Cálculo I

Pedro H A Konzen

18 de setembro de 2019

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre cálculo de funções de uma variável. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Fundamentos sobre funções

Observação 1.0.1. Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos Python com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
init_printing()
var('x')
```

1.1 Definição e gráfico de funções

Uma **função** de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $y \in Y$[1] a cada elemento $x \in D$. Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo, f e escrevemos $f : D \to Y$, $y = f(x)$, para denotar que a função f toma valores de entrada em D e de saída em Y.

O conjunto D de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores $f(x)$ tal que $x \in D$ é chamado de **imagem** da função.

Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

[1] $y \in Y$ denota que y é um elemento do conjunto Y.

Exemplo 1.1.1. Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

- $y = x^2$:
  - Para qualquer número real x, temos que x^2 também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)[2] é o conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
  - Para cada número real x, temos $y = x^2 \geq 0$. Além disso, para cada número real não negativo y, temos que $x = \sqrt{y}$ é tal que $y = x^2$. Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e. $[0, \infty)$.
- $y = 1/x$:
  - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
  - Primeiramente, observemos que se $y = 0$, então não existe número real tal que $0 = 1/x$. Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número $y \neq 0$, temos que $x = 1/y$ é tal que $y = 1/x$. Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- $y = \sqrt{1 - x^2}$:
  - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

    $$\begin{aligned} 1 - x^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 \leq 1 && (1.1)\\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. && (1.2) \end{aligned}$$

    Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números x tal que $-1 \leq x \leq 1$ (ou, equivalentemente, o intervalo $[-1, 1]$).

    Com o SymPy, podemos usar o comando[3]

[2]O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.

[3]Veja a Observação 1.0.1.

```
reduce_inequalities(1-x**2>=0,[x])
```

para resolvermos a inequação $1 - x^2 \geq 0$.

- Uma vez que $-1 \leq x \leq 1$, temos que $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ e, portanto, $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$. Ou seja, a imagem desta função é o intervalo $[0, 1]$.

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ tal que x pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função $f : D \to \mathbb{R}$, o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \tag{1.3}$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.1 mostra os esboços dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

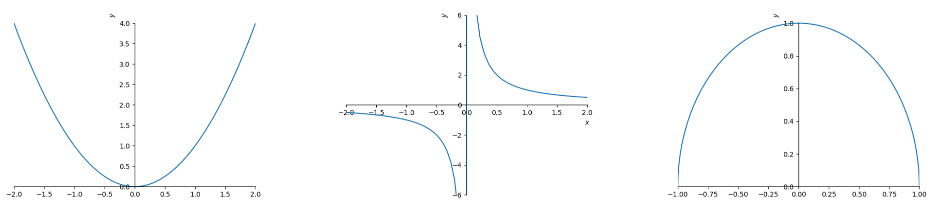


Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ dadas no Exemplo 1.1.2.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando SymPy podemos usar os seguintes comandos[4]:

```
plot(x**2,(x,-2,2))
plot(1/x,(x,-1,1),ylim=(-10,10))
plot(sqrt(1-x**2),(x,-1,1))
```

[4]Veja a Observação 1.0.1.

1.1.1 Categorizações de funções

Funções algébricas

Funções algébricas são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

Funções transcendentes

Funções transcendentes são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

Funções definidas por partes

Funções definidas por partes são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**[5]

$$|x| = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 1.2.

[5]Esta função também pode ser definida por $|x| = \sqrt{x^2}$.

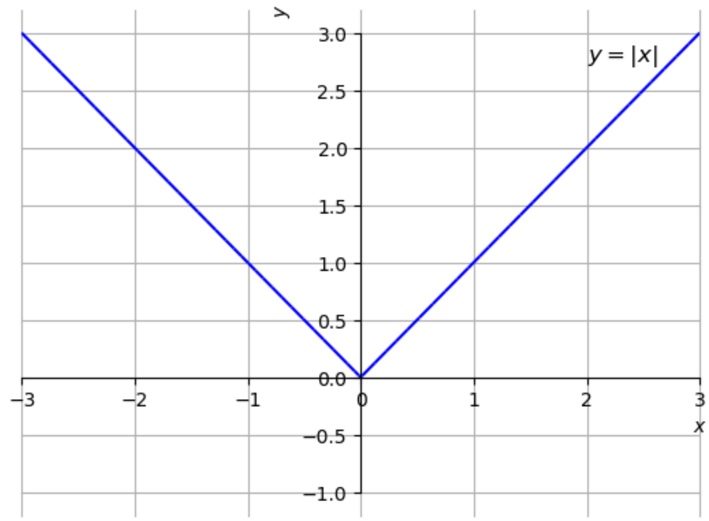


Figura 1.2: Esboço do gráfico da função valor absoluto $y = |x|$.

Exercícios

Exemplo 1.1.3. Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e. $f(x) = x$.

Exemplo 1.1.4. Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2 + 1$.

Exemplo 1.1.5. Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \tag{1.5}$$

1.2 Função afim

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \tag{1.6}$$

sendo m e b parâmetros[6] dados. O parâmetro m é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro b é chamado de **coeficiente constante**[7].

[6] números reais.

[7] Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

Quando $m = 0$, temos uma **função constante** $f(x) = b$. Esta tem domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $\{b\}$. Quando $b = 0$, temos uma **função linear** $f(x) = mx$, cujo domínio é $(-\infty, \infty)$ e imagem é $(-\infty, \infty)$.
Por outro lado, toda função linear com $m \neq 0$ tem $(-\infty, \infty)$ como domínio e imagem.

Exemplo 1.2.1. A Figura 1.3 mostra esboços dos gráficos das funções afins $f(x) = -5/2$, $f(x) = 2$ e $f(x) = 2x - 1$.

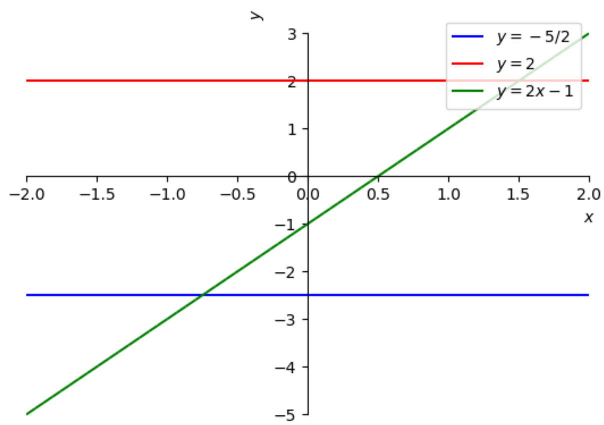


Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções afins $y = -5/2$, $y = 2$ e $y = 2x - 1$ discutidas no Exemplo 1.2.1.

Com o SymPy, podemos plotar os gráficos destas funções com os seguintes comandos[8]:

```
plot(-5/2,(x,-2,2))
plot(2,(x,-2,2))
plot(2*x-1,(x,-2,2))
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular m controla a inclinação da reta em relação ao eixo x[9].

[8]Veja a Observação 1.0.1.
[9]eixo das abscissas

Quando $m = 0$, temos uma reta horizontal. Quando $m > 0$ temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando $m < 0$ temos uma reta com inclinação negativa.

Exemplo 1.2.2. A Figura 1.4 mostra esboços dos gráficos das funções lineares $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = -2x$, $f_5(x) = -x$ e $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$.

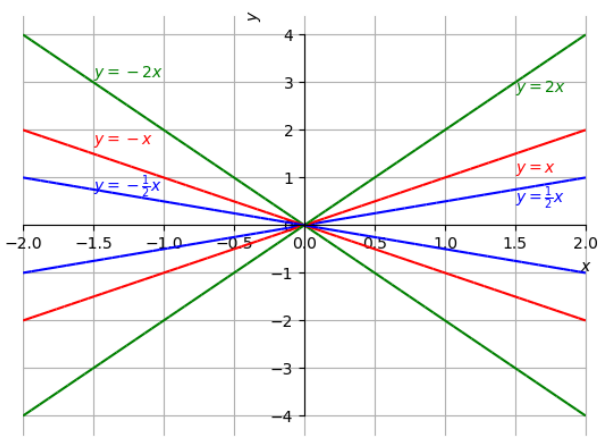


Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo 1.2.2.

Verifique, plotando os gráficos com o SymPy!

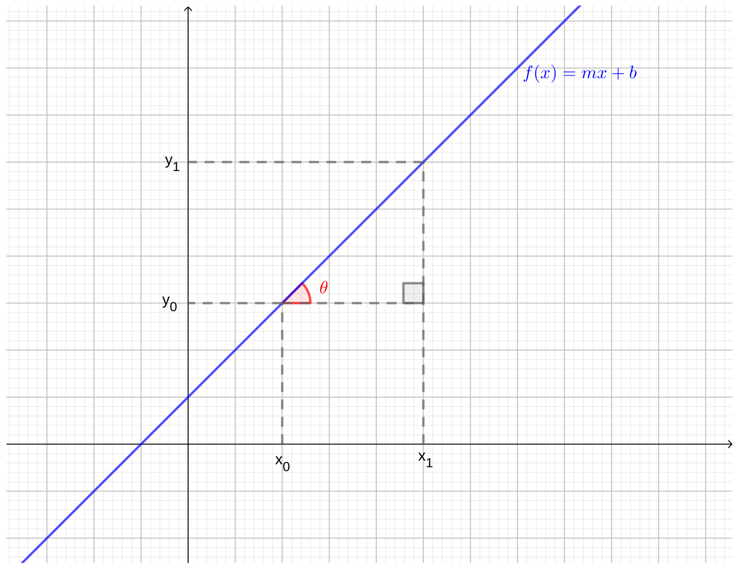


Figura 1.5: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo ângulo de declividade (veja a Figura 1.5). Para definirmos este ângulo, sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1), $x_0 < x_1$, pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim $f(x) = mx + b$. O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_0) e o segmente que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_1). Denotando este ângulo por θ, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{1.7}$$

$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \tag{1.8}$$

$$= m, \tag{1.9}$$

o que justifica chamar m de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), com $x_0 \neq x_1$, determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \tag{1.10}$$

$$mx_1 + b = y_1 \tag{1.11}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \tag{1.12}$$

Daí, substituindo o valor de m na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0. \tag{1.13}$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_{m}(x - x_0) + y_0. \tag{1.14}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Trace o esboço da reta que representa o gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$.

Solução. Para esboçar o gráfico de uma função afim, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função $f(x) = -x - 1$, temos

x	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, -2)$ em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura 1.6.

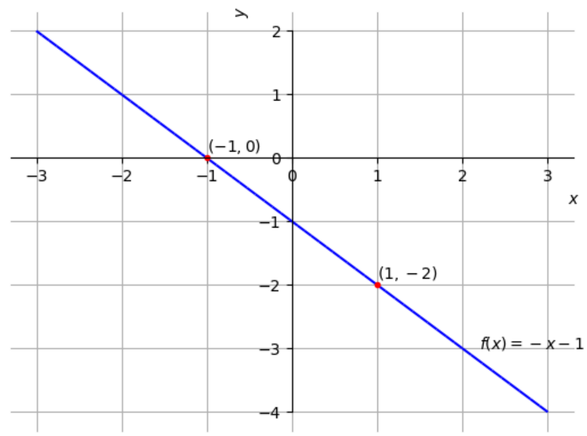


Figura 1.6: Esboço do gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$.

Com o SymPy, podemos plotar o gráfico da função $f(x) = -x - 1$ com o seguinte comando[10]:

```
plot(-x-1,(x,-3,3))
```

◊

ER 1.2.2. Determine a função afim $f(x) = mx + b$, cujo gráfico contém os pontos $(1, -1)$ e $(2, 1)$.

Solução. Vamos usar (1.14). Para tanto, tomamos $(x_0, y_0) = (1, -1)$ e $(x_1, y_1) = (2, 1)$. Desta forma, temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \tag{1.15}$$

De (1.14), temos

$$\begin{align} f(x) &= m(x - x_0) + y_0 \tag{1.16}\\ &= 2(x - 1) + (-1) \tag{1.17}\\ &= 2x - 3. \tag{1.18}\end{align}$$

[10] Veja a Observação 1.0.1.

Ou seja, a função afim desejada é $f(x) = 2x - 3$.
Com o SymPy, podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código[11]:

```
x0 = 1
y0 = -1

x1 = 2
y1 = 1

m = (y1-y0)/(x1-x0)

print(m*(x-x0) + y0)
```

$\Diamond$

ER 1.2.3. Verifique se as retas $y = -x - 1$ e $y = 2x - 3$ se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

Solução. As retas dadas são gráficos das funções afins $f(x) = -x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$. Como os coeficientes angulares de $f(x)$ e $g(x)$ são diferentes, temos que as retas têm ângulos de declividade diferentes e, portanto, são retas concorrentes[12].
Agora, vamos determinar o ponto de interseção. No ponto de interseção dos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ deve ocorrer que $f(x) = g(x)$. Segue

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow -x - 1 = 2x - 3 && (1.19)\\ &\Rightarrow 3x = 2 && (1.20)\\ &\Rightarrow x = \frac{2}{3}. && (1.21) \end{aligned}$$

Assim, temos que as retas se interceptam no ponto de abscissa $x = 2/3$. Para determinar a ordenada deste ponto, podemos usar qualquer uma das funções. Usando $f(x)$ temos

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} - 3 = \frac{4-9}{3} = -\frac{5}{3}. \quad (1.22)$$

Concluímos que as retas se interceptam no ponto $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$.
Com o SymPy, podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código[13]:

[11]Veja a Observação .
[12]Retas concorrentes são retas que se interceptam em um ponto.
[13]Veja a Observação .

```
f = lambda x: -x-1
g = lambda x: 2*x-3

px = solve(f(x)-g(x))[0]
py = f(px)

print(px, py)
```

$\Diamond$

Exercícios

Exemplo 1.2.3. Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f_1(x) = x$

b) $f_2(x) = -x$

c) $f_3(x) = x - 1$

d) $f_4(x) = -x + 1$

Exemplo 1.2.4. Determine a função afim $f(x) = mx+b$, cujo gráfico contém os pontos $(-2, 1)$ e $(0, -2)$.

Exemplo 1.2.5. Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$.

1.3 Função potência

Uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \neq 0$ é uma constante, é chamada de **função potência**.
Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de n. Quando n é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são $(-\infty, \infty)$. Veja a Figura 1.7.

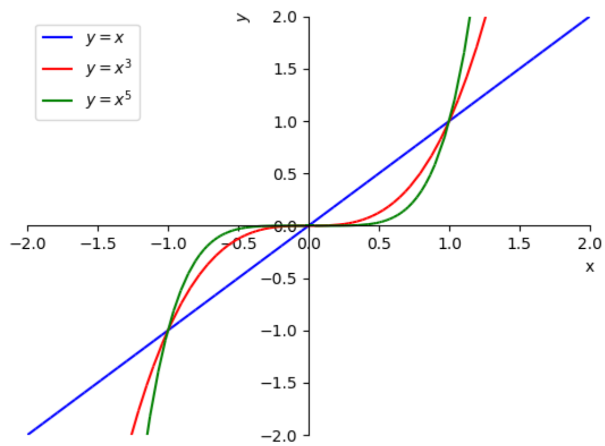


Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$.

Funções potências com n positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem $[0, \infty)$. Veja a Figura 1.8.

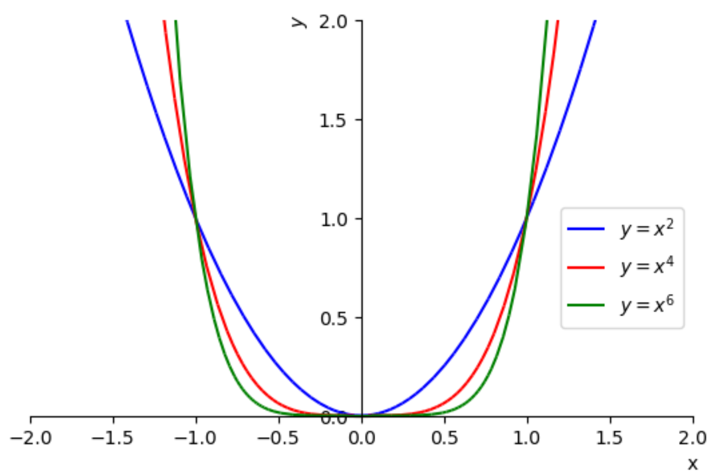


Figura 1.8: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$.

Funções potências com n inteiro negativo ímpar não são definidas em $x = 0$, tendo domínio e imagem igual a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Também, quando n inteiro negativo par, a função potência não está definida em $x = 0$, tem domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mas imagem $(0, \infty)$. Veja a Figura 1.9.

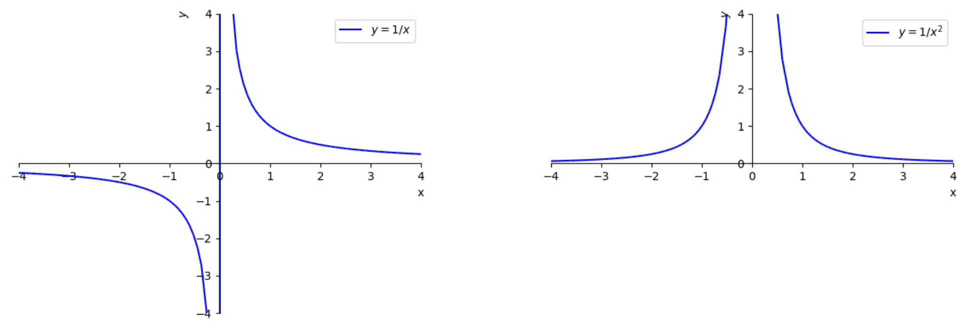


Figura 1.9: Esboços dos gráficos das funções potências $y = 1/x$ (esquerda), $y = 1/x^2$ (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando $n = 1/2$, $1/3$, $3/2$ e $2/3$. Veja a Figura 1.10.

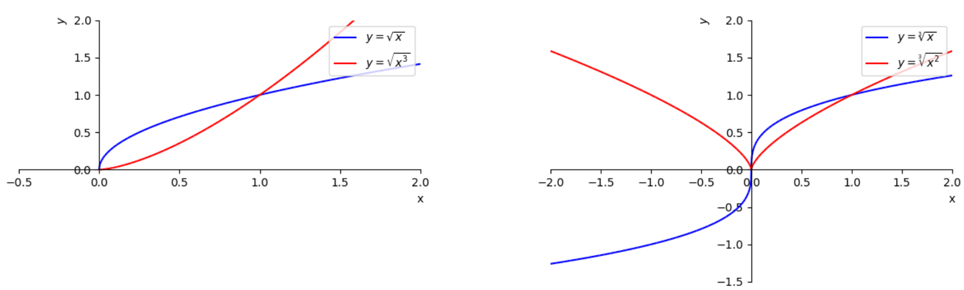


Figura 1.10: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x^3}$. Direita: $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Exercícios resolvidos

ER 1.3.1. Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{5/2}$;

b) $g(x) = x^{5/3}$.

Solução.

a) Vamos analisar a função $f(x) = x^{5/2}$. Como $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$ e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que x^5 deve ser não negativo. Daí, x deve ser não negativo. Logo, o domínio de $f(x) = x^{5/2}$ é $[0, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 1.11.

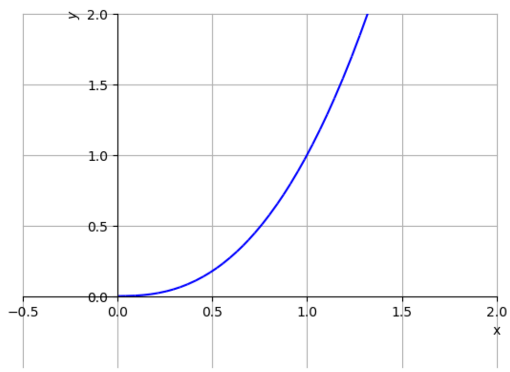


Figura 1.11: Esboço do gráfico de $f(x) = x^{5/2}$.

Para plotar o gráfico de $f(x)$ com o SymPy, basta digitar[14], por exemplo:

```
plot(x**(5/2),(x,0,2))
```

b) Vamos analisar a função $g(x) = x^{5/3}$. Como $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$, não temos restrição sobre os valores de x. Logo, o domínio da função g é $(-\infty, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 1.12.

[14]Veja a Observação 1.0.1.

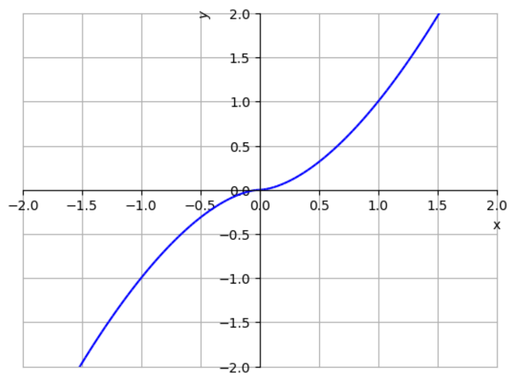


Figura 1.12: Esboço do gráfico de $g(x) = x^{5/3}$.

Para plotar o gráfico de $g(x)$ com o SymPy, digitamos[15]:

```
p = plot(x**(5/3),(x,0,2),line_color="blue",show=False)
q = plot(-(-x)**(5/3),(x,-2,0),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

Você sabe o porquê não pode-se usar, simplesmente, o seguinte comando?

```
plot(x**(5/3),(x,-2,2))
```

$\lozenge$

ER 1.3.2. Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução. Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de in-

[15] Veja a Observação 1.0.1.

terseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa x tais que

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} && (1.23)\\
&\Rightarrow 1 = x\sqrt[3]{x} && (1.24)\\
&\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} && (1.25)\\
&\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 && (1.26)\\
&\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 && (1.27)\\
&\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} && (1.28)\\
&\Rightarrow x^4 = 1 && (1.29)\\
&\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. && (1.30)
\end{aligned}$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura 1.13. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando $f(x)$, temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1). \quad (1.31)$$

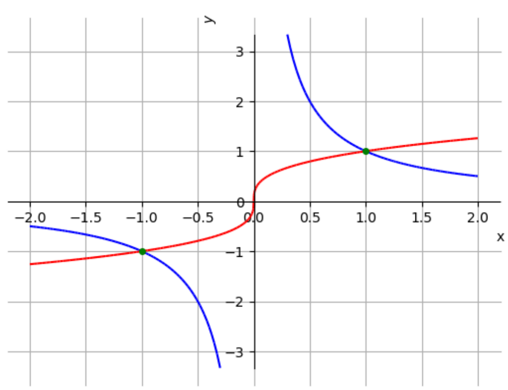


Figura 1.13: Interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ (azul) e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (vermelho).

Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos $(x_0, y_0) =$

$(-1,-1)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1)$. De (1.14), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{1-(-1)}{1-(-1)}(x - (-1)) + (-1) \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow y = x + 1 - 1 \Rightarrow y = x. \quad (1.33)$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ tem equação $y = x$.
Os seguintes comandos, mostrar como podemos resolver este problema usando o SymPy[16]:

```
f = lambda x: 1/x
# x nao negativo
g1 = lambda x: cbrt(x)
# x negativo
g2 = lambda x: -cbrt(-x)

x0 = solve(f(x)-g2(x))[0]
x1 = solve(f(x)-g1(x))[0]

y0 = f(x0)
y1 = f(x1)

print('y = ',(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0)
```

$\Diamond$

Exercícios

E 1.3.1. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^7$;

b) $g(x) = x^8$.

[16]Veja a Observaçao ??.

E 1.3.2. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x^7}$;

b) $g(x) = \frac{1}{x^8}$.

E 1.3.3. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$;

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

1.4 Função polinomial

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.34}$$

onde a_i são coeficientes reais, $a_n \neq 0$ e n é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte[17]. Polinômios de grau ímpar tem imagem $(-\infty, \infty)$. Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.14.

[17]Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é (∞, ∞)

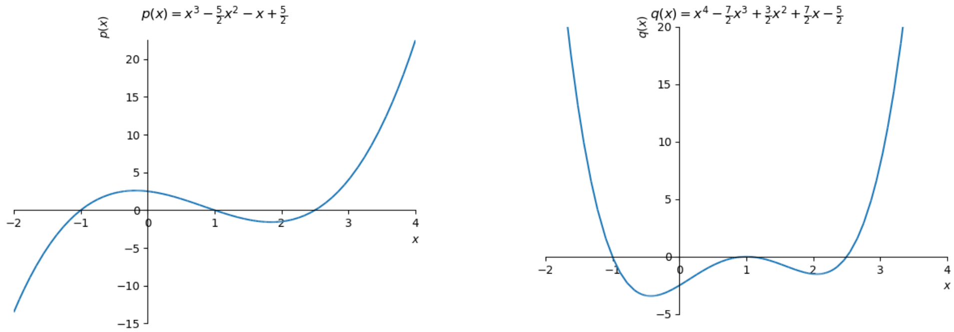


Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$. Direita: $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$.

Quando $n = 0$, temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando $n = 1$, temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando $n = 2$ temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando $n = 3$, temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

1.4.1 Função quadrática

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1.35}$$

onde a é chamado de **coeficiente do termo quadrático**, b o **coeficiente do termo linear** e c o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.36}$$

O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando $a > 0$ e, **côncava para baixo** quando $x < 0$. Veja a Figura 1.15.

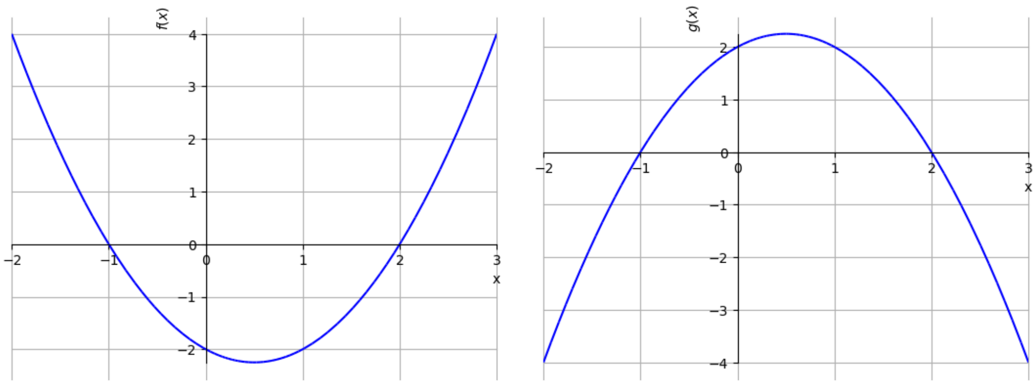


Figura 1.15: Esboço dos gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2 - x - 2$ (esquerda) e $g(x) = -x^2 + x + 2$ (direita).

O **vértice** da função quadrática $f(x)$ com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor máximo (mínimo)** em todo o seu domínio natural. Quando f têm zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros x_0 e x_1 da função, i.e. o vértice $V = (x_v, y_v)$ é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \tag{1.37}$$

O valor x_v é a abscissa do ponto em que a função quadrática f atinge o valor máximo (valor mínimo) y_v.

Exercícios resolvidos

ER 1.4.1. Determine os zeros do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Solução. Determinar os zeros da função f significa entrar todos os valores de x tais que $f(x) = 0$ (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de f intersepta o eixo das abscissas). Temos

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \tag{1.38}$$
$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \tag{1.39}$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0. \tag{1.40}$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (1.36) na equação $x^2 - x - 2 = 0$, obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.41}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \tag{1.42}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \tag{1.43}$$
$$= \frac{1 \pm 3}{2} \tag{1.44}$$
$$= -1 \quad \text{ou} \quad 2 \tag{1.45}$$

Com isso, temos que os zeros da função f ocorrem nos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
Com o SymPy, podemos calcular os zeros da função f com o seguinte comando[18]:

```
solve(x**3-x**2-2*x)
```

♢

ER 1.4.2. Determine o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - x - 2$.

Solução. Como f é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo, f atinge seu valor mínimo no seu vértice. Por sorte, os zeros de f são $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$. Logo, o vértice tem abscissa

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{1.46}$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de f é $1/2$ e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 - 8}{4} = -\frac{9}{4}. \tag{1.47}$$

Podemos resolver este exercício com o seguinte código SymPy[19]:

[18] Veja a Observação 1.0.1.
[19] Veja a Observação 1.0.1.

```
f = lambda x: x**2-x-2
z = solve(f(x))
f((z[0]+z[1])/2)
```

$\lozenge$

Exercícios

E 1.4.1. Determine os zeros do polinômio $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$.

E 1.4.2. Determine o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + x + 2$.

1.5 Função racional

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{1.48}$$

onde $p(x)$ e $q(x) \not\equiv 0$ são polinômios.

Função racionais não estão definidas nos zeros de $q(x)$. Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura 1.16 para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \tag{1.49}$$

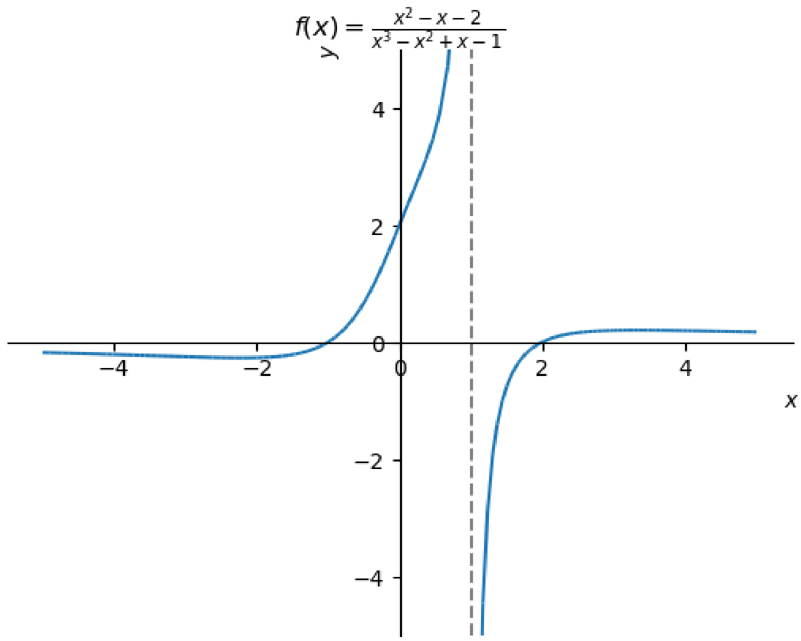


Figura 1.16: Esboço do gráfico da função racional $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-x^2+x-1}$.

Com o estudo do cálculo de limites, veremos que a reta $y = 0$ (eixo das abscissas) é uma assíntota horizontal e a reta $x = 1$ (reta tracejada) é uma assíntota vertical ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto $x = 1$ está relacionada ao fato de que o denominador se anula em $x = 1$. Ainda, temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \tag{1.50}$$

o que mostra que $x = 1$ é a única raiz do denominador. Com isso, podemos concluir que o domínio da função $f(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercícios resolvidos

E 1.5.1. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \tag{1.51}$$

Solução. Como $f(x)$ é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \tag{1.52}$$

Logo, o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

◊

E 1.5.2. Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x-1}. \tag{1.53}$$

Solução. Tendo em vista que o denominador se anula em $x = 1$, o domínio de g é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que $g(x) = 1$ para $x \neq 1$. I.e., g é uma função constante para valores de $x \neq 1$ e não está definida em $x = 1$. Veja a Figura 1.17 para o esboço do gráfico da função g.

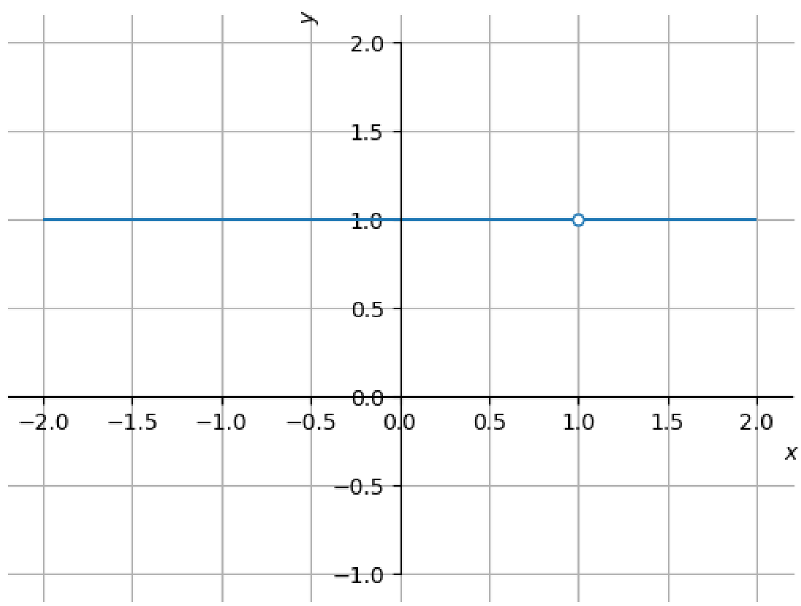


Figura 1.17: Esboço do gráfico da função $g(x) = (x-1)/(x-1)$.

Com o SymPy, o comando[20]

```
plot((x-1)/(x-1),(x,-2,2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em $x = 1$. Isto ocorre, pois os gráficos com o SymPy são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.
Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

$\lozenge$

Exercícios

E 1.5.3. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}. \tag{1.54}$$

1.6 Funções trigonométricas

1.6.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno $y = \operatorname{sen}(x)$ e cosseno $y = \cos(x)$ podem ser definidas a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura 1.18). Seja x o ângulo[21] de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta r na Figura 1.18). Seja, então, (a,b) o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária[22]. Então, definimos:

$$\operatorname{sen}(x) = a, \qquad \cos(x) = b. \tag{1.55}$$

[20] Veja a Observação 1.0.1.
[21] Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.
[22] Circunferência do círculo de raio 1.

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $[-1, 1]$.

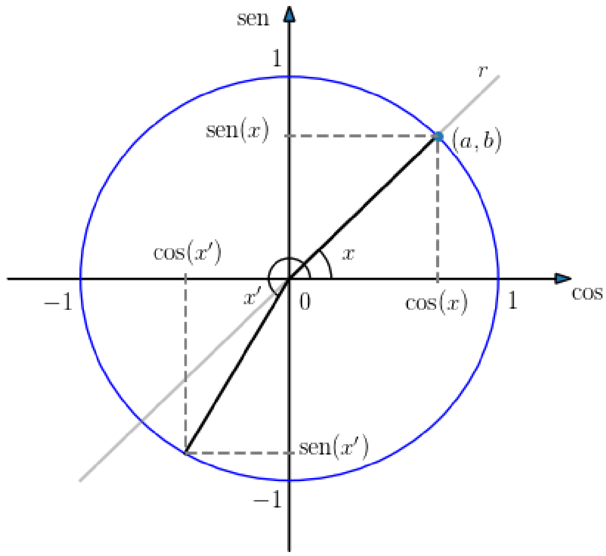


Figura 1.18: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 1.19 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.56}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{1.57}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \tag{1.58}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.59}$$

$$\tag{1.60}$$

As funções seno e cosseno estão definidas no SymPy como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de $\pi/6$, digitamos:

```
sin(pi/6)
```

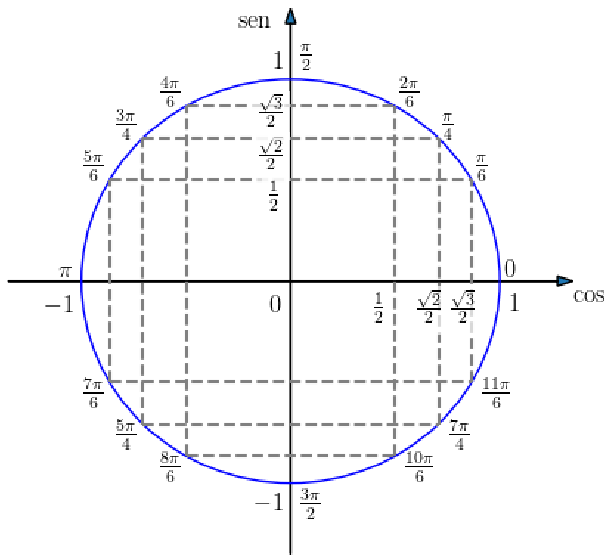


Figura 1.19: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função** $f(x)$ é dita **periódica** quando existe um número p, chamado de período da função, tal que

$$f(x+p) = f(x) \tag{1.61}$$

para qualquer valor de x no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período 2π, i.e.

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x), \tag{1.62}$$

para qualquer valor de x.

Na Figura 1.20, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

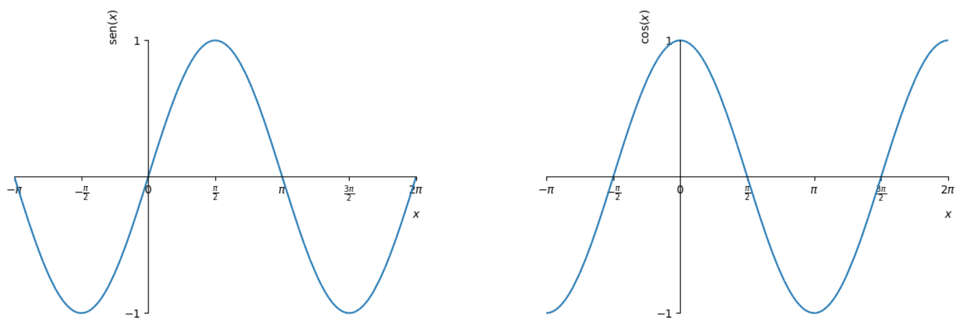


Figura 1.20: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \tag{1.63}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \tag{1.64}$$

No SymPy, as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções `tan`, `cot`, `sec` e `csc`, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de $\operatorname{cosec}(\pi/4)$ com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura 1.21, temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, \infty)$ e período π.

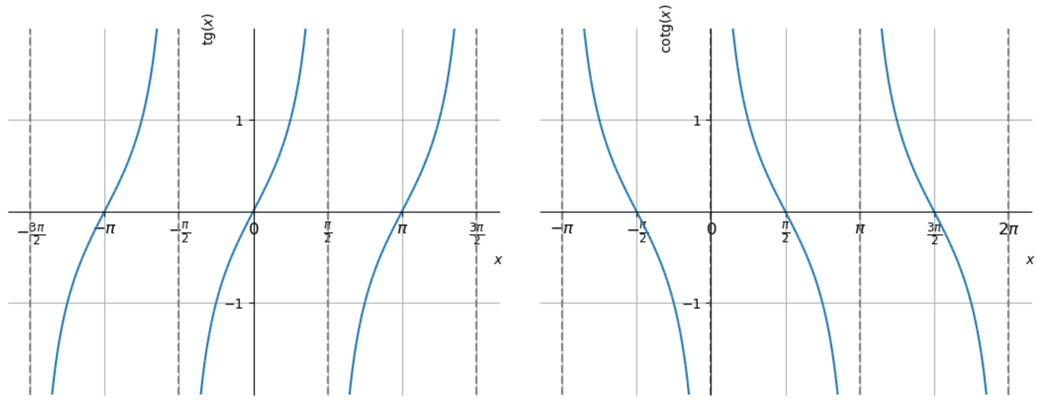


Figura 1.21: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura 1.22, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ e período π.

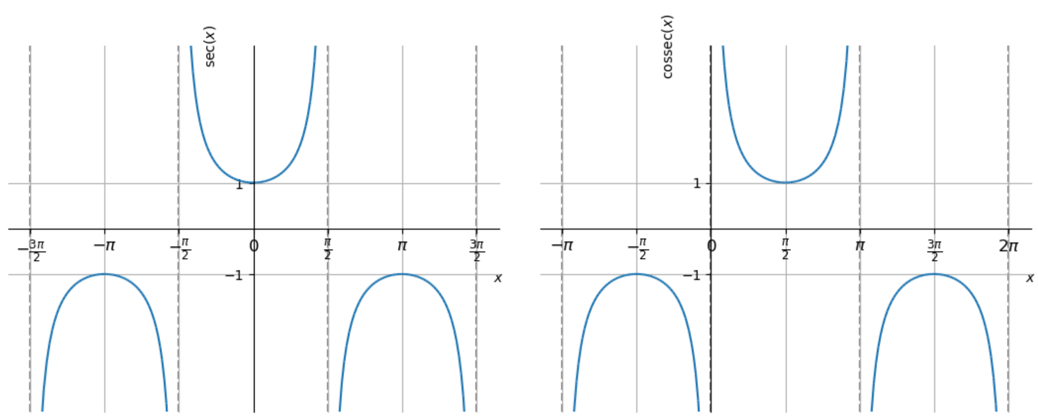


Figura 1.22: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

1.6.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Comecemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{1.65}$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \tag{1.66}$$
$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \tag{1.67}$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \tag{1.68}$$
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y), \tag{1.69}$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \tag{1.70}$$
$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x. \tag{1.71}$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{1.72}$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \tag{1.73}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.6.1. Mostre que

$$\cos x - 1 = -2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{1.74}$$

Solução. A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \tag{1.75}$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}. \tag{1.76}$$

Então, isolando $\cos x$, obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \tag{1.77}$$
$$\Rightarrow \cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{1.78}$$

◊

Exercícios

E 1.6.1. Mostre que $\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar, i.e.

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x) \tag{1.79}$$

para todo número real x.

E 1.6.2. Mostre que $\cos x$ é uma função par, i.e.

$$\cos x = -\cos(-x) \tag{1.80}$$

para todo número real x.

1.7 Operações com funções

1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções f e g com domínio em comum D. Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ para todo $x \in D$;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$ para todo $x \in D$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 1.7.1. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$. Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$ e está definida em toda parte.

- $(g - f)(x) = x - x^2$ e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$ e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$ e tem domínio $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$[23].

1.7.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções f e g. Definimos a **função composta** de f com g por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \tag{1.81}$$

Seu domínio consiste dos valores de x que pertençam ao domínio da g e tal que $g(x)$ pertença ao domínio da f.

Exemplo 1.7.2. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. A função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

1.7.4 Translações

Dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que a o gráfico de $y = f(x) + k$ é uma translação vertical do gráfico de f. Se $k > 0$, observamos uma translação vertical para cima. Se $k < 0$, observamos uma translação vertical para baixo.

Exemplo 1.7.3. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.23, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k = x^2 + k$ para $k = 1$.

[23]Observemos que não podemos simplificar o x, pois a função $y = x$ é diferente da função $y = x^2/x$.

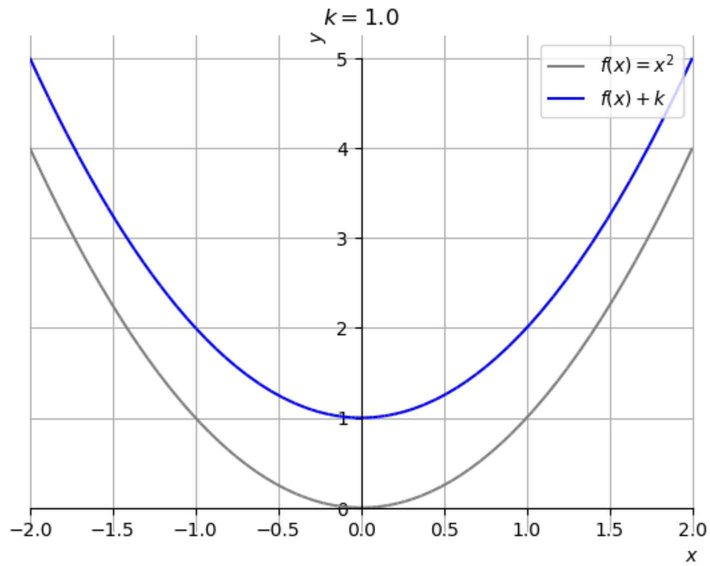


Figura 1.23: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $f(x) + k$ com $k = 1$.

O seguinte código `Python`[24], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k$:

```
k = 1
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x)+k,(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$k = %1.1f$" % k)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x)+k$"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

[24]Veja a Observação 1.0.1.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de k e a função f para vermos o efeito das translações verticais.

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que o gráfico de $y = f(x + k)$ é uma translação horizontal do gráfico de f em k unidades. Se $k > 0$, observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se $k < 0$, observamos uma translação horizontal para a direita.

Exemplo 1.7.4. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.24, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x + k) = (x + k)^2$ para $k = 1$.

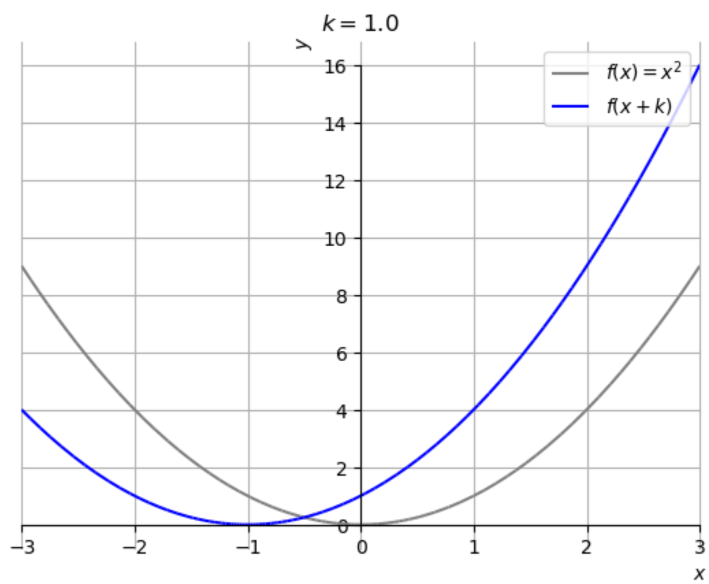


Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $f(x + k)$ com $k = 1$.

O seguinte código `Python`[25], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x + k)$:

```
k = 1
```

[25]Veja a Observação 1.0.1.

```
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-3,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x+k),(x,-3,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$k = %1.1f$" % k)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x+k)$"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de k e a função f para vermos o efeito das translações horizontais.

1.7.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função f e uma constante α. Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$ é uma dilatação vertical do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = \alpha f(x)$ é uma contração vertical do gráfico de f, quando $0 < \alpha < 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma contração horizontal do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma dilatação horizontal do gráfico de f, quando $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1.7.5. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.25, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot x^2$ para $\alpha = 2$.

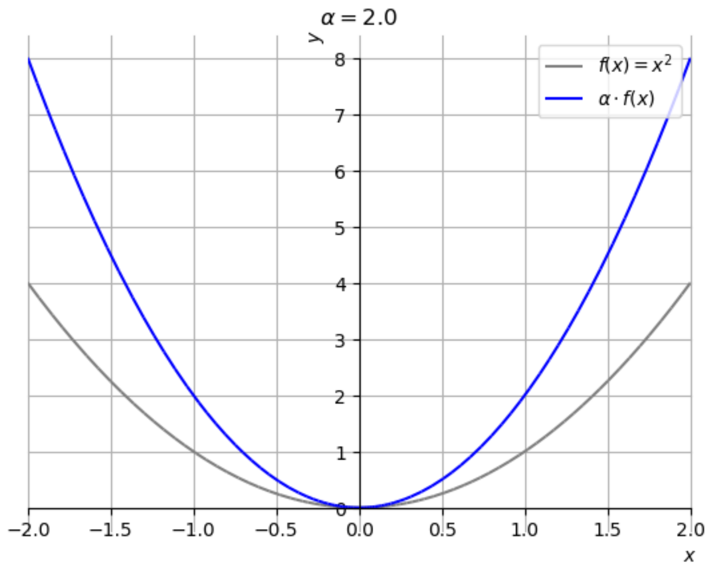


Figura 1.25: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $\alpha \cdot f(x)$ com $\alpha = 2$.

O seguinte código `Python`[26], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $\alpha \cdot f(x)$:

```
alpha = 2
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(alpha*f(x),(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\\alpha = %1.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$\\alpha\\cdot f(x)$"
p.save('fig_ex_dilavert.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

[26] Veja a Observação 1.0.1.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilavert.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações verticais.

Exemplo 1.7.6. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$. A Figura 1.26, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^2 - 2(\alpha \cdot x) + 1$ para $\alpha = \frac{1}{2}$.

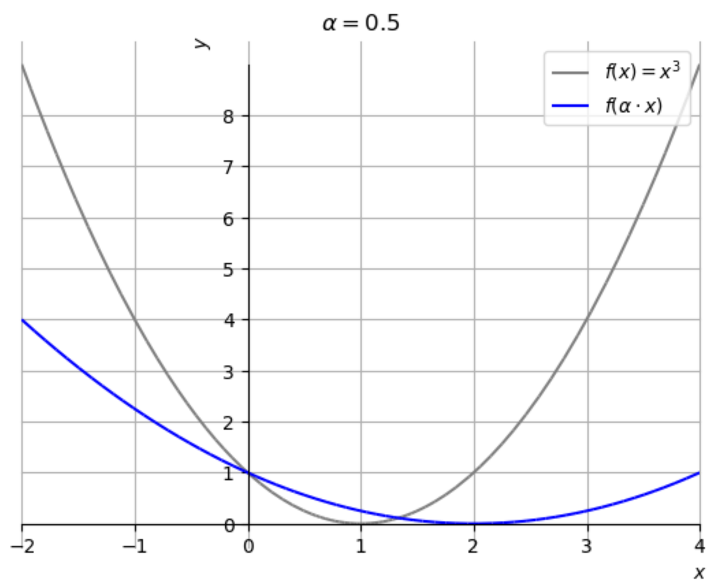


Figura 1.26: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $f(\alpha \cdot x)$ com $\alpha = \frac{1}{2}$.

O seguinte código `Python`[27], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x)$:

```
alpha = 0.5
f = lambda x: x**2-2*x+1

p = plot(f(x),(x,-2,4),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(alpha*x),(x,-2,4),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\\alpha = %1.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
```

[27] Veja a Observação 1.0.1.

```
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^3$"
p[1].label = "$f(\\alpha\\cdot x)$"
p.save('fig_ex_dilahoriz.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(0,9))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilahoriz.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações horizontais.

1.7.6 Reflexões

Seja dada uma função f. O gráfico da função $y = -f(x)$ é uma reflexão em torno do eixo das abscissas do gráfico da função f. Já, o gráfico da função $y = f(-x)$ é uma reflexão em torno do eixo das ordenadas do gráfico da função f.

Exemplo 1.7.7. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura 1.28, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

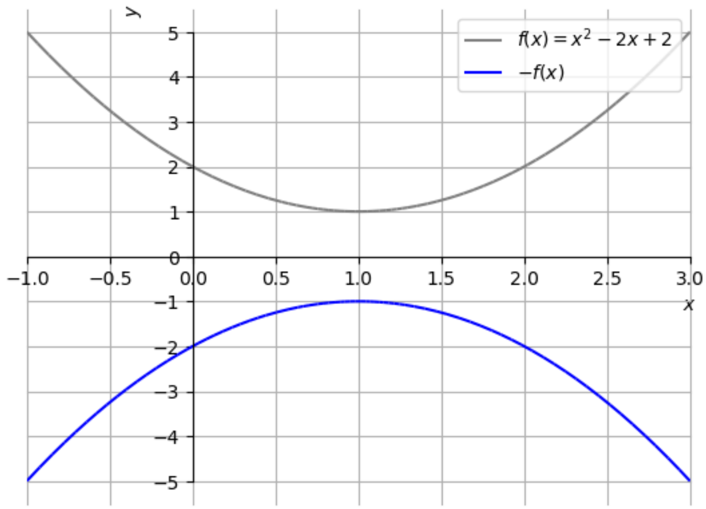


Figura 1.27: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $-f(x)$.

O seguinte código `Python`[28], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$:

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(-f(x),(x,-1,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$-f(x)$"
p.save('fig_ex_reflex.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-5,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_reflex.png', bbox_inches='tight')
```

[28] Veja a Observação 1.0.1.

Podemos alterar a função `f` para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das abscissas.

Exemplo 1.7.8. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura **??**, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x) = x^2 + 2x + 2$.

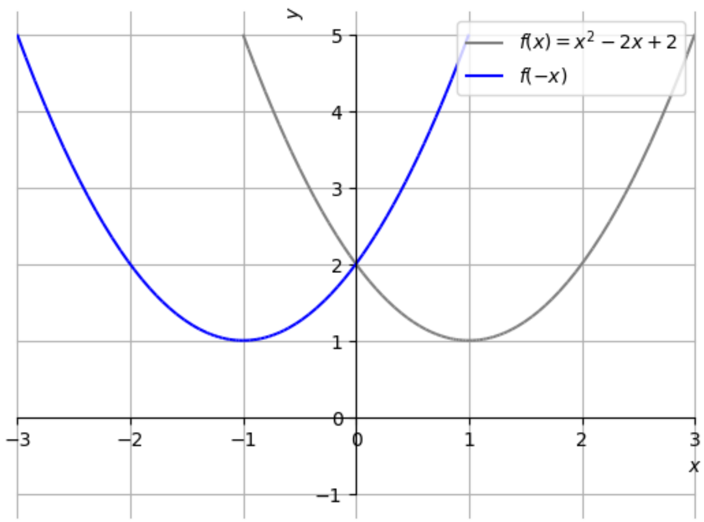


Figura 1.28: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $f(-x)$.

O seguinte código `Python`[29], faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$:

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="none",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$f(-x)$"
p[2].label = ""
```

[29]Veja a Observação 1.0.1.

```
p.save('fig_ex_refley.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-1,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_refley.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar a função `f` para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

ER 1.7.1. Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \tag{1.82}$$

Determine a função composta $(f \circ g)$ e seu domínio.

Solução. Começamos determinando a função composta

$$\begin{align}
(f \circ g)(x) &:= f(g(x)) \tag{1.83}\\
&= f(x^2+1) \tag{1.84}\\
&= \frac{(x^2+1)^2 - \sqrt{x^2+1-1}}{x^2+1} \tag{1.85}\\
&= \frac{x^4+2x^2+1-\sqrt{x^2}}{x^2+1} \tag{1.86}\\
&= \frac{x^4+2x^2+1-|x|}{x^2+1}. \tag{1.87}
\end{align}$$

Agora, observamos que g está definida em toda parte e tem imagem $[1, \infty)$. Como o domínio da f é $[1, \infty)$, temos que $(f \circ g)$ está definida em toda parte.

♢

ER 1.7.2. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$.

Solução. Começamos trançando o gráfico de $f_1(x) = x^3$. Então, obtemos o gráfico de $f_2(x) = (x-1)^3$ por translação de uma unidade à direita. O gráfico de $f_3(x) = 2(x-1)^3$ é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de $f_4(x) = 2(x-1)^3+1$ é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura 1.29.

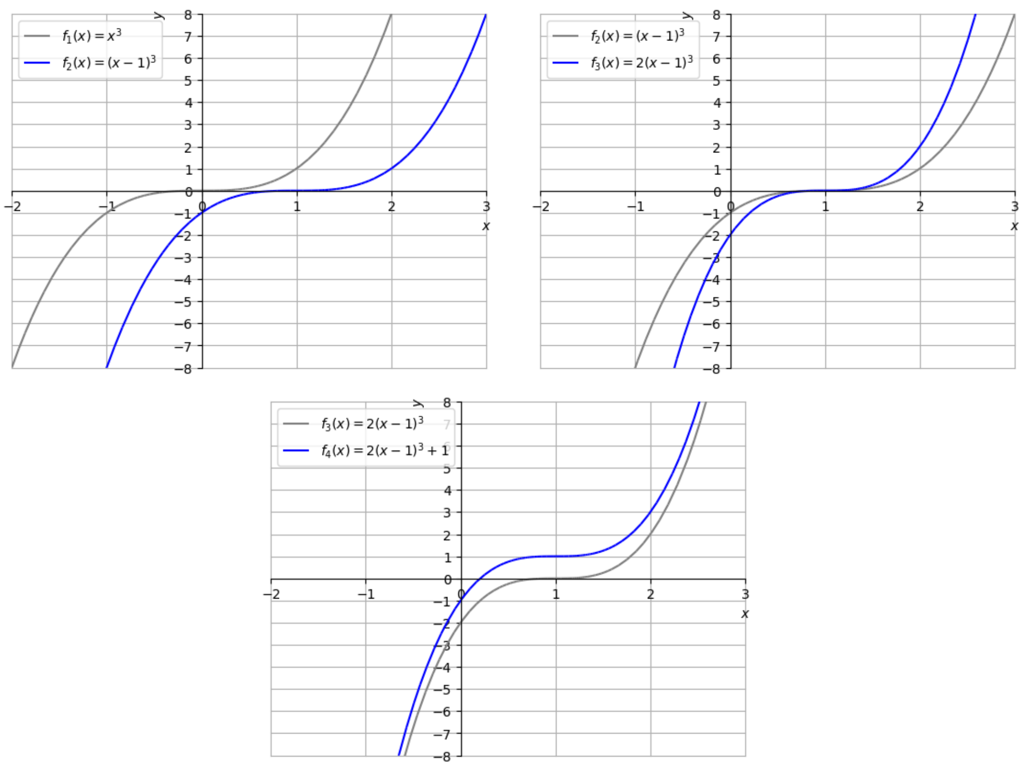


Figura 1.29: Construção do esboço do gráfico de $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$.

$\Diamond$

Exercícios

E 1.7.1. Sejam $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine a função $(f \circ g)$ e seu domínio.

E 1.7.2. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = 2x^3 - 1$.

1.8 Propriedades de funções

1.8.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma da função f é dita ser crescente quando $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ no seu domínio. É dita não decrescente quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos os $x_1 < x_2$ no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando $f(x_1) > f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$. E, por fim, é dita não crescente quando $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, sempre no seu domínio.

Exemplo 1.8.1. Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade** $f(x) = x$ é crescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \leq 0, \\ 2 & ,0 < x \leq 1, \\ (x-1)^2 + 2 & ,x > 1 \end{cases} \tag{1.88}$$

  é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

Exemplo 1.8.2. A função $f(x) = x^2$ é uma função decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

1.8.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função** f é dita **par** quando $f(x) = f(-x)$ para todo x no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x no seu domínio.

Exemplo 1.8.3. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ é uma função par.
- $f(x) = x^3$ é uma função par.
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$ é uma função par.
- $f(x) = x + 1$ não é par nem ímpar.

1.8.3 Funções injetoras

Uma dada **função** f é dita **injetora** quando $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todos $x_1 \neq x_2$ no seu domínio.

Exemplo 1.8.4. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$ é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$ é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora $y = f(x)$, existe uma única função g tal que

$$g(f(x)) = x, \tag{1.89}$$

para todo x no domínio da f. Tal função g é chamada de **função inversa** de f é comumente denotada por f^{-1}.[30]

Exemplo 1.8.5. Vamos calcular a função a função inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \tag{1.90}$$

Então, isolando x, temos

$$x = \sqrt[3]{y-1}. \tag{1.91}$$

Desta forma, concluímos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f!

Observação 1.8.1. Os gráficos de uma dada função injetora f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação a **reta identidade** $y = x$.

Exercícios resolvidos

ER 1.8.1. Defina os intervalos em que a função $f(x) = -|x+1|$ é crescente ou decrescente.

[30] Observe que, em geral, $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Solução. A função f é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função $f(x) = |x|$. Veja a Figura 1.30.

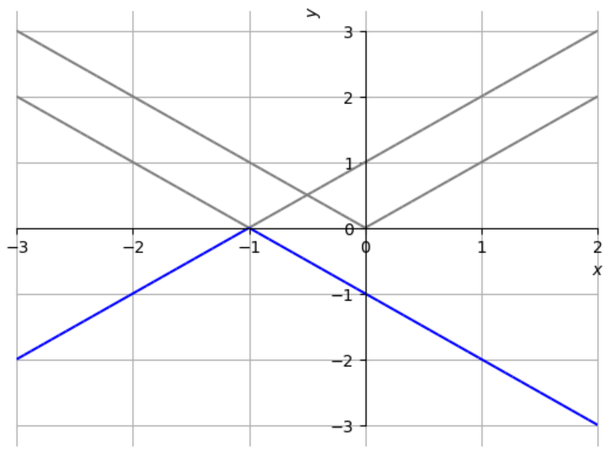


Figura 1.30: Esboço do gráfico de $f(x) = -|x + 1|$.

Do esboço do gráfico de f, podemos inferir que f é crescente no intervalo $(-\infty, -1]$ e decrescente no intervalo $[-1, \infty)$.

$\Diamond$

ER 1.8.2. Analise a paridade da função $tg(x)$.

Solução. Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x. \tag{1.92}$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

$\Diamond$

ER 1.8.3. Calcule a função inversa de $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

Solução. Para obtermos a função inversa de uma função f, resolvemos $y = f(x)$ para x. Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x + 1} \tag{1.93}$$
$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \tag{1.94}$$
$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \tag{1.95}$$

Logo, temos $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ restrita ao conjunto imagem da f, i.e. o domínio de f^{-1} é $[0, \infty)$.

$\Diamond$

Exercícios

E 1.8.1. Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x+5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \tag{1.96}$$

E 1.8.2. Analise a paridade da função $\operatorname{cosec} x$.

E 1.8.3. Seja $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$. Calcule f^{-1} e determine seu domínio.

1.9 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \tag{1.97}$$

onde $a \neq 1$ é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem $(0, \infty)$. O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos $(-1,1/a)$, $(0,1)$ e $(1,a)$. Veja a Figura 1.31.

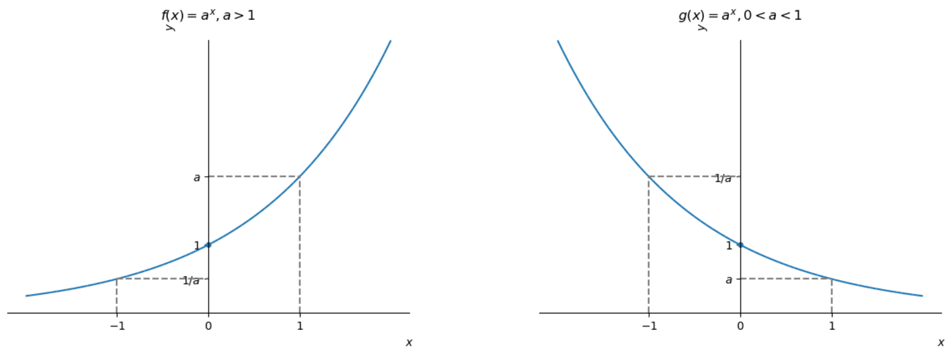


Figura 1.31: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda) $f(x) = a^x$, $a > 1$; (direita) $g(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.9.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2{,}718281828459045$, chamamos $f(x) = e^x$ de função exponencial natural.

No SymPy[31], o número de Euler é obtido com a constante `E`:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

Exercícios resolvidos

ER 1.9.1. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

Solução. Primeiramente, observamos que $f(x) = e^{-2x+1} - 1 = e^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 1$. Então, partindo do gráfico de e^{-x}, fazemos uma translação de $\frac{1}{2}$ unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de $\frac{1}{2}$ vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura 1.32.

[31]Veja a Observação 1.0.1

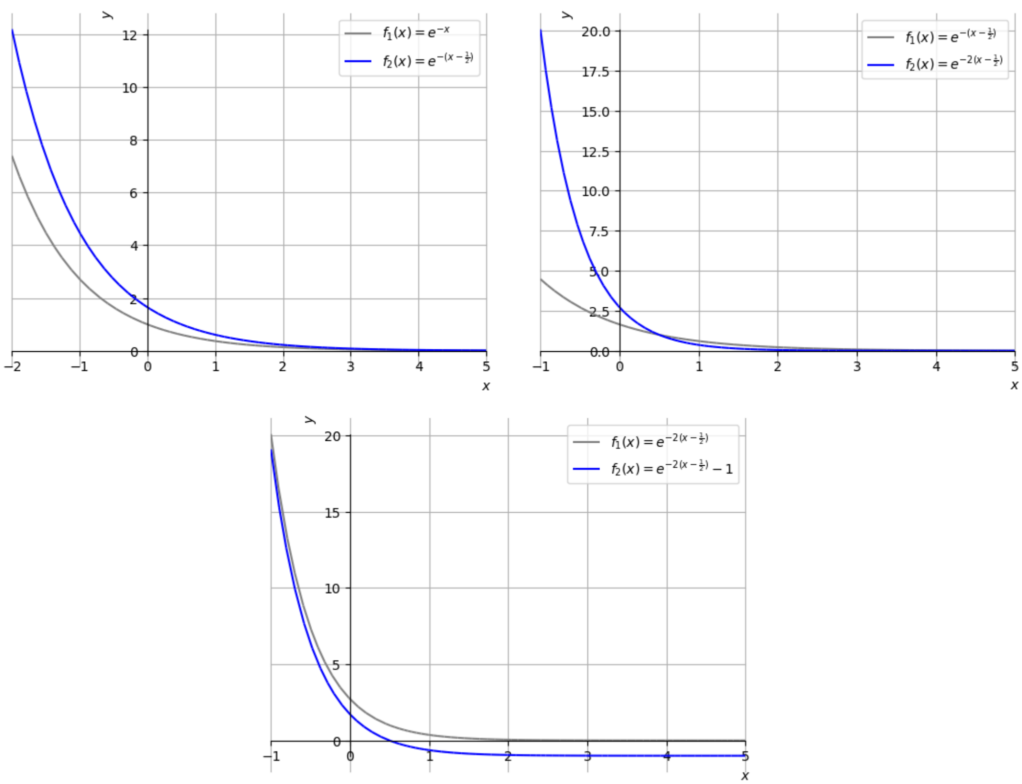


Figura 1.32: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

$\Diamond$

Exercícios

E 1.9.1. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = 2e^{x-1} + 2$.

1.10 Funções logarítmicas

A **função logarítmica** $y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função inversa da função exponencial $y = a^x$. Veja a Figura 1.33. O domínio da função logarítmica é $(0,\infty)$ e a imagem $(-\infty, \infty)$.

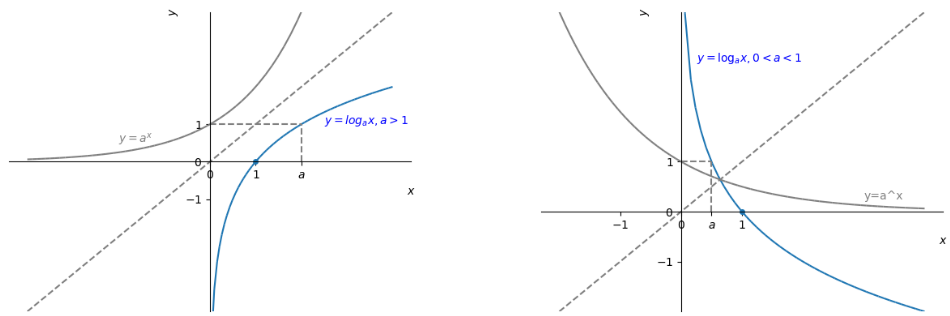


Figura 1.33: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda) $y = \log_a x$, $a > 1$; (direita) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.10.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2{,}718281828459045$, chamamos $y = \log_e x$ de função exponencial natural e denotamo-la por $y = \ln x$.
No SymPy, podemos computar $\log_a x$ com a função `log(x,a)`. O $\ln x$ é computado com `log(x)`.

Observação 1.10.2. Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a a^x = x$;
- $a^{\log_a^x} = x$;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exercícios resolvidos

ER 1.10.1. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ e determine seu domínio.

Solução. Para fazermos o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$, podemos começar com o gráfico de $f_1(x) = \ln x$. Então, podemos transladá-lo 2 unidades à esquerda, de forma a obtermos $f_2(x) = \ln(x + 2) = f_1(x + 2)$. Por fim, transladamos o gráfico de $f_2(x)$ uma unidade para cima, obtendo o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1 = f_2(x) + 1$. Veja a Figura 1.34.

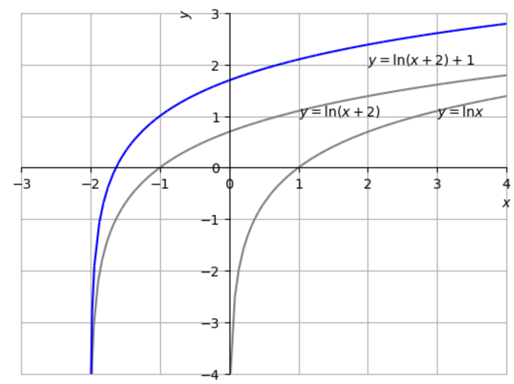


Figura 1.34: Esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$.

Ainda, o domínio de $\ln x$ é $(0, \infty)$. Como, $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ é uma translação de duas unidades à esquerda e uma para cima de $\ln x$, temos que o domínio de $f(x)$ é $(-2, \infty)$.

◊

ER 1.10.2. Resolva a seguinte equação para x

$$\ln(x + 2) + 1 = 1. \tag{1.98}$$

Solução. Podemos calcular a solução pelos seguintes passos:

$$\begin{align} \ln(x + 2) + 1 = 1 &\Rightarrow \ln(x + 2) = 0 \tag{1.99}\\ &\Rightarrow x + 2 = e^0 \tag{1.100}\\ &\Rightarrow x = 1 - 2 = -1. \tag{1.101}\\ & \tag{1.102}\end{align}$$

Com o SymPy, podemos computar a solução com o seguinte comando[32]:

```
solve(Eq(log(x+2)+1,1),x)
```

◊

Exercícios

E 1.10.1. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \log(x-2) - 1$ e determine seu domínio.

E 1.10.2. Resolva a seguinte equação para x

$$\ln(x+1)^2 = 0. \tag{1.103}$$

[32]Veja a Observação 1.0.1.

Capítulo 2

Limites

Observação 2.0.1. Ao longo deste capítulo, ao apresentarmos códigos Python estaremos assumindo os seguintes comandos prévios:

```
from sympy import *
init_printing()
var('x')
```

2.1 Noção de limites

Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto x_0, exceto talvez em x_0. Quando o valor de $f(x)$ é arbitrariamente próximo de um número L para x suficientemente próximo de x_0, escrevemos

$$\lim_{x} x \to x_0 f(x) = L \tag{2.1}$$

e dizemos que o limite da função f é L quando x tende a x_0. Veja a Figura 2.1.

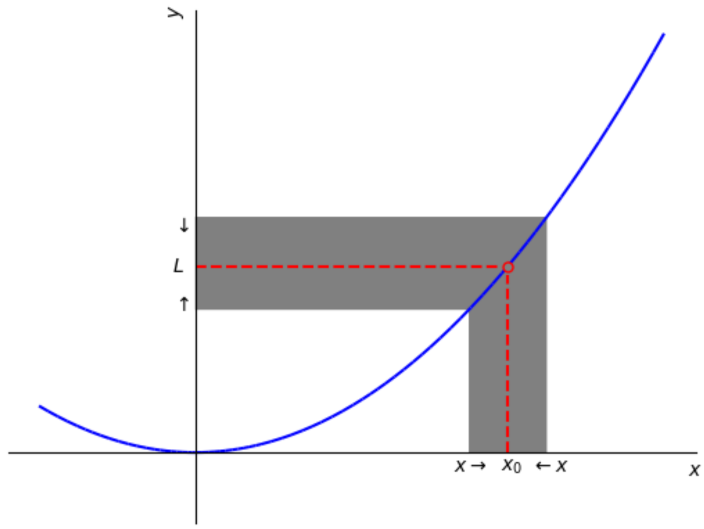


Figura 2.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

Exemplo 2.1.1. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2.2)$$

Na Figura 2.2, temos um esboço do gráfico desta função.

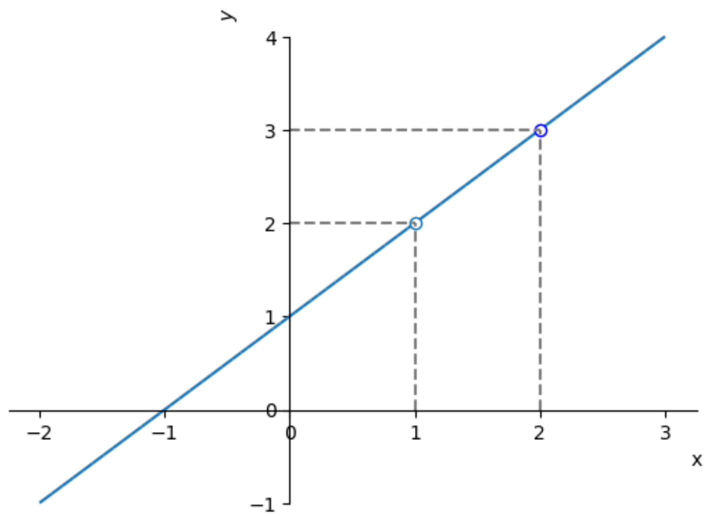


Figura 2.2: Esboço do gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 2.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$\to 0 \leftarrow$	$0{,}0001$	$0{,}001$	$0{,}01$
$f(x)$	$0{,}99$	$0{,}999$	$0{,}9999$	$\to 1 \leftarrow$	$1{,}0001$	$1{,}001$	$1{,}01$

  No SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

x	$0{,}9$	$0{,}99$	$0{,}999$	$\to 1 \leftarrow$	$1{,}0001$	$1{,}001$	$1{,}01$
$f(x)$	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$\to 2 \leftarrow$	$2{,}0001$	$2{,}001$	$2{,}01$

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x\to x_0} k = k, \tag{2.3}$$

seja qual for a constante k. Veja a Figura 2.3.

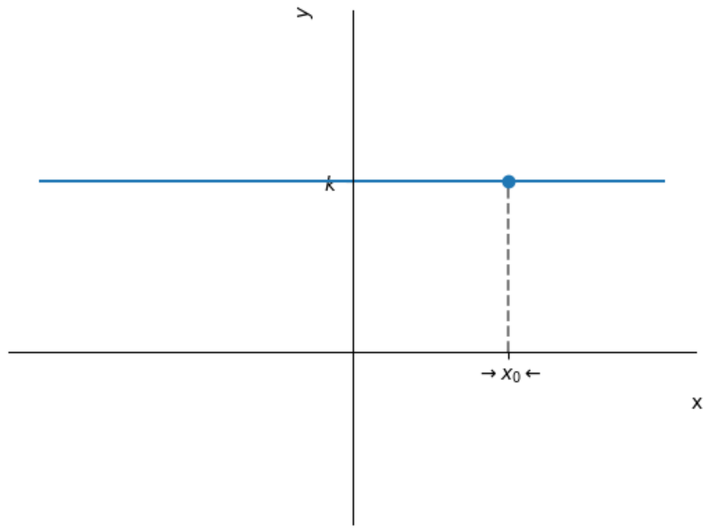


Figura 2.3: Esboço do gráfico de uma função constante $f(x) = k$.

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \to -1} 1 = 1$

b) $\lim_{x \to 2} -3 = -3$

c) $\lim_{x \to \pi} \sqrt{2} - e = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0, \tag{2.4}$$

seja qual for o ponto x_0. Vejamos a Figura 2.4.

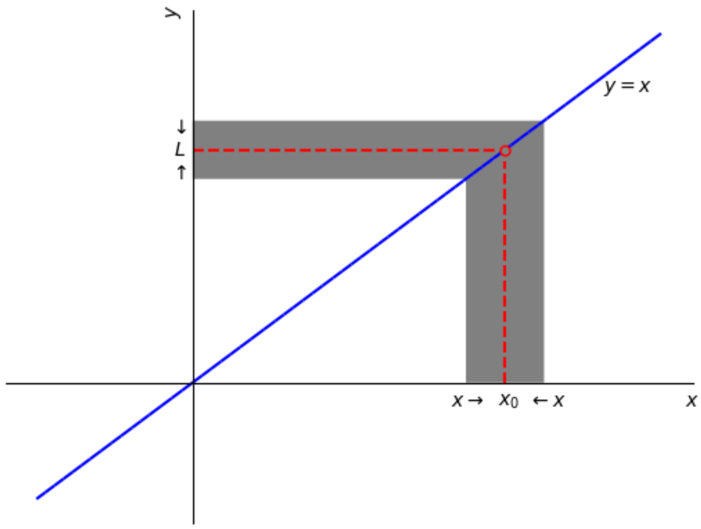


Figura 2.4: Noção de limite para a função identidade $f(x) = x$.

Exemplo 2.1.3. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} x = \pi$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Estime o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} e^x. \tag{2.5}$$

Solução. Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto x_0, computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

x	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,460	2,691	2,716	$\to 2{,}72 \leftarrow$	2,719	2,721	2,746

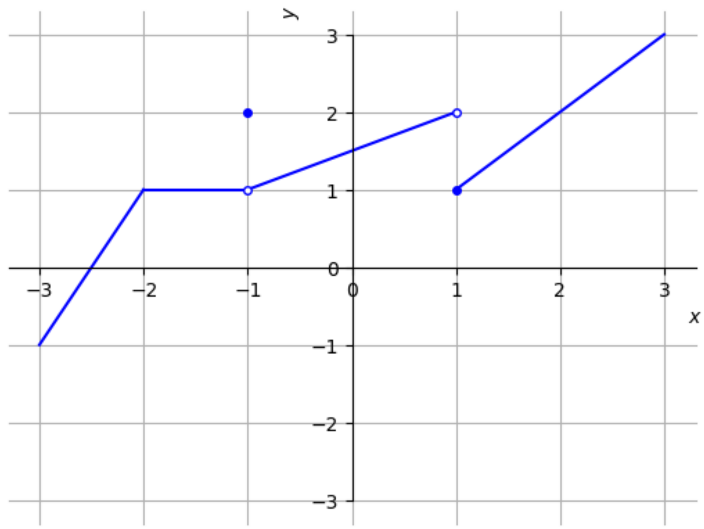
Com isso, inferimos que

$$\lim_{x \to 1} e^x \approx 2{,}72. \tag{2.6}$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x \to 1} e^x = e \approx 2{,}718281828459045...$

$\Diamond$

ER 2.1.2. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de -2 e a direita de -2 (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de x a esquerda de -2 (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos x suficientemente próximo de -2. Concluímos que

$$\lim_{x\to -2} = 1. \tag{2.7}$$

b) $\lim_{x \to -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de x suficientemente próximos de -1. Logo,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 1. \tag{2.8}$$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Aqui, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda $(x < 1)$, vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita $(x > 1)$, temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos x suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois L dependerá de x estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x). \tag{2.9}$$

$\Diamond$

Exercícios

E 2.1.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de

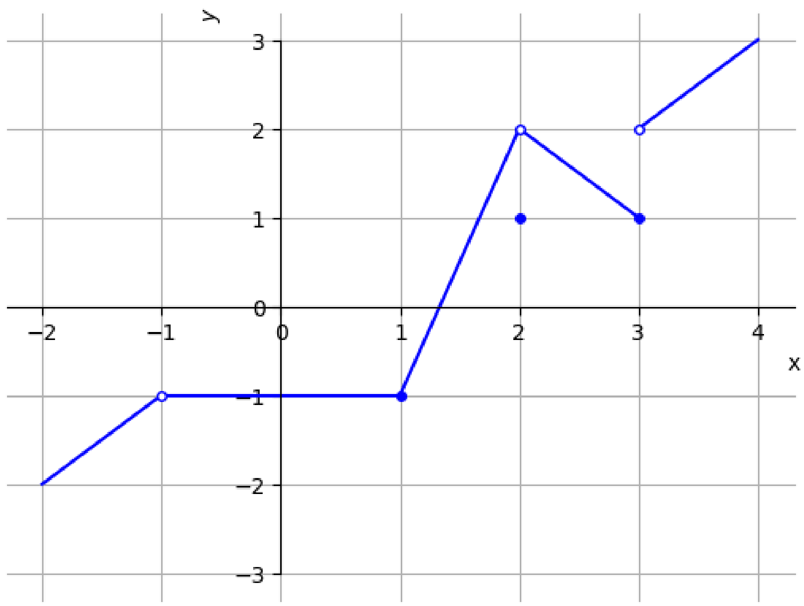


gráfico:
Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2} f(x)$

e) $\lim_{x \to 3} f(x)$

E 2.1.2. Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercícios 2.3.4), forneça

1. $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} f(x)$
2. $\lim_{x \to 0} f(x)$
3. $\lim_{x \to \frac{3}{4}} f(x)$

E 2.1.3. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} 2$

b) $\lim_{x\to -2} 2$

c) $\lim_{x\to 2} -3$

d) $\lim_{x\to e} \pi$

E 2.1.4. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} x$

b) $\lim_{x\to -2} x$

c) $\lim_{x\to -3} x$

d) $\lim_{x\to e} x$

2.2 Regras para o cálculo de limites

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2, \tag{2.10}$$

com x_0, L_1, L_2 números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x\to x_0} kf(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x) = kL_1, \tag{2.11}$$

  para qualquer número real k.

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2 \tag{2.12}$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1\cdot L_2 \tag{2.13}$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \tag{2.14}$$

  desde que $L_2 \neq 0$.

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^s = L_1^s, \tag{2.15}$$

  se L_1^s é um número real.

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

Exemplo 2.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to -1} 2x$

$$\begin{align} \lim_{x\to -1} 2x &= 2\lim_{x\to -1} x \tag{2.16}\\ &= 2\cdot(-1) = -2 \tag{2.17}\end{align}$$

No SymPy, podemos computar este limite com

```
limit(2*x,x,-1)
```

b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 1$

$$\begin{align} \lim_{x\to 2} x^2 - 1 &= \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1 \tag{2.18}\\ &= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - \lim_{x\to 2} 1 \tag{2.19}\\ &= 2^2 - 1 = 3. \tag{2.20}\end{align}$$

No SymPy, podemos computar este limite com

```
limit(x**2-1,x,-1)
```

c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{align}
\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - x^2} \tag{2.21}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - \left(\lim_{x\to 0} x\right)^2} \tag{2.22}\\
&= \sqrt{1-(0)^2} \tag{2.23}\\
&= 1. \tag{2.24}
\end{align}$$

No SymPy, podemos computar este limite com

```
limit(sqrt(1-x**2),x,0)
```

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\begin{align}
\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{\lim_{x\to 0}(x^2-1)(x-2)}{\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)} \tag{2.25}\\
&= \frac{\lim_{x\to x_0}(x^2-1)\lim_{x\to 0}(x-2)}{\lim_{x\to 0}(x-1)\lim_{x\to 0}(x-2)} \tag{2.26}\\
&= \frac{-2}{-2} = 1. \tag{2.27}
\end{align}$$

Proposição 2.2.1. (Limites de polinômios) Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, então

$$\lim_{x\to b} p(x) = p(b) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{2.28}$$

para qualquer número real b dado.

Demonstração. Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação. Vejamos

$$\begin{align}
\lim_{x\to b} p(x) &= \lim_{x\to b} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{2.29}\\
&= \lim_{x\to b} a_n x^n + \lim_{x\to b} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to b} a_0 \tag{2.30}\\
&= a_n \left(\lim_{x\to b} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to b} x\right)^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{2.31}\\
&= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \tag{2.32}
\end{align}$$

□

Exemplo 2.2.2.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}. \tag{2.33}$$

No SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

Proposição 2.2.2. (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ é uma função racional e b um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to b} \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{2.34}$$

Demonstração. Segue da regra do limite do quociente e da Proposição 2.2.1:

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to b} p(x)}{\lim_{x\to b} q(x)} \tag{2.35}$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{2.36}$$

□

Exemplo 2.2.3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(0^2-1)(0-2)}{(0-1)(0-2)} = 1. \tag{2.37}$$

No SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

2.2.1 Indeterminação $0/0$

Quando $\lim\limits_{x\to a} f(a) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(a) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{2.38}$$

é uma **indeterminação do tipo** $0/0$. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x-a)$.

Exemplo 2.2.4.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1} = 3. \tag{2.39}$$

No SymPy, podemos computar o limite acima com

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

Exemplo 2.2.5. No caso do limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x-2} \tag{2.40}$$

temos que o denominador $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2 + x - 2$. Assim sendo, $(x-1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo,

$$\frac{p(x)}{x-1} = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{e} \qquad \frac{q(x)}{x-1} = x + 2. \tag{2.41}$$

No SymPy, podemos computar estas divisões com os seguintes comandos

```
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x-1)(x^2-2x-3) \qquad \text{e} \qquad q(x) = (x-1)(x+2). \tag{2.42}$$

Com isso, temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x+2)} \tag{2.43}$$

$$- \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x+2} = -\frac{4}{3}. \tag{2.44}$$

Exemplo 2.2.6. No caso de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \tag{2.45}$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$ envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} && (2.46)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} && (2.47)\\
&- \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} && (2.48)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}. && (2.49)
\end{aligned}$$

Com o SymPy, podemos computar este limite com

```
limit((sqrt(1-x)-1)/x,x,0)
```

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-x^2}{\sqrt{x^2+3}}. \tag{2.50}$$

Solução. Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x-x^2}{\sqrt{x^2+3}} &= \frac{\lim_{x\to -1} x-x^2}{\lim_{x\to -1} \sqrt{x^2+3}} && (2.51)\\
&= \frac{-1-(-1)^2}{\sqrt{\lim_{x\to -1} x^2+3}} && (2.52)\\
&= \frac{-2}{\sqrt{4}} && (2.53)\\
&= -1. && (2.54)
\end{aligned}$$

◊

ER 2.2.2. Assumindo que o $\lim_{x\to 2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1, \tag{2.55}$$

forneça o valor de L.

Solução. Das propriedades de limites, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1 &\Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} f(x) - 2}{\lim_{x\to 2} x + 2} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} 2}{2+2} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{L-2}{4} = 1 \\
&\Rightarrow L - 2 = 4 \\
&\Rightarrow L = 6.
\end{aligned}$$

◊

ER 2.2.3. Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}}. \tag{2.56}$$

Solução. Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x\to -1} 2 - \sqrt{x^2+3} = 0. \tag{2.57}$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x\to -1} x + 1 = 0, \tag{2.58}$$

concluímos se tratar de uma indeterminação $0/0$. Por racionalização, obtemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}} \tag{2.59}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \tag{2.60}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \tag{2.61}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \tag{2.62}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \tag{2.63}$$
$$= \frac{4}{2} = 2. \tag{2.64}$$

◊

Exercícios

E 2.2.1. Sabendo que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2, \tag{2.65}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 2} 2\cdot f(x)$.

b) $\lim_{x\to 2} \pi\cdot f(x)$.

c) $\lim_{x\to 2} -e^{\sqrt{2}}\cdot f(x)$.

E 2.2.2. Considerando que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3} g(x) = \frac{1}{2}, \tag{2.66}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x\to 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x\to 3} f(x) - 2g(x)$

E 2.2.3. Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = -2, \tag{2.67}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x) \cdot (\frac{1}{2} \cdot f(x))$

E 2.2.4. Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = -3, \tag{2.68}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

E 2.2.5. Considerando que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1} g(x) = 4, \tag{2.69}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim_{x\to -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

E 2.2.6. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -2} -3x$

b) $\lim_{x\to -2} x^2 - 3x$

c) $\lim_{x\to -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

E 2.2.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

E 2.2.8. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

E 2.2.9. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x-6}. \tag{2.70}$$

2.3 Limites laterais

Seja dada uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (a, x_0). O **limite lateral à esquerda** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{2.71}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \tag{2.72}$$

quando $f(x)$ pode ser tomado arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos $x < x_0$ suficientemente próximo de a. Veja a Figura 2.5.

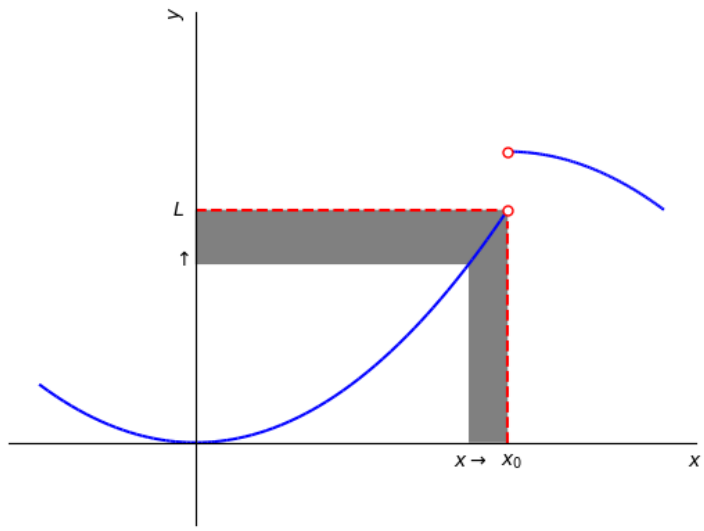


Figura 2.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (x_0, b), o **limite lateral à direita** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \tag{2.73}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L, \tag{2.74}$$

quando $f(x)$ pode ser tomado arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0. Veja a Figura 2.6.

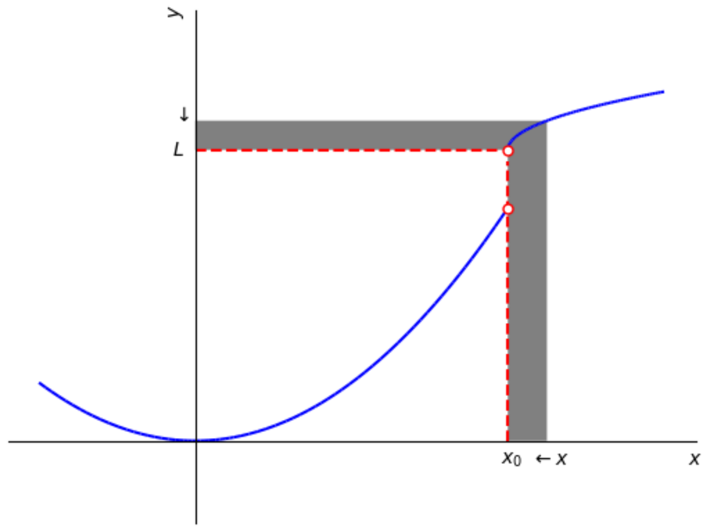


Figura 2.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

Observação 2.3.1. Por inferência direta, temos

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^{\pm}} x = x_0, \tag{2.75}$$

onde x_0 e k são quaisquer números reais.

E 2.3.1. Vamos calcular

$$\lim_{x\to 0^-} |x|. \tag{2.76}$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \tag{2.77}$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = -\lim_{x\to 0^-} x = 0. \tag{2.78}$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0. \tag{2.79}$$

Verifique!
Usando o SymPy, podemos computar os limites acima com os seguintes comandos[1]:

```
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

Teorema 2.3.1. *Existe o limite de uma dada função f no ponto $x = x_0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto $x = x_0$.*

E 2.3.2. No exemplo anterior (Exemplo 2.3.1), vimos que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^+} |x| = 0. \tag{2.80}$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 2.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0. \tag{2.81}$$

E 2.3.3. Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}. \tag{2.82}$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{align} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} \tag{2.83}\\ &= \lim_{x\to 0^-} -1 = -1. \tag{2.84}\end{align}$$

Agora, calculando o limite lateral à direta, obtemos

$$\begin{align} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \tag{2.85}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1. \tag{2.86}\end{align}$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, concluímos que não existe o limite de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.
No SymPy, por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

[1] Veja a Observação 2.0.1

```
limit(abs(x)/x,x,0)
```

fornece o valor 1 como saída.

Observação 2.3.2. As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) = L_2, \tag{2.87}$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

  $$\lim_{x\to x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = kL_1, \tag{2.88}$$

  para qualquer número real k.

- regra da soma/subtração:

  $$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) = L_1 + L_2 \tag{2.89}$$

- regra do produto:

  $$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) = L_1 \cdot L_2 \tag{2.90}$$

- regra do quociente:

  $$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x\to x_0^\pm} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \tag{2.91}$$

  desde que $L_2 \neq 0$.

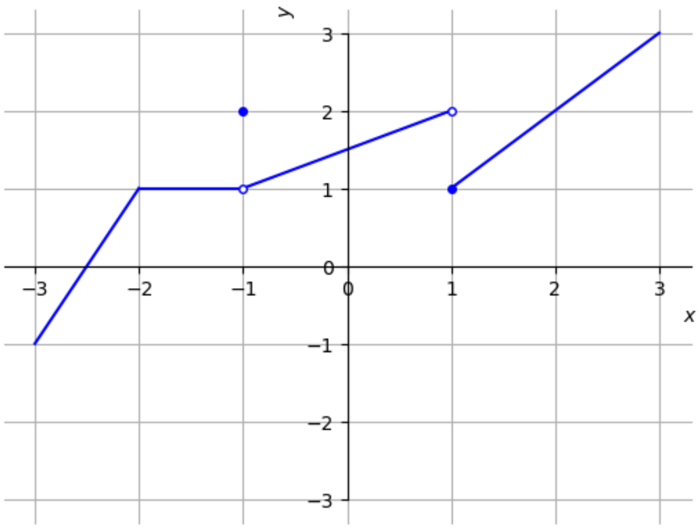
- regra da potenciação:

  $$\lim_{x\to x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\right)^s = L_1^s, \tag{2.92}$$

  se L_1^s é um número real.

Exercícios resolvidos

ER 2.3.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to1^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de -2, podemos observar que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1. Concluímos que

$$\lim_{x\to-2^-} = 1. \tag{2.93}$$

b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$ e suficientemente próximos de -1. Logo,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1. \tag{2.94}$$

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2. \tag{2.95}$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando x tende a 1 pela esquerda.

d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1. \tag{2.96}$$

Aqui, $f(x) \to f(1) = 1$ quando $x \to 1^+$.

e) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1. \tag{2.97}$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x). \tag{2.98}$$

$\Diamond$

ER 2.3.2. Calcule $\lim_{x \to -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \tag{2.99}$$

Solução. A função f tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x\to -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1)^2 - 1 \tag{2.100}$$

$$= (-1+1)^2 - 1 = -1, \tag{2.101}$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x \tag{2.102}$$

$$= -1. \tag{2.103}$$

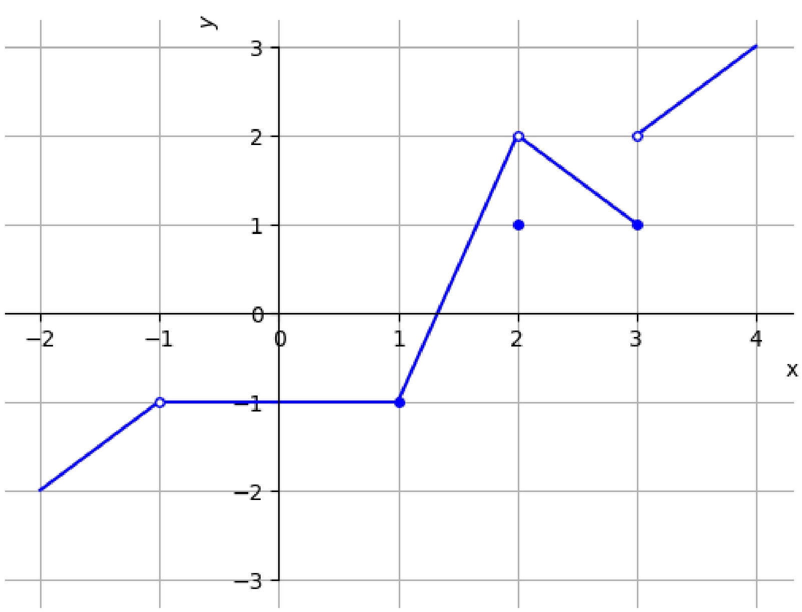
Como ambos os limites laterais são iguais a -1, concluímos que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1. \tag{2.104}$$

◊

Exercícios

E 2.3.4. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to 3} f(x)$

E 2.3.5. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \le 1, \\ 2x & ,x > 1. \end{cases} \tag{2.105}$$

calcule

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

E 2.3.6. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \le 1, \\ 2x+1 & ,x > 1, \end{cases} \tag{2.106}$$

calcule

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

E 2.3.7. Calcule

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2|x|}. \tag{2.107}$$

E 2.3.8. Calcule

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2}. \tag{2.108}$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

2.4 Limites no infinito

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$.
Dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de L para valores de x suficientemente pequenos. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L. \tag{2.109}$$

Veja a Figura 2.7.

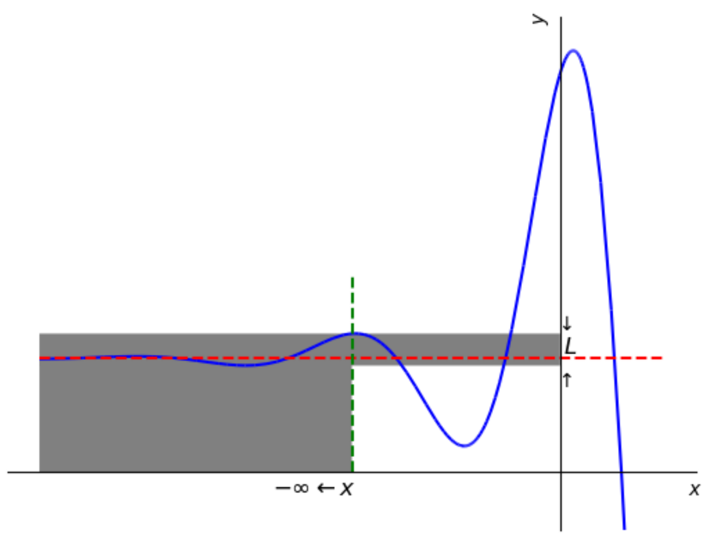


Figura 2.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende ∞, se os valores de $f(x)$ são arbitrariamente próximos de L para valores de x suficientemente grandes. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L. \tag{2.110}$$

Veja a Figura 2.8.

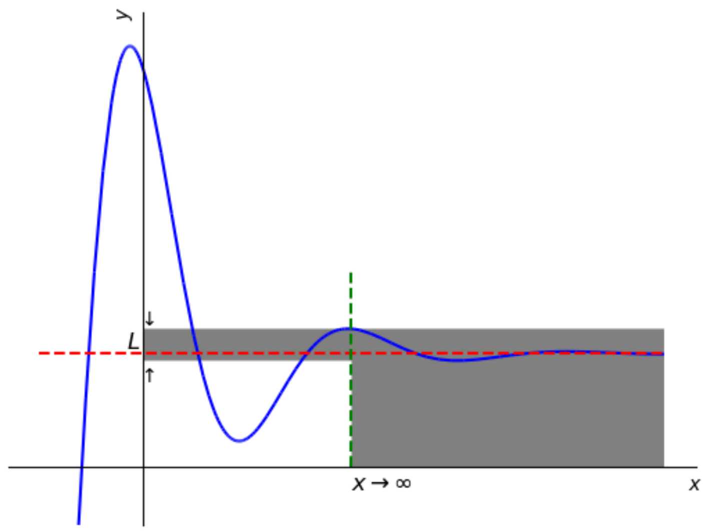


Figura 2.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to \infty$.

Exemplo 2.4.1. Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \to -\infty$ e $x \to \infty$. A Figura 2.9 é um esboço do gráfico desta função.

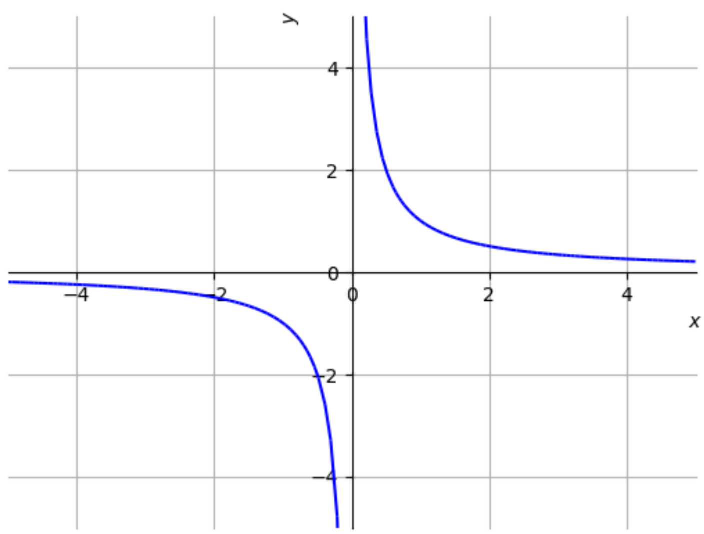


Figura 2.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de x, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{2.111}$$

Também, quanto maiores os valores de x, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{2.112}$$

Podemos computar estes limites com o SymPy, usando os seguintes comandos[2]:

```
limit(1/x,x,-oo)
limit(1/x,x,oo)
```

Observação 2.4.1. (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que L, M e k são números reais e

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = M. \tag{2.113}$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da soma/diferença
$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \tag{2.114}$$
- Regra do produto
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)g(x) = LM \tag{2.115}$$
- Regra da multiplicação por escalar
$$\lim_{x \to \pm\infty} kf(x) = kL \tag{2.116}$$
- Regra do quociente
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{2.117}$$

[2] Veja a Observação 2.0.1.

- Regra da potenciação

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \tag{2.118}$$

Exemplo 2.4.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+1 &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}1 &(2.119)\\
&= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^2+1 &(2.120)\\
&= 0^2+1=1. &(2.121)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2-3x^3}. \tag{2.122}$$

Observe que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. Para contornar este problema, podemos multiplicar e dividir por $1/x^3$ (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2-3x^3}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-3}. \tag{2.123}$$

Então, aplicando a regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-3} = -\frac{1}{3}. \tag{2.124}$$

Observação 2.4.2. Dados dois polinômios $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ e $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n}{b_mx^m}. \tag{2.125}$$

Exemplo 2.4.4. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.4.3), temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \tag{2.126}$$

2.4.1 Assíntotas horizontais

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L. \tag{2.127}$$

Exemplo 2.4.5. No Exemplo 2.4.3, vimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \tag{2.128}$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \tag{2.129}$$

. Veja a Figura 2.10.

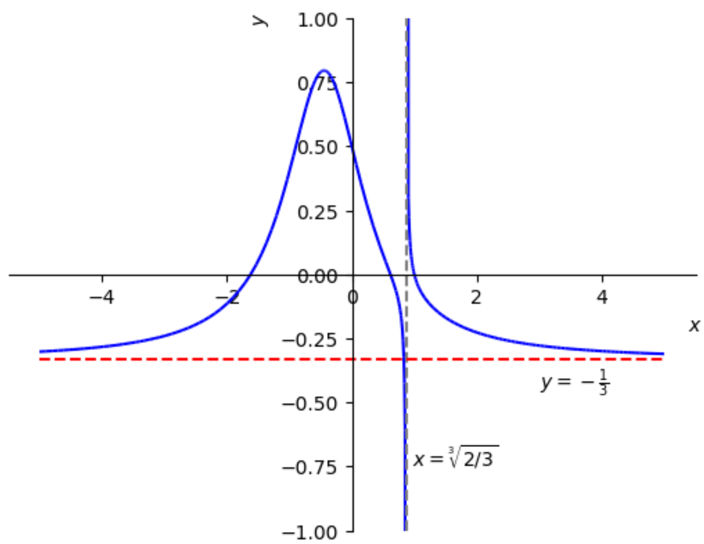


Figura 2.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \tag{2.130}$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

Exemplo 2.4.6. (Função exponencial natural)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{2.131}$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 2.11.

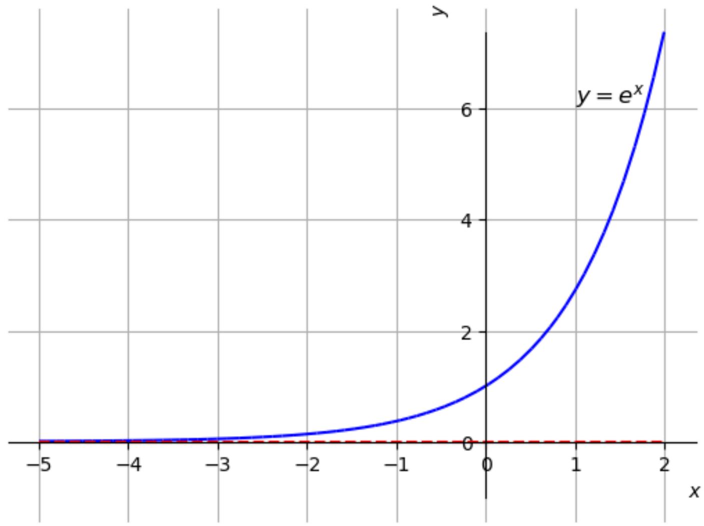


Figura 2.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

Exemplo 2.4.7. (Função logística) Na ecologia, a função logística

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}e^{-rt}\right)} \tag{2.132}$$

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo $P(t)$ o número de indivíduos da população no tempo t. O parâmetro P_0 é o número de indíviduos na população no tempo inicial $t = 0$, $r > 0$ é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e K é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\cancelto{0}{e^{-rt}}\right)} = K \tag{2.133}$$

Ou seja, $P(t) = K$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $P = P(t)$ e é o limite de saturação do crecimento populacional. Na Figura 2.12, temos o esboço do gráfico da função logística para $t \geq 0$.

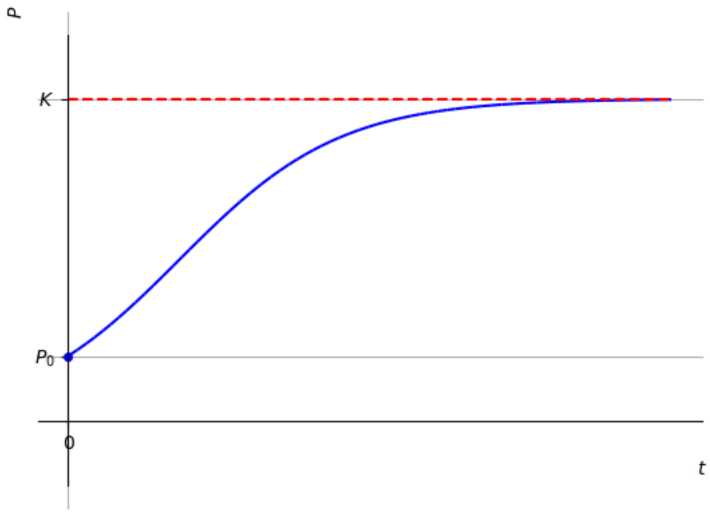


Figura 2.12: Esboço do gráfico da função logistica.

2.4.2 Limite no infinito de função periódica

Uma função f é periódica quando existe um número T tal que

$$f(x) = f(x + T), \tag{2.134}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de f. As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas (veja a Seção 1.6).
O limite no infinito de funções periódicas não existe[3]. De fato, se f não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro k. Desta forma, não existe número L que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de x suficientemente grandes (ou pequenos).

Exemplo 2.4.8. Não existe

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(x), \tag{2.135}$$

[3]À exceção de funções constantes.

pois os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 2.13.

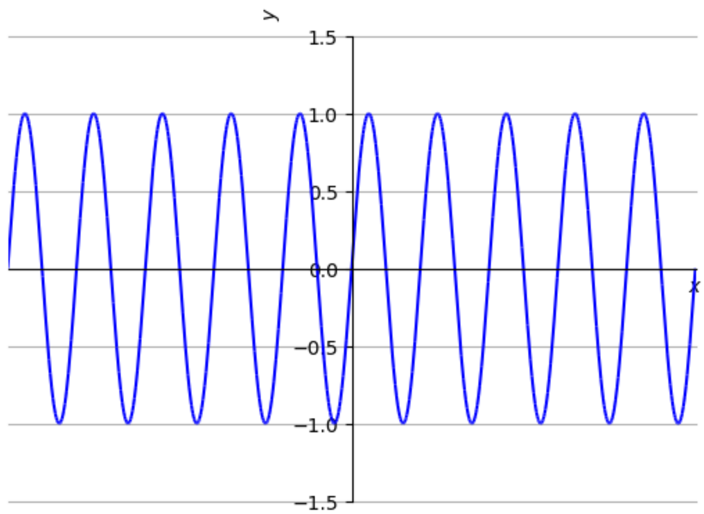


Figura 2.13: Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

No SymPy, ao computarmos $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ com o comando[4]:

```
limit(sin(x),x,oo)
```

obtemos como saída o intervalo $[-1, 1]$, indicando que o limite não existe, pois $\operatorname{sen} x$ oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

Exercícios resolvidos

ER 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1. \tag{2.136}$$

Solução. Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x\to 1} 1 \tag{2.137}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) + 1, \tag{2.138}$$

[4]Veja a Observação 2.0.1

observando que $\lim_{x\to\infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \to \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \to \infty$ quando $x \to \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \to \infty$ quando $x \to \infty$, i.e.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0. \tag{2.139}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \tag{2.140}$$

Com o SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando[5]:

```
limit(1/(x-1)+1,x,oo)
```

◊

ER 2.4.2. Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \tag{2.141}$$

Solução. Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L. \tag{2.142}$$

Começamos com $x \to -\infty$, temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \tag{2.143}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \tag{2.144}$$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.
Agora, vamos ver a tendência da função para $x \to \infty$, temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} = \frac{4}{2} = 2. \tag{2.145}$$

[5] Veja a Observação 2.0.1.

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função f.
Os seguintes comandos[6] do SymPy permitem plotar o esboço do gráfico da função f (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
L = limit(f(x),x,oo)
p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],line_color="blue",show=False)
q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

$\diamondsuit$

ER 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \tag{2.146}$$

Solução. Seguindo a ideia aplicada no Exemplo 2.4.3, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \tag{2.147}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \tag{2.148}$$

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \to \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{|x|}} \tag{2.149}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2\frac{x}{x}} \tag{2.150}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \tag{2.151}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1} \tag{2.152}$$

$$= \frac{1}{2}. \tag{2.153}$$

[6]Veja a Observação 2.0.1.

$\Diamond$

ER 2.4.4. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}. \tag{2.154}$$

Solução. Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 2.4.6, vimos que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{2.155}$$

logo

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0. \tag{2.156}$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 2.14.

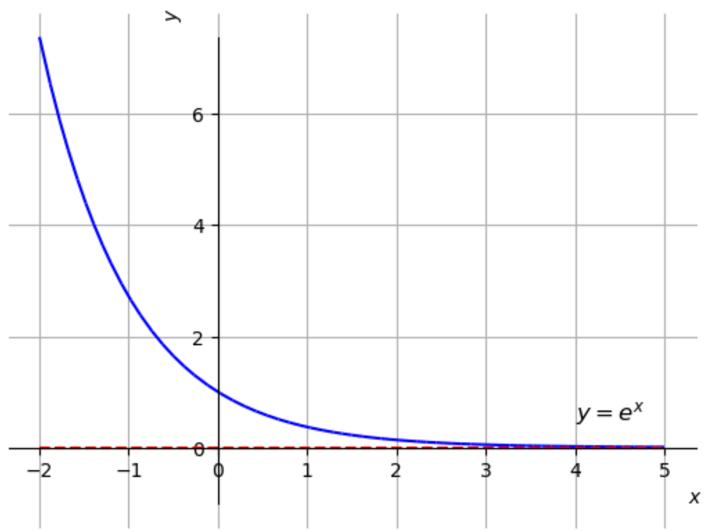


Figura 2.14: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando[7]:

```
limit(exp(-x),x,oo)
```

$\Diamond$

[7]Veja a Observação 2.0.1.

Exercícios

E 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \tag{2.157}$$

E 2.4.2. Calcule

a) $\lim_{x\to-\infty} e^x + 1$

b) $\lim_{x\to\infty} 3 + e^{-x}$

c) $\lim_{x\to\infty} 2e^{-x} - 1$

d) $\lim_{x\to-\infty} e - e^x$

E 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \cos x. \tag{2.158}$$

E 2.4.4. Calcule:

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+e^{-x}}$.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1$.

2.5 Limites infinitos

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando x tende a um número x_0, quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente grande para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0, mas $x \neq 0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \tag{2.159}$$

A Figura 2.15, é uma ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

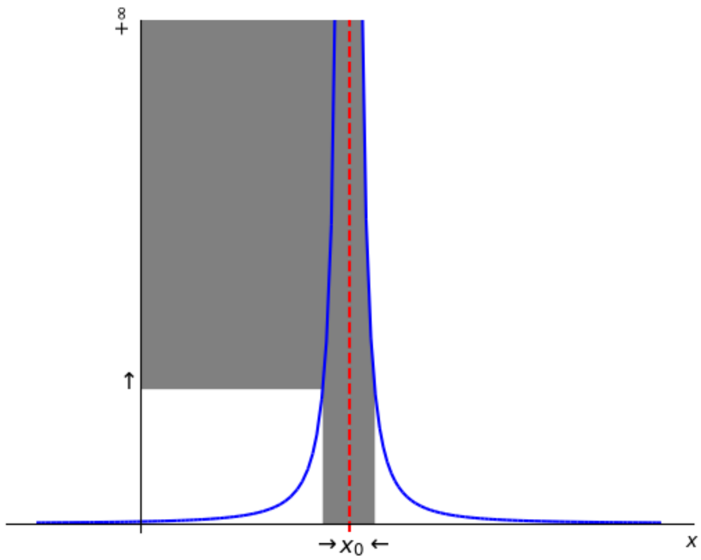


Figura 2.15: Ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

Exemplo 2.5.1. Vejamos o caso de

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}. \tag{2.160}$$

Ao tomarmos x próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	$\to 0 \leftarrow$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
f(x)	-10^{2}	-10^{4}	-10^{6}	$\to \infty \leftarrow$	10^{6}	10^{4}	10^{2}

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.16.

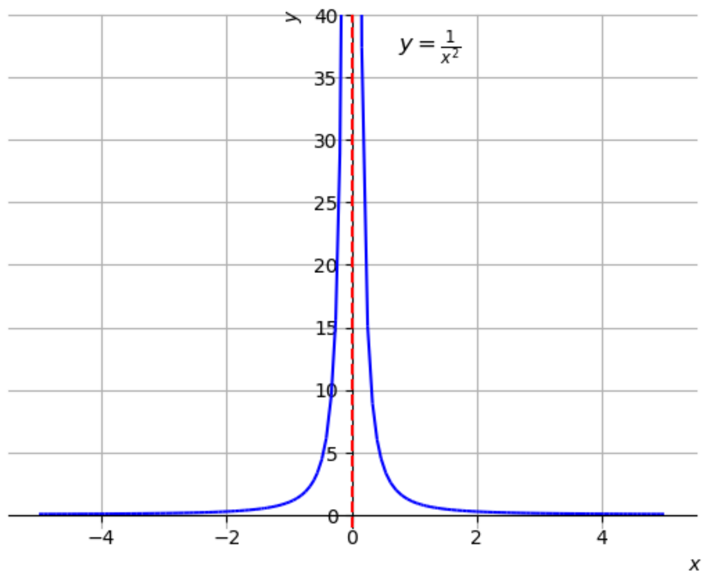


Figura 2.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer x suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \tag{2.161}$$

No SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando[8]:

```
limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty. \tag{2.162}$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x > x_0$.

[8] Veja a Observação 2.0.1.

Exemplo 2.5.2.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \tag{2.163}$$

De fato, conforme tomamos valores de x próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.17.

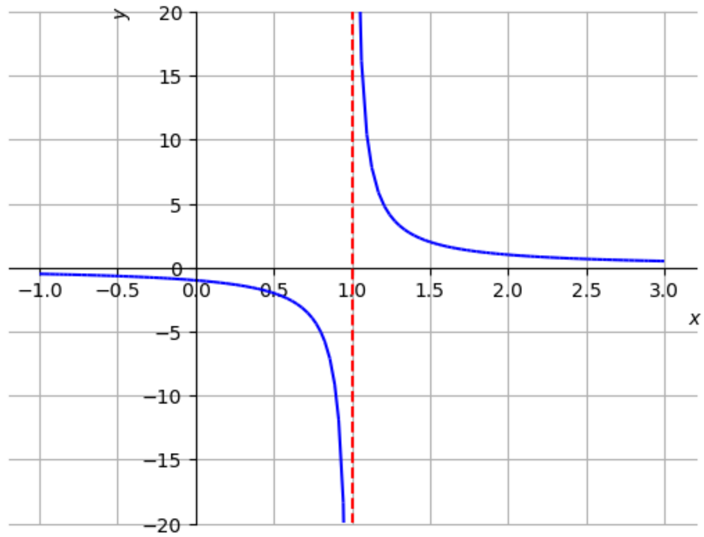


Figura 2.17: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

No SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando[9]:

```
limit(1/(x-1),x,0,'+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando x tende a x_0, quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de x suficientemente próximos de x_0, com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty. \tag{2.164}$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \to -\infty$ quando $x \to x_0^{\pm}$.

[9]Veja a Observação 2.0.1.

Exemplo 2.5.3. Observe que

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \tag{2.165}$$

e que não podemos concluir que este limite é ∞ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \tag{2.166}$$

Exemplo 2.5.4.

$$\lim_{x\to -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \tag{2.167}$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo x. Veja a Figura 2.18.

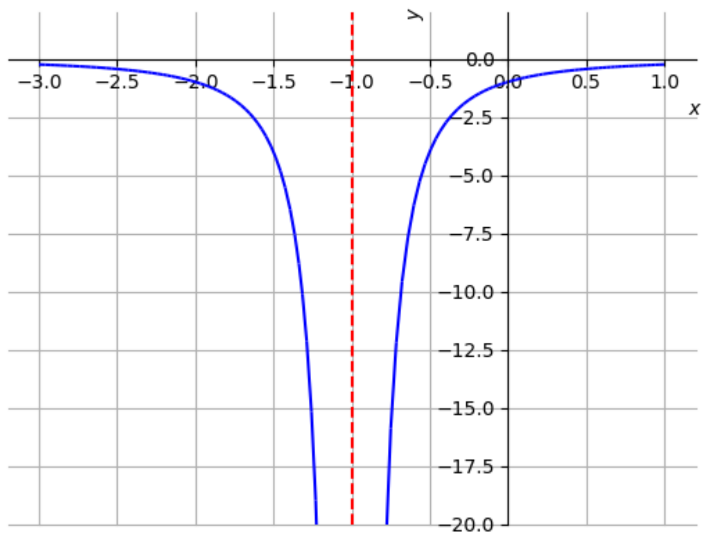


Figura 2.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

No SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando[10]:

```
limit(-1/(x+1)**2,x,-1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

[10]Veja a Observação 2.0.1.

2.5.1 Assíntotas verticais

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty. \tag{2.168}$$

Exemplo 2.5.5. O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \tag{2.169}$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 2.19.

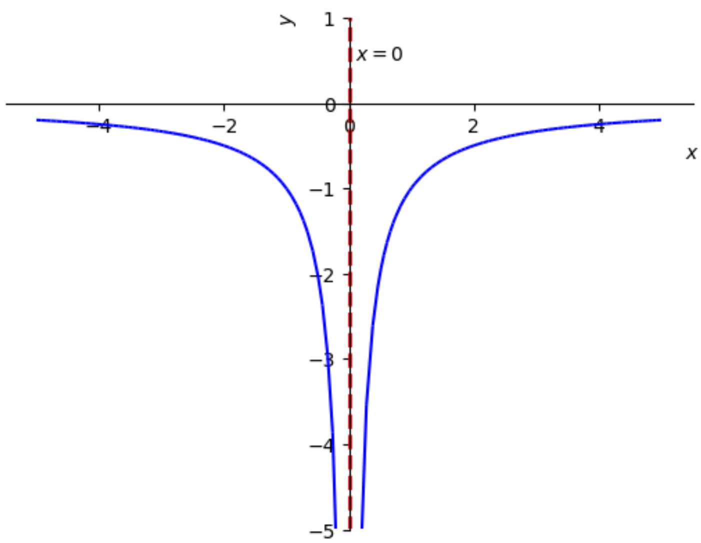


Figura 2.19: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

Exemplo 2.5.6. A função $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ não está definida para valores de x tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \tag{2.170}$$

Nestes pontos o gráfico de f pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\cancelto{-3}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^-}{x^2-1}} = +\infty, \tag{2.171}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\cancelto{-3}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^+}{x^2-1}} = -\infty, \tag{2.172}$$

e, também, temos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cancelto{-9}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^+}{x^2-1}} = -\infty, \tag{2.173}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancelto{-9}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^-}{x^2-1}} = +\infty. \tag{2.174}$$

Com isso, temos que as retas $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f. Veja a Figura 2.20 para o esboço do gráfico desta função.

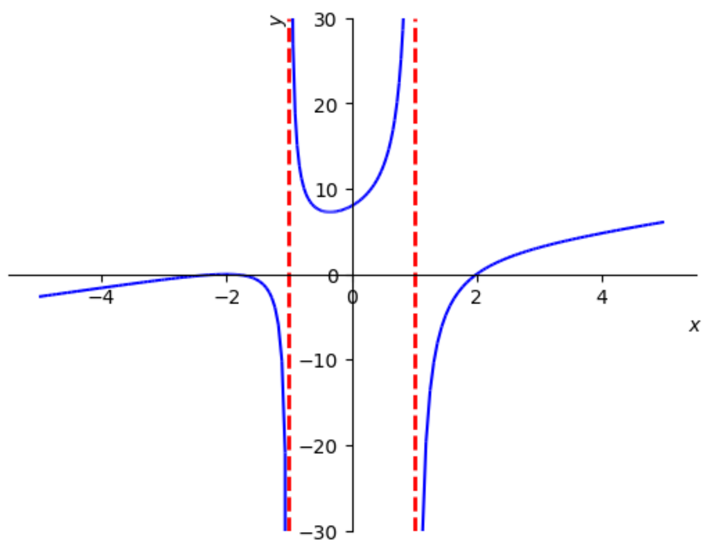


Figura 2.20: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}$.

Exemplo 2.5.7. (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y = \ln x$ é tal que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \tag{2.175}$$

i.e., $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y = \ln x$ ser a função inversa de $y = e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y = 0$[11]. A Figura 2.21 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

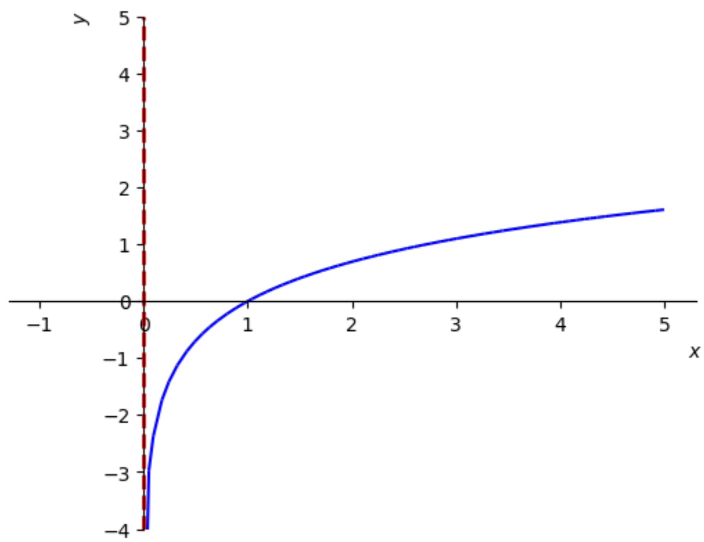


Figura 2.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

Exemplo 2.5.8. As funções trigonométricas $y = \sec x$ e $y = \operatorname{tg} x$ têm assíntotas verticais $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para k inteiro. Veja as Figuras 1.21.

Exemplo 2.5.9. As funções trigonométricas $y = \operatorname{cosec} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para k inteiro. Veja as Figuras 1.22.

2.5.2 Assíntotas oblíquas

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assintota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

[11] Veja o Exemplo 2.4.6.

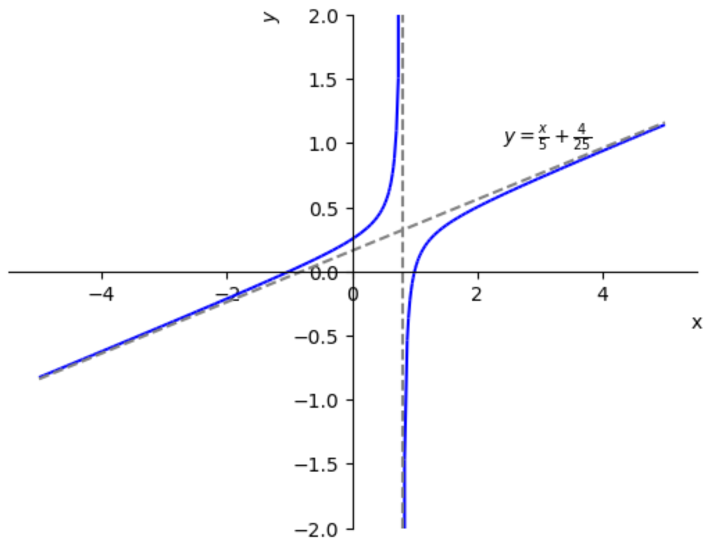


Figura 2.22: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 4}$.

Exemplo 2.5.10. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \tag{2.176}$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \tag{2.177}$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \to \pm\infty$, i.e. $f(x) \to \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \to \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 2.22.

Observação 2.5.1. Analogamente à assintotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

2.5.3 Limites infinitos no infinito

Escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \tag{2.178}$$

quando os valores da função f são arbitrariamente grandes para todos os valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty. \tag{2.179}$$

Exemplo 2.5.11. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

Exemplo 2.5.12.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \tag{2.180}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cancelto{0^+}{\frac{10}{x}} + \cancelto{0^+}{\frac{300}{x^3}}}{\cancelto{0^+}{\frac{1}{x^3}}} = \infty. \tag{2.181}$$

Proposição 2.5.1. *Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, temos*

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm} a_n x^n. \tag{2.182}$$

Exemplo 2.5.13. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.12, temos

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty. \tag{2.183}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.5.1. Calcule
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \tag{2.184}$$

Solução. Temos
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overset{\to -1}{x-2}}{\underset{\to 0^+}{1-x}} = -\infty. \tag{2.185}$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \to 0^+$ quando $x \to 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x - 1$, temos
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y+1-2}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y-1}{y} = -\infty. \tag{2.186}$$

Podemos usar o seguinte comando SymPy[12] para computar este limite:

```
limit((x-2)/(1-x),x,1,'-')
```

◊

ER 2.5.2. Calcule
$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1|. \tag{2.187}$$

Solução. Começamos observando que
$$\ln|x-1| = \begin{cases} \ln(1-x) & ,x < 1, \\ \ln(x-1) & ,x > 1. \end{cases} \tag{2.188}$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty\text{[13]}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty\text{[14]}. \end{aligned}$$

[12] Veja a Observação 2.0.1.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty. \tag{2.189}$$

Podemos usar os seguintes comandos SymPy[15] para computar os limites laterais:

```
limit(log(abs(x-1)),x,1,'-')
limit(log(abs(x-1)),x,1,'+')
```

$\lozenge$

ER 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}. \tag{2.190}$$

Solução. Tratando-se de uma função racional, temos[16]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \infty. \tag{2.191}$$

$\lozenge$

ER 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2}. \tag{2.192}$$

Solução. Observamos que $1-x^2 \to -\infty$ quando $x \to \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1-x^2$, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0. \tag{2.193}$$

$\lozenge$

[15] Veja a Observação 2.0.1.
[16] Veja a Observação 2.4.2. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 2.20.

Exercícios

E 2.5.1. Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}. \tag{2.194}$$

E 2.5.2. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \tag{2.195}$$

E 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x\to -\infty} e^{x^2-1}. \tag{2.196}$$

E 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \tag{2.197}$$

2.6 Continuidade

Dizemos que uma **função** f é **contínua** em um ponto x_0, quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.198}$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direta**. Quando a **função** f não é contínua em um dado ponto x_0, dizemos que f é **descontínua** neste ponto.

Exemplo 2.6.1. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \tag{2.199}$$

Na Figura 2.23, temos um esboço do gráfico de f.

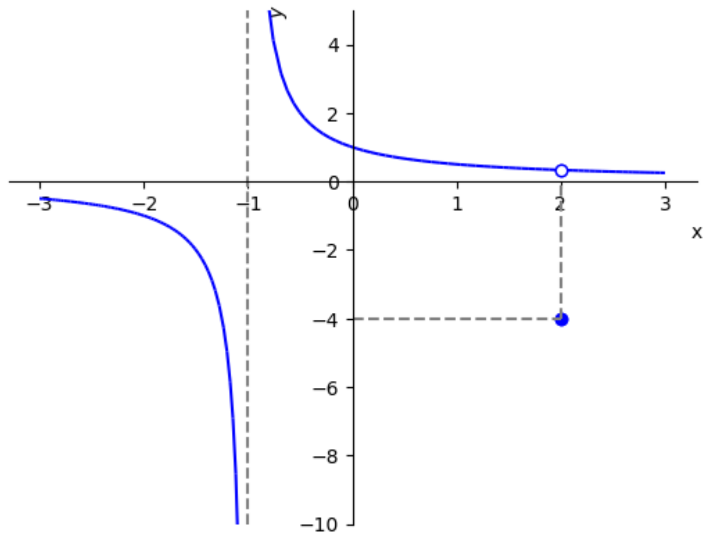


Figura 2.23: Esboço do gráfico da função f definida no Exemplo 2.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \tag{2.200}$$

Com isso, concluímos que f é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \tag{2.201}$$

logo, f(-1) não está definido e, portanto, f é descontínua neste ponto. Observemos que f tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \tag{2.202}$$

Portanto, concluímos que f é descontínua em $x = 2$.

Uma função f é dita ser **contínua em um intervalo** (a, b), quando f é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

Exemplo 2.6.2. (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \tag{2.203}$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.2.
Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de x. Também, para $x \in (0,\infty)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de x. Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0, \tag{2.204}$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0. \tag{2.205}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|. \tag{2.206}$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

Proposição 2.6.1. (Propriedades de funções contínuas) Se f e g são funções contínuas em $x = c_0$ e k um número real, então também são contínuas em $x = x_0$ as funções:

- kf
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- f/g, se $g(x_0) \neq 0$
- f^k, se existe $f^k(x_0)$.

Exemplo 2.6.3. Polinômios são contínuos em toda parte. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0), \tag{2.207}$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \tag{2.208}$$

Exemplo 2.6.4. Funções racionais $r(x) = p(x)/q(x)$ **são contínuas em todos os pontos de seus domínios**. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \tag{2.209}$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \tag{2.210}$$

pois f não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \tag{2.211}$$

$$= \frac{x_0 - 1}{x_0^2 - 1} = f(x_0). \tag{2.212}$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \tag{2.213}$$

Ou seja, f é contínua nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

Observação 2.6.1. São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Proposição 2.6.2. (Composição de funções contínuas) Se f é contínua no ponto x_0 e g é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0.

Exemplo 2.6.5. Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \tag{2.214}$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1,\infty)$.

b) $y = \left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \tag{2.215}$$

Exemplo 2.6.6. Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4} \cdot e^{\operatorname{sen} x} = \sqrt{\lim_{x\to 0} x+4} \cdot e^{\operatorname{sen} \lim_{x\to 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \tag{2.216}$$

Teorema 2.6.1. (Teorema do valor intermediário) Uma função f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Exemplo 2.6.7. Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, f é contínua no intervalo [0,2] e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 2.24.

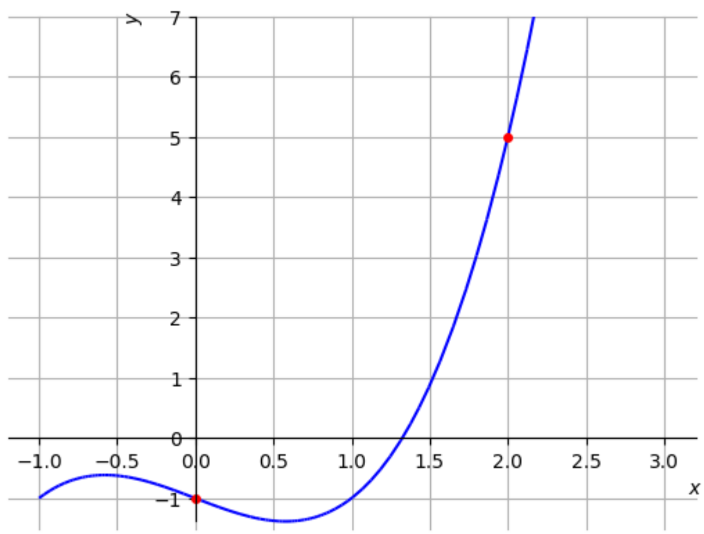


Figura 2.24: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Exercícios resolvidos

ER 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \tag{2.217}$$

Solução. Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \tag{2.218}$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a -1 e, portanto, contínua. Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \tag{2.219}$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua. Concluímos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

◊

ER 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{2.220}$$

Solução. A função f pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. g é contínua para todo $x > 0$;

b) a função racional $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função h tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \tag{2.221}$$

Fazendo o estudo de sinal

vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Em resumo, h é contínua em $(0, \infty)$ e g é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. f é contínua em $(1, \infty)$.

◊

Exercícios

E 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \tag{2.222}$$

E 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \tag{2.223}$$

E 2.6.3. Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos x}{2}\right). \tag{2.224}$$

2.7 Limites e desigualdades

Se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo x em um certo intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{2.225}$$

Observe que a tomada do limite não preserva a desigualdade estrita.

E 2.7.1. As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0. \tag{2.226}$$

Observação 2.7.1. A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^-} g(x). \tag{2.227}$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

2.7.1 Limites de funções limitadas

Se $f(x) \leq L$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em x_0, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq L. \tag{2.228}$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 2.7.1. Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x. \tag{2.229}$$

Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \leq \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \geq \lim_{x\to\infty} -e^{-x} = 0. \tag{2.230}$$

Logo, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x = 0. \tag{2.231}$$

2.7.2 Teorema do confronto

Teorema 2.7.1. (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L, \tag{2.232}$$

então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{2.233}$$

Demonstração. Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) \tag{2.234}$$

donde

$$L \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq L. \tag{2.235}$$

□

E 2.7.2. Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1. \tag{2.236}$$

Observação 2.7.2. O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

Exemplo 2.7.2.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{2.237}$$

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0{,}0)$, $A = (1{,}0)$ e $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, observamos que

$$\text{Área do triâng.}OAP < \text{Área do setor}OAP, \tag{2.238}$$

i.e.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x, \tag{2.239}$$

para todo $0 < x < \pi/2$.
É certo que $\operatorname{sen} x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\operatorname{sen} x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{2.240}$$

Lembrando que $\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{2.241}$$

Logo, de (2.240) e (2.241), temos

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|. \tag{2.242}$$

Por fim, como

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0, \tag{2.243}$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{2.244}$$

Observação 2.7.3. Do exemplo anterior (Exemplo 2.7.2), podemos mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{2.245}$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade (1.73)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{2.246}$$

temos

$$\cos x = 1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{2.247}$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left[1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right] \tag{2.248}$$

$$= 1 + 2\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^2. \tag{2.249}$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \to 0$ quando $x \to 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sen} y = 0. \tag{2.250}$$

Então, retornando a equação (2.249), concluímos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{2.251}$$

2.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{2.252}$$

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0{,}0)$, $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A = (1{,}0)$ e $T = (1, \operatorname{tg} x)$, observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor} OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \tag{2.253}$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \tag{2.254}$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\operatorname{sen} x$[17], obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{2.255}$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \tag{2.256}$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x\to 0^+} 1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1. \tag{2.257}$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{2.258}$$

Agora, usando o fato de que $\operatorname{sen} x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \tag{2.259}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{2.260}$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

Exemplo 2.7.3. Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{2.261}$$

Veja o Exercício 2.7.6.

Exercícios resolvidos

ER 2.7.1. Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x). \tag{2.262}$$

[17] $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

Solução. Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \cancelto{0}{x^3} \leq \lim_{x\to 0^+} f(x) \leq \lim_{x\to 0^+} \cancelto{0}{\sqrt{x}}. \tag{2.263}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0. \tag{2.264}$$

◊

Em construção ...

Exercícios

E 2.7.3. Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x\to 0} u(x)$.

E 2.7.4. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x. \tag{2.265}$$

E 2.7.5. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \tag{2.266}$$

E 2.7.6. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \tag{2.267}$$

E 2.7.7. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \tag{2.268}$$

2.8 Exercícios finais

E 2.8.1. Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{2.269}$$

Capítulo 3

Derivadas

Observação 3.0.1. (Códigos Python Nos códigos Python inseridos ao longo deste capítulo, estaremos assumindo o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x',real=True)
```

3.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos discutir sobre a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, discutimos sobre as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

3.1.1 Reta secante e reta tangente

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função f pelos pontos x_0 e x_1, $x_0 \neq x_1$, como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.1}$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1,f(x_1))$. Veja a Figura 3.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.2}$$

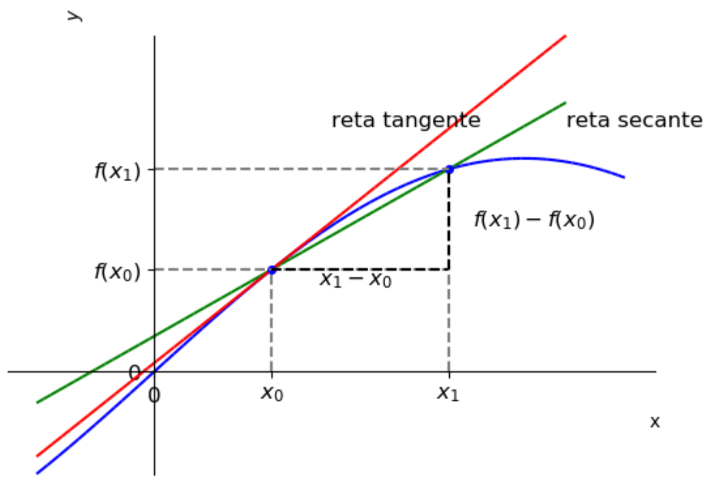


Figura 3.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelho) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função f em $x = x_0$ é a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.3}$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.4}$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos x_0 e x_1, quando $x_1 \to x_0$. Veja a Figura 3.1.

Observação 3.1.1. Fazendo $h = x_1 - x_0$, temos que (3.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.5}$$

Exemplo 3.1.1. Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ é

$$\begin{align} m_{\text{sec}} &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{3.6}\\ &= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \tag{3.7}\\ &= 4 - 1 = 3. \tag{3.8}\end{align}$$

Logo, a reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 3(x-1) + f(1) \tag{3.9}$$
$$\Rightarrow y = 3x - 2. \tag{3.10}$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

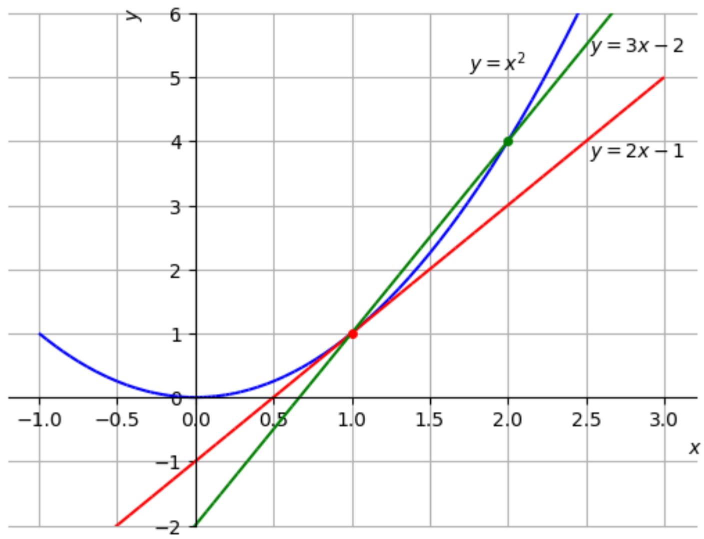


Figura 3.2: Esboços dos gráficos de $f(x) = x^2$ (azul), da reta secante pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ (verde) e da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$ (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 é

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{3.11}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \tag{3.12}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \tag{3.13}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{1} = 2. \tag{3.14}$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ tem coeficiente angular $m_{\text{tg}} = 2$ e equação

$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1. \tag{3.15}$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).
Com o SymPy, podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos[1]:

```
x0 = 1
x1 = 2
f = lambda x: x**2
msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
msec*(x-x0)+f(x0)
```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos[2]:

```
h = var("h",real=True)
x0 = 1
f = lambda x: x**2
mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h,h,0)
mtg*(x-x0)+f(x0)
```

3.1.2 Taxa de variação

A **taxa de variação média** de uma função f quando x varia de x_0 a x_1 é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.16}$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de f no ponto x_0, a qual é definida como

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.17}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.18}$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

[1] Veja a Observação 3.0.1.
[2] Veja a Observação 3.0.1.

Exemplo 3.1.2. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo t_0 ao tempo t_1 é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{3.19}$$

Por exemplo, se $s(t) = 15t^2 + t$ (km), então a velocidade média do objeto entre $t_0 = 1\text{h}$ e $t_1 = 3\text{h}$ é

$$\begin{align}
\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \tag{3.20}\\
&= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \tag{3.21}\\
&= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \tag{3.22}\\
&= 61\ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{3.23}
\end{align}$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo $t_0 = 1$ é

$$\begin{align}
\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \tag{3.24}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15(t_0 + h)^2 + (t_0 + h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \tag{3.25}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \tag{3.26}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \tag{3.27}\\
&= \lim_{h\to 0} 30t_0 + 15h + 1 \tag{3.28}\\
&= 30t_0 + 1 = 31\ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{3.29}
\end{align}$$

Exemplo 3.1.3. Seja $c(x) = \sqrt{x}$ (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O

custo médio da produção de $x_0 = 4$ a $x_1 = 9$ é

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta c}{\Delta x} &= \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} && (3.30)\\
&= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} && (3.31)\\
&= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} && (3.32)\\
&= \frac{3 - 2}{5} && (3.33)\\
&= 0{,}2\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. && (3.34)
\end{aligned}$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa está produzindo $x_0 = 4$ milhões de unidades é

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0=4} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} && (3.35)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} && (3.36)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} && (3.37)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \cancelto{0}{h}} + \sqrt{x_0}} && (3.38)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} && (3.39)\\
&= \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 0{,}25\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. && (3.40)
\end{aligned}$$

Observação 3.1.2. Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

3.1.3 Derivada em um ponto

A **derivada** de uma função f **em um ponto** $x = x_0$ é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ e é definida por

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{3.41}$$

Exemplo 3.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = k$, k constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3.42}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0. \tag{3.43}$$

b) $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{3.44}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h} = 1. \tag{3.45}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} \tag{3.46}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}} \tag{3.47}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \tag{3.48}$$

Exemplo 3.1.5. Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por $r(x) = x^2$ (milhões de reais), onde x é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando $x = x_0 = 1$ é

$$r'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} \tag{3.49}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} \tag{3.50}$$

$$= \lim_{x\to x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2\,\frac{\text{R\$}}{\text{un}} \tag{3.51}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Faça, então, os esboços dos gráficos de f e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x_0 = 4$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.52}$$

A derivada de f no ponto x_0 é

$$\begin{align}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{3.53}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \tag{3.54}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \tag{3.55}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \tag{3.56}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \tag{3.57}
\end{align}$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + \sqrt{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1. \tag{3.58}$$

Veja a Figura 3.3 para os esboços dos gráfico de f e da reta tangente.

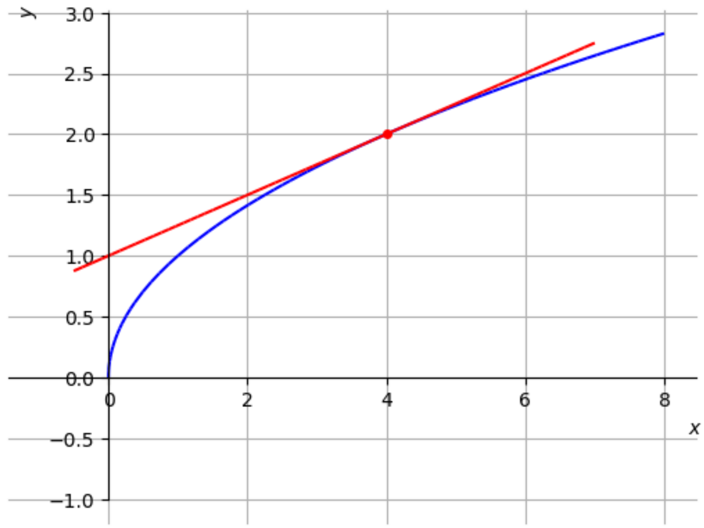


Figura 3.3: Esboços do gráfico da função f e da reta tangente no ponto $x_0 = 4$.

$\lozenge$

ER 3.1.2. Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \tag{3.59}$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \tag{3.60}$$

onde x é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando $x = 1$ mi.

Solução. O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \tag{3.61}$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto $x_0 = 1$ é

$$
\begin{aligned}
l'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} && (3.62)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - c(x_0+h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} && (3.63)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0) - (c(x_0+h) - c(x_0))}{h} && (3.64)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{c(x_0+h) - c(x_0)}{h} && (3.65)\\
&= r'(x_0) - c'(x_0) && (3.66)\\
&= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} && (3.67)\\
&= 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. && (3.68)
\end{aligned}
$$

◊

Exercícios

E 3.1.1. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = 10^6$, $g'(10^8)$;

c) $h(x) = \ln 2e$, $h'(-\pi)$;

E 3.1.2. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2 + x$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = 10^6 - 2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = \ln(2e) + ex$, $h'(10^6)$;

E 3.1.3. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = x$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = -2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = ex$, $h'(10^6)$;

E 3.1.4. Determine a reta secante ao gráfico de $f(x) = 5 - x^2$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Então, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$. Por fim, faça os esboços dos gráficos de f, da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

E 3.1.5. Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo $c(x) = 2\sqrt{x}$ e rendimento $r(x) = \frac{1}{100}x^3$, dados em milhões de reais com x em milhares de unidades. Calcule:

a) o custo marginal quando $x = 1$;

b) o rendimento marginal quando $x = 1$;

c) o lucro marginal quando $x = 1$.

3.2 Função derivada

A **derivada** de uma função f em relação à variável x é a função $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{3.69}$$

quando este limite existe. Dizemos que f é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto x de seu domínio, quando o limite dado em (3.69) existe. Se isso ocorre para todo número real x, dizemos que f é derivável em toda parte.

Exemplo 3.2.1. A derivada de $f(x) = x^2$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && (3.70)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} && (3.71)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} && (3.72)\\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x. && (3.73) \end{aligned}$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte.A Figura 3.4.

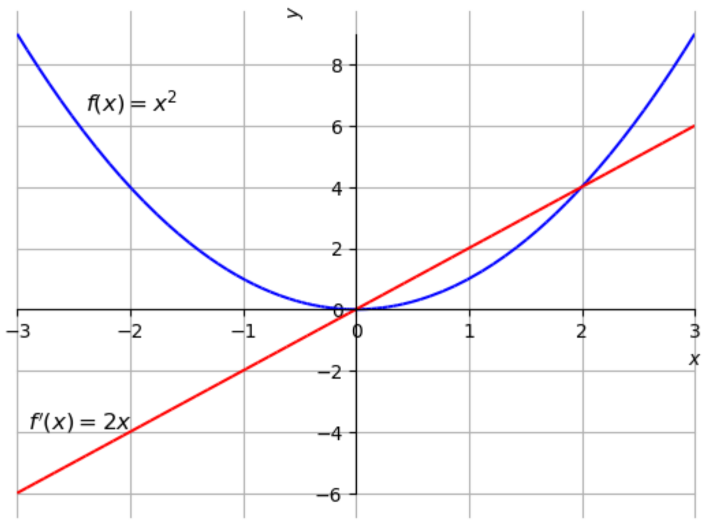


Figura 3.4: Esboços dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$.

Com o SymPy[3], podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
h = symbols('h',real=True)
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)
```

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
diff(x**2)
```

para computar a derivada de x^2 em relação a x.

[3]Veja a Observação 3.0.1.

Observação 3.2.1. A derivada à direita (à esquerda) de uma função f em um ponto x é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^{\pm}} = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.74}$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

Exemplo 3.2.2. Vamos calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Para $x = 0$, só faz sentido calcular a derivada lateral à direta:

$$\begin{align}
f'_{+}(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \tag{3.75}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \tag{3.76}\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{h}}_{\to 0^+}} = +\infty. \tag{3.77}
\end{align}$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. Agora, para $x > 0$, temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \tag{3.78}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \tag{3.79}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \tag{3.80}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{3.81}
\end{align}$$

Na Figura 3.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

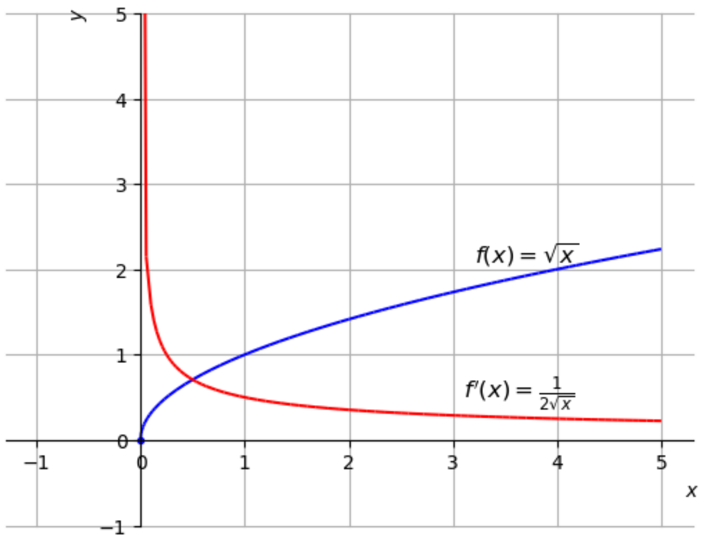


Figura 3.5: Esboços dos gráficos da função $f(x) = \sqrt{x}$ e de sua derivada.

No SymPy[4], a computação de $f'_+(0)$ pode ser feita com os comandos[5]:

```
var('h', real=True)
limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
diff(sqrt(x),x)
```

Exemplo 3.2.3. A função valor absoluto é derivável para todo $x \neq 0$ e não é derivável em $x = 0$. De fato, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{3.82}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)+x}{h} \tag{3.83}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{3.84}$$

[4]Veja a Observação 3.0.1.

[5]Por padrão no SymPy, o limite é tomado à direita.

Analogamente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{3.85}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \tag{3.86}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{3.87}$$

Agora, para $x = 0$, devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \tag{3.88}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \tag{3.89}$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Na figura 3.6, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = |x|$ e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \tag{3.90}$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por $\operatorname{sign}(x)$. Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

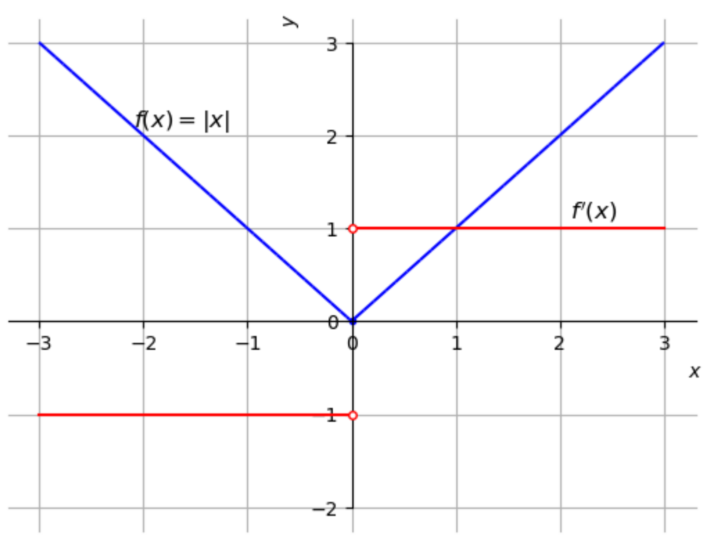


Figura 3.6: Esboços dos gráficos da função $f(x) = |x|$ e de sua derivada.

No SymPy[6], podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
diff(abs(x))
```

3.2.1 Derivadas de ordens mais altas

A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação a x é a função $y = f'(x)$. Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de f, denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right). \tag{3.91}$$

Exemplo 3.2.4. Seja $f(x) = x^3$. Então, a primeira derivada de f é

$$\begin{align} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.92}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \tag{3.93}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \tag{3.94}\\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \cancelto{0}{3xh} + \cancelto{0}{h^2} = 3x^2. \tag{3.95}\end{align}$$

De posse da primeira derivada $f'(x) = 3x^2$, podemos calcular a segunda derivada de f, como segue:

$$\begin{align} f''(x) &= [f'(x)]' \tag{3.96}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \tag{3.97}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \tag{3.98}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+h^2-3x^2}{h} \tag{3.99}\\ &= \lim_{h\to 0} 6x + \cancelto{0}{h} = 6x, \tag{3.100}\end{align}$$

[6]Veja a Observação 3.0.1.

i.e. $f''(x) = 6x$.
No SymPy[7], podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

```
diff(x**3,x,2)
```

Generalizando, quando existe, a n-ésima derivada de uma função $y = f(x)$, $n \geq 1$, é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x)\right], \tag{3.101}$$

com $f^{(3)} \equiv f'''$, $f^{(2)} \equiv f''$, $f^{(1)} \equiv f'$ e $f^{(0)} \equiv f$.

Exemplo 3.2.5. A terceira derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f'''(x) = [f''(x)]'$. No exemplo anterior (Exemplo 3.2.4), calculamos $f''(x) = 6x$. Logo,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= [6x]' && (3.102)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} && (3.103)\\ &= \lim_{h\to 0} 6 = 6. && (3.104)\end{aligned}$$

A quarta derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f^{(4)}(x) \equiv 0$, bem como $f^{(5)}(x) \equiv 0$. Verifique!
No SymPy[8], podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

```
diff(x**3,x,3)
```

Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em relação a x.

[7] Veja a Observação 3.0.1.
[8] Veja a Observação 3.0.1.

Solução. Por definição da derivada, temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.105}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2+2x+1)}{h} \tag{3.106}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \tag{3.107}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \tag{3.108}\\
&= \lim_{h\to 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \tag{3.109}
\end{align}$$

$\Diamond$

ER 3.2.2. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = |x - 1|$.

Solução. O gráfico da função $f(x) = |x-1|$ tem um bico no ponto $x = 1$ (verifique!). Para valores de $x < 1$, temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.110}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{<0}| - |\overbrace{x-1}^{<0}|}{h} \tag{3.111}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+1+x-1}{h} \tag{3.112}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1. \tag{3.113}
\end{align}$$

Para valores de $x > 1$, temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.114}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{>0}| - |\overbrace{x-1}^{>0}|}{h} \tag{3.115}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-1-x+1}{h} \tag{3.116}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{3.117}
\end{align}$$

Ou seja, temos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável para $x \neq 1$. Agora, para $x = 1$, temos

$$
\begin{aligned}
f'_-(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && (3.118)\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{|\overbrace{h}^{<0}| - |1-1|}{h} && (3.119)\\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 && (3.120)\\
f'_+(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && (3.121)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{|\overbrace{h}^{>0}| - |1-1|}{h} && (3.122)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 && (3.123)\\
& && (3.124)
\end{aligned}
$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, temos que $\nexists f'(1)$. Concluímos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável nos pontos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

◊

ER 3.2.3. Calcule a segunda derivada em relação a x da função

$$
f(x) = x - x^2. \qquad (3.125)
$$

Solução. Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && (3.126)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} && (3.127)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} && (3.128)\\
&= \lim_{h\to 0} 1 - 2x - \cancelto{0}{h} = 1 - 2x. && (3.129)
\end{aligned}
$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$
\begin{align}
f''(x) &= [f'(x)]' \tag{3.130}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{3.131}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2(x+h) - (1-2x)}{h} \tag{3.132}\\
&= \lim_{h\to 0} -2 = -2. \tag{3.133}
\end{align}
$$

◊

Exercícios

E 3.2.1. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2$

b) $g(x) = -3$

c) $h(x) = \sqrt{e}$

E 3.2.2. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = \sqrt{e}x$

E 3.2.3. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \tag{3.134}$$

E 3.2.4. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

E 3.2.5. Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \tag{3.135}$$

calcule:

a) $f'(x)$

b) $f''(x)$

c) $f'''(x)$

d) $f^{(4)}$

e) $f^{(1001)}(x)$

3.3 Regras básicas de derivação

Nesta seção, vamos discutir sobre algumas regras fundamentais para o cálculo da derivada de funções. Começaremos pelas derivadas de função constante, de função potência e de função exponencial. Em seguida, passamos a derivadas da soma, multiplicação e quociente de funções.

3.3.1 Derivadas de função constante e função potência

Vejamos as derivadas da função constante e da função potência.

- $\boldsymbol{(k)' = 0}$, onde k é uma constante.

  De fato, para $f(x) \equiv k$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.136}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} \tag{3.137}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0. \tag{3.138}$$

- $\boldsymbol{(x)' = 1}$.

De fato, para a função identidade $f(x) = x$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.139}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \tag{3.140}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{3.141}$$
$$\tag{3.142}$$

- $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$, para $n > 1$ inteiro positivo.

  De fato, para $f(x) = x^n$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.143}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{3.144}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \tag{3.145}$$
$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \tag{3.146}$$
$$= nx^{n-1}. \tag{3.147}$$

No SymPy[9], podemos usar os seguintes comandos para obtermos as regras de derivação acima:

```
# (k)' = 0
var('k', real=True, constant=True)
diff(k,x)

# (x)' = 1
diff(x,x)

# (x^n)' = nx^(n-1)
var('n',integer=True, positive=True)
diff(x**n,x)
```

[9]Veja a Observação 3.0.1.

Exemplo 3.3.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $(-1)' = 0$.

b) $(\sqrt{2})' = 0$.

c) $(x^3)' = 3x^2$.

d) $(x^{11})' = 11x^{10}$.

3.3.2 Derivada de função exponencial

Vejamos o cálculo da derivada de função exponencial.

- $\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$.

  De fato, tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.148}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \tag{3.149}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \tag{3.150}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{3.151}$$

  Pode-se mostrar que[10]

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \tag{3.152}$$

  Desta forma, temos

$$f'(x) = a^x \ln a = (a^x)'. \tag{3.153}$$

- $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$.

  De fato, $(a^x)' = a^x \ln a$, para $a > 0$ e $a \neq 1$. Tomando $a = e$, temos

$$(e^x)' = e^x \underbrace{\ln e}_{=1} = e^x. \tag{3.154}$$

[10]Pode-se mostrar isso a partir da definição integral da função logaritmo.

No SymPy[11], podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
var('a', real=True)
# (a^x)'
diff(a**x,x)
# (e^x)'
diff(E**x,x)
```

Exemplo 3.3.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$.

b) $(e^x)' = e^x$.

No SymPy[12], podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
# a)
diff(2**x,x)
# b)
diff(E**x,x)
```

3.3.3 Regras da multiplicação por constante e da soma

Sejam k um número real, $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $\boldsymbol{(k \cdot u)' = k \cdot u'}$.

  De fato, pela definição da derivada temos

$$(k \cdot u)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \tag{3.155}$$
$$= \lim_{h\to 0} k \cdot \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) \tag{3.156}$$
$$= k \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{u'} \tag{3.157}$$
$$= k \cdot u'. \tag{3.158}$$

[11]Veja a Observação 3.0.1.
[12]Veja a Observação 3.0.1.

No SymPy[13], podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

```
var('k', real=True)
u = Function('u', real=True)(x)
diff(k*u,x)
```

- $\boldsymbol{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.

  De fato, temos

$$\begin{align}
(u+v)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} \tag{3.159}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} \tag{3.160}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cancelto{u'}{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}} + \cancelto{v'}{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}} \right] \tag{3.161}\\
&= u'(x) + v'(x). \tag{3.162}
\end{align}$$

  Também, como $(-v)' = (-1\cdot v)' = -1\cdot v' = -v'$, temos

$$(u-v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \tag{3.163}$$

  No SymPy[14], podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u+v,x)
```

Exemplo 3.3.3. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = 2x$.

   Para calcularmos f', podemos identificar $f = k\cdot u$, com $k = 2$ e $u(x) = x$. Então, usando a regra da multiplicação por constante $(ku)' = ku'$, temos

$$f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2\cdot 1 = 2. \tag{3.164}$$

[13] Veja a Observação 3.0.1.
[14] Veja a Observação 3.0.1.

No SymPy[15], podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(2*x,x)
```

b) $f(x) = 2x + 3$.

Observamos que $f = u + v$, com $u(x) = 2x$ e $v(x) \equiv 3$. Então, da regra da soma $(u + v)' = u' + v'$, temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \tag{3.165}$$

No SymPy[16], podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(2*x+3,x)
```

c) $f(x) = e^x - x^2$.

Observamos que $f = u - v$, com $u(x) = e^x$ e $v(x) = x^2$. Usando a regra da subtração $(u - v)' = u' - v'$ temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \tag{3.166}$$

No SymPy[17], podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(exp(x)-x**2,x)
```

3.3.4 Regras do produto e do quociente

Sejam $y = u(x)$ e $y = v(x)$ funções deriváveis. Então:

- $\boldsymbol{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

[15] Veja a Observação 3.0.1.
[16] Veja a Observação 3.0.1.
[17] Veja a Observação 3.0.1.

De fato, da definição da derivada temos

$$
\begin{align}
(uv)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \tag{3.167}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \tag{3.168}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h}\right. \tag{3.169}\\
&\qquad \left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}\right] \tag{3.170}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(v+h) \tag{3.171}\\
&+ \lim_{h\to 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \tag{3.172}\\
&= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{3.173}
\end{align}
$$

No SymPy[18], podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u*v,x)
```

- $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$, no caso de $v(x) \neq 0$.

[18]Veja a Observação 3.0.1.

De fato, da definição de derivada temos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} && (3.174)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} && (3.175)\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\right. && (3.176)\\
&\qquad \left. -\frac{u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\right]\frac{1}{v(x)v(x+h)} && (3.177)\\
&= \left[\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)}_{u'(x)v(x)}\right. && (3.178)\\
&\quad \left. -\underbrace{\lim_{h\to 0}u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}_{u(x)v'(x)}\right]\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}}_{\frac{1}{v^2(x)}} && (3.179)\\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}. && (3.180)
\end{aligned}
$$

No SymPy[19], podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
simplify(diff(u/v,x))
```

Exemplo 3.3.4. Vamos calcular a derivada em relação a x da função $f(x) = x^2(x-1)$ de duas formas.

[19] Veja a Observação 3.0.1.

1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$
\begin{align}
f'(x) &= [x^2(x-1)]' \tag{3.181}\\
&= (x^3 - x^2)' \tag{3.182}\\
&= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \tag{3.183}\\
&= 3x^2 - 2x, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3.184}
\end{align}
$$

2. Utilizando a regra do produto.

   Observamos que $f = u \cdot v$, com $u(x) = x^2$ e $v(x) = x - 1$. Então, da regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$, com $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 1$, temos

$$
\begin{align}
f'(x) &= [\overbrace{x^2}^{u}\overbrace{(x-1)}^{v}]' \tag{3.185}\\
&= \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{u' \cdot v} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{u \cdot v'} \tag{3.186}\\
&= 2x^2 - 2x + x^2 \tag{3.187}\\
&= 3x^2 - 2x. \tag{3.188}
\end{align}
$$

Exemplo 3.3.5. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$. Observamos que $f = (u/v)$ com $u(x) \equiv 1$ e $v(x) = x^2$. Tendo em vista que $u'(x) \equiv 0$ e $v'(x) = 2x$, temos da regra do quociente que

$$
\begin{align}
f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)' \tag{3.189}\\
&= \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}, \qquad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \tag{3.190}\\
&= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \tag{3.191}\\
&= -2x^{-3}. \tag{3.192}
\end{align}
$$

Observação 3.3.1. Com abuso de linguagem, temos

$$
\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}. \tag{3.193}
$$

No caso de $n = 1$, temos $(x)' \equiv 1$. No caso de $n <= 0$, devemos ter $x \neq 0$[20].

[20] Devido a indeterminação de 0^0 e a inexistência de 0^n com n negativo

Exemplo 3.3.6. Voltando ao exemplo anterior (Exemplo 3.3.5), temos

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \tag{3.194}$$

Exemplo 3.3.7. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = xe^x$. Usando a regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$ com $u(x) = x$ e $v(x) = e^x$, temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \tag{3.195}$$

$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u'\cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u\cdot v'} \tag{3.196}$$

$$= (x+1)e^x. \tag{3.197}$$

3.3.5 Tabela de derivação

$$\begin{array}{llll}
(ku)' = ku' & (u \pm v)' = u' \pm v' & & \\
(uv)' = u'v + uv' & \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} & (k)' = 0 & (x^n)' = nx^{n-1} \\
(a^x)' = a^x \ln a & (e^x)' = e^x & &
\end{array}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.3.1. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \tag{3.198}$$

Solução.

$$f'(x) = \overbrace{\left[(x^2+x)(1+x^3) - 2x^2\right]'}^{(u-v)'} \tag{3.199}$$
$$= \overbrace{\left[(x^2+x)(1+x^3)\right]'}^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \tag{3.200}$$
$$= (x^2+x)'(1+x^3) + (x^2+x)(1+x^3)' - 2(x^2)' \tag{3.201}$$
$$= (2x+1)(1+x^3) + (x^2+x)3x^2 - 4x \tag{3.202}$$
$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \tag{3.203}$$
$$= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \tag{3.204}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos[21]:

```
d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2x^2,x)
simplify(d)
```

◊

ER 3.3.2. Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2+x}{1-x^3}\right). \tag{3.205}$$

Solução. Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2+x}{1-x^3}\right) = \frac{(x^2+x)'(1-x^3) - (x^2+x)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} \tag{3.206}$$
$$= \frac{(2x+1)(1-x^3) + (x^2+x)3x^2}{1-2x^3+x^6} \tag{3.207}$$
$$= \frac{2x - 2x^4 + 1 - x^3 + 3x^4 + 3x^3}{1-2x^3+x^6} \tag{3.208}$$
$$= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} \tag{3.209}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos[22]:

[21] Veja a Observação 3.0.1.
[22] Veja a Observação 3.0.1.

```
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

$\Diamond$

ER 3.3.3. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.210}$$

No caso, temos $f(x) = xe^{-x}$ e $x_0 = 1$. Calculamos

$$\begin{align} f'(x) = [xe^{-x}]' &= \left[\frac{x}{e^x}\right] \tag{3.211}\\ &= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \tag{3.212}\\ &= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \tag{3.213}\\ &= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \tag{3.214}\\ &= (1-x)e^x e^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \tag{3.215}\end{align}$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$\begin{align} y = f'(1)(x-1) + f(1) &\Rightarrow y = 0 \cdot (x-1) + e^{-1} \tag{3.216}\\ &\Rightarrow y = \frac{1}{e}. \tag{3.217}\end{align}$$

Na Figura 3.7, temos os esboços dos gráfico da função f e sua reta tangente no ponto $x = 1$.

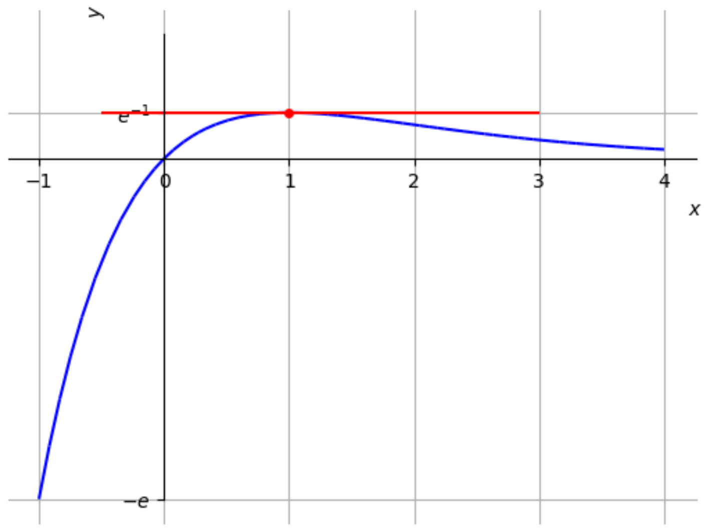


Figura 3.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Com o SymPy, podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos[23]:

```
f = x*exp(-x)
x0 = 1
fl = diff(f,x)
# y =
fl.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)
```

$\lozenge$

Exercícios

E 3.3.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 - 5x^3$

b) $g(x) = (2x - 1)(2 - 4x^2)$

[23]Veja a Observação 3.0.1.

c) $h(x) = \frac{2-4x^2}{2x-1}$

Exemplo 3.3.8. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = xe^x$

b) $g(x) = xe^{2x}$

c) $g(x) = xe^{-2x}$

Exemplo 3.3.9. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $g(x) = x \ln x^2$

c) $g(x) = x \ln x^2 e^x$

Exemplo 3.3.10. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$.

3.4 Derivadas de funções trigonométricas

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\begin{align}
\operatorname{sen}' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \tag{3.218}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen} x}{h} \tag{3.219}\\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} \tag{3.220}\\
&= \operatorname{sen}(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}. \tag{3.221}
\end{align}$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que[24]

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0. \tag{3.222}$$

[24] Veja a Seção 2.7.3.

Logo, temos

$$\mathbf{sen}' \boldsymbol{x} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}. \tag{3.223}$$

De forma similar, temos

$$\begin{align}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \tag{3.224}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos x}{h} \tag{3.225}\\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} \tag{3.226}\\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\cos(h)-1}{h}} - \operatorname{sen}(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}. \tag{3.227}
\end{align}$$

Ou seja,

$$\mathbf{cos}' \boldsymbol{x} = -\,\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x}. \tag{3.228}$$

Exemplo 3.4.1. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ é

$$\begin{align}
f'(x) &= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)' \tag{3.229}\\
&= (\operatorname{sen}^2 x)' + (\cos^2 x)' \tag{3.230}\\
&= (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x)' + (\cos x \cdot \cos x)' \tag{3.231}\\
&= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen} x \tag{3.232}\\
&= 0, \tag{3.233}
\end{align}$$

conforme esperado.

Com o SymPy[25], podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)
```

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\mathbf{tg}' \boldsymbol{x} = \mathbf{sec}^2 \boldsymbol{x}$

[25]Veja a Observação 3.0.1

Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' && (3.234)\\
&= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} && (3.235)\\
&= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && (3.236)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 && (3.237)\\
&= \sec^2 x. && (3.238)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{cotg}' \boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}\, \boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}' x &= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' && (3.239)\\
&= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} && (3.240)\\
&= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} && (3.241)\\
&= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 && (3.242)\\
&= \operatorname{cossec}^2 x. && (3.243)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{sec}' \boldsymbol{x} = \mathbf{sec}\, \boldsymbol{x}\, \mathbf{tg}\, \boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\sec' x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' && (3.244)\\
&= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} && (3.245)\\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && (3.246)\\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} && (3.247)\\
&= \operatorname{tg} x \sec x. && (3.248)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{cossec}'\,\boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}' x &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' && (3.249)\\
&= \frac{-\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} && (3.250)\\
&= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} && (3.251)\\
&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x} && (3.252)\\
&= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x. && (3.253)
\end{aligned}$$

Observação 3.4.1. Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

Exemplo 3.4.2. A derivada em relação a x de

$$f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \tag{3.254}$$

pode ser calculada como segue

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x}\right)' && (3.255)\\
&= \frac{(x + \operatorname{tg} x)'\sec x - (x + \operatorname{tg} x)\sec' x}{\sec^2 x} && (3.256)\\
&= \frac{(1 + \sec^2 x)\sec x - (x + \operatorname{tg} x)\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} && (3.257)\\
&= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x)\operatorname{tg} x}{\sec x}. && (3.258)
\end{aligned}$$

Com o SymPy[26], podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
diff((x+tan(x))/sec(x),x)
```

[26] Veja a Observação 3.0.1

3.4.1 Tabela de derivação

$$
\begin{array}{ll}
(ku)' = ku' & (u \pm v)' = u' \pm v' \\
(uv)' = u'v + uv' & \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \\
(k)' = 0 & (x^n)' = nx^{n-1} \\
(a^x)' = a^x \ln a & (e^x)' = e^x \\
\operatorname{sen}' x = \cos x & \cos' x = -\operatorname{sen} x \\
\operatorname{tg}' x = \sec^2 x & \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec} x \\
\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x & \operatorname{cossec}' x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x
\end{array}
$$

Exercícios resolvidos

ER 3.4.1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x + 0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{3.259}$$

No caso deste exercício, temos $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$. Assim sendo, calculamos a derivada em relação a x de $f(x)$, i.e.

$$f'(x) = \operatorname{sen}' x = \cos x. \tag{3.260}$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Rightarrow y = \cos(0)(x - 0) + \operatorname{sen}(0) \tag{3.261}$$

$$\Rightarrow y = x. \tag{3.262}$$

Na Figura 3.8, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

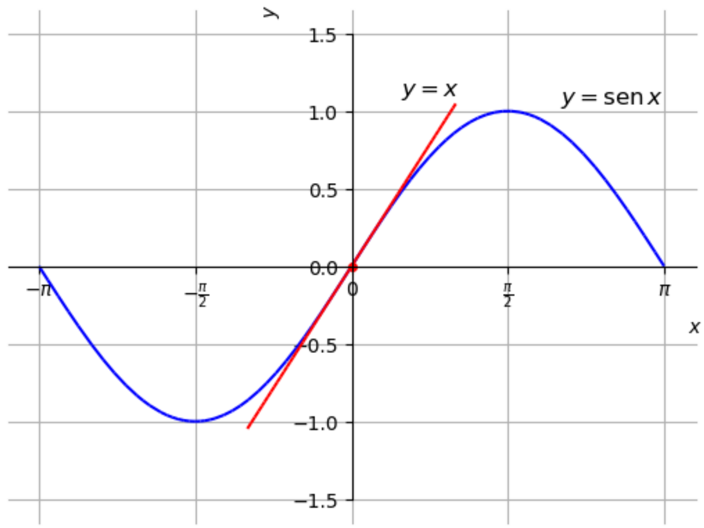


Figura 3.8: Esboços dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto $x = 0$.

Com o SymPy[27], podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

```
f = sin(x)
x0 = 0

# reta tangente
rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
print("Reta tangente: y = %s" % rt)

# graficos
plot(f,rt,(x,-pi,pi))
```

◊

Em construção ...

[27]Veja a Observação 3.0.1

Exercícios

E 3.4.1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \cos x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

Em construção ...

3.5 Regra da cadeia

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam f e g, com g derivável em x e f derivável em $g(x)$, então $(f \circ g)$ é derivável em x, sendo

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}, \tag{3.263}$$

chamada de regra da cadeia.

Exemplo 3.5.1. A derivada em relação a x de $h(x) = (x+1)^2$ pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

   A função h é a composição da função $f(x) = x^2$ com a função $g(x) = x+1$, i.e. $h(x) = f(g(x))$. Temos $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 1$. Então, segue pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \tag{3.264}$$
$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{3.265}$$
$$= 2(x+1) \cdot 1 \tag{3.266}$$
$$= 2x + 2. \tag{3.267}$$

b) por cálculo direto.

   Observando que $h(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, temos

$$h'(x) = (x^2 + 2x + 1)' \tag{3.268}$$
$$= (x^2)' + (2x)' + (1)' \tag{3.269}$$
$$= 2x + 2. \tag{3.270}$$

Com o SymPy[28], temos:

[28] Veja a Observação 3.0.1

```
>>> diff((x+1)**2,x)
2*x + 2
```

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) = f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{3.271}$$

onde u é uma função derivável em x e f é derivável em $u(x)$.

Exemplo 3.5.2. Vamos calcular a derivada em relação a x de $g(x) = \sqrt{x^2+1}$. Temos que $g(x) = f(u(x))$, com $f(x) = \sqrt{x}$ e $u(x) = x^2 + 1$. Observando que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad u'(x) = 2x, \tag{3.272}$$

segue pela regra da cadeia que

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) \tag{3.273}$$

$$= f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.274}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \tag{3.275}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{3.276}$$

No SymPy[29], temos:

```
>>> diff(sqrt(x**2+1),x)
x/sqrt(x**2 + 1)
```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))\cdot[g(h(x))]' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x). \tag{3.277}$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que h é derivável em x com g derivável em $h(x)$ e f derivável em $f(g(h(x)))$.

[29]Veja a Observação 3.0.1

Exemplo 3.5.3. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x^2)$. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{align}
[\operatorname{sen}(\ln x^2)] &= \cos(\ln x^2) \cdot [\ln x^2]' \tag{3.278}\\
&= \cos(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' \tag{3.279}\\
&= \cos(\ln x^2) \cdot \frac{2x}{x^2} \tag{3.280}\\
&= \frac{2}{x} \cos(\ln x^2). \tag{3.281}
\end{align}$$

A função $y = x^2$ é derivável em toda parte. Sendo a função logarítima derivável para todo $x > 0$, temos que $y = \ln x^2$ é derivável para todo $x > 0$. Por fim, como a função seno é derivável em toda parte, concluímos que f é derivável para todo $x > 0$.
No SymPy[30], temos:

```
>>> diff(sin(log(x**2)),x)
2*cos(log(x**2))/x
```

3.5.1 Tabela de derivação

$$\begin{aligned}
&(ku)' = ku' && (u \pm v)' = u' \pm v'\\
&(uv)' = u'v + uv' && \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\\
&(k)' = 0 && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u^n = n u^{n-1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^u = a^u \ln a \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (e^u)' = e^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec' u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

[30] Veja a Observação 3.0.1

Exercícios resolvidos

Em construção ...

ER 3.5.1. Mostre que a função logística

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{3.282}$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f(x)(1-f(x)). \tag{3.283}$$

Solução. Vamos calcular a derivada em relação a x da função logística, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{3.284}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-1}\right] \tag{3.285}$$

$$= -1\cdot\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)'}_{=-e^{-x}} \tag{3.286}$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \tag{3.287}$$

Por outro lado, temos

$$f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{3.288}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(\frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}\right) \tag{3.289}$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \tag{3.290}$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f(x)(1-f(x)). \tag{3.291}$$

◊

Exercícios

Em construção ...

3.6 Diferenciabilidade da função inversa

Seja f uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto I. Então, pode-se mostrar que sua inversa f^{-1} é diferenciável em qualquer ponto da imagem da f no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3.292}$$

Exemplo 3.6.1. Seja $f(x) = 2x^3 - 1$. Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = 2x^3 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x^3 \tag{3.293}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{y+1}{2} \tag{3.294}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}. \tag{3.295}$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}. \tag{3.296}$$

Calculando a derivada de f^{-1} diretamente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{4}}}, \tag{3.297}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}}. \tag{3.298}$$

Agora, usando (3.292) e observando que $f'(x) = 6x^2$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \tag{3.299}$$

$$= \frac{1}{6\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^2}, \qquad = \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \tag{3.300}$$

como esperado.

Exemplo 3.6.2. (Derivada da função logarítmica)

- Tomando $f(x) = e^x$ temos $f^{-1}(x) = \ln x$ e, daí por (3.292)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{3.301}$$

- Tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f^{-1}(x) = \log_a x$ e, por (3.292),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \frac{1}{x\ln a}. \tag{3.302}$$

Exemplo 3.6.3. (Derivada de funções potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}, \tag{3.303}$$

para qualquer $n \neq 0$ racional. Também, se $r \neq 0$ é um número real, temos

$$y = x^r \Rightarrow \ln y = \ln x^r = r\ln x. \tag{3.304}$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}r\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{x} \tag{3.305}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{x}y \tag{3.306}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = rx^{r-1}. \tag{3.307}$$

3.6.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ restrita a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \operatorname{arc\,sen} x. \tag{3.308}$$

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (3.292), donde

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}. \tag{3.309}$$

Como $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ (veja Figura 3.9, concluímos

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.310}$$

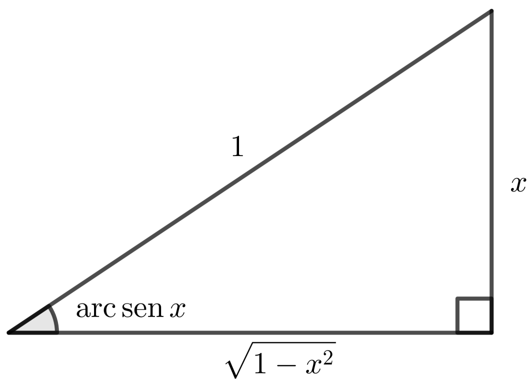


Figura 3.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Exemplo 3.6.4.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.311}$$

Com argumentos análogas aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.312}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.313}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{3.314}$$

$$(\operatorname{arc\,sec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{3.315}$$

$$(\operatorname{arc\,cosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{3.316}$$

Exercícios

Em construção ...

3.7 Derivação implícita

Seja $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \tag{3.317}$$

A derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(y(x)) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} \Rightarrow g'(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.318}$$

Exemplo 3.7.1. Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.319}$$

Para calcularmos $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, fazemos

$$\begin{align}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} &\Rightarrow 2x + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{3.320}\\
&\Rightarrow 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{3.321}\\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{3.322}
\end{align}$$

Em construção ...

Exercícios

Capítulo 4

Aplicações da derivada

Observação 4.0.1. Nos códigos `Python` apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x',real=True)
```

4.1 Extremos de funções

Seja f uma função com domínio D. Dizemos que f tem valor **máximo absoluto** no ponto $x = a$ quando

$$f(x) < f(a), \tag{4.1}$$

para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que f tem valor **mínimo absoluto** no ponto $x = b$ quando

$$f(x) > f(b), \tag{4.2}$$

para todo $x \in D$. Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos absolutos**.

Exemplo 4.1.1. A função $f(x) = x^2$ tem valor mínimo absoluto no ponto $x = 0$ e não assume valor máximo absoluto. A função $g(x) = -x^2$ tem valor máximo absoluto no ponto $x = 0$ e não assume valor mínimo absoluto. A função $h(x) = x^3$ não assume valores mínimo e máximo absolutos. Veja a Figura 4.1.

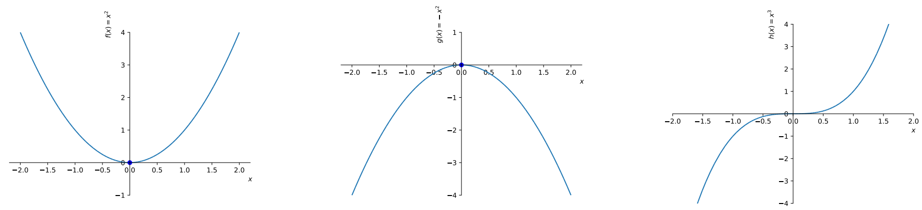


Figura 4.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 4.1.1.

Teorema 4.1.1. (Teorema do valor extremo) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo como um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

Exemplo 4.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = (x-1)^2+1$ é contínua no intervalo fechado $[0, \frac{3}{2}]$. Assume valor mínimo absoluto de 1 no ponto $x = 1$. Ainda, assume valor máximo absoluto igual a 2 no ponto $x = 0$. Veja Figura 4.2.

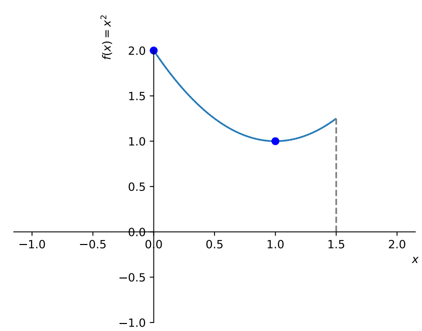


Figura 4.2: Esboço do gráfico de $f(x) = (x-1)^2+1$ no intervalo $[0, \frac{3}{2}]$. Veja o Exemplo 4.1.2 a).

b) A função $g(x) = \ln x$ é contínua no intervalo $(0, e]$. Neste intervalo, assume valor máximo absoluto no ponto $x = e$, mas não assume valor mínimo absoluto. Veja Figura 4.3.

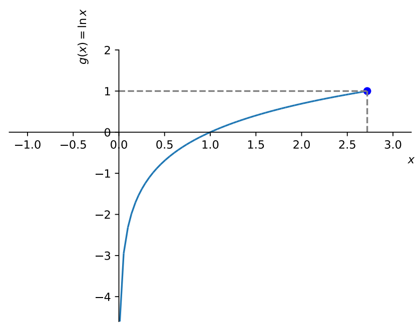


Figura 4.3: Esboço do gráfico de $g(x) = \ln x$ no intervalo $(0,e]$. Veja o Exemplo 4.1.2 b).

c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 1, \\ 0 & ,x = 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

definida no intervalo $[0,1]$ é descontínua no ponto $x = 1$. Neste intervalo, assume valor mínimo absoluto no ponto $x = 0$, mas não assume valor máximo absoluto. Veja a Figura 4.4.

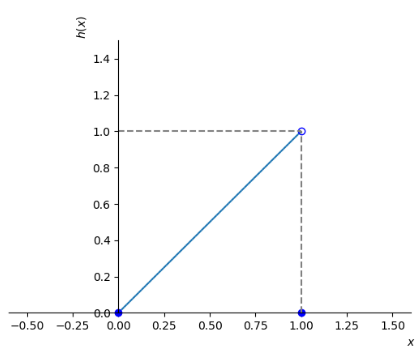


Figura 4.4: Esboço do gráfico de $h(x)$ no intervalo $[0,1]$. Veja o Exemplo 4.1.2 c).

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior $x = a$ de seu domínio, se $f(x) \leq f(a)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto a. Analogamente, f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior $x = b$ de seu domínio, se $f(x) \geq f(b)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto b. Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos).

Exemplo 4.1.3. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < \frac{1}{2}, \\ |x| & , \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \tag{4.4}$$

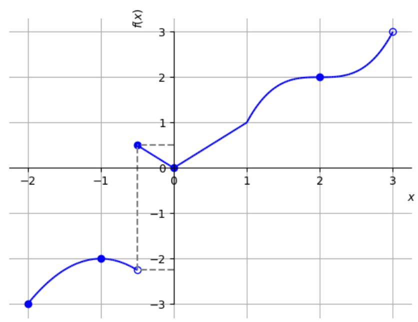


Figura 4.5: Esboço do gráfico de $f(x)$ discutida no Exemplo 4.1.3.

Na Figura 4.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que f tem um valor máximo local no ponto $x = -1$ e tem um valor mínimo local no ponto $x = 0$. Observamos que $x = -2$, $x = -1/2$, $x = 2$ e $x = 3$ não são pontos de extremos locais desta função. No ponto $x = -2$, f tem seu valor mínimo absoluto. Ainda, f não tem valor máximo absoluto.

Teorema 4.1.2. (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se f possui um valor extremo local em um ponto $x = a$ e f é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \tag{4.5}$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função f pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde $f' = 0$,

2. pontos interiores de seu domínio onde f' não existe, ou

3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função f onde $f' = 0$ ou não existe, é chamado de **ponto crítico** da função. Desta forma, afirmamos que f pode ter valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

Exemplo 4.1.4. Consideramos a função $f(x)$ discutida no Exemplo 4.1.3. No ponto $x = -1$, $f'(-1) = 0$ e f tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = 2$, também temos $f'(2) = 0$, mas f não tem valor extremo neste ponto.

No ponto $x = 0$, $f'(0)$ não existe e f tem valor mínimo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ não existe e f não tem extremo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que f tem valor mínimo absoluto no ponto $x = -2$, mas não tem extremo absoluto no ponto $x = 3$.

4.1.1 Exercícios resolvidos

ER 4.1.1. Determine os pontos extremos da função $f(x) = (x+1)^2 - 1$ no intervalo $[-2,1]$.

Solução. Os valores extremos de um função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como $f(x) = (x+1)^2 - 1$ é diferenciável no intervalo $(-2,1)$, seus pontos críticos são pontos tais que $f' = 0$. Para identificá-los, calculamos

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Rightarrow 2(x+1) = 0 &\quad (4.6)\\
&\Rightarrow x = -1. &\quad (4.7)
\end{aligned}
$$

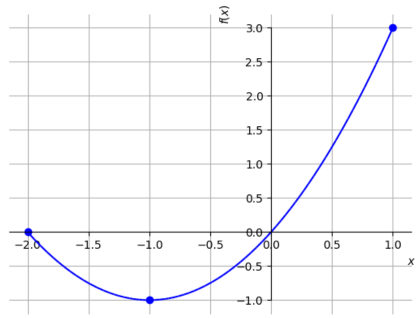


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função $f(x) = (x+1)^2 - 1$ discutida no Exercício Resolvido 4.1.1.

Desta forma, f pode ter valores extremos nos ponto $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 4.7) e a seguinte tabela:

x	-2	-1	1
$f(x)$	0	-1	3

Daí, podemos concluir que f tem o valor mínimo absoluto (e local) de $f(-1) = -1$ no ponto $x = -1$ e tem valor máximo absoluto de $f(1) = 3$ no ponto $x = 1$.
Podemos usar o Sympy para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos:

```
# f(x)
f = lambda x: (x+1)**2-1
# f'(x)
fl = lambda x: diff(f(x),x)
# f'(x)=0
solve(fl(x),x)
# valores nos extremos e no pto crítico
f(-2), f(-1), f(1)
# esboço do gráfico
plot((x+1)**2-1,(x,-2,1),show=True)
```

◊

ER 4.1.2. Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1,1]$.

Solução. Como f é diferenciável no intervalo $(-1,1)$, temos que seus pontos críticos são tais que $f'(x) = 0$. Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \tag{4.8}$$

é o único ponto crítico de f. Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura **??**) vemos f não tem valor extremo local neste ponto. Assim, os pontos extremos da f só podem ocorrer nos extremos do domínio $[-1,1]$. Concluímos que $f(-1) = -1$ é o valor mínimo absoluto de f e $f(1) = 1$ é seu valor máximo absoluto.

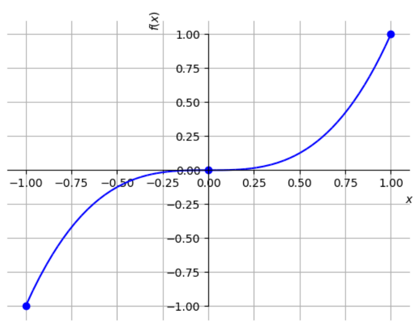


Figura 4.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3$ discutida no Exercício Resolvido 4.1.2.

$\lozenge$

4.1.2 Exercícios

Exemplo 4.1.5. Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^{1/3}$ no intervalo $[-1,1]$.

Em construção ...

4.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

4.2.1 Teorema de Rolle

O teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

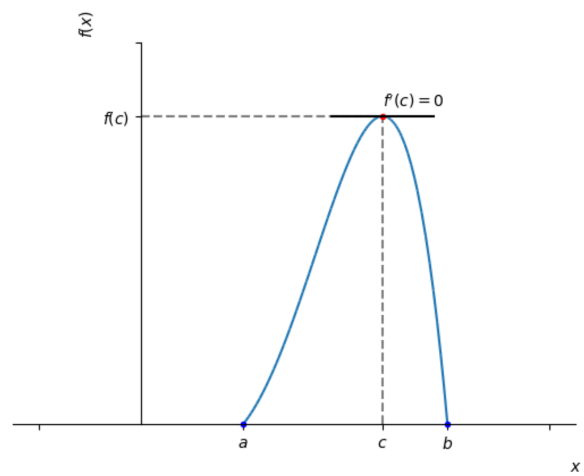


Figura 4.8: Ilustração do teorema de Rolle.

Teorema 4.2.1. (Teorema de Rolle) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Se

$$f(a) = f(b), \tag{4.9}$$

então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0. \tag{4.10}$$

Exemplo 4.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ tem pelo menos um ponto crítico no intervalo (0,1) e no intervalo (1,3). De fato,

$$\begin{align}
p(x) &= x^3 - 4x^2 + 3x \tag{4.11}\\
&= x(x^2 - 4x + 3) \tag{4.12}\\
&= x(x-1)(x-3). \tag{4.13}
\end{align}$$

Logo, temos $p(0) = p(1) = 0$ e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Analogamente, como $p(1) = p(3) = 0$, segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo (1,3).

A função

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 1, \\ 0 & ,x = 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

é tal que $f(0) = f(1) = 0$, entretanto sua derivada $f'(x) = 1$ no intervalo $(0,1)$. Ou seja, a condição da f ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle.

Não existe ponto tal que a derivada da $g(x) = -|x-1| + 1$ seja nulo. Entretanto, notemos que $g(0) = g(2) = 0$ e g contínua no intervalo fechado $[0,2]$. O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois g não é diferenciável no intervalo (0,2), mais especificamente, no ponto $x = 1$.

4.2.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

Teorema 4.2.2. (Teorema do valor médio) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b). Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.15}$$

Exemplo 4.2.2. A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo [0,2] e diferenciável no intervalo (0,2). Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto $c \in (0,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \tag{4.16}$$

De fato, $f'(x) = 2x$ e, portanto, tomando $c = 1$, temos $f'(c) = 2$.

Corolário 4.2.1. (Funções com derivadas nulas são constantes) Se $f'(x) = 0$ para todos os pontos em um intervalo (a, b), então f é constante neste intervalo.

Demonstração. De fato, sejam $x_1,x_2 \in (a, b)$ e, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$. Então, temos f é contínua no intervalo $[x_1,x_2]$ e diferenciável em (x_1,x_2). Segue do teorema do valor médio que existe $c \in (x_1,x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \tag{4.17}$$

Como $f'(c) = 0$, temos $f(x_2) = f(x_1)$. Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois ponto no intervalo (a, b), logo é constante neste intervalo. □

Corolário 4.2.2. (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os pontos em um intervalo aberto (a,b), então $f(x) = g(x) + C$, C constante, para todo $x \in (a,b)$.

Demonstração. Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função $h(x) = f(x) - g(x)$. □

Corolário 4.2.3. (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que f seja contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é crescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.

Exercícios resolvidos

ER 4.2.1. Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

Solução. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida pelo carro e t o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, exite tempo $t_1 \in (0,\ 1{,}5)$ tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1{,}5) - s(0)}{1{,}5 - 0} = \frac{150}{1{,}5} = 100 \text{ km/h}. \tag{4.18}$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

◊

Em construção ...

Exercícios

E 4.2.1. Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

4.3 Teste da primeira derivada

Na Seção , vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 4.2.3 nos fornece condições suficientes para classicar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja c um ponto crítico de uma função contínua f e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto (a,b) contendo c, exceto possivelmente no ponto c. Movendo-se no sentido positivo em x:

- se f' muda de negativa para positiva em c, então f possui um mínimo local em c;
- se f' muda de positiva para negativa em c, então f possui um máximo local em c;
- se f' não muda de sinal em c, então c não é um extremo local de f.

Exemplo 4.3.1. Consideremos a função $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Como f é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \tag{4.19}$$

Temos $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Segue, que os pontos críticos são

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \tag{4.20}$$

Com isso, temos

Intervalos	$x < \frac{2-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{7}}{3} < x$
f'	+	-	+
f	crescente	decrescente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ é ponto de máximo local e que $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar o `Sympy` para computarmos a derivada de f com o comando

```
fl = diff((x - 2)*(x - 1)*(x + 1))
```

Então, podemos resolver $f'(x) = 0$ com o comando

```
solve(fl)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da f' com os comandos

```
reduce_inequalities(fl<0)
reduce_inequalities(fl>0)
```

Exercícios resolvidos

ER 4.3.1. Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \tag{4.21}$$

Solução. Como o domínio da f é $(-\infty,\infty)$ e f é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \tag{4.22}$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \tag{4.23}$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{4.24}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}. \tag{4.25}$$

Portanto, os ponto críticos são $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ e $x_3 = -1$. Fazendo o estudo de sinal da f', temos

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x$
$4x$	-	+	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+
f	decrescente	crescente	decrescente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 0$ é ponto de mínimo local, $x_2 = -2$ é ponto de máximo local e $x_3 = -1$ é ponto de máximo local.

$\Diamond$

Exercícios

Capítulo 5

Integração

Observação 5.0.1. Nos códigos `Python` apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x',real=True)
```

5.1 Integrais indefinidas

Seja $f(x)$ uma função. Dizemos que $F(x)$ é uma **primitiva** de $f(x)$ quando

$$F'(x) = f(x) \tag{5.1}$$

para todo x no domínio da f.

Exemplo 5.1.1. Seja $f(x) = 2x$. Notemos que $F(x) = x^2$ é uma primitiva de f, pois

$$F'(x) = 2x = f(x). \tag{5.2}$$

Também, se C é uma constante qualquer, $F(x) = x^2 + C$ é primitiva de $f(x)$. De fato, lembrando que a derivada de uma constante é zero, temos

$$F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x). \tag{5.3}$$

Observação 5.1.1. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + C$, com C constante, também é primitiva de $f(x)$.

A **integral indefinida** de uma função $f(x)$ é denotada por

$$\int f(x)\, dx \tag{5.4}$$

e é definida por

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \tag{5.5}$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Exemplo 5.1.2. Do observado no exemplo anterior (Exemplo 5.1.1), temos

$$\int 2x\, dx = x^2 + C. \tag{5.6}$$

Com o `Sympy`, podemos computar a integral indefinida acima com o comando[1]:

```
integrate(2*x)
```

Observe que o `Sympy` não adiciona a constante indeterminada.

5.1.1 Regras básicas de integração

Das regras básicas de derivação, podemos inferir as seguintes regras para integração:

- $\displaystyle\int 0\, dx = C.$
- $\displaystyle\int 1\, dx = x + C.$
- $\displaystyle\int af(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$, $a \neq 0$ constante.
- $\displaystyle\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$

[1]Veja a Observação 5.0.1.

Exemplo 5.1.3.

$$\int x - 3x^2\,dx = \int x\,dx - \int 3x^2\,dx \tag{5.7}$$
$$= \int \frac{2}{2} x\,dx - x^3 + C \tag{5.8}$$
$$= \frac{1}{2}\int 2x\,dx - x^3 + C \tag{5.9}$$
$$= \frac{x^2}{2} - x^3 + C. \tag{5.10}$$

No exemplo anterior (Exemplo 5.1.3) integramos funções potências. Da regra de derivação

$$[x^n]' = nx^{n-1}, \quad n \neq 0, \tag{5.11}$$

temos

$$\int x^n\,dx = \int \frac{n+1}{n+1} x^n\,dx, \quad n \neq -1, \tag{5.12}$$
$$= \frac{1}{n+1}\int (n+1)x^n\,dx, \tag{5.13}$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{5.14}$$

Ou seja, obtemos a seguinte regra de integração para função potência

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \tag{5.15}$$

Exemplo 5.1.4.

$$\int 3x^{-2}\,dx = 3\int x^{-2}\,dx = 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = -\frac{3}{x} + C. \tag{5.16}$$

Das regras de derivação para a função exponencial natural e logaritmo natural, temos

- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$

Também, como $(a^x)' = a^x \ln a$, temos

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{5.17}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

5.1.2 Exercícios

Em construção ...

5.2 Integração por substituição

Seja $u = u(x)$. Usando de diferenciais, temos $du = u'(x)dx$. Logo,

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5.18}$$

Esta é chamada de regra de integração por substituição.

Exemplo 5.2.1. Consideremos

$$\int (2x+1)^2\,dx. \tag{5.19}$$

Substituindo

$$u = 2x + 1 \tag{5.20}$$

temos

$$du = 2dx. \tag{5.21}$$

Portanto,

$$\int (x+1)^2\,dx = \int u^2\,\frac{du}{2} \tag{5.22}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2\,du \tag{5.23}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{2+1}}{2+1} + C \tag{5.24}$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \tag{5.25}$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C. \tag{5.26}$$

Exercícios resolvidos

ER 5.2.1. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx. \tag{5.27}$$

Solução. Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{5.28}$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \tag{5.29}$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \tag{5.30}$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{7}{u^2}\,du \tag{5.31}$$

$$= 7\int u^{-2}\,du \tag{5.32}$$

$$= 7\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \tag{5.33}$$

$$= -\frac{7}{u} \tag{5.34}$$

$$= \frac{7}{1-x}. \tag{5.35}$$

◊

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

5.3 Integração por partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \tag{5.36}$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx}dx = \int \frac{du}{dx}vdx + \int u\frac{dv}{dx}dx, \tag{5.37}$$

donde

$$uv = \int vdu + \int udv. \tag{5.38}$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{5.39}$$

Exemplo 5.3.1. Consideremos $\int xe^x\,dx$. Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \tag{5.40}$$

$$dv = e^x\,dx \Rightarrow \int dv = \int e^x\,dx \Rightarrow v = e^x. \tag{5.41}$$

Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int xe^x\,dx = \int udv = uv - \int vdu \tag{5.42}$$

$$= xe^x - \int e^x dx \tag{5.43}$$

$$= xe^x - e^x + C. \tag{5.44}$$

Exercícios resolvidos

ER 5.3.1. Calcule

$$\int x\ln x\,dx. \tag{5.45}$$

Solução. Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{5.46}$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \tag{5.47}$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C. \tag{5.48}$$

Tomando $C = 0$, e usando a fórmula, obtemos

$$\begin{align}
\int x\ln x\,dx &= \int udv \tag{5.49}\\
&= uv - \int v\,du \tag{5.50}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \tag{5.51}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx \tag{5.52}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C \tag{5.53}\\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \tag{5.54}
\end{align}$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do `Sympy`[2]:

```
integrate(x*log(x),x)
```

◊

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

5.4 Integral definida

Em construção ...

[2]Veja a Observação 5.0.1.

5.4.1 Teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre a integral definida de uma função e suas primitivas.

Teorema 5.4.1. (Teorema fundamental do cálculo) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.55}$$

Observação 5.4.1. Uma outra forma do teorema fundamental do cálculo é a seguinte: se f é contínua em $[a, b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{5.56}$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e sua derivada é

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{5.57}$$

5.4.2 Substituição em integrais definidas

Em algumas situações, faz-se necessário a aplicação da técnica de integração por substituição para integrais definidas. Neste contexto, sejam f e u funções dadas e F uma primitiva de f. Então,

$$[F(u)]' = F'(u)u' = f(u)u'. \tag{5.58}$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{align} \int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx &= F(u(x))\big|_{x=a}^{x=b} \tag{5.59}\\ &= F(u)\big|_{u=u(a)}^{u=u(b)} \tag{5.60}\\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du. \tag{5.61}\end{align}$$

Resumidamente, temos que a **regra da substituição em integrais definidas**, lê-se

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du. \tag{5.62}$$

5.4.3 Integração por partes para integrais definidas

Podemos aplicar a fórmula de integração por partes para integrais definidas. Neste caso, temos

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx. \tag{5.63}$$

Exercícios resolvidos

ER 5.4.1. Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{5.64}$$

Solução. Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- Solução 1: aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du. \tag{5.65}$$

  Escolhendo, $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x\,dx$. Daí, segue

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u}\,\frac{du}{-2x} &(5.66)\\
&= -\frac{1}{2}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\,du &(5.67)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{u=1}^{0} &(5.68)\\
&= -\frac{1}{3}\,\sqrt{u^3}\Big|_{u=1}^{0} &(5.69)\\
&= \frac{1}{3}. &(5.70)
\end{aligned}$$

- Solução 2: calculando uma primitiva em função de x. Para obtermos uma primitiva em função de x, calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{5.71}$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x\,dx$ e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x\sqrt{u}\,\frac{du}{-2x} \tag{5.72}$$
$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \tag{5.73}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \tag{5.74}$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{u^3} \tag{5.75}$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C. \tag{5.76}$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left.\sqrt{(1-x^2)^3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}. \tag{5.77}$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do `Sympy`:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2),(x,0,1))
```

◊

ER 5.4.2. Calcule
$$\int_{-1}^1 xe^x\,dx. \tag{5.78}$$

Solução. Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidadas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{5.79}$$

Para tanto, escolhemos $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C. \tag{5.80}$$

Escolhendo $C = 0$ e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)g'(x)\,dx \tag{5.81}$$
$$= f(x)g(x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g(x)f'(x)\,dx \tag{5.82}$$
$$= xe^x|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx \tag{5.83}$$
$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^{1} \tag{5.84}$$
$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \tag{5.85}$$
$$= 2e^{-1}. \tag{5.86}$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do `Sympy`:

```
integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
```

◊

Em construção ...

Exercícios

E 5.4.1. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx. \tag{5.87}$$

E 5.4.2. Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx. \tag{5.88}$$

E 5.4.3. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1}\,dx. \tag{5.89}$$

E 5.4.4. Calcule

$$\int_{-1}^{1} x^2e^x\,dx. \tag{5.90}$$

Capítulo 6

Aplicações da integral

Observação 6.0.1. Nos códigos `Python` apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x',real=True)
```

6.1 Cálculo de áreas

A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ está associada a área entre o gráfico da função f e o eixo das abscissas no intervalo $[a,b]$. Ocorre que se f for não negativa, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Se f for negativa, então $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Por isso, dizemos que $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área líquida (ou com sinal) entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

Em construção ...

6.1.1 Áreas entre curvas

Observamos que se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \tag{6.1}$$

corresponde à área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ restritas ao intervalo $[a,b]$.

Em construção ...

Exercícios resolvidos

ER 6.1.1. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$.

Solução. Para calcularmos a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$, fazemos:

1. O estudo de sinal de f no intervalo $[-1,1]$.

   (a) Cálculo das raízes de f no intervalo $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} x^3 - x = 0 &\Rightarrow x(x^2-1) = 0 && (6.2)\\ &\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 && (6.3)\\ &\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. && (6.4)\end{aligned}$$

   (b) Os sinais de $f(x)$.

$$\begin{aligned} -1 \le x \le 0 &\Rightarrow f(x) \ge 0 && (6.5)\\ 0 \le x \le 1 &\Rightarrow f(x) \le 0. && (6.6)\end{aligned}$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

   (a) Cálculo da integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int x^3 - x\,dx && (6.7)\\ &= \int x^3\,dx - \int x\,dx && (6.8)\\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. && (6.9)\end{aligned}$$

   (b) Cálculo da área.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx && (6.10)\\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} && (6.11)\\ &= \frac{1}{2}. && (6.12)\end{aligned}$$

Podemos computar a solução deste exercícios usando os seguintes comandos do Sympy[1]. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

◊

ER 6.1.2. Cálculo a área entre a reta $y = 1$ e o gráfico de $f(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$.

Solução. Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$ descontada a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ restrita ao intervalo $[0,1]$. Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2\,dx \tag{6.13}$$

$$= 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \tag{6.14}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \tag{6.15}$$

◊

ER 6.1.3. Calcule a área entre as curvas $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$.

Solução. O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$. Como $f(x) \geq g(x)$ neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx \tag{6.16}$$

$$= \int_0^1 x - x^2\,dx \tag{6.17}$$

$$= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 \tag{6.18}$$

$$= \frac{1}{6}. \tag{6.19}$$

[1] Veja Observação 6.0.1.

$\lozenge$

Em construção ...

Exercícios

E 6.1.1. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e a reta $y = 1$ restritas ao intervalo $[-1,1]$.

E 6.1.2. Calcule a área entre as curvas $y = x$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$.

Em construção ...

6.2 Volumes por fatiamento e rotação

Em construção ...

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, \infty)$; Imagem: $(-\infty, \infty)$

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, \infty)$; Imagem: $[1, \infty)$.

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; Imagem: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

E 1.2.0. $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

E 1.2.0. não há.

E 1.3.1. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.3.2. a) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$. b) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(0, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.3.3. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.4.1. -1, 0, 2

E 1.4.2. $9/4$

E 1.5.3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E 1.6.1. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

E 1.6.2. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

E 1.7.1. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$; domínio: $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

E 1.7.2. Dica: verifique sua resposta com um pacote de matemática simbólica, por exemplo, com o SymPy.

E 1.8.1. decrescente: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; crescente: $[-1, 1]$.

E 1.8.2. função ímpar

E 1.8.3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$; domínio $[-1, \infty)$

E 1.9.1. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

E 1.10.1. Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar o esboço de seu gráfico. Domínio: $(2, \infty)$.

E 1.10.2. 0

E 2.1.1. a) -1; b) -1; c) 2; d) $\nexists$

E 2.1.3. a) 2; b) 2; c) -3; d) π

E 2.1.4. a) 2; b) -2; c) -3; d) e

E 2.2.1. a) 2; b) 2π; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

E 2.2.2. a) $-3/2$; b) $5/2$; c) -3

E 2.2.3. a) -6; b) -3;

E 2.2.4. a) $2/3$; b) $1/3$;

E 2.2.5. a) 2; b) -1; c) 1

E 2.2.6. a) 6; b) 10; c) 12

E 2.2.7. a) $1/2$; b) $-1/3$;

E 2.2.8. a) $\nexists$; b) 3;

E 2.2.9. $-1/4$

E 2.3.4. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) $\nexists$

E 2.3.5. a) 2; b) 2; c) 2

E 2.3.6. a) 2; b) 3; c) $\nexists$

E 2.3.7. $-\frac{1}{2}$

E 2.3.8. 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é $[-1,1]$.

E 2.4.1. 2

E 2.4.2. a) 1; b) 3; c) -1; d) e

E 2.4.3. não existe.

E 2.5.1. ∞

E 2.5.2. $x = 2$; $x = -2$

E 2.5.3. ∞

E 2.5.4. $-\infty$

E 2.6.1. $\mathbb{R} \setminus \{1{,}2\}$.

E 2.6.2. $(1,2) \cup (3,\infty)$.

E 2.6.3. 0

E 2.7.3. 1

E 2.7.4. 0

E 2.7.5. 0

E 2.7.6. 0

E 2.7.7. $\frac{1}{2}$

E 2.8.1. ∞

E 3.1.1. a) 0; b) 0; c) 0

E 3.1.2. a) -1; b) -2; c) e

E 3.1.3. a) -1; b) -2; c) e

E 3.1.4. reta secante: $y = -3x + 7$; reta tangente: $y = -2x + 6$; dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

E 3.1.5. a) $1000\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; b) $30\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; c) $-970\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$.

E 3.2.1. a) 0; b) 0; c) 0

E 3.2.2. a) 2; b) -3; c) $\sqrt{e}$

E 3.2.3. $f'(x) = 2x - 2$

E 3.2.4. $(1, \infty)$

E 3.2.5. a) $2x - 3x^2$; b) $2 - 6x$; c) -6; d) 0; e) 0

E 3.3.1. a) $f'(x) = -15x^2$; b) $g'(x) = -24x^2 + 8x + 4$; c) $h'(x) = frac4left(2x^2 - 2xleft(2x - 1right) - 1right)left(2x - 1right)^2$

E 3.3.1. a) $f'(x) = (1 + x)e^x$; b) $g'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$; c) $h'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$

E 3.3.1. a) $f'(x) = 2/x$; b) $g'(x) = \ln x^2 + 2$; c) $h'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

E 3.3.1. $y = x - 1$

E 3.4.1. $y = 1$. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

E 4.1.0. $f(-1) = -1$ é o valor mínimo absoluto; $f(1) = 1$ é o valor máximo absoluto.

E 5.4.1. $\frac{7}{2}$

E 5.4.2. 4

E 5.4.3. $\frac{1}{2}$

E 5.4.4. $-\frac{5}{e} + e$

E 6.1.1. 2

E 6.1.2. Observamos o problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$ restritas no intervalo [0,2]. Como $g(x) \geq f(x)$ no intervalo [0,1] e $f(x) \geq g(x)$ no intervalo [1,2], temos

$$\begin{align}
A &= \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx + \int_1^2 f(x) - g(x)\,dx \tag{6.20}\\
&= \int_0^1 x - x^2\,dx + \int_1^2 x^2 - x\,dx \tag{6.21}\\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \tag{6.22}\\
&= 1 \tag{6.23}
\end{align}$$

Referências Bibliográficas

[1] Howard Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.

[2] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

Índice Remissivo