R E P O R T

[응용수학 문제풀이 및 증명]

학 과	컴퓨터공학부 컴퓨터공학전공
교수님	서경룡 교수님
학 번	201911608
이 름	김지환
제출일	2022.04.24

부경대학교

< 목 차 >

8 Given $f(t) = 2t$, $g(t) = t - 1$ and $h(t) = t^2$ write expressions for

(a) $f(g(t))$ (b) $f(h(t))$
(c) $g(h(t))$ (d) $g(f(t))$
(e) $h(g(t))$ (f) $h(f(t))$
(g) $f(f(t))$ (h) $g(g(t))$
(i) $h(h(t))$ (j) $f(g(h(t)))$
(k) $g(f(h(t)))$ (l) $h(g(f(t)))$

- 풀이 -

a) f(g(t)) = f(t-1)이다. 함수 f는 입력 값의 2배를 반환한다. ∴ f(g(t)) = 2(t-1)

b) f(h(t)) = f(t^2)이다. 함수 f는 입력 값의 2배를 반환한다. ∴ f(h(t)) = $2t^2$

c) g(h(t)) = g(t^2)이다. 함수 g는 입력 값에 1을 빼는 값을 반환한다. ∴ g(h(t)) = t^2-1

d) g(f(t)) = g(2t)이다. 함수 g는 입력 값에 1을 빼는 값을 반환한다. ∴ g(f(t)) = 2t-1

e) h(g(t)) = h(t-1)이다. 함수 h는 입력 값을 제곱 후 반환한다. ∴ h(g(t)) = $(t-1)^2$

f) h(f(t)) = h(2t)이다. 함수 h는 입력 값을 제곱 후 반환한다. ∴ h(f(t)) = $(2t)^2$ = $4t^2$

g) f(f(t)), 함수 f는 입력 값의 2배를 반환한다. f(2t) = 2(2t), ∴ f(f(t)) = 4t

h) g(g(t), 함수 g는 입력 값에 1을 빼는 값을 반환한다. g(t-1) = (t-1)-1, ∴ g(g(t)) = t-2

i) h(h(t)), 함수 h는 입력 값을 제곱 후 반환한다. h(t^2) = $(t^2)^2$, ∴ h(h(t)) = t^4

j) f(g(h(t))), 함수 f(g(t^2))) => f((t^2)-1)) => 2((t^2)-1), ∴ f(g(h(t))) = 2(t^2-1)

k) g(f(h(t))), 함수 g(f(t^2)) => g(2(t^2)) => 2(t^2)-1, ∴ g(f(h(t))) = $2t^2$-1

l) h(g(f(t))), 함수 h(g(2t)) => g((2t)-1) => $((2t)-1)^2$, ∴ h(g(f(t))) = $(2t-1)^2$

12 Given $f(t) = 2t + 3$, $g(t) = 3t$ and $h(t) = f(g(t))$ write expressions for

(a) $h(t)$

(b) $f^{-1}(t)$

(c) $g^{-1}(t)$

(d) $h^{-1}(t)$

(e) $g^{-1}(f^{-1}(t))$

What do you notice about (d) and (e)?

- 풀이 -

a) h(t) = f(g(t))이다.
f(g(t)) => g는 입력값의 3배를 반환 => f(3t),
f(3t) => f는 입력값의 2배 후 3더하기를 반환 => 2(3t)+3,
∴ h(t) = 6t+3

b) f^{-1}(t) => f(t)는 2t+3이므로 f^{-1}(2t+3) = t,
=> f^{-1}(y) = x 꼴에서 y = 2t+3, x = t,
=> t = (y-3)/2 => f^{-1}(y) = (y-3)/2, y를 t로 사용
∴ f^{-1}(t) = (t-3)/2

c) g^{-1}(t) => g(t)는 3t이므로 g^{-1}(3t) = t,
=> g^{-1}(y) = x 꼴에서 y = 3t, x = t,
=> g = y/3 => g^{-1}(y) = (y/3)에서 y를 t로 사용
∴ g^{-1}(t) = t/3

d) h^{-1}(t) => h(t)는 6t+3 이므로 h^{-1}(6t+3) = t,
=> h^{-1}(y) = x 꼴에서 y = 6t+3, x = t,
=> t = (y-3)/6 => f^{-1}(y) = (y-3)/6, y를 t로 사용
∴ h^{-1}(t) = (t-3)/6

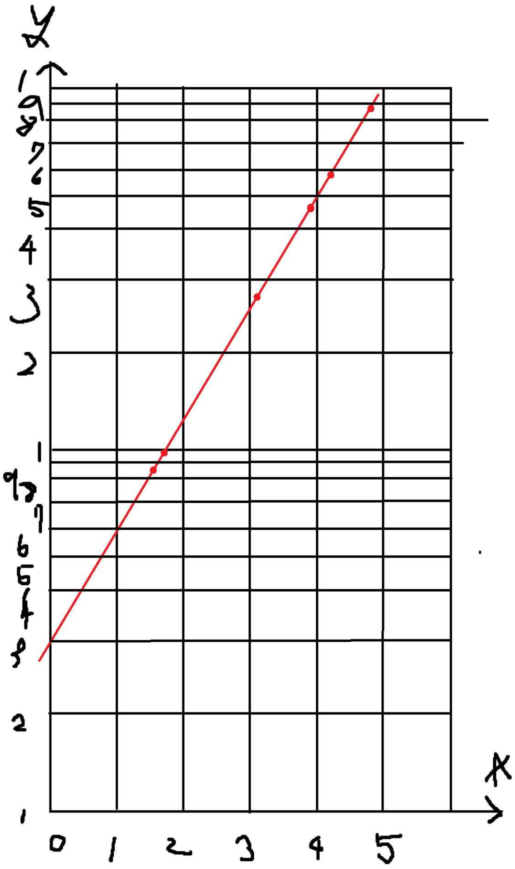
e) g^{-1}(f^{-1}(t)) => f^{-1}(t)는 b)에서 구한 (t-3)/2이다,
=> g^{-1}(t)는 c)에서 구한 t/3이다,
=> g^{-1}(t) = ((t-3)/2)/3
∴ g^{-1}(t) = (t-3)/6

=============

∴ (d) 와 (e)는 같다. h^{-1}(t) = g^{-1}(t)이다.

17 By using log–linear paper find the relationship between x and y given the following table of values:

x	1.5	1.7	3.2	3.9	4.3	4.9
y	8.5	9.7	27.6	44.8	59.1	89.6



- 풀이 -

시작점 - x1, y1 = (1.5, 8.5)
끝 점 - x2, y2 = (4.9, 89.6)

log-linear 그래프에서 y축은 log단위
그래프 => Y=aX+b의 그래프

시작점
log(8.5) = 1.5a+b
끝 점
log(89.6) = 4.9a+b

끝점 - 시작점
= log(89.6)-log(8.5) = 3.4a

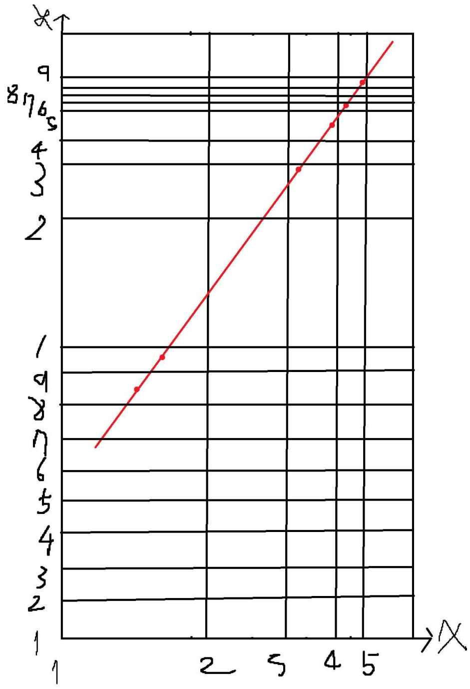
a = (log(89.6)-log(8.5)) / 3.4 = 0.3008.. ,
log(8.5) = 1.5a + b
b = log(8.5) - (0.3008... · 1.5) = 0.4781..

Y = 0.3008x + 0.4781
$y = 10^{Y} = 10^{\log y} = 10^{0.3008x + 0.4781} = 10^{0.4781} \cdot (10^{0.3008})^{x} = 3.007.. \cdot (1.999..)^{x}$

$\therefore\ 3(2^{x})$

18 By using log–log paper find the relationship between x and y given the following table of values:

x	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
y	13.0	19.0	25.9	33.6	42.2	51.6



- 풀이 -

시작점 - x1, y1 = (2.0, 13.0)
끝 점 - x2, y2 = (4.5, 51.6)

log-linear 그래프에서 y축 x축 둘 다 log단위
그래프 => Y=aX+b의 그래프

시작점
log(13) = log(2)a+b
끝 점
log(51.6) = log(4.5)a+b

끝점 - 시작점
= log(51.6)-log(13) = (log(4.5)-log(2))a

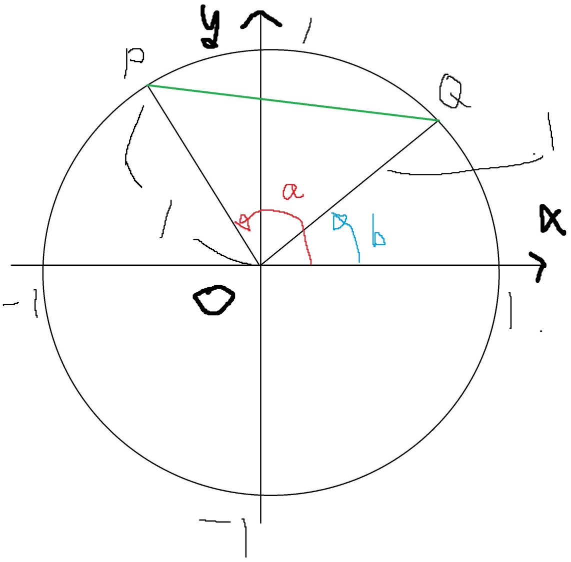
a = (log(51.6)-log(13)) / (log(4.5)-log(2)) = 1.6999...,
log(13) = log(2)a + b
b = log(13) - (1.7 · log(2)) = 0.60219..

Y = 1.7X+0.6
$10^{Y} = y = 10^{1.7X + 0.6} = 10^{0.6} \cdot 10^{1.7\log x} = 4.001\ldots \cdot x^{1.7}$

$\therefore\ 4 \cdot (x^{1.7})$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$
$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$
$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$



- 풀이 -

cos(a-b) = cosAcosB+sinAsinB, proof

P(cos(a), sin(a)), Q(cos(b),sin(b)), ∠a-b
$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(a-b)$ -- ①

피타고라스 $\overline{PQ}^2 = (\cos(a)-\cos(b))^2+(\sin(a)-\sin(b))^2$ -- ②
① 과 ②를 이용,
$(\cos(a)-\cos(b))^2+(\sin(a)-\sin(b))^2 = 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(a-b)$
=> $\cos^2(a)-2\cos(a)\cos(b)+\cos^2(b)+\sin^2(a)-2\sin(a)\sin(b)+\sin(b)^2 = 2-2\cos(a-b)$
=> $2-2(\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)) = 2-2\cos(a-b)$
∴ $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ -------- 증명1

cos(a+b) = cosAcosB-sinAsinB, proof

증명 1에서 b 대신 -b를 대입한다
∴ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ ------ 증명 2

sin(a+b) = sinAcosB+sinBcosA, proof

$\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ -- ③, 증명2에 $a=\pi/2 - a$ 대입
=> $\cos((\pi/2 - a)+b) = \cos(\pi/2-a)\cos(b)-\sin(\pi/2 - a)\sin(b)$
=> $\cos((\pi/2 - a)+b)$를 $\cos(\pi/2-(a-b))$로 바꾸면, ③으로
∴ $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ ------ 증명 3

sin(a-b) = sinAcosB+sinBcosA, proof

증명 3에서 b 대신 -b를 대입한다
∴ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ ----- 증명 4

2sinAcosB = sin(A+B)+sin(A-B), proof

=> 증명 3 + 증명 4
  sin(A+B) = sinAcosB+sinbBcosA
\+ sin(A-B) = sinAcosB-sinBcosA
= sin(A+B)+sin(A-B) = sinAcosB+sinBcosA+sinAcosB-sinBcosA = 2sinAcosB
∴ 2sinAcosB = sin(A+B)+sin(A-B) --- 증명 5

$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$, proof

=> 증명 2 + 증명 1

$\cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B$

$+ \cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B$

$= \cos(A+B)+\cos(A-B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B+(\cos A\cos B+\sin A\sin B) = 2\cos A\cos B$

$\therefore$ $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ --- 증명 6

$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$, proof

=> 증명 1 - 증명 2

$\cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B$

$- \cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B$

$= \cos(A-B)-\cos(A+B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B-(\cos A\cos B-\sin A\sin B) = 2\sin A\sin B$

$\therefore$ $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ --- 증명 6

1 Express the following Cartesian coordinates as cylindrical polar coordinates.

(a) $(-2, -1, 4)$ (b) $(0, 3, -1)$ (c) $(-4, 5, 0)$

- 풀이 -

a) 직교좌표 x=-2, y=-1, z=4에서 원통형 극좌표 전환은 (r,φ,z)이다.

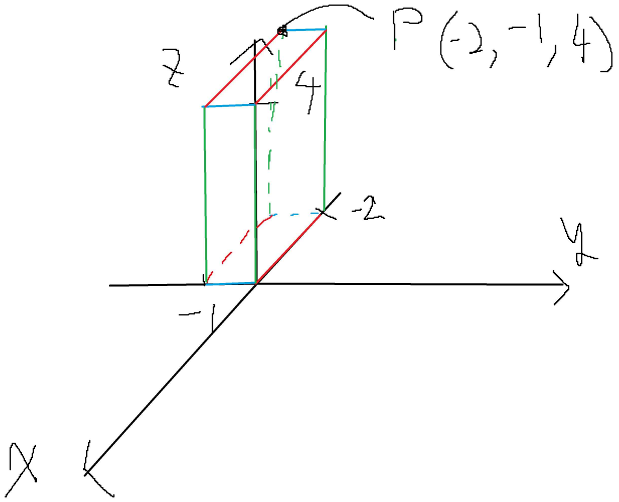
원통 극좌표계 그림을 참고해서

$r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{5}$

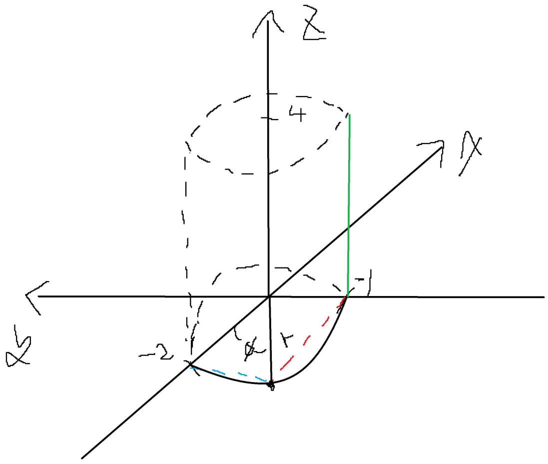
$\varphi = \tan^{2}(-1/-2) = 26.565^\circ$ => x좌표와 y좌표가 음수이므로 제 3사분면이므로 $+\pi$, 206.565°

$z = 4$

∴ cartesian coordinates(-2, -1, 4) => cylindrical polar coordinates($\sqrt{5}$, 206.565˚, 4)



● (-2, -1, 4)를 갖는 직교좌표계



● ($\sqrt{5}$, 206.565˚, 4)를 갖는 극좌표계

b) 직교좌표 x=0, y=3, z=1에서 원통형 극좌표 전환은 (r,φ,z)이다.

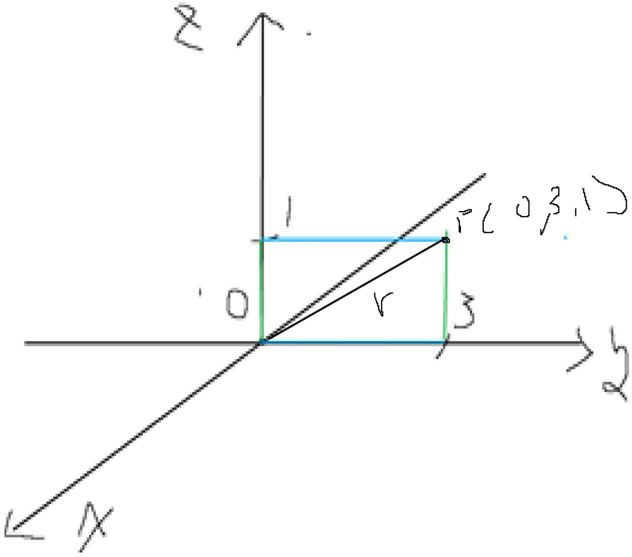
원통 극좌표계 그림을 참고해서

r = $\sqrt{(x^2+y^2)}$ = $\sqrt{9}$ = 3

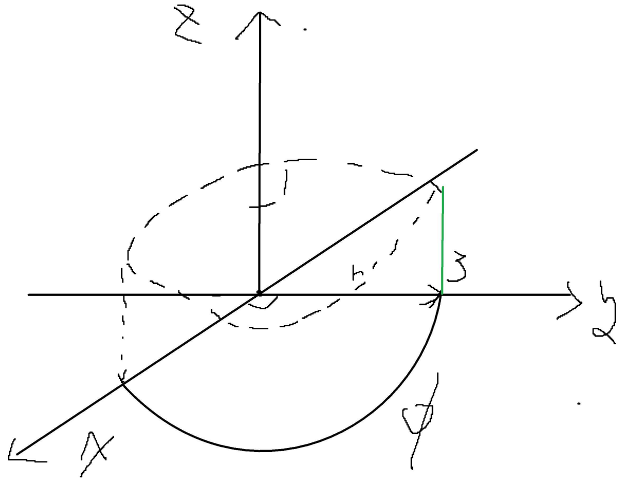
φ = y가 양수이고 x는 0이므로 90˚ 혹은 원통 극좌표계 그림을 통해 90˚임을 알 수 있음.

z = 1

∴ cartesian coordinates(0, 3, 1) => cylindrical polar coordinates(3, 90˚, 1)



● (0, 3, 1)를 갖는 직교좌표계



● (3, 90˚, 1)를 갖는 극좌표계

c) 직교좌표 x=-4, y=5, z=0에서 원통형 극좌표 전환은 (r,φ,z)이다.

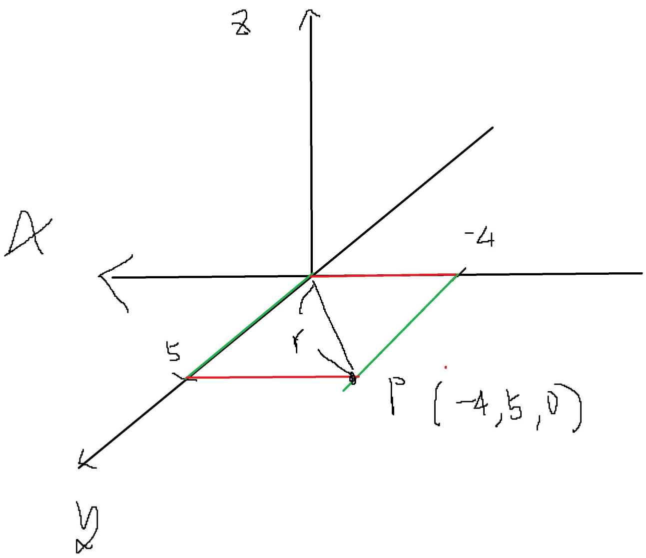
원통 극좌표계 그림을 참고해서

$r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{41}$

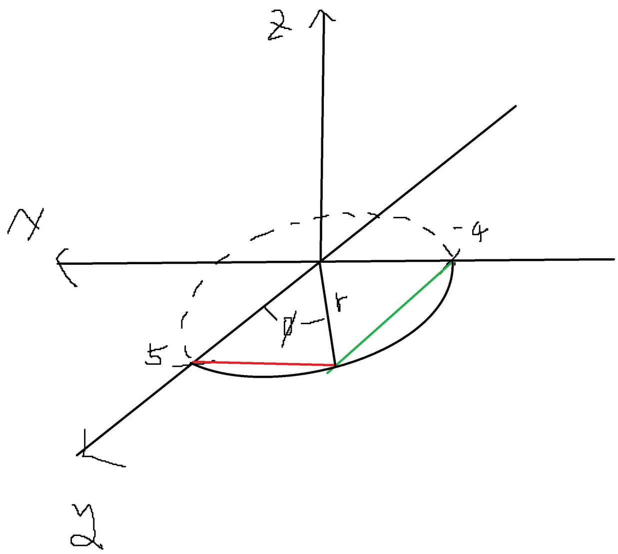
$\varphi = \tan^{-1}(-4/5) = -38.66^\circ$, 제2사분면 이므로 $\pi/2 - \varphi = 128.66^\circ$

$z = 0$

∴ cartesian coordinates(-4, 5, 0) => cylindrical polar coordinates(√41, 128.66˚, 0)



● (-4, 5, 0)를 갖는 직교좌표계



● (√41, 128.66˚, 0)를 갖는 극좌표계

2 Express the following cylindrical polar coordinates as Cartesian coordinates.

(a) $(3, 70°, 7)$ (b) $(1, 200°, 6)$ (c) $(5, 180°, 0)$

- 풀이 -

a) 원통형 극좌표 r=3, φ=70˚, z=7 에서 직교좌표 전환은 (x, y, z)이다.

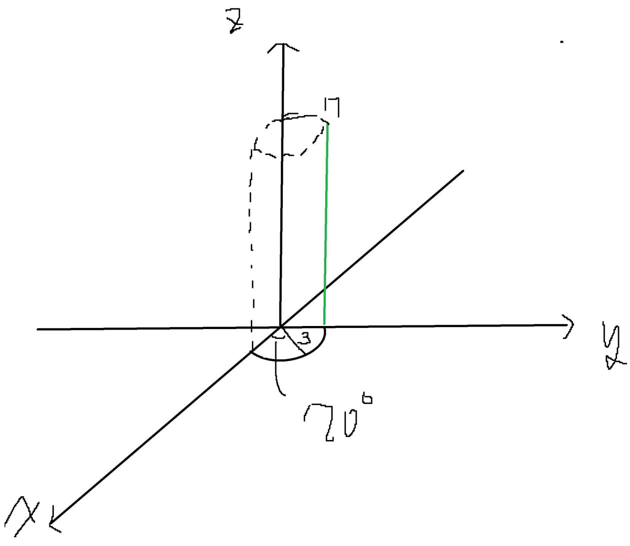
φ = 70˚로 x와 y는 양수임을 알 수 있다.

x = r·cosφ = 3cos(70) = 1.026..

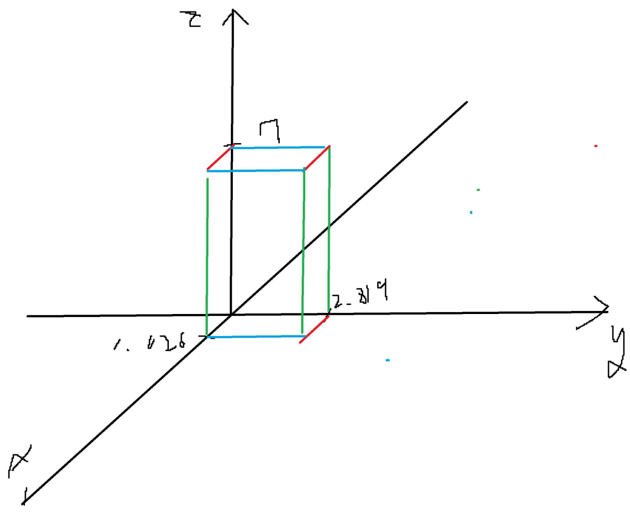
y = r·sinφ = 3sin(70) = 2.819...

z = 7

∴ cylindrical polar coordinates(3, 70˚, 7) => cartesian coordinates(1.026, 2.819, 7)



● (3, 70˚, 7) 를 갖는 극좌표계



● (1.026, 2.819, 7)를 갖는 직교좌표계

b) 원통형 극좌표 r=1, φ=200˚, z=6 에서 직교좌표 전환은 (x, y, z)이다.

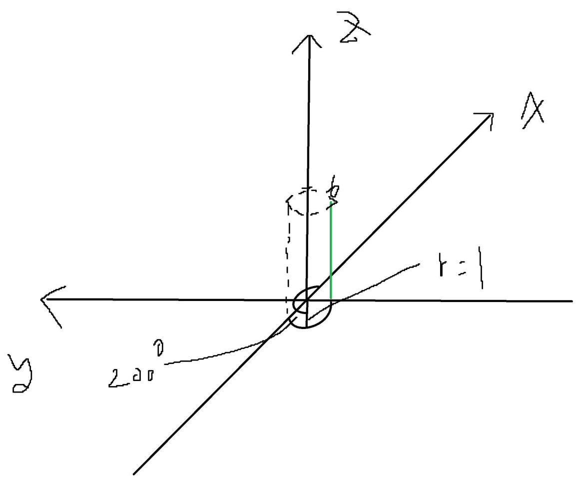
φ = 200˚로 x와 y는 음수임을 알 수 있다.

x = r·cosφ = cos(200) = -0.939..

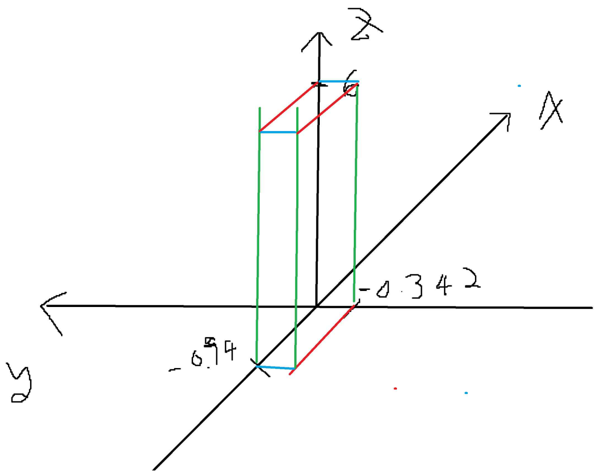
y = r·sinφ = sin(70) = -0.342..

z = 6

∴ cylindrical polar coordinates(1, 200˚, 6) => cartesian coordinates(-0.939, -0.342, 6)



● (1, 200˚, 6) 를 갖는 극좌표계



● (-0.939, -0.342, 6)를 갖는 직교좌표계

c) 원통형 극좌표 r=5, φ=180°, z=0 에서 직교좌표 전환은 (x, y, z)이다.

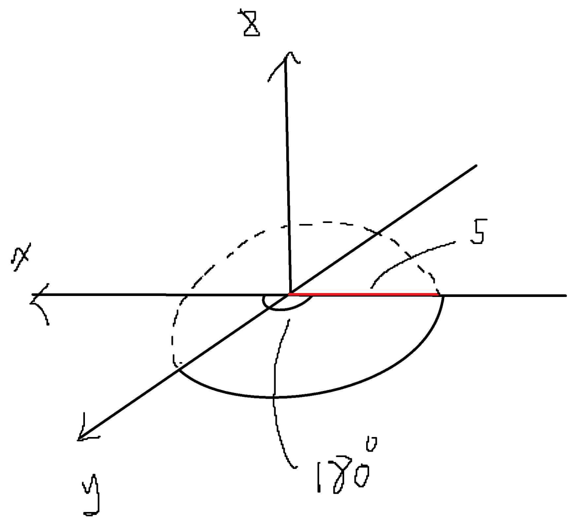
φ = 180°로 x는 음수 y는 0임을 알 수 있다.

x = r·cosφ = r·cos(180) = -r = -5

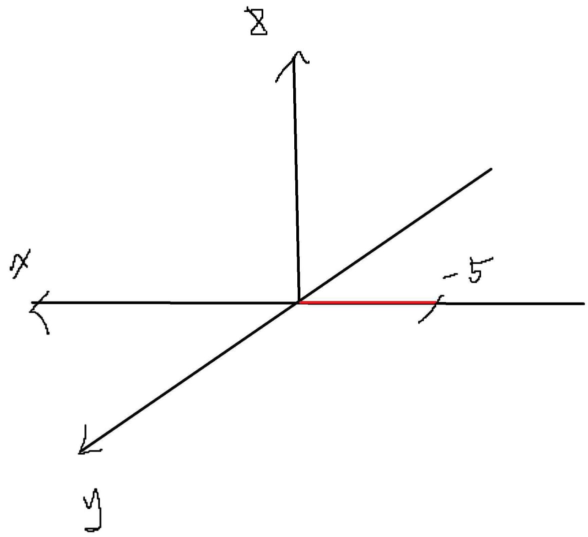
y = r·sinφ = sin(180) = 0

z = 0

∴ cylindrical polar coordinates(5, 180°, 0) => cartesian coordinates(5, 0, 0)



● (5, 180°, 0)를 갖는 극좌표계



● (5, 0, 0)를 갖는 직교좌표계

1 The power series expansion of e^x is given by

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

and is valid for any x. Take four terms of the series when $x = 0, 0.1, 0.5$ and 1, to compare the sum to four terms with the value of e^x obtained from your calculator. Comment upon the result.

- 풀이 -

x가 0일 때,
4개의 항을 이용해 구한 값 : 1 + 0 + 0 + 0 = 1
계산기를 이용해 구한 값 : e^0 = 1

x가 0.1일 때,
4개의 항을 이용해 구한 값 : 1 + 0.1 + 0.01/2 + 0.001/6 = 1.10516..
계산기를 이용해 구한 값 : $e^{0.1}$ = 1.1051709...

x가 0.5일 때,
4개의 항을 이용해 구한 값 : 1 + 0.5 + 0.25/2 + 0.125/6 = 1.64583....
계산기를 이용해 구한 값 : $e^{0.5}$ = 1.64872...

x가 1일 때,
4개의 항을 이용해 구한 값 : 2.6666....
계산기를 이용해 구한 값 : e^1 = 2.71828...

=> e의 지수 x의 값이 증가할수록 e^x의 값과 4개의 항을 이용해 구한 값의 오차가 증가한다.

1 Evaluate

(a) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

- 풀이 -

a) Evaluate

i	j	k
3	1	2
2	1	4

=> (4·1)i-(2·1)i+(2·2)j-(3·4)j+(3·1)k-(1·2)k
= 4i-2i + 4j-12j + 3k-2k
= 2i+(-8j)+k

∴ 2i-8j+k

b) Evaluate

i	j	k
-1	2	-3
-4	0	1

=> (2·1)i-(-3·0)i + (-3·-4)j-(-1·1)j + (-1·0)k-(2·-4)k
= 2i-0i + 12j-(-j) + 0k-(-8k)
= 2i + 13j + 8k

∴ 2i+13j+8k

c) Evaluate

i	j	k
0	1	0
1	0	4

=> (1·4)i-(0·0)i + (0·0)j-(0·4)j + (0·0)k-(1·1)k
= 4i-0i + 0j-0j + 0k-k
= 4i - k

∴ 4i - k

d) Evaluate

i	j	k
3	5	2
-3	-1	4

=> (5·4)i-(2·-1)i + (2·-3)j-(3·4)j + (3·-1)k-(5·-3)k
= 20i-(-2i) + (-6)j-12j + (-3k)-(-15k)
= 22i −18j + 12k

∴ 22i −18j + 12k

2 If $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ and $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, find

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(b) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

- 풀이 -

a) a × b

i	j	k
1	-2	3
2	-1	-1

=> $(a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$

= $(-2\cdot(-1) - 3\cdot(-1))i - (1\cdot(-1) - 3\cdot2)j + (1\cdot(-1) - 2\cdot(-2))k$

= $(2-(-3))i - (-1-6)j + (-1-(-4))k$

= $5i + 7j + 3k$

∴ $5i + 7j + 3k$

b) b × x

i	j	k
2	-1	-1
1	-2	3

=> $(b_2a_3 - b_3a_2)i - (b_1a_3 - b_3a_1)j + (b_1a_2 - b_2a_1)k$

= $(-1\cdot3 - (-1)\cdot-2)i - (2\cdot3 - (-1)\cdot1)j + (2\cdot-2 - (-1)\cdot1)k$

= $(-3-(2))i - (6-(-1))j +(-4-(-1))k$

= $-5i - 7j - 3k$

∴ $-5i - 7j - 3k$

4 Find AB and BA where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- 풀이 -

A

1	3	2
-1	0	4
5	1	-1

×

B

5	2	1
0	3	4
1	3	5

=> $ab_{11} = 1\cdot5+3\cdot0+2\cdot1$ $ab_{12} = 1\cdot2+3\cdot3+2\cdot3$ $ab_{13} = 1\cdot1+3\cdot4+2\cdot5$
$ab_{21} = -1\cdot5+0\cdot0+4\cdot1$ $ab_{22} = -1\cdot2+0\cdot3+4\cdot3$ $ab_{23} = -1\cdot1+0\cdot4+4\cdot5$
$ab_{31} = 5\cdot5+1\cdot0+-1\cdot1$ $ab_{32} = 5\cdot2+1\cdot3+-1\cdot3$ $ab_{33} = 5\cdot1+1\cdot4+-1\cdot5$

∴ AB

7	17	24
-1	10	19
24	10	4

B

5	2	1
0	3	4
1	3	5

×

A

1	3	2
-1	0	4
5	1	-1

=> $ba_{11} = 5\cdot1+2\cdot-1+1\cdot5$ $ba_{12} = 5\cdot3+2\cdot0+1\cdot1$ $ba_{13} = 5\cdot2+2\cdot4+1\cdot-1$
$ba_{21} = 0\cdot1+3\cdot-1+4\cdot5$ $ba_{22} = 0\cdot3+3\cdot0+4\cdot1$ $ba_{23} = 0\cdot2+3\cdot4+4\cdot-1$
$ba_{31} = 1\cdot1+3\cdot-1+5\cdot5$ $ba_{32} = 1\cdot3+3\cdot0+5\cdot1$ $ba_{33} = 1\cdot2+3\cdot4+5\cdot-1$

∴ BA

8	16	17
17	4	8
23	8	9

5 Given that A^2 means the product of a matrix A with itself, find A^2 when $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find A^3.

- 풀이 -

$$A \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

=> $a^2_{11} = 4\cdot4+2\cdot1$ $a^2_{12} = 4\cdot2+2\cdot3$
$a^2_{21} = 1\cdot4+3\cdot1$ $a^2_{22} = 1\cdot2+3\cdot3$

$\therefore\ A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

$$A^2 \times A = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

=> $a^3_{11} = 18\cdot4+14\cdot1$ $a^3_{12} = 18\cdot2+14\cdot3$
$a^3_{21} = 7\cdot4+11\cdot1$ $a^3_{22} = 7\cdot2+11\cdot3$

$\therefore\ A^3 = \begin{pmatrix} 86 & 78 \\ 39 & 47 \end{pmatrix}$

6 If $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ find AB, BA, $A + B$ and $(A + B)^2$. Show that

- 풀이 -

A, B

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline -2 & 4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline -4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

=> $ab_{11} = 1\cdot2+3\cdot-4$ $ab_{12} = 1\cdot1+3\cdot5$
$ab_{21} = -2\cdot2+4\cdot-4$ $ab_{22} = -2\cdot1+4\cdot5$

∴ AB

$$\begin{array}{|c|c|}\hline -10 & 16 \\ \hline -20 & 18 \\ \hline \end{array}$$

B, A

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline -4 & 5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline -2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

=> $ba_{11} = 2\cdot1+1\cdot-2$ $ba_{12} = 2\cdot3+1\cdot4$
$ba_{21} = -4\cdot1+5\cdot-2$ $ba_{22} = -4\cdot3+5\cdot4$

∴ BA

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 10 \\ \hline -14 & 8 \\ \hline \end{array}$$

A, B

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline -2 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline -4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

=> $(a+b)_{11} = 1+2$ $(a+b)_{12} = 3+1$
$(a+b)_{21} = -2+(-4)$ $(a+b)_{22} = 4+5$

∴ A+B

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline -6 & 9 \\ \hline \end{array}$$

A+B, A+B

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline -6 & 9 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline -6 & 9 \\ \hline \end{array}$$

=> $(a+b)^2{}_{11} = 3\cdot3+4\cdot-6$ $(a+b)^2{}_{12} = 3\cdot4+4\cdot9$
$(a+b)^2{}_{21} = -6\cdot3+9\cdot-6$ $(a+b)^2{}_{22} = -6\cdot4+9\cdot9$

∴ $(A+B)^2$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline -15 & 48 \\ \hline -72 & 57 \\ \hline \end{array}$$

3 If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ show that AA^T is a symmetric matrix.

- 풀이 -

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \Rightarrow A^T = \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array}$$

=> $a^t_{11} = a_{11}$, $a^t_{12} = a_{21}$
$a^t_{21} = a_{12}$, $a^t_{22} = a_{22}$

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \times A^T = \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array}$$

=> $(aa^t)_{11} = a\cdot a+b\cdot b$, $(aa^t)_{12} = a\cdot c+\cdot b\cdot d$
$(aa^t)_{21} = c\cdot a+d\cdot b$, $(aa^t)_{22} = c\cdot c+d\cdot d$

∴ AA^T

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a^2+b^2 & ac+bd \\ \hline ac+bd & c^2+d^2 \\ \hline \end{array}$$

=> ii, jj 행 (대각선)을 기준으로 양값이 동일하다.

∴ AA^T 는 symmetric matrix이다.

4 If $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

find A^T, B^T, AB and $(AB)^T$.

Deduce that $(AB)^T = B^T A^T$.

- 풀이 -

A

2	1	3
4	2	1
-1	3	2

=> $a^t_{11}=a_{11}$ $a^t_{12}=a_{21}$ $a^t_{13}=a_{31}$
$a^t_{21}=a_{12}$ $a^t_{22}=a_{22}$ $a^t_{31}=a_{13}$
$a^t_{31}=a_{13}$ $a^t_{32}=a_{23}$ $a^t_{33}=a_{33}$

∴ A^T

2	4	-1
1	2	3
3	1	2

B

1	-7	0
0	2	5
3	4	5

=> $b^t_{11}=b_{11}$ $b^t_{12}=b_{21}$ $b^t_{13}=b_{31}$
$b^t_{21}=b_{12}$ $b^t_{22}=b_{22}$ $b^t_{31}=b_{13}$
$b^t_{31}=b_{13}$ $b^t_{32}=b_{23}$ $b^t_{33}=b_{33}$

∴ B^T

1	0	3
-7	2	4
0	5	5

A

2	1	3
4	2	1
-1	3	2

×

B

1	-7	0
0	2	5
3	4	5

=> $ab_{11}= 2·1+1·0+3·3$ $ab_{12}= 2·-7+1·2+3·4$ $ab_{13}= 2·0+1·5+3·5$
$ab_{21}= 4·1+2·0+1·3$ $ab_{22}= 4·-7+2·2+1·4$ $ab_{23}= 4·0+2·5+1·5$
$ab_{31}= -1·1+3·0+2·3$ $ab_{32}= -1·-7+3·2+2·4$ $ab_{33}= -1·0+3·5+2·5$

AB

11	0	20
7	-20	15
5	21	25

=> $(ab)^t_{11} = ab_{11}$ $(ab)^t_{12} = ab_{21}$ $(ab)^t_{13} = ab_{31}$
$(ab)^t_{21} = ab_{12}$ $(ab)^t_{22} = ab_{22}$ $(ab)^t_{23} = ab_{32}$
$(ab)^t_{31} = ab_{13}$ $(ab)^t_{32} = ab_{23}$ $(ab)^t_{33} = ab_{33}$

∴ $(AB)^T$

11	7	5
0	-20	21
20	15	25

B^T

1	0	3
-7	2	4
0	5	5

×

A^T

2	4	-1
1	2	3
3	1	2

=

B^TA^T

11	7	5
0	-20	21
20	15	25

=> $b^ta^t_{11}= 1·2+0·1+3·3$ $b^ta^t_{12}= 1·4+0·2+3·1$ $b^ta^t_{13}= 1·(-1)+0·3+3·2$
$b^ta^t_{21}= -7·2+2·1+4·3$ $b^ta^t_{22}= -7·4+2·2+4·1$ $b^ta^t_{23}= -7·(-1)+2·3+4·2$
$b^ta^t_{31}= 0·2+5·1+5·3$ $b^ta^t_{32}= 0·4+5·2+5·1$ $b^ta^t_{33}= 0·(-1)+5·3+5·2$

∴ $(AB)^T = B^TA^T$

3 If $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

find $|AB|$, $|BA|$.

- 풀이 -

2x2 행렬식 = ad-bc

A

3	0
-1	4

×

B

7	8
4	3

=> $ab_{11} = 3 \cdot 7 + 0 \cdot 4$ $ab_{12} = 3 \cdot 8 + 0 \cdot 3$
$ab_{21} = -1 \cdot 7 + 4 \cdot 4$ $ab_{22} = -1 \cdot 8 + 4 \cdot 3$

∴ AB

21	24
9	4

∴ $|AB| = 21 \cdot 4 - 24 \cdot 9 = -132$

B

7	8
4	3

×

A

3	0
-1	4

=> $ba_{11} = 7 \cdot 3 + 8 \cdot -1$ $ba_{12} = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 4$
$ba_{21} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot -1$ $ba_{22} = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4$

∴ BA

13	32
9	12

∴ $|BA| = 13 \cdot 12 - 32 \cdot 9 = -132$
=> $|AB| = |BA|$

4 If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

find AB, $|A|$, $|B|$, $|AB|$.

Verify that $|AB| = |A||B|$.

- 풀이 -

A

a	b
c	d

×

B

e	f
g	h

=> $ab_{11} = a \cdot e + b \cdot g$ $ab_{12} = a \cdot f + b \cdot h$
$ab_{21} = c \cdot e + d \cdot g$ $ab_{22} = c \cdot f + d \cdot h$

∴ AB

ae+bg	af+bh
ce+dg	cf+dh

∴ |A| = ad-bc, |B| = eh-fg
∴ |AB| = (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)
= aecf+aedh+bgcf+bgdh – (afce+afdg+bhce+bhdg)
= 동일항 (bgdh – bhdg), (aecf – afce)
= aedh+bgcf-(afdg+bhce) =aedh+bgcf-afdg-bhce

verify |AB| = |A||B|
=> |A||B| = (ad-bc)(eh-fg) = adeh-adfg-bceh+bcfg, 위에서 구한 |AB|와 동일
=> |AB| = |A||B

3 Find the modulus and argument of (a) $z_1 = -\sqrt{3} + j$ and (b) $z_2 = 4 + 4j$. Hence express $z_1 z_2$ and z_1/z_2 in polar form.

- 풀이 -

a) 직교좌표 $z_1 = (-\sqrt{3})+j$ => 극형(r,θ)

x가 음값이므로 실수허수 좌표에서 제 2사분면

$r_1 = \sqrt{((-\sqrt{3})^2+1^2)} = 2$
$\theta_1 = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(1/-\sqrt{3}) = 30°$, 제 2사분면 이므로 $2\pi - 30 = 150°$
$\therefore$ z_1의 극형 = $(2, \angle 150°)$

b) 직교좌표 $z_2 = 4+4j$ => 극형(r,θ)

$r_2 = \sqrt{(4^2+4^2)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$\theta_2 = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(4/4) = \pi/4 = 45°$
$\therefore$ z_2의 극형 = $(4\sqrt{2}, \angle 45°)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle(\theta_1+\theta_2) = 2*4\sqrt{2}\angle(150+45) = 8\sqrt{2}\angle 195°$

$z_1/z_2 = r_1/r_2 \angle(\theta_1-\theta_2) = 2/4\sqrt{2}\angle(150-45) = 1/(2\sqrt{2})\angle 105°$

7 Express

(a) $7 + 5j$ and

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$ in exponential form.

- 풀이 -

오일러 방정식

a)
$z = r(\cos\theta+j\sin\theta) = re^{j\theta}$
$r = \sqrt{(7^2+5^2)} = \sqrt{74}$
$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(5/7) = 35.537...°$ => 0.6202.. radian
$z = \sqrt{74}(\cos(0.62rad)+j\sin(0.62rad)) = \sqrt{74}e^{0.62j}$

b)
y가 음 값이므로 제4사분면
$r = \sqrt{((1/2)^2+(-1/3)^2)} = 0.6009..$
$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}((-1/3)/(1/2))$ => $-33.69..°$ => $-0.588...$ rad
$z = 0.6(\cos(-0.588rad)+j\sin(-0.588rad)) = 0.6e^{-0.588j}$

8 Express $z_1 = 1 - j$ and

$$z_2 = \frac{1+j}{\sqrt{3}-j}$$ in the form $re^{j\theta}$.

- 풀이 -

$z_1 = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$
$r_1 = \sqrt{(1^2+(-1)^2)} = \sqrt{2}$
$\theta_1 = \tan^{-1}(1/-1) = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$

$\therefore z_1 = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+j\sin(-\pi/4)) = \sqrt{2}e^{-(\pi/4)j}$

$z_2 = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$
r = 분자 $\sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$, 분모 $\sqrt{(\sqrt{3}^2+(-1)^2)} = 2$
θ = 분자 $\tan^{-1}(1/1) = \pi/4 \Rightarrow 45^\circ$, 분모 $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) \Rightarrow -\pi/6$

-> 분자를 분자 부분을 θ_n, r_n / 분모 부분을 θ_m, r_m
$z_2 = r_n/r_m \angle \theta_n - \theta_m = \sqrt{2}/2 \angle (\pi/4-(-\pi/6))$
$r_2 = \sqrt{2}/2$
$\theta_2 = 5\pi/12$

$\therefore z_2 = \sqrt{2}/2(\cos(5\pi/12)+j\sin(5\pi/12)) = \sqrt{2}/2e^{(5\pi/12)j}$