

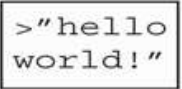


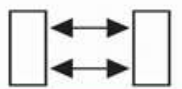
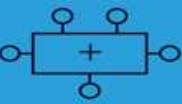

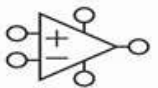


Inicio AOC_02.pptx

Álgebra de Boole

Based on the text Digital design and
computer architecture,
harris & harris 2nd Edition 2012

Temas

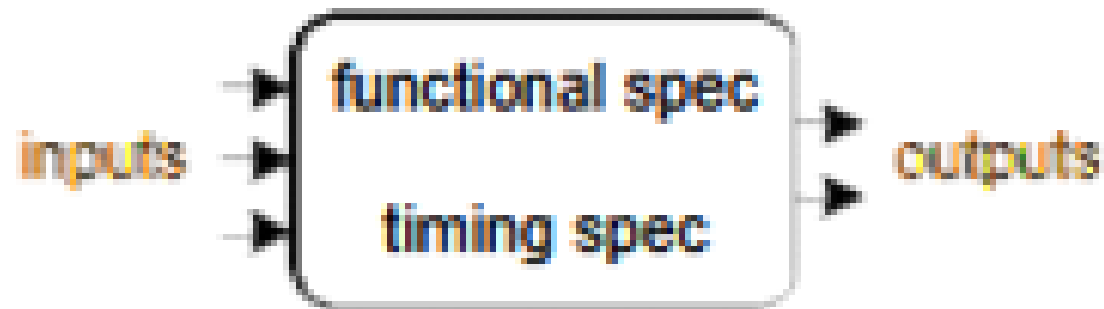
- Introducción
- Estructuras Booleanas
- Álgebra Booleana
- Desde la lógica a las compuertas (Gates)
- Lógica Combinacional Multinivel
- X's y Z's
- Mapas de Karnaugh
- Bloques constructivos Combinacionales
- Sincronización

Application Software	
Operating Systems	
Architecture	
Micro-architecture	
Logic	
Digital Circuits	
Analog Circuits	
Devices	
Physics	

Introduccción

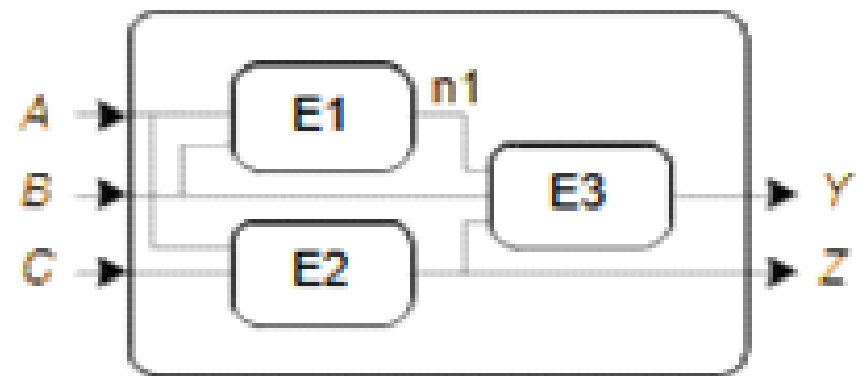
Un circuito lógico está compuesto de:

- Entradas (Inputs)
- Salidas (Outputs)
- Especificación funcional
- Especificación de temporización o sincronización



Circuitos

- **Nodos**
 - Entradas: A, B, C
 - Salidas: Y, Z
 - Interno: $n1$
- **Elementos de Circuito**
 - $E1, E2, E3$
 - Cada uno un circuito

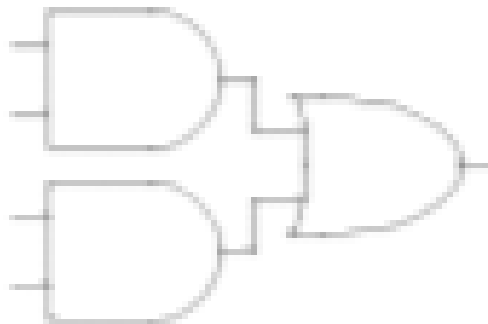


Tipos de circuitos lógicos

- Logica Combinacional
 - Sin Memoria
 - Las salidas están determinadas por los valores actuales de las entradas
- Logica Secuencial
 - Tiene memoria
 - Las salidas están determinadas por los valores previos y actuales de las entradas.

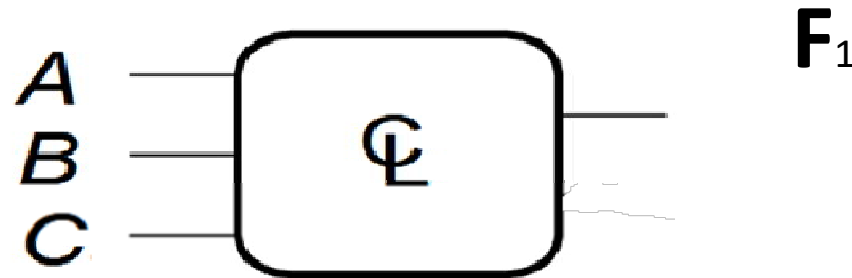
Reglas de creación combinatoria

- Todo elemento es combinatorial
- Todo nodo es ya sea una entrada o se conecta *exactamente a una* salida
- El circuito no contiene trayectos ciclicos
- Ejemplo:



Ecuaciones booleanas

- Especificación Funcional de salidas en términos de las entradas
- Ejemplo:



$$F1 = A + B'C$$

Algunas definiciones

- Complemento: variable con una barra sobre él

$$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$$

- Otro modo de indicar una variable complementada es con ' o con \neg

$$A', B', C' \quad \neg A, \neg B, \neg C$$

- Literal: variable o su complemento

$$A, A', B, B', C', C$$

Implicante: producto de literales

$$ABC, AC, BC$$

- Minterm: product that includes all input variables

$$ABC, \overline{A}BC, A\overline{B}C$$

- Maxterm: sum that includes all input variables

$$(A+B+C), (A+B+\overline{C}), (A+\overline{B}+C)$$

Formato Suma de productos (SOP)

- Todas las ecuaciones pueden ser escritas en la forma SOP form
- Cada fila tiene un **mintérmino**
- Un mintérmino es un producto (AND) de literales
- Cada mintérmino es TRUE para esa fila (y solo esa fila)
- Escriba la función haciendo OR con los mintérminos donde la salida es verdadera (TRUE)
- Así se tiene una suma (OR) de productos (términos AND)

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\overline{A} \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A} B$	m_1
1	0	0	$A \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A B$	m_3

$$Y = F(A, B) = A'B + AB$$

Formato Suma de productos (SOP)

- Todas las ecuaciones se pueden escribir en forma SOP.
- Cada fila tiene un minitérmino.
- Un minitérmino es un producto (AND) de literales.
- Cada minitérmino es TRUE para esa fila (y solo esa fila).
- Forme la función haciendo ORing en minterminos donde la salida es TRUE.
- Así, se tiene una suma (OR) de productos (Y términos).

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\overline{A} \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A} B$	m_1
1	0	0	$A \overline{B}$	m_2
1	1	1	$A B$	m_3

$$Y = F(A, B) = A'B + AB = \Sigma(1, 3)$$

Formato Productos de Suma (POS)

- Todas las ecuaciones booleanas se pueden escribir en forma POS.
- Cada fila tiene un maxtérmino.
- Un maxtérmino es una suma (OR) de literales.
- Cada maxtérmino es FALSE para esa fila (y solo esa fila).
- Escriba la función haciendo ANDing con los maxtérminos para los cuales la salida es FALSE.
- Así, se tiene un producto (AND) de sumas (términos OR).

A	B	Y	maxterm	maxterm name
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \overline{B}$	M_1
1	0	0	$\overline{A} + B$	M_2
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$	M_3

$$Y = F(A, B) = (A + B)(A + \overline{B}) = \Pi(0, 2)$$

Ejemplo de ecuaciones booleanas

- Estás yendo a la cafetería a almorzar:
 - No vas a almorzar (E')
 - si no está abierto (O') o
 - si solo sirven hotdogs (C).
- Escriba una tabla de verdad para determinar si almorzarás (E).

O	C	E
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Ejemplo de ecuaciones booleanas

- vas a la cafetería a almorzar:
 - No vas a almorzar (E')
 - Si no está abierto (O')
 - o Si solo sirven hotdogs(C)
- Escriba una tabla de verdad para determinar si almorzarás (E).

O	C	E
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Formas SOP y POS

- SOP – Suma de Productos

O	C	E	minterm
0	0		$\overline{O} \overline{C}$
0	1		$\overline{O} C$
1	0		$O \overline{C}$
1	1		$O C$

- POS – Productos de Sumas

O	C	E	maxterm
0	0		$O + C$
0	1		$O + \overline{C}$
1	0		$\overline{O} + C$
1	1		$\overline{O} + \overline{C}$

Formas SOP y POS

- SOP – Suma de Productos

O	C	E	minterm
0	0	0	$\overline{O} \overline{C}$
0	1	0	$\overline{O} C$
1	0	1	$O \overline{C}$
1	1	0	$O C$

$$E = OC = \Sigma(2)$$

- POS – Producto de Sumas

O	C	E	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

$$E = (O + C)(O + C)(O + C) = \Pi(0, 1, 3)$$

Álgebra de boole

- Axiomas y teoremas para simplificar ecuaciones booleanas.
- Como el álgebra regular, pero más simple: las variables tienen solo dos valores (1 o 0).
- Dualidad en axiomas y teoremas: ANDs y ORs, 0 y 1 intercambiados.

Axiomas booleanos

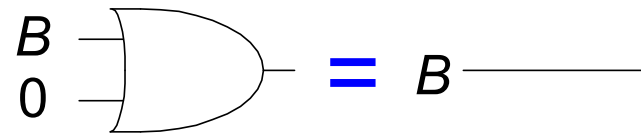
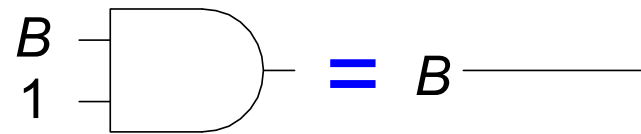
Axiom		Dual		Name
A1	$B = 0 \text{ if } B \neq 1$	A1'	$B = 1 \text{ if } B \neq 0$	Binary field
A2	$\overline{0} = 1$	A2'	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	A3'	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	A4'	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	A5'	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

Theorem		Dual		Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1'	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2'	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3'	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5'	$B + \overline{B} = 1$	Complements

T1: Teorema de identidad

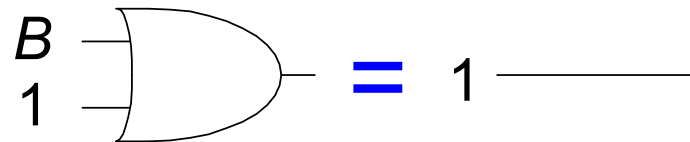
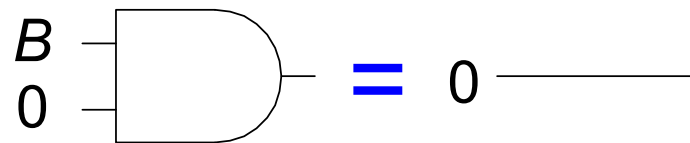
$$B \cdot 1 = B$$

$$B + 0 = B$$



T2: Teorema del elemento nulo

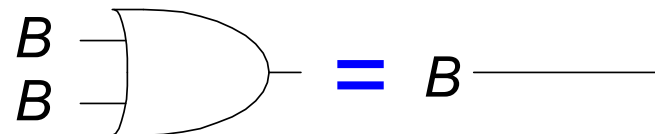
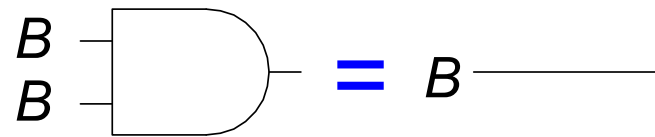
- $B \cdot 0 = 0$
- $B + 1 = 1$



T3: Teorema de la Idempotencia

$$B \cdot B = B$$

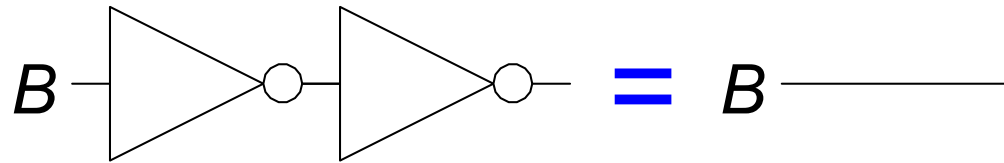
$$B + B = B$$



T4: Teorema de la Identidad

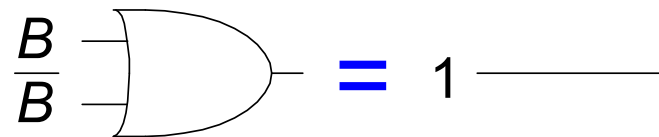
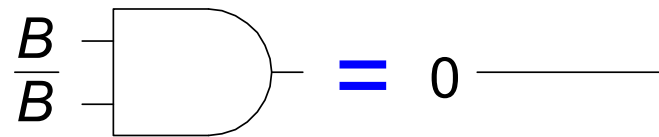
=

$$B = B$$



T5: Teorema del complemento

- $B \cdot B' = 0$
- $B + B' = 1$



Resumen de los teoremas booleanos

	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1'	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2'	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3'	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5'	$B + \overline{B} = 1$	Complements

Teoremas booleanos de varias variables

Theorem		Dual		Name
T6	$B \bullet C = C \bullet B$	T6'	$B + C = C + B$	Commutativity
T7	$(B \bullet C) \bullet D = B \bullet (C \bullet D)$	T7'	$(B + C) + D = B + (C + D)$	Associativity
T8	$(B \bullet C) + B \bullet D = B \bullet (C + D)$	T8'	$(B + C) \bullet (B + D) = B + (C \bullet D)$	Distributivity
T9	$B \bullet (B + C) = B$	T9'	$B + (B \bullet C) = B$	Covering
T10	$(B \bullet C) + (B \bullet \overline{C}) = B$	T10'	$(B + C) \bullet (B + \overline{C}) = B$	Combining
T11	$(B \bullet C) + (\overline{B} \bullet D) + (C \bullet D)$ $= B \bullet C + \overline{B} \bullet D$	T11'	$(B + C) \bullet (\overline{B} + D) \bullet (C + D)$ $= (B + C) \bullet (\overline{B} + D)$	Consensus
T12	$\overline{B_0 \bullet B_1 \bullet B_2 \dots}$ $= (\overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \dots)$	T12'	$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \dots}$ $= (\overline{B_0} \bullet \overline{B_1} \bullet \overline{B_2})$	De Morgan's Theorem

Simplificando ecuaciones booleanas

Ejemplo 1

$$Y = AB + A'B$$

$$= B(A + A') \quad \text{T8}$$

$$= B(1) \quad \text{T5'}$$

$$= B \quad \text{T1}$$

Simplificando ecuaciones booleanas

Ejemplo 2:

$$Y = A(AB + ABC)$$

$$= A(AB(1 + C)) \quad \text{T8}$$

$$= A(AB(1)) \quad \text{T2'}$$

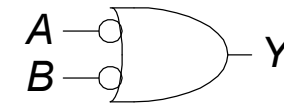
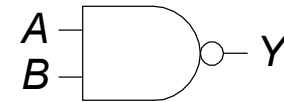
$$= A(AB) \quad \text{T1}$$

$$= (AA)B \quad \text{T7}$$

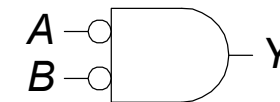
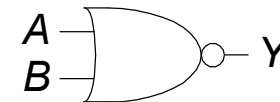
$$= AB \quad \text{T3}$$

Teorema de Morgan

$$Y = (AB)' = A' + B'$$



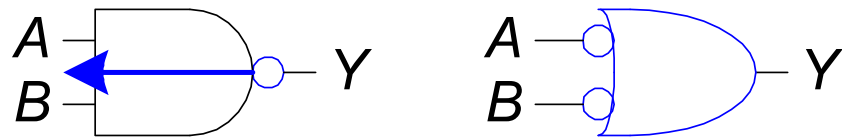
$$Y = (A + B)' = A' \cdot B'$$



Impulsando burbujas

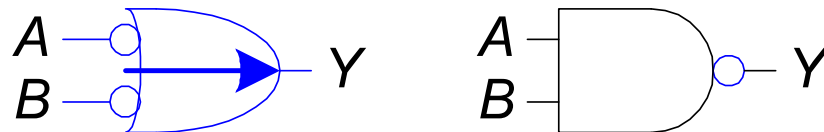
- **Hacia atrás:**

- Cambia el cuerpo del componente
- Agrega burbujas a las entradas



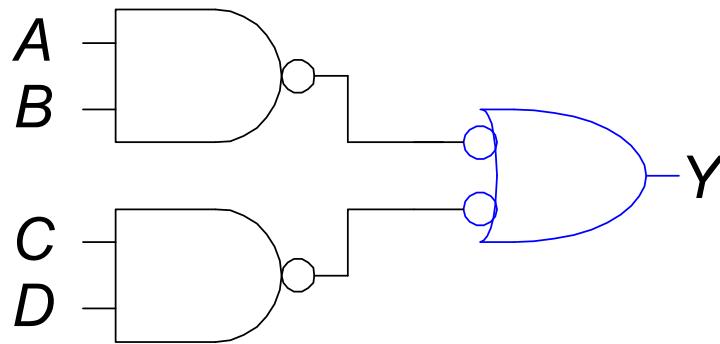
- **Hacia Adelante:**

- Cambia el cuerpo del componente
- Agrega burbujas a las salidas



Impulsando burbujas

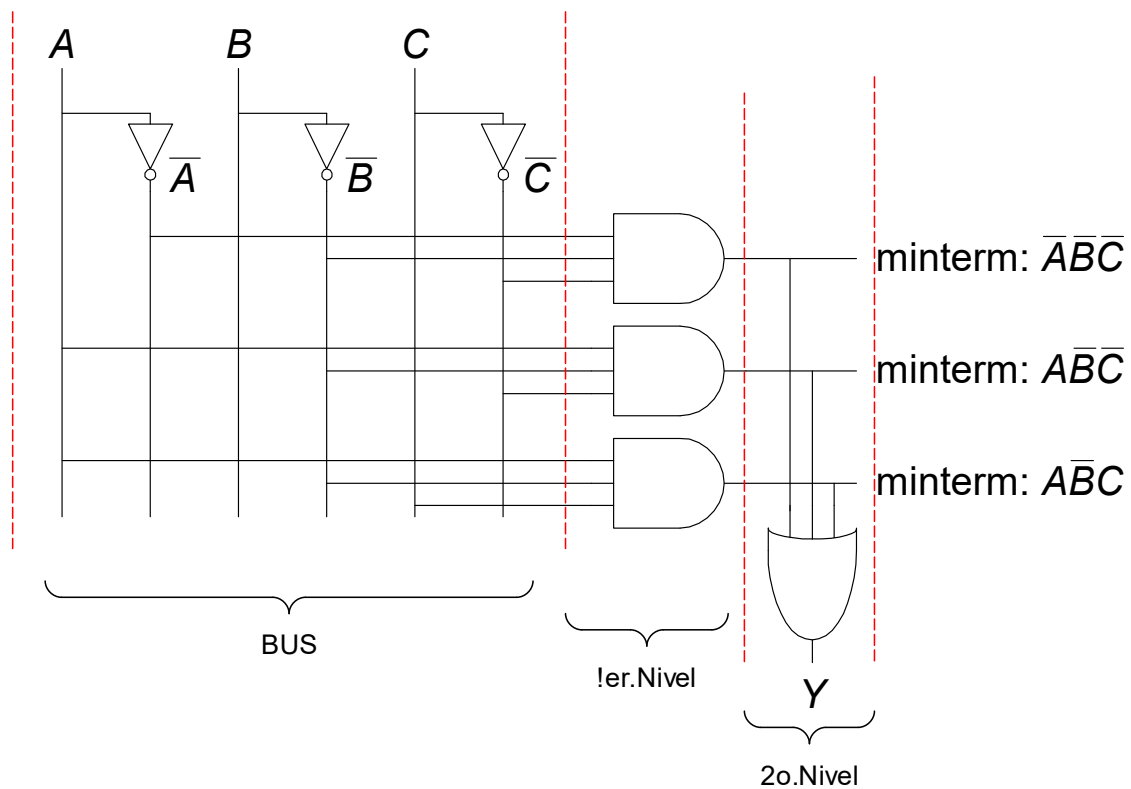
- Cual es la expresión Booleana para este circuito?



$$Y = AB + CD$$

Desde la lógica a las puertas

- Lógica de dos niveles: ANDs followed by ORs
- Example: $Y = A'B'C' + AB'C' + AB'C$



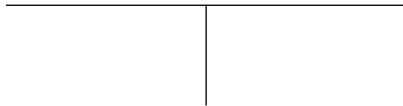
Reglas de los esquemáticos de circuitos

- Entradas a la izquierda (o arriba)
- Salidas a la derecha (o abajo)
- Las puertas fluyen de izquierda a derecha
- Los cables rectos son los mejores

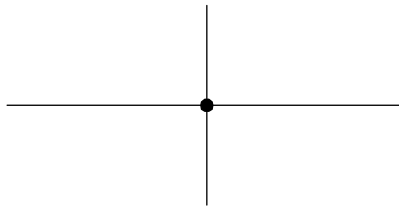
Reglas de los esquemáticos de circuitos

- Los cables siempre se conectan en una unión en T
- Un punto donde se cruzan los cables indica una conexión entre los cables
- Los cables que se cruzan sin un punto no hacen conexión

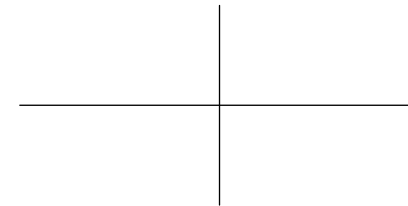
wires connect
at a T junction



wires connect
at a dot



wires crossing
without a dot do
not connect



SWR de simulación TINKERCAD

- Crear una cuenta en TINKERCAD.COM
- En el menú superior click en Tinker
- En la ventana que se despliega ir a Circuitos
- Ir a nuevo diseño
- Comenzar con el ejemplo básico visto en clases

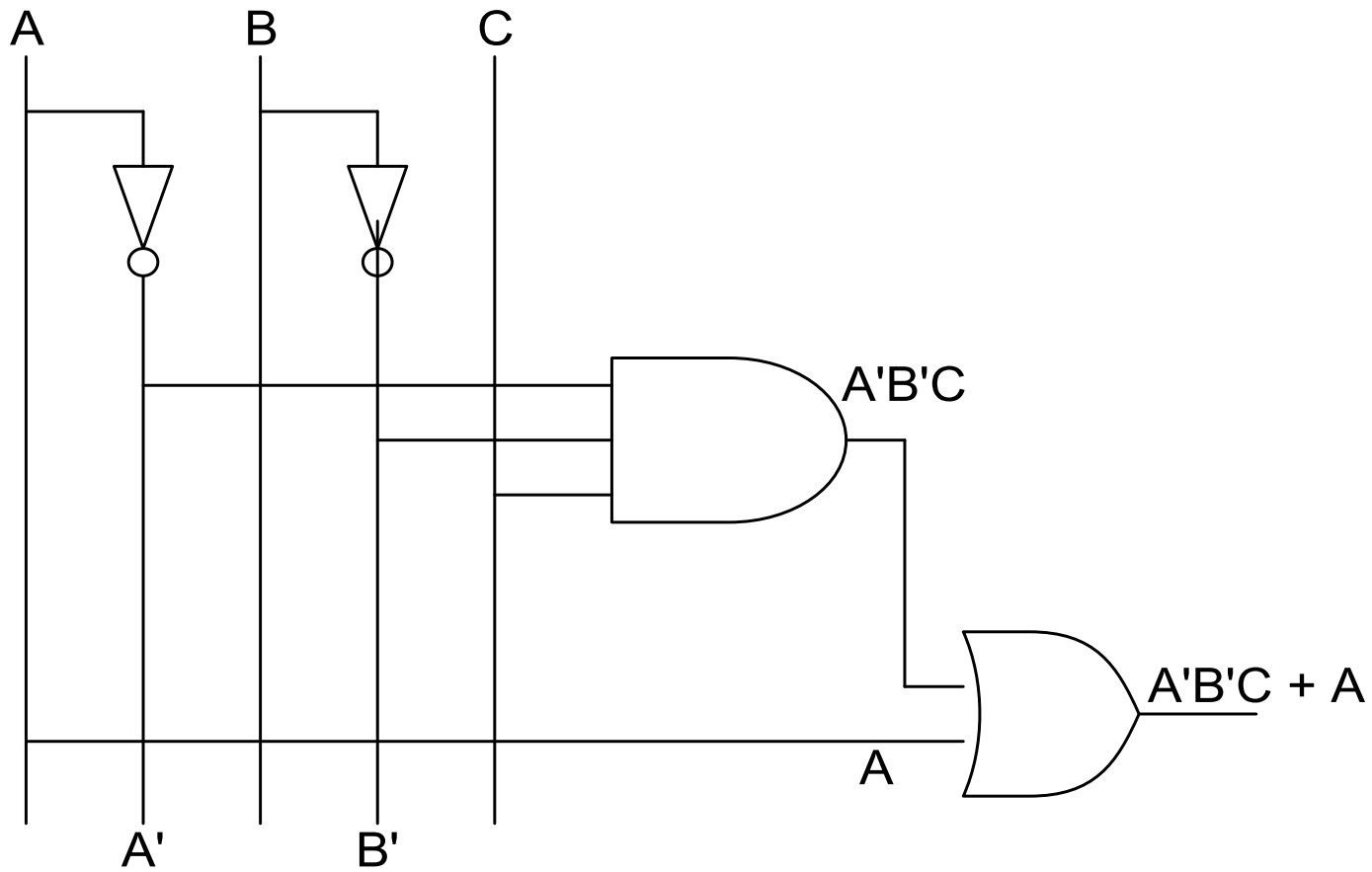
Ejemplo de diseño dada la tabla de verdad

Reducción por álgebra de Boole

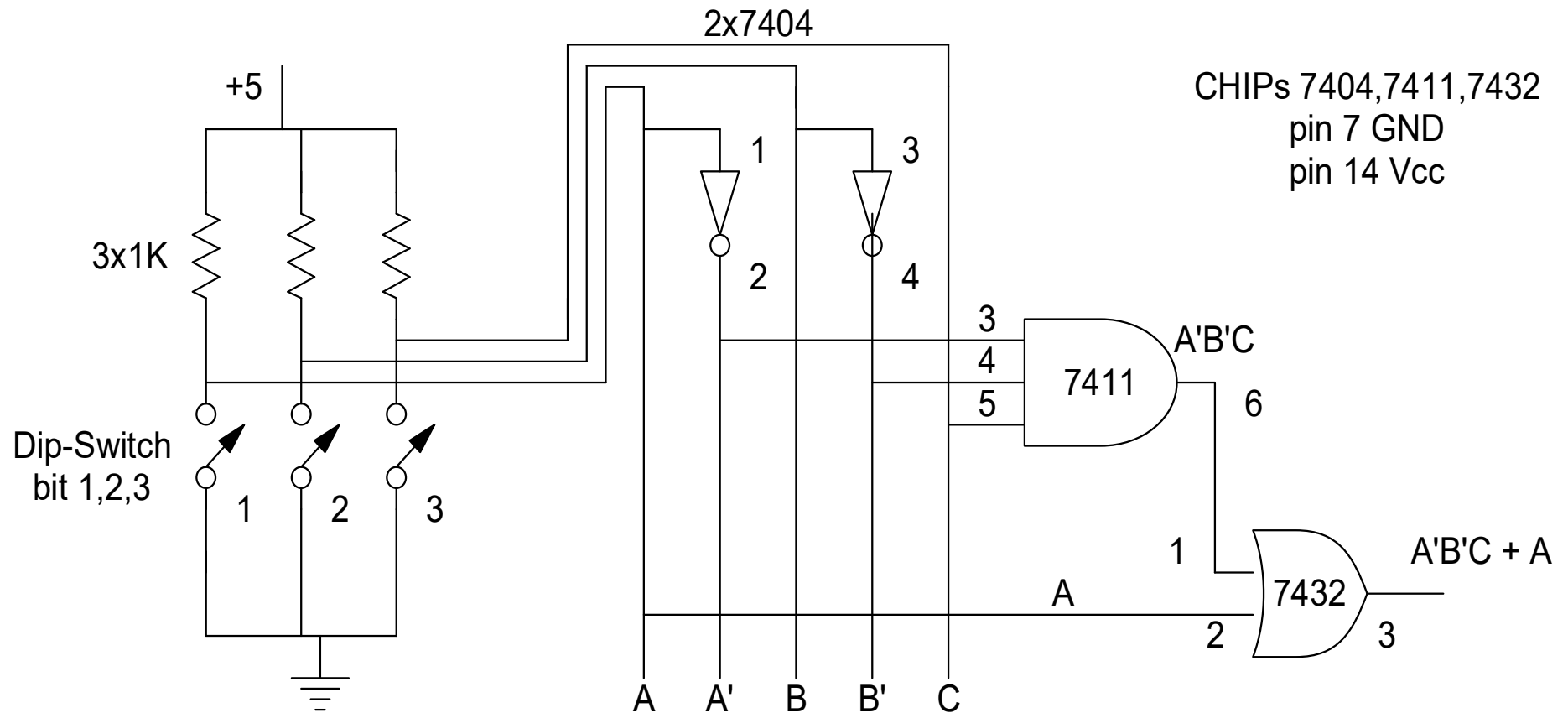


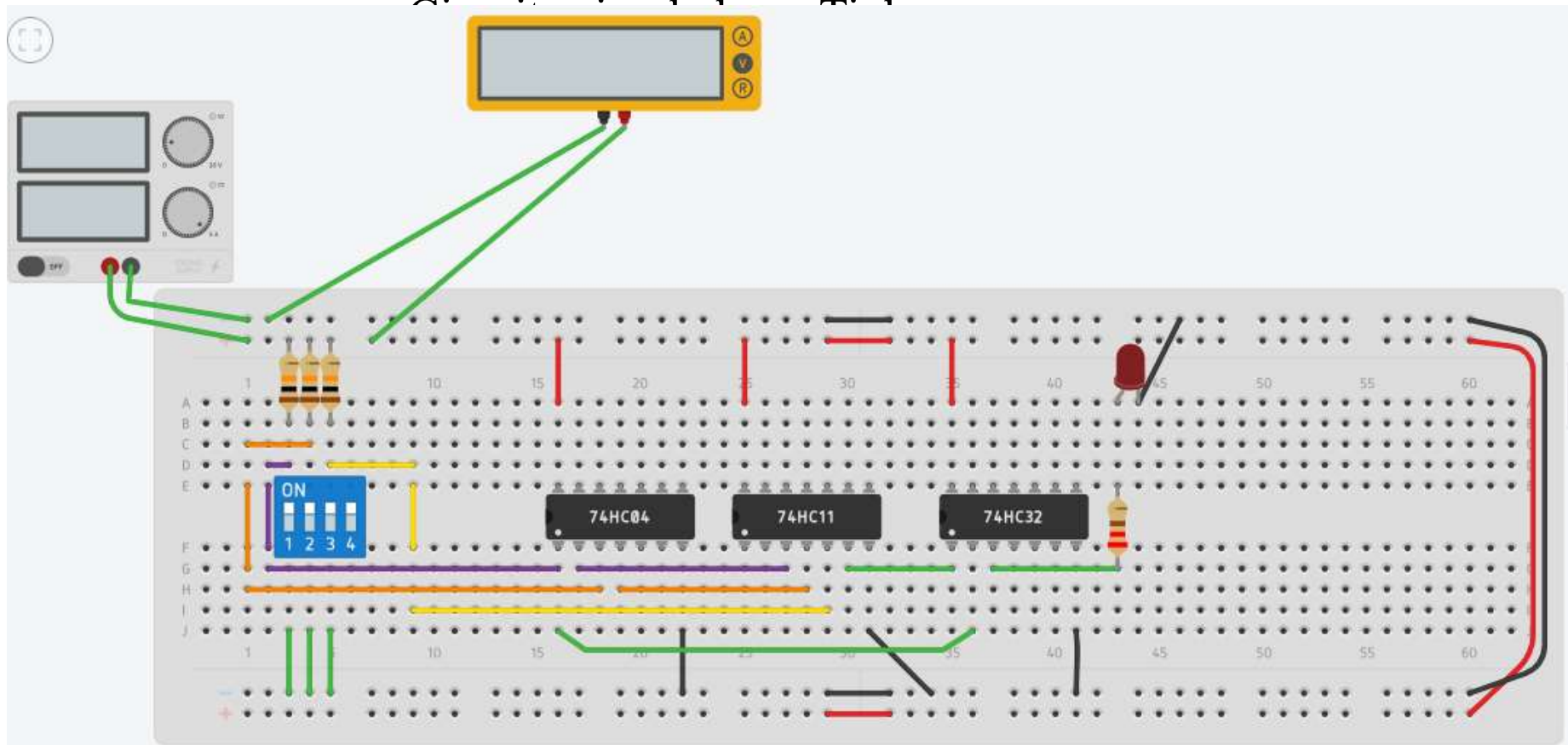
A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

Circuito esquemático



Circuito esquemático para Tinker



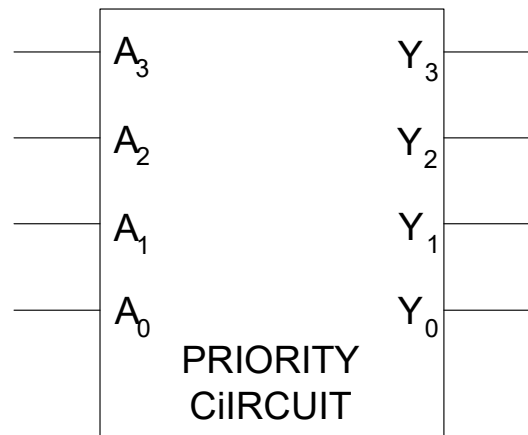


<https://www.tinkercad.com/things/8ISFTGklXy1-cool-jaagub-kasi/editel?returnTo=https%3A%2F%2Fwww.tinkercad.com%2Fdashboard%2Fdesigns%2Fcircuits&sharecode=oHvOSxAXH7VoX8QY5Zj2r85idWo9GYZMXYZJqmJVjtw>

Circuitos con múltiples salidas

Ejemplo: Circuito Prioritario

Salida establecida
correspondiente a la entrada del
bit más significativo de valor
TRUE



A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Condiciones DON'T CARES (NO IMPORTA)

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	X	0	0	1	0
0	1	X	X	0	1	0	0
1	X	X	X	1	0	0	0

Fin AOC_02.pptx