올 수 있고 셀 수 있다.

그렇다면 수가 아주 폭넓게 적용 가능하다는 점도 설명할 수 있다. 외부 현상뿐만 아니라 내부 현상에 대해서도 그리고 공간적이고 시간적인 것뿐만 아니라 비공간적이고 무시간적인 것에 대해서도 어떻게 똑같은 것을 서술할 수 있는지 정말 수수께끼 같은 일이다. 그러나 수 진술에서 실제 일어나는 일은 그것이 아니다. 수는 개념에만 부여될 뿐인데, 그 개념 아래 외적인 것과 내적인 것, 공간적인 것과 시간적인 것, 비공간적인 것과 무시간적인 것이 들어간다(§48).

<인용 4> 스피노자에게서 확인됨

우리 견해가 맞다는 사실은 스피노자한테서도 확인된다. 그는 이렇게 말한다. "나는 어떤 사물이 하나라거나 유일하다고 불리는 것은 그 사물의 존재에 대한 것이지 그 사물의 본질에 대한 것은 아니라고 대답한다. 왜냐하면 우리는 사물들을 어떤 공통된 표준 아래 가져온 다음에야 비로소 수로 표상하기 때문이다. 예컨대 1 세스터즈와 1 임페리얼을 손에 쥐고 있는 사람이 이들을 똑같은 이름, 즉 화폐나 주화 아래 포괄할 수 없다면, 수 둘을 생각하지 않을 것이다. 그런 다음에야 그는 두 개의 화폐

나 주화를 가지고 있음을 긍정할 수 있다. 왜냐하면 그는 화폐나 주화에 의해 세스터즈뿐만 아니라 임페리얼도 표시하기 때문이다.” 그런데 그는 이어서 “따라서 이로부터 분명한 것은 한 사물을 하나라거나 유일하다고 부르는 일은 그 사물과 일치하는 다른 어떤 사물이 (앞의 언급처럼) 표상된 후에야 가능하다는 점이다”라고 말하고, 그리고 그는 신의 본질로부터 어떤 추상 개념도 형성할 수 없기 때문에 우리가 신을 본래의 뜻에서 하나라거나 유일하다고 부를 수 없다고 생각한다. 이 경우 스피노자는 여러 대상들로부터 추상화를 통해서만 직접 개념이 얻어질 수 있다고 생각하는 점에서 잘못을 저지르고 있다. 오히려 우리는 특징들로부터 개념에 이를 수도 있고, 그 경우에는 그 개념 아래 아무 대상도 속하지 않을 수 있다. 그렇지 않다면 우리는 결코 존재를 부정할 수 없을 테고, 따라서 존재의 긍정도 그 내용을 잃고 말 것이다(§49).

<인용 5> 슈뢰더의 설명

슈뢰더는 어떤 사물의 빈도에 관해 말할 수 있으려면, 그 사물의 이름은 언제나 종류의 이름, 즉 일반적인 개념어이어야 한다는 점을 강조한다. “말하자면 우리가 어떤 대상을 그 대상의 모든 성질 및 관계까지 완벽하게 파악한다면, 그 대상은 세상에서 하나만 존재할 것이고, 그것과 같은 것은 더 이상 없을 것이다. 그렇다면 그 대상의 이름은 고유 이름의 성격을 지니게 되고, 그 대상은 더 이상 반복하여 나타날 수 없는 것으로 간주될 것이다. 이 사실은 구체적 대상들에 대해서 뿐만 아니라 모든 사물에 대해서도 일반적으로 성립한다. 다만 그 경우 어떤 사물의 표상이 추상화를 통해서 얻어질 수도 있는데, 이때 그 표상은 문제의 사물을 완전하게 규정하기에 충분할 만큼의 요소들을 자신 안에 포함하고 있어야 된다.” “어떤 사물에서 이런 일[셈의 대상이 되는 일]이 가능하려면, 먼저 그 사물이 지닌 여러 가지 특징과 관계들, 즉 그것과 다른 사물을 구별해주는 특징과 관계들을 무시하거나 추상화해야 한다. 이를 통해 그 사물의 이름은 비로소 더 많은 사물에 사용될 수 있는 개념이 된다.”(§50)

<인용 6> 그것[슈뢰더의 설명]의 수정

이 설명에서는 진실이 왜곡되어 있고, 오해의 소지가 있기 때문에 시정과 해명이 꼭 필요하다. 우선 일반 개념어를 사물의 이름이라 부르는 것은 맞지 않다. 이 때문에 마치 수가 사물의 성질이라는 환상이 생겨나게 된다. 일반 개념어는 바로 개념을 나타낸다. 개념어는 정관사나 지시 대명사와 결합될 경우에만 사물의 고유 이름 역할을 하는데, 이 경우 그것은 더 이상 개념어의 역할을 하지 않는다. 사물의 이름은 고유 이름이다. 한 대상이 반복해서 나타나는 것이 아니라, 여러 대상이 한 개념 아래 속한다. 어떤 개념 아래 속하는 대상들을 추상화할 때에만 개념이 얻어지는 것은 아니라는 사실은 스피노자를 비판하면서 이미 얘기되었다. 여기서는 어떤 개념 아래 오직 하나의 사물이 속하고 그 사물을 통해 그 개념이 완전히 규정된다 하더라도, 그것이 더 이상 개념이 아니게 되는 것은 아니라는 점을 덧붙이겠다. 바로 그런 개념(예를 들어 지구의 위성이란 개념)에 수 1이 귀속되며, 이때 수 1은 2나 3과 똑같은 뜻의 수이다. 개념의 경우는 무언가가 그 아래 속하는지 그리고 속한다면 무엇이 속하는지가 언제나 문제된다. 고유 이름의 경우에는 그런 물음이 뜻이 없다. 우리는 언어에서 달 같은 고유 이름이 개념어로 사용되기도 하고 거꾸로[개념어가 고유 이름으로] 사용되기도 한다는 사실 때문에 속아서는 안 된다: 그 경우에도 여전히 차이는 남는다. 어떤 낱말이 부정관사를 가지고 있거나 관사 없이 복수로 사용될 경우 그것은 개념어이다(§1).

<인용 7> 독일어 어법에서 확인됨

수란 개념에 부여된다는 견해가 맞다는 점을 보여주는 또 다른 증거는 우리가 열 사람(zehn Mann), 사 마르크(vier Mark), 세 통(drei Fass)이라고 말할 때의 독일어 용법에서 찾을 수 있다. 여기서 단수는 우리가 개념을 의미하는 것이지 사물을 의미하는 것이 아님을 암시한다. 이러한 표현 방식의 장점은 특히 수 0의 경우에 두드러지게 나타난다. 물론 언어에서는 때에 따라 개념이 아니라 대상에 수를 부여하기도 한다: 우리는 ‘화물(貨物)의 무게’라고 말하듯 ‘화물의 수’라고도 말한다. 그래서 우리는 대상들에 대해 말하는 것처럼 보이지만, 실제로는 개념에 대해 무

언가를 서술하려고 한다. 이런 용법은 우리를 오도한다. ‘네 마리의 멋진 말’이라는 표현은 마치 ‘멋진’이 ‘말’이라는 개념을 자세히 규정해 주듯이 ‘네 마리의’도 ‘멋진 말’이라는 개념을 더 자세히 규정해 준다는 환상을 불러일으킨다. 그러나 ‘멋진’만이 그러한 특징이다. 우리는 ‘네 마리의’라는 낱말로 어떤 개념에 대해 서술한다(§2).

(8) 존재와 수의 유사성

<설명ch> 프레게는 개념의 특징과 개념의 성질을 구별할 것을 강조한다. 특징들은 그 개념 아래 속하는 사물들의 성질이지 개념의 성질이 아니다. 따라서 ‘직각’은 ‘직각 삼각형’이라는 개념의 성질이 아니다. 그것은 그 개념 아래에 속하는 삼각형들의 속성이다. 그러나 “직선으로 이루어진 등변 직각 삼각형은 없다”는 문장은 ‘직선으로 이루어진 등변 직각 삼각형’이라는 개념의 성질을 서술한다. 이 개념에는 수 0이 부여된다.

프레게는 이런 점에서 존재는 수와 비슷하다고 말한다. 존재를 긍정한다는 것은 수 0을 부정하는 것 외에 아무 것도 아니기 때문이다. 천사가 존재한다고 존재를 긍정한다는 것은 ‘천사’라는 개념이 그 아래 속하는 어떤 것을 갖는다는 주장이다. 한 개념이 그 아래 속하는 어떤 것을 갖는다고 말하는 것은 그 개념에 속하는 수가 0이 아닌 어떤 것임을 말하는 것이다.

존재는 개념의 성질이므로, 신의 존재에 대한 존재론적 증명은 그 목적을 달성할 수 없다. 신이 있다면 그것은 ‘신’ 개념의 특징이 아니라 성질이기 때문이다. 이것은 유일성도 마찬가지다. 유일성도 ‘신’ 개념의 특징이 아니다. 우리가 집을 지을 때 돌, 시멘트, 목재와 함께 견고함, 널찍함, 안락함을 사용할 수는 없는 것처럼, 유일성도 신 개념의 정의에 사용될 수 없다.

그런데 프레게는 우리가 어떤 것이 개념의 성질이라는 사실로부터 그런 성질이 그 개념의 특징들로부터 따라나올 수 없다고 일반적으로 추론해서는 안 된다고 지적한다. 우리가 때때로 주춧돌의 종류로부터 건물의 내구성을 추리할 수 있는 것처럼, 어떤 상황에서는 그런 추리가 가능하다는

것이다. 실제로 프레게는 '등변 직각 삼각형' 이란 개념의 특징으로부터 그것이 수 0을 갖는다는 성질을 가짐을 이끌어 냈다. 다만 그 일은 우리가 어떤 개념의 특징을 그 아래 속하는 대상에 성질로서 부여하는 것처럼 그렇게 곧 바로 이루어질 수가 없다는 것이다.

프레게는 또 존재와 유일성이 개념의 특징일 수도 있다고 인정한다. 다만 존재와 유일성은 일반적인 개념이 아니라 2단계 개념이라고 프레게는 말한다. 예를 들어 단 하나의 대상만이 속하는 모든 개념을 한 개념 아래 모은다면, 유일성은 이 개념의 특징이 된다. 그러나 이 개념 아래에는 예를 들어 '지구의 달' 이란 개념은 속하지만, 그렇게 불리는 천체는 속하지 않는다. 따라서 우리는 한 개념이 더 상위의 개념 아래, 한 개념이 2단계 개념 아래 속한다고 말할 수 있다. 그런데 이 관계는 종속 개념과는 다르다는 것을 프레게는 말한다. 예를 들어 '달' 이란 개념이 '위성' 이란 개념과 맺는 관계와는 다르다는 것이다.

<인용 1> 개념의 특징과 성질의 구별. 존재와 수.

물론 우리는 어떤 개념에 관해 서술하는 성질들을 그 개념을 구성하는 특징으로 이해하지는 않는다. 특징들은 그 개념 아래 속하는 사물들의 성질이지 개념의 성질이 아니다. 따라서 '직각' 은 '직각 삼각형' 이라는 개념의 성질이 아니다. 그러나 "직선으로 이루어진 등변 직각 삼각형은 없다" 는 문장은 '직선으로 이루어진 등변 직각 삼각형' 이라는 개념의 성질을 서술한다. 이 개념에는 수 0이 부여된다.

이런 점에서 존재는 수와 비슷하다. 존재를 긍정한다는 것은 수 0을 부정하는 것 외에 아무 것도 아니다. 존재는 개념의 성질이므로, 신의 존재에 대한 존재론적 증명은 그 목적을 달성할 수 없다. 그런데 존재가 '신' 개념의 특징이 아니듯이, 유일성도 '신' 개념의 특징이 아니다. 우리가 집을 지을 때 돌, 시멘트, 목재와 함께 견고함, 널찍함, 안락함을 사용할 수는 없는 것처럼, 유일성도 신 개념의 정의에 사용될 수 없다. 그러나 우리는 어떤 것이 개념의 성질이라는 사실로부터 그런 성질이 그 개념으로부터, 즉 그 개념의 특징들로부터 따라나올 수 없다고 일반적으로 추론해서는 안 된다. 우리가 때때로 주춧돌의 종류로부터 건물의 내구

성을 추리할 수 있는 것처럼, 어떤 상황에서는 그런 추리가 가능하다. 따라서 어떤 개념의 특징들로부터 유일성이나 존재를 절대 이끌어 낼 수 없다는 것은 지나친 주장일 것이다. 단지 그 일은 우리가 어떤 개념의 특징을 그 아래 속하는 대상에 성질로서 부여하는 것처럼 그렇게 곧 바로 이루어질 수가 없다는 것이다.

존재와 유일성이 개념의 특징일 수 있음을 부정하는 것도 잘못일 것이다. 다만 존재와 유일성은 우리가 언어 사용에서 부여하고 싶어하는 그런 개념의 특징이 아닐 뿐이다. 예를 들어 단 하나의 대상만이 속하는 모든 개념을 한 개념 아래 모은다면, 유일성은 이 개념의 특징이 된다. 그러나 이 개념 아래에는 예를 들어 '지구의 달'이란 개념은 속하지만, 그렇게 불리는 천체는 속하지 않는다. 따라서 우리는 한 개념이 더 상위의 개념 아래, 한 개념이 2단계 개념 아래 속한다고 말할 수 있다. 그러나 이 관계를 종속 관계와 혼동해서는 안 된다(§3).

(9) 단위의 동일성과 구별가능성의 조화

<설명ch> 프레게는 이제 단위의 동일성이 구별 가능성과 어떻게 조화될 수 있는가 하는 물음에 쉽게 대답할 수 있다고 말한다. 여기서 '단위'라는 낱말은 두 가지 뜻으로 사용되기 때문이다. "목성은 네 개의 달을 가지고 있다"는 문장에서 단위는 '목성의 달'이다. 이 개념 아래에는 Ⅰ이 속하고, Ⅱ도, Ⅲ도, Ⅳ도 속한다. 따라서 우리는 Ⅰ과 관련된 단위는 Ⅱ와 관련된 단위와 같다고 말할 수 있다. 그 경우 우리는 동일성을 지닌다. 그러나 단위들이 구별 가능하다고 주장하는 경우, 우리는 셀 사물들이 구별될 수 있다는 것으로 이해한다.

<인용 1> 우리는 단위를 수 진술의 주어라고 부를 수 있다. 단위의 나눌 수 없음과 경계지어짐. 동일성과 구별 가능성.

이제 우리는 단위를 만족스럽게 설명할 수 있다. 슈뢰더는 앞에서 인용한 바 있는 그의 책 7쪽에서 다음과 같이 말한다. "그런 종류 이름 또는 개념은 앞에 제시된 방식으로 구성된 수의 명칭이라 불리며, 단위의 본질을 이룬다."

사실 어떤 개념을 그 개념에 귀속되는 기수와 관련하여 단위라고 부르는 것이 가장 적합하지 않겠는가? 그렇게 되면 단위에 관한 서술들, 즉 단위가 환경과 경계지어지고 나눌 수 없다는 서술들이 뜻을 지닐 수 있게 된다. 왜냐하면 일반적으로 수가 부여되는 개념은 일정한 방식으로 그 개념 아래 속하는 것들을 경계짓기 때문이다. '넷이라는 낱말의 자모(字母)'라는 개념은 ㄴ과 ㅔ를, ㅔ와 ㅅ을 경계짓는다. '넷이라는 낱말의 음절'이라는 개념은 그 낱말을 전체로서 그리고 그 부분들이 '넷이라는 낱말의 음절'이라는 개념 아래 속하지 않는다는 뜻에서 나누어질 수 없는 것으로 구별해 준다. 모든 개념이 다 그런 것은 아니다. 예를 들어 우리는 붉음이라는 개념 아래 속하는 것을 여러 방식으로 나눌 수 있는데, 그렇게 하더라도 그 부분들이 더 이상 그 개념 아래 속하지 않는 것은 아니다. 그런 개념은 유한 수를 지니지 않는다. 따라서 단위가 경계지어져 있고 분리할 수 없다는 것에 관한 문장은 다음과 같이 얘기된다:

유한 기수와 관련해 단위가 될 수 있는 개념이라고는 자기 아래 속하는 것들을 일정한 방식으로 경계짓지만 그것들을 임의로 나누지는 않는 개념들뿐이다.

그러나 우리는 여기서 나눌 수 없다는 것이 특수한 의미를 지닌다는 것을 알게 된다.

이제 우리는 단위의 동일성이 구별 가능성과 어떻게 조화될 수 있는가 하는 물음에 쉽게 대답할 수 있다. 여기서 '단위'라는 낱말은 두 가지 뜻으로 사용된다. 단위들은 앞에 설명한 이 낱말의 의미로 볼 때 같다. "목성은 네 개의 달을 가지고 있다"는 문장에서 단위는 '목성의 달'이다. 이 개념 아래에는 Ⅰ이 속하고, Ⅱ도, Ⅲ도, Ⅳ도 속한다. 따라서 우리는 Ⅰ과 관련된 단위는 Ⅱ와 관련된 단위와 같다고 말할 수 있다. 그 경우 우리는 동일성을 지닌다. 그러나 단위들이 구별 가능하다고 주장하는 경우, 우리는 셀 사물들이 구별될 수 있다는 것으로 이해한다(§4).

4. 대상

<설명ch> 지금까지 수 진술이 개념에 대한 서술을 포함한다는 것을 설

명했다. 프레게는 이제 0, 1, 그리고 1씩 증가라는 개념을 정의함으로써 개별 수에 대한 라이프니츠의 정의를 보완해 볼 수 있다고 생각한다. 그는 다음과 같이 정의한다.

(1) 0. a가 무엇이든 a는 그 개념 아래 속하지 않는다는 문장이 일반적으로 성립한다면, 수 0이 그 개념에 귀속된다.

(2) 1. 만약 a가 무엇이든 a가 개념 F 아래 속하지 않는다는 문장이 일반적으로 성립하지는 않으며, 그리고

"a는 개념 F 아래 속한다" 와 "b는 개념 F 아래 속한다"

는 문장으로부터a와 b가 같다는 것이 일반적으로 따라나온다면, 수 1이 개념 F에 귀속된다.

(3) **어떤 수에서 바로 다음에 나오는 수로 나아가는 것.** 다음과 같이 한번 말해 보자: 개념 F 아래 속하는 대상 a가 있고, 'F 아래 속하지만 a는 아닌' 이란 개념에 귀속되는 수가 n이라면, 수 (n + 1)이 개념 F에 귀속된다.

<인용 1> 개별 수에 대한 라이프니츠의 정의를 보완해보려는 시도

수 진술이 개념에 대한 서술을 포함한다는 것을 알았으므로, 우리는 이제 0과 1을 정의함으로써 개별 수에 대한 라이프니츠의 정의를 보완해 볼 수 있다.

어떤 개념 아래 아무 대상도 속하지 않는다면, 수 0이 그 개념에 귀속된다고 설명하기 쉽다. 그러나 이 경우 0 자리에 같은 의미의 '아무 … 도 …하지 않는다' 가 들어간 것으로 보인다. 이 때문에 다음과 같이 말하는 것이 더 좋다: a가 무엇이든 a는 그 개념 아래 속하지 않는다는 문장이 일반적으로 성립한다면, 수 0이 그 개념에 귀속된다.

비슷한 식으로 우리는 다음과 같이 말할 수 있다: 만약 a가 무엇이든 a가 개념 F 아래 속하지 않는다는 문장이 일반적으로 성립하지는 않으며, 그리고

"a는 개념 F 아래 속한다" 와 "b는 개념 F 아래 속한다"

는 문장으로부터 a와 b가 같다는 것이 일반적으로 따라나온다면, 수 1이 개념 F에 귀속된다.

어떤 수에서 바로 다음에 나오는 수로 나아가는 것을 일반적으로 설명하는 일이 아직 남아 있다. 다음과 같이 한번 말해 보자: 개념 F 아래 속하는 대상 a가 있고, ‘F 아래 속하지만 a는 아닌’이란 개념에 귀속되는 수가 n이라면, 수 (n + 1)이 개념 F에 귀속된다(§5).

<설명ch> 그런데 프레게는 왜 이 정의에 만족할 수 없는지 해명할 필요가 있다고 말한다. 세 가지 정의 중 마지막 정의, 곧 다음수 정의가 문제가 있다. 왜냐하면 엄밀히 말해 “수 (n + 1)이 개념 F에 귀속된다”라는 표현의 뜻이 우리에게 알려져 있지 않듯이 “수 n이 개념 G에 귀속된다”는 표현의 뜻도 우리에게 알려져 있지 않기 때문이다.

물론 우리는 이 설명과 그 앞의 설명을 써서

“수 1 + 1이 개념 F에 귀속된다”

가 무엇을 의미하는지 말할 수 있고, 그런 다음 이것을 이용해

“수 1 + 1 + 1이 개념 F에 귀속된다”

는 표현의 뜻을 제시할 수 있고, 이런 식으로 계속할 수 있다. 그러나 이런 설명 방식은 두 가지 것을 설명해 주지 못한다. 첫째는 이들 정의를 가지고는 수 줄리어스 시저가 어떤 개념에 귀속되는지, 시저가 수인지 아닌지를 결정할 수 없다. 만약 수의 정의가 시저가 수일 가능성을 열어 둔다면 그 수 정의는 문제가 있다.

둘째, 수 a가 개념 F에 귀속되고 수 b가 같은 개념에 귀속될 경우, a = b여야 한다는 것을 증명할 수 없다. 따라서 ‘개념 F에 귀속되는 그 수’라는 표현도 정당화될 수 없을 것이다. 그래서 프레게는 특정 수를 파악할 수도 없을 테고, 그래서 수 동일성을 일반적으로 증명하는 일도 불가능할 것이라고 말한다. 여기서 문제는 임의의 자연수 n에 대해 n이 귀속되는 개념 F를 발견했다고 하더라도 그 n이 F에 귀속되는 단 하나의 자연

수라는 보장이 없다는 것이다. 그러면 서로 다른 두 수가 같은 개념에 귀속되는 잘못이 생기게 된다. 그래서 위 정의에서 0과 1을 설명했다는 것은 환상일 뿐이다. 사실 우리는 '수 0이 귀속된다', '수 1이 귀속된다' 는 어구의 뜻을 고정했을 뿐이다.

그런데 프레게는 여기서 또 모순처럼 보이는 발언을 한다. 이것을 가지고는 우리가 0과 1을 자립적인, 재인식이 가능한 대상으로 구별해 낼 수 없다는 것이다. 이것은 지금까지 프레게가 수 진술은 개념에 관한 주장이라고 주장하는 것과 맞지 않는 것처럼 보인다. 어떻게 수가 개념에 관한 주장이면서 동시에 대상일 수 있겠는가?

<인용 1> 앞에 시도된 정의는 쓸모가 없다. 왜냐하면 그 정의는 수를 부분으로 포함하는 진술을 설명할 뿐이기 때문이다.

지금까지의 결과에 따를 때 이런 설명들이 아주 자연스러우므로, 왜 우리가 이에 만족할 수 없는지 해명할 필요가 있다.

마지막 정의가 가장 문제가 될 것 같다. 왜냐하면 엄밀히 말해 "수 (n + 1)이 개념 F에 귀속된다"라는 표현의 뜻이 우리에게 알려져 있지 않듯이 "수 n이 개념 G에 귀속된다"는 표현의 뜻도 우리에게 알려져 있지 않기 때문이다. 물론 우리는 이 설명과 그 앞의 설명을 써서

"수 1 + 1이 개념 F에 귀속된다"

가 무엇을 의미하는지 말할 수 있고, 그런 다음 이것을 이용해

"수 1 + 1 + 1이 개념F에 귀속된다"

는 표현의 뜻을 제시할 수 있고, 이런 식으로 계속할 수 있다. 그러나 우리는 이들 정의를 가지고는 예가 좀 거칠긴 하지만 수 줄리어스 시저가 어떤 개념에 귀속되는지, 이 유명한 갈리아의 정복자가 수인지 아닌지를 결정할 수 없다. 또한 우리가 시도한 설명으로는 수 a가 개념 F에 귀속되고 수 b가 같은 개념에 귀속될 경우, a = b여야 한다는 것을 증명할 수 없다. 따라서 '개념 F에 귀속되는 그 수'(die Zahl, welche dem

Begriff F zukommt)라는 표현도 정당화될 수 없을 것이다. 그 때문에 우리는 특정 수를 파악할 수도 없을 테고, 그래서 수 동일성을 일반적으로 증명하는 일도 불가능할 것이다. 0과 1을 설명했다는 것은 환상일 뿐이다. 사실 우리는

> ‘수 0이 귀속된다’,
> ‘수 1이 귀속된다’

는 어구의 뜻을 고정했을 뿐이다. 그러나 이것을 가지고는 우리가 0과 1을 자립적인, 재인식이 가능한 대상으로 구별해 낼 수 없다(§6).

(1) 자립적 대상

<설명ch> 프레게는 먼저 수가 사물의 성질이 아니며 개념의 성질도 아니라는 것을 설명한다. “수 0이 개념 F에 귀속된다”는 문장에서 우리가 개념 F를 실제 주어로 삼는다면, 0은 술어의 한 부분일 뿐이다. 그 때문에 나는 0, 1, 2와 같은 수를 개념의 성질이라 부르기를 꺼린다는 것이다. 이 설명에 따르면 수 n은 개념에 귀속되지만 그 개념의 성질은 수 n 자체가 아니라 도리어 그에 귀속되는 수 n을 가짐이라는 성질이다.

그 다음에 프레게는 수가 자립적 대상이라는 주장이 무슨 뜻인지 분명히 한다. 그래서 수가 대상이라는 주장과 개념에 대한 것이라는 주장이 양립가능함을 보이려고 한다.

개별 수는 “목성의 달의 수는 넷이다”에서처럼 바로 서술어의 한 부분을 이루고 있다. 그래서 자립적 대상으로 보인다. 프레게에 따르면 우리는 ‘그 1’(die 1)이라고 표현을 쓰는, 이때 정관사를 통해 1을 대상으로 여긴다는 것이다.

프레게는 그 다음에 수가 자립적 대상이라는 견해를 분명히 하기 위해 그 견해에 반대되는 주장을 검토하고 해명한다. 가장 먼저 수는 자립적 대상으로 표상할 수 없다는 비판이 있다. 프레게는 이에 대해 수는 자립적 대상으로도 외부 사물의 성질로도 표상될 수 없다고 대답한다. 왜냐하면 여러 번 강조했지만 수는 감각적인 것도 외부 사물의 성질도 아니기

때문이다. 이 사실은 수 0의 경우 가장 분명하다. 눈에 보이는 0개의 별을 표상하려고 해 보아도 표상할 것이 없다. 우리는 구름이 잔뜩 낀 하늘을 상상할 수는 있으나, 이 경우 '별' 이란 낱말이나 0에 대응하는 것은 아무 것도 없다. 다만 우리는 지금 아무 별도 볼 수 없다는 판단을 불러일으킬 만한 상황을 표상할 뿐이다. 다른 수도 마찬가지다. 가령 푸른 들(eine grne Wiese)을 생각한 다음, 부정관사를 '하나' (Ein)라는 수 낱말로 바꾸어 넣는다고 해도 표상은 변하지 않는다. 그 말은 '푸른' 이란 낱말에는 어떤 표상이 실제로 대응하지만, 수의 표상에 아무 것도 덧붙여지지 않는다는 것을 뜻한다. 또 'GOLD' 라는 낱말을 보고 글자가 몇 개냐고 물어보면 자연스럽게 4라고 대답하겠지만 그 표상에는 전혀 변화가 없다.

그런데 수를 표상할 수 없다고 해서 그것을 연구 대상에서 제외해야 하느냐는 것이다. 프레게는 대상을 표상할 수 없다고 해서 연구에서 배제해서는 안 된다고 말한다. 프레게는 그 이유를 예를 들어 말한다. 우리가 태양까지의 거리에 대한 표상을 가질 수 없다는 데는 조금도 의심의 여지가 없다. 왜냐하면 그 거리를 정확하게 잴 수 없기 때문이다. 그러나 이 때문에 태양까지의 거리를 알아내는 계산이 옳은지 의심할 수 있는 것은 아니며, 그 거리에 근거해 또 다른 결론을 이끌어낼 수 없는 것도 아니다.

프레게는 그 다음에 우리가 지구 같은 구체적인 사물에 대해서조차도 우리가 알고 있는 그대로 그것을 표상할 수는 없다고 말한다. 우리는 단지 지구의 기호로 쓰이는 적당한 크기의 구로 만족하게 된다. 그렇다고 해서 우리 추리의 근거가 사라지는 것은 아니라고 프레게는 말한다. 우리 인간의 표상과 사고된 것과의 관계는 전적으로 피상적이며 임의적이고 관습적인 것일 수 있다. 여기서『산수의 기초』서론에 나오는 두 번째 원리인 맥락의 원리가 나온다. 낱말의 내용을 표상할 수 없다고 해서 그 낱말의 의미가 부정되거나 그 낱말을 사용하지 말아야 되는 것은 아니다. 사용하지 말아야 한다고 생각하는 사람들이 있는데 그 사람들은 우리가 낱말을 따로 떼어 고려하고, 그 의미가 무엇인지 물을 때 표상을 의미로 여기기 때문이다. 그러나 맥락의 원리에서 말하는 것처럼 우리는 언제나 완

전한 문장을 주목해야 한다. 문장 안에서만 낱말은 실제로 의미를 지닌다. 이때 우연히 우리에게 떠오르는 내적 영상이 판단의 논리적 구성 요소와 상응할 필요는 없다. 전체로서의 문장이 뜻을 지닌다면 그것으로 충분한 것이다. 이로 인해 바로 그 부분들도 내용을 지니게 된다.

프레게는 또 다른 반론을 검토한다. 지구는 실제로 표상될 수 없다 하더라도, 어쨌든 그것은 일정한 장소를 차지하고 있는 외부 사물이지만, 수는 비공간적이라는 것이다. 프레게는 수가 비공간적이라는 것을 솔직히 인정한다. 그러나 그래서 어쨌단 말인가? 이로부터 따라나오는 것은 수는 공간적인 대상이 아니라는 것일 뿐이지, 수가 대상이 아니라는 것은 결코 아니지 않은가? 모든 대상이 어떤 곳에 있는 것은 아니지 않은가? 솔직히 말해서 우리 표상도 우리 안에(우리 피부 안에) 있지 않지 않은가? 프레게는 그렇다고 해서 수가 주관적이라고 결론내려서는 안 된다고 말한다. 실제로 수는 그것을 다루는 모든 사람에게 정확히 같기 때문이다. 꼭 공간적이어야 객관적이고 비공간적이면 주관적인 것은 아닌 것이다. 객관적 대상이 모두 장소를 차지하고 있는 것은 아니다.

<인용 1> 수는 자립적 대상으로 표상할 수 없다는 비판. 수는 아예 표상될 수도 없다.

넷이나 목성의 달의 개수[기수]라고 불리는 대상에 관해, 우리는 자립적인 그 무엇으로서의 표상을 전혀 가질 수 없다고 비판할지 모르겠다. 그러나 이 점은 우리가 수에 부여한 자립성이 문제가 있기 때문이 아니다. 주사위의 네 눈(目)에 대한 표상에서 우리는 ‘넷’이라는 낱말에 대응하는 그 무엇이 나타난다고 믿기 쉽다. 그러나 그것은 환상이다. 우리는 푸른 들(eine grne Wiese)을 생각한 다음, 부정관사를 ‘하나’(Ein)라는 수 낱말로 바꾸어 넣을 경우 표상이 변하는지 보면 된다. 그 표상에 아무 것도 덧붙여지지 않지만, 그래도 ‘푸른’이란 낱말에는 어떤 표상이 실제로 대응한다. 우리가 인쇄된 낱말 ‘Gold’를 표상한다면, 그 경우 당장은 어느 수도 떠오르지 않을 것이다. 그런데 우리가 그것이 몇 개의 문자로 이루어져 있는지 스스로에게 묻는다면, 수 4를 떠올리게 될 것이다. 그러나 이 때문에 그 표상이 좀더 분명해지는 것은 아니며 그 표상

은 아무런 변화 없이 그대로 유지될 수 있다. 우리는 바로 ‘Gold란 낱말의 문자’라는 개념이 끼어들 때 그 수를 발견하게 된다. 주사위의 네 눈의 경우에는 이 사실이 덜 분명하다. 왜냐하면 눈들이 유사해서 그 개념이 우리한테 곧바로 떠오르므로 우리는 그 개념이 끼어들었음을 거의 눈치채지 못하기 때문이다. 수는 자립적 대상으로도 외부 사물의 성질로도 표상될 수 없다. 왜냐하면 수는 감각적인 것도 외부 사물의 성질도 아니기 때문이다. 이 사실은 수 0의 경우 가장 분명하다. 눈에 보이는 0개의 별을 표상하려고 해 보아도 소용없을 것이다. 우리는 구름이 잔뜩 낀 하늘을 상상할 수는 있으나, 이 경우 ‘별’이란 낱말이나 0에 대응하는 것은 아무 것도 없다. 다만 우리는 지금 아무 별도 볼 수 없다는 판단을 불러일으킬 만한 상황을 표상할 뿐이다(§8).

<인용 2> 어떤 대상을 표상할 수 없다고 해서 연구에서 배제해서는 안 된다.

아마도 낱말은 모두 우리에게 어떤 표상을 불러일으킬 것이고 심지어는 ‘단지’ 같은 낱말도 그럴 것이다. 그러나 그 표상이 낱말의 내용과 일치할 필요는 없으며, 다른 사람에게는 전혀 다른 표상이 떠오를 수도 있다. 이 경우 아마 우리는 그 낱말이 나오는 문장을 생각나게 하는 어떤 상황을 표상할 것이다. 아니면 내가 들은 낱말이 기록된 낱말을 기억나게 할 수도 있다.

그런 일은 불변화사에서만 일어나는 것은 아니다. 우리가 태양까지의 거리에 대한 표상을 가질 수 없다는 데는 조금도 의심의 여지가 없다. 왜냐하면 우리가 자(尺)로 몇 번이나 거듭해서 재야 하는가 하는 규칙을 안다고 하더라도, 이 규칙에 따라 우리가 바라는 것과 어느 정도라도 비슷한 상을 얻으려는 시도는 결국 실패하고 말기 때문이다. 그러나 이 때문에 태양까지의 거리를 알아내는 계산이 옳은지 의심할 수 있는 것은 아니며, 그 거리에 근거해 또 다른 결론을 이끌어낼 수 없는 것도 아니다(§9).

<인용 3> 구체적 사물이라 해서 언제나 표상될 수 있는 것은 아니다.

낱말의 의미를 물을 때는 그 낱말을 문장 안에서 탐구해야 한다.

우리는 지구 같은 구체적인 사물에 대해서조차도 우리가 알고 있는 그대로 그것을 표상할 수는 없다. 우리는 단지 지구의 기호로 쓰이는 적당한 크기의 구(球)로 만족하게 된다. 그러나 우리는 이 구가 지구와는 아주 다르다는 것을 알고 있다. 그래서 비록 우리의 표상이 종종 우리가 바라던 것과 전혀 일치하지 않는데도, 우리는 지구 같은 대상에 대해, 크기가 문제가 될 때라도, 꽤 확실하게 판단하게 된다.

우리는 사고를 통해 표상 가능한 것을 아주 자주 넘어서며, 이 때문에 우리 추리의 근거가 사라지는 것은 아니다. 우리 인간은 표상 없이는 실제로 사고할 수 없다고 할지라도, 표상과 사고된 것과의 관계는 전적으로 피상적이며 임의적이고 관습적인 것일 수 있다.

따라서 낱말의 내용을 표상할 수 없다고 해서 그 낱말의 의미가 부정되거나 그 낱말을 사용하지 말아야 되는 것은 아니다. 물론 정반대로 생각하는 경우가 있는데, 그 이유는 우리가 낱말을 따로 떼어 고려하고, 그 의미가 무엇인지 물을 때 표상을 의미로 여기기 때문이다. 따라서 상응하는 내적 영상이 없는 낱말은 아무런 내용도 갖지 못하는 듯이 보이게 된다. 그러나 우리는 언제나 완전한 문장을 주목해야 한다. 문장 안에서만 낱말은 실제로 의미를 지닌다. 이때 우연히 우리에게 떠오르는 내적 영상이 판단의 논리적 구성 요소와 상응할 필요는 없다. 전체로서의 문장이 뜻을 지닌다면 그것으로 충분하다. 이로 인해 바로 그 부분들도 내용을 지니게 된다.

내가 볼 때 이런 고찰은 무한소(無限小) 개념과 같은 여러 가지 어려운 개념들에 시사점을 마련해 줄 것으로 보이며, 그 적용 범위가 수학에만 국한된 것도 아니다.

내가 내세우는 수의 자립성은 수 낱말이 문장의 맥락 밖에서 어떤 것을 표시한다는 의미가 아니다. 도리어 나는 수 낱말을 술어나 수식어로 사용함으로써 그 의미가 바뀌는 것을 막고자 할 뿐이다(§60).

<인용 4> 수가 비공간적이라는 반론. 객관적 대상이 모두 공간적인 것은 아니다.

그러나 어떤 사람은 아마 이렇게 반박할지도 모르겠다: 지구는 실제로 표상될 수 없다 하더라도, 어쨌든 그것은 일정한 장소를 차지하고 있는 외부 사물이다. 그러나 수 4는 어디에 있는가? 그것은 우리 밖에도 없고 우리 안에도 없다. 공간적인 뜻으로 이해한다면 이것은 확실히 옳다. 수 4의 위치를 정한다는 것은 말이 안 된다. 그러나 이로부터 따라나오는 것은 수 4는 공간적인 대상이 아니라는 것일 뿐, 수 4가 대상이 아니라는 것은 결코 아니다. 모든 대상이 어떤 곳에 있는 것은 아니다. 이런 뜻에서는 우리 표상도 우리 안에(우리 피부 안에) 있지 않다. 피부 안에는 신경 세포, 혈구 같은 것은 있지만 표상은 없다. 공간적 술어는 표상에 적용될 수 없다. 표상은 또 다른 표상의 오른쪽에도 있지 않으며 왼쪽에도 있지 않다. 그리고 표상들 사이에 밀리미터 단위로 잴 수 있는 거리란 없다. 그런데도 표상이 우리 안에 있다고 말한다면, 우리는 이를 통해 표상이 주관적인 것임을 나타내려는 것이다. 그러나 주관적인 것은 아무런 장소도 차지하고 있지 않다고 하더라도, 어떻게 객관적인 것인 수 4가 어느 곳에도 있지 않을 수 있는가? 나는 여기에 아무런 모순도 없다고 주장한다. 실제로 수 4는 그것을 다루는 모든 사람에게 정확히 같다. 그러나 이는 공간적인 것과는 아무런 관련이 없다. 객관적 대상이 모두 장소를 차지하고 있는 것은 아니다(§61).

<인용 5> 만약 우리가 수에 대해 어떠한 표상이나 직관도 가질 수 없다면, 그러면 수는 우리에게 어떻게 주어져야 하는가? 문장의 맥락 안에서만 낱말은 어떤 것을 의미한다. 따라서 수 낱말이 나오는 문장의 뜻을 설명하는 일이 중요하다(§62).

<인용 6> 문장의 맥락 안에서 낱말의 의미를 물어야 하지, 따로 떼어놓고 물어서는 안 된다(머리말).

<인용 7> 이제 우리는 낱말의 의미가 따로 설명되어서는 안 되며, 문장의 맥락 안에서 설명되어야 한다는 것을 근본원리로 제시하였다. 그 원리에 따라야만 심리학적 수 이해에 빠지지 않으면서도 수를 물리적으로 파

악하는 일을 피할 수 있다고 나는 믿는다(106).

(2) 수 동일성

<설명ch> 프레게는 앞에서 수 낱말이 자립적인 대상이라고 주장했다. 이제 대상이 되려면 그것은 재인식이 될 수 있어야 한다. 곧 기호 a가 어떤 대상을 나타낸다면, 우리는 b가 a와 같은지를 일반적으로 결정해 주는 인식 표시를 가져야만 한다. 그러기 위해서는 “개념 F에 귀속되는 수는 개념 G에 귀속되는 수와 같다”라는 문장의 뜻을 설명할 수 있어야 한다. 그렇게 할 수 있다는 것은 수 동일성의 일반적인 인식 표시를 제시할 수 있다는 것이다.

동일성이란 다른 게 아니라 1+1=2와 같은 등식을 말한다. 프레게는 이 등식을 설명하기 위해 수 이외의 일상 언어를 예로 든다. 가령

목성은 네 개의 달을 가지고 있다

라는 문장을

목성의 달의 수는 넷이다

로 바꿀 수 있는데 프레게는 여기서 ‘이다’를 계사가 아니라 동일성 기호로 해석해야 한다고 본다. 곧 “하늘은 푸르다”는 문장에서처럼 단순한 계사로 여기지 않고

목성의 달의 수= 4

로 해석하는 것이다. ‘이다’는 ‘같다’의 뜻인 것이다. 그래서 ‘목성의 달의 수’라는 표현이 ‘넷’이라는 낱말과 같은 대상을 가리킨다는 것을 주장하는 하나의 등식을 갖게 되는 것이다. 사실 등식은 수학에서 가장 많이 볼 수 있는 형식이다. 어떤 사람은 ‘넷’이라는 말에는 목성이나 달에 관한 얘기가 전혀 들어 있지 않다는 근거를 들어 동일성 설명을 반박하지만, 그것은 ‘콜롬부스’라는 이름에도 발견이나 아메리카에

관한 얘기는 전혀 들어 있지 않지만, 콜롬부스와 아메리카를 발견한 사람은 같은 사람으로 불린다는 것을 생각해 보면 옳은 반박이 아니다.

<인용 1> 우리는 수 동일성에 대한 인식 표시가 필요하다.

만약 우리가 수에 대해 어떠한 표상이나 직관도 가질 수 없다면, 그러면 수는 우리에게 어떻게 주어져야 하는가? 문장의 맥락 안에서만 낱말은 어떤 것을 의미한다. 따라서 수 낱말이 나오는 문장의 뜻을 설명하는 일이 중요하다. 그래도 아직 선택의 여지가 많이 남아 있다. 하지만 우리는 수 낱말은 자립적 대상을 나타내는 것으로 이해해야 한다는 점을 이미 분명히 하였다. 이렇게 됨으로써 뜻을 가져야만 하는 한 가지 종류의 문장들, 즉 재인식을 표현하는 문장들이 주어진다. 기호 a가 어떤 대상을 나타낸다면, 우리는 b가 a와 같은지를 일반적으로 결정해 주는 인식 표시를 가져야만 한다. 물론 우리가 언제나 이 인식 표시를 사용할 능력을 가진 것은 아니다. 우리의 경우

“개념 F에 귀속되는 수는 개념 G에 귀속되는 수와 같다”

는 문장의 뜻을 설명해야 한다. 즉 우리는 이 문장의 내용을

‘개념 F에 귀속되는 기수’

라는 표현을 사용하지 않고 다른 식으로 제시해야 한다. 그렇게 하게 되면 수 동일성의 일반적인 인식 표시를 제시하는 셈이 된다. 그래서 우리가 어떤 특정 수를 파악하고 그 수를 같은 것으로 재인식할 수단을 얻게 되면, 우리는 이제 그것에 고유 이름으로 수 낱말을 부여할 수 있다(§2).

<인용 2> 수 진술은 수들에 대한 등식으로 간주될 수 있다.

이제 수 진술이 개념에 관한 서술을 포함한다는 우리의 말을 좀더 정확히 파악할 때가 되었다. “수 0이 개념 F에 귀속된다”는 문장에서 우리가 개념 F를 실제 주어로 삼는다면, 0은 술어의 한 부분일 뿐이다. 그 때문에 나는 0, 1, 2와 같은 수를 개념의 성질이라 부르기를 꺼렸다. 개별

수는 바로 서술어의 한 부분을 이루고 있을 뿐이므로 자립적 대상으로 보인다. 우리는 ‘그 1’(die 1)이라고 말하며, 정관사를 통해 1을 대상으로 여긴다는 점은 이미 앞에서 지적되었다. 예를 들어 등식 1 + 1 = 2의 경우처럼 산수에서는 그런 자립성이 도처에 나타난다. 그런데 여기서 우리는 학문에서 사용될 수 있는 수 개념을 이해하는데 관심이 있기 때문에, 일상 언어에서는 수가 수식어로 나타나기도 한다는 점은 그다지 신경쓸 필요가 없다. 이런 용례는 항상 피할 수 있다. 예를 들어 우리는 “목성은 네 개의 달을 가지고 있다”는 문장을 “목성의 달의 수는 넷이다”(die Zahl der Jupitersmonde ist vier)로 바꿀 수 있다. 여기서 ‘이다’(ist)는 “하늘은 푸르다”(der Himmel ist blau)는 문장에서 그렇듯이 단순한 계사로 여겨져서는 안 된다. 그 점은 우리가 “목성의 달의 수는 넷(die Vier)이다” 또는 “[목성의 달의 수]는 수 4이다”라고 말할 수 있다는 데서 드러난다. 여기서 ‘이다’는 ‘같다’, ‘똑같은 것이다’의 뜻을 갖는다. 그래서 우리는 ‘목성의 달의 수’라는 표현이 ‘넷’이라는 낱말과 같은 대상을 가리킨다는 것을 주장하는 하나의 등식을 갖게 된다. 그리고 등식은 수학에서 가장 많이 볼 수 있는 형식이다. ‘넷’이라는 말에는 목성이나 달에 관한 얘기가 전혀 들어 있지 않다는 점은 이런 설명에 대한 반박이 아니다. ‘콜롬부스’라는 이름에도 발견이나 아메리카에 관한 얘기는 전혀 들어 있지 않지만, 그런데도 콜롬부스와 아메리카를 발견한 사람은 같은 사람으로 불린다(§7).

<인용 3> 그런 것[인식 표시]으로서 일의적 대응 가능성. 동일성이 수의 경우에 대해 특수하게 설명된 것이 아닌가 하는 논리적 의문.

흄이 이미 그런 수단을 말한 적이 있다. “한 수가 다른 수의 각 단위에 대응하는 단위를 언제나 가지도록 두 수가 결합될 때, 우리는 그 두 수가 같다고 말한다.” 수 동일성을 일의적 대응으로 정의해야 한다는 견해가 최근에는 수학자들의 폭넓은 호응을 얻고 있는 것으로 보인다. 그러나 이 견해에 대해 우선 어떤 논리적 의문과 난점들이 제기되는데, 이들을 검토하지 않고 그냥 지나쳐서는 안 되겠다.

동일성 관계가 수의 경우에만 나타나는 것은 아니다. 이로부터 동일성

관계를 수의 경우에만 특수하게 설명해서는 안 된다는 사실이 따라나오는 것 같다. 동일성 개념이 이미 정해져 있다면, 그 개념과 기수 개념으로부터, 또 다른 특별한 정의를 하지 않고도, 언제 기수들이 서로 같은지가 분명히 이끌어진다고 생각할 것이다.

이와 반대로 기수 개념이 이미 정해진 것이 아니라, 우리 설명을 통해서 비로소 확정된다는 점을 주목해야 한다. 우리가 하려는 일은 등식으로 이해될 수 있는 판단의 내용을 구성하는 것인데, 그 등식의 양편은 수이다. 따라서 우리는 이 경우에만 특수한 동일성을 설명하려는 것이 아니라, 이미 알려진 동일성 개념을 가지고 같은 것으로 간주해야 할 것을 얻고자 하는 것이다. 사실 이것은 아마 논리학자들이 아직 충분히 관심을 두지 않은 매우 특이한 정의 방식인 듯 보인다. 하지만 이것이 전혀 들어본 적이 없는 것은 아니라는 점이 몇몇 예를 통해 드러날 것이다(§3).

(3) 흄의 제안

<설명ch> 프레게는 대상의 동일성 기준을 정하기 위해 흄의 제안을 채택한다.

> 한 수가 다른 수의 각 단위에 대응하는 단위를 언제나 가지도록 두 수가 결합될 때, 우리는 그 두 수가 같다고 말한다.

이 제안은 쉽게 말해서 동일성 관계를 일대일 관계로 정의한다는 뜻이다. 개념 F에 귀속되는 수가 G에 귀속되는 수와 동일할 조건은 만약 F 아래 속하는 모든 항목이 G 아래 속하는 모든 항목과 일대일로 대응될 수 있다는 것이다. 예를 들어 현관의 신발 왼쪽짝이 오른쪽짝과 일대일로 대응할 때 왼쪽짝의 수는 오른쪽짝의 수와 같다.

프레게가 동일성 기준을 꺼낸 이유는 다른 게 아니라 수 개념을 정의하려는 것이다. 다시 말해서 ‘수’가 무엇인지 이해하기 위해서 ‘~는 ~와 같은 수이다’의 정의를 이해하려는 것이다. 동일성이란 개념은 꼭 수에만 적용되는 것은 아니다. 수 외의 다른 예를 들어 설명하자면 연필이 무엇인지 이해하기 위해서 같은 연필이 무엇인지 그 동일성 기준을 검토

해 보는 것이다.

프레게는 동일성 기준에 의한 수 개념 정의가 올바르다는 것을 보이기 위해 수학의 다른 개념인 평행을 예로 든다.

<인용 1> 그런 것[인식 표시]으로서 일의적 대응 가능성. 동일성이 수의 경우에 대해 특수하게 설명된 것이 아닌가 하는 논리적 의문.

흄이 이미 그런 수단을 말한 적이 있다. “한 수가 다른 수의 각 단위에 대응하는 단위를 언제나 가지도록 두 수가 결합될 때, 우리는 그 두 수가 같다고 말한다.” 수 동일성을 일의적 대응으로 정의해야 한다는 견해가 최근에는 수학자들의 폭넓은 호응을 얻고 있는 것으로 보인다. 그러나 이 견해에 대해 우선 어떤 논리적 의문과 난점들이 제기되는데, 이들을 검토하지 않고 그냥 지나쳐서는 안 되겠다.

동일성 관계가 수의 경우에만 나타나는 것은 아니다. 이로부터 동일성 관계를 수의 경우에만 특수하게 설명해서는 안 된다는 사실이 따라나오는 것 같다. 동일성 개념이 이미 정해져 있다면, 그 개념과 기수 개념으로부터, 또 다른 특별한 정의를 하지 않고도, 언제 기수들이 서로 같은지가 분명히 이끌어진다고 생각할 것이다.

이와 반대로 기수 개념이 이미 정해진 것이 아니라, 우리 설명을 통해서 비로소 확정된다는 점을 주목해야 한다. 우리가 하려는 일은 등식으로 이해될 수 있는 판단의 내용을 구성하는 것인데, 그 등식의 양편은 수이다. 따라서 우리는 이 경우에만 특수한 동일성을 설명하려는 것이 아니라, 이미 알려진 동일성 개념을 가지고 같은 것으로 간주해야 할 것을 얻고자 하는 것이다. 사실 이것은 아마 논리학자들이 아직 충분히 관심을 두지 않은 매우 특이한 정의 방식인 듯 보인다. 하지만 이것이 전혀 들어본 적이 없는 것은 아니라는 점이 몇몇 예를 통해 드러날 것이다(§3).

(4) 평행

<설명ch> 우리는 일반적으로

① “직선 a는 직선 b와 평행하다”(기호로 a // b)

를

② “직선 a의 방향은 직선 b의 방향과 같다”

와 같이 동일성 개념을 이용하여 정의한다. 어떤 사람들은 거꾸로 ②를 ①로 정의하기도 한다. 어느 쪽이 더 적절한가? 일단 우리가 방향이 무엇인지를 알면 두 선이 같은 방향을 가지는지 안 가지는지 알기가 쉽기 때문에 ①을 통해 ②를 정의하는 것이 더 적절한 것 같기도 하다.

그러나 프레게는 누구나 직선의 방향에 대한 직관을 지니는지 묻는다. 확실히 직선에 대한 직관은 가능하다! 그러나 우리는 이 직선의 직관에서 여전히 그 방향을 구분하는가? 그렇지 않을 것 같다는 것이 프레게의 대답이다. 반면에 우리는 평행한 직선의 표상은 갖는다. 그러므로 방향의 동일성에 의해 평행을 정의하는 대신 우리는 아마 반대 노선을 택해야 한다는 것이 프레게의 생각이다. 곧 ②가 ①과 같은 것을 의미한다고 말해야 할 것이다.

<인용 1> 유사한 방법의 예: 방향, 평면의 방위, 삼각형의 형태.

“직선 a는 직선 b와 평행하다”, 기호로

a // b

라는 판단은 등식으로 여겨질 수 있다. 이렇게 한다면, 우리는 방향 개념을 얻게 되고 다음과 같이 말하게 된다. “직선 a의 방향은 직선 b의 방향과 같다.” 그래서 우리는 기호 //를 더 일반적 기호 =로 대치하여, 전자의 특수한 내용을 a와 b에 나누어주게 된다. 그 내용을 원래와는 다른 방식으로 나누고, 이렇게 해서 우리는 새로운 개념을 얻는다. 물론 우리는 흔히 문제를 거꾸로 이해하며, 많은 교사들은 다음과 같이 정의한다: 평행한 직선들은 방향이 같은 직선들이다. 그러면 “두 직선이 제3의 직선과 평행하면, 두 직선은 서로 평행하다”는 문장은 유사한 방식의 동일성 문장에 호소하여 손쉽게 증명될 수 있다. 다만 유감스러운 점은 이렇게 하게 되면 사물의 참된 질서가 뒤바뀌게 된다는 점이다! 왜냐하면 기

하학적인 것은 모두 근원적으로 직관적인 것이어야 하기 때문이다. 그러면 나는 누구나 직선의 방향에 대한 직관을 지니는지 묻고 싶다. 확실히 직선에 대한 직관은 가능하다! 그러나 우리는 이 직선의 직관에서 여전히 그 방향을 구분하는가? 그렇지 않을 것 같다! 이 개념은 직관과 연관된 정신 활동을 통해서만 발견된다. 반면 우리는 평행한 직선의 표상은 갖는다. 우리는 '방향'이란 낱말을 사용함으로써 증명되어야 할 것을 미리 전제하기 때문에, 그런 증명은 논점 선취의 오류를 범하지 않고는 이루어질 수 없다. 왜냐하면 "두 직선이 제3의 직선과 평행하다면, 두 직선은 서로 평행하다"는 문장이 옳지 않다면, 우리는 a // b를 등식으로 변형할 수 없을 것이기 때문이다.

비슷한 식으로 우리는 평면의 평행으로부터 직선의 방향 개념에 해당하는 개념을 얻을 수 있다. 이를 위해 나는 '방위'라는 이름을 사용해 왔다. 기하학의 닮은 꼴로부터 모양 개념이 유래하므로, 우리는 가령 "이 두 삼각형은 닮은 꼴이다" 대신 "이 두 삼각형은 같은 모양을 지녔다" 또는 "이 삼각형의 모양은 저 삼각형의 모양과 같다"라고 말한다. 또한 기하학적 도형이 같은 직선 위에 있다는 관계로부터 아직은 명칭이 없는 한 개념을 얻을 수도 있다(§4).

(5) 대치가능성

<설명ch> 프레게는 그러나 또 다른 의문점을 제시한다. 위와 같이 규정하면 방향의 동일성에 대한 우리의 정의가 이미 알려진 동일성 법칙 자체와 모순되지나 않을까 하는 것이다. 프레게가 말하는 동일성 법칙은 라이프니츠의 유명한 격률이다.

하나가 다른 하나로 진리가 유지되는 채 대치될 수 있는 것들은 같다.

잘 알려져 있다시피 이것은 보편적 대치가능성을 말한다. 보편적 대치가능성 속에 실제로 모든 동일성 법칙이 포함되어 있다. 예를 들어 "그 선분들은 길이가 같다"고 말하는 대신 "그 선분들의 길이는 같다" 또는 "[그 선분들의 길이는] 동일하다"라고 말할 수 있고, "그 평면들은

색깔이 같다” 대신 “그 평면들의 색깔은 같다”고 말할 수 있다. 직선의 방향에 대한 경우에는 직선 a가 b와 평행하다면, ‘a의 방향’을 어디에서나 ‘b의 방향’으로 대치할 수 있음을 보여주어야 한다. 우리가 직선의 방향에 관해 애초에 아는 것이라고는 그것이 다른 어떤 직선의 방향과 일치한다는 서술뿐이므로, 우리의 과제는 아주 간단하다. 그래서 우리는 그러한 동일성 내에서 대치 가능성을 보여주거나 또는 그런 동일성이 구성 요소로 포함되어 있는 내용에서 대치 가능성을 보여주면 된다.

<인용 1> 정의의 시도. 둘째 의문: 동일성 법칙이 지켜지는가?

이제 예를 들어 평행으로부터 방향 개념을 얻기 위해 다음과 같이 정의해 보기로 하자.

“직선 a는 직선 b와 평행하다”

는 문장이

“직선 a의 방향은 직선 b의 방향과 같다”

와 같은 의미이다.

이 설명은 겉으로 보기에는 이미 알고 있는 동일성 관계를 구체화하는 듯하지만 사실 보통의 경우와는 달리, ‘직선 a의 방향’이란 표현을 도입하려는 것이며, 이 표현만 그런 식으로 나타나는 것은 아니다. 여기서 둘째 의심, 즉 이렇게 규정하면 이미 알려진 동일성 법칙들과 모순되지나 않을까 하는 의심이 생긴다. 동일성 법칙들은 어떤 것인가? 동일성 법칙들은 분석적 진리이며, 동일성 개념 그 자체로부터 도출될 수 있다. 라이프니츠는 다음과 같이 정의한다.

“하나가 다른 하나로 진리가 유지되는 채 대치될 수 있는 것들은 같다.”

나 자신은 이것을 동일성에 대한 설명으로 채택한다. 라이프니츠처럼 ‘똑 같은’을 사용하든 ‘같은’을 사용하든 상관없다. 사실 ‘똑 같

은’ 은 모든 점에서 완전히 일치한다는 것을 표현하는 반면, ‘같은’ 은 이런저런 점에서 일치하는 경우만을 표현하는 것으로 보인다. 그러나 우리는 전혀 그런 구분을 하지 않는 표현 방법을 채택할 수도 있다. 예를 들어 “그 선분들은 길이가 같다” 고 말하는 대신 “그 선분들의 길이는 같다” 또는 “[그 선분들의 길이는] 동일하다” 라고 말할 수 있고, “그 평면들은 색깔이 같다” 대신 “그 평면들의 색깔은 같다” 고 말할 수 있다. 그리고 앞의 예에서는 그 낱말을 이런 식으로 사용하였다. 보편적 대치 가능성 속에 실제로 모든 동일성 법칙이 포함되어 있다.

직선의 방향에 대해 우리가 시도한 정의를 정당화하려면, 우리는 직선 a가 b와 평행할 경우에는

‘a의 방향’

을 어디에서나

‘b의 방향’

으로 대치할 수 있음을 보여주어야 한다. 우리가 직선의 방향에 관해 애초에 아는 것이라고는 그것이 다른 어떤 직선의 방향과 일치한다는 서술뿐이므로, 우리의 과제는 아주 간단하다. 그래서 우리는 그러한 동일성 내에서 대치 가능성을 보여주거나 또는 그런 동일성이 구성 요소로 포함되어 있는 내용에서 대치 가능성을 보여주면 된다. 방향에 관한 다른 모든 서술의 의미는 먼저 설명되어야 할 테고, 이런 정의를 할 때 우리는 어떤 직선의 방향을 그와 평행한 다른 직선의 방향으로 여전히 대치할 수 있어야 한다는 점을 규칙으로 삼을 수 있다(§5).

(6) 방향 개념

<설명ch> 프레게는 또 다른 의문점을 제시한다. 위 문장 ②에서 a의 방향은 대상으로 나타나며, 우리는 이 정의를 통해 이 대상이 다른 형태, 가령 b의 방향으로 나타나는 경우에도 그것을 재인식할 수단을 지니게 된다. 그러나 그 수단으로 영국이 지구축의 방향과 동일한지 결정할 수 없

다. 위 설명으로는 q 자체가 ‘b의 방향’이란 형식으로 주어져 있지 않다면,

“a의 방향은 q와 같다”

는 문장이 긍정되어야 할지 부정되어야 할지 정해질 수 없기 때문이다. 우리에게는 아직 방향 개념이 없다. 만약 우리에게 그 개념이 있다면, q가 방향이 아닐 경우에는 그 문장이 부정될 테고, q가 방향일 경우에는 앞의 설명에 의해 그 문제가 정해질 것이라고 규정할 수 있을 것이다. 그러나 다음과 같이 규정이 될 것이다.

만약 방향이 q인 직선 b가 있다면, q는 방향이다.

그러나 이것은 명백히 순환이다.

<인용 1> 셋째 의문: 동일성의 인식 표시로는 충분하지 않다.
그러나 우리가 시도한 정의에 대해 세 번째 의심이 또 제기된다.

“a의 방향(die Richtung von a)은 b의 방향(der Richtung von b)과 같다”

는 문장에서 a의 방향은 대상으로 나타나며, 우리는 이 정의를 통해 이 대상이 다른 형태, 가령 b의 방향으로 나타나는 경우에도 그것을 재인식할 수단을 지니게 된다. 그러나 이 수단이 모든 경우에 충분하지는 않다. 예를 들어 우리는 그 수단으로 영국이 지구축의 방향과 동일한지 결정할 수 없다. 말도 안되는 것으로 보이는 이런 예를 독자들은 양해해 주길 바란다! 물론 영국과 지구축의 방향을 혼동하는 사람은 아무도 없을 것이다. 그러나 이것은 우리 설명 덕분이 아니다. 우리 설명으로는 q 자체가 ‘b의 방향’이란 형식으로 주어져 있지 않다면,

“a의 방향은 q와 같다”

는 문장이 긍정되어야 할지 부정되어야 할지 정해질 수 없다. 우리에게 없는 것이 바로 방향 개념이다. 왜냐하면 만약 우리에게 그 개념이 있다면, q가 방향이 아닐 경우에는 그 문장이 부정될 테고, q가 방향일 경우에는 앞의 설명에 의해 그 문제가 정해질 것이라고 규정할 수 있기 때문이다. 그래서 다음과 같이 설명하려고 할 수도 있다:

만약 방향이 q인 직선 b가 있다면, q는 방향이다.

그러나 이 경우 우리가 순환에 빠진다는 것은 분명하다. 이 설명을 사용할 수 있으려면, 이미 우리는 어느 경우에나

"q는 b의 방향과 같다"

는 문장이 긍정되어야 하는지 부정되어야 하는지 알고 있어야만 할 것이다(§66).

(7) 개념의 외연

<설명ch> 지금까지 말한 몇 가지 문제점을 해결하기 위해 프레게는 스스로 제안을 한다.

> 만약 직선 a가 직선 b와 평행하다면, '직선 a와 평행한 직선'이란 개념의 외연은 '직선 b와 평행한 직선'이란 개념의 외연과 같고, 역으로 앞에 언급한 개념들의 외연이 같다면 a는 b와 평행하다.

직선 a의 방향은 '직선 a와 평행한'이란 개념의 외연이다. 삼각형 d의 모양은 '삼각형 d와 닮은꼴인'이란 개념의 외연이다. 그러면 우리는 직선이나 삼각형을 개념으로 바꾸고, 평행이나 닮은꼴을 어떤 개념 아래 속하는 대상들을 다른 개념 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시킬 가능성으로 바꾸어야 한다. 프레게는 수에 대해서도 똑같이 말한다.

개념 F에 귀속되는 기수는 ‘개념 F와 동수인’이란 개념의 외연이다.

곧 개념의 외연에 의해 수를 정의하는 것이다.

<인용 1> 개념의 외연으로서 기수

이처럼 명확히 구분된 방향 개념을 얻을 수 없고 같은 이유에서 명확히 구분된 기수 개념도 얻을 수 없으므로, 우리는 다른 길을 모색해 보기로 하자. 만약 직선 a가 직선 b와 평행하다면, ‘직선 a와 평행한 직선’이란 개념의 외연은 ‘직선 b와 평행한 직선’이란 개념의 외연과 같고, 역으로 앞에 언급한 개념들의 외연이 같다면 a는 b와 평행하다. 따라서 이렇게 설명해 보기로 하자:

직선 a의 방향은 ‘직선 a와 평행한’이란 개념의 외연이다.
삼각형 d의 모양은 ‘삼각형 d와 닮은꼴인’이란 개념의 외연이다!

이것을 우리의 경우에 사용하려 한다면, 우리는 직선이나 삼각형을 개념으로 바꾸고, 평행이나 닮은꼴을 어떤 개념 아래 속하는 대상들을 다른 개념 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시킬 가능성으로 바꾸어야 한다. 이런 가능성이 존재할 경우, 나는 간단히 개념 F는 개념 G와 동수라고 말하겠다. 그러나 이 낱말은 임의로 선택된 표현 방식으로 여겨져야 하며, 그 의미는 [두] 낱말의 결합에서 유래하는 것이 아니라 이런 규정에서 나오는 것으로 여겨져야 된다.

따라서 나는 이렇게 정의한다:

개념 F에 귀속되는 기수는 ‘개념 F와 동수인’이란 개념의 외연이다 (§8).

<인용 2> 해설

이 설명이 옳다는 점은 처음 보아서는 별로 분명하지 않을 것이다. 우리는 개념의 외연을 다른 무엇으로 생각하지 않는가? 우리가 개념의 외연을 무엇이라고 생각하는지는 개념의 외연에 대해 할 수 있는 근원적 서술에서 드러난다. 그것들은 다음과 같다:

1. 동일성
2. 어떤 외연이 다른 외연보다 더 포괄적이라는 것.

그런데

'개념 F와 동수인' 이란 개념의 외연은 '개념 G와 동수인' 이란 개념의 외연과 같다

는 문장은

"같은 수가 개념 F뿐만 아니라 개념 G에도 귀속된다"

는 문장이 참일 경우 그리고 그런 경우에만 언제나 참이다. 따라서 이때에는 완전한 일치가 존재한다.

사실 우리는 어떤 개념의 외연이 다른 개념의 외연보다 더 포괄적이라는 뜻에서 어떤 수가 다른 수보다 더 포괄적이라고 말하지는 않는다. 그러나

'개념 F와 동수인'이란 개념의 외연

이

'개념 G와 동수인' 이란 개념의 외연

보다 더 포괄적인 경우는 결코 있을 수 없다. 오히려 G와 동수인 모든 개념은 F와 동수라면, 역으로 F와 동수인 모든 개념은 G와 동수이다. 물론 여기서 '더 포괄적인' 을 수에서 나타나는 '더 큰' 과 혼동해서는 안 된다.

사실 '개념 F와 동수인' 이란 개념의 외연이, 우리의 설명에 따르면, 전혀 기수일 수 없는 다른 개념의 외연보다 더 포괄적이거나 덜 포괄적인 경우를 생각할 수 있다. 그리고 통상적으로 어떤 기수가 어떤 개념의 외연보다 더 포괄적이거나 덜 포괄적이라고 말하지는 않는다. 그러나 그런 경우가 만약 있다면, 그런 식으로 말해서는 안될 이유도 없다(§9).

(8) 관계 개념

<설명ch> 개념의 외연이라는 말은 1항 술어의 경우에는 분명하다. '~는 희다'와 같은 술어의 경우 그 개념의 외연이 무엇인지 아는 것은 어렵지 않기 때문이다. 그러나 산수에서는 '~이 ~보다 크다'와 같은 2항 개념도 많이 쓰인다. 그래서 프레게는 관계 개념의 외연에 대해서 설명한다.

'~보다 더 많은 질량을 가지고 있다'라는 관계 개념을 보자.

지구는 달보다 더 많은 질량을 가지고 있다

에서, '지구'를 제거하면, '달보다 더 많은 질량을 가짐'이란 개념을 얻는다. '달'이란 대상을 제거하면, '지구보다 더 적은 질량을 가짐' 이란 개념을 얻는다. 관계 개념은 어떻게 얻는가? 바로 그 둘을 동시에 제거하면 남게 된다.

프레게는 대상들의 개별 순서 쌍 우리는 이것을 주어라고 부를 수 있다와 관계 개념 사이의 관계는 개별 대상과 그 대상이 아래 속하는 개념 사이의 관계와 유사하다고 말한다. 예를 들어서 위 관계 개념의 외연은 <지구, 달>과 같은 순서쌍이 될 것이고, <태양, 지구>와 같은 순서쌍도 될 것이다.

<인용 1> 관계 개념

정의는 얼마나 생산적인가에 따라서 진가가 드러난다. 증명 과정에 생략해도 빈틈이 남지 않는 정의는 무가치한 것이므로 버려야 한다.

따라서 우리는 개념 F에 귀속되는 기수의 설명으로부터 잘 알려진 수의 성질이 이끌어질 수 있는지 탐구해 보기로 하자! 여기서 우리는 가장 간단한 것에 국한할 것이다.

이를 위해서는 동수성을 좀더 정확히 파악할 필요가 있다. 우리는 동수성을 양쪽의 일의적 대응으로 설명했는데, 직관적인 무엇이 그 안에 있다고 생각하기 쉬우므로 내가 양쪽의 일의적 대응이란 표현을 어떻게 이해하는지 이제 해명해야겠다.

다음 예를 생각해 보자! 어떤 웨이터가 식탁에 접시만큼의 칼이 놓여 있음을 확인하려 할 경우, 그는 어느 것도 세지 않아도 된다. 그는 접시마다 오른쪽에 칼을 하나 놓고 그래서 식탁에 있는 칼은 모두 접시 오른쪽에 놓이도록 하면 된다. 그렇게 하면 접시와 칼은 양쪽으로 일의적으로 상호 대응하며 그 대응은 같은 위치 관계에 따라 이루어진다.

“는 의 오른쪽에 있다”

는 문장에서 우리가 와 대신 다른 대상들을 대입한다고 생각한다면, 여기서 변경되지 않고 남는 내용 부분이 그런 관계의 본질이다. 우리는 이것을 일반화하려 한다!

우리가 대상 a와 대상 b에 대해 다루는 판단 가능 내용에서 a와 b를 제거하면, 우리는 그 나머지로 관계 개념을 얻게 되는데, 이 관계 개념에는 이중의 보충이 필요하다. 우리가

“지구는 달보다 더 많은 질량을 가지고 있다”

는 문장에서 ‘지구’를 제거하면, ‘달보다 더 많은 질량을 가짐’이란 개념을 얻는다. 대신 우리가 ‘달’이란 대상을 제거하면, ‘지구보다 더 적은 질량을 가짐’이란 개념을 얻는다. 우리가 그 둘을 동시에 제거하면, 이제 관계 개념이 남는다. 그런데 이 관계 개념은 자체로는 아무런 뜻도 갖지 못한다. 이는 단순한 개념이 그 자체로 아무런 뜻도 갖지 못하는 것과 마찬가지이다. 그것이 판단 가능 내용이 되려면 언제나 보충이 필요하다. 그러나 이 일은 여러 가지 방식으로 일어날 수 있다. 나는 지구와 달 대신 가령 태양과 지구를 넣을 수 있는데, 이것은 [다음 번] 제거에도 영향을 준다.

대상들의 개별 순서 쌍 우리는 이것을 주어라고 부를 수 있다 과 관계 개념 사이의 관계는 개별 대상과 그 대상이 아래 속하는 개념 사이의 관계와 유사하다. 여기서 주어는 복합적이다. 관계가 대칭적인 경우에는 이 점은 “펠레우스와 테티스는 아킬레스의 부모였다”는 문장에서처럼 말로도 그렇게 표현된다. 반대로 예를 들어 “지구는 달보다 더 크다”는 문

장의 내용을 ‘지구와 달’이 복합적인 주어로 나타나도록 다시 제시할 수는 없다. 왜냐하면 ‘와[그리고]’는 언제나 어떤 같은 지위를 암시하기 때문이다. 그러나 이것은 사실에 아무런 영향도 주지 못한다.

관계 개념은 단순 개념과 마찬가지로 순수 논리학에 속한다. 여기서는 관계의 특수한 내용이 문제가 되는 것이 아니라 논리적 형식만 문제가 된다. 그리고 이런 형식에 관해 서술될 수 있는 것은 그 진리가 분석적이며 선천적으로 인식되는 것들이다. 이것은 단순 개념의 경우와 마찬가지로 관계 개념에도 타당하다.

마치

“a는 개념 F 아래 속한다”

가 대상 a에 관해 다루는 판단 가능 내용의 일반 형식인 것처럼,

“a는 b와 관계 에 있다”

도 대상 a와 대상 b에 대해 다루는 판단 가능 내용의 일반 형식이라 할 수 있다(§0).

<인용 2> 관계에 의한 대응

자, 개념 F 아래 속하는 모든 대상은 개념 G 아래 속하는 하나의 대상과 관계 에 있다면, 그리고 G 아래 속하는 모든 대상에 대해 F 아래 속하는 하나의 대상이 관계 에 있다면, F 아래 속하는 대상들과 G 아래 속하는 대상들은 관계 를 통해 상호 대응한다.

F 아래 아무 대상도 속하지 않을 경우,

“F 아래 속하는 모든 대상은 G 아래 속하는 하나의 대상과 관계 에 있다”

는 표현이 무엇을 의미하는지 물을 수 있다. 나는 그것을 다음과 같이 이해한다:

"a가 F 아래 속한다"

와

"a는 G 아래 속하는 어느 대상과도 관계 에 있지 않다"

는 두 문장이, a가 무엇을 나타내든, 동시에 성립하지는 않는다. 그래서 첫째 문장이 거짓이거나 둘째 문장이 거짓이거나, 또는 둘 다 거짓이다. 이로부터 F 아래 속하는 대상이 전혀 없다면, "F 아래 속하는 모든 대상은 G 아래 속하는 하나의 대상과 관계 에 있다"는 것이 따라나온다. 왜냐하면 그 경우

"a가 F 아래 속한다"

는 첫째 문장은, a가 무엇이든지, 항상 부정되어야 하기 때문이다.

똑같이

"G 아래 속하는 모든 대상마다 F 아래 속하는 하나의 대상이 관계 에 있다"

는 것은 다음 두 문장

"a가 G 아래 속한다" 와
"F 아래 속하는 어느 대상도 a와 관계 에 있지 않다"

가, a가 무엇이든, 동시에 성립할 수는 없다는 것을 의미한다(§1).

(9) 수의 정의

<설명ch> 이제 방향에 대한 정의와 비슷하게 수에 대한 정의를 할 준비가 되었다. 프레게가 어떻게 수에 대한 정의를 동수인 개념의 집합으로 제시하는가? 이하의 설명은 잘 정리된 케니(Anthony Kenny)의 설명(『프레게』)으로 들어보자.

프레게는 두 개념 F와 G가 동수이다는 것의 의미를 F 아래 속하는 대상

들은 G 아래 속하는 대상들과 일대일로 대응될 수 있다로 설명한다. 즉 접시 옆에는 모두 나이프가 제대로 놓여있는 식탁의 경우, 개념 나이프에 속하는 대상들은 개념 접시에 속하는 대상들과 일대일로 대응된다는 식으로 설명한다.

프레게의 정의를 평가하기 전에 그 정의의 의미를 간단한 경우를 예로 들어 설명해 보자. 복음서를 쓴 사람들이라는 개념에 귀속되는 수는 4이다. 즉 4명의 복음서를 쓴 사람들, 마태, 마르코, 누가, 요한이 있다. 프레게의 의미에서 복음서를 쓴 사람들이라는 개념과 동수인 개념은 여럿 있다: 예를 들어 나침반의 점, 브리지의 조, 근본적인 힘 등. 프레게의 정의에 의할 때 그러면 복음서를 쓴 사람들이라는 개념에 귀속되는 수는 복음서를 쓴 사람들과 동수인이라는 개념의 외연이다. 오직 하나의 개념만이 어떤 개념과 동수일 수 있으므로 이 외연은 개념들의 집합, 즉 위에서 열거한 것과 같이 오직 네 개의 대상에만 적용되는 개념들의 집합일 것이다. 프레게의 정의는 수 4는 4임이란 속성을 갖는 모든 개념들의 집합이란 결과를 갖게 된다. 이것은 개념들(4임이라는 속성을 갖는 개념들)의 집합이면서 또한 고계 개념(4임이라는 개념 자체)의 외연일 것이다.

언뜻 보기에 이 정의는 이상하고 순환적인 듯이 보인다. 그러나 겉보기에 순환적일 뿐, 이 정의가 적절하다는 점은 이 정의로부터 잘 알려진 수의 속성들이 이끌어진다는 데서 가장 잘 드러난다. 위에서 프레게의 정의의 의미를 설명하기 위해 우리는 수 4를 사용했다. 그러나 그 정의 자체와 개념들 사이의 동수임이라는 핵심 개념에서 암암리에 끌어들인 수란 전혀 없다. 프레게가 말하듯이 만약 웨이터가 접시 수만큼 나이프가 정확히 놓여 있음을 확인하고자 한다면, 그는 나이프나 접시 어느 것도 세어 볼 필요가 없다. 그는 접시 옆에는 모두 나이프가 하나씩 놓여 있다는데 주의를 기울이기만 하면 된다. 일대일 대응관계를 확인하는 것이 대응되는 대상들의 수를 확인하는 것보다 먼저일 수 있으며, 그것을 전제할 필요가 없다. 그러므로 수는 순환에 빠지지 않고도 일대일 대응관계에 의해 정의될 수 있다.

일대일 대응관계는 이제 형식적으로 두 단계를 거쳐 정의된다. 첫째 대응관계의 정의가 있다.

> 만약 개념 F 아래 속하는 모든 대상이 개념 G 아래 속하는 대상과 라는 관계에 있고, G 아래 속하는 모든 대상에 F 아래 속하는 대상이 라는 관계에 있다면, F 아래 속하는 대상과 G 아래 속하는 대상은 서로서로 관계 에 의해 대응관계에 있다(FA, p. 83).

예를 들어 남편은 모두 어떤 부인과 혼인해 있고, 부인은 모두 어떤 남편과 혼인해 있다면 남편과 부인은 혼인에 의해 대응관계에 있다.

이 정의는 일대일 대응관계가 아니라 대응관계의 정의이다. 방금 제시한 그 명제는 일부일처제 사회에서뿐만 아니라 일부다처제나 다처일부제 사회에서도 마찬가지로 참이다. 물론 남편과 부인이 일대일 대응관계를 가져 남편의 수가 아내의 수와 같은 것은 일부일처제 사회뿐이다.

대응관계에서 일대일 대응관계로 나아가기 위해 우리는 두 개의 명제를 덧붙여야 한다.

> 만약 d가 a에 라는 관계에 있고, 그리고 만약 d가 e에 라는 관계에 있다면, d, a, e가 무엇이든 a = e이다. 만약 d가 a에 라는 관계에 있고, 그리고 b가 a에 라는 관계에 있다면, d, b, a가 무엇이든 d = b이다.

이제 우리는 일대일 대응관계를 순수 논리적 용어로, 즉 산수에서 이끌어진 개념을 전혀 사용하지 않고 정의하였다. 개념 F 아래 속하는 대상들과 G 아래 속하는 대상들을 일대일로 대응시키는 관계가 있다면, 개념 F는 개념 G와 동수이다라는 정의로 우리는 아래 정의에 필요한 것을 다 가지게 되었다.

개념 F에 귀속되는 수는 개념 F와 동수인이란 개념의 외연이다.

그러므로 프레게가 이제 궁극적으로 제시하는 다음의 수 정의에는 아무런 순환도 없다.

> n은 수이다.

는 다음 표현과 같은 것을 의미한다.

> n이 귀속되는 수인 그런 개념이 있다.

개별 수를 정의하는 데로 나아가기 전에 프레게가 해야 할 일은 개념 F에 귀속되는 그 수는, 개념 F와 개념 G와동수일 경우, 개념 G에 귀속되는 그 수와 같다는 것을 보이기만 하면 된다. 이는 동어반복처럼 들리지만 사실은 증명이 필요하다. 그러나 그 증명은 약간 복잡하긴 하지만 전혀 문제가 없다(FA, 73절).

<인용 1> 개념 F 아래 속하는 대상들을 개념 G 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계가 있을 경우, F에 귀속되는 기수는 G에 귀속되는 기수와 같다.

우리는 우선 만약 개념 F가 개념 G와 동수라면, 개념 F에 귀속되는 기수는 개념 G에 귀속되는 기수와 같다는 것을 보여주고자 한다. 이것은 사실 동어반복처럼 들리긴 하지만, ‘동수’란 말의 의미가 낱말의 결합으로부터 유래한 것이 아니라 앞서 제시한 설명에서 유래했기 때문에 동어반복이 아니다.

우리의 정의에 따를 때, 만약 개념 F가 개념 G와 동수라면, ‘개념 F와 동수인’이란 개념의 외연은 ‘개념 G와 동수인’이란 개념의 외연과 같다는 것을 보여주어야 한다. 바꾸어 말해 이런 전제 아래 다음 문장들이 보편적으로 성립한다는 것을 보여야 한다:

만약 개념 H가 개념 F와 동수이면, 개념 H는 개념 G와도 동수이다.

그리고

만약 개념 H가 개념 G와 동수이면, 개념 H는 개념 F와도 동수이다.

첫째 문장은 만약 개념 F 아래 속하는 대상들을 개념 G 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계 가 있을 경우, 그리고 만약 개념 H 아래 속하는 대상들을 개념 F 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계 가 있을 경우, 개념 H 아래 속하는 대상들을 개념 G 아래 속하는 대상들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계가 있다는 것에 해당한다. 아래와 같이 문자들을 배열하게 되면, 이 점을 좀더

쉽게 이해할 수 있다:

H F G

사실 그런 관계는 다음과 같이 제시될 수 있다: 그 관계는

"어떤 대상이 있는데, c가 그 대상과 관계 에 있고 그 대상은 b와 관계 에 있다"

는 내용에서 (관계 항으로 간주된) c와 b를 제거할 때 생겨난다. 우리는 이 관계가 양쪽의 일의적 관계이며, 이 관계에 의해 개념 H 아래 속하는 대상들이 개념 G 아래 속하는 대상들과 대응된다는 것을 보여줄 수 있다.

둘째 문장도 비슷한 방식으로 증명될 수 있다. 이런 지적을 통해 직관에서 어떤 증명 근거도 빌어올 필요가 없고, 우리 정의로 무언가 이룰 수 있다는 것을 충분히 인식하길 바란다(§3).

(10) 0의 정의

<설명ch> 프레게는 수에 대한 일반적 정의를 내린 다음에 이제 구체적으로 개별 수를 정의한다. 순서대로 0, 1, 1씩 증가함을 정의하는 것이다. 가장 먼저 0에 대해 다음과 같이 정의한다.

0은 '자기 자신과 같지 않은'이란 개념에 귀속되는 기수이다.

여기서 개념이란 말로 모순 개념을 생각할 수 있을 것이다. 그런데 모순 개념을 이상하게 생각하는 사람들이 있다. 그러나 프레게도 나무로 된 쇠나 네모난 원을 예로 들고, 그런 개념들이 흔히 생각하는 것처럼 그렇게 나쁘지는 않으며 아무 것도 문제될 것이 없다고 말한다. 논리학의 관점에서 볼 때 증명을 엄밀히 하기 위해 개념이 만족시켜야 할 것은 개념의 명확한 경계 구분, 즉 각 대상에 대해 그것이 문제의 개념 아래 속하는지 속하지 않는지가 결정되어 있어야 한다는 것뿐인데, '자기 자신과 같지 않은'과 같이 모순을 포함하는 개념도 이 요건을 잘 만족시키기 때

문이다. 왜냐하면 우리는 어느 대상도 그런 개념 아래 속하지 않는다는 것을 알기 때문이다.

<인용 1> 영은 '자기 자신과 같지 않은'이란 개념에 귀속되는 기수이다.

이제 우리는 개별 수에 대한 설명으로 넘어갈 수 있다.

'자기 자신과 같지 않은'이란 개념 아래에는 아무 것도 속하지 않으므로, 나는 다음과 같이 설명한다:

0은 '자기 자신과 같지 않은'이란 개념에 귀속되는 기수이다.

아마 내가 여기서 개념이란 말을 한다는 점을 이상하게 여길지도 모른다. 아마 사람들은 그 개념에는 모순이 포함되어 있으며, 익히 알려진 나무로 된 쇠나 네모난 원을 연상시키게 한다고 반박할 것이다. 그런데 나는 이런 개념들이 흔히 생각하는 것처럼 그렇게 나쁘지는 않다고 생각한다. 그 개념들은 당장 쓸모가 있는 것은 아니지만, 그것 아래 무언가가 속한다는 것을 전제하지만 않는다면, 아무 것도 문제될 것이 없다. 그리고 우리가 단순히 그 개념들을 사용한다고 해서 그 사실을 전제하는 것은 아니다. 어떤 개념이 모순을 포함한다는 점은 탐구가 전혀 필요 없을 만큼 언제나 그렇게 분명한 것은 아니다. 그것을 탐구하려면 우선 그 개념이 있어야 하고, 그 개념은 논리적으로 다른 개념과 똑같이 다루어져야 한다. 논리학의 관점에서 볼 때 증명을 엄밀히 하기 위해 개념이 만족시켜야 할 것은 개념의 명확한 경계 구분, 즉 각 대상에 대해 그것이 문제의 개념 아래 속하는지 속하지 않는지가 결정되어 있어야 한다는 것뿐이다. 그런데 '자기 자신과 같지 않은'과 같이 모순을 포함하는 개념도 이 요건을 잘 만족시킨다. 왜냐하면 우리는 어느 대상도 그런 개념 아래 속하지 않는다는 것을 알기 때문이다.

나는 '개념'이란 낱말을 다음과 같이 사용한다:

"a는 개념 F 아래 속한다"

는 판단 가능 내용의 일반 형식이고, 그것은 대상 a에 대해 다루며 a 대신 무엇을 대입해도 여전히 판단 가능 내용이다. 그리고 이런 뜻으로

"a는 '자기 자신과 같지 않은' 이란 개념 아래 속한다"

는

"a는 자기 자신과 같지 않다"

나

"a는 a와 같지 않다"

와 의미가 같다.

0을 정의할 때 나는 아무 것도 그 아래 속하지 않기만 하다면, 다른 어떤 개념이라도 고를 수 있었다. 그러나 이 사실을 순수 논리적으로 증명할 수 있는 그런 개념을 고르는 것이 나에게는 중요하다. 그리고 그런 증명을 하는데는 '자기 자신과 같지 않은' 이 가장 편리하다. 여기서 이 경우 나는 '같은' 에 대해 앞에 인용했던 라이프니츠의 순수 논리적인 설명이 성립한다고 간주한다(§4).

<인용 2> 영은 아무 것도 속하지 않는 개념에 귀속되는 기수이다. 영이 어떤 개념에 귀속되는 기수라면, 그 개념 아래에는 아무 대상도 속하지 않는다.

이제 앞의 규정에 따라, 어느 것도 그 아래 속하지 않는 개념은 모두 아무 것도 그 아래 속하지 않는 어떠한 다른 개념과도 동수이며, 오직 그런 개념들하고만 동수라는 것이 분명히 증명될 수 있다. 그리고 이로부터 0이 바로 그런 개념에 귀속되는 기수라는 것과 나아가 어떤 개념에 귀속되는 수가 0이라면 아무 대상도 그 개념 아래 속하지 않는다는 것이 따라나온다.

어떠한 대상도 개념 F 아래에는 물론 개념 G 아래에도 속하지 않는다고 가정한다면, 우리는 동수임을 증명하기 위해 다음 문장이 성립하는 관계

가 꼭 필요하다:

F 아래 속하는 모든 대상은 G 아래 속하는 하나의 대상과 관계 에 있고, G 아래 속하는 대상마다 F 아래 속하는 하나의 대상이 관계 에 있다.

이 말의 의미와 관련해 앞서 말한 바에 따를 때, 이런 전제들에서는 모든 관계가 이런 조건을 만족시키며, 양쪽으로 일의적이기까지 한 동일성도 이 조건을 만족시킨다. 왜냐하면 그 관계에 대해서도 앞에 요구된 두 문장이 모두 성립하기 때문이다.

반면 G 아래 하나의 대상, 가령 a가 속하는데 F 아래 아무 대상도 속하지 않는다면, 두 문장

"a는 G 아래 속한다"

와

"F 아래 속하는 어떠한 대상도 a와 관계 에 있지 않다"

는 모든 관계 에 대해 동시에 성립한다. 왜냐하면 첫째 문장은 첫째 전제에 따라, 둘째 문장은 둘째 전제에 따라 옳기 때문이다. 말하자면 F 아래 속하는 대상이 없다면, a와 일정한 관계를 갖는 그런 대상도 전혀 없다. 우리의 설명에 따라 F 아래 속하는 대상들을 G 아래 속하는 대상들에 대응시키는 관계도 없을 것이고, 그에 따라 개념 F와 G는 동수가 아닐 것이다(§5).

(11) 1과 다음수의 정의

<설명ch> 프레게는 0을 정의한 다음에 자연적 수 계열에서 인접한 모든 두 성원이 서로에 대해 지니는 관계를 설명한다. 그는

n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다

의 의미는

> 어떤 개념 F가 있고, 그 개념 아래 속하는 어떤 대상 x가 있어서, 개념 F에 귀속되는 기수는 n이고, 'F 아래 속하지만 x와 같지 않은' 이란 개념에 귀속되는 기수는 m이다

라고 말한다.

프레게는 이 다음수 정의를 이용해서 수 1이 자연수 계열에서 0 바로 다음에 나오는 수임을 보여준다. '0과 같은' 이란 개념 아래 0이 속한다. 그러나 한편 '0과 같지만0과 같지 않은' 이란 개념 아래에는 어떠한 대상도 속하지 않으며, 그래서 0이 이 개념에 귀속되는 기수이다. 따라서 우리는 '0과 같은' 이란 개념과 그 개념 아래 속하는 대상 0을 지니게 되며, 이에 대해 '0과 같은' 이란 개념에 귀속되는 기수는 '0과 같은' 이란 개념에 귀속되는 기수와 같다는 것이 성립하게 된다. '0과 같지만 0과 같지 않은' 이란 개념에 귀속되는 기수는 0이다. 따라서 우리의 설명으로부터 '0과 같은' 이란 개념에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 0 바로 다음에 나온다는 것이 이끌어진다. 그런데 만약 우리가 1은

> '0과 같은' 이란 개념에 귀속되는 기수이다

라고 정의하게 되면, 우리는 앞의 문장을 다음과 같이 표현할 수 있게 된다.

> 1은 자연적 수 계열에서 0 바로 다음에 나온다.

1뿐만 아니라 2, 3, 등의 자연수도 마찬가지 방법으로 정의할 수 있을 것이다.

프레게는 자연수 계열에서 모든 기수 (n)마다 어떤 기수가 바로 다음에 나온다는 것을 증명할 수 있으려면, 이 후자의 기수가 귀속되는 그런 개념을 하나 제시해야 한다. 그는 그런 개념으로 "n으로 끝나는 자연수 계열에 속하는" 이란 개념을 말하는데 이 개념를 설명한다. 그는『개념 표기법』에서 내가 제시한 바 있는 조상 관계의 정의를 이용한다. 곧

> 만약 x와 관계 에 있는 대상들은 모두 개념 F 아래 속한다면, 그리고 만약 d가 개념 F 아래 속한다는 것으로부터 d가 무엇이든 d와 관계 에 있는 대상들은 모두 개념 F 아래 속한다는 것이 따라나온다면, 그러면 F가

어떤 개념이든지, y는 F 아래 속한다

는

y는 -계열에서 x 다음에 나온다

와 의미가 같고, 그리고

"x는 -계열에서 y 앞에 나온다"

와도 의미가 같다. 예를 들어 '후손'과 '선조'라는 말을 '부모'라는 관계에 의해 정의할 수 있다. 한 수의 다음수는 그 수의 자식일 것이다. 그 수의 다음수는 역시 그 수의 자손일 것이다.

프레게는 이제 'n으로 끝나는 자연수 계열의 성원'이란 개념을 정의한다. 만약 n이 자연적 수 계열에서 a 다음에 나오거나 a와 같다면, a는 n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하게 된다. 그런데 위의 다음수 정의에 따르면 'n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는'에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 n 바로 다음에 나온다. 따라서 자연적 수 계열에서 n 바로 다음에 나오는 기수가 있다는 것이 증명이 되고 그러면 자연수 계열에서 마지막 성원이 없다는 것이, 곧 자연수는 무한하다는 것이 증명된다.

<인용 1> "n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다"는 표현의 설명.

이제 나는 자연적 수 계열에서 인접한 모든 두 성원이 서로에 대해 지니는 관계를 설명하고자 한다. 다음 문장

> "어떤 개념 F가 있고, 그 개념 아래 속하는 어떤 대상 x가 있어서, 개념 F에 귀속되는 기수는 n이고, 'F 아래 속하지만 x와 같지 않은'이란 개념에 귀속되는 기수는 m이다"

는

"n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다"

와 같은 의미이다.

나는 "n이 m 바로 다음에 나오는 그 기수이다(die auf m nchstfolgende Anzahl)"라는 표현을 쓰지 않는데, 그 이유는 우리가 먼저 두 문장을 증명하기 전에는 정관사 사용이 옳지 않기 때문이다. 동일한 이유로 나는 "n = m + 1"이라고 말하지도 않는다. 왜냐하면 등호 때문에 (m + 1)도 대상으로 표시되기 때문이다(§6).

<인용 2> 1은 '0과 같은'이라는 개념에 귀속되는 기수이다.

수 1에 이르기 위해서는 우선 우리는 자연적 수 계열에서 0 바로 다음에 나오는 어떤 것이 있음을 보여주어야 한다.

'0과 같은'이란 개념 아니면 당신이 더 좋다고 생각한다면, 그런 술어 을 고려해 보자! 이 개념 아래 0이 속한다. 그러나 한편 '0과 같지만 0과 같지 않은'이란 개념 아래에는 어떠한 대상도 속하지 않으며, 그래서 0이 이 개념에 귀속되는 기수이다. 따라서 우리는 '0과 같은'이란 개념과 그 개념 아래 속하는 대상 0을 지니게 되며, 이에 대해 다음이 성립하게 된다.

'0과 같은'이란 개념에 귀속되는 기수는 '0과 같은'이란 개념에 귀속되는 기수와 같다.

'0과 같지만 0과 같지 않은'이란 개념에 귀속되는 기수는 0이다.

따라서 우리의 설명으로부터 '0과 같은'이란 개념에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 0 바로 다음에 나온다는 것이 이끌어진다.

그런데 만약 우리가

1은 '0과 같은'이란 개념에 귀속되는 기수이다

라고 정의하게 되면, 우리는 앞의 문장을 다음과 같이 표현할 수 있게 된다.

1은 자연적 수 계열에서 0 바로 다음에 나온다.

1의 정의는 객관적으로 정당하기 위해 어떠한 관찰된 사실도 전제하지 않는다는 점을 지적하는 것이 아마 불필요하지는 않을 것이다. 왜냐하면

그런 정의를 할 수 있으려면 어떤 주관적 조건이 만족되어야 하고, 바로 감각 지각 때문에 그 일이 가능하다고 생각할 수도 있기 때문이다. 이것이 전적으로 옳을 수도 있겠지만, 그렇다고 해서 도출된 그 문장이 더 이상 선천적이지 않은 것은 아니다. 그런 조건에는 적어도 우리가 아는 한 가령 충분한 양의 피가 적절한 상태로 뇌를 돌고 있어야 한다는 것도 포함될 것이다. 그러나 앞 문장의 참이 이 조건에 의존하는 것은 아니다. 비록 피가 돌지 않는다고 하더라도 그 문장은 여전히 성립한다. 이성적 존재가 모두 한꺼번에 겨울잠에 빠져 있다고 하더라도, 그 문장은 그 동안 폐기되는 것이 아니라 아무런 영향도 받지 않은 채 유지된다. 한 문장이 참이라는 것은 그것이 사고된다는 것과 같은 것이 아니다(§7).

<인용 3> 이 정의들을 통해 증명될 수 있는 문장들.

나는 여기서 우리 정의에 의해 증명될 수 있는 몇몇 문장을 제시하기로 하겠다. 독자들은 그 증명이 어떻게 이루어질 수 있는지 쉽게 알 수 있을 것이다.

1. 만약 a가 자연적 수 계열에서 0 바로 다음 나온다면, a = 1.

2. 만약 1이 어떤 개념에 귀속되는 기수라면, 그 개념 아래 속하는 대상이 있다.

3. 만약 1이 개념 F에 귀속되는 기수라면, 그러면 만약 대상 x가 개념 F 아래 속한다면, 그리고 만약 y가 개념 F 아래 속한다면, x = y, 즉 x는 y와 같다.

4. 만약 어떤 대상이 개념 F 아래 속하고, 그리고 만약 x가 개념 F 아래 속하고 y가 개념 F 아래 속한다는 사실로부터 x = y라는 것이 일반적으로 귀결된다면, 1은 개념 F에 귀속되는 기수이다.

5. 다음 문장

"n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다"

를 통해 확립되는 m과 n의 관계는 양쪽으로 일의적인 관계이다.

이것으로는 모든 기수에 대해 그 기수 바로 앞에 나오는 다른 기수가 있다거나 모든 기수에 대해 그 기수 바로 다음에 나오는 다른 기수가 있다는 것은 아직 얘기되지 않았다.

6. 0을 제외한 모든 기수는 자연적 수 계열에서 어떤 기수 바로 다음에 나온다(§8).

<인용 4> 어떤 계열에서 다음에 나옴의 정의.

자연적 수 계열에서 모든 기수 (n)마다 어떤 기수가 바로 다음에 나온다는 것을 증명할 수 있으려면, 우리는 이 후자의 기수가 귀속되는 그런 개념을 하나 제시해야 한다. 우리는 그러한 개념으로

> "n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는"

을 고를텐데, 이를 우선 설명해야 할 것이다.

『개념 표기법』(Begriffsschrift)에서 내가 제시한 바 있는, 한 계열에서 다음에 나옴의 정의를, 조금 다른 말로, 다시 얘기하면 이제 다음과 같다.

다음 문장

> "만약 x와 관계 에 있는 대상들은 모두 개념 F 아래 속한다면, 그리고 만약 d가 개념 F 아래 속한다는 것으로부터 d가 무엇이든 d와 관계 에 있는 대상들은 모두 개념 F 아래 속한다는 것이 따라나온다면, 그러면 F가 어떤 개념이든지, y는 F 아래 속한다"

는

> "y는 -계열에서 x 다음에 나온다"

와 의미가 같고, 그리고

> "x는 -계열에서 y 앞에 나온다"

와도 의미가 같다(§9).

<인용 5> "x는 y로 끝나는 -계열에 속한다"는 표현의 설명.

이제 만약 관계를

“n은 자연적 수 계열에서 m 바로 다음에 나온다”

는 문장에서 m이 n과 맺는 관계라고 할 경우, 우리는 ‘-계열’ 대신 ‘자연적 수 계열’이라고 말할 것이다.

또한 나는 다음과 같이 정의한다:

다음 문장

“y가 -계열에서 x 다음에 나오거나 y는 x와 같다”

는

“y는 x로 시작하는 -계열에 속한다”

와 같은 의미를 지니며, 또한 그것은

“x는 y로 끝나는 -계열에 속한다”

와도 같은 의미를 지닌다.

따라서 만약 n이 자연적 수 계열에서 a 다음에 나오거나 a와 같다면, a는 n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하게 된다(§1).

<인용 6> 자연적 수 계열에서 최종 구성 요소가 없다는 것의 증명의 암시.

이제 다음에 제시될 또 하나의 조건 아래에서 다음 개념

‘n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는’

에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 n 바로 다음에 나온다는 것을 보여야 한다. 그리고 이를 통해 자연적 수 계열에서 n 바로 다음에 나오는 기수가 있다는 것과 이 계열에 최종 구성 요소가 없다는 것이 증명된다. 분명히 이 문장은 경험적 방법이나 귀납에 의해 정당화될 수는 없다.

여기서 그 증명을 자세히 제시하기는 어렵다. 나는 증명 과정을 간단히 시사만 하겠다. 다음 문장을 증명해야 한다.

1. 만약 a가 자연적 수 계열에서 d 바로 다음에 나온다면, 그리고 d에 관해

개념 ‘d로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는’

에 귀속되는 기수가 자연적 수 계열에서 d 바로 다음에 나온다는 것이 성립한다면,

a에 대해서도 다음 사실이 성립한다:

개념 ‘a로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는’

에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 a 바로 다음에 나온다.

둘째로, 앞에서 말한 문장에서 d와 a에 대해 말한 것이 0에 대해 성립한다는 것을 증명해야 하며, 그리고 나서 n이 0으로 시작하는 자연적 수 계열에 속한다면 그것이 n에 대해서도 성립한다는 것을 이끌어내야 한다. 이 추리 방법은 내가 앞에서 다음 표현

“y는 자연적 수 계열에서 x 다음에 나온다”

에 대해 제시한 그 정의를 적용한 것인데, 여기서 우리는 d와 a에 관해, 그리고 0과 n에 관해 공통으로 주장되는 것을 개념 F로 간주해야 한다 (§2).

(12) 유한수와 무한수

<설명ch> 프레게는 “n은 유한 기수이다”를 “n은 0으로 시작하는 자연적 수 계열에 속한다”로 정의한다. 그는 이 정의를 통해 어느 유한수도 자연수 계열에서 자기 자신 다음에 나오지 않는다고 결론내린다.

그리고 프레게는 유한수를 통해 무한수를 정의내린다. 유한수라는 개념에 귀속되는 수는 바로 무한수이다. 그는 그 무한수를 81라고 표시한다. 이것은 칸토르가 알레프 제로(0)라고 표시하는 것이다. “개념 F에 귀속되는 기수는 81이다”라는 말은 개념 F 아래 속하는 대상들을 유한 기수

들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계가 있다는 뜻이다.

<인용 1> 유한 기수의 정의. 어느 유한 기수도 자연적 수 계열에서 자기 자신 다음에 나오지 않는다.

앞 절의 문장 (1)을 증명하기 위해 우리는 a가 개념 'a로 끝나는 자연적 수 계열에 속하지만, a와 같지는 않은'에 귀속되는 기수라는 것을 보여야 한다. 이를 위해서는 다시 이 개념이 개념 'd로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는'과 같은 외연을 지닌다는 것을 보여야 한다. 이를 위해 우리는 0으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는 대상은 어느 것도 자연적 수 계열에서 자기 자신 다음에 나올 수 없다는 문장이 필요하다. 이것은 다시 앞서 암시한 바 있듯이 한 계열에서 다음에 나옴에 대한 우리의 정의를 통해 증명되어야 한다.

우리는 이 때문에 개념

'n으로 끝나는 자연적 수 계열에 속하는'

에 귀속되는 기수는 자연적 수 계열에서 n 바로 다음에 나온다는 문장에 n이 0으로 시작하는 자연적 수 계열에 속한다는 조건을 반드시 덧붙여야 한다. 이를 위해 좀더 간단한 표현 방식이 필요한데, 나는 이를 다음과 같이 설명한다.

"n은 0으로 시작하는 자연적 수 계열에 속한다"

는 문장은

"n은 유한 기수이다"

와 같은 의미이다.

그래서 우리는 앞의 문장을 다음과 같이 표현할 수 있다: 어느 유한 기수도 자연적 수 계열에서 자기 자신 다음에 나오지 않는다(§83).

<인용 2> '유한 기수'라는 개념에 귀속되는 기수는 무한 기수이다.

무한 기수는 유한 기수와 대비된다. ‘유한 기수’라는 개념에 귀속되는 기수는 무한 기수이다. 우리는 그것을 81로 표시하기로 하자! 만일 그것이 유한 기수라면, 그 기수는 자연적 수 계열에서 자기 자신 다음에 나올 수 없을 것이다. 그러나 우리는 81이 바로 그렇다는 것을 보일 수 있다.

그렇게 설명된 무한 기수 81에는 신비스럽거나 놀라울 것이 전혀 없다. “개념 F에 귀속되는 기수는 81이다”라는 말은 개념 F 아래 속하는 대상들을 유한 기수들과 양쪽으로 일의적으로 대응시키는 관계가 있다는 것 그 이상도 아니며 그 이하도 아니다. 이는 우리의 설명에 따를 때 아주 분명하고 명확한 뜻을 지닌다. 그리고 그것으로 기호 81의 사용이 충분히 정당화되며, 그 기호가 의미를 지니기에도 충분하다. 우리가 무한 기수에 대해 어떤 표상도 형성할 수 없다는 점은 아무런 중요성도 없으며, 이 점은 유한 기수들의 경우에도 마찬가지이다. 기수 81은 이런 식으로 여느 유한 기수만큼이나 똑같이 분명히 규정된 셈이다. 그것은 의심의 여지 없이 같은 것으로 재인식되고 다른 것과 구별될 수 있다(§4).

<인용 3> 칸토르의 무한 기수 ‘농도’. 용어의 차이.

최근 칸토르는 주목할 만한 저술에서 무한 기수를 도입하였다. 일반적으로 유한 기수만 현실적인 것으로 인정하는 견해에 대한 칸토르의 비판에 나는 전적으로 동의한다. 유한 기수들뿐 아니라 분수, 음수, 무리수, 그리고 복소수도 감각적으로 지각할 수 없고 공간적이지 않다. 그리고 만약 우리가 감각에 영향을 주는 것, 또는 적어도 직, 간접적으로 감각 지각을 야기할 수 있는 영향을 미치는 것을 현실적이라 부른다면, 당연히 이들 수도 현실적이지 않다. 그러나 그러한 지각은 우리 정리의 증명 근거로 필요하지도 않다. 논리적으로 아무 문제없이 도입된 이름이나 기호라면 우리 탐구에서 아무 거리낌없이 사용될 수 있으며, 그 때문에 기수 81도 둘이나 셋과 마찬가지로 정당하다.

이 점에서 나는 칸토르와 일치하지만, 내가 보기에, 나는 그와는 다른 용어를 사용하고 있다. 내가 기수라고 부른 것을 그는 ‘농도’라고 부르는데, 그의 기수 개념은 순서 관계를 지니고 있다. 물론 유한 기수는 계

열 내의 순서와는 무관하게 나타나지만, 무한히 큰 기수는 그렇지 않다. 그런데 ‘기수’ 라는 낱말과 ‘몇 개의?’ 라는 물음의 일상 용법은 어떠한 정해진 순서도 암시하고 있지 않다. 칸토르의 기수는 오히려 “연속열의 몇 번째 구성 요소가 최종 요소인가?” 하는 물음에 답해 준다. 그 때문에 나의 용어법이 일상적 용법과 더 잘 맞는 것으로 보인다. 만약 우리가 낱말의 의미를 확장하려 한다면, 가능한 한 많은 일반 문장들이 여전히 성립해야 한다는 점, 특히 기수가 계열 내의 순서와 무관하다는 것과 같은 근본적인 문장이 여전히 성립해야 한다는 점을 명심해야 한다. 우리의 기수 개념은 애초부터 무한수도 포괄하기 때문에, 그렇게 확장할 필요도 없다(85).

<인용 4> 칸토르의 연속열에서 다음에 나옴과 내가 말하는 계열에서 다음에 나옴.

칸토르는 무한 기수를 얻기 위해 연속열에서 다음에 나옴이란 관계 개념을 도입하는데, 이것은 ‘계열에서 다음에 나옴’ 이란 내 개념과는 다르다. 칸토르에 따르면, 예를 들어 자연적 순서 계열에서 양의 유한 정수들이 다음과 같이 배열되게 되면, 연속열이 하나 생기게 된다: 홀수 다음에는 홀수가 따라나오고, 같은 방식으로 짝수 다음에는 짝수가 따라나오도록 배열하고, 나아가 홀수가 모두 나온 다음에 짝수가 나온다고 하자. 이런 연속열에서는 예를 들어 0이 13 다음에 나오게 된다. 그러나 0 바로 앞에 나오는 수는 없을 것이다. 계열에서 다음에 나옴에 대한 내 정의에서는 이런 일은 일어날 수 없다. 우리는 y가 -계열에서 x 다음에 나온다면, 이 계열에서 y 바로 앞에 나오는 대상이 있다는 것을, 직관의 공리를 사용하지 않아도, 엄밀히 증명할 수 있다. 그런데 내가 보기에 연속열에서 다음에 나옴이나 칸토르의 기수는 아직 정의가 정확히 되지 않은 것 같다. 칸토르 자신은 어떤 신비스런 ‘내적 직관’ 에 호소하고 있지만, 거기서 그는 정의에 근거해서 증명하려고 했어야 했고, 아마 그렇게 증명할 수도 있었을 것이다. 왜냐하면 나는 이들 개념이 어떻게 규정되어야 할지 생각할 수 있기 때문이다. 물론 이렇게 말한다고 해서 그런 개념들의 정당성과 생산성을 완전히 부정하고자 하는 것은 아니다. 도리어 나는

이 연구에 나타난 학문의 확장을 특히 환영한다. 왜냐하면 이런 확장을 통해 더 높은 단계의 무한히 큰 기수(농도)로 나아가는 순수 산수의 길이 열리기 때문이다(§6).

『철학사상』 별책 제2권 제13호

발행일 2003년 5월 25일

발행인 서울대학교 철학사상연구소 소장 백 종 현

✉ 151-742, 서울시 관악구 신림동 산56-1

E-mail: philinst@plaza.snu.ac.kr

전화: 02) 880-6223

팩스: 02) 874-0126

인 쇄 관악사 02) 877-1448, 883-1381