homework 6

Topics in Statistics 1, Jieun Shin

2021.11.18

5.19

$X \sim \text{Exp}(\lambda_0)$ 일 때, $l = \mathbb{E}_{\lambda_0}[H(X)]$ 를 추정하는데 최적의 λ^* 를 구하고자 한다. X 가 지수족 분포를 따르는 확률변수이므로

$$\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\theta)}{c(\theta)} + T(X)\right)\right] = 0$$

을 만족하는λ 가 λ^* 이다.

한 편, 모수 θ 를 가지는 일반적인 지수족 분포 $g(x;\theta) = h(x)\exp(\eta(\theta)T(x))c(\theta)$ 의 형태로 표현하면

$$\nabla \log g(x;\theta) = \nabla\eta(\theta)T(x) + \nabla \log c(\theta)$$

이고, 여기서 $\eta(\theta) = \theta$ 일 때,

$$\nabla \log g(x;\theta) = T(x) + \frac{\nabla c(\theta)}{c(\theta)}$$

가 된다.

문제의 $f(x;\lambda) = \lambda \exp(-x/\lambda)$ 를 지수족 분포의 형태에 따라 정리하면

$$\nabla \log f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

이므로 최적의 모수는 다음 과정에 의해 찾을 수 있다:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\lambda)}{c(\lambda)} + T(X)\right)\right] &= 0 \\
\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(\frac{1}{\lambda} - X\right)\right] &= 0 \\
\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[\frac{H(X)}{\lambda}\right] - \mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X\right] &= 0 \\
\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\right] &= \mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X\right] \\
\therefore \lambda^* &= \frac{\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\right]}{\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X\right]}
\end{aligned}$$

5.20

$X \sim \text{Weib}(\alpha, \lambda_0)$ 일 때, $l = \mathbb{E}_{\lambda_0}[H(X)]$ 를 추정하는데 최적의 λ^* 를 구하고자 한다. 이 때, λ^* 를 찾는 데 식

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\theta)}{c(\theta)} + T(X)\right)\right] = 0$$

을 이용해보자.

X 는 분포 $f(x;\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda^\alpha}x^{\alpha-1}e^{\left(-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}$ 를 따른다. 여기서 $\theta=\lambda^\alpha$ 로 놓으면

$$f(x;\theta)=\frac{\alpha}{\theta}x^{\alpha-1}e^{\left(-\frac{x^\alpha}{\theta}\right)}$$

으로 표현된다.

$\log f(x;\theta)$ 의 편도함수는

$$\nabla \log f(x;\theta)=-\frac{1}{\theta}+x^\alpha\frac{1}{\theta^2}$$

이므로

$$c(\theta)=-\frac{1}{\theta},\quad \nabla c(\theta)=\frac{1}{\theta^2},\quad T(x)=x^\alpha,$$

이고, λ 에 대하여

$$c(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^\alpha},\quad \nabla c(\lambda)=\frac{1}{\lambda^{2\alpha}},$$

로 놓으면 λ^* 는 다음 과정에 의해 찾을 수 있다:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\lambda)}{c(\lambda)}+T(X)\right)\right]&=0\\
\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(-\frac{1}{\lambda^\alpha}+X^\alpha\right)\right]&=0\\
-\frac{1}{\lambda^\alpha}\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\right]+\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X^\alpha\right]&=0\\
\frac{1}{\lambda^\alpha}\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\right]&=\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X^\alpha\right]\\
\therefore \lambda^*&=\left(\frac{\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\right]}{\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)X^\alpha\right]}\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

5.21

$X_1,\ldots,X_n \sim^{i.i.d}$ $\mathrm{Exp}(\theta_0=1)$ 라 하자. $S(X)=\sum_{i=1}^n X_i$ 라 할 때, $l=\mathbb{E}[H(X)]=\mathbb{E}[I(S(X)\geq\gamma)]$ 를 추정하는데 최적의 θ^* 를 구하고자 한다. $X_i, i=\ldots,n$ 가 rate가 1인 지수분포를 따르므로 $S(X)$ 는 $\mathrm{Gamma}(n,\theta)$ 따르므로 $S(X)$ 역시 지수족 분포를 따르는 확률변수이다. 따라서

$$\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\theta)}{c(\theta)}+T(X)\right)\right]=0$$

을 만족하는θ 가 θ^* 이다.

문제의 $f(s;\theta)=\frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}s^{n-1}e^{-\frac{s}{\theta}}$ 의 편도함수 $\log f(x;\theta)$ 는

$$\nabla \log f(s;\theta)=\frac{-n}{\theta}+\frac{s}{\theta^2}$$

이므로

$$c(\theta)=-\frac{1}{\theta},\quad \nabla c(\theta)=\frac{1}{\theta^2},\quad T(s)=s, T(x)=\sum_{i=1}^n x_i$$

로부터 θ^* 를 다음 과정에 의해 찾을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\left(\frac{\nabla c(\theta)}{c(\theta)}+T(X)\right)\right] &= 0 \\
\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\left(-\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] &= 0 \\
-\frac{n}{\theta}\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\right]+\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= 0 \\
\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\right] = \theta \mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
\therefore \theta^* = \frac{\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\right]}{\mathbb{E}_{\theta_0}\left[H(X)\bar{X}\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\theta_0}\left[I(S(X)\geq\gamma)\right]}{\mathbb{E}_{\theta_0}\left[I(S(X)\geq\gamma)\bar{X}\right]}
\end{aligned}
$$

5.22

함수 $G(z) = \frac{1}{\lambda_0} z^{\frac{1}{\alpha}}$ 와 $\tilde{H}(z) = H(G(z))$ 를 정의하자.

(a) $G(Z)$ 의 cdf를 구하면 다음과 같다:

$$
F(G(Z)) = \mathbb{P}(G(Z) \leq z) = \mathbb{P}(\frac{1}{\lambda_0} Z^{\frac{1}{\alpha}} \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq (\lambda_0 z)^{\alpha}) = \int_{-\infty}^{(\lambda_0 z)^{\alpha}} e^{-t} dt = 1 - e^{(\lambda_0 z)^{\alpha}}
$$

이는 $\text{Weib}(\alpha, \lambda_0)$ 의 cdf인 $1 - e^{(\lambda_0 z)^{\alpha}}$ 와 동일하므로 $G(Z) \sim \text{Weib}(\alpha, \lambda_0)$ 이다.

(b) $l = \mathbb{E}_X[H(X)] = \mathbb{E}_Z[H(G(Z))] = \mathbb{E}_Z[\tilde{H}(Z)]$ 의 TLR 방법의 추정치는 $\hat{l} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{H}(Z) W(Z_k; 1, \eta)$ 이다. 여기서 $W(Z_k; 1, \eta) = \frac{h(Z_k;1)}{h(Z_k;\eta)}$ 로 정의되며, Z 는 $h(z_k; \eta)$ 에서 생성된다. 즉, $h(z_k; \eta)$ 는 rate가 η 인 지수분포이다.

(c) 최적의 θ^* 는 $\mathbb{E}_\eta[\tilde{H}(Z) W(Z_k; 1, \eta) \log h(Z; \theta)]$ 을 최대화하는 θ 와 같다:

$$
\theta^* = \max_\theta \mathbb{E}_\eta[\tilde{H}(Z) W(Z_k; 1, \eta) \log h(Z; \theta)]
$$

위 기댓값을 θ 에 대해 미분하여 0이 되는 θ 를 찾자:

$$
\mathbb{E}_\eta[\tilde{H}(Z) W(Z_k; 1, \eta) \nabla \log h(Z; \theta)] = 0
$$

$h(z; \theta) = \theta\ e^{-\theta z}$ 이므로 $\nabla \log h(z; \theta) = \frac{1}{\theta} - z$ 이다. 따라서 최적의 θ^* 는 다음과 같이 정해진다:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\eta[\tilde{H}(Z) W(Z; 1, \eta) \nabla \log(\theta e^{-\theta Z})] &= 0 \\
\mathbb{E}_\eta\left[\tilde{H}(Z) W(Z; 1, \eta)\left(\frac{1}{\theta} - Z\right)\right] &= 0 \\
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}_\eta\left[\tilde{H}(Z) W(Z; 1, \eta)\right] = \mathbb{E}_\eta\left[\tilde{H}(Z) Z W(Z; 1, \eta)\right] \\
\therefore \theta^* = \frac{\mathbb{E}_\eta\left[\tilde{H}(Z) W(Z; 1, \eta)\right]}{\mathbb{E}_\eta\left[\tilde{H}(Z) Z W(Z; 1, \eta)\right]}
\end{aligned}
$$

```
library(dplyr)
library(gsignal)
library(nimble)
```

6.2

목표분포를 $f \sim N(10, 1)$ 라 하고, 후보값 Y 은 제안분포 $N(x, 0.01)$ 을 따른다고 할 때, 목표분포를 따르는 확률변수 X 를 생성하기 위해 다음의 random walk 알고리즘을 구현하자.

(1) $N(0, 0.01)$ 로부터 초기값 x_0 을 생성한다.

(2) $t = 1, \ldots, N = 5000$ 에 대해 다음을 반복한다.

   (a) $Z = Y - X_t \sim N(0, 0.01)$ 을 생성한다.

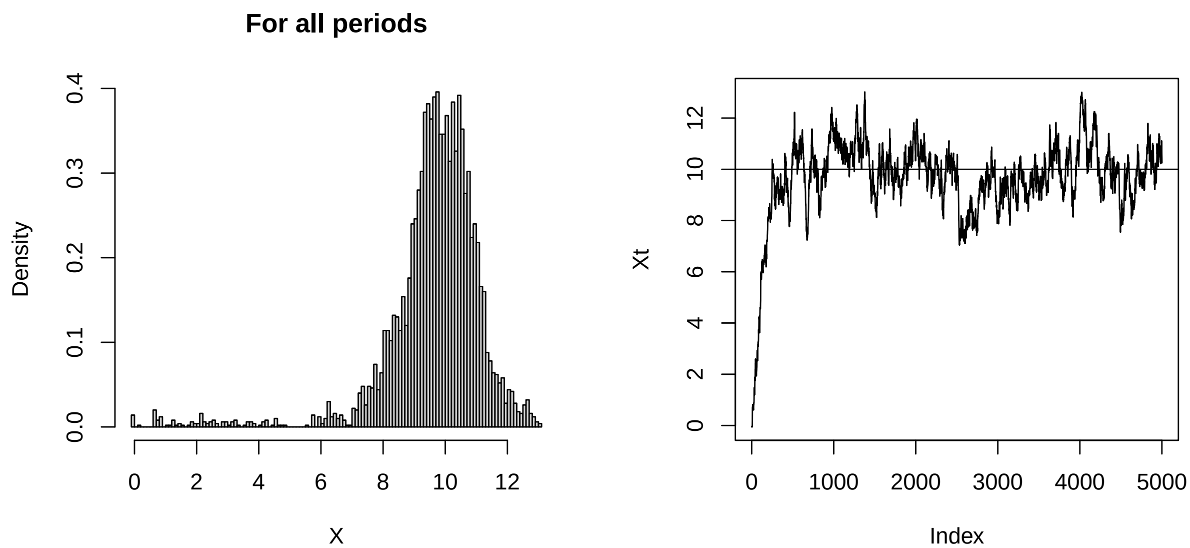
   (b) $U \sim \mathrm{U}(0, 1)$ 을 생성한다.

   (c) $\alpha = \min\{\frac{f(Y)}{f(X_t)}, 1\}$ 에 대하여 만약 $U \leq \alpha$ 이면 $X_{t+1} = Y$ 로 놓고, 그렇지 않으면 $X_{t+1} = X_t$ 로 놓는다.

```
RandomWalk6.2 = function(N, sigma){
  # initialize
  x = rnorm(1, 0, sigma)

  out_x = x  # outcome

  for(t in 1:N){
    t = t + 1

    z = rnorm(1, 0, sigma)
    y = x + 2 * z
    a = min(dnorm(y, 10, 1) / dnorm(x, 10, 1), 1)

    u = runif(1, 0, 1)
    x_new = ifelse(u <= a, y, x)
    out_x[t] = x_new

    x = x_new
  }

  return(out_x)
}
```

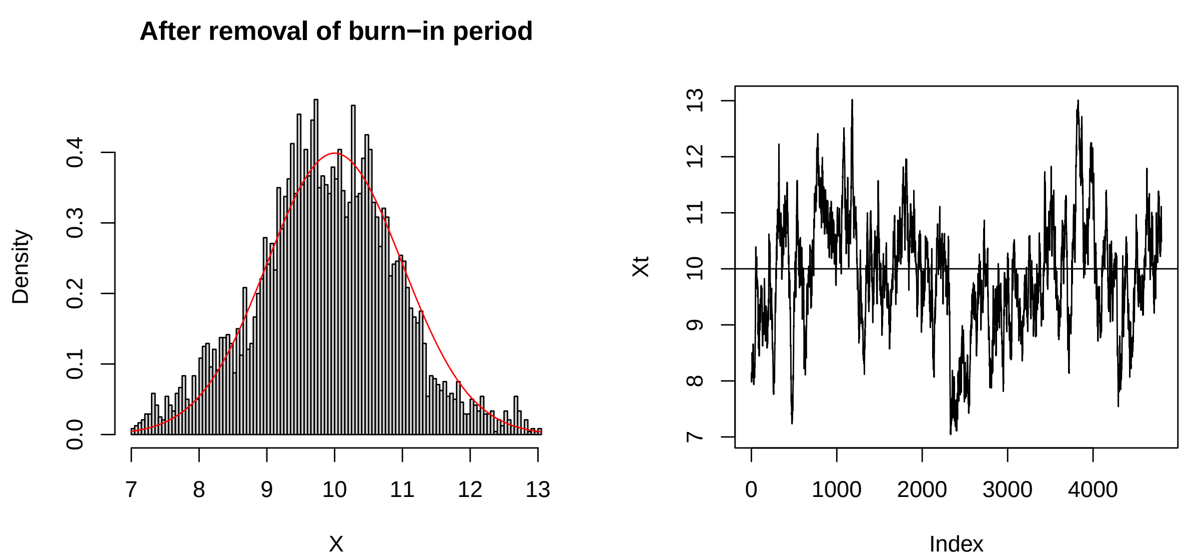
생성된 모든 프로세스 $\{X_t\}$ 들의 히스토그램과 생성 과정을 보면 burn-in 기간이 지난 뒤에는 정상 상태에 도달한 것을 확인할 수 있다.

```
set.seed(123)
N = 5000

X = RandomWalk6.2(N = N, sigma = 0.1)
hist(X , breaks = 100, main = "For all periods", xlab = "X", freq = FALSE)

plot(X, type = 'l', ylab = "Xt")
abline(h = 10)
```



이에 따라 burn-in 기간을 200으로 잡아 X 가 생성한 분포와 목표분포 $N(10, 1)$을 그림을 통해 비교해보았다. X의 분포가 완전히 부드럽지는 않지만 목표분포와 비교적 비슷하게 생성됨을 확인할 수 있으며, 프로세스 역시 정상상태에 도달함을 확인할 수 있다.

```
# burn-in 기간에 속하는 샘플 제거
k = 200
hist(X[k:N] , breaks = 100, main = "After removal of burn-in period", xlab = "X", freq = FALSE)
curve(dnorm(x, 10, 1), add = T, col = "red")

plot(X[k:N], type = 'l', ylab = "Xt")
abline(h = 10)
```



6.3

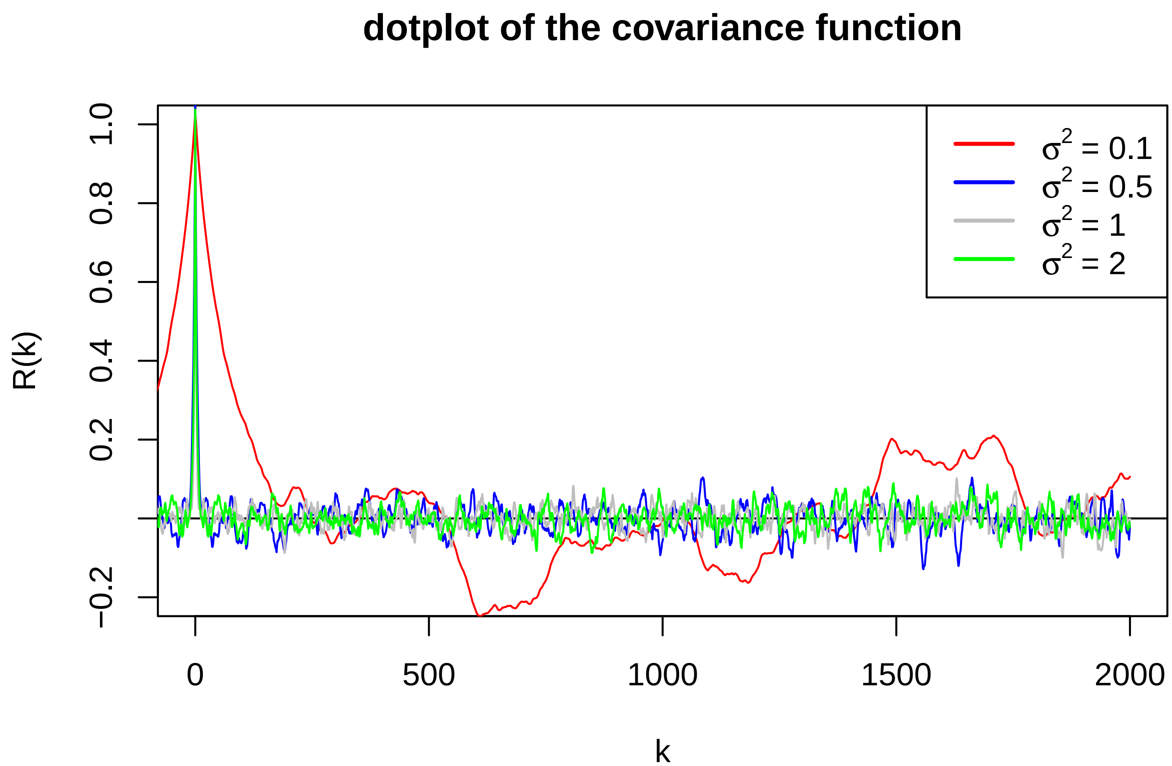
마코프 체인으로 생성한 프로세스는 다음 시점의 값이 전 시점에 의존하므로 독립이지 않는데, 이를 보여주는 것이 교차공분산이다.

각 $\sigma^2 = 0.1, 0.5, 1, 2$에 대한 추정된 공분산 함수의 dotplot을 그려보면 아래의 그래프 결과와 같다. 그래프의 k는 X_0 시점과 k 시점 만큼 떨어진 X_k 시점을 의미하며, $R(k)$은 X_0부터 X_k 사이의 교차공분산을 의미한다. $R(k) = 0$에 가까울수록 상관성이 작아짐을 의미한다. 그래프를 보면 모든 σ^2에 대해 가까운 시점과의 교차공분산은 크고 먼 시점을 포함할수록 교차공분산은 작아진다. 즉, 가까운 시점과는 상관이 크며 멀리 떨어진 시점일수록 작은 상관이 존재함을 의미한다.

또한 제안분포인 정규분포의 분산을 바꾸어 모의실험을 진행하였다. 아래 그래프에서 분산이 가장 작은 $\sigma^2 = 0.1$일 때 상관이 작아지기 위해 필요한 시점의 차이가 커야 하며 (약 200), $\sigma^2 = 0.1$ 이상에서는 상관이 작아지기 위해 필요한 시점의 차이가 비교적 작다 (약 50 이내).

그 이유는 정규분포의 분산이 작을수록 다음 시점의 값을 전 시점의 근처에서 선택할 가능성이 크기 때문에 정규분포의 분산이 클 때보다 가까운 시점과의 상관성이 높기 때문으로 보인다.

```
col_list = c("red", "blue", "grey", "green")
Mlag = 2000

# make empty plot
plot(1:k, seq(0, 1, length.out = k), type = "n",
     xlab = "k", ylab = "R(k)", xlim = c(0, Mlag), ylim = c(-0.2, 1),
     main = "dotplot of the covariance function")
abline(h = 0)

# draw histogram according to changing the sigma
S = c(0.1, 0.5, 1, 2)
i = 0
for(s in S){
  i = i + 1
  X = RandomWalk6.2(N = N, sigma = s)
  XCOV = xcov(X[k:N], maxlag = Mlag, scale = "unbiased")
  points(XCOV$lags, XCOV$C, type = "l", xlim = c(0, Mlag), col = col_list[i], lwd = 1)
}

legend("topright", lwd = 2,
       legend = c(as.expression(bquote(sigma^2 ~ "= 0.1")),
                  as.expression(bquote(sigma^2 ~ "= 0.5")),
                  as.expression(bquote(sigma^2 ~ "= 1")),
                  as.expression(bquote(sigma^2 ~ "= 2"))),
       col = col_list)
```



6.4

목표분포를 $f \sim \text{Exp}(1)$ 라 하고, 후보값 Y 은 제안분포 $\text{Exp}(\lambda)$ 을 따른다고 할 때, 목표분포를 따르는 확률변수 X 를 생성하기 위해 다음의 independence sampler 알고리즘을 구현하자.

(1) 초기값 $x_0 = 1$ 을 부여한다.

(2) 각 $\lambda \in \{0.2, 1, 2, 5\}$ 에 대하여 $t = 1, \ldots, N = 100,000$ 번 다음을 반복한다.

 (a) $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ 을 생성한다.

 (b) $U \sim \text{U}(0, 1)$ 을 생성한다.

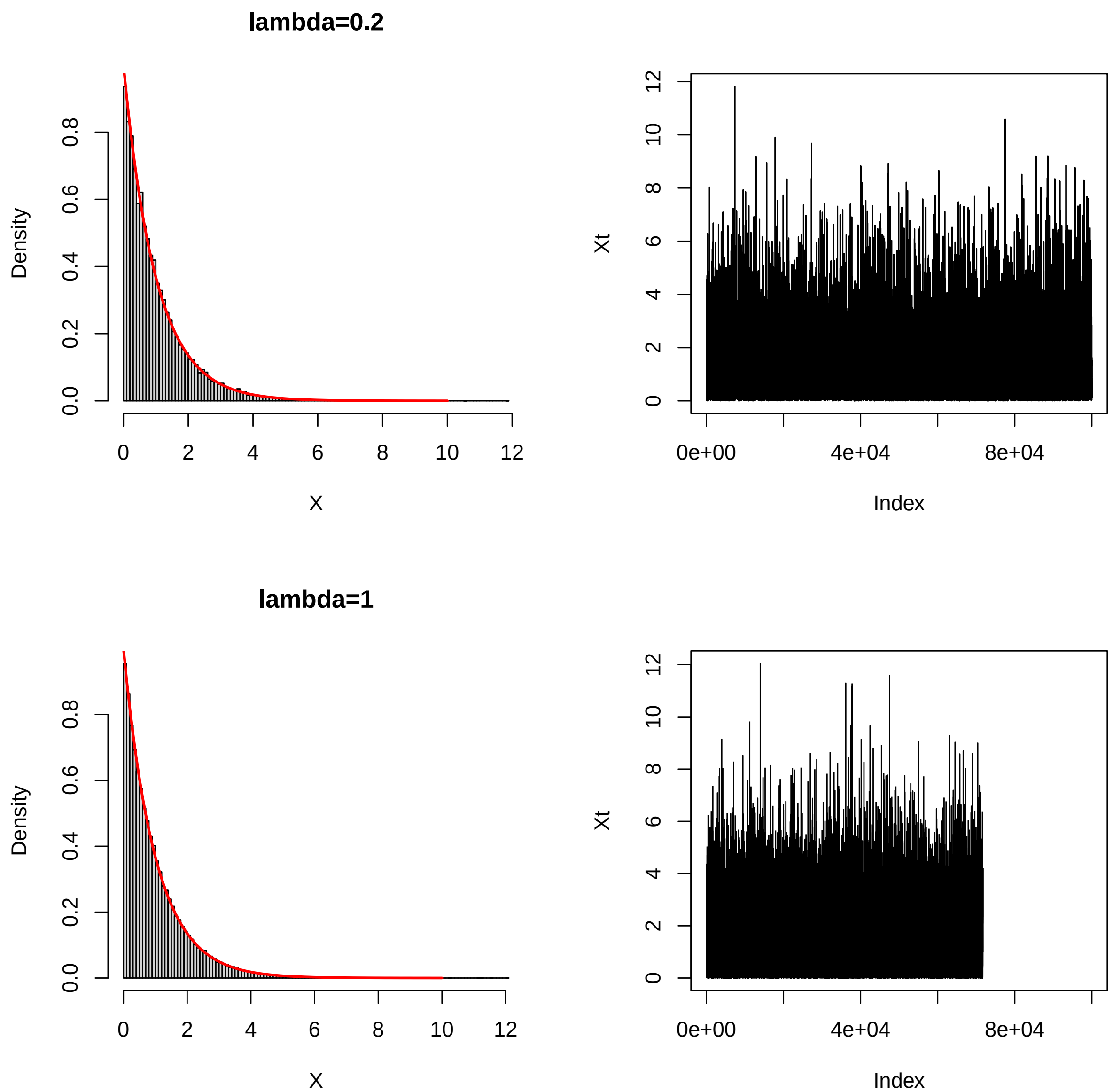
 (c) $\alpha = \min\{\frac{f(Y)g(X)}{f(X_t)g(Y)}, 1\}$ 에 대하여 만약 $U \le \alpha$ 이면 $X_{t+1} = Y$ 로 놓고, 그렇지 않으면 $X_{t+1} = X_t$ 로 놓는다.

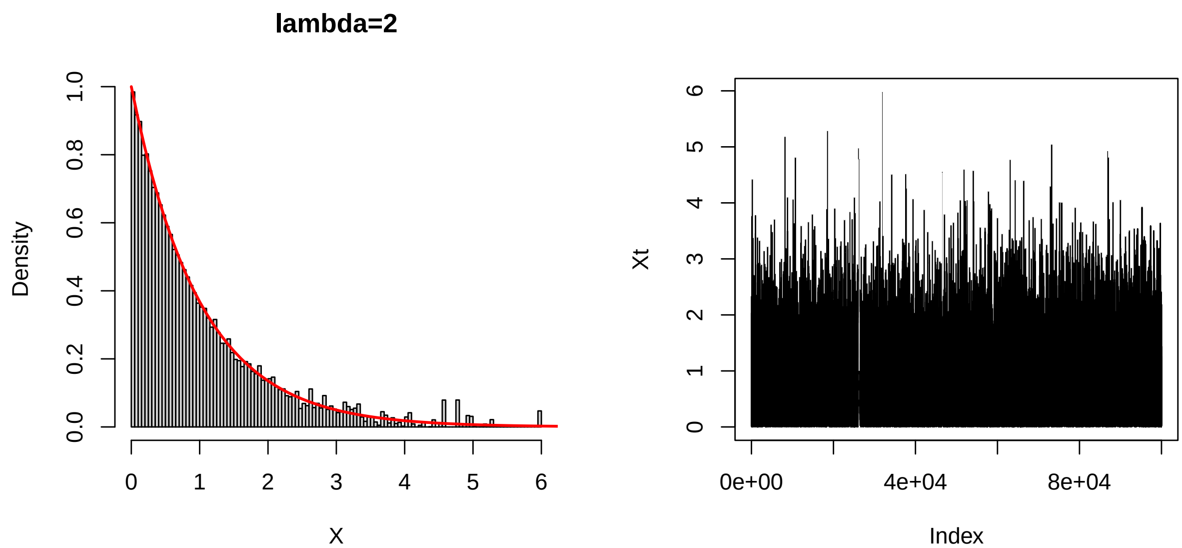
```
IndepSampler6.4 = function(N, lambda){
  # initialize
  x = 1

  out_x = x   # outcome

  for(t in 1:N){
    t = t + 1
    y = rexp(1, lambda)
```

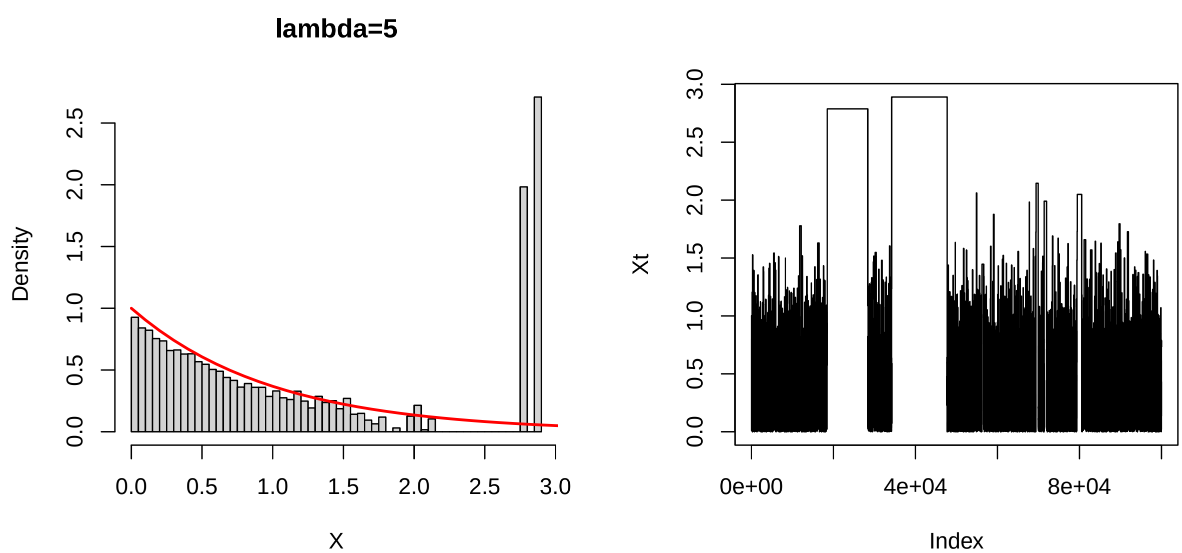
```r
    num = dexp(y, 1) * dexp(x, lambda)
    den = dexp(x, 1) * dexp(y, lambda)
    a = min( num / den, 1)

    u = runif(1, 0, 1)

    x_new = ifelse(u <= a, y, x)

    out_x[t] = x_new

    x = x_new
  }

  return(out_x)
}
```

(a) 각 $\lambda = 0.2, 1, 2, 5$에 대해, independence sampler로 구한 X의 분포와 목표분포 Exp(1)를 비교해보자. 히스토그램은 burn-in 기간 200을 제외하여 그렸으며, 생성된 모든 프로세스 $\{X_t\}$들의 히스토그램과 생성 과정을 보면 burn-in 기간이 지난 후 정상 상태에 도달한 것을 확인할 수 있다.

```r
set.seed(123)
N = 10^5
k = 200
Lambdas = c(0.2, 1, 2, 5)

# draw a graph
for(l in Lambdas){
  X = IndepSampler6.4(N = N, lambda = l)
  hist(X[k:N], breaks = 100, main = paste0("lambda=", l),
       xlab = "X", freq = FALSE)
  curve(dexp(x, 1), 0, 10, col = "red", lwd = 2, add = TRUE)

  plot(X, type = 'l', ylab = "Xt")
}
```


lambda=0.2
Density
X
Xt
Index
0e+00
4e+04
8e+04
lambda=1
Density
X
Xt
Index
0e+00
4e+04
8e+04



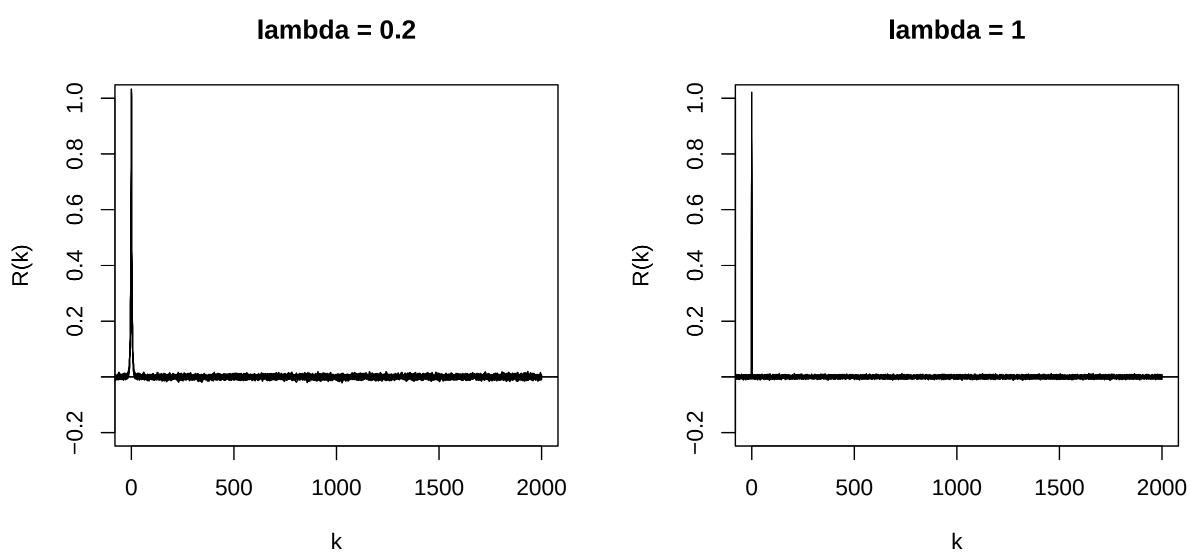


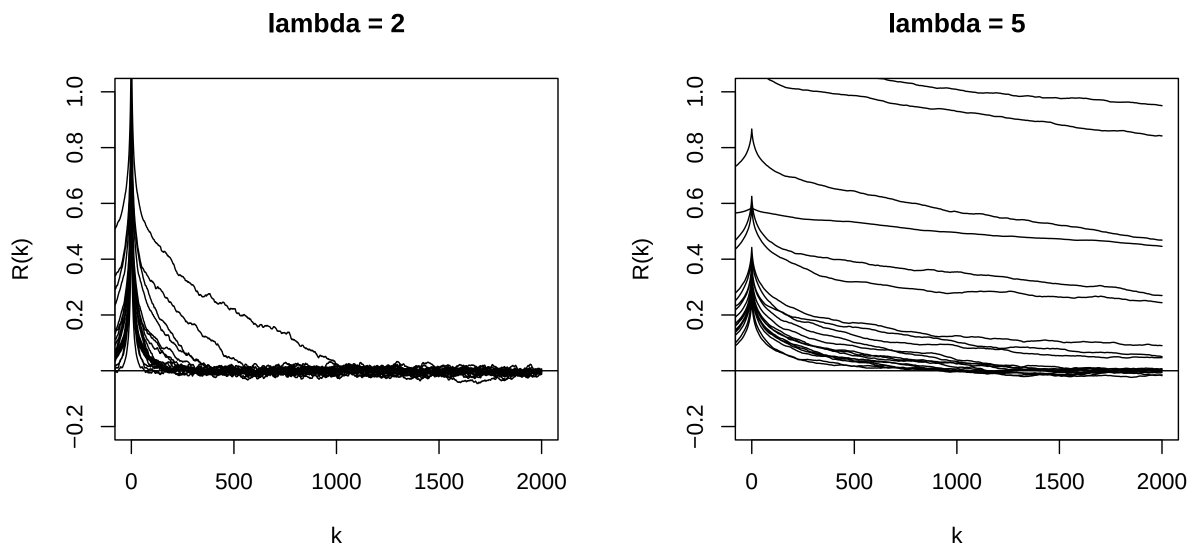
(b) 각 λ에 대해 20번 반복하여 얻은 covariance function과 표본 평균을 그래프로 그려보았다. 먼저 각 λ에 대한 covariance function을 보면 λ가 커질수록 더 작은 범위 내에서 다음 시점 값을 선택한다. 즉, λ가 가장 작은 경우인 $\lambda = 0.2$에서는 $[0, 6]$사이의 비교적 넓은 범위에서 값이 분포하여 적은 시점 (약 $k = 50$)내에 상관이 작아지지만, λ가 가장 큰 경우인 $\lambda = 5$에서는 생성한 값들이 $[0, 1.5]$의 좁은 범위에 분포하기 때문에 상관이 작아지기 위해 비교적 많은 시점 (약 $k = 100$)이 필요하다.

제안분포가 $\lambda > 2$를 가질 때 더 0과 가까우며 오른쪽으로 꼬리가 길고 가늘긴 분포를 가진다. 따라서 다음 시점의 값이 전 시점의 값과 매우 가까운 지점에서 생성될 가능성이 높기 때문에 시차가 작은 샘플 사이의 상관성이 높게 나타나게 된다.

```
Xmean_list = list()    # to save sample mean output

j = 0
for(l in Lambdas){
```

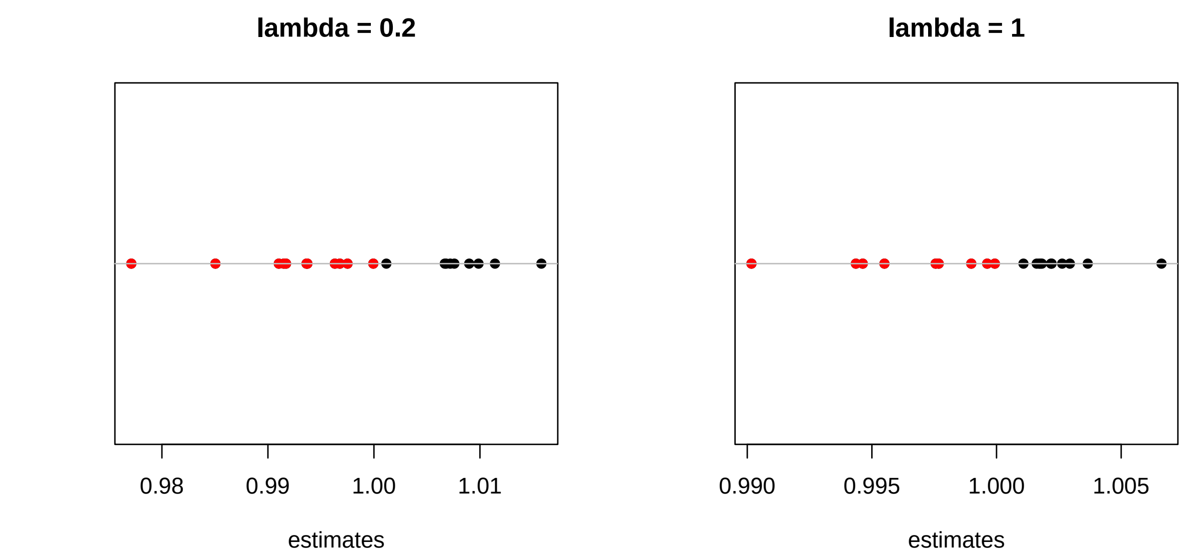
```r
  j = j + 1

  # calculate the 20 sample mean
  Xlist = list()
  Xmean = c()
  for(i in 1:20){
    Xlist[[i]] = IndepSampler6.4(N = N, lambda = l)
    Xmean[i] = mean( Xlist[[i]] )
  }

  Xmean_list[[j]] = Xmean

  # draw the estimated covariance function
  # make blank plot
  plot(1:k, seq(0, 1, length.out = k), type = "n", main = paste0("lambda = ", l),
       xlab = "k", ylab = "R(k)", xlim = c(0, Mlag), ylim = c(-0.2, 1))
  abline(h = 0)

  for(i in 1:20){
    XCOV = xcov(Xlist[[i]][k:N], maxlag = Mlag, scale = "unbiased")
    points(XCOV$lags, XCOV$C, type = "l", xlim = c(0, Mlag), lwd = 1)
  }

  rm(Xlist)
}
```

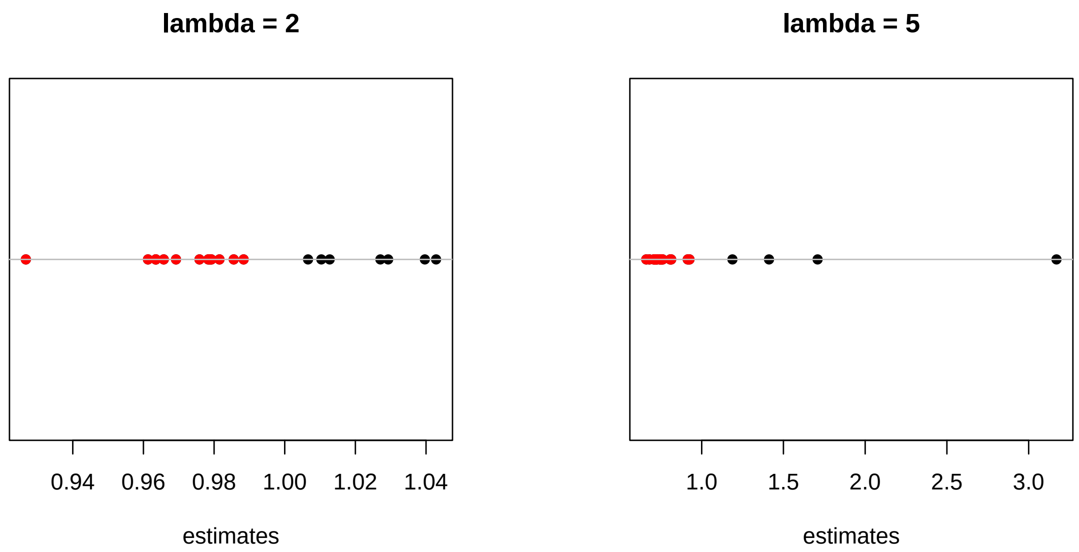




다음으로 각 λ에 대해 20번 반복하여 얻은 표본 평균을 그래프로 그려보았다. $\lambda < 2$인 경우 대체로 표본평균이 참 값인 1 근처에서 나타나지만, $\lambda = 5$ 로 큰 경우 표본 평균이 1 이하의 값을 많이 가지며 큰 값에서 튀는 경우도 발생한다. 따라서 $\lambda = 5$일 때는 목표분포에 적절히 도달하지 못한다고 볼 수 있다.

```
# draw the sample mean dotplot
for(i in 1:4){
  plot(x = Xmean_list[[i]], y = rep(1, 20), pch = 16,
       xlab = "estimates", ylab = "", main = paste0("lambda = ", Lambdas[i]), yaxt = 'n')

  xx = Xmean_list[[i]][Xmean_list[[i]] <= 1]
  points(x = xx, y = rep(1, length(xx)), pch = 16, col = "red")
  abline(h = 1, col = "grey")
}
```





제안분포를 $\lambda = 5$로 줄 때, 표본 평균이 1이하인 갯수는 16개로 나타났다.

```
# lambda = 5일 때 sample mean이 1 이하인 것의 갯수
Xmean_list[[4]][Xmean_list[[4]] <= 1] %>% length
```

```
## [1] 16
```

6.5

제안 상태 Y에 대하여 증분 $Z = Y - X_t$이 DoubleExp(λ)을 따른다고 할 때, 목표분포 $f \sim \text{Exp}(1)$를 따르는 확률변수 X를 생성하기 위한 다음의 random walk 알고리즘을 구현하자.

(1) $N(0, 0.01)$로부터 초기값 x_0을 생성한다.

(2) 각 $\lambda \in \{0.1, 2, 5, 20\}$에 대하여 $t = 1, \ldots, N = 100,000$번 다음을 반복한다.

  (a) $Z = Y - X_t \sim \text{DoubleExp}(\lambda)$을 생성한다.

  (b) $U \sim \text{U}(0, 1)$을 생성한다.

  (c) $\alpha = \min\{\frac{f(Y)}{f(X_t)}, 1\}$에 대하여 만약 $U \leq \alpha$이면 $X_{t+1} = Y$로 놓고, 그렇지 않으면 $X_{t+1} = X_t$로 놓는다.

```
RandomWalk6.5 = function(N, lambda){
  # initialize
  x = 1
  out_x = x   # outcome

  for(t in 1:N){
    t = t + 1

    z = rdexp(n = 1, location = 0, rate = lambda)
    y = x + z
```

```
    a = min(dexp(y, 1) / dexp(x, 1), 1)
    u = runif(1, 0, 1)

    x_new = ifelse(u <= a, y, x)

    out_x[t] = x_new
    x = x_new
  }

  return(out_x)
}
```

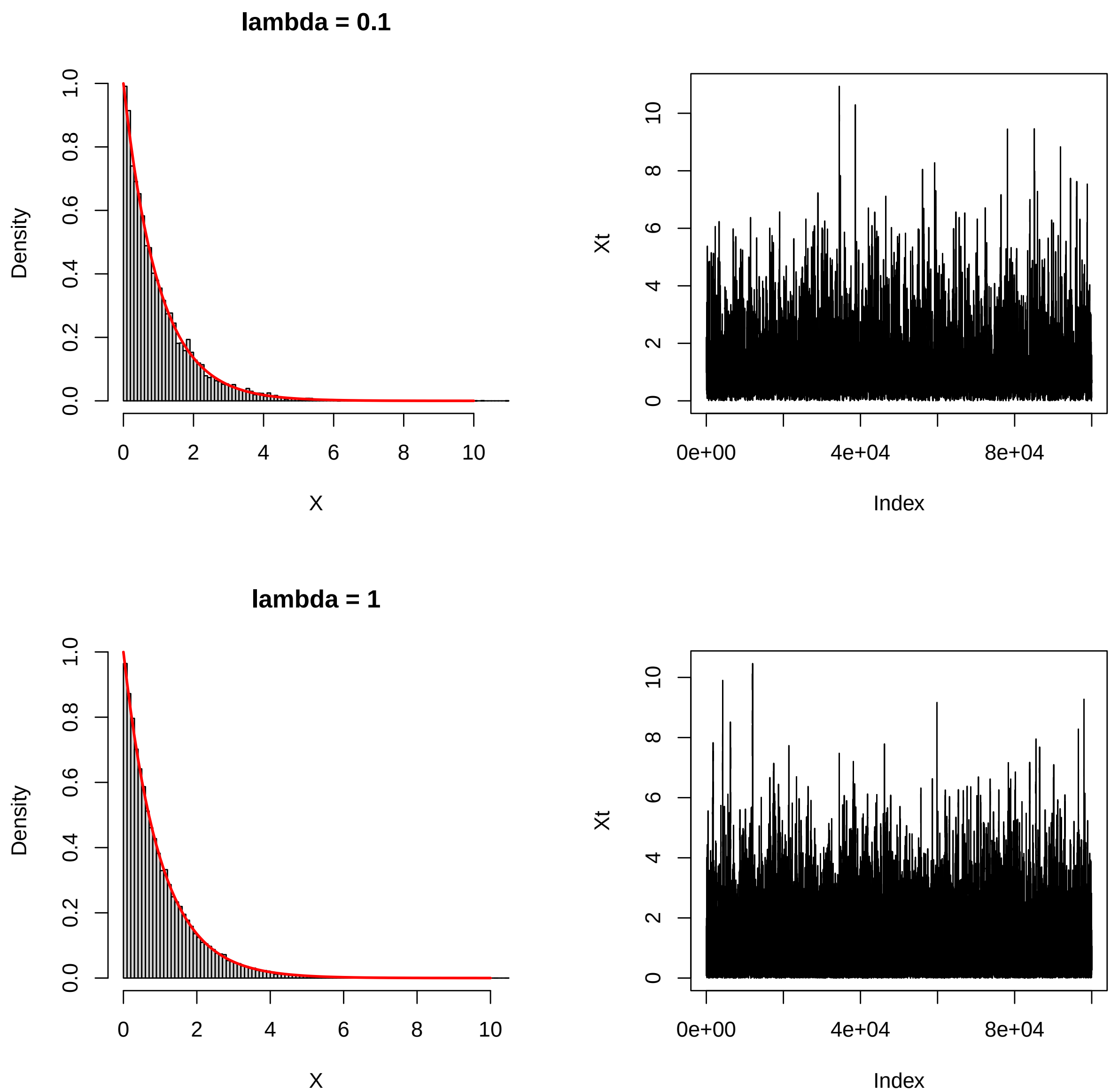
각 $\lambda = 0.1, 1, 5, 20$에 대해, random walk로 구한 X의 분포와 목표분포 Exp(1)를 비교해보자. 히스토그램은 burn-in 기간 200을 제외하여 그렸으며, 생성된 모든 프로세스 $\{X_t\}$들의 히스토그램과 생성 과정을 보면 burn-in 기간이 지난 후 정상 상태에 도달한 것을 확인할 수 있다.

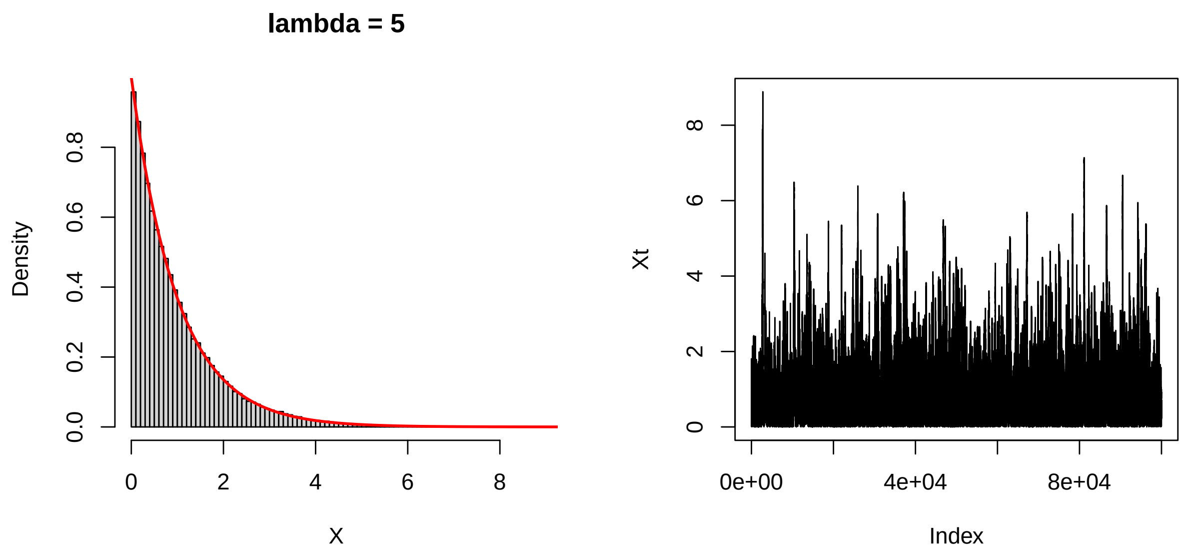
또한 히스토그램을 통해 random walk의 $\lambda = 20$일 때, independence sampler의 $\lambda = 5$에 비해 훨씬 더 안정적으로 목표분포에 도달함을 확인하였다. 이는 random walk의 sample mean의 1 이하의 값이 12개로 independence sampler의 16개보다 적은 것에서도 알 수 있다.

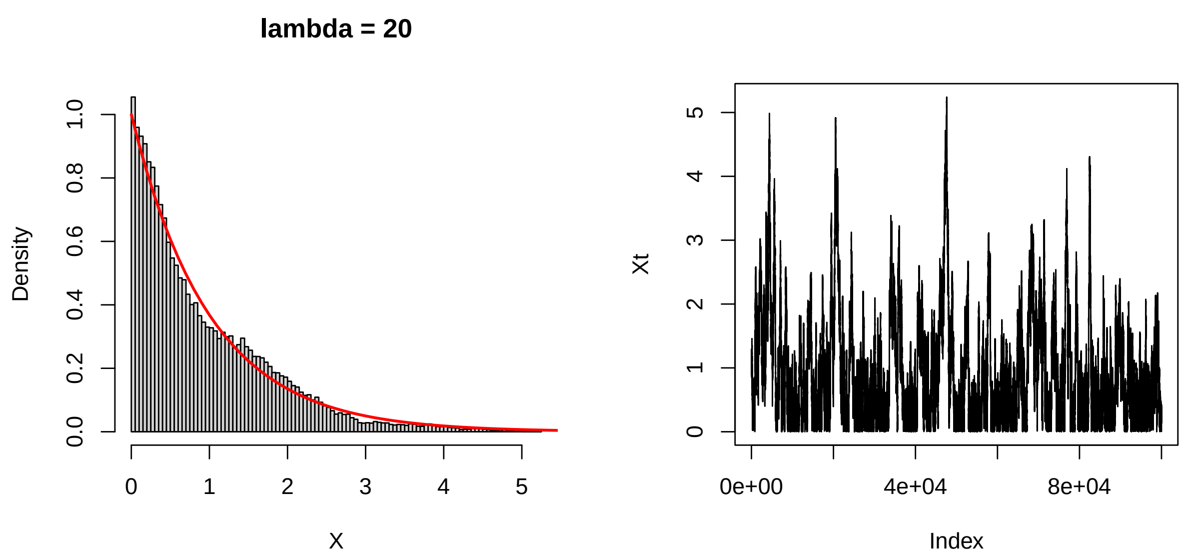
covariance function를 보면 random walk의 공분산이 조금 더 큰 경향이 있지만 λ가 클 때는 random walk의 공분산이 independence sampler보다 전체적으로 튀지않는 모습을 보인다.

아래의 결과들은 independence sampler의 과정에서 행한 동일한 결과를 프린트한 것이며, 각 결과에 대한 설명은 independence sampler 결과와 비교함으로 대체한다.

```
set.seed(123)

Lambdas = c(0.1, 1, 5, 20)
# draw a graph

for(l in Lambdas){
  X = RandomWalk6.5(N = N, lambda = l)
  hist(X[k:N], breaks = 100, main = paste0("lambda = ", l),
       xlab = "X", freq = FALSE)
  curve(dexp(x, 1), 0, 10, col = "red", lwd = 2, add = TRUE)

  plot(X, type = 'l', ylab = "Xt")
}
```


lambda = 0.1
Density
X
Xt
Index
lambda = 1
Density
X
Xt
Index

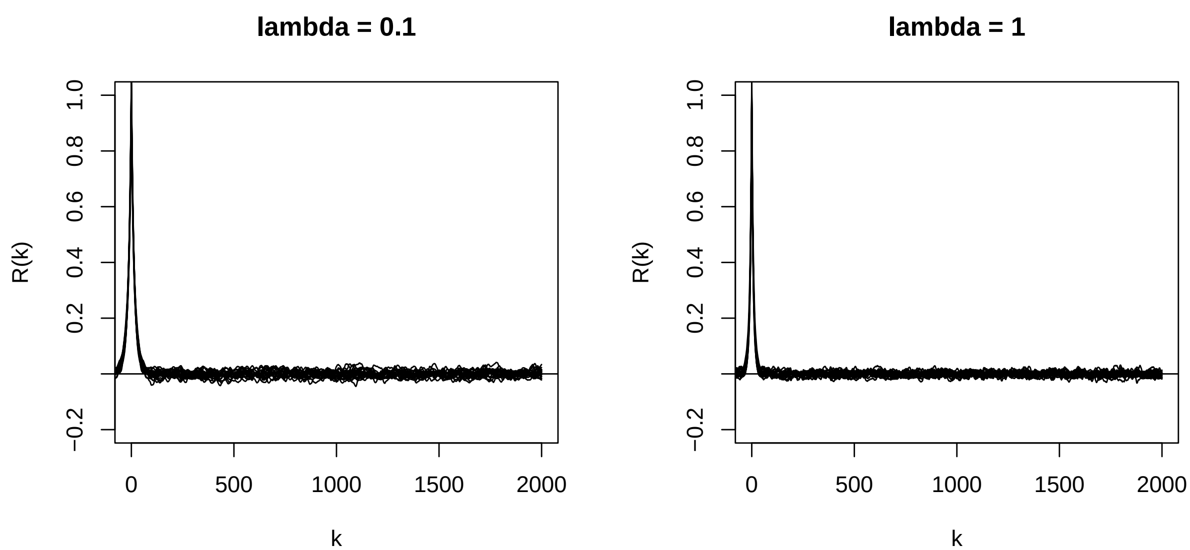


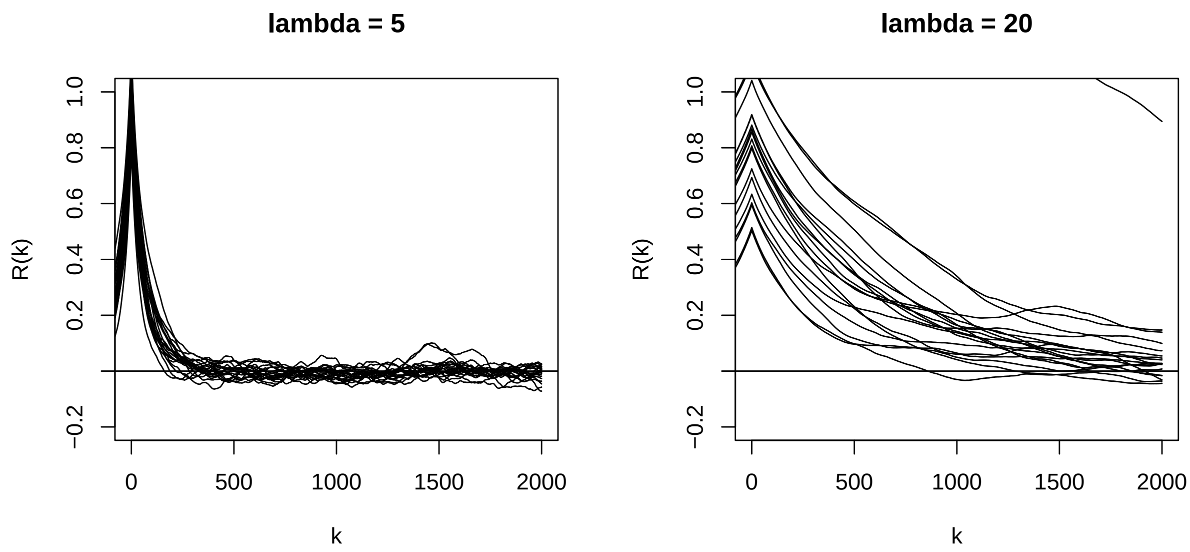


- covariance function

```
Xmean_list = list()    # to save sample mean output

j = 0
for(l in Lambdas){
  j = j + 1

  # calculate the 20 sample mean
  Xlist = list()
  Xmean = c()
  for(i in 1:20){
    Xlist[[i]] = RandomWalk6.5(N = N, lambda = l)
    Xmean[i] = mean( Xlist[[i]] )
```

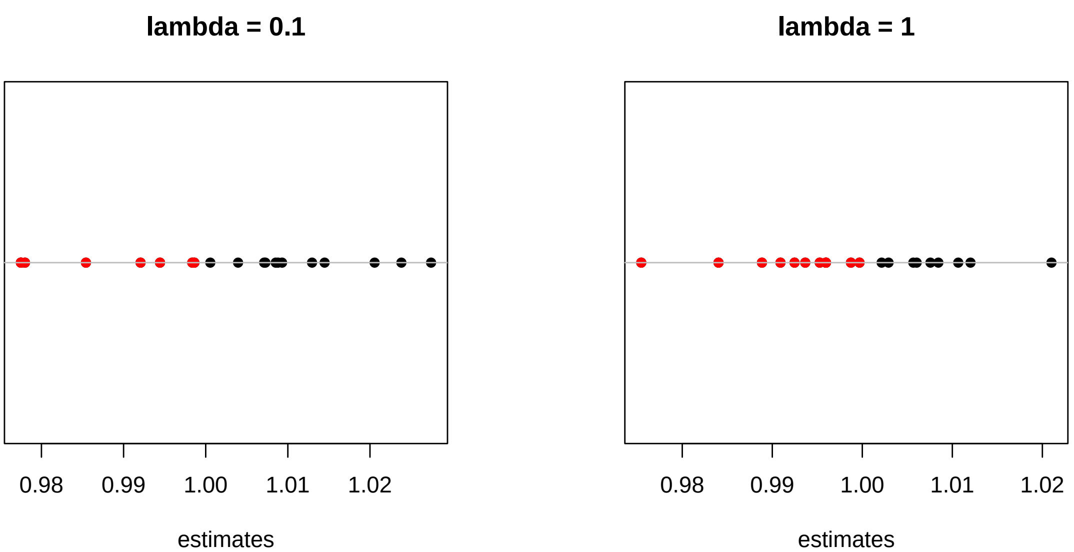
```
  }

  Xmean_list[[j]] = Xmean

  # draw the estimated covariance function
  # make blank plot
  plot(1:k, seq(0, 1, length.out = k), type = "n", main = paste0("lambda = ", l),
       xlab = "k", ylab = "R(k)", xlim = c(0, Mlag), ylim = c(-0.2, 1))
  abline(h = 0)

  for(i in 1:20){
    XCOV = xcov(Xlist[[i]][k:N], maxlag = Mlag, scale = "unbiased")
    points(XCOV$lags, XCOV$C, type = "l", xlim = c(0, Mlag), lwd = 1)
  }

  rm(Xlist)
}
```

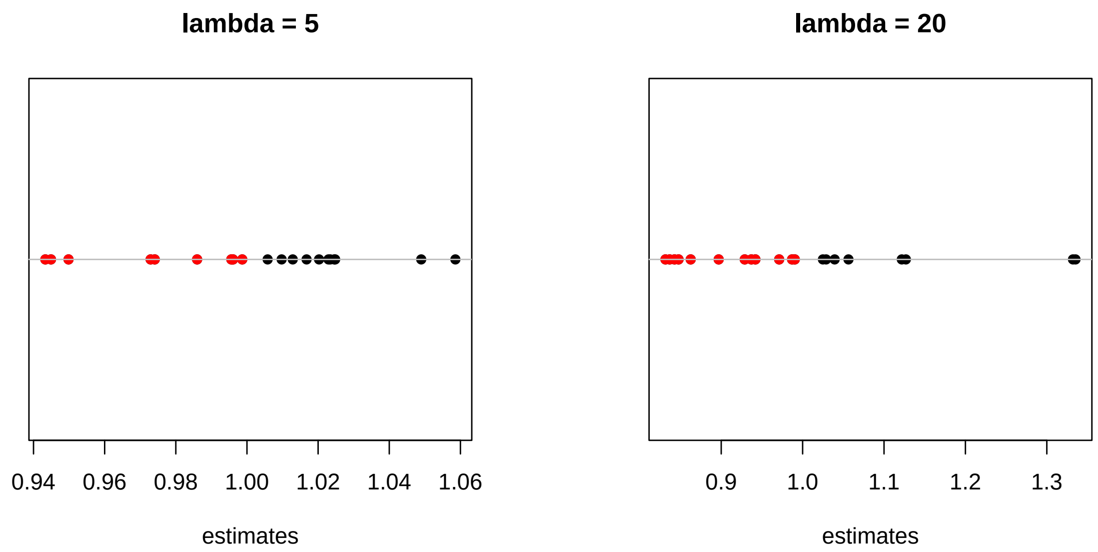




- dotplot of 20 sample mean

```
# draw the sample mean dotplot
for(i in 1:4){
  plot(x = Xmean_list[[i]], y = rep(1, 20), pch = 16,
       xlab = "estimates", ylab = "", main = paste0("lambda = ", Lambdas[i]), yaxt = 'n')

  xx = Xmean_list[[i]][Xmean_list[[i]] <= 1]
  points(x = xx, y = rep(1, length(xx)), pch = 16, col = "red")
  abline(h = 1, col = "grey")
}
```





- lambda = 5일 때 sample mean이 1 이하인 것의 갯수

```
# lambda = 5일 때 sample mean이 1 이하인 것의 갯수
Xmean_list[[4]][Xmean_list[[4]] <= 1] %>% length
```

```
## [1] 12
```