Minicurso de C/C++ para Matemática

Pedro H A Konzen

19 de outubro de 2023

Conteúdo

1 Licença

2 Sobre a Linguagem

C e C++ são **linguagens** de programação **compiladas** de propósito geral. A primeira é **estruturada e procedural**, tendo sido crada em 1972 por Dennis Ritchie[1]. A segunda foi inicialmente desenvolvida por Bjarne Stroustrup[2] como uma extensão da primeira. Em sua mais recente especificação, a linguagem C++ se caracteriza por ser **multi-paradigma** (**imperativa**, **orientada a objetos** e **genérica**).

2.1 Instalação e Execução

Códigos C/C++ precisam ser compilados antes de serem executados. De forma simplificada, o **compilador** é um programa que interpreta e converte o código em um programa executável em computador. Há vários compiladores gratuitos disponíveis na web. Ao longo deste minicurso, usaremos a coleção de compiladores GNU GCC instalados em sistema operacional Linux.

2.1.1 IDE

Usar um **ambiente integrado de desenvolvimento** (IDE, em inglês, *integrated development environment*) é a melhor forma de capturar o melhor das linguagens C/C++. Algumas alternativas são:

[1] Dennis Ritchie, 1941-2011, cientista da computação estadunidense. Fonte: Wikipédia.
[2] Bjarne Stroustrup, 1950, cientista da computação dinamarquês. Fonte: Wikipédia.

- Eclipse
- GNU Emacs
- VS Code

2.2 Olá, mundo!

Vamos implementar nosso primeiro programa C/C++. Em geral, são três passos: 1. escrever; 2. compilar; 3. executar.

1. **Escrever o código**.

   Em seu IDE preferido, digite o código:

   Código 1: ola.cc

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5   printf("Olá, mundo!\n");
6   return 0;
7 }
```

2. **Compilar**.

   Para compilá-lo, digite no terminal de seu sistema operacional

```
1 $ gcc ola.cc -o ola.x
```

3. **Executar**.

   Terminada a compilação, o arquivo executável `ola.x` é criado. Para executá-lo, digite

```
1 $ ./ola.x
```

3 Elementos da Linguagem

3.1 Tipos de Dados Básicos

Na linguagem C/C++, **dados** são alocados em **variáveis** com tipos de-

claros[3].

Exemplo 3.1. Consideramos o seguinte código.

Código 2: dados.cc

```
1  /* dados.cc
2     Exemplo de alocação de variáveis.
3  */
4  #include <stdio.h>
5
6  int main()
7  {
8    // var inteira
9    int i = 1;
10   // var pto flutuante
11   double x;
12
13   x = 2.5;
14   char s[6] = "i + x";
15   double y = i + x;
16   printf("%s = %f\n", s, y);
17   return 0;
18 }
```

Na linha 9, é alocada uma **variável do tipo inteira** com **identificador** `i` e **valor** `1`. Na linha 11, é alocada uma **variável do tipo ponto flutuante** (64 *bits*) com identificador `x`.

Na linha 14, é alocada uma **variável do tipo *string***[4]. Na linha 15, alocamos uma nova variável `y`.

Observação 3.1. (Comentários e Continuação de Linha.) Códigos C++ admitem **comentários** e **continuação de linha** como no seguinte exemplo acima. Comentários em linha podem ser feitos com `\\` e de múltiplas linhas com `\* ... */`. Linhas de instruções muito compridas podem ser quebradas em múltiplas linhas com a instrução de continuação de linha `\`.

[3] Consulte Wikipedia: C data type para uma lista dos tipos de dados disponíveis na linguagem

[4] Um arranjo de `char` (caracteres).

Observação 3.2. (Notação científica.) Podemos usar **notação científica** em C++. Por exemplo 5.2×10^{-2} é digitado da seguinte forma `5.2e-2`.

Código 3: notacaoCientifica.cpp

```
1  #include <stdio.h>
2
3  int main()
4  {
5
6    int i = -51;
7    double x = 5.2e-2;
8
9    // inteiro
10   printf("inteiro: %d\n", i);
11   // fixada
12   printf("fixada: %f\n", x);
13   // notação científica
14   printf("científica: %e\n", x);
15   return 0;
16 }
```

Exercício 3.1.1. Antes de implementar, diga qual o valor de `x` após as seguintes instruções.

```
1 int x = 1;
2 int y = x;
3 y = 0;
```

Justifique seu resposta e verifique-a.

Exercício 3.1.2. Implemente um código em que a(o) usuária(o) entra com valores para as variáveis `x` e `y`. Então, os valores das variáveis são permutados entre si. Dica: a entrada de dados por usuária(o) pode ser feita com o método C/C++ scanf da biblioteca stdio.h. Por exemplo,

```
1 double x;
2 scanf("%lf", x);
```

faz a leitura de um `double` (long float) e o armazena na variável `x`.

3.2 Operações Aritméticas Elementares

Os operadores aritméticos elementares são[5]:

`*`, `/`, `%` : multiplicação, divisão, módulo

`+`, `-` : adição, subtração

Exemplo 3.2. Qual é o valor impresso pelo seguinte código?

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5   printf("%f\n", 2+17%9/2*2-1 );
6   return 0;
7 }
```

Observamos que as operações `*`, `/` e `%` têm precedência maior que as operações `+` e `-`. Operações de mesma precedência seguem a ordem da esquerda para direita, conforme escritas na linha de comando. Usa-se parênteses para alterar a precedência entre as operações, por exemplo

```
1 printf("%f\n", (2+17)%9/2*2-1 );
```

imprime o resultado `-1`. Sim, pois a divisão inteira está sendo usada. Para computar a divisão em ponto flutuante, um dos operandos deve ser `double`. Para tanto, podemos fazer um ***casting*** `double((2+17)\%9)/2*2-1` ou, simplesmente, `(2+17)\%9/2.*2-1`.

Observação 3.3. (Precedência das Operações.) Consulte mais informações sobre a precedência de operadores em Wikipedia:Operators in C and C++.

Exercício 3.2.1. Escreva um programa para computar o vértice da parábola

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

para $a = 2$, $b = -2$ e $c = 4$.

O operador `%` módulo computa o **resto** da divisão inteira, por exemplo, `5\%2` é igual a `1`.

[5] Em ordem de precedência.

Exercício 3.2.2. Use C/C++ para computar os inteiros não negativos q e r tais que

$$25 = q \cdot 3 + r, \tag{2}$$

sendo r o menor possível.

3.3 Funções e Constantes Elementares

A **biblioteca** C/C++ math.h disponibiliza várias funções e constantes elementares.

Código 4: mat.cc

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <math.h>
3
4  int main()
5  {
6    printf("pi = %.9e\n", M_PI);
7    printf("2^(1/2) = %.5f\n", sqrt(2.));
8    printf("log(e) = %f\n", log(M_E));
9    return 0;
10 }
```

Observação 3.4. (Logaritmo Natural.) Notamos que `log` é a função logaritmo natural, i.e. $\ln(x) = \log_e(x)$. A implementação C/C++ para o logaritmo de base 10 é `log10(x)`.

Exercício 3.3.1. Compute

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\log_3(\pi)$

c) $e^{\log_2(\pi)}$

d) $\sqrt[3]{-27}$

Exercício 3.3.2. Compute as raízes do seguinte polinômio quadrático

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 \tag{3}$$

usando a fórmula de Bhaskara[6].

3.4 Operadores de Comparação Elementares

Os operadores de comparação elementares são

`==` : igual a

`!=` : diferente de

`>` : maior que

`<` : menor que

`>=` : maior ou igual que

`<=` : menor ou igual que

Estes operadores retornam os **valores lógicos** `true` (verdadeiro, `1`) ou `false` (falso, `0`).

Por exemplo, temos

Código 5: opComp.cc

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5   int x = 2;
6   bool res = x + x == 5;
7   printf("2 + 2 == 5? %d", res);
8 }
```

Exercício 3.4.1. Considere a circunferência de equação

$$c: \ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1. \tag{4}$$

Escreva um código em que a(o) usuária(o) entra com as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ e o código verifica se P pertence ao disco determinado por c.

Exercício 3.4.2. Antes de implementar, diga qual é o valor lógico da instrução `sqrt(3) == 3`. Justifique sua resposta e verifique!

[6] Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático e astrônomo indiano. Fonte: Wikipédia.

3.5 Operadores Lógicos Elementares

Os operadores lógicos elementares são:

`&&` : `e` lógico

`||` : `ou` lógico

`!` : não lógico

Exemplo 3.3. (Tabela Booleana do `&&`.) A tabela booleana[7] do `e` lógico é

A	B	A && B
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

O seguinte código, monta essa tabela booleana, verifique!

```
1  #include <stdio.h>
2
3  int main()
4  {
5    bool T = true;
6    bool F = false;
7    printf("A    | B    | A && B\n");
8    printf("%d    | %d    | %d\n", T, T, T&&T);
9    printf("%d    | %d    | %d\n", T, F, T&&F);
10   printf("%d    | %d    | %d\n", F, T, F&&T);
11   printf("%d    | %d    | %d\n", F, F, F&&F);
12 }
```

Exercício 3.5.1. Construa as tabelas booleanas do operador `||` e do `!`.

Exercício 3.5.2. Escreva um código para verificar as seguintes comparações

a) $1.4 <= \sqrt{2} < 1.5$.

b) $|x| < 1$, $x = \text{sen}(\pi/3)$.

c) $|x| > \frac{1}{2}$, $x = \cos(\pi * *2)$.

[7] George Boole, 1815 - 1864, matemático britânico. Fonte: Wikipédia.

Exercício 3.5.3. Considere um retângulo $r:\ ABDC$ de vértices $A = (1, 1)$ e $D = (2, 3)$. Crie um código em que a(o) usuária(o) informa as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ e o código verifica cada um dos seguintes itens:

1. $P \in r$.
2. $P \in \partial r$.
3. $P \notin \overline{r}$.

Exercício 3.5.4. Implemente uma instrução para computar o operador `xor` (ou exclusivo). Dadas duas afirmações `A` e `B`, `A xor B` é `true` no caso de uma, e somente uma, das afirmações ser `true`, caso contrário é `false`.

3.6 Arranjos

Um **arranjo**[8] é uma sequência de dados do mesmo tipo. Os elementos dos arranjos são indexados[9] e mutáveis (podemos ser alterados por nova atribuição).

Exemplo 3.4. No código abaixo, alocamos o ponto $P = (2, 3)$ e o vetor $\boldsymbol{v} = (2.5, \pi, -1.)$ como arranjos.

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <math.h>
3
4  int main()
5  {
6    // P = (2, 3)
7    int P[2] = {2, 3};
8    printf("P = (%d, %d)\n", P[0], P[1]);
9
10   double v[3];
11   v[0] = 2.5;
12   v[1] = M_PI;
13   v[2] = -1.;
14   printf("v = (%lf, %lf, %lf)\n", v[0], v[1], v[2]);
15
16   return 0;
17 }
```

[8] Em inglês, *array*

[9] O índice é um inteiro não negativo, sendo o primeiro elemento indexado por 0 (zero).

Exercício 3.6.1. Escreva um código em que a(o) usuária(o) entra com um ponto $P = (x, y)$ e o programa informe se P pertence ao disco determinado pela circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Use de um arranjo para alocar o ponto P.

Exercício 3.6.2. Considere os vetores

$$\boldsymbol{v} = (-1., 2., 1.) \tag{5}$$
$$\boldsymbol{w} = (1., -3., 2.). \tag{6}$$

Faça um código que aloca os vetores como arranjos e imprime o vetor soma $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

Exercício 3.6.3. Considere a matriz

$$A = \begin{vmatrix} 1. & -2. \\ 3. & 3. \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Faça um código que aloca a matriz como um arranjo bidimensional (um arranjo de arranjos) e compute seu determinante.

4 Elementos da Programação Estruturada

C/C++ são linguagens procedurais[10] e contém instruções para a **programação estruturada**. Neste paradigma de programação, as computações são organizadas em sequências de blocos computacionais e, um bloco inicia sua computação somente após o bloco anterior tiver terminado. Contam com estruturas de **ramificação** (seleção de blocos), **repetição** de blocos e definição de **funções/métodos** (sub-blocos computacionais).

4.1 Métodos/Funções

Um **método** (ou **função**) é um subprograma (ou subbloco computacional) que pode ser chamado/executado em qualquer parte do programa principal. Todo código C/C++ inicia-se no método `main()`, consulte o Código . A sintaxe de definição de um método é

[10] C++ também é orientada-a-objetos.

```
typeOut foo(typeIn0 x0, typeIn1 x1, ..., typeInN x2)
{
  typeOut out;
  statment0;
  statment1;
  ...;
  statmentN;
  return out;
}
```

Aqui, `typeOut` denota o tipo da saída, `foo` denota o identificador/nome do método, `typeIn0 x1`, `typeIn1 x2`, ..., `typeInN x3` são os tipos e identificadores dos parâmetros de entrada[11]. O escopo do método é delimitado entre chaves e pode conter qualquer instrução (*statment*) C/C++. O método é encerrado[12] quando terminado seu escopo ou ao encontrar a instrução `return`. Esta instrução,também, permite o retorno de um dado do mesmo tipo da saída do método.

Exemplo 4.1. Vamos considerar a função

$$f(x) = 2x - 3. \tag{8}$$

a) No código abaixo, o método f computa a função e imprime seu valor[13].

Código 6: method.cc

```
#include <stdio.h>

void f(double x)
{
  double y = 2.*x - 3.;
  printf("f(%lf) = %lf\n", x, y);
}

int main()
{
  f(0.);
  double x = -1.;
```

[11] Parâmetros de entrada são opcionais

[12] No encerramento do método o código retorna ao programa principal.

[13] `void` é a instrução para "no type".

```
13    f(x);
14    double y = 2.;
15    f(y);
16    return 0;
17  }
```

b) Nesta versão do código, o método `f` retorna o valor computado da função f e é o método principal `main` que imprime o resultado.

```
1  #include <stdio.h>
2
3  double f(double x)
4  {
5    return 2.*x - 3.;
6  }
7
8  int main()
9  {
10   double y = f(0.);
11   printf("f(%lf) = %lf\n", 0., y);
12   printf("f(%lf) = %lf\n", -1., f(-1.));
13   double z = 2.;
14   printf("f(%lf) = %lf\n", z, f(z));
15   return 0;
16 }
```

Exercício 4.1.1. Implemente uma função para computar as raízes de um polinômio de grau 1 $p(x) = ax + b$. Assuma que $a \neq 0$.

Exercício 4.1.2. Implemente uma função para computar as raízes reais de um polinômio de grau 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$. Assuma que p tenha raízes reais.

Exercício 4.1.3. Considerando vetores em $\mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \tag{9}$$
$$y = (y_1, y_2, y_3), \tag{10}$$

implemente um código que contenha:

a) função para computação do vetor soma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

b) função para computação do produto escalar $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Exercício 4.1.4. Implemente uma função que computa o determinante de matrizes reais 2×2.

Exercício 4.1.5. Implemente uma função que computa a multiplicação matrix-vetor Ax, com A 2×2 e x um vetor coluna de dois elementos.

Exercício 4.1.6. (Recursividade) Implemente uma função recursiva para computar o fatorial de um número natural n, i.e. $n!$.

4.2 Ramificação

Uma estrutura de ramificação é uma instrução para a tomada de decisões durante a execução de um programa. Nas linguagens C/C++ usa-se a sintaxe

```
1 if (condition0) {
2   block0;
3 } else if (condition1) {
4   block1;
5 } else {
6   block2;
7 }
```

A instrução `if` permite a execução do bloco computacional `block0` somente no caso de a `condition0` seja `true` (verdadeira). A instrução `else if` somente é verificada quando `condition0 == false`. Neste caso, o `block1` é executado somente se `condition1 == true`. Senão, `block2` é executado.

Exemplo 4.2. Os seguintes códigos computam os zeros da função

$$f(x) = ax + b, \tag{11}$$

para parâmetros informados por usuária(o).

a) Caso restrito a raiz real única.

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5   double a,b;
6   printf("a = ");
```

```
7    scanf("%lf", &a);
8    printf("b = ");
9    scanf("%lf", &b);
10
11   if (a != 0.) {
12     double x = -b/a;
13     printf("x = %lf\n", x);
14   }
15
16   return 0;
17 }
```

b) Caso de raiz real única ou múltiplas.

```
1  #include <stdio.h>
2
3  int main()
4  {
5    double a,b;
6    printf("a = ");
7    scanf("%lf", &a);
8    printf("b = ");
9    scanf("%lf", &b);
10
11   if (a != 0.) {
12     double x = -b/a;
13     printf("x = %lf\n", x);
14   } else if ((a == 0.) && (b == 0.)) {
15     printf("Todo x real é zero da função.\n");
16   }
17
18   return 0;
19 }
```

c) Caso de raiz real única, ou múltiplas ou nenhuma.

```
1  #include <stdio.h>
2
3  int main()
4  {
5    double a,b;
```

```
6     printf("a = ");
7     scanf("%lf", &a);
8     printf("b = ");
9     scanf("%lf", &b);
10
11    if (a != 0.) {
12      double x = -b/a;
13      printf("x = %lf\n", x);
14    }
15
16    return 0;
17  }
```

Exercício 4.2.1. Implemente um código que contenha uma função que recebe dois números n e m e imprime o maior deles.

Exercício 4.2.2. Implemente um código que contenha uma função que recebe os coeficientes de um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \tag{12}$$

e classifique-o como um polinômio de grau 0, 1 ou 2.

Exercício 4.2.3. Implemente um código que contenha uma função para a computação das raízes de um polinômio de segundo grau.

4.3 Repetição

Estruturas de repetição são instruções que permitem a execução repetida de um bloco computacional. São três instruções disponíveis `while`, `do ... while` e `for`.

4.3.1 `while`

A sintaxe da instrução `while` é

```
1 while (condition) {
2    block
3 }
```

Isto é, enquanto (`while`) a expressão `condition == true`, o bloco computacional `block` é repetidamente executado. Ao final de cada execução, a condição

é novamente verificada. Quando `condition == false`, `block` não é executado e o código segue para a primeira instrução após o escopo do `while`.

Exemplo 4.3. O seguinte código computa a soma dos 10 primeiros termos da progressão geométrica

$$a_i = 2^{-i}, \tag{13}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Código 7: while.cc

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <math.h>
3
4  int main()
5  {
6    int i = 0;
7    double s = 0.;
8    while (i < 10) {
9      s = s + pow(0.5, double(i));
10     i += 1;
11   }
12   printf("s = %lf\n", s);
13   return 0;
14 }
```

Observação 4.1. As instruções de controle `break`, `continue` são bastante úteis em várias situações. A primeira, encerra as repetições e, a segunda, pula para uma nova repetição.

Exercício 4.3.1. Use `while` para imprimir os dez primeiros números ímpares.

Exercício 4.3.2. Crie uma função para a computação da soma de dois vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, com dado $n \geq 0$.

4.4 do ... while

Diferentemente da instrução `while`, a `do ... while` verifica a condição de repetição ao final do escopo do seu bloco computacional.

Exemplo 4.4. O seguinte código computa a soma dos 10 primeiros termos da progressão geométrica

$$a_i = 2^{-i}, \tag{14}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Código 8: doWhile.cc

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <math.h>
3
4  int main()
5  {
6    int i = 0;
7    double s;
8    do {
9      s += pow(0.5, double(i));
10     i += 1;
11   } while (i < 10);
12   printf("s = %lf\n", s);
13   return 0;
14 }
```

Exercício 4.4.1. Uma aplicação do Método Babilônico[14] para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \tag{15}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

Faça um código com `while` para computar aproximação x_i, tal que $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$.

4.4.1 for

A estrutura `for` tem a sintaxe

```
1 for i in iteravel:
2     escopo
```

[14] Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: Wikipédia.

onde, `iteravel` pode ser qualquer objeto de uma classe iterável (conjunto, n-upla, lista, dicionário, *string*). Os comandos dentro do escopo (determinado pela indentação) são repetidos para cada iterada `i`. Por exemplo,

```
>>> for i in [0,1,2]:
...     print(i)
...
0
1
2
```

4.4.2 range

A função Python `range([start,]stop[,sep])` é particularmente útil na construção de instruções `for`. Ela cria um objeto de classe iterável de `start` (incluído) a `stop` (excluído), de elementos igualmente separados por `sep`. Por padrão, `start=0`, `sep=1` caso omitidos. Por exemplo,

```
>>> for i in range(1,6,2):
...     print(i)
...
1
3
5
```

ou

```
>>> for i in range(3):
...     print(i)
...
0
1
2
```

Exercício 4.4.2. Escreva uma função que retorne o n-ésimo termo da função de Fibonacci[15], $n \geq 1$.

Exercício 4.4.3. Implemente uma função para computar o produto escalar de dois vetores de n elementos. Assuma que os vetores estão alocados em listas.

[15] Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: Wikipédia.

Exercício 4.4.4. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times n$ por um vetor coluna x de n elementos. Assuma que o vetor está alocada como uma lista e a matriz como uma lista de listas por linhas.

Exercício 4.4.5. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times m$ por uma matriz B de $m \times n$. Assuma que as matrizes estão alocadas como listas de listas por linhas de cada matriz.

5 Elementos da computação matricial

Nesta seção, vamos explorar a NumPy (Numerical Python), biblioteca para tratamento numérico de dados. Ela é extensivamente utilizada nos mais diversos campos da ciência e da engenharia. Aqui, vamos nos restringir a introduzir algumas de suas ferramentas para a computação matricial.

Usualmente, a biblioteca é importada como segue

```
1 >>> import numpy as np
```

Referências