Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

22 de maio de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python[1] são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

Observação 1.0.1. Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos Python[1] com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

1.1 Equações a diferenças

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f\left(y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n); n\right) = 0, \tag{1.1}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \geq 0$ número natural e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

Exemplo 1.1.1. Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y(n+1) = (1+r)y(n) \tag{1.2}$$

[1]Veja a Observação 1.0.1.

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja $y(0)$ o valor da aplicação inicial, então

$$y(1) = (1 + r)y(0) \tag{1.3}$$

é o valor corrigido a taxa r no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y(2) = (1 + r)y(1) \tag{1.4}$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y(n+1) = ry(n)\left(1 - \frac{y(n)}{K}\right), \tag{1.5}$$

onde $y(n)$ representa o tamanho da população no período n, r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**[2]

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n), \tag{1.6}$$

onde $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$.

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k-ésima ordem). É dita ser **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n)$, noutro caso é dita ser **não linear**.

Exemplo 1.1.2. No Exemplo 1.1.1, temos

a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.

b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.

c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

[2]Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: Wikipedia.

A solução de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números $(y(n))_{n=0}^{\infty} = (y(0), y(1), \ldots, y(n), \ldots)$ que satisfazem a equação. Em alguns casos é possível escrever a solução como uma forma fechada

$$y(n) = g(n), \tag{1.7}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $g : n \mapsto g(n)$ é a função discreta que representa a solução.

Exemplo 1.1.3. Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y(n+1) = (1+r)y(n), \quad n \geq 0. \tag{1.8}$$

A partir do valor inicial $y(0)$, temos

$$\begin{aligned}
y(1) &= (1+r)y(0) && (1.9)\\
y(2) &= (1+r)y(1) && (1.10)\\
&= (1+r)(1+r)y(0) && (1.11)\\
&= (1+r)^2 y(0) && (1.12)\\
y(3) &= (1+r)y(2) && (1.13)\\
&= (1+r)(1+r)^2 y(0) && (1.14)\\
&= (1+r)^3 y(0) && (1.15)\\
&\vdots && (1.16)
\end{aligned}$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y(n) = (1+r)^n y(0), \tag{1.17}$$

onde o valor inicial $y(0)$ é arbitrário.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Calcule $y(10)$, sendo que

$$y(n+1) = 1{,}05y(n), \quad n \geq 0, y(0) = 1000. \tag{1.18}$$

Solução. Observamos que

$$
\begin{aligned}
y(1) &= 1{,}05y(0) && (1.19)\\
y(2) &= 1{,}05y(1) && (1.20)\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05y(0) && (1.21)\\
&= 1{,}05^2y(0) && (1.22)\\
y(3) &= 1{,}05y(2) && (1.23)\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05^2y(0) && (1.24)\\
&= 1{,}05^3y(0) && (1.25)\\
&\vdots && (1.26)
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$
y(n) = 1{,}05^n y(0). \tag{1.27}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
y(10) &= 1{,}05^{10}y(0) && (1.28)\\
&= 1{,}05^{10} \cdot 1000 && (1.29)\\
&\approx 1628{,}89. && (1.30)
\end{aligned}
$$

◊

ER 1.1.2. Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores $y(n)$ no final do n-ésimo ano.

Solução. No final do ano $n + 2 \geq 0$, o número de flores é igual a

$$
y(n + 2) = 2u(n + 2) + 3d(n + 2), \tag{1.31}
$$

onde $u(n+2)$ é o número de flores plantadas a um ano e $d(n+2)$ é o número de flores plantas a pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$
u(n + 2) = u(n + 1) + 2d(n + 1) \tag{1.32}
$$

e

$$
d(n + 2) = u(n + 1) + d(n + 1). \tag{1.33}
$$

Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
y(n+2) &= 2\left[u(n+1) + 2d(n-1)\right] + 3\left[u(n+1) + d(n-1)\right] && (1.34)\\
&= 2y(n+1) + u(n+1) + d(n+1) && (1.35)\\
&= 2y(n+1) + \underbrace{u(n) + 2d(n)}_{u(n+1)} + \underbrace{u(n) + d(n)}_{d(n+1)} && (1.36)\\
&= 2y(n+1) + 2u(n) + 3d(n) && (1.37)\\
&= 2y(n) + y(n). && (1.38)
\end{aligned}
$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y(n+2) = 2y(n+1) + y(n+2). \quad (1.39)$$

◊

Exercícios

E 1.1.1. Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

1. $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1$
2. $ny(n+1) = y(n)\ln(n+1)$
3. $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1$
4. $y(n+1) - [1 - y(n)]\,[1 + y(n)] = 0$
5. $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}$

E 1.1.2. Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de $y(0)$ reais e que o cartão não está mais em uso.

E 1.1.3. Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no n-ésimo mês.

Capítulo 2

Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0, \tag{2.1}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

2.1 Equações lineares

Nesta seção, discutimos sobre equações a diferenças de ordem 1 e lineares. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \tag{2.2}$$

onde $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, n_0 número inteiro, $a : n \mapsto a(n)$ e $g : n \mapsto g(n)$ é o termo fonte. A equação é dita ser **homogênea** quando $g \equiv 0$ e, caso contrário, é dita ser **não homogênea**.

2.1.1 Equação homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.3}$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para $n \geq n_0$, temos

$$\begin{align}
y(n+1) &= a(n)y(n) \tag{2.4}\\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) \tag{2.5}\\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \tag{2.6}\\
&\vdots \tag{2.7}\\
&= a(n)a(n-1)\cdots a(n_0)y(n_0). \tag{2.8}
\end{align}$$

Ou seja, dado o valor inicial $y(n_0)$, temos a solução[1]

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0), \tag{2.9}$$

assumindo a notação de que $\prod_{i=n+1}^{n} a(i) = 1$.

Exemplo 2.1.1. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

Comparando com (2.3), temos $a(n) = 2$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$\begin{align}
y(n+1) &= 2y(n) \tag{2.11}\\
&= 2 \cdot 2y(n-1) \tag{2.12}\\
&= 2^2 y(n-1) \tag{2.13}\\
&= 2^2 \cdot 2y(n-2) \tag{2.14}\\
&= 2^3 y(n-2) \tag{2.15}\\
&\cdots \tag{2.16}\\
&= 2^{n+1} y(0) \tag{2.17}
\end{align}$$

Equivalentemente, por (2.9), temos

$$\begin{align}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \tag{2.18}\\
&= 2^n y(0). \tag{2.19}
\end{align}$$

[1] A demonstração por ser feita por indução matemática.

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.
No Python[2], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0
```

2.1.2 Equação não homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.20}$$

pode ser obtida por iterações diretas.
Vejamos, para $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= a(n)y_n + g(n) \\
&= a(n)\left[a(n-1)y(n-1) + g(n-1)\right] + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) + a(n)g(n-1) + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)\left[a(n-2)y(n-2) + g(n-2)\right] \\
&+ a(n)g(n-1) + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \\
&+ a(n)a(n-1)g(n-2) + a(n)g(n-1) + g(n) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Com isso, podemos inferir[3] que

$$y(n+1) = \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.21}$$

$$+ \sum_{i=n_0}^{n} \left[\prod_{j=i+1}^{n} a(i)\right] g(i). \tag{2.22}$$

[2] Veja a Observação 1.0.1.
[3] A demonstração por ser feita por indução matemática.

No último termo, consideramos a notação $\sum_{j=i+1}^{i} a(i) = 0$. Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}y(n) =& \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \\ &+ \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(i)\right] g(i).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.24}$$

Comparando com (2.20), temos $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= 2y(n) - 1 && (2.25)\\
&= 2 \cdot [2y(n-1) - 1] - 1 && (2.26)\\
&= 2^2 y(n-1) - 2 - 1 && (2.27)\\
&= 2^2 \cdot [2y(n-2) - 1] - 2 - 1 && (2.28)\\
&= 2^3 y(n-2) - 2^2 - 2 - 1 && (2.29)\\
&\cdots && (2.30)\\
&= 2^{n+1} y(0) - \sum_{i=0}^{n} 2^i && (2.31)
\end{aligned}$$

Este último termo, é a soma dos termos da **progressão geométrica** de razão $q = 2$, i.e.

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{2.32}$$

Logo, temos que a solução de (2.20) é

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= 2^{n+1} y(0) - \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} && (2.33)\\
&= 2^{n+1} y(0) - 2^{n+1} + 1. && (2.34)
\end{aligned}$$

Equivalentemente, por (2.23), temos

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) && (2.35)\\
&+ \sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(i)\right] g(i) && (2.36)\\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) && (2.37)\\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right] (-1) && (2.38)\\
&= 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} && (2.39)\\
&= 2^n y(0) - 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} && (2.40)\\
&= 2^n y(0) - 2^n + 1. && (2.41)
\end{aligned}
$$

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.
No Python[4], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)-1)
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0 + 1
```

Observamos que esta solução é equivalente à (2.41), pois

$$
\begin{aligned}
y(n) &= 2^n y(0) - 2^n + 1 && (2.42)\\
&= 2^n\left[y(0) - 1\right] + 1, && (2.43)
\end{aligned}
$$

onde $y(0)$ é um valor inicial arbitrário.

[4]Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

E 1.1.2. $y(n+1) = 3y(n)$.

E 1.1.3. Sequência de Fibonacci

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* LTC, 10. edition, 2017.

[2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations.* Springer, 3. edition, 2005.