

Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

26 de março de 2019

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
1 Vetores	1
1.1 Segmentos orientados	1
1.1.1 Exercícios	5
1.2 Vetores	5
1.2.1 Adição de vetores	6
1.2.2 Vetor oposto	7
1.2.3 Subtração de vetores	7
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar	7
1.2.5 Propriedades das operações com vetores	8
2 Bases e coordenadas	11
2.1 Dependência linear	11
2.1.1 Combinação linear	11
2.1.2 Dependência linear	11
2.1.3 Observações	12
2.2 Bases e coordenadas	15
2.2.1 Operações de vetores com coordenadas	17
2.2.2 Dependência linear	19
2.3 Mudança de base	20
2.4 Bases ortonormais	21

Respostas dos Exercícios	23
Referências Bibliográficas	24
Índice Remissivo	25

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r . O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB .

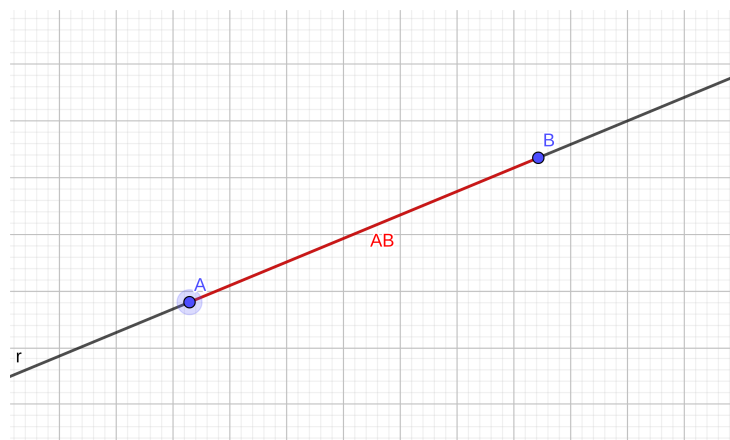


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB .

Associado a um segmento AB , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B . A distância entre os pontos A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.

A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B .

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

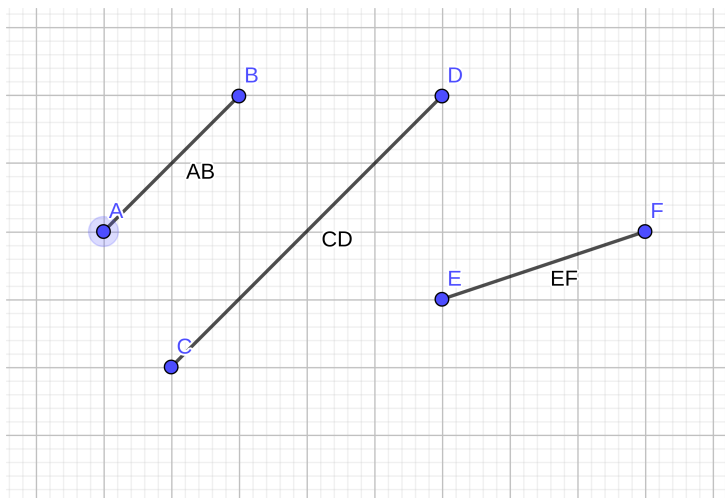


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B , sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

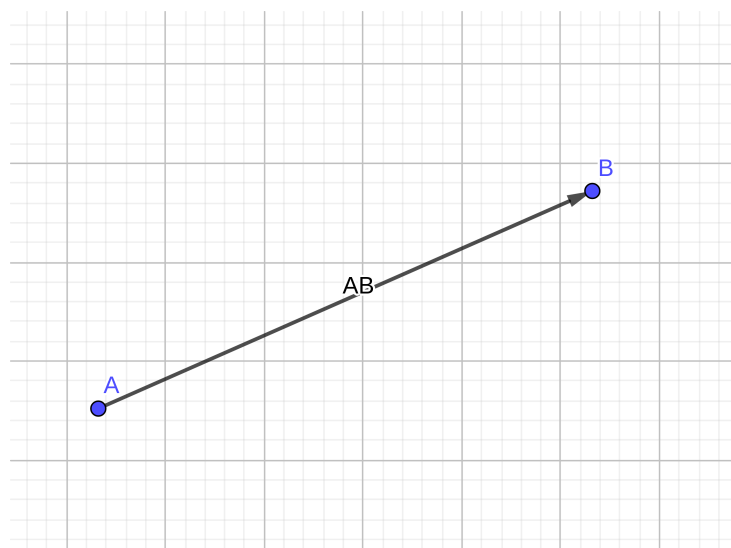


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB .

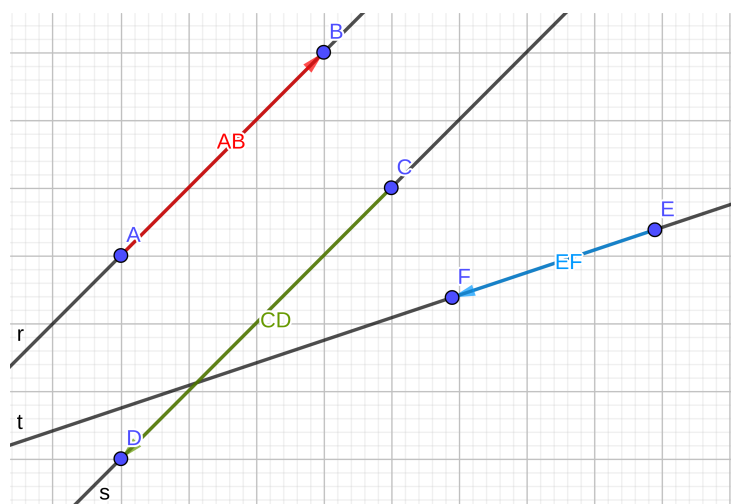


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

1.5). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

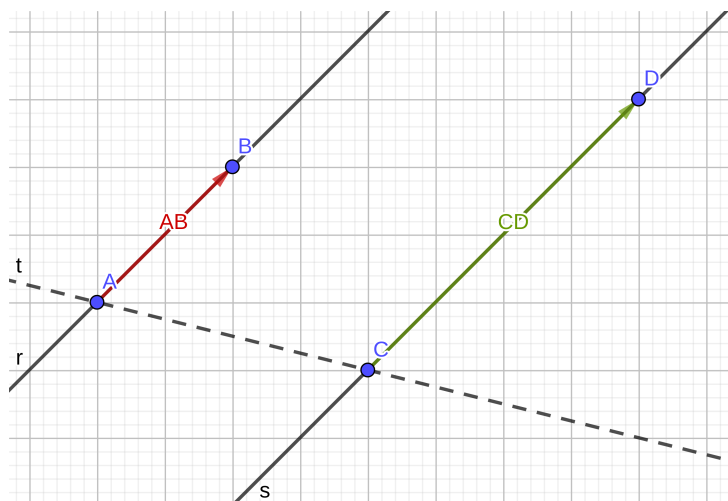


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

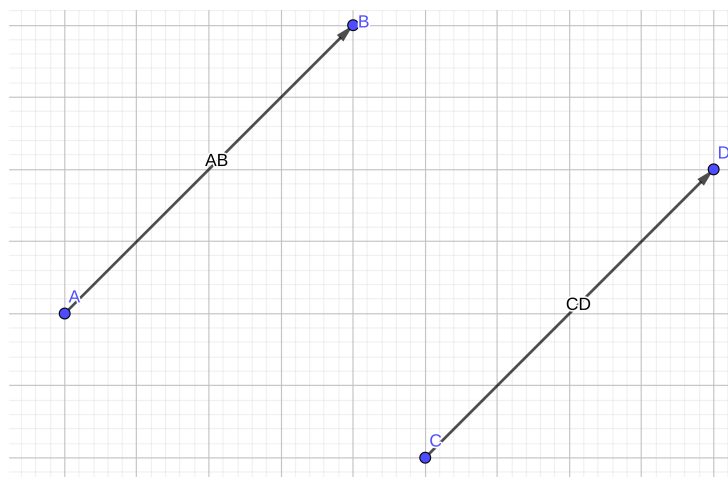


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

1.1.1 Exercícios

E 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB , chama-se **vetor** AB e denota-se \overrightarrow{AB} , qualquer segmento orientado equipolente a AB . Cada segmento orientado equipolente a AB é um representado de \overrightarrow{AB} . A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor \overrightarrow{AB} .

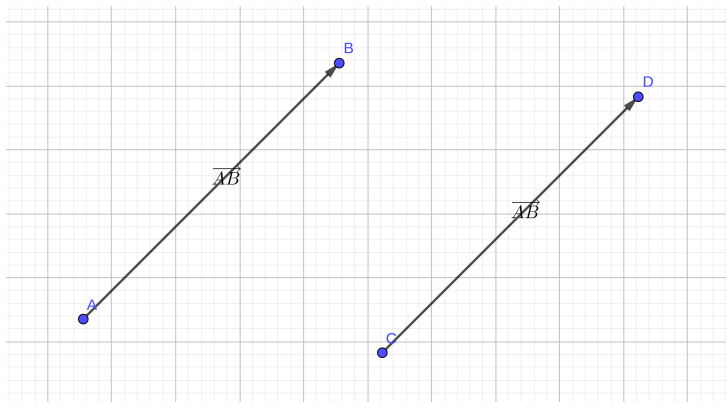


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor \overrightarrow{AB} é o valor de seu comprimento e é denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

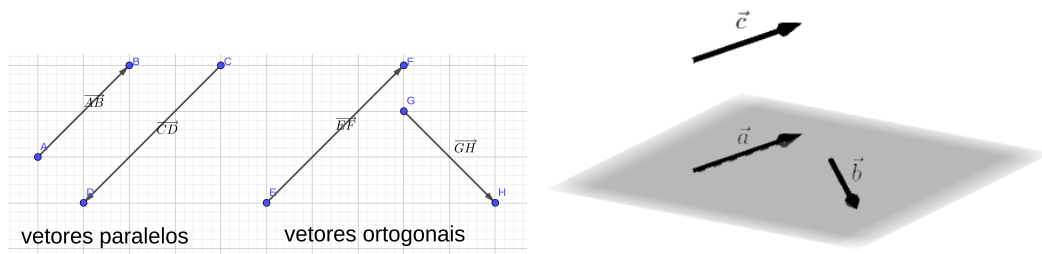


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . Sejam, ainda, uma representação \overrightarrow{AB} qualquer de u e a representação \overrightarrow{BC} do vetor \vec{v} . Então, define-se o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o vetor dado por \overrightarrow{AC} . Veja a Figura 1.9.

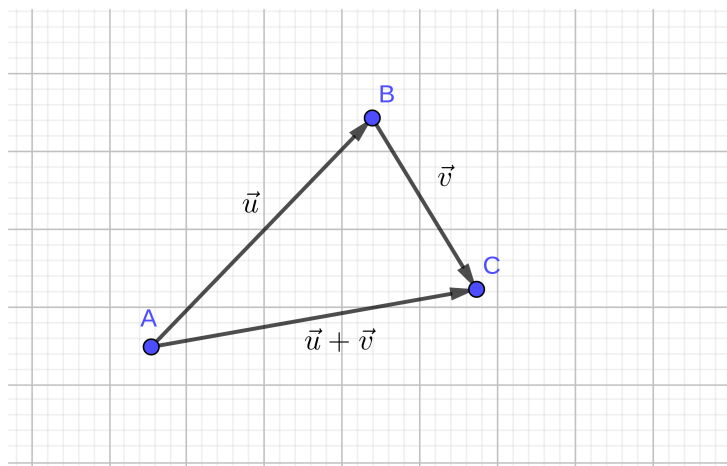


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor** \vec{v} é dito ser **oposto** a um dado vetor \vec{u} , quando quaisquer representações de \vec{u} e \vec{v} são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a \vec{u} . Veja a Figura 1.10.

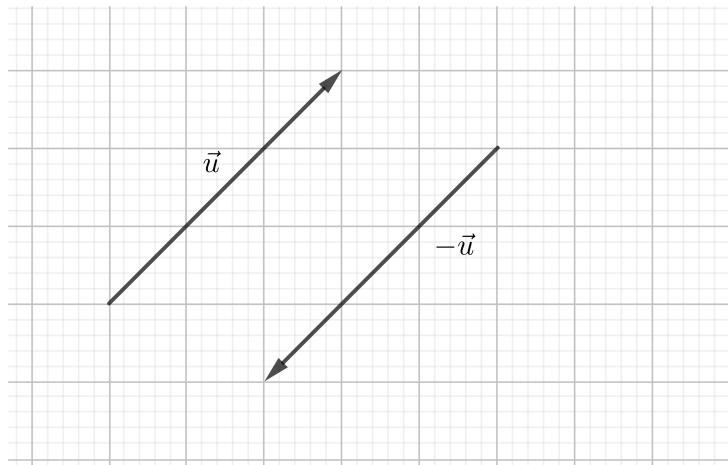


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . A subtração de \vec{u} com \vec{v} é denotada por $\vec{u} - \vec{v}$ e é definida pela adição de \vec{u} com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor \vec{u} é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de \vec{u} com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.1. • Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.

- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

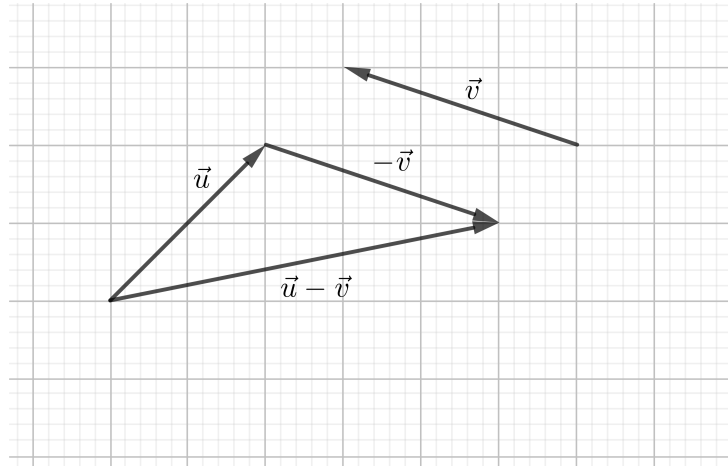


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de \vec{u} com \vec{v} , i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

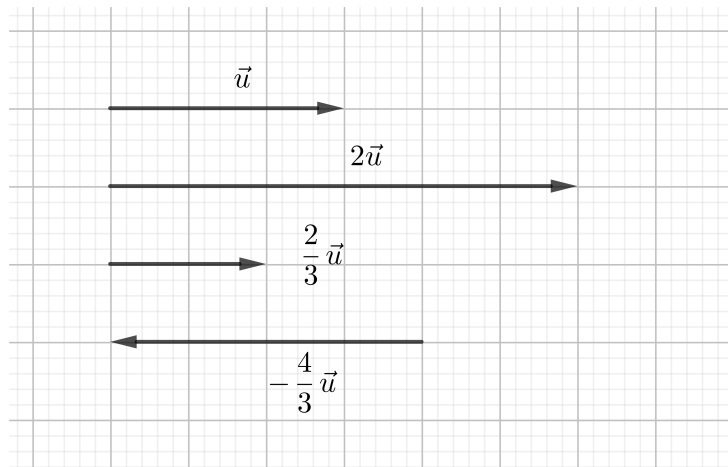


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

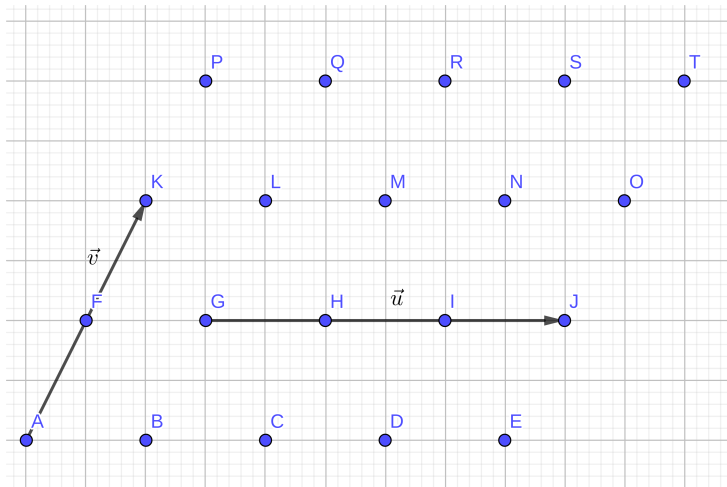
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad (1.1)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.2)$$

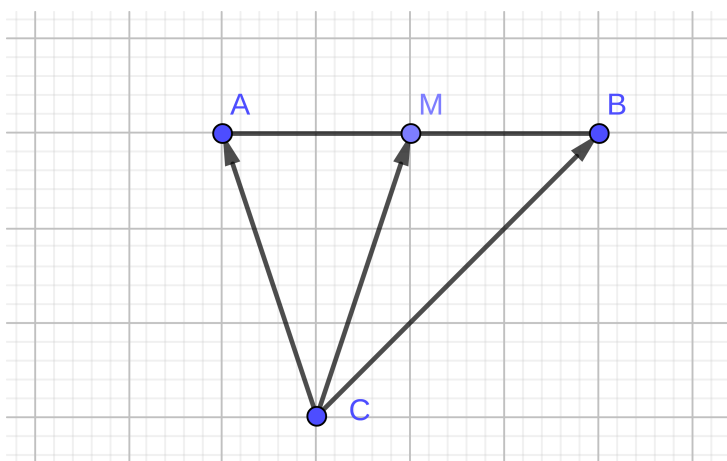
- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios

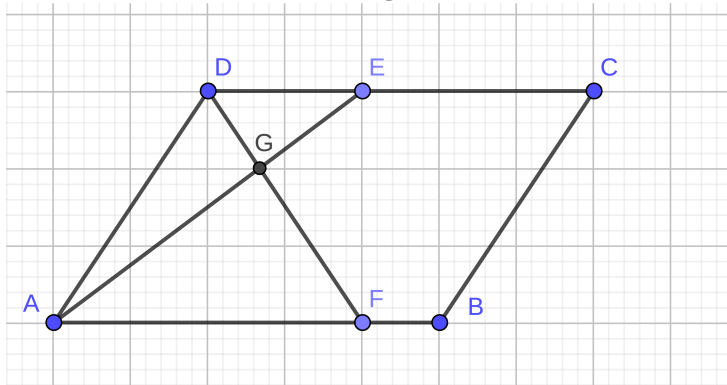
E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u} = \overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores \overrightarrow{RS} , \overrightarrow{NI} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{NQ} , \overrightarrow{AT} e \overrightarrow{PE} em função de \vec{u} e \vec{v} .



E 1.2.2. Sejam \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CM} e \overrightarrow{CB} os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



E 1.2.3. Sejam A , B , C , D , E e G os pontos dados na figura abaixo. Escreva o vetor \overrightarrow{DG} em função dos vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} .



E 1.2.4. Seja dado um vetor $\vec{u} \neq 0$. Calcule a norma do vetor $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$ ¹.

¹ $\vec{u}/|\vec{u}|$ é chamado de vetor \vec{u} normalizado, ou a normalização do vetor \vec{u} .

Capítulo 2

Bases e coordenadas

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, \dots, c_n , com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n \quad (2.1)$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que \vec{u} é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor \vec{u} .

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores \vec{v}, \vec{w} e \vec{z} . Então, temos:

- $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .
- $\vec{u}_2 = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .
- $\vec{u}_3 = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{u}, \vec{w} e \vec{z} .
- $\vec{u}_4 = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor \vec{z} .

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (abreviação, l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

- \vec{u}_1 e \vec{u}_2 dependem linearmente dos vetores \vec{u} e \vec{z} .
- \vec{u}_3 depende linearmente dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{z} .
- Os vetores \vec{u}_4 e \vec{z} são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (abreviação, l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

- um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta \vec{u}; \quad (2.2)$$

- \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção;
- \vec{u} e \vec{v} são paralelos.

Observação 2.1.1. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor \vec{u} . De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \quad (2.3)$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor \vec{u} .

Observação 2.1.2. Dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.4)$$

De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}, \quad (2.5)$$

i.e. o vetor \vec{u} é combinação linear do vetor \vec{v} e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{u} \quad (2.6)$$

e, então, teríamos \vec{u} e \vec{v} l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \quad (2.7)$$

Afirmamos que se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d., então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores \vec{v} e \vec{w} . Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Por fim, observemos que se $\alpha, \beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de \vec{v} e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de \vec{w} . Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π . Sejam \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A , B e C pertencem a π , assim como o segmento AC . Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

Reciprocamente, se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então \vec{u} pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{w}

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.8)$$

Neste caso, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.9)$$

E, então, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Agora, suponhamos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π . Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC , respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B . Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B . Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{BE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{BD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que \vec{v} é combinação linear de \vec{u} e \vec{w} , i.e. \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..

Observação 2.1.3. Três vetores dados \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \quad (2.10)$$

De fator, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \quad (2.11)$$

e teríamos \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} . Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores \vec{a} , \vec{b} e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

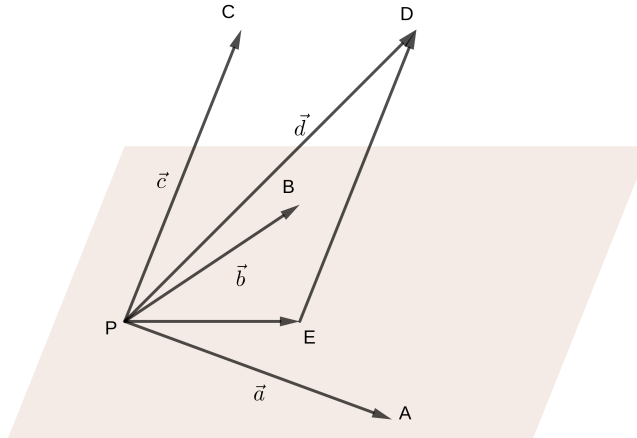


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a \overrightarrow{PC} que passa pelo ponto D . Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π . Vejamos a Figura 2.1. Observamos

que o vetor \overrightarrow{PE} é coplanar aos vetores \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} e, portanto, existem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}. \quad (2.12)$$

Além disso, como \overrightarrow{ED} tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma \overrightarrow{PC} \quad (2.13)$$

para algum número real γ . Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \end{aligned}$$

Exercícios

E 2.1.1. Sendo $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, mostre que \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{PC} são l.d. para qualquer ponto P .

E 2.1.2. Sejam dados três vetores quaisquer \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Mostre que os vetores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$ são l.d..

Em construção ...

2.2 Bases e coordenadas

Seja V o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Subseção 2.1.2, se \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i., então qualquer vetor $\vec{u} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais α , β e γ tal que

$$\vec{u} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \quad (2.14)$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de V é uma sequência de três vetores l.i. de V .

Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma dada base de V . Então, dado qualquer $\vec{v} \in V$, existe um único terno de números reais α , β e γ tais que

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \quad (2.15)$$

De fato, a existência de α , β e γ segue imediatamente do fato de que \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i. e, portanto, \vec{v} pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de α , β e γ , tomamos α' , β' e γ' tais que

$$\vec{v} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b} + \gamma' \vec{c}. \quad (2.16)$$

Subtraindo (2.16) de (2.15), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha') \vec{a} + (\beta - \beta') \vec{b} + (\gamma - \gamma') \vec{c}. \quad (2.17)$$

Como \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i., segue que¹

$$\alpha - \alpha' = 0, \beta - \beta' = 0, \gamma - \gamma' = 0, \quad (2.18)$$

i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

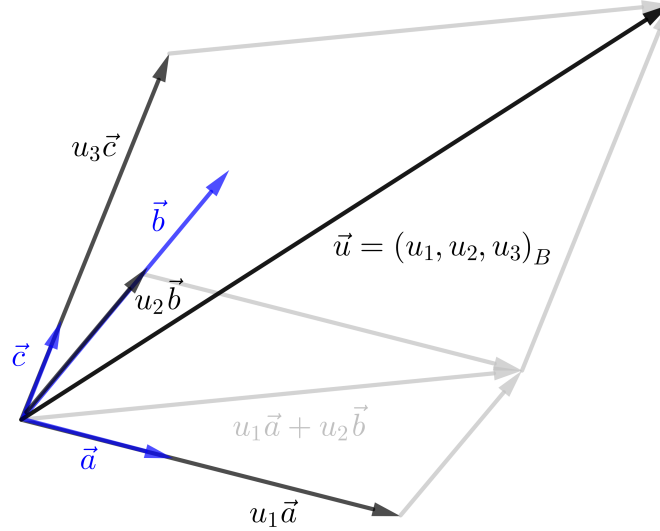


Figura 2.2: Representação de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ em uma dada base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

¹Lembre-se da Observação 2.1.3.

Com isso, fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, cada vetor \vec{u} é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.19)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do \vec{u} na base B . Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \quad (2.20)$$

para expressar o vetor \vec{u} nas suas coordenadas na base B . Vejamos a Figura 2.2.

Exemplo 2.2.1. Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, o vetor \vec{u} de coordenadas $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)$ é o vetor $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

2.2.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operações são definidas a partir das coordenadas de vetores.

Sejam $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.21)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \quad (2.22)$$

Então, a **adição** de \vec{u} com \vec{v} é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \quad (2.23)$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \quad (2.24)$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \quad (2.25)$$

Exemplo 2.2.2. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1, 3, -8)_B. \quad (2.26)$$

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor \vec{u} é

$$-\vec{u} = -\underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.27)$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \quad (2.28)$$

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \quad (2.29)$$

Exemplo 2.2.3. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B. \quad (2.30)$$

Lembrando que **subtração** de \vec{u} com \vec{v} é $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$, segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \quad (2.31)$$

Exemplo 2.2.4. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5, 2)_B. \quad (2.32)$$

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número** α pelo **vetor** \vec{u} . Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha\underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.33)$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \quad (2.35)$$

Exemplo 2.2.5. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \quad (2.36)$$

2.2.2 Dependência linear

Dois vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que dois vetores \vec{u} , \vec{v} são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real α tal que

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \quad (2.37)$$

sem perda de generalidade².

Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, temos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Com isso, a equação (2.37) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \quad (2.38)$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1, \quad u_2 = \alpha v_2, \quad u_3 = \alpha v_3. \quad (2.39)$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

Exemplo 2.2.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ são l.d., pois

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \quad -3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right). \quad (2.40)$$

b) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ são l.i., pois $u_1 = 1 \cdot v_1$, enquanto $u_2 = 2v_2$.

Três vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \quad (2.41)$$

Seja, então, $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V . Então, temos que a equação

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0} \quad (2.42)$$

²Formalmente, pode ocorrer $\vec{v} = \beta \vec{u}$.

é equivalente a

$$\alpha(u_1, u_2, u_3)_B + \beta(v_1, v_2, v_3)_B + \gamma(w_1, w_2, w_3)_B = (0, 0, 0)_B. \quad (2.43)$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.45)$$

Exemplo 2.2.7. Fixada uma base B de V , sejam os vetores $\vec{u} = (2, 1, -3)_B$, $\vec{v} = (1, -1, 2)_B$ e $\vec{w} = (-2, 1, 1)_B$. Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.46)$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \quad (2.47)$$

Exercícios

Em construção ...

2.3 Mudança de base

Sejam $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ e $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ bases do espaço V . Conhecendo as coordenadas de um vetor na base C , queremos determinar suas coordenadas na base B . Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C = z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \quad (2.48)$$

Agora, tendo $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$ e $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$, então

$$(z_1, z_2, z_3)_C = z_1(r_1, r_2, r_3)_B + z_2(s_1, s_2, s_3)_B + z_3(t_1, t_2, t_3)_B \quad (2.49)$$

$$= \underbrace{(r_1 z_1 + s_1 z_2 + t_1 z_3)}_{z'_1} \vec{u} \quad (2.50)$$

$$+ \underbrace{(r_2 z_1 + s_2 z_2 + t_2 z_3)}_{z'_2} \vec{v} \quad (2.51)$$

$$+ \underbrace{(r_3 z_1 + s_3 z_2 + t_3 z_3)}_{z'_3} \vec{w} \quad (2.52)$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

onde $\vec{z}' = (z'_1, z'_2, z'_3)_B$.

A matrix M_{CB} é chamada de matriz de mudança de base de C para B . Como os vetores \vec{r} , \vec{s} e \vec{t} são l.i., temos que a matriz de mudança de base M_{BC} tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Além disso, observamos que

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \quad (2.54)$$

E 2.3.1. Em construção ...

Exercícios

]

Em construção ...

2.4 Bases ortonormais

Uma **base** $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Observação 2.4.1. (Teorema de Pitágoras) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Proposição 2.4.1. Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$. Então, $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Demonstração. Temos $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}|^2$. Seja π um plano determinado por dadas representações de \vec{i} e \vec{j} . Como \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são ortogonais, temos que \vec{k} é ortogonal ao plano π . Além disso, o vetor $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ também admite uma representação em π , logo $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ é ortogonal a \vec{k} . Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.4.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \quad (2.55)$$

Analogamente, como $\vec{i} \perp \vec{j}$, do Teorema de Pitágoras segue

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 \quad (2.56)$$

$$= |u_1|^2|\vec{i}|^2 + |u_2|^2|\vec{j}|^2 + |u_3||\vec{k}|^2 \quad (2.57)$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (2.58)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado. \square

Exemplo 2.4.1. Se $\vec{u} = (-1, 2, -\sqrt{2})_B$ e B é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \quad (2.59)$$

Exercícios

E 2.4.1. Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base ortogonal, i.e. \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que $C = (\vec{a}/|\vec{a}|, \vec{b}/|\vec{b}|, \vec{c}/|\vec{c}|)$ é uma base ortonormal.

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

E 1.2.4. $|\vec{v}| = 1$.

E 2.1.1. Dica: os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são l.d..

E 2.1.2. Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo

- ângulo
 - entre vetores, [5](#)
- base, [15](#)
- combinação linear, [11](#)
- comprimento, [1](#)
- coordenadas, [17](#)
- distância, [1](#)
- equipolentes, [4](#)
- extremidade, [2](#)
- linearmente
 - dependente, [11](#)
 - independentes, [12](#)
- módulo, [5](#)
- mesmo sentido, [3](#)
- norma, [5](#)
- origem, [2](#)
- segmento, [1](#)
- segmento nulo, [2](#)
- segmento orientado, [2](#)
- vetor
 - oposto, [7](#)
- vetores
 - coplanares, [5](#)
 - não coplanares, [5](#)
 - ortogonais, [5](#)
 - paralelos, [5](#)