· 고차원 데이터 → 시각화, 분석 어려움.

↳ 일부 차원에만 대부분의 정보가 포함되는 경우가 많다.

~~↳ 다른 많은 것~~ ↳ 다른 차원은 데이터의 주요 속성을 설명하는데 반드시 필요한 건 아님.

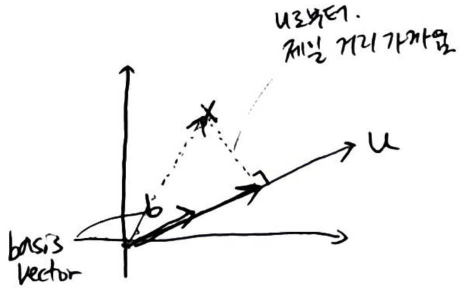
차원을 축소하여 데이터를 설명.

차원축소 ⇒ 정보 손실 불가피.

but, 데이터에 대해 가장 많은 정보를 제공하는 차원을 찾아 이 차원만 남기고 ~~차원으로 데이터를~~ 나머지는 제거.

* 차원 축소의 중심적인 역할 : 직교투영법. (orthogonal projection)

⑨ 1차원 하위공간에 투영.



$\pi_u(x)$: x를 u에 직교투영하는 방법.

투영법의 2가지 중요속성 ↳

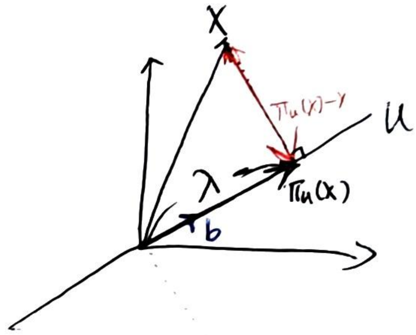
1. $\pi_u(x) \in u$ ⇒ $\exists \lambda \in R : \pi_u(x) = \lambda b$ (as $\pi_u(x) \in u$)
2. $\langle b, \pi_u(x) - x \rangle = 0$ (orthogonality)

↳ 이 두 가지 속성을 이용하여 $\pi_u(x)$을 구해본다.

2가지 속성 $\begin{cases} 1.\ \exists \lambda \in K : \Pi_u(x) = \lambda b & (\text{as } \Pi_u(x) \in u) \\ 2.\ \langle b, \Pi_u(x) - x \rangle = 0 & (\text{orthogonality}) \end{cases}$

$$\langle b, \Pi_u(x) - x \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle b, \Pi_u(x) \rangle - \langle b, x \rangle = 0 \quad \because\ w(u+v) = (w \cdot u) + (w \cdot v)$$



$$\Leftrightarrow \langle b, \lambda b \rangle - \langle b, x \rangle = 0 \quad (\because\ \Pi_u(x) = \lambda b)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \|b\|^2 - \langle b, x \rangle = 0 \quad (\because\ b \cdot b = \|b\|^2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle b, x \rangle}{\|b\|^2}$$

→ λ : 기저벡터 b에 대해 투영한 것의 좌표. (투영벡터의 크기)

$$\Rightarrow \Pi_u(x) = \lambda b$$

$$= \frac{\langle b, x \rangle}{\|b\|^2} \times b$$

$$= \frac{\overbrace{(b^T \cdot x)}^{\text{scalar 값}} b}{\|b\|^2}$$

$b^T \cdot x$ 는 스칼라 값이다. 즉 스칼라 × b 이다.

⇓

b (스칼라) = (스칼라) b

스칼라 값을 뒤로 보내면,

$$= \frac{b(b^T \cdot x)}{\|b\|^2}$$

인데, $b(b^T \cdot x) = (b \cdot b^T)x$ 가 되므로 (전개해서 증명 가능)

$$= \frac{(b \cdot b^T)x}{\|b\|^2}$$

이다. 한편 $b \cdot b^T$ 는 $(n \times 1) \circ (1 \times n)$ 으로 $(n \times n)$의 대칭행렬이 되므로, 이는 행렬과 벡터의 곱으로 표현된다.

$$= \frac{b \cdot b^T}{\|b\|^2} x$$

이다, 이때 $\frac{b \cdot b^T}{\|b\|^2}$ 를 투영행렬(Projection Matrix)이라고 한다. 그리고 이 투영행렬은 2차원의 아무 지점에서 1차원의 부분공간으로 투영하는 역할을 한다. (변환)

$$\pi_u(x) = \frac{b \cdot b^T}{\|b\|^2} x$$

* { $b^T b \Rightarrow (1\times1)$
  $b \cdot b^T \Rightarrow (n\times n)$

만약 $\|b\|=1$ 이라면, $\lambda = \frac{b^T x}{\|b\|^2} = b^T x$

$$\cancel{\pi_u(x) = \frac{(bb^T)}{\|b\|^2}x = b(b^T x) = b\lambda = \lambda b}$$

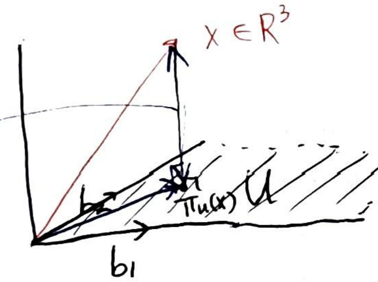
$$\pi_u(x) = \lambda b = b\lambda = \boxed{(bb^T)x}$$

즉, $\|b\|=1$ 일때 $\lambda = b^T x$, $\pi_u(x) = (bb^T)x$ 로 간단히 표현할수 있다.

③ 고차원 하위공간(부분공간)으로 투영.

- 1차원 부분공간으로의 투영과 동일한 개념을 사용한다.

* { 벡터공간 : 기저벡터들의 선형결합으로 만들어지는 모든 벡터들의 집합
  기저 = 기저벡터들의 집합
  기저벡터 : 벡터공간을 구성하는 기본 단위 역할을 수행하는 벡터.



(ii) $b_1 \cdot (x - \pi_u(x)) = 0$
$b_2 \cdot (x - \pi_u(x)) = 0$

$u = [b_1, b_2]$ … u는 b_1, b_2의 선형조합으로 구성되는 벡터공간. (기저벡터)

$\pi_u(x) \in u$ → $\pi_u(x)$는 기저벡터 b_1과 b_2의 선형결합으로 표현될 수 있다.

* 벡터 x를 기저 u에 곱해 벡터 k가 나왔을때, 이는, 벡터 x를 기저 u가 표현하는 벡터공간으로 선형변환 했다는걸 의미한다.
  ↳ 벡터 x의 좌표를 기저 u의 좌표계로 변환하는 것을 의미함.
    ↳ 변환된 벡터 k는 원래의 벡터 x가 기저 u의 좌표계에서 어떻게 표현되는지를 의미한다.

(i) $\pi_u(x) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

x가 D차원 벡터이고 부분공간 u가 M차원 공간이라는 것으로 확장하여 생각

↳ (i) $\pi_u(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i b_i$ ($\because \pi_u(x) \in u$, $u \in \mathbb{R}^M$)

(ii) $\langle \pi_u(x) - x, b_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2, \dots, M$)

↳ 두 성질을 이용해 $\underset{\text{상수계수}}{\lambda} = \underset{(M\times1)}{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}}$, $\overset{\text{기저}}{B} = \underset{(D\times M)}{[b_1, b_2, \dots, b_M]}$ 을 정의

λ : λ_i들로 구성된 열벡터, B : 기저 u를 구성하는 모든 기저벡터를 결합한 행렬

$\underset{(M\times 1)}{\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{bmatrix}}$, $\underset{(D\times M)}{B = [b_1, b_2, \cdots b_M]}$ 을 이용해 다음과 같이 표현 가능.

- $\pi_u(x) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i b_i = B\lambda \quad (1\times 1)$
- $\langle \pi_u(x) - x, b_i \rangle = \langle B\lambda - x, b_i \rangle = 0$ (직교하므로.)

이는 ~~선형~~ 선형성 조건을 이용하면

$\langle B\lambda, b_i \rangle - \langle x, b_i \rangle = 0$ 과 같음. $(i = 1, 2, \cdots, M)$

$\Leftrightarrow (B\cdot\lambda)^T b_i - (x)^T b_i = 0 \qquad (\because \langle a, b \rangle = a^T \cdot b \cdots$ 내적의 정의 $)$

$\Leftrightarrow \lambda^T B^T \cdot b_i - x^T \cdot b_i = 0 \qquad (\because (AB)^T = B^T A^T,\ (ab)^T = b^T a^T,\ (Ab)^T = b^T A^T)$

$i = 1, 2, \cdots, M$

위의 식을 $b_1, b_2, \cdots b_M$ 모든 경우에 대해 표현하면, 행렬 B로 표현하면,

$\lambda^T B^T \cdot B - x^T B = O$ (O = 영행렬)

이 식을 통해 벡터 λ를 쉬발하고자 함.

$\Leftrightarrow \lambda^T (B^T B) = x^T B$

$\Leftrightarrow \lambda^T = (x^T B)(B^T B)^{-1}$

$\Leftrightarrow \lambda = ((x^T B)(B^T B)^{-1})^T$

$= ((B^T B)^{-1})^T (x^T B)^T$

$= ((B^T B)^T)^{-1} (x^T B)^T$

$\lambda = (B^T B)^{-1} \cdot B^T x$

한편 $\pi_u(x) = B\lambda$ 이므로,

$= B(B^T B)^{-1} B^T x$ 이다. 이때,

$B(B^T B)^{-1} B^T$ 는 투영행렬이다! $\Rightarrow$ D차원 벡터 x를 M차원 공간(부분공간)으로 투영하는 투영행렬 이다.

만약 B가 직교행렬(열벡터들이 서로 수직)이라면

$B^T B = I$ 이므로

$\pi_u(x) = BB^T \cdot x$ 이다.

또한 투영행렬 $P = B(B^TB)^{-1}B^T$ 는 대칭행렬이다.

$$\because \; P^T = \left[B(B^TB)^{-1}B^T\right]^T$$

$$= B\left[(B^TB)^{-1}\right]^T B^T$$

$$= B\left((B^TB)^T\right)^{-1} B^T$$

$$P^T = B(B^TB)^{-1}B^T = P$$

즉 $P^T = P$ 이므로

투영행렬 P는 대칭행렬이다.

☆ 한편, 벡터X를 부분공간 U에 투영해 나온 벡터 $\Pi_U(X)$를 ~~다시~~ 부분공간 U에 다시 투영하면, 자기 자신인 $\Pi_U(X)$ 가 나온다

↳ 왜냐하면 $\Pi_U(X)$ 는 이미 U 공간에 있으므로, 투영을 해도 그림자는 자기 자신이 나올수밖에 없음.

↳ 같은 부분공간에 여러번 투영해도 그 결과는 해당 부분공간에 첫 번째로(한 번) 투영한 결과와 같다.

즉, $\cancel{\Pi_U(X)}$ $\Pi_U(\Pi_U(X)) = \Pi_U(X)$ 이다.