

hw 7 solution

Statistical Computing, Jieun Shin

Autumn 2021

문제 1.

1. $Cov(X, Y), Var(Y), Cor(X, Y)$ 의 이론적 값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$(a) \quad Cov(X, Y) = Cov(X, \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \eta) = \rho Cov(X, X) + \sqrt{1 - \rho^2} Cov(X, \eta) = \rho Var(X) + \sqrt{1 - \rho^2} Cov(X, \eta) = \rho \cdot 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot 0 = \rho$$

$$(b) \quad Var(Y) = Var(\rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \eta) = \rho^2 Var(X) + (1 - \rho^2) Var(\eta) = \rho^2 \cdot 1 + (1 - \rho^2) \cdot 1 = 1$$

$$(c) \quad Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \rho$$

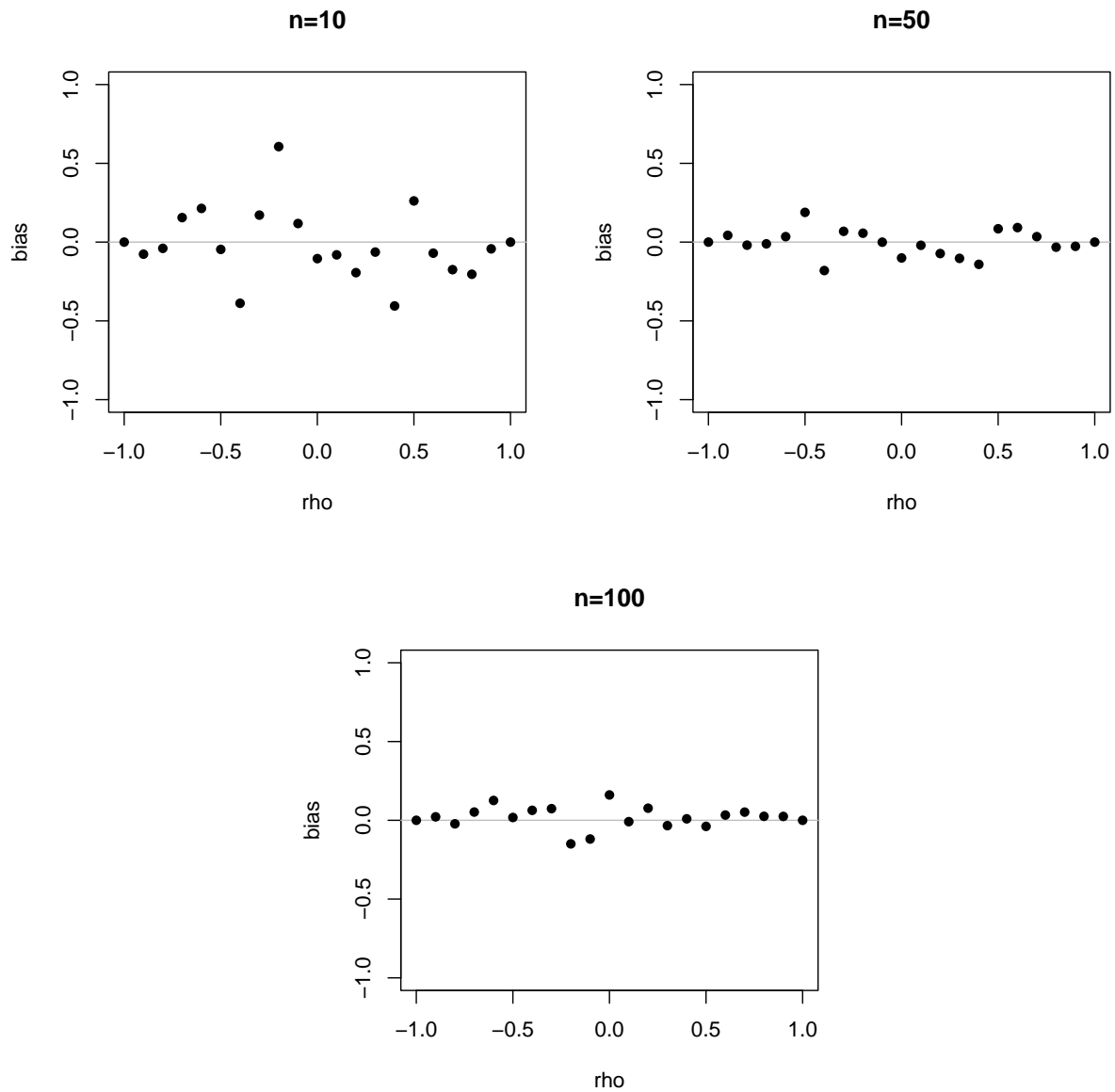
2. 모든 ρ 와 n 의 조합에서 ρ 의 편향값의 패턴을 보면, n 이 작을 때 편향이 크며 n 이 커질수록 편향이 0에 가까워짐을 확인할 수 있다.

```
set.seed(123)
for(n in c(10, 50, 100)){

  plot(-1:1, -1:1, type = 'n', xlab = "rho", ylab = "bias", main = paste0("n=", n))
  abline(h = 0, col = "grey")

  for(rho in seq(-1, 1, 0.1)){
    x = rnorm(n)
    eta = rnorm(n)
    y = rho * x + sqrt(1 - rho^2) * eta

    points(rho, cor(x, y) - rho, pch = 16)
  }
}
```



문제 2.

1. $X_1, \dots, X_{25} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 일 때 $H_0 : \lambda = 2$ vs $H_1 : \lambda > 2$ 을 검정하고자 한다. 검정통계량 $Z = \frac{\bar{X}-2}{\sqrt{2/25}}$ 에 대하여 $\alpha = 0.05$ 에서 $Z \geq 1.645$ 이면 기각한다고 할 때 제 1종 오류율의 경험적 추정값은 다음과 같이 구할 수 있으며, 모의실험을 통해 0.057을 얻었다.

다음의 과정을 $j = 1, \dots, m$ 번 반복한다:

- (a) $\text{Poisson}(2)$ 로부터 X_1, \dots, X_{25} 을 생성한다.
- (b) 검정통계량 $Z_j = \frac{\bar{X}_j - 2}{\sqrt{2/25}}$ 을 계산한다.

경험적 추정값 $\hat{p} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(Z_j \geq 1.645)$ 을 구한다.

```

set.seed(123)
N = 25
lam = 2
alpha = 0.05
m = 1000
z = NULL

for(i in 1:m){
  x = rpois(N, lam)
  z[i] = (mean(x) - lam) / sqrt(lam/N)
}

# 경험적 추정값
mean(z >= 1.645)

```

```
## [1] 0.057
```

2. $\lambda \in [2, 4]$ 에 대하여 추정된 검정력 곡선을 그리면 다음과 같다. λ 가 커질수록 검정력이 높아짐을 알 수 있다.

다음의 과정을 $j = 1, \dots, m$ 번 반복한다:

- (a) $Poisson(\lambda)$ 로부터 X_1, \dots, X_{25} 을 생성한다.
- (b) 검정통계량 $Z_j = \frac{\bar{X}_j - 2}{\sqrt{2/25}}$ 을 계산한다.
- (c) 경험적 추정값 $\hat{\pi} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(Z_j \geq 1.645)$ 을 구한다.

```

set.seed(123)
N = 25
lams = seq(2, 4, 0.1)
alpha = 0.05
m = 1000
b = NULL
e = matrix(0, length(lams), 2)

for(i in 1:length(lams)){
  lam = lams[i]
  z = sapply(1:m, function(j) (mean(rpois(N, lam)) - 2) / sqrt(lam/N))
  zz = mean(z >= 1.645)
  b = c(b, zz)
  e[i, 1] = zz - 2 * sqrt( (zz * (1 - zz)) / m )
  e[i, 2] = zz + 2 * sqrt( (zz * (1 - zz)) / m )
}

# 검정력 곡선
plot(lams, b, pch = 16, xlab = "lambda", ylab = "power", col = "red", type = 'b')
arrows(lams, e[, 1], lams, e[, 2], length = 0.05, angle = 90, code = 3)

```

