

베이시안통계학 과제2 solution

Jieun Shin

Spring 2022

문제 3-4. 앞면이 나올 확률을 θ 라 할 때, 확률변수 (X_1, \dots, X_5) 는 θ 를 모수로 가지는 이항분포를 따른다. 즉, $(X_1, \dots, X_5) \sim B(5, \theta)$ 이다. 그리고 이 동전이 앞면이 나오는 확률 θ 을 변수라 하면, θ 는 이산 균일분포를 따르므로 $f(\theta) = \frac{1}{9}, \theta \in \Theta = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ 라고 할 수 있다.

$(x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1)$ 일 때, 사후확률은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} f(\theta | (x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1)) &= \frac{p((x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1), \theta)}{p((x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1))} \\ &= \frac{p((x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1) | \theta) f(\theta)}{\sum_{\theta^* \in \Theta} p((x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1) | \theta^*) f(\theta^*)} \\ &= \frac{\frac{1}{9} \binom{5}{3} \theta^3 (1 - \theta)^{5-3}}{\frac{1}{9} \binom{5}{3} \{0.1^3 (1 - 0.1)^{5-3} + \dots + 0.9^3 (1 - 0.9)^{5-3}\}} \end{aligned}$$

사후확률로부터 $f(\theta = 0.5 | (x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1)) = 0.1875$ 이다 (계산과정은 아래에 있음).

각 $\theta = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ 에 대해 사후확률 값을 계산하면 다음과 같다.

```
n = 5
x = 3
p = seq(0.1, 0.9, 0.1)
```

```
dbinom(x, n, 0.5) # Binomial(n = 5, x = 3, prob = 0.5)
```

```
## [1] 0.3125
```

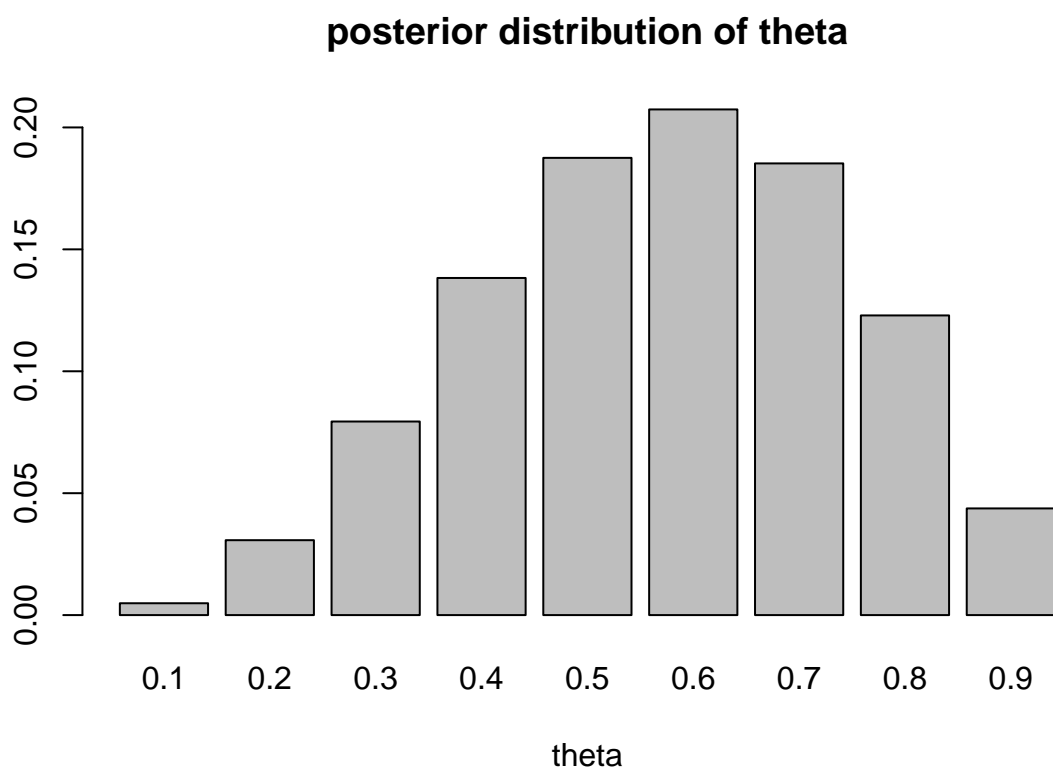
```
sum( dbinom(x, n, p) ) # Binomial(n = 5, x = 3, prob = 0.1, 0.2, ..., 0.9)
```

```
## [1] 1.6665
```

```
dbinom(x, n, 0.5) / sum( dbinom(x, n, p) ) # theta = 0.5일때의 사후확률
```

```
## [1] 0.1875188
```

```
tb = dbinom(x, n, p) / sum( dbinom(x, n, p) ) # 각 theta = 0.1, 0.2, ..., 0.9 일때의 사후확률
names(tb) = p
barplot(tb, main = "posterior distribution of theta", xlab = "theta")
```



문제 3-5.

(1) $p((x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1) | \theta = 0.5) = (0.5)^3 (0.5)^{5-3} = \frac{1}{2^5} = 0.3125$

(2) $p(X_1, \dots, X_5) = \sum_{\theta^* \in \Theta} p((X_1, \dots, X_5) = (1, 1, 0, 0, 1) | \theta^*) f(\theta^*) = 1.665$

(3) X_1, \dots, X_5 는 서로 독립이고 동일한 분포를 따르므로 서로 교환이 가능하다.