R E P O R T

[응용수학 문제풀이 및 증명]

학 과	컴퓨터공학부 컴퓨터공학전공
교수님	서경룡 교수님
학 번	201911608
이 름	김지환
제출일	2022.03.29

< 목 차 >

연습문제 2.4.4

10. 다음 증폭기에서 전압 이득을 데시벨로 구하시오.

a) 입력 신호 = 0.1V, 출력 신호 = 1V
d) 입력 신호 = 60mV, 출력 신호 = 2V

전압 이득(dB) = 20log(V_{Out}/V_{In})

a) 20log(1/0.1) = 20log(10) = 20dB

b) 20log(2/0.06) = 20log(33.333..) = 30.4dB

11. 다음 데이터를 이용해 음성 증폭기(사전 증폭기, 주 증폭기) 각각의 부분에 대한 전압 이득과 전체 전압 이득을 데시벨로 계산하시오.

사전 증폭기 : 입력 신호 = 10mV, 출력 신호 = 200mV
주 증폭기 : 입력신호 = 400mV, 출력 신호 = 3V

사전 증폭기 전압 이득 : 20log(200/10) = 20log(20) = 26dB

주 증폭기 전압 이득 : 20log(3/0.4) = 20log(7.5) = 17.5dB

전체 전압 이득 : 26dB +17.5dB = 43.5dB

연습문제 3.7

1. 아래 파형의 진폭과 각주파수, 주파수, 위상각, 시간차를 말해보시오.

a) 3sin2t	e) 2sin(t-3)	j) 4cos(πt-20)

파형 Asin(ωt+φ), 진폭 = A, 각주파수 = ω(2πf), 주파수 = f, 위상각 = φ, 시간차 = t_2-t_1=0

a)
1. 3sin2t에서 진폭 = 3, 각주파수 = 2, 위상각 = 0임을 알 수 있음.
2. 각주파수 = ω = 2πf = 2에서 f = 1/π, 주파수 = 1/π
3. 시간차 $t_2-t_1=2t_2-(2t_1+0)=0$

∴ 진폭=3, 각주파수=2, 주파수=1/π, 위상각=0, 시간차=0

e)
1. 2sin(t-3)에서 진폭=2, 각주파수=1, 위상각=-3임을 알 수 있음.
2. 각주파수=ω=2πf=1에서 f=1/2π, 주파수=1/2π
3. 시간차 $t_2-t_1=t_2-(t_1-3)=0$ -> $t_2-t_1+3=0$ -> $t_2-t_1=-3$

∴ 진폭=2, 각주파수=1, 주파수=1/2π, 위상각=-3, 시간차=-3

j)
1. 4cos(πt-20)에서 진폭=4, 각주파수=π, 위상각=-20임을 알 수 있음.
2. 각주파수=ω=2πf=π에서 f=π/2π, 주파수=1/2
3. 시간차 $t_2-t_1=(\pi t_2)-(\pi t_1-20)=0$ -> $\pi t_2-\pi t_1+20=0$ -> $\pi(t_2-t_1)=-20$ -> $t_2-t_1=-20/\pi$

∴ 진폭=4, 각주파수=π, 주파수=1/2, 위상각=-20, 시간차=-20/π

5. 아래 파형의 위상각과 시간차에 대해 기술하시오.

(a) 2sin(t+3) (2sint를 기준으로)　　　　(d) cos(2-t) (cos t를 기준으로)

a)
1. 2sint를 기준으로 2sin(t+3)에서 위상각은 3임을 바로 알 수 있다.
2. 시간차 => $t_2-t_1=t_2-(t_1+3)=0$ -> $t_2-t_1-3=0$ -> $t_2-t_1=3$

∴ 위상각 = 3, 시간차 = 3

d)
1. cos t를 기준으로 ω=1이므로 cos(2-1t) -> cos(t-2) 여기서 위상각이 -2임을 알 수 있다.
2. 시간차 => $t_2-t_1=t_2-(t_1-2)=0$ -> $t_2-t_1+2=0$ -> $t_2-t_1=-2$

∴ 위상각 = -2, 시간차 = -2

6. 각각을 Asin(3t+θ)의 형태로 바꾸시오. (단, θ>=0)

a) 2sin3t+3cos3t	c) sin3t-4cos3t

삼각함수 합성공식

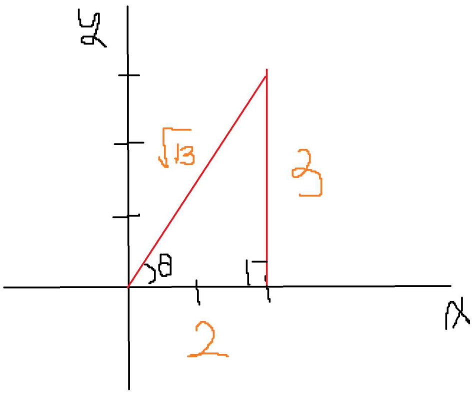
$$(1)\quad a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

$$(\text{단},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

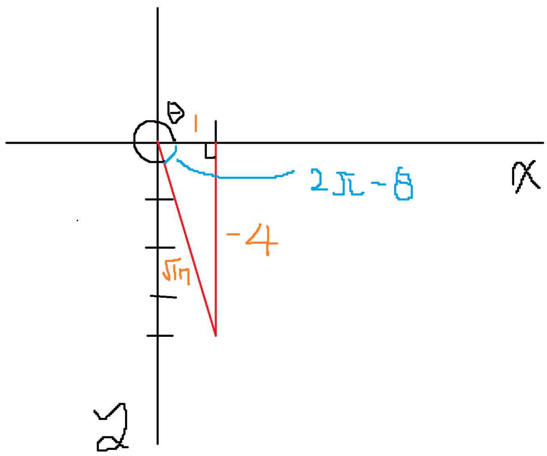
$$(2)\quad a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta)$$

$$(\text{단},\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

a) 2sin(3t) + 3cos(3t)
= $\sqrt{(2^2+3^2)}\cdot\sin(3t+\theta)$
= $\sqrt{13}\cdot\sin(3t+\theta)$
$\cos\theta = 2/\sqrt{13}$, $\sin\theta = 3/\sqrt{13}$, $\theta = \sin^{-1}3/\sqrt{13}$
$\theta = \sin^{-1}(0.83205029433784368302751260018 55)$
 = 56.30993247°
 = 56.30993247π/180
 = 0.98279372 rad
.. sin, cos이 양수 -> 제1사분면
∴ $\sqrt{13}\cdot\sin(3t+0.983)$



c) sin3t-4cos3t = sin3t+(-4cos3t)
= $\sqrt{(1^2+(-4)^2)}\cdot\sin(3t+\theta)$
= $\sqrt{17}\cdot\sin(3t+\theta)$
$\cos\theta = 1/\sqrt{17}$, $\sin\theta = -4/\sqrt{17}$, $\theta = \sin^{-1}-4/\sqrt{17}$
$\theta = \sin^{-1}(-0.9701425001453318940756258484 6449)$
 = -75.96375653°
 = -75.96375653π/180
 = -1.32581766 rad
.. sin이 음수 -> 제4사분면
.. θ는 +형태 이므로 1.32581766 rad
.. 2π - θ = 4.9573676471795864769252867665 59
∴ $\sqrt{17}\cdot\sin(3t+4.957)$



8. 아래 수식을 (i)~(iiii) 형태로 정리하시오. (단, θ>=0)

(i) A $\sin(\omega t+\theta)$
(ii) A $\sin(\omega t-\theta)$
(iii) A $\cos(\omega t+\theta)$
(iv) A $\cos(\omega t-\theta)$

(a) 5sint+4cost	(c) 4sin2t - 6cos2t

a)
5sin(t)+4cos(t)
$= \sqrt{(5^2+4^2)}\cdot\sin(t+\theta) = \sqrt{41}\cdot\sin(t+\theta)$
$= \sqrt{41}\cdot\sin(t+\theta_1)$ .. (i) $\cos\theta_1=5/\sqrt{41}$, $\sin\theta_1=4/\sqrt{41}$를 만족 시키는 θ_1
$= \sqrt{41}\cdot\sin(t-\theta_2)$ .. (ii) $\cos\theta_2=5/\sqrt{41}$, $\sin\theta_2=-4/\sqrt{41}$를 만족 시키는 θ_2
$= \sqrt{41}\cdot\cos(t+\theta_3)$ .. (iii) $\cos\theta_3=4/\sqrt{41}$, $\sin\theta_3=-5/\sqrt{41}$를 만족 시키는 θ_3
$= \sqrt{41}\cdot\cos(t-\theta_4)$ .. (iv) $\cos\theta_4=4/\sqrt{41}$, $\sin\theta_4=5/\sqrt{41}$를 만족 시키는 θ_4

i) $\theta_1=\sin^{-1}(0.62469504755442426209641148045091) = 38.65980825^\circ = 0.67474094$rad
$\theta_1=\cos^{-1}(0.78086880944303032762051435056364) = 38.65980825^\circ = 0.67474094$rad

ii) $\theta_2=\sin^{-1}(-0.62469504755442426209641148045091) = 38.65980825^\circ = -0.67474094$rad
$\theta_2=\cos^{-1}(0.78086880944303032762051435056364) = 38.65980825^\circ = 0.67474094$rad

iii) $\theta_3=\sin^{-1}(-0.78086880944303032762051435056364) = -51.34019175^\circ = -0.89605538$rad
$\theta_3=\cos^{-1}(0.62469504755442426209641148045091) = 51.34019175^\circ = 0.89605538$rad

iv) $\theta_4=\sin^{-1}(0.78086880944303032762051435056364) = 51.34019175^\circ = 0.89605538$rad
$\theta_4=\cos^{-1}(0.62469504755442426209641148045091) = 51.34019175^\circ = 0.89605538$rad

=>
i) sin, cos 모두 양수, 제 1사분면, 형태가 +θ이므로 $\sqrt{41}\cdot\sin(t+\theta_1)=\sqrt{41}\cdot\sin(t+0.675)$
ii) $\sin\theta_2$ 음수 -> 제 4사분면, $2\pi-0.675 = 5.608$, 형태가 -θ이므로, $\sqrt{41}\cdot\sin(t-\theta_2)=\sqrt{41}\cdot\sin(t-5.608)$
iii) $\sin\theta_3$ 음수 -> 제 4사분면, $2\pi-0.896 = 5.387$, 형태가 +θ이므로, $\sqrt{41}\cdot\cos(t+\theta_3)=\sqrt{41}\cdot\cos(t-5.387)$
iv) 모두 양수 -> 제 1사분면, 형태가 -θ이므로, $\sqrt{41}\cdot\cos(t-\theta_4)=\sqrt{41}\cdot\cos(t-0.896)$

∴
a-i) $\sqrt{41}\cdot\sin(t+0.675)$
a-ii) $\sqrt{41}\cdot\sin(t-5.608)$
a-iii) $\sqrt{41}\cdot\cos(t-5.387)$
a-iv) $\sqrt{41}\cdot\cos(t-0.896)$

c)

$4\sin 2t - 6\cos 2t$

$= \sqrt{(4^2+6^2)}\cdot\sin(2t+\theta) = \sqrt{52}\cdot\sin(2t+\theta)$

$= \sqrt{52}\cdot\sin(2t+\theta_1)$ .. (i) $\cos\theta_1=4/\sqrt{52}$, $\sin\theta_1=-6/\sqrt{52}$를 만족 시키는 θ_1

$= \sqrt{52}\cdot\sin(2t-\theta_2)$ .. (ii) $\cos\theta_2=4/\sqrt{52}$, $\sin\theta_2=6/\sqrt{52}$를 만족 시키는 θ_2

$= \sqrt{52}\cdot\cos(2t+\theta_3)$ .. (iii) $\cos\theta_3=-6/\sqrt{52}$, $\sin\theta_3=-4/\sqrt{52}$를 만족 시키는 θ_3

$= \sqrt{52}\cdot\cos(2t-\theta_4)$ .. (iv) $\cos\theta_4=-6/\sqrt{52}$, $\sin\theta_4=4/\sqrt{52}$를 만족 시키는 θ_4

i) $\theta_1=\sin^{-1}(-0.8320502943378436830275126001855) = -56.30993247^\circ = -0.98279372\text{rad}$
$\theta_1=\cos^{-1}(0.554700196225229122018341733457) = 56.30993247^\circ = 0.98279372\text{rad}$

ii) $\theta_2=\sin^{-1}(0.8320502943378436830275126001855) = 56.30993247^\circ = 0.98279372\text{rad}$
$\theta_2=\cos^{-1}(0.554700196225229122018341733457) = 56.30993247^\circ = 0.98279372\text{rad}$

iii) $\theta_3=\sin^{-1}(-0.554700196225229122018341733457) = -33.69006753^\circ = -0.5880026\text{rad}$
$\theta_3=\cos^{-1}(0.8320502943378436830275126001855) = -33.69006753^\circ = -0.5880026\text{rad}$

iv) $\theta_4=\sin^{-1}(0.554700196225229122018341733457) = 33.69006753^\circ = 0.5880026\text{rad}$
$\theta_4=\cos^{-1}(-0.8320502943378436830275126001855) = -33.69006753^\circ = -0.5880026\text{rad}$

=>

i) $\sin\theta_1$ 음수-> 제 4사분면, $2\pi-0.983=5.300$, $\sqrt{52}\cdot\sin(2t+\theta_1)=\sqrt{52}\cdot\sin(2t+5.300)$

ii) 모두 양수-> 제 1사분면, 형태가 $-\theta$이므로 $\sqrt{52}\cdot\sin(2t-\theta_2)=\sqrt{52}\cdot\sin(2t-0.983)$

iii) $\cos\theta_3$, $\sin\theta_3$ 음수->

제3사분면, $0.588+\pi=3.730$, 형태가 $+\theta$이므로 $\sqrt{52}\cdot\cos(2t+\theta_3)=\sqrt{52}\cdot\cos(2t-3.730)$

iv) $\cos\theta_4$ 음수-> 제 2사분면, $\pi-0.588=2.554$, 형태가 $-\theta$이므로 $\sqrt{52}\cdot\cos(2t-\theta_4)=\sqrt{52}\cdot\sin(2t-2.554)$

∴

c-i) $\sqrt{52}\cdot\sin(2t+5.300)$

c-ii) $\sqrt{52}\cdot\sin(2t-0.983)$

c-iii) $\sqrt{52}\cdot\cos(2t+3.730)$

c-iv) $\sqrt{52}\cdot\cos(2t-2.554)$

복습문제 3

1. 다음의 각도를 라디안(각)으로 나타내시오.

(a) 45°	(c) 100°

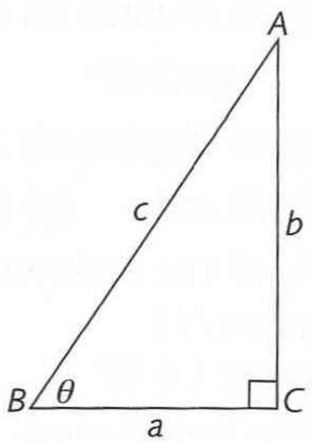
$360^\circ = 2\pi$ radians, $1^\circ = \pi/180$ radians

a)
$45^\circ = 45 \cdot 1^\circ = 45 \cdot \pi/180 = 45\pi/180 = \pi/4$ radians
c)
$100^\circ = 100 \cdot 1^\circ = 100 \cdot \pi/180 = 100\pi/180 = 5\pi/9$ radians

∴
a) $45^\circ = \pi/4$ rad
c) $100^\circ = 5\pi/9$ rad

5. 다음 식을 간단하게 만드시오.

a) $\cos^2 A + 1 + \sin^2 A$
c) $\sqrt{(\sec^2 x - 1)}$



a)
$\cos^2 A + 1 + \sin^2 A$
=> 피타고라스 정리
=> $\cos^2 A = (a/c)^2$, $\sin^2 A = (b/c)^2$
=> $(a/c)^2 + (b/c)^2 + 1$
=> $((a+b)/c)^2 + 1 = a^2 + b^2/c^2 + 1 = c^2/c^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

∴ $\cos^2 A + 1 + \sin^2 A = 2$

c)
$\sqrt{(\sec^2 x - 1)} = \sqrt{((1/\cos)^2 x - 1)}$
=> 삼각함수 공식
=> $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$에서 $(1/\cos)^2$을 만들기 위해 양변을 $\cos^2\theta$로 나누기
=> $\cos^2\theta/\cos^2\theta + \sin^2\theta/\cos^2\theta = 1/\cos^2\theta$
=> (약분), (공식)
=> $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$
=> $\sqrt{(\sec^2 x - 1)} = \sqrt{((1/\cos)^2 x - 1)} = \sqrt{(1 + \tan^2 x - 1)} = \sqrt{\tan^2 x} = \tan(x)$

∴ $\sqrt{(\sec^2 x - 1)} = \tan(x)$

복습문제 4

1. 점P는 직각좌표 (6, -3, -2), 점P에서부터 좌표계의 원점까지 거리를 구하시오.

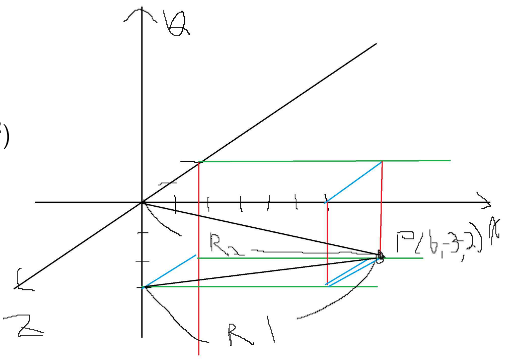
=> $R_1=\sqrt{(x-0)^2+(z-0)^2}$

=> $R_2=\sqrt{(R_1^2)+(y-0)^2}$

=> 점 P에서부터 좌표계의 원점까지 R = $\sqrt{(x-0)^2+(z-0)^2+(y-0)^2}$

=> $R=\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$

∴ 점P에서부터 좌표계의 원점까지 거리 = 7



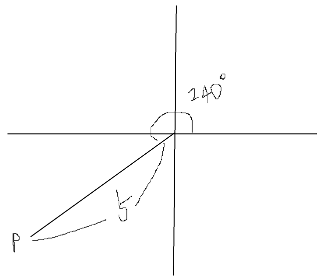
3. 점P는 극좌표 (5, 240°), P의 직각좌표를 계산하시오.

=> $\cos(240°) = \cos(\pi+60°) = -\cos(60°) = -1/2$

=> $\sin(240°) = \sin(\pi+60°) = -\sin(60°) = -(\sqrt{3})/2$

=> $(5 \cdot -1/2,\ 5 \cdot -(\sqrt{3})/2) = -5/2,\ -(5\sqrt{3})/2$

∴P의 직각좌표 = $(-5/2,\ -(5\sqrt{3})/2)$



7. 직각좌표(-1, -1, 2)를 갖고 있는 점의 구면 극좌표를 구하시오.

=> 구면 극좌표 구성(r, θ, φ)

=> $r = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

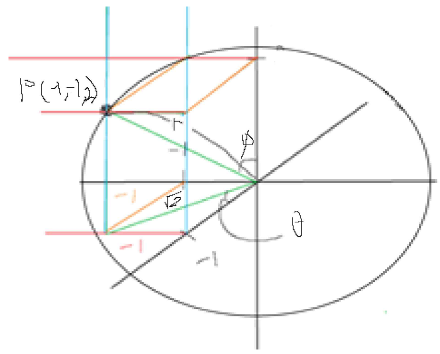
=> $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$

=> $\theta = \cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) = 225°$ (제3사분면)

=> $\cos\varphi = 2/\sqrt{6}$

=> $\varphi = \cos^{-1}(2/\sqrt{6}) = 35.264°$

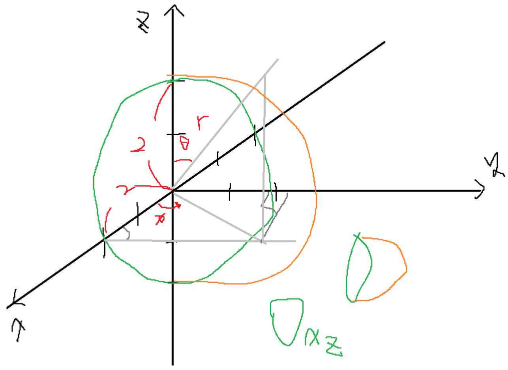
∴점 P(-1, -1, 2)의 구면 극좌표 = $(\sqrt{6},\ 225°,\ 35.264°)$



8. R=2, $0^{\circ}<=\theta<=180^{\circ}$, $0^{\circ}<=\varphi<=180^{\circ}$가 정의하는 표면을 구하시오.

=> R=2, 반지름 = 2
=> $0^{\circ}<=\theta<=180^{\circ}$, z축에서의 한 지점에 대한 각이 평면
=> $0^{\circ}<=\varphi<=180^{\circ}$, 파이가 180도 이하인 것으로 반구
=> 반지름 길이가 2인 xz평면의 반구

∴r=2, xz평면, 반구



10. R=2가 정의하는 구형이 z=1이 정의하는 평면과 교차할 때 교차의 곡선을 설명.

=> R=2가 정의하는 구형이 z=1 정의하는 평면과 교차할 때 --- 그림I)
=> R=2의 구형이 z=1 평면과 교차할 때 곡선의 반지름 r
=> $2^2=\sqrt{(1^2+r^2)}$ => $2=\sqrt{4}$, $r^2=3$, $r=\sqrt{3}$ => $r=\sqrt{(2^2-1^2)}$ = $\sqrt{3}$
=> 교차 곡선의 위치 z=1 평면에 위치

∴ 원점을 (0,0,1)으로 반지름이 $\sqrt{3}$인 z=1평면에 존재하는 원이다.

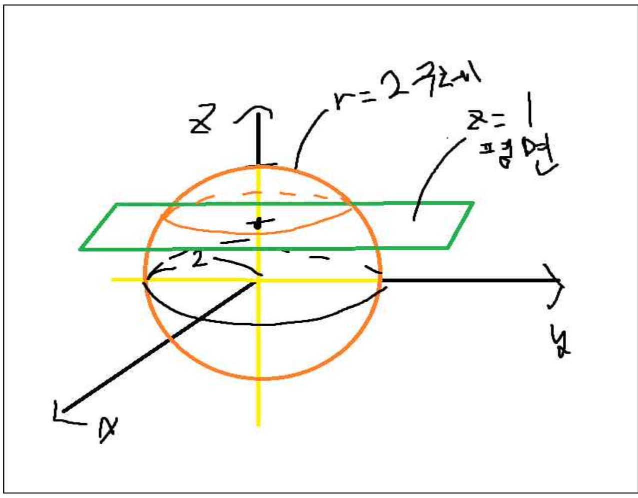


그림 I)

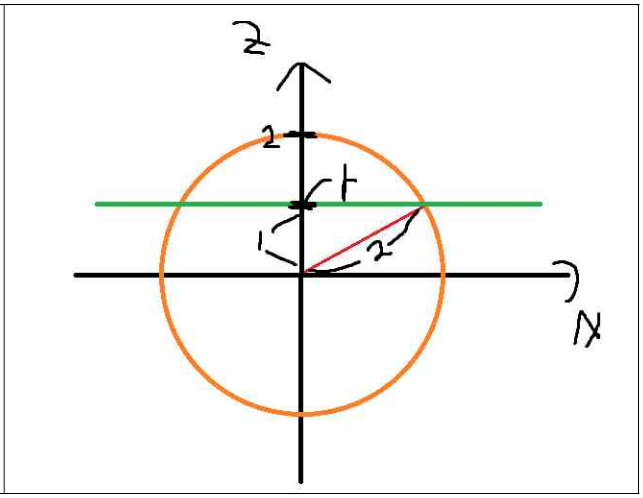


그림 II)

표 3.2 추가적인 삼각함수의 공식 증명

기존 삼각함수 공식들	증명할 추가적인 삼각함수 공식
1. cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)	i) sinA + sinB = 2sin((A+B)/2)cos((A-B)/2)
2. cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)	ii) sinA - sinB = 2sin((A-B)/2)cos((A+B)/2)
3. sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)	iii) cosA + cosB = 2cos((A+B)/2)cos((A-B)/2)
4. sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)	iv) cosA - cosB = -2sin((A+B)/2)sin((A-B)/2)

i) sinA + sinB = 2sin((A+B)/2)cos((A-B)/2) - prove

=> 3+4 =>

  sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)

+ sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)

= sin(a+b)+sin(a-b) = 2sin(a)cos(b) --- ①

=> a+b = A, a-b = B, A+B = 2a, A-B=2b, a=(A+B)/2, b=(A-B)/2

=> ① sin(a+b)+sin(a-b) = 2sin(a)cos(b) ≡ sin(A)+sin(B) = 2sin((A+B)/2)cos((A-B)/2)

∴

  sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)

+ sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b) ≡ sinA+sinB = 2sin((A+B)/2)cos((A-B)/2)

ii) sinA - sinB = 2sin((A-B)/2)cos((A+B)/2) - prove

=> 3-4 =>

  sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)

- sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)

= sin(a+b)-sin(a-b) = 2cos(a)sin(b) --- ①

=> a+b = A, a-b = B, A+B = 2a, A-B=2b, a=(A+B)/2, b=(A-B)/2

=> ① sin(a+b)-sin(a-b) = 2cos(a)sin(b) ≡ sin(A)-sin(B) = 2cos((A+B)/2)sin((A-B)/2)

∴

  sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)

- sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b) ≡ sinA-sinB = 2sin((A-B)/2)cos((A+B)/2)

iii) cosA + cosB = 2cos((A+B)/2)cos((A-B)/2) - prove

=> 1+2 =>

  cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)

+ cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)

= cos(a+b)+cos(a-b) = 2cos(a)cos(b) --- ①

=> a+b = A, a-b = B, A+B = 2a, A-B=2b, a=(A+B)/2, b=(A-B)/2

=> ① $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) \equiv \cos(A)+\cos(B) = 2\cos((A+B)/2)\cos((A-B)/2)$

∴

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$+ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \equiv \cos A+\cos B = 2\cos((A+B)/2)\cos((A-B)/2)$

iv) $\cos A - \cos B = -2\sin((A+B)/2)\sin((A-B)/2)$ - prove

=> 1-2 =>

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$- \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$= \cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$ --- ①

=> $a+b = A$, $a-b = B$, $A+B = 2a$, $A-B=2b$, $a=(A+B)/2$, $b=(A-B)/2$

=> ① $\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b) \equiv \cos(A)-\cos(B) = -2\sin((A+B)/2)\sin((A-B)/2)$

∴

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$- \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \equiv \cos(A)-\cos(B) = -2\sin((A+B)/2)\sin((A-B)/2)$