Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro H A Konzen

3 de março de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definições e classificações

Equação Diferencial (EDO) é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita.

Exemplo 1.1.1. São exemplos de equações diferenciais:

a) Modelo de queda de um corpo com resistência do ar.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \tag{1.1}$$

Nesta equação, temos a velocidade $v = v(t)$ (v função de t) como **incógnita**. O tempo é descrito por t como uma variável independente. As demais letras correspondem a parâmetros dados (constantes). Mais especificamente, g corresponde à gravidade, k à resistência do ar e m à massa do corpo.

b) Equação de Verhulst (Equação Logística)

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y. \tag{1.2}$$

Esta equação é um clássico modelo de crescimento populacional. Aqui, $y = y(t)$ é o tamanho da população (incógnita) no tempo t (variável independente). As demais letras correspondem a parâmetros dados.

c) Equação de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{kx^2}{2}\psi = E\psi. \tag{1.3}$$

Esta equação modela a função de onda ψ (incógnita) de uma partícula em função de sua posição x (modelo unidimensional). Neste modelo quântico, $\hbar$, m, k e E são parâmetros.

d) Modelagem da corrente em um circuito elétrico.

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I = E. \tag{1.4}$$

Aqui, a incógnita é função corrente I em função do tempo. O modelo refere-se a um circuito elétrico com os seguintes parâmetros: L indutância, R resistência, C capacitância e E voltagem do gerador.

e) Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.5}$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura (incógnita) $u = u(t,x)$ como função do tempo e da posição (variáveis independentes). O parâmetro é o coeficiente de difusão térmica α.

Equação Diferencial Ordinária (EDO) é aquela em a incógnita é função apenas de uma variável independente. Desta forma, todas as derivadas que aparecem na equação são ordinárias. No Exemplo 1.1.1, as equações diferenciais a), b) e c) são ordinárias. A equação d) não é ordinária, pois a incógnita $u = u(t,x)$ é função das varáveis independentes t e x, portanto, os termos diferenciais são parciais (derivadas parciais). Equações como esta são chamadas de equações diferenciais parciais.
Toda EDO pode ser escrita na seguinte forma geral

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.6}$$

Aqui, F é uma função envolvendo a variável independente t e a variável dependente $y = y(t)$ (incógnita, função de t) e pelo menos uma derivada ordinária de y em relação a t[1]. O índice n corresponde a **ordem** da derivada

[1]Lembre-se que $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ e assim por diante.

de maior ordem que aparece na equação, sendo $n \geq 1$. Quando F é função linear das variáveis y, y', $\cdots$, $y^{(n)}$, então a EDO é dita ser **linear**, caso contrário, é **não linear**. Quando F não dependente explicitamente de t, a equação é dita ser **autônoma**.

Exemplo 1.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A equação

$$y'' + y = 0 \tag{1.7}$$

é uma EDO de ordem 2, linear e autônoma. Aqui, temos $F(y, y'') = y'' + y$.

b) As equações (1.1) e (1.2) são EDOs de **primeira ordem** (de ordem 1), autônomas e não lineares.

c) A Equação de Schrödinger (1.3) é uma EDO de **segunda ordem**, linear e não autônoma.

Uma **solução** de uma EDO (1.6) é uma função $y = y(t)$ que satisfaça a equação para todos os valores de t[2].

Exemplo 1.1.3. As funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da equação diferencial ordinária

$$y'' - y = 0. \tag{1.8}$$

De fato, tomando $y = y_1(t) = e^t$, temos $y'' = e^t$ e

$$y'' - y = e^t - e^t = 0 \tag{1.9}$$

para todo t. Também, tomando $y = y_2(t) = e^{-t}$, temos $y'' = e^{-t}$ e

$$y'' - y = e^{-t} - e^{-t} = 0, \quad \forall t. \tag{1.10}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Determine a ordem e diga se a seguinte EDO é linear ou autônoma. Justifique suas respostas.

$$t^2 \frac{dy}{dt} + (1 + y^2) \frac{d^2 y}{dt} + y = e^t. \tag{1.11}$$

[2]Em várias situações o domínio de interesse de t é também informado junto com a equação. Veremos isso mais adiante.

Solução.

a) Ordem 2.

   A equação tem ordem 2, pois o termo diferencial de maior ordem é uma derivada de segunda ordem.

b) EDO é não linear.

   A equação tem um termo $y^2\frac{d^2y}{dt}$, o qual não é linear em y.

c) EDO não é autônoma.

   A equação não é autônoma, pois a variável independente t aparece explicitamente. A saber, no primeiro termo do lado esquerdo e no termo fonte da equação.

◊

ER 1.1.2. Determine os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ é solução da equação

$$y'' - y = 0. \tag{1.12}$$

ER 1.1.3. Para que $y = e^{rt}$ seja solução da equação dada, devemos ter

$$\begin{aligned}
y'' - y = 0 &\Rightarrow \left(e^{rt}\right)'' - e^{rt} = 0 && (1.13)\\
&\Rightarrow r^2e^{rt} - e^{rt} = 0 && (1.14)\\
&\Rightarrow (r^2 - 1)\cdot \underbrace{e^{rt}}_{>0} = 0 && (1.15)\\
&\Rightarrow r^2 - 1 = 0 && (1.16)\\
&\Rightarrow r = \pm 1. && (1.17)
\end{aligned}$$

Exercícios

E 1.1.1. Determine quais das seguintes são EDOs. Justifique sua resposta.

a) $y = y''$.

b) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}$.

c) $y \cdot \dfrac{d^5y}{dx^5} = x\ln(y) + \dfrac{d}{dx}e^{x^2}$.

d) $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, sendo α um parâmetro.

E 1.1.2. Determine a ordem das seguintes EDOs. Justifique sua resposta.

a) $t^2y' = e^t$.

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^3y}{dt^3}$.

c) $y \cdot y'' - 3y'' = y - y'$.

d) $\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = e^t$.

E 1.1.3. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 não são autônomas. Justifique sua resposta.

E 1.1.4. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 são lineares. Justifique sua resposta.

E 1.1.5. Para cada equação a seguir, calcule os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ seja solução da equação.

a) $y'' + y' - 6y = 0$.

b) $y''' = 3y''$.

E 1.1.6. Calcule os valores de α para os quais $y = t^\alpha$, $t > 0$, seja solução da equação

$$t^2y'' = 2y. \tag{1.18}$$

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a), c)

E 1.1.2. a) 1; b) 3; c) 2; d) 2.

E 1.1.3. a), d).

E 1.1.4. a), b).

E 1.1.5. a) $\{-3, 2\}$; b) $\{0, 3\}$

E 1.1.6. $\{-1, 2\}$.

Referências Bibliográficas

[1] Howard Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.

[2] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.