베이지안통계학 과제2 solution

Jieun Shin

Spring 2022

문제 3-4. 앞면이 나올 확률을 θ라 할 때, 확률변수 $X_i, i = 1, \dots, 5$는 θ를 모수로 가지는 베르누이분포를 따른다. 즉, $X_1, \dots, X_5 \sim Ber(\theta)$ 이다. 그리고 이 동전이 앞면이 나오는 확률 θ을 변수라 하면, θ는 이산균일분포를 따르므로 $f(\theta) = \frac{1}{9}, \theta \in \Theta = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$라고 할 수 있다.

$(x_1, \dots, x_5) = (1, 1, 0, 0, 1)$ 일 때, 사후확률은 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
f(\theta|(x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1)) &= \frac{p((x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1), \theta)}{p((x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1))} \\
&= \frac{p((x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1)|\theta) f(\theta)}{\sum_{\theta^* \in \Theta} p((x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1)|\theta^*) f(\theta^*)} \\
&= \frac{\frac{1}{9}\theta^3(1-\theta)^2}{\frac{1}{9}\{0.1^3(1-0.1)^2 + \cdots + 0.9^3(1-0.9)^2\}}
\end{aligned}
$$

사후확률로부터 $f(\theta = 0.5|(x_1, \dots, x_5) = (1,1,0,0,1)) = 0.1875$ 이다 (계산과정은 아래에 있음).

각 $\theta = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$에 대해 사후확률 값을 계산하면 다음과 같다.

```
p = seq(0.1, 0.9, 0.1)

px = function(n, x, p){
  p^{x} * (1 - p)^{n - x}
}

px(n = 5, x = 3, p = 0.5)
```

```
## [1] 0.03125
```

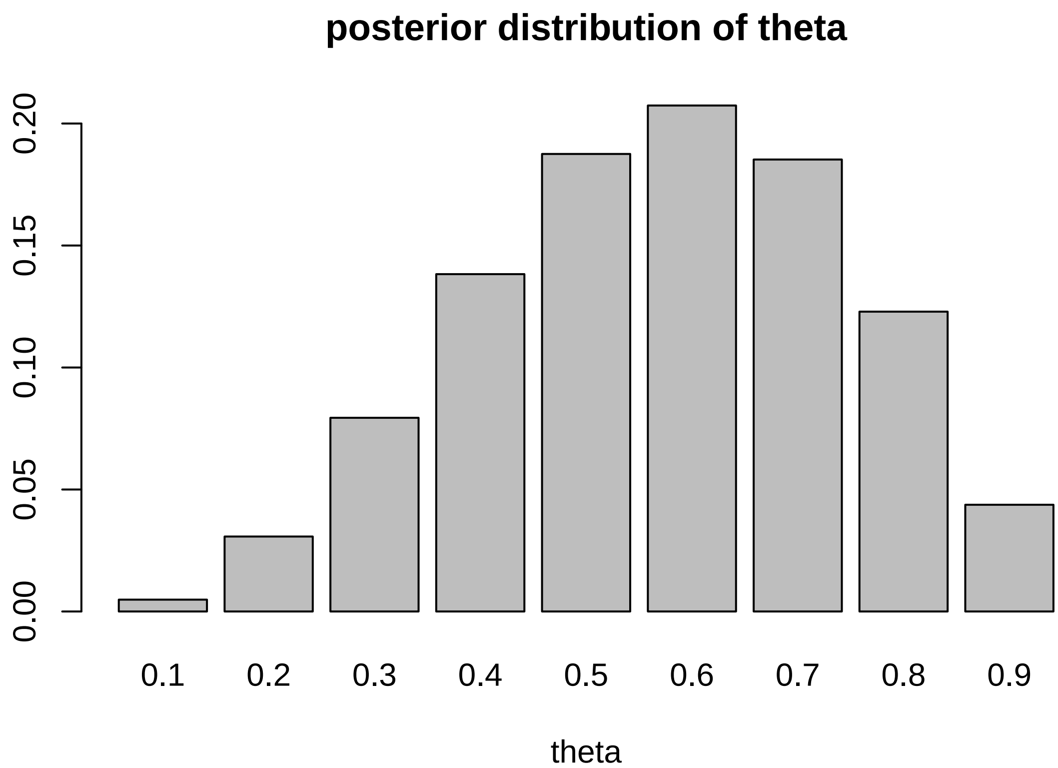
```
sum( px(n = 5, x = 3, p = p) )
```

```
## [1] 0.16665
```

```
px(n = 5, x = 3, p = 0.5) / sum( px(n = 5, x = 3, p = p) ) # theta = 0.5일때의 사후확률
```

```
## [1] 0.1875188
```

```
tb = px(n = 5, x = 3, p = p) / sum( px(n = 5, x = 3, p = p) ) # 각 theta = 0.1, 0.2, ..., 0.9 일때의 사
names(tb) = p
barplot(tb, main = "posterior distribution of theta", xlab = "theta")
```



문제 3-5.

(1) $p((x_1, \ldots, x_5) = (1,1,0,0,1)|\theta = 0.5) = (0.5)^3(0.5)^{5-3} = \frac{1}{2^5} = 0.03125$

(2) $p(X_1, \ldots, X_5) = \sum_{\theta^* \in \Theta} p((X_1, \ldots, X_5) = (1,1,0,0,1)|\theta^*)f(\theta^*) = 0.1665$

(3) $X_1, \ldots, X_5$는 서로 독립이고 동일한 분포를 따르므로 서로 교환이 가능하다.