R E P O R T

[Octave를 이용한 문제풀이]

학 과	컴퓨터공학부 컴퓨터공학전공
교수님	서경룡 교수님
학 번	201911608
이 름	김지환
제출일	2022.05.08

목 차

1. **n차원 매트릭스**
   a) rand(n) , n=2:5
   b) n=2:m, 소요시간 그래프

2. **문제풀기**
   a) 자코비, 가우스-자이델
   b) A^-1b or A\b
   c) 자코비,가우스,A^-1b 소요시간

1) 2개의 n 차원 매트릭스를 구하는 프로그램을 작성하고 다음에 답하라

a) rand(n) 으로 매트릭스 A, B 를 구한후 A*B 로 매트릭스 곱을 구하고 위의 프로그램 결과와 비교하라.(여기서 n 은 3, 4, 5 로 한다)

b) n 을 2에서부터 증가하여 a) 문제를 풀면서 각 n 에 대한 소요시간을 측정하여 그래프로 표시하라. (계산시간을 측정하는방법은 tic(), toc() 함수를 사용한다)

1-a)

n=3

Matrix A

```
>> A = floor(rand(3)*5)
A =

   4   2   3
   1   2   1
   3   4   0
```

Matrix B

```
>> B = floor(rand(3)*5)
B =

   0   1   0
   2   0   1
   3   1   0
```

Matrix C = A*B

=> 4*0+2*2+3*3 | 4*1+2*0+3*1 | 4*0+2*1+3*0 => 0+4+9 | 4+0+3 | 0+2+0

1*0+2*2+1*3 | 1*1+2*0+1*1 | 1*0+2*1+1*0 => 0+4+3 | 1+0+1 | 0+2+0

3*0+4*2+0*3 | 3*1+4*0+0*1 | 3*0+4*1+0*0 => 0+8+0 | 3+0+0 | 0+4+0

=>

13	7	2
7	2	2
8	3	4

```
>> C=A*B
C =

   13    7    2
    7    2    2
    8    3    4
```

- 비교 결과 -

rand(3)으로 구한 매트릭스 A, B의 곱의 결과와 프로그램에서 도출한 결과가 일치하다.

n=4

Matrix A

```
>> A=floor(rand(4)*5)
A =

   0   1   0   3
   3   3   1   1
   2   4   2   4
   0   1   3   0
```

Matrix B

```
>> B=floor(rand(4)*5)
B =

   4   3   1   2
   2   0   2   3
   0   0   2   2
   1   4   3   1
```

Matrix C = A*B

=> 0*4+1*2+0*0+3*1 | 0*3+1*0+0*0+3*4 | 0*1+1*2+0*2+3*3 | 0*2+1*3+0*2+3*1
3*4+3*2+1*0+1*1 | 3*3+3*0+1*0+1*4 | 3*1+3*2+1*2+1*3 | 3*2+3*3+1*2+1*1
2*4+4*2+2*0+4*1 | 2*3+4*0+2*0+4*4 | 2*1+4*2+2*2+4*3 | 2*2+4*3+2*2+4*1
0*4+1*2+3*0+0*1 | 0*3+1*0+3*0+0*4 | 0*1+1*2+3*2+0*3 | 0*2+1*3+3*2+0*1

=> 0+2+0+3 | 0+0+0+12 | 0+2+0+9 | 0+3+0+3
12+6+0+1 | 9+0+0+4 | 3+6+2+3 | 6+9+2+1
8+8+0+4 | 6+0+0+16 | 2+8+4+12 | 4+12+4+4
0+2+0+0 | 0+0+0+0 | 0+2+6+0 | 0+3+6+0

=>

5	12	11	6
19	13	14	18
20	22	26	24
2	0	8	9

```
>> C=A*B
C =

    5   12   11    6
   19   13   14   18
   20   22   26   24
    2    0    8    9
```

- 비교 결과 -

rand(4)으로 구한 매트릭스 A, B의 곱의 결과와 프로그램에서 도출한 결과가 일치하다.

n=5

Matrix A

```
>> A=floor(rand(5)*5)
A =

   1   2   2   4   0
   3   3   1   0   4
   3   1   0   3   4
   4   3   2   2   3
   4   4   1   1   0
```

Matrix B

```
>> B=floor(rand(5)*5)
B =

   2   2   4   3   0
   1   0   2   2   3
   3   1   2   2   1
   4   0   3   1   3
   2   4   0   0   2
```

Matrix C = A*B

=>

2+2+6+16+0 | 2+0+2+0+0 | 4+4+4+12+0 | 3+4+4+4+0 | 0+6+2+12+0

6+3+3+0+8 | 6+0+1+0+16 | 12+6+2+0+0 | 9+6+2+0+0 | 0+9+1+0+8

6+1+0+12+8 | 6+0+0+0+16 | 12+2+0+9+0 | 9+2+0+3+0 | 0+3+0+9+8

8+3+6+8+6 | 8+0+2+0+12 | 16+6+4+6+0 | 12+6+4+2+0 | 0+9+2+6+6

8+4+3+4+0 | 8+0+1+0+0 | 16+8+2+3+0 | 12+8+2+1+0 | 0+12+1+3+0

=>

26	4	24	15	20
20	23	20	17	18
27	22	23	14	20
31	22	32	24	23
19	9	29	23	16

```
>> C=A*B
C =

   26    4   24   15   20
   20   23   20   17   18
   27   22   23   14   20
   31   22   32   24   23
   19    9   29   23   16
```

- 비교 결과 -

rand(5)으로 구한 매트릭스 A, B의 곱의 결과와 프로그램에서 도출한 결과가 일치하다.

1-b)

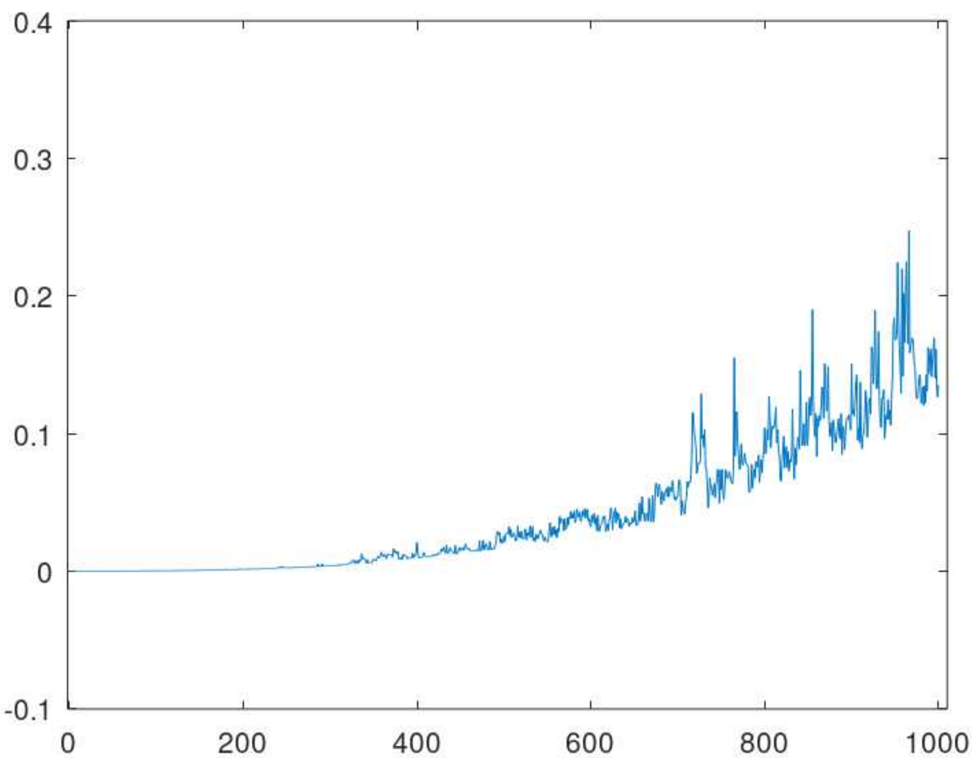
<u>소스코드</u>

tictoc.m

```
clear all
for n=2:1000
a(n)=n;
tic;
A=rand(n);
B=rand(n);
C=A*B;
t(n) = toc;
end
plot(a,t);
xlim([-2 1010]);
ylim([-0.1 0.4]);
```

표본 2x2 정방행렬 -> 1000x1000 정방행렬의 곱
x축 -2~1010 까지
y축 -0.1~0.4 까지

결과 ->



---------그래프---------

EXERCISES 8.13

1 Perform three iterations of the methods of Jacobi and Gauss–Seidel to obtain approximate solutions of the following. In each case, use an initial guess of

$$x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$$

(a) $4x + y + z = -1$
$x + 6y + 2z = 0$
$x + 2y + 4z = 1$

(b) $5x + y - z = 4$
$x - 4y + z = -4$
$2x + 2y - 4z = -6$

(c) $4x + y + z = 17$
$x + 3y - z = 9$
$2x - y + 5z = 1$

2) 위의문제를 풀어라

a) 위의 문제를 풀수 있는 자코비방법, 가우스-자이델 방법의 프로그램을 작성하고 위의 결과를 비교하라.

b) 위의문제를 $A^{-1}b$ 또는 $A\backslash b$ 로 풀어서 위의 결과와 비교하라

c) A 의 차원을 2에서 증가하며 자코비, 가우스-자이델, $A^{-1}b$로 풀어 결과를 비교하고 소요시간을 측정하여 그림으로 표시하라. (n 차원의 매트릭스 A 는 rand(n)+eye(n) 으로 하고 b 의 요소는 모두 1 로 하여 계산하라)

2-a) 자코비방법

접근 1. Jacobi Method

자코비 방법은 연립방정식을 풀기 위한 반복법으로 x, y, z의 초기 값을 가정하고 새로 계산된 x값을 다음 단계의 계산에서 대입하는 방법.

$$a_1x_n + b_1y_n + c_1z_n = d_1 \;\;\rightarrow\;\; x_{n+1} = \frac{d_1 - b_1y_n - c_1z_n}{a_1}$$

$$a_2x_n + b_2y_n + c_2z_n = d_2 \;\;\rightarrow\;\; y_{n+1} = \frac{d_2 - a_2x_n - c_2z_n}{b_2}$$

$$a_3x_n + b_3y_n + c_3z_n = d_3 \;\;\rightarrow\;\; z_{n+1} = \frac{d_3 - b_3y_n - a_3x_n}{c_3}$$

여기서 x_1, y_1, z_1을 구하고 이것을 대입하여 x_2, y_2, z_2의 값을 도출 해낸다.

반복하여 x_n, y_n, z_n 까지 반복하며 한 값에 수렴 할 때 까지 찾아나가는 방법이다.

접근 2. Jacobi Method로 해 구하기 (a)

$4x + \;\; y + \;\; z = -1$ -> $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 으로 가정
$x + 6y + 2z = \;\; 0$
$x + 2y + 4z = \;\; 1$

$\rightarrow$

$$x_1 = \frac{-1 - y_0 - z_0}{4},\; y_1 = \frac{0 - x_0 - 2z_0}{6},\; z_1 = \frac{1 - 2y_0 - x_0}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1}{4} = -0.25,\;\; y_1 = \frac{0}{6} = 0,\;\; z_1 = \frac{1}{4} = 0.25$$

위와 같은 방식으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{-1}{4} = -0.25$	$x_1 = \frac{-1-y_0-z_0}{4}$
		$y_1 = 0$	$y_1 = \frac{0-x_0-2z_0}{6}$
		$z_1 = \frac{1}{4} = 0.25$	$z_1 = \frac{1-2y_0-x_0}{4}$
2	$x_1 = -0.25$ $y_1 = 0$ $z_1 = 0.25$	$x_2 = \frac{-1-0-0.25}{4} = -0.3125$	$x_2 = \frac{-1-y_1-z_1}{4}$
		$y_2 = \frac{0-(-0.25)-2(0.25)}{6} = -0.0416$	$y_2 = \frac{0-x_1-2z_1}{6}$
		$z_2 = \frac{1-2(0)-(-0.25)}{4} = 0.3125$	$z_2 = \frac{1-2y_1-x_1}{4}$
3	$x_2 = -0.3125$ $y_2 = -0.0416$ $z_2 = 0.3125$	$x_3 = \frac{-1-(-0.041\dot{6})-(0.3125)}{4}$ $= -0.317708\dot{3}$	$x_3 = \frac{-1-y_2-z_2}{4}$
		$y_3 = \frac{0-(-0.3125)-2(0.3125)}{6}$ $= -0.052083$	$y_3 = \frac{0-x_2-2z_2}{6}$
		$z_3 = \frac{1-2(-0.041\dot{6})-(-0.3125)}{4}$ $= 0.348958\dot{3}$	$z_3 = \frac{1-2y_2-x_2}{4}$

```
n       x, y, z

1
decical
  -0.250000000000000
                   0
   0.250000000000000
fraction
       -1/4
          0
        1/4
2
decical
  -3.125000000000000e-01
  -4.166666666666666e-02
   3.125000000000000e-01
fraction
      -5/16
      -1/24
       5/16
3
decical
  -3.177083333333333e-01
  -5.208333333333334e-02
   3.489583333333333e-01
fraction
    -61/192
      -5/96
     67/192
17
decical
  -3.243230730948942e-01
  -6.756623385674872e-02
   3.648664127349466e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
18
decical
  -3.243250447195495e-01
  -6.756829206249983e-02
   3.648638852020979e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
19
decical
  -3.243238982848995e-01
  -6.756712094744105e-02
   3.648654072111372e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

=> n>17 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$$\therefore x = \frac{-12}{37}, y = \frac{-5}{74}, z = \frac{27}{74} \text{ 에 수렴}$$

Jacobi Method로 해 구하기 (b)

$$5x + y - z = 4 \quad \text{->}\ x_0 = y_0 = z_0 = 0 \text{ 으로 가정}$$
$$x - 4y + z = -4$$
$$2x + 2y - 4z = -6$$
➜

$$x_1 = \frac{4 - y_0 + z_0}{5},\ y_1 = \frac{4 + x_0 + z_0}{4},\ z_1 = \frac{6 + 2y_0 + 2x_0}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{5} = 0.8,\quad y_1 = \frac{4}{4} = 1,\quad z_1 = \frac{6}{4} = 1.5$$

위와 같은 방식으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{4}{5} = 0.8$	$x_1 = \frac{4 - y_0 + z_0}{5}$
		$y_1 = \frac{4}{4} = 1$	$y_1 = \frac{4 + x_0 + z_0}{4}$
		$z_1 = \frac{6}{4} = 1.5$	$z_1 = \frac{6 + 2y_0 + 2x_0}{4}$
2	$x_1 = 0.8$ $y_1 = 1$ $z_1 = 1.5$	$x_2 = \frac{4 - 1 + 1.5}{5} = 0.9$	$x_2 = \frac{4 - y_1 + z_1}{5}$
		$y_2 = \frac{4 + 0.8 + 1.5}{4} = 1.575$	$y_2 = \frac{4 + x_1 + z_1}{4}$
		$z_2 = \frac{6 + 2 + 1.6}{4} = 2.4$	$z_2 = \frac{6 + 2y_1 + 2x_1}{4}$
3	$x_2 = 0.9$ $y_2 = 1.575$ $z_2 = 2.4$	$x_3 = \frac{4 - 1.575 + 2.4}{5} = 0.965$	$x_3 = \frac{4 - y_2 + z_2}{5}$
		$y_3 = \frac{4 + 0.9 + 2.4}{4} = 1.825$	$y_3 = \frac{4 + x_2 + z_2}{4}$
		$z_3 = \frac{6 + 2 \times 1.575 + 1.8}{4} = 2.7375$	$z_3 = \frac{6 + 2y_2 + 2x_2}{4}$

```
1
decical
   0.800000000000000
   1.000000000000000
   1.500000000000000
fraction
        4/5
          1
        3/2
2
decical
   0.900000000000000
   1.575000000000000
   2.400000000000000
fraction
       9/10
      63/40
       12/5
3
decical
   0.965000000000000
   1.825000000000000
   2.737500000000000
fraction
    193/200
      73/40
     219/80
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

```
10
decical
   0.999906210937500
   1.999601396484375
   2.999437265625000
fraction
          1
          2
          3
11
decical
   0.999967173828125
   1.999835869140625
   2.999753803710937
fraction
          1
          2
          3
12
decical
   0.999983586914063
   1.999930244384766
   2.999901521484375
fraction
          1
          2
          3
```

=> n>10 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$\therefore x=1, y=2, z=3$에 수렴

Jacobi Method로 해 구하기 (c)

$$\begin{aligned} 4x + \ y + \ z &= \ 17 \\ x + 3y - \ z &= \ 9 \\ 2x - \ y + 5z &= \ 1 \end{aligned}$$ -> $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 으로 가정

➜

$$x_1 = \frac{17 - y_0 - z_0}{4}, \ y_1 = \frac{9 - x_0 + z_0}{3}, \ z_1 = \frac{1 + y_0 - 2x_0}{5}$$

$$x_1 = \frac{17}{4} = 4.25, \ \ y_1 = \frac{9}{3} = 3, \ \ z_1 = \frac{1}{5} = 0.2$$

위와 같은 방식으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{17}{4} = 4.25$	$x_1 = \frac{17 - y_0 - z_0}{4}$
		$y_1 = \frac{9}{3} = 3$	$y_1 = \frac{9 - x_0 + z_0}{3}$
		$z_1 = \frac{1}{5} = 0.2$	$z_1 = \frac{1 + y_0 - 2x_0}{5}$
2	$x_1 = 4.25$ $y_1 = 3$ $z_1 = 0.2$	$x_2 = \frac{17 - 3 - 0.2}{4} = 3.45$	$x_2 = \frac{17 - y_1 - z_1}{4}$
		$y_2 = \frac{9 - 4.25 + 0.2}{3} = 1.65$	$y_2 = \frac{9 - x_1 + z_1}{3}$
		$z_2 = \frac{1 + 3 - 2(4.25)}{5} = -0.9$	$z_2 = \frac{1 + y_1 - 2x_1}{5}$
3	$x_2 = 3.45$ $y_2 = 1.65$ $z_2 = -0.9$	$x_3 = \frac{17 - 1.65 + 0.9}{4} = 4.0625$	$x_3 = \frac{17 - y_2 - z_2}{4}$
		$y_3 = \frac{9 - 3.45 - 0.9}{3} = 1.55$	$y_3 = \frac{9 - x_2 + z_2}{3}$
		$z_3 = \frac{1 + 1.65 - 2(3.45)}{5} = -0.85$	$z_3 = \frac{1 + y_2 - 2x_2}{5}$

```
n      x, y, z

1
decical
   4.25000000000000
   3.00000000000000
   0.20000000000000
fraction
       17/4
          3
        1/5
2
decical
   3.45000000000000
   1.65000000000000
  -0.90000000000000
fraction
      69/20
      33/20
      -9/10
3
decical
   4.06250000000000
   1.55000000000000
  -0.85000000000000
fraction
      65/16
      31/20
     -17/20
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

```
18
decical
   4.285625543212890
   1.142964670166015
  -1.285615980957031
fraction
       30/7
        8/7
       -9/7
19
decical
   4.285662827697754
   1.142919491943360
  -1.285657283251953
fraction
       30/7
        8/7
       -9/7
20
decical
   4.285684447827149
   1.142893296350098
  -1.285681232690430
fraction
       30/7
        8/7
       -9/7
```

=> n>18 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$$\therefore x = \frac{30}{7}, y = \frac{8}{7}, z = \frac{-9}{7}$$ 에 수렴

Jacobi Method - Octave Source

```
clear all
clc
format long
A=[4,1,1;1,3,-1;2,-1,5]; % x, y, z 값
b=[17; 9; 1]; % x+y+z 의 값
jacobi=[0; 0; 0]; %반복법을 위한 jacobi matrix
N=diag(diag(A)); %x1, y1, z1을 제외한 x,y,z를 0으로 가정 한 초기 diag matrix
P=N-A; % 치환과정
n=1;
fprintf('n         x, y, z \n\n')
for k=1:20
    jacobi=(N)\(P*jacobi+b); % Xn+1 에 Xn을 대입하는 과정
    fprintf("%0.0f \n",n);
    format long % 소수표현
    fprintf("decical \n");
    disp(jacobi);
    format rat % 분수 표현
    fprintf("fraction \n");
    disp(jacobi);
    n=n+1;
end
```

2-a) 가우스-자이델 방법

접근 1. Gauss-Seidel Method

가우스-자이델 방법은 x, y, z 의 초기값을 가정하고
새로 계산 된 x, y, z를 바로 다음 방정식 x, y, z값에 대입하는 방식

$$a_1x_n + b_1y_n + c_1z_n = d_1 \rightarrow x_{n+1} = \frac{d_1 - b_1y_n - c_1z_n}{a_1}$$

$$a_2x_n + b_2y_n + c_2z_n = d_2 \rightarrow y_{n+1} = \frac{d_2 - a_2x_{n+1} - c_2z_n}{b_2}$$

$$a_3x_n + b_3y_n + c_3z_n = d_3 \rightarrow z_{n+1} = \frac{d_3 - b_3y_{n+1} - a_3x_{n+1}}{c_3}$$

여기서 x_1, y_1, z_1을 구하고 이것을 대입하여 x_2, y_2, z_2의 값을 도출 해낸다.

반복하여 x_n, y_n, z_n 까지 반복하며 한 값에 수렴 할 때 까지 찾아나가는 방법이다.

접근 2. 수렴조건 만족 확인

수렴 조건은 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ 로 대각의 수가 행의 나머지 수의 합보다 커야함

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= -1 \\ x + 6y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$ 에서

1행 -> 4 > 1+1 -- true
2행 -> 6 > 1+2 -- true
3행 -> 4 > 1+2 -- true

접근 3. Gauss-Seidel로 해 구하기(a)

$$4x + \ \ y + \ \ z = -1 \quad \text{->} \ x_0 = y_0 = z_0 = 0 \ \text{으로 가정}$$
$$x + 6y + 2z = \ \ 0$$
$$x + 2y + 4z = \ \ 1$$

➜

$$x_1 = \frac{-1 - y_0 - z_0}{4}, \ y_1 = \frac{0 - x_1 - 2z_0}{6}, \ z_1 = \frac{1 - 2y_1 - x_1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1}{4} = -0.25, \quad y_1 = \frac{0 - (-0.25)}{6} = 0.041\dot{6},$$

$$z_1 = \frac{1 - 2(0.041\dot{6}) - (-0.25)}{4} = 0.291\dot{6}$$

위와 같은 방법으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{-1}{4} = -0.25$	$x_1 = \frac{-1 - y_0 - z_0}{4}$
		$y_1 = \frac{0 - (-0.25)}{6} = 0.041\dot{6}$	$y_1 = \frac{0 - x_1 - 2z_0}{6}$
		$z_1 = \frac{1 - 2(0.041\dot{6}) - (-0.25)}{4} = 0.291\dot{6}$	$z_1 = \frac{1 - 2y_1 - x_1}{4}$
2	$x_1 = -0.25$ $y_1 = 0.041\dot{6}$ $z_1 = 0.291\dot{6}$	$x_2 = \frac{-1 - 0.041\dot{6} - 0.291\dot{6}}{4} = -0.\dot{3}$	$x_2 = \frac{-1 - y_1 - z_1}{4}$
		$y_2 = \frac{0.3125 - 2(0.291\dot{6})}{6} = -0.041\dot{6}$	$y_2 = \frac{0 - x_2 - 2z_1}{6}$
		$z_2 = \frac{1 + 2(0.041\dot{6}) + 0.\dot{3}}{4} = 0.3541\dot{6}$	$z_2 = \frac{1 - 2y_2 - x_2}{4}$
3	$x_2 = -0.\dot{3}$ $y_2 = -0.041\dot{6}$ $z_2 = 0.3541\dot{6}$	$x_3 = \frac{-1 + 0.041\dot{6} - (0.3541\dot{6})}{4}$ $= -0.328125$	$x_3 = \frac{-1 - y_2 - z_2}{4}$
		$y_3 = \frac{+0.328125 - 2(0.3541\dot{6})}{6}$ $= -0.0633680\dot{5}$	$y_3 = \frac{0 - x_3 - 2z_2}{6}$
		$z_3 = \frac{1 + 2(0.0633680\dot{5}) + 0.328125}{4}$ $= 0.3637152\dot{7}$	$z_3 = \frac{1 - 2y_3 - x_3}{4}$

```
1 decical
  -2.500000000000000e-01
   4.166666666666666e-02
   2.916666666666667e-01
fraction
       -1/4
       1/24
       7/24
2 decical
  -3.333333333333334e-01
  -4.166666666666666e-02
   3.541666666666667e-01
fraction
       -1/3
      -1/24
      17/48
3 decical
  -3.281250000000000e-01
  -6.336805555555555e-02
   3.637152777777778e-01
fraction
     -21/64
   -73/1152
   419/1152
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

```
7 decical
  -3.243249963831019e-01
  -6.756855529031636e-02
   3.648655267409336e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
8 decical
  -3.243242428626543e-01
  -6.756780176986882e-02
   3.648649616005980e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
9 decical
  -3.243242899576823e-01
  -6.756760554058561e-02
   3.648648752597134e-01
fraction
     -12/37
      -5/74
      27/74
```

=> n>7 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$$\therefore x = \frac{-12}{37}, y = \frac{-5}{74}, z = \frac{27}{74}$$ 에 수렴

=> Gauss(7) == Jacobi(17)

Gauss-Seidel로 해 구하기 (b)

$5x + y - z = 4$ -> $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 으로 가정 $x - 4y + z = -4$ $2x + 2y - 4z = -6$ ➜ $x_1 = \frac{4 - y_0 + z_0}{5}$, $y_1 = \frac{4 + x_1 + z_0}{4}$, $z_1 = \frac{6 + 2y_1 + 2x_1}{4}$ $x_1 = \frac{4}{5} = 0.8$, $y_1 = \frac{4 + 0.8}{4} = 1.2$, $z_1 = \frac{6 + 1.6 + 2.4}{4} = 2.5$

위와 같은 방식으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{4}{5} = 0.8$	$x_1 = \frac{4 - y_0 + z_0}{5}$
		$y_1 = \frac{4 + 0.8}{4} = 1.2$	$y_1 = \frac{4 + x_1 + z_0}{4}$
		$z_1 = \frac{6 + 1.6 + 2.4}{4} = 2.5$	$z_1 = \frac{6 + 2y_1 + 2x_1}{4}$
2	$x_1 = 0.8$ $y_1 = 1.2$ $z_1 = 2.5$	$x_2 = \frac{4 - 1.2 + 2.5}{5} = 1.06$	$x_2 = \frac{4 - y_1 + z_1}{5}$
		$y_2 = \frac{4 + 1.2 + 2.5}{4} = 1.89$	$y_2 = \frac{4 + x_2 + z_1}{4}$
		$z_2 = \frac{6 + 2(1.89) + 2(1.06)}{4} = 2.975$	$z_2 = \frac{6 + 2y_2 + 2x_2}{4}$
3	$x_2 = 1.06$ $y_2 = 1.89$ $z_2 = 2.975$	$x_3 = \frac{4 - 1.89 + 2.975}{5} = 1.017$	$x_3 = \frac{4 - y_2 + z_2}{5}$
		$y_3 = \frac{4 + 1.017 + 2.975}{4} = 1.998$	$y_3 = \frac{4 + x_3 + z_2}{4}$
		$z_3 = \frac{6 + 2(1.998) + 2(1.017)}{4} = 3.0075$	$z_3 = \frac{6 + 2y_3 + 2x_3}{4}$

```
1 decical
   0.800000000000000
   1.200000000000000
   2.500000000000000
fraction
        4/5
        6/5
        5/2
2 decical
   1.060000000000000
   1.890000000000000
   2.975000000000000
fraction
      53/50
    189/100
     119/40
3 decical
   1.017000000000000
   1.998000000000000
   3.007500000000000
fraction
    359/353
    999/500
   1203/400
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

```
5 decical
   0.999955000000000
   2.000520000000000
   3.000237500000000
fraction
          1
          2
          3
6 decical
   0.999943500000000
   2.000045250000000
   2.999994375000000
fraction
          1
          2
          3
```

=> n>5 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$\therefore x = 1, y = 2, z = 3$ 에 수렴

Gauss(5) == Jacobi(10)

Gauss-Seidel로 해 구하기 (c)

$4x + y + z = 17$ -> $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 으로 가정
$x + 3y - z = 9$
$2x - y + 5z = 1$
➜

$$x_1 = \frac{17 - y_0 - z_0}{4},\ y_1 = \frac{9 - x_1 + z_0}{3},\ z_1 = \frac{1 + y_1 - 2x_1}{5}$$

$$x_1 = \frac{17}{4} = 4.25,\quad y_1 = \frac{9 - 4.25}{3} = 1.58\dot{3},$$

$$z_1 = \frac{1 + 1.58\dot{3} - 2(4.25)}{5} = -1.18\dot{3}$$

위와 같은 방식으로 도출

	x	계산	비고
1	$x_0 = y_0 = z_0 = 0$	$x_1 = \frac{17}{4} = 4.25$	$x_1 = \frac{17 - y_0 - z_0}{4}$
		$y_1 = \frac{9 - 4.25}{3} = 1.58\dot{3}$	$y_1 = \frac{9 - x_1 + z_0}{3}$
		$z_1 = \frac{1 + 1.58\dot{3} - 2(4.25)}{5} = -1.18\dot{3}$	$z_1 = \frac{1 + y_1 - 2x_1}{5}$
2	$x_1 = 4.25$ $y_1 = 1.58\dot{3}$ $z_1 = -1.18\dot{3}$	$x_2 = \frac{17 - 1.58\dot{3} + 1.18\dot{3}}{4} = 4.15$	$x_2 = \frac{17 - y_1 - z_1}{4}$
		$y_2 = \frac{9 - 4.15 - 1.18\dot{3}}{3} = 1.2\dot{2}$	$y_2 = \frac{9 - x_2 + z_1}{3}$
		$z_2 = \frac{1 + 1.\dot{2} - 2(4.15)}{5} = -1.21\dot{5}$	$z_2 = \frac{1 + y_2 - 2x_2}{5}$
3	$x_2 = 4.15$ $y_2 = 1.\dot{2}$ $z_2 = -1.21\dot{5}$	$x_3 = \frac{17 - 1.\dot{2} + 1.21\dot{5}}{4} = 4.248\dot{3}$	$x_3 = \frac{17 - y_2 - z_2}{4}$
		$y_3 = \frac{9 - 4.248\dot{3} - 1.21\dot{5}}{3} = 1.178\dot{7}\dot{0}\dot{3}$	$y_3 = \frac{9 - x_3 + z_2}{3}$
		$z_3 = \frac{1 + 1.178\dot{7}\dot{0}\dot{3} - 2(4.248\dot{3})}{5}$ $= -1.263\dot{5}\dot{9}\dot{2}$	$z_3 = \frac{1 + y_3 - 2x_3}{5}$

```
1 decical
   4.250000000000000
   1.583333333333333
  -1.183333333333333
fraction
       17/4
      19/12
     -71/60
2 decical
   4.150000000000000
   1.222222222222222
  -1.215555555555556
fraction
      83/20
       11/9
   -547/450
3 decical
   4.248333333333333
   1.178703703703704
  -1.263592592592593
fraction
   2549/600
    310/263
  -1069/846
```

=> x, y, z 가 첫 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 두 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> x, y, z 가 세 번째 일 때 위에서 도출한 결과와 같음

=> 위와 같은 결과로 x가 수렴하는 곳을 찾을 수 있음.

....

```
9 decical
   4.285628673927754
   1.142931173896256
  -1.285665234791851
fraction
       30/7
        8/7
       -9/7
10 decical
   4.285683515223899
   1.142883749994750
  -1.285696656090610
fraction
       30/7
        8/7
       -9/7
>> |
```

=> n>9 일 때 x, y, z의 값이 같음을 알 수 있음.

$$\therefore x = \frac{30}{7}, y = \frac{8}{7}, z = \frac{-9}{7} \text{에 수렴}$$

Gauss(9) == Jacobi(18)

가우스-자이델 옥타브 코드

```
clear all
clc
format long
A=[4,1,1;1,6,2;1,2,4];
b=[-1;0;1];
gauss=[0; 0; 0];
N=tril(A); %첫 째행 y,z 제외, 둘 째행 z 제외 => 하삼각행렬
P=N-A; %역수
n=1;
fprintf('n        x,y,z \n\n')
for k=1:10
    gauss=(N)\(P*gauss+b); %자코비와 마찬가지로 다음행에 대입
    fprintf('%0.0f ',n);
    format long
    fprintf("decical \n");
    disp(gauss);
    format rat
    fprintf("fraction \n");
    disp(gauss);
    n=n+1;
end
```

2-b)

$A^{-1}b$ or A/b ==> A^-1*b 와 A\b 는 같은 값을 가지므로 A^-1 ^ b 의 경우만 도출

(a)

$$\begin{aligned} 4x + \ \ y + \ z &= -1 \\ x + 6y + 2z &= \ \ 0 \\ x + 2y + 4z &= \ \ 1 \end{aligned}$$ 의 역행렬

Matrix A = A^T

4	1	1
1	6	2
1	2	4

=> A_{11}=(6*4-2*2) A_{12}=(1*4-2*1) A_{13}=(1*2-6*1)
A_{21}=(1*4-1*2) A_{22}=(4*4-1*1) A_{23}=(4*2-1*1)
$A3_1$=(1*2-1*6) A_{32}=(4*2-1*1) A_{33}=(4*6-1*1)

=> det = 74

Matrix M (소행렬)

20	2	-4
2	15	7
-4	7	23

X

+	-	+
-	+	-
+	-	+

=

Adj(A) - 여인수 행렬

20	-2	-4
-2	15	-7
-10	-7	23

여인수 행렬 * 1/det = 역행렬

20	-2	-4
-2	15	-7
-4	-7	23

X 1/74 =

$\frac{10}{37}$	$-\frac{1}{37}$	$-\frac{2}{37}$
$-\frac{1}{37}$	$\frac{15}{74}$	$-\frac{7}{74}$
$-\frac{2}{37}$	$-\frac{7}{74}$	$\frac{23}{74}$

역행렬 $A^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{37} & -\frac{1}{37} & -\frac{2}{37} \\ -\frac{1}{37} & \frac{15}{74} & -\frac{7}{74} \\ -\frac{2}{37} & -\frac{7}{74} & \frac{23}{74} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

=>

$$\begin{bmatrix} -\frac{12}{37} \\ -\frac{5}{74} \\ \frac{27}{74} \end{bmatrix}$$

A_{11} = -10/37+(-2/37)

A_{12} = 1/37+(-7/74)

A_{13} = 2/37+23/74

```
>> A = [4,1,1;1,6,2;1,2,4];
>> b = [-1;0;1];
>> A^-1 * b
ans =

     -12/37
      -5/74
      27/74

>> |
```

비교 결과

Octave의 결과와 풀이의 결과가 일치함을 알 수 있다.

(b)

$$\begin{aligned} 5x + \ \ y - \ \ z &= \ \ \ 4 \\ x - 4y + \ \ z &= -4 \\ 2x + 2y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

(a) 와 같은 풀이로 역행렬 A^{-1}을 구하고 b를 곱하면

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{33} & \frac{1}{33} & -\frac{1}{22} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{5}{33} & -\frac{4}{33} & -\frac{7}{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A_{11} = 28/33-4/33+6/22

```
>> 28/33-4/33+6/22
ans = 1
```

A_{12} = 4/11+12/11+6/11

```
>> 4/11+12/11+6/11
ans = 2
```

A_{13} = 20/33+16/33+42/22

```
>> 20/33+16/33+42/22
ans = 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ===$$

```
>> clear
>> A = [5,1,-1;1,-4,1;2,2,-4]
A =

        5          1          -1
        1         -4           1
        2          2          -4

>> b = [4;-4;-6];
>> A^-1*b
ans =

        1
        2
        3
```

풀이와 Octave의 결과가 일치하다.

c)

$$\begin{aligned} 4x + y + z &= 17 \\ x + 3y - z &= 9 \\ 2x - y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

(a) 와 같은 풀이로 역행렬 A^{-1}을 구하고 b를 곱하면

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{3}{7} & \frac{5}{42} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{11}{42} \end{bmatrix} \text{ X } \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A_{11} = 17/3-9/7-2/21

```
>> 17/3-9/7-2/21
ans = 30/7
```

A_{12} = -17/6+27/7+5/42

```
>> -17/6+27/7+5/42
ans = 8/7
```

A_{13} = -17/6+9/7+11/42

```
>> -17/6+9/7+11/42
ans = -9/7
```

$$\begin{bmatrix} \frac{30}{7} \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

===

```
>> A = [4,1,1;1,3,-1;2,-1,5];
>> b = [17;9;1];
>> A^-1*b
ans =

     30/7
      8/7
     -9/7
```

풀이와 Octave의 결과가 일치하다.

마지막 문제는 해결하지 못했습니다. 죄송합니다.