Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

14 de maio de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python[1] são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

Observação 1.0.1. Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos Python[1] com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

1.1 Equações a diferenças

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \ldots, y_n; n) = 0, \tag{1.1}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $k \geq 0$ número natural.

Exemplo 1.1.1. Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y_{n+1} = (1 + r)y_n \tag{1.2}$$

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja y_0 o valor da aplicação inicial, então

$$y_1 = (1 + r)y_0 \tag{1.3}$$

[1] Veja a Observação 1.0.1.

é o valor corrigido a taxa r no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y_2 = (1 + r)y_1 \tag{1.4}$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y_{n+1} = ry_n\left(1 - \frac{y_n}{K}\right), \tag{1.5}$$

onde y_n representa o tamanho da população no período n, r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**[2]

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \tag{1.6}$$

onde $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$.

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k-ésima ordem). É dita ser **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n$, noutro caso é dita ser **não linear**.

Exemplo 1.1.2. No Exemplo 1.1.1, temos

a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.

b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.

c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

A solução de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números $(y_n)_{n=0}^{\infty} = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots)$ que satisfazem a equação. Em alguns casos é possível escrever a solução como uma forma fechada

$$y_n = g(n), \tag{1.7}$$

onde $n = 0, 1, \dots$.

[2]Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: Wikipedia.

Exemplo 1.1.3. Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y_{n+1} = (1+r)y_n, \quad n \geq 0. \tag{1.8}$$

A partir do valor inicial y_0, temos

$$\begin{align} y_1 &= (1+r)y_0 \tag{1.9}\\ y_2 &= (1+r)y_1 \tag{1.10}\\ &= (1+r)(1+r)y_0 \tag{1.11}\\ &= (1+r)^2 y_0 \tag{1.12}\\ y_3 &= (1+r)y_2 \tag{1.13}\\ &= (1+r)(1+r)^2 y_0 \tag{1.14}\\ &= (1+r)^3 y_0 \tag{1.15}\\ &\vdots \tag{1.16}\end{align}$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y_n = (1+r)^n y_0, \tag{1.17}$$

onde o valor inicial y_0 é arbitrário.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Calcule y_{10}, sendo que

$$y_{n+1} = 1{,}05 y_n, \quad n \geq 0, y_0 = 1000. \tag{1.18}$$

Solução. Observamos que

$$\begin{align} y_1 &= 1{,}05 y_0 \tag{1.19}\\ y_2 &= 1{,}05 y_1 \tag{1.20}\\ &= 1{,}05 \cdot 1{,}05 y_0 \tag{1.21}\\ &= 1{,}05^2 y_0 \tag{1.22}\\ y_3 &= 1{,}05 y_2 \tag{1.23}\\ &= 1{,}05 \cdot 1{,}05^2 y_0 \tag{1.24}\\ &= 1{,}05^3 y_0 \tag{1.25}\\ &\vdots \tag{1.26}\end{align}$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$y_n = 1{,}05^n y_0. \tag{1.27}$$

Portanto,

$$\begin{align} y_{10} &= 1{,}05^{10} y_0 \tag{1.28}\\ &= 1{,}05^{10} \cdot 1000 \tag{1.29}\\ &\approx 1628{,}89. \tag{1.30}\end{align}$$

◊

ER 1.1.2. Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores y_n no final do n-ésimo ano.

Solução. No final do ano $n + 2 \geq 0$, o número de flores é igual a

$$y_{n+2} = 2u_{n+2} + 3d_{n+2}, \tag{1.31}$$

onde u_{n+2} é o número de flores plantadas a um ano e d_{n+2} é o número de flores plantas a pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2d_{n+1} \tag{1.32}$$

e

$$d_{n+2} = u_{n+1} + d_{n+1}. \tag{1.33}$$

Com isso, temos

$$\begin{align} y_{n+2} &= 2(u_{n+1} + 2d_{n-1}) + 3(u_{n+1} + d_{n-1}) \tag{1.34}\\ &= 2y_{n+1} + u_{n+1} + d_{n+1} \tag{1.35}\\ &= 2y_{n+1} + \underbrace{u_n + 2d_n}_{u_{n+1}} + \underbrace{u_n + d_n}_{d_{n+1}} \tag{1.36}\\ &= 2y_{n+1} + 2u_n + 3d_n \tag{1.37}\\ &= 2y_n + y_n. \tag{1.38}\end{align}$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_{n+2}. \tag{1.39}$$

◊

Exercícios

E 1.1.1. Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

1. $y_{n+1} - \sqrt{2}y_n = 1$
2. $ny_{n+1} = y_n \ln(n+1)$
3. $y_n = y_{n+1} + 2y_{n+2} - 1$
4. $y_{n+1} - (1 - y_n)(1 + y_n) = 0$
5. $y_{n+2} = n\sqrt{y_n}$

E 1.1.2. Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de y_0 reais e que o cartão não está mais em uso.

E 1.1.3. Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no n-ésimo mês.

Capítulo 2

Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f(y_{n+1},y_n;n) = 0, \tag{2.1}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$.

2.1 Equações lineares

Em construção ...

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

E 1.1.2. $y_{n+1} = 3y_n$.

E 1.1.3. Sequência de Fibonacci

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, 3. edition, 2005.