Cálculo I

Pedro H A Konzen

20 de março de 2019

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre cálculo de funções de uma variável.
Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Fundamentos sobre funções

Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos `Python` com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
init_session()
```

1.1 Definição e gráfico

Uma **função** de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $y \in Y$[1] a cada elemento $x \in D$. Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo, f e escrevemos $f : D \to Y$, $y = f(x)$, para denotar que a função f toma valores de entrada em D e de saída em Y.
O conjunto D de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores $f(x)$ tal que $x \in D$ é chamado de **imagem** da função.
Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

Exemplo 1.1.1. Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

[1] $y \in Y$ denota que y é um elemento do conjunto Y.

- $y = x^2$:
  - Para qualquer número real x, temos que x^2 também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)[2] é o conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
  - Para cada número real x, temos $y = x^2 \geq 0$. Além disso, para cada número real não negativo y, temos que $x = \sqrt{y}$ é tal que $y = x^2$. Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e. $[0, \infty)$.
- $y = 1/x$:
  - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
  - Primeiramente, observemos que se $y = 0$, então não existe número real tal que $0 = 1/x$. Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número $y \neq 0$, temos que $x = 1/y$ é tal que $y = 1/x$. Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- $y = \sqrt{1 - x^2}$:
  - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \tag{1.2}$$

    Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números x tal que $-1 \leq x \leq 1$ (ou, equivalentemente, o intervalo $[-1, 1]$).

    Com o `SymPy`, podemos usar o comando

    ```
    reduce_inequalities(1-x**2>=0,[x])
    ```

    para resolvermos a inequação $1 - x^2 \geq 0$.

[2] O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.

- Uma vez que $-1 \leq x \leq 1$, temos que $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ e, portanto, $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$. Ou seja, a imagem desta função é o intervalo $[0, 1]$.

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ tal que x pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função $f : D \to \mathbb{R}$, o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \tag{1.3}$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.1 mostra os esboços dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

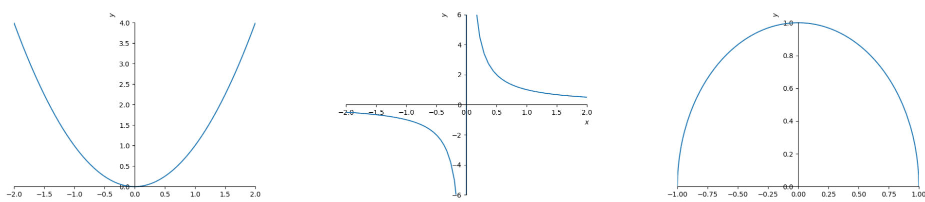

Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ dadas no Exemplo 1.1.2.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando `SymPy` podemos usar os seguintes comandos:

```
plot(x**2,(x,-2,2))
plot(1/x,(x,-1,1),ylim=(-10,10))
plot(sqrt(1-x**2),(x,-1,1))
```

Exercícios

Em construção ...

1.2 Tipos de funções

Nesta seção, vamos ressaltar alguns tipos de funções que aparecerem com frequência nos estudos de cálculo.

1.2.1 Funções lineares

Uma **função linear** é uma função da forma $f(x) = mx + b$, sendo m e b parâmetros[3] dados. Recebe este nome, pois seu gráfico é uma linha (uma reta)[4].

Quando $m = 0$, temos uma **função constante** $f(x) = b$. Esta tem domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $\{b\}$. Por outro lado, toda função linear com $m \neq 0$ tem $(-\infty, \infty)$ como domínio e imagem.

Exemplo 1.2.1. A Figura 1.2 mostra esboços dos gráficos das funções lineares $f(x) = -5/2$, $f(x) = 2$ e $f(x) = 2x - 1$.

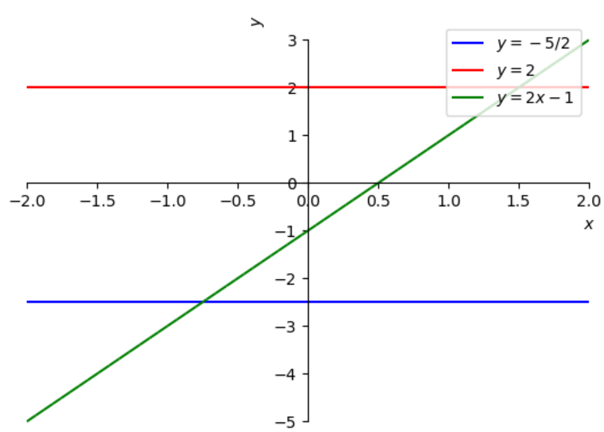

Figura 1.2: Esboços dos gráficos das funções lineares $y = -5/2$, $y = 2$ e $y = 2x - 1$ discutidas no Exemplo 1.2.1.

[3]números reais.
[4]Não confundir com o conceito de linearidade de operadores.

Observação 1.2.1. O lugar geométrico do gráfico de uma função linear é uma reta (ou linha). O parâmetro m controla a inclinação da reta em relação ao eixo x[5]. Quando $m = 0$, temos uma reta horizontal. Quando $m > 0$ temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando $m < 0$ temos uma reta com inclinação negativa. Verifique!

Quaisquer dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), com $x_0 \neq x_1$, determinam uma única função linear (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \tag{1.4}$$
$$mx_1 + b = y_1 \tag{1.5}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \tag{1.6}$$

Daí, substituindo o valor de m na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0. \tag{1.7}$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_{m}(x - x_0) + y_0. \tag{1.8}$$

1.2.2 Funções potência

Uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \neq 0$ é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de n. Quando n é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são $(-\infty, \infty)$. Veja a Figura 1.3.

[5] eixo das abscissas

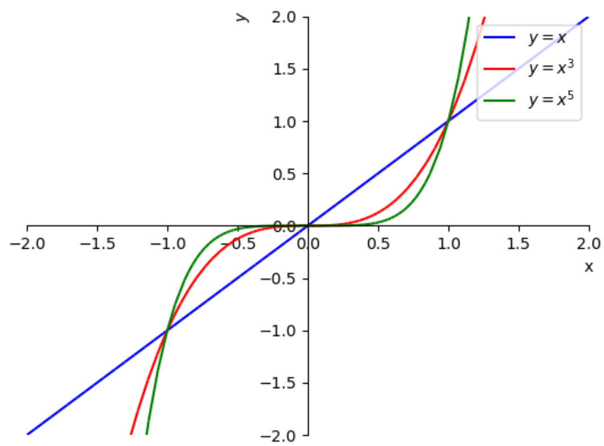

Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$.

Funções potências com n positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem $[0, \infty)$. Veja a Figura 1.4.

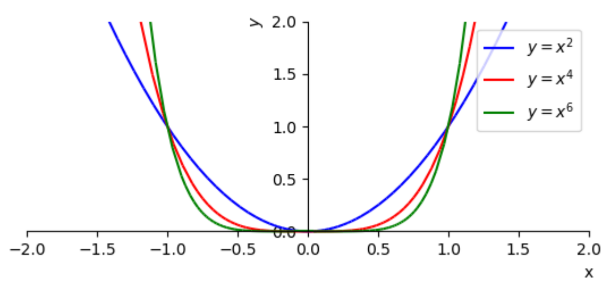

Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$.

Funções potências com n inteiro negativo ímpar não são definidas em $x = 0$, tendo domínio e imagem igual a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Também, quando n inteiro negativo par, a função potência não está definida em $x = 0$, tem domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mas imagem $(0, \infty)$. Veja a Figura 1.5.

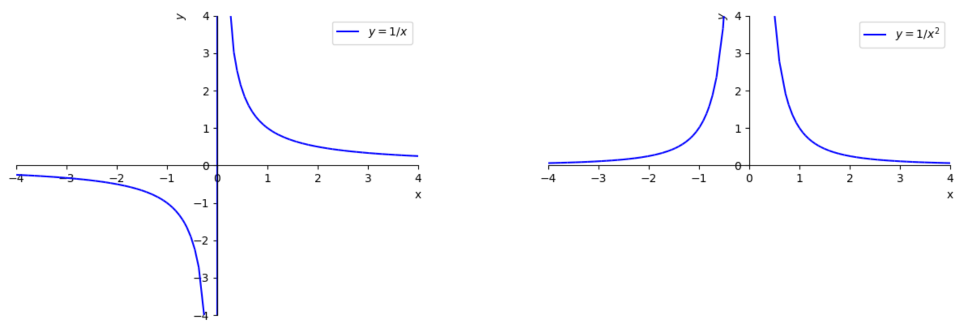

Figura 1.5: Esboços dos gráficos das funções potências $y = 1/x$ (esquerda), $y = 1/x^2$ (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando $n = 1/2$, $1/3$, $3/2$ e $2/3$. Veja a Figura 1.6.

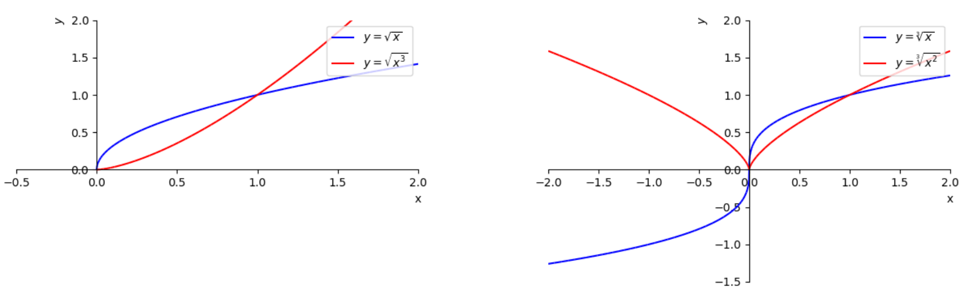

Figura 1.6: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x^3}$. Direita: $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[3]{x^2}$.

1.2.3 Funções polinomiais

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.9}$$

onde a_i são coeficientes reais, $a_n \neq 0$ e n é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte[6]. Polinômios de grau ímpar tem imagem $(-\infty, \infty)$. Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.7.

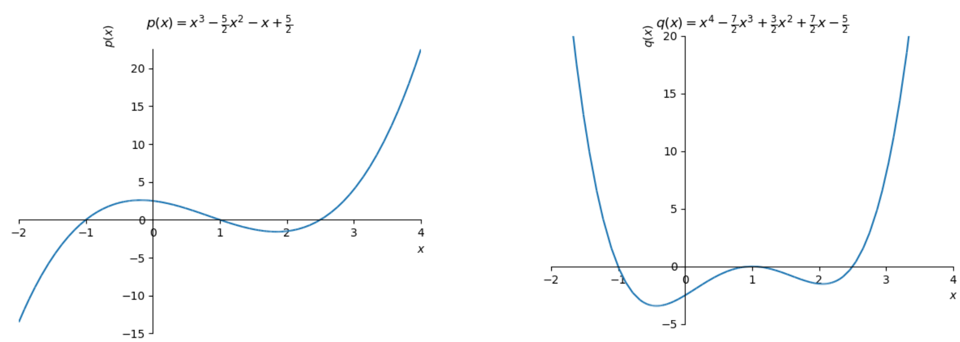

Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$. Direita: $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$.

Quando $n = 0$, temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando $n = 1$, temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função linear). Ainda, quando $n = 2$ temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando $n = 3$, temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

[6] Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é (∞, ∞)

1.2.4 Funções racionais

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{1.10}$$

onde $p(x)$ e $q(x) \not\equiv 0$ são polinômios.
Função racionais não estão definidas nos zeros de $q(x)$. Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.8.

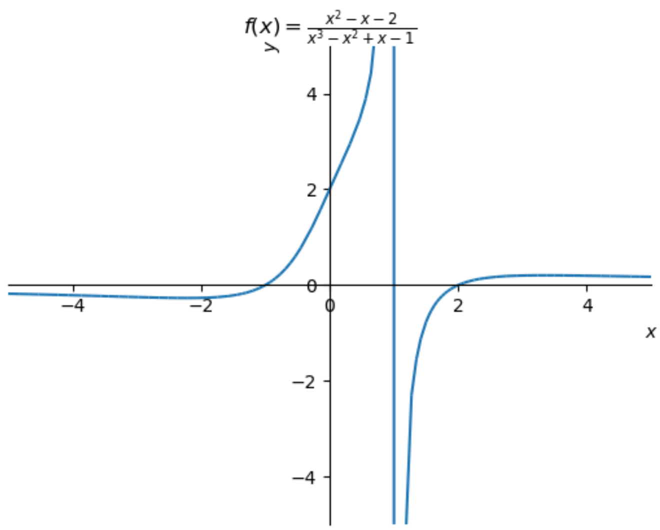

Figura 1.8: Esboço do gráfico da função racional $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2+x-1}$.

1.2.5 Funções algébricas

Funções algébricas são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

1.2.6 Funções transcendentes

Funções transcendentes são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

1.2.7 Funções definidas por partes

Funções definidas por partes são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Exemplo 1.2.2. Consideremos a seguinte função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0, \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Observemos que tanto o domínio como a imagem desta função são $(-\infty, \infty)$. A Figura 1.9 mostra o esboço do gráfico desta função.

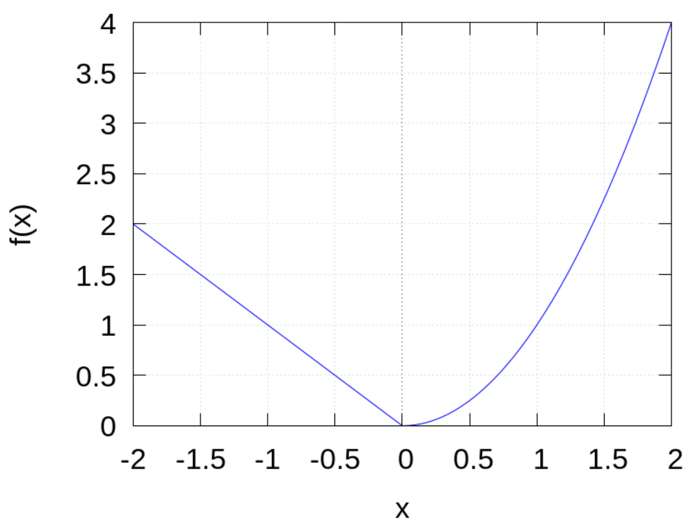

Figura 1.9: Esboço do gráfico da função definida por partes $f(x)$ dada no Exemplo 1.2.2.

Um exemplo de função definida por partes fundamental é a **função valor absoluto**[7]

$$|x| = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 1.10.

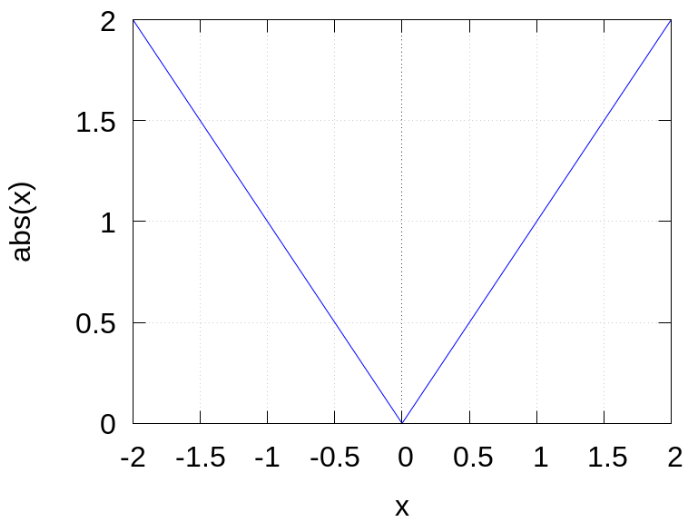

Figura 1.10: Esboço do gráfico da função valor absoluto $y = |x|$.

Exercícios

Em construção ...

1.3 Funções trigonométricas

1.3.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno $y = \operatorname{sen}(x)$ e cosseno $y = \cos(x)$ podem ser definidas a a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura 1.11). Seja x o ângulo[8] de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano

[7] Esta função também pode ser definida por $|x| = \sqrt{x^2}$.

[8] Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.

(reta r na Figura 1.11). Seja, então, $(a{,}b)$ o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária[9]. Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = a, \qquad \cos(x) = b. \tag{1.13}$$

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $[-1, 1]$.

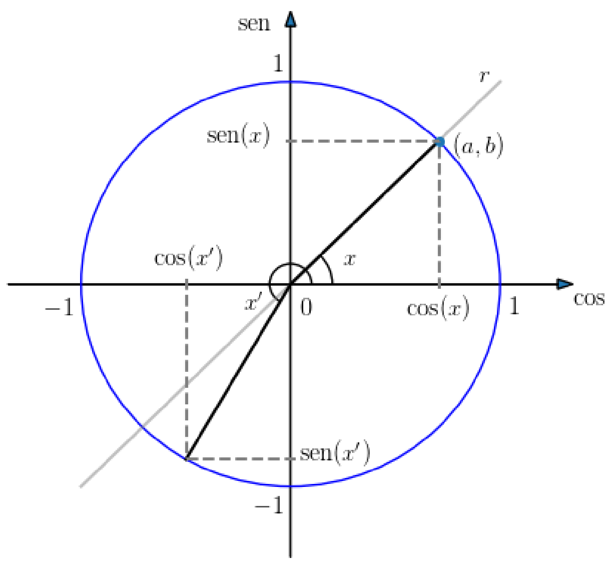

Figura 1.11: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 1.12 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para

[9]Circunferência do círculo de raio 1.

os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.14}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{1.15}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \tag{1.16}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.17}$$

$$\tag{1.18}$$

As funções seno e cosseno estão definidas no `SymPy` como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de $\pi/6$, digitamos:

```
sin(pi/6)
```

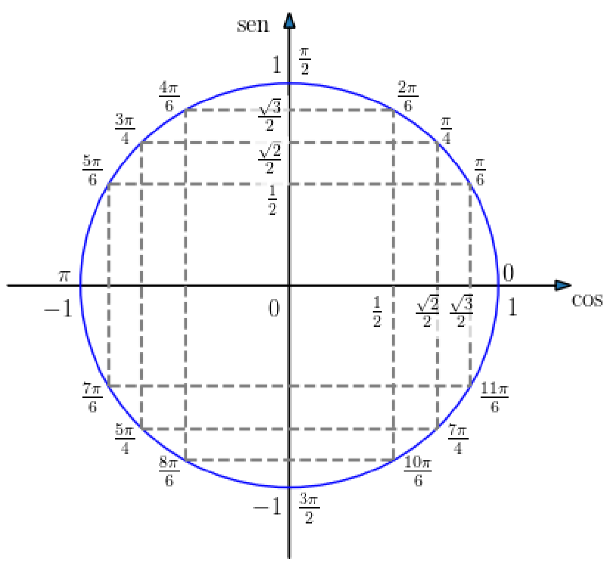

Figura 1.12: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função** $f(x)$ é dita **periódica** quando existe um número p, chamado de período da função, tal que

$$f(x+p) = f(x) \tag{1.19}$$

para qualquer valor de x no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período 2π, i.e.

$$\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen}(x), \qquad \cos(x+2\pi)=\cos(x), \tag{1.20}$$

para qualquer valor de x.
Na Figura 1.13, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

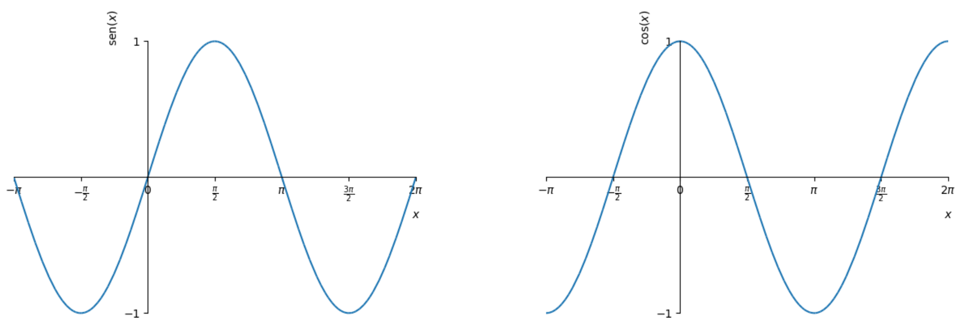

Figura 1.13: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

1.3.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \tag{1.21}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \tag{1.22}$$

No `SymPy`, as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções `tan`, `cot`, `sec` e `csc`, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de $\operatorname{cosec}(\pi/4)$ com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura 1.15, temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, \infty)$ e período π.

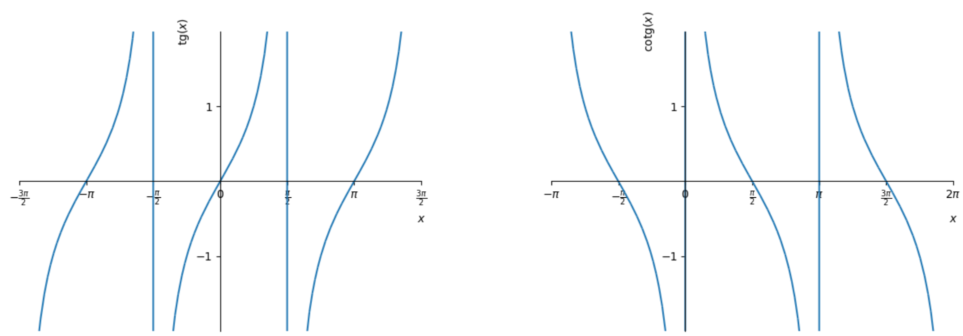

Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura **??**, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-infty, 1] \cup [1, \infty)$ e período π.

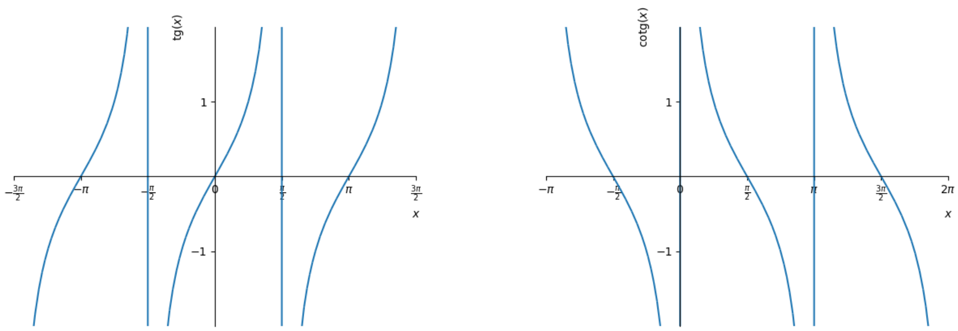

Figura 1.15: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

1.3.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Comecemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{1.23}$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \tag{1.24}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \tag{1.25}$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \tag{1.26}$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y), \tag{1.27}$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \tag{1.28}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x. \tag{1.29}$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{1.30}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \tag{1.31}$$

Exercícios

Em construção ...

1.4 Operações com funções

1.4.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções f e g com domínio em comum D. Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ para todo $x \in D$;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$ para todo $x \in D$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 1.4.1. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$. Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$ e está definida em toda parte.
- $(g - f)(x) = x - x^2$ e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$ e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$ e tem domínio $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$[10].

1.4.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções f e g. Definimos a **função composta** de f com g por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \tag{1.32}$$

Seu domínio consiste dos valores de x que pertençam ao domínio da g e tal que $g(x)$ pertença ao domínio da f.

Exemplo 1.4.2. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. A função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

[10] Observemos que não podemos simplificar o x, pois a função $y = x$ é diferente da função $y = x^2/x$.

1.4.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

1.4.4 Translações

Dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que a o gráfico de $y = f(x) + k$ é uma translação vertical do gráfico de f. Se $k > 0$, observamos uma translação vertical para cima. Se $k < 0$, observamos uma translação vertical para baixo.
Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que o gráfico de $y = f(x + k)$ é uma translação horizontal do gráfico de f em k unidades. Se $k > 0$, observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se $k < 0$, observamos uma translação horizontal para a direita.

1.4.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função f e uma constante α. Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$ é uma dilatação vertical do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = \alpha f(x)$ é uma contração vertical do gráfico de f, quando $0 < \alpha < 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma contração horizontal do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma dilatação horizontal do gráfico de f, quando $\alpha < 1$.

1.4.6 Reflexões

Seja dada uma função f. O gráfico da função $y = -f(x)$ é uma reflexão em torno do eixo x do gráfico da função f. Já, o gráfico da função $y = f(-x)$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função f.

Exercícios

Em construção ...

1.5 Propriedades de funções

1.5.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma da função f é dita crescente quando $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ no seu domínio. É dita não decrescente quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos os $x_1 < x_2$ no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando $f(x_1) > f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$. E, por fim, é dita não crescente quando $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, sempre no seu domínio.

Exemplo 1.5.1. Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade** $f(x) = x$ é crescente.
- A função exponencial $f(x) = e^{-x}$ é decrescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \leq 0, \\ 2 & ,0 < x \leq 1, \\ (x-1)^2 + 2 & ,x > 1 \end{cases} \tag{1.33}$$

  é não decrescente.

1.5.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função** f é dita **par** quando $f(x) = f(-x)$ para todo x no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x no seu domínio.

Exemplo 1.5.2. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ é uma função par.
- $f(x) = x^3$ é uma função par.

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$ é uma função par.
- $f(x) = x + 1$ não é par nem ímpar.

1.5.3 Funções injetoras

Uma dada **função** f é dita **injetora** quando $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todos $x_1 \neq x_2$ no seu domínio.

Exemplo 1.5.3. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$ é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$ é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora $y = f(x)$, existe uma única função g tal que

$$g(f(x)) = x, \tag{1.34}$$

para todo x no domínio da f. Tal função g é chamada de **função inversa** de f é comumente denotada por f^{-1}.[11]

Exemplo 1.5.4. Vamos calcular a função a função inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \tag{1.35}$$

Então, isolando x, temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \tag{1.36}$$

Desta forma, concluímos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f!

Observação 1.5.1. Os gráficos de uma dada função injetora f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação a **reta identidade** $y = x$.

[11] Observe que, em geral, $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Exercícios

1.6 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \tag{1.37}$$

onde $a \neq 1$ é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.
Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem $(0, \infty)$. O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos $(-1,1/a)$, $(0,1)$ e $(1,a)$. Veja a Figura 1.17.

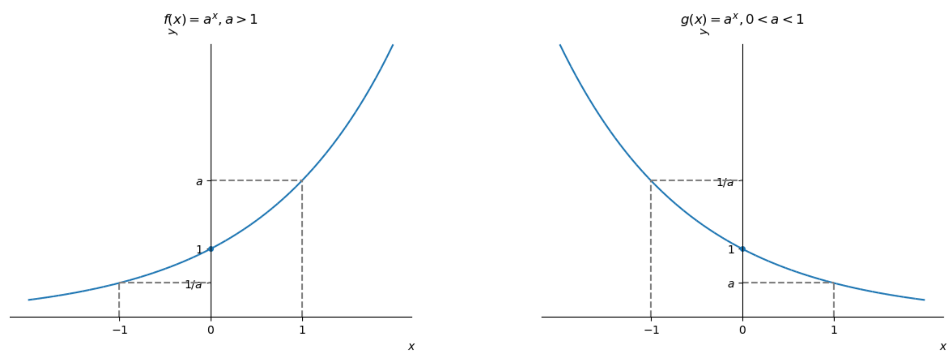

Figura 1.16: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda) $f(x) = a^x$, $a > 1$; (direita) $g(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.6.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2{,}718281828459045$, chamamos $f(x) = e^x$ de função exponencial natural.
No `SymPy`, o número de Euler é obtido com a constante `E`:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

Exercícios

Em construção ...

1.7 Funções logarítmicas

A **função logarítmica** $y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função inversa da função exponencial $y = a^x$. Veja a Figura **??**. O domínio da função logarítmica é $(0,\infty)$ e a imagem $(-\infty, \infty)$.

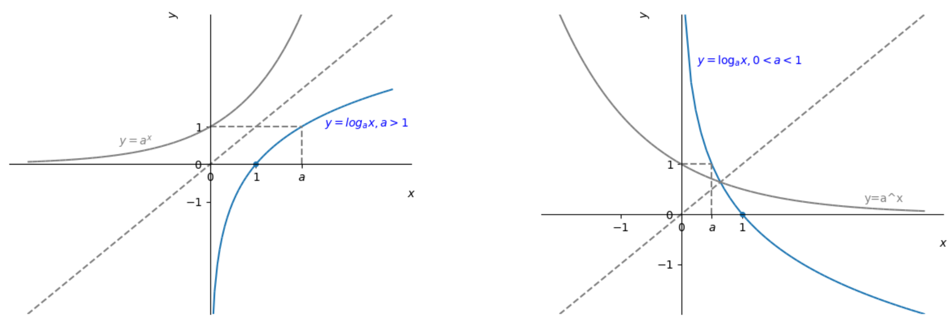

Figura 1.17: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda) $y = \log_a x$, $a > 1$; (direita) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.7.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2{,}718281828459045$, chamamos $y = \log_e x$ de função exponencial natural e denotamo-la por $y = \ln x$.
No `SymPy`, podemos computar $\log_a x$ com a função `log(x,a)`. O $\ln x$ é computado com `log(x)`.

Observação 1.7.2. Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a a^x = x$;
- $a^{\log_a^x} = x$;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

Referências Bibliográficas

[1] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

Índice Remissivo