quasi-likelihood and GLM

Jieun Shin

2023-05-15

1. zero-inflated model

기본적으로 GLM에서 likelihood equation은 다음과 같다:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)x_{ij}}{V(\mu_i)} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\right) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p$$

서로 i.i.d한 반응변수 Y_i을 아래와 같이 GLM 구조로 표현할 수 있다:

$$\text{(systematic)} : \mu_i = \mathbb{E}(Y|\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{x})$$
$$\text{(random component)} : Y|\boldsymbol{x} \text{ follows on exponential family distribution}$$

quasi-model은 GLM 구조에서 random component 가정을 완화한 모형으로, 기존 GLM의 식을 dispersion parameter phi와 variance function $V(\mu_i)$로 표현한 모형이라고 할 수 있다:

$$Var(Y|\boldsymbol{x}) = \phi V(\mu_i)$$

mean-variance $V(\mu_i)$는 Y_i의 분포에 따라 결정된다. 만약 Y_i가 포아송 분포를 따른다면 $V(\mu_i) = \mu_i$, 감마분포를 따른다면 $V(\mu_i) = \mu_i^2$가 된다.

score function과 information도 비교를 해보자. 기존 GLM 구조에서의 score function과 information은 다음과 같다:

$$\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \mu_i}{\eta'(\mu_i) V_i} \boldsymbol{x}_i, \quad I(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta'(\mu_i)^2 V_i} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j^T$$

여기서 $V_i = \text{var}(Y_i|\boldsymbol{x}) = \phi V(\mu)$의 관계를 가진다. score function의 성질에 의해 score function의 평균, 분산은 각각 $\mathbb{E}(\nabla \ell) = 0$, $\text{var} = -\mathbb{E}(\nabla \ell')$이다.

이번에는 quasi-score function을 다음과 같이 정의하면,

$$S(\mu) = \frac{Y_i - \mu_i}{\phi V(\mu)} \left(= \frac{Y_i - \mu_i}{\text{var}(Y_i|\boldsymbol{x})}\right)$$

기댓값과 분산은 각각 $\mathbb{E}(S) = 0$, $\text{var} = -\mathbb{E}(S') = \frac{1}{\phi V(\mu)}$가 된다.

quasi-model의 모수 추정을 살펴보자. $\boldsymbol{\beta}$는 Newton-Raphson 방법으로 추정하며, ϕ 추정치로는 moment estimator를 사용한다. 먼저 quasi-likelihood는 $\boldsymbol{\beta}$의 함수로 세울 수 있다:

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^{n} Q(\mu_i(\boldsymbol{\beta}); y_i)$$

그리고 $\boldsymbol{\beta}$의 업데이트는 information과 score function에 의해 ϕ에 의존하지 않으면서 다음과 같이 업데이트 한다:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^+ &= \boldsymbol{\beta} + (-\mathbb{E}\nabla^2 Q(\boldsymbol{\beta}))^{-1} \cdot \nabla Q(\boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \mu_i}{\eta'(\mu_i)^2 \phi V(\mu_i)} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j^T\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \mu_i}{\eta'(\mu_i) \phi V(\mu_i)} \boldsymbol{x}_i\right)\end{aligned}$$

β의 추정 후, $\phi = \frac{X^2}{n-p}$와 같이 moment estimating함으로써 마친다.