베이지안통계학 과제8 solution

Jieun Shin

Spring 2022

문제 9-1. (10점)

- 포아송 분포의 제프리 사전분포는 $\pi(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta}}$ (5점, 부분점수 없음)
- 음이항 분포에 대한 제프리 사전분포는 $\pi(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\theta^2(1-\theta)}}$ (5점, 결과가 틀리면 2점)

(1) $X \sim Poi(\theta)$라 하자. 그러면 θ에 대한 피셔의 정보상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(X|\theta) &= \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \\ \log f(X|\theta) &= -\theta + x\log\theta - \log x! \\ \frac{d}{d\theta}\log f(X|\theta) &= -1 + \frac{x}{\theta} \\ \frac{d^2}{d\theta^2}\log f(X|\theta) &= -\frac{x}{\theta^2} \\ \therefore I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\log f(X|\theta)\right] &= \frac{E[X]}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

따라서 제프리 사전분포는 $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{\theta}}$ 이다.

(2) $NB(n,\theta)$는 n번의 성공이 주어졌을 때 x번의 시행을 한 경우의 분포를 의미한다. 그리고 θ는 성공할 확률이다. pdf로는 $f_X(x;n,p) = \binom{x-1}{n-1}\theta^n(1-\theta)^{x-n}$ 이고, 기댓값은 $E(X) = \frac{n}{\theta}$ 이다.

그러면 θ에 대한 피셔의 정보상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_X(x;n,p) &= \binom{x-1}{n-1}\theta^n(1-\theta)^{x-n} \\ \log f_X(x;n,p) &= n\log\theta + (x-n)\log(1-\theta) \\ \frac{d}{d\theta}\log f_X(x;n,p) &= \frac{n}{\theta} - \frac{x-n}{1-\theta} \\ \frac{d^2}{d\theta^2}\log f_X(x;n,p) &= -\frac{n}{\theta^2} - \frac{x-n}{(1-\theta)^2} \\ \therefore I(\theta) = -E_\theta\big[\frac{d^2}{d\theta^2}\log f_X(x;n,p)\big] &= E_\theta\left[\frac{n}{\theta^2} + \frac{x-n}{(1-\theta)^2}\right] = \frac{n}{\theta^2} + \frac{E[X]-n}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)} \end{aligned}$$

따라서 제프리 사전분포는 $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)} = \sqrt{\frac{n}{\theta^2(1-\theta)}} \propto \sqrt{\frac{1}{\theta^2(1-\theta)}}$ 이다.

문제 9-3. (10점)

- $U(0,\theta)$의 변환불변 사전분포는 $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta}$ (5점, 위치모수라고 한 경우 0점)
- $U(\theta-1,\theta+1)$의 변환불변 사전분포는 $\pi(\theta)=1$ (5점)

(1) $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}I(0\le x\le\theta)=\frac{1}{\theta}I(0\le\frac{x}{\theta}\le 1)=\frac{1}{\theta}h(\frac{x}{\theta})$의 꼴로 표현되므로 θ는 척도모수이다 (θ의 변화에 따라 X 범위의 비율이 변함). 척도변환에 대하여 불변인 사전밀도 함수를 구해보자.

$\pi_1(\theta)$를 θ에 대한 무정보 사전밀도라 하자. 척도변환 $Y=\frac{X}{c}$를 고려하면 $\gamma=\frac{\theta}{c}$에 대하여 $Y\sim Unif(0,\gamma)$ 이다.

γ에 대한 무정보 사전밀도를 $\pi_2(\gamma)$라 하면 $\pi_1(\theta)=\pi_2(\gamma)$가 성립해야 한다. $\gamma=\frac{\theta}{c}$이므로 $\pi_1(\theta)=\frac{1}{\theta}\pi_2(\frac{\theta}{c}$ 이고 $c=\theta$로 놓으면, $\pi_1(\theta)=\frac{1}{\theta}\pi_2(1)=\frac{1}{\theta}$ 이다.

따라서 척도변환에 대하여 불변인 사전밀도는 $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta}$ 이다.

(2) $f(x;\theta)=0.5I(\theta-1\le x\le\theta+1)=0.5I(-1\le x-\theta\le 1)$ 이므로 θ는 위치모수이다. 위치변환에 대하여 불변인 사전밀도 함수를 구해보자.

$\pi_1(\theta)$를 θ에 대한 무정보 사전밀도라 하자. 위치변환 $Y=X+c$를 고려하면 $\eta=\theta+c$에 대하여 $Y\sim Unif(\eta-1,\eta+1)$ 이다.

η에 대한 무정보 사전밀도를 $\pi_2(\eta)$라 하면 $\pi_1(\theta)=\pi_2(\eta)$가 성립해야 한다. 즉, $\eta=\theta+c$에 대해 $\pi_1(\theta)=\pi_2(\eta)$ 이어야 한다. $c=\theta$로 놓으면, $\pi_1(\theta)=\pi_2(0)=1$ 이다.

따라서 위치변환에 대하여 불변인 사전밀도는 $\pi(\theta)=1$ 이다.