

Cálculo I

Pedro H A Konzen

27 de julho de 2022

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

| | |
|--|----------|
| Capa | i |
| Licença | ii |
| Prefácio | iii |
| Sumário | vii |
| 1 Fundamentos sobre funções | 1 |
| 1.1 Definição e gráfico de funções | 1 |
| 1.2 Função afim | 1 |
| 1.3 Função potência | 2 |
| 1.4 Função polinomial | 2 |
| 1.5 Função racional | 2 |
| 1.6 Funções trigonométricas | 2 |
| 1.7 Operações com funções | 2 |
| 1.8 Propriedades de funções | 3 |
| 1.9 Funções exponenciais | 3 |
| 1.10 Funções logarítmicas | 3 |
| 2 Limites | 4 |
| 2.1 Noção de limites | 4 |
| 2.1.1 Limites da função constante e da função identidade . . | 7 |
| 2.2 Regras para o cálculo de limites | 13 |
| 2.2.1 Regras de cálculo | 13 |
| 2.2.2 Indeterminação 0/0 | 17 |
| 2.3 Limites laterais | 24 |
| 2.4 Limite no infinito | 33 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.4.1 | Assíntotas horizontais | 38 |
| 2.4.2 | Limite no infinito de função periódica | 40 |
| 2.5 | Limites infinitos | 45 |
| 2.5.1 | Assíntotas verticais | 50 |
| 2.5.2 | Assíntotas oblíquas | 53 |
| 2.5.3 | Limites infinitos no infinito | 55 |
| 2.6 | Continuidade | 60 |
| 2.6.1 | Propriedades de funções contínuas | 62 |
| 2.7 | Limites e desigualdades | 68 |
| 2.7.1 | Limites de funções limitadas | 69 |
| 2.7.2 | Teorema do confronto | 69 |
| 2.7.3 | Limites envolvendo $(\sin x)/x$ | 72 |
| 2.8 | Exercícios finais | 76 |
| 3 | Derivadas | 77 |
| 3.1 | Derivada no ponto | 77 |
| 3.1.1 | Reta secante e reta tangente | 77 |
| 3.1.2 | Taxa de variação | 81 |
| 3.1.3 | Derivada em um ponto | 83 |
| 3.2 | Função derivada | 88 |
| 3.2.1 | Continuidade de uma função derivável | 93 |
| 3.2.2 | Derivadas de ordens mais altas | 94 |
| 3.3 | Regras básicas de derivação | 99 |
| 3.3.1 | Derivadas de função constante e função potência | 99 |
| 3.3.2 | Derivada de função exponencial | 101 |
| 3.3.3 | Regras da multiplicação por constante e da soma | 103 |
| 3.3.4 | Regras do produto e do quociente | 105 |
| 3.3.5 | Tabela de derivadas | 109 |
| 3.4 | Derivadas de funções trigonométricas | 113 |
| 3.4.1 | Tabela de derivadas | 117 |
| 3.5 | Regra da cadeia | 120 |
| 3.5.1 | Tabela de derivadas | 123 |
| 3.6 | Diferenciabilidade da função inversa | 126 |
| 3.6.1 | Derivadas de funções trigonométricas inversas | 130 |
| 3.6.2 | Tabela de derivadas | 132 |
| 3.7 | Derivação implícita | 135 |
| 4 | Aplicações da derivada | 142 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.1 | Regra de L'Hôpital | 142 |
| 4.2 | Extremos de funções | 147 |
| 4.3 | Teorema do valor médio | 156 |
| 4.3.1 | Teorema de Rolle | 156 |
| 4.3.2 | Teorema do valor médio | 160 |
| 4.4 | Teste da primeira derivada | 165 |
| 4.5 | Concavidade e o Teste da segunda derivada | 170 |
| 4.5.1 | Teste da segunda derivada | 172 |
| 5 | Integração | 177 |
| 5.1 | Noção de integral | 177 |
| 5.1.1 | Soma de Riemann | 177 |
| 5.1.2 | Integral | 179 |
| 5.2 | Propriedades de integração | 182 |
| 5.2.1 | Teorema do valor médio | 183 |
| 5.2.2 | Teorema fundamental do cálculo, parte I | 184 |
| 5.2.3 | Integral indefinida | 186 |
| 5.2.4 | Teorema fundamental do cálculo, parte II | 187 |
| 5.3 | Regras básicas de integração | 191 |
| 5.3.1 | Integral de função potência | 191 |
| 5.3.2 | Regras da multiplicação por constante e da soma | 192 |
| 5.3.3 | Integral de $1/x$ | 194 |
| 5.3.4 | Integral da função exponencial natural | 195 |
| 5.3.5 | Integrais de funções trigonométricas | 195 |
| 5.3.6 | Tabela de integrais | 196 |
| 5.3.7 | Exercícios | 198 |
| 5.4 | Integração por substituição | 198 |
| 5.4.1 | Integral de função exponencial | 200 |
| 5.4.2 | Integral de funções trigonométricas | 202 |
| 5.4.3 | Integrais definidas | 205 |
| 5.4.4 | Tabela de integrais | 207 |
| 5.5 | Integração por partes | 213 |
| 5.5.1 | A integral do logaritmo natural | 214 |
| 5.5.2 | Integral definida | 217 |
| 5.5.3 | Tabela de integrais | 218 |
| 5.6 | Integração por frações parciais | 221 |
| 5.7 | Integração por substituição trigonométrica | 222 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6 | Aplicações da integral | 223 |
| 6.1 | Cálculo de áreas | 223 |
| 6.1.1 | Áreas entre curvas | 224 |
| 6.2 | Volumes por fatiamento e rotação | 229 |
| 6.3 | Problema de valor inicial | 229 |
| | Respostas dos Exercícios | 231 |
| | Referências Bibliográficas | 241 |

Capítulo 1

Fundamentos sobre funções

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

<https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/main.html>

1.1 Definição e gráfico de funções

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_defgrafico.html

1.2 Função afim

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funafim.html

1.3 Função potência

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funpot.html

1.4 Função polinomial

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funpoli.html

1.5 Função racional

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funracio.html

1.6 Funções trigonométricas

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funtri.html

1.7 Operações com funções

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).
Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_opfun.html

1.8 Propriedades de funções

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funprop.html

1.9 Funções exponenciais

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funexp.html

1.10 Funções logarítmicas

Aviso! Este conteúdo foi movido para as [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

Acesse em

https://phkonzen.github.io/notas/PreCalculo/cap_funcao_sec_funlog.html

Capítulo 2

Limites

2.1 Noção de limites

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto x_0 , exceto talvez em x_0 . Quando o valor de $f(x)$ é **arbitrariamente próximo** de um número L para x **suficientemente próximo** de x_0 , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \tag{2.1}$$

e dizemos que o **limite da função f é L quando x tende a x_0** . Veja a Figura [2.1](#).

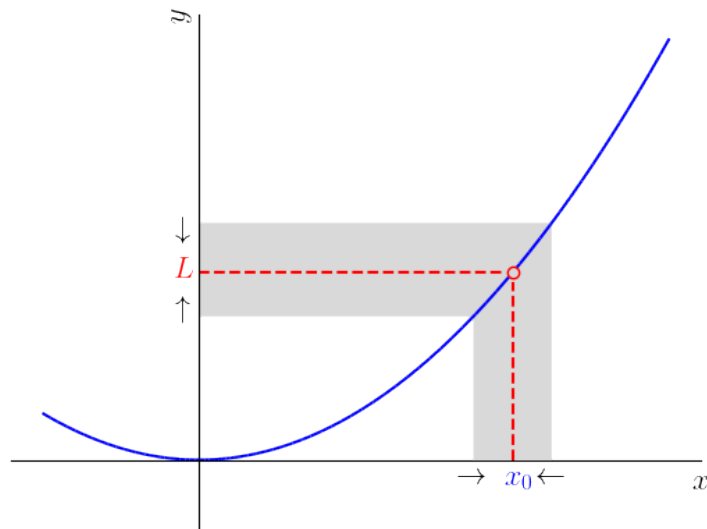


Figura 2.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

Exemplo 2.1.1. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (2.2)$$

Na Figura 2.2, temos um esboço do gráfico desta função.

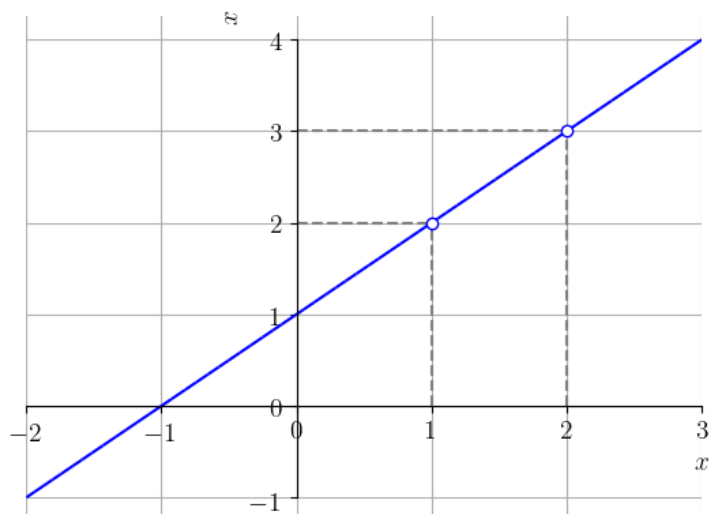


Figura 2.2: Esboço do gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 2.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$.

| | | | | | | | |
|--------|-------|--------|---------|----------------------------|--------|-------|------|
| x | -0,01 | -0,001 | -0,0001 | $\rightarrow 0 \leftarrow$ | 0,0001 | 0,001 | 0,01 |
| $f(x)$ | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | $\rightarrow 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol('x')
3      ...: f = Lambda(x, (x**2-1)*(x-2)/ \
4      ...:                ((x-1)*(x-2)))
5      ...: limit(f(x), x, 0)
6      Out: 1

```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

| | | | | | | | |
|--------|-----|------|-------|----------------------------|--------|-------|------|
| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | $\rightarrow 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |
| $f(x)$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | $\rightarrow 2 \leftarrow$ | 2,0001 | 2,001 | 2,01 |

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (2.3)$$

seja qual for a constante k . Veja a Figura 2.3.

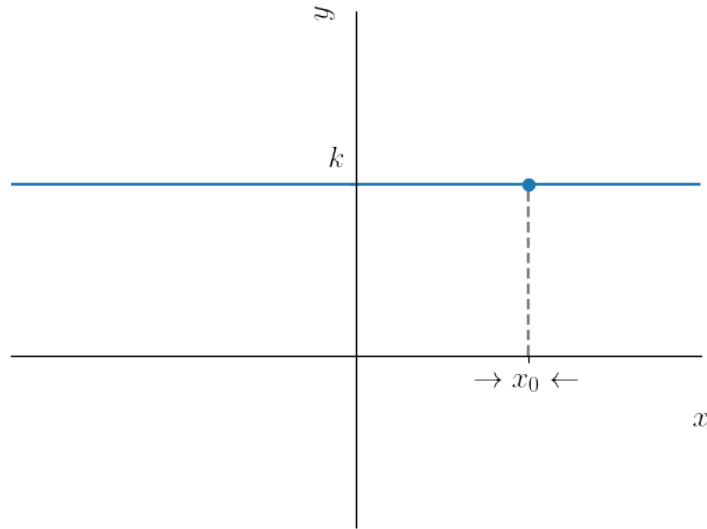


Figura 2.3: Esboço do gráfico de uma função constante $f(x) = k$.

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$ No [Python](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol("x")
3      ...: limit(1, x, -1)
4      ...:
5      Out: 1
```

b) $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sqrt{2} - e) = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (2.4)$$

seja qual for o ponto x_0 . Vejamos a Figura 2.4.

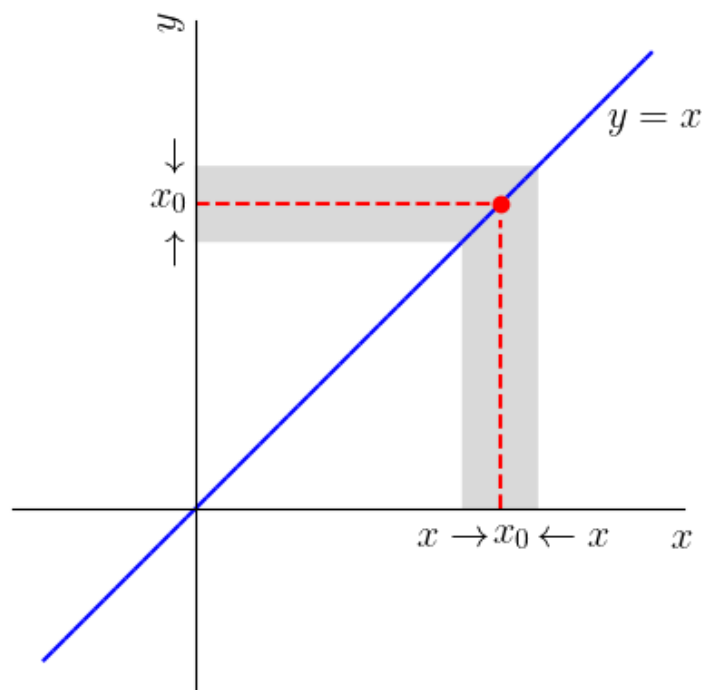


Figura 2.4: Noção de limite para a função identidade $f(x) = x$.

Exemplo 2.1.3. Vejamos os seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ Com o [Python](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol("x")
3      ...: limit(x, x, -1)
4      ...:
5      Out: -1
```

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 2.1.1. Estime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x. \quad (2.5)$$

Solução. Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto x_0 , computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

| | | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------------------------------|--------|-------|-------|
| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | $\rightarrow 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |
| $f(x)$ | 2,460 | 2,691 | 2,716 | $\rightarrow 2,72 \leftarrow$ | 2,719 | 2,721 | 2,746 |

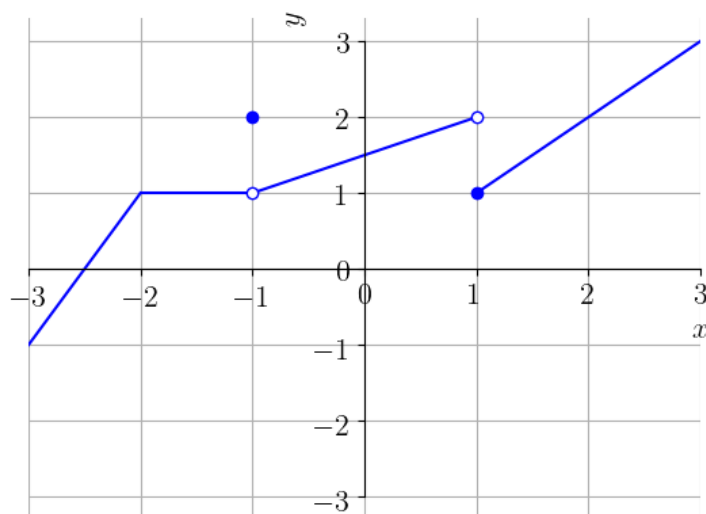
Com isso, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x \approx 2,72. \quad (2.6)$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \approx 2,718281828459045\dots$ Verifique usando [Python](#)+[SymPy](#)!

◇

ER 2.1.2. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de -2 e a direita de -2 (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de x a esquerda de -2 (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos x suficientemente próximo de -2 . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1. \quad (2.7)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhermos valores de x sufi-

cientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1. \quad (2.8)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Aqui, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda ($x < 1$), vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita ($x > 1$), temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos x suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois L dependerá de x estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluimos que este limite não existe, e escrevemos

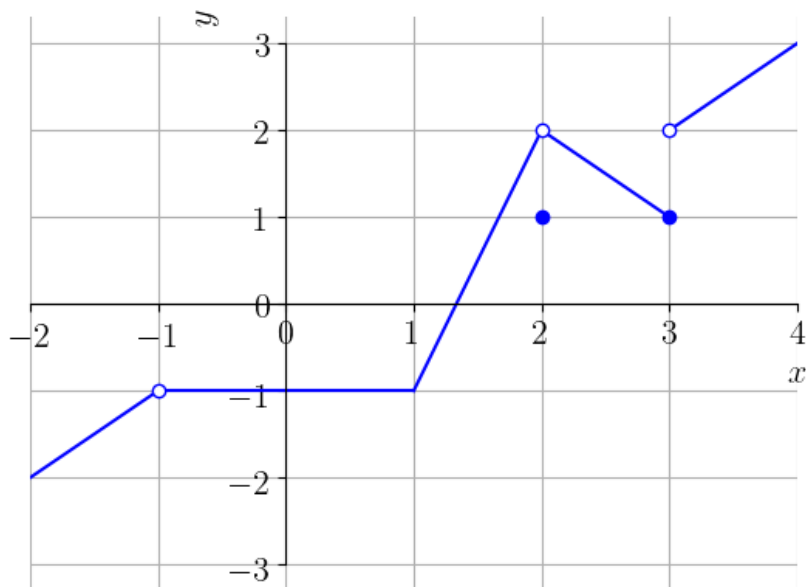
$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.9)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 2.1.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço



de gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Exercício 2.1.2. Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício 2.1.1), forneça

- 1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$
- 2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

Exercício 2.1.3. Forneça o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} 2$

- b) $\lim_{x \rightarrow -2} 2$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} -3$
- d) $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

Exercício 2.1.4. Forneça o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} x$
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} x$
- c) $\lim_{x \rightarrow -3} x$
- d) $\lim_{x \rightarrow e} x$

2.2 Regras para o cálculo de limites

2.2.1 Regras de cálculo

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad (2.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \quad (2.11)$$

com x_0, L_1, L_2 números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (2.12)$$

$$= k \cdot L_1, \quad (2.13)$$

para qualquer número real k .

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (2.14)$$

$$= L_1 \pm L_2 \quad (2.15)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (2.16)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (2.17)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (2.18)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0 \quad (2.19)$$

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^s \quad (2.20)$$

$$= L_1^s, \quad L_1^s \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

Exemplo 2.2.1. Consideremos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (2.22)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (2.23)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(2*x, x, -1)
```

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.24)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 1 \quad (2.25)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (2.26)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(x**2-1,x,2)

```

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1-x^2} \quad (2.27)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)^2} \quad (2.28)$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \quad (2.29)$$

$$= 1. \quad (2.30)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(sqrt(1-x**2),x,0)

```

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2-1) \cdot (x-2)]}{\lim_{x \rightarrow 0} [(x-1) \cdot (x-2)]} \quad (2.31)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)} \quad (2.32)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (2.33)$$

Proposição 2.2.1. (Limites de polinômios) Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (2.34)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) \quad (2.35)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (2.36)$$

para qualquer dado número real b .

Demonstração. Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação.

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (2.37)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (2.38)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x \right)^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (2.39)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \quad (2.40)$$

□

Exemplo 2.2.2.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \quad (2.41)$$

$$= 4 + \sqrt{2}. \quad (2.42)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

Proposição 2.2.2. (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ uma função racional e b um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.43)$$

Demonstração. Segue da regra do **limite do quociente** e da Proposição [2.2.1](#).

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (2.44)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.45)$$

□

Exemplo 2.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} \quad (2.46)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (2.47)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar este limite com os comandos.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
```

2.2.2 Indeterminação 0/0

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Quando $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(a) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.48)$$

é uma **indeterminação do tipo 0/0**. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x - a)$.

Exemplo 2.2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)\cancel{(x - 2)}}{(x - 1)\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (2.49)$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3. \quad (2.50)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar o limite acima com os seguintes comandos.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

Exemplo 2.2.5. No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (2.51)$$

temos que o denominador $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2 + x - 2$. Assim sendo, $(x - 1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo, calculamos

$$\frac{p(x)}{x - 1} = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x - 1} \quad (2.52)$$

$$= x^2 - 2x - 3 \quad (2.53)$$

e

$$\frac{q(x)}{x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad (2.54)$$

$$= x + 2. \quad (2.55)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar estas divisões com os seguintes comandos.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
4 simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad (2.56)$$

e

$$q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (2.57)$$

Com isso, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (2.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (2.59)$$

Use [Python+SymPy](#) para computar este limite!

Exemplo 2.2.6. No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (2.60)$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$ envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (2.61)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.62)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.63)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.64)$$

Verifique computando com o [Python](#)+[SymPy](#).

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 2.2.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.65)$$

Solução. Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - x^2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}} \quad (2.66)$$

$$= \frac{-1 - (-1)^2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3}} \quad (2.67)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \quad (2.68)$$

$$= -1. \quad (2.69)$$

◇

ER 2.2.2. Assumindo que o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (2.70)$$

forneça o valor de L .

Solução. Das propriedades de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1 \quad (2.71)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 2} = 1 \quad (2.72)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{2 + 2} = 1 \quad (2.73)$$

$$\frac{L - 2}{4} = 1 \quad (2.74)$$

$$L - 2 = 4 \quad (2.75)$$

$$L = 6. \quad (2.76)$$

◇

ER 2.2.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.77)$$

Solução. Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - \sqrt{x^2 + 3} = 0. \quad (2.78)$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0, \quad (2.79)$$

concluimos se tratar de uma indeterminação $0/0$. Por racionalização, obte-

mos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}} \quad (2.80)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \quad (2.81)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \quad (2.82)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \quad (2.83)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \quad (2.84)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (2.85)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 2.2.1. Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad (2.86)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 2 \cdot f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \pi \cdot f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x).$

Exercício 2.2.2. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \quad (2.87)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{2}, \quad (2.88)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2g(x)$

Exercício 2.2.3. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad (2.89)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2, \quad (2.90)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$

Exercício 2.2.4. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \quad (2.91)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \quad (2.92)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

Exercício 2.2.5. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad (2.93)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4, \quad (2.94)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

Exercício 2.2.6. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} -3x$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

Exercício 2.2.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Exercício 2.2.8. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Exercício 2.2.9. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x-6}. \quad (2.95)$$

2.3 Limites laterais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Seja dada uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (a, x_0) . O **limite lateral à esquerda** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (2.96)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (2.97)$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L , para todo $x < x_0$ suficientemente próximo de x_0 . Veja a Figura 2.5.

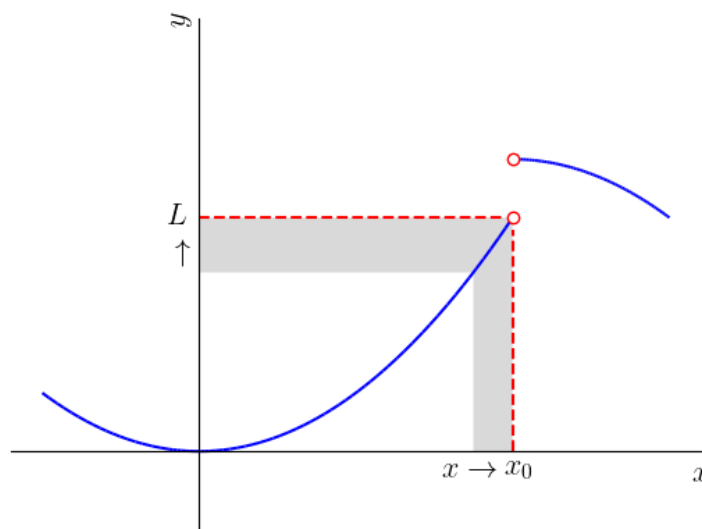


Figura 2.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (x_0, b) , o **limite lateral à direita** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (2.98)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad (2.99)$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L , para todo $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0 . Veja a Figura 2.6.

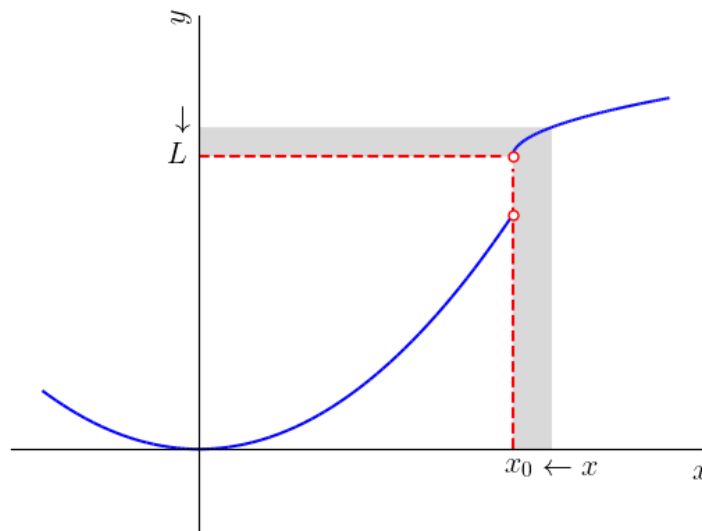


Figura 2.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

Observação 2.3.1. Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k = k \quad (2.100)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} x = x_0, \quad (2.101)$$

onde x_0 e k são quaisquer dados números reais.

Exercício 2.3.1. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (2.102)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \quad (2.104)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (2.105)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (2.106)$$

Verifique!

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos.

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(abs(x), x, 0, '-')
4      limit(abs(x), x, 0, '+')
```

Teorema 2.3.1. *Existe o limite de uma dada função f no ponto $x = x_0$ e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (2.107)$$

se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto $x = x_0$.

Exercício 2.3.2. No exemplo anterior (Exemplo [2.3.1](#)), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (2.108)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema [2.3.1](#)), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (2.109)$$

Exercício 2.3.3. Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (2.110)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (2.111)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (2.112)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (2.113)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (2.114)$$

Como os **limites laterais** à esquerda e à direita **são diferentes**, concluímos que **não existe o limite** de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.

Com o [Python+SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(abs(x)/x,x,0)
```

fornece o valor 1 como saída.

Observação 2.3.2. As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad (2.115)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_2, \quad (2.116)$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = kL_1, \quad (2.117)$$

para qualquer número real k .

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (2.118)$$

$$= L_1 \pm L_2 \quad (2.119)$$

- regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (2.120)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (2.121)$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)} \quad (2.122)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.123)$$

desde que $L_2 \neq 0$.

- regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \right)^s \quad (2.124)$$

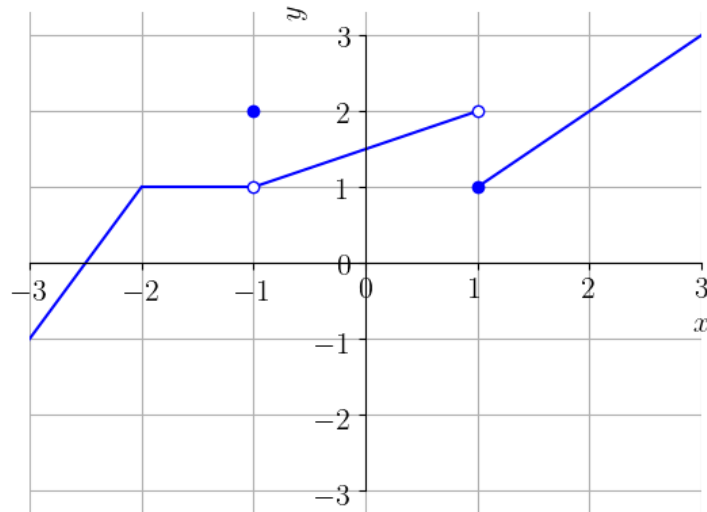
$$= L_1^s, \quad (2.125)$$

se, adicionalmente, L_1^s é um número real.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 2.3.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

- a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

- a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de -2 , podemos observar que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1. Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1. \quad (2.126)$$

- b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$

e suficientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad (2.127)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2. \quad (2.128)$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando x tende a 1 pela esquerda.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.129)$$

Aqui, $f(x) \rightarrow f(1) = 1$ quando $x \rightarrow 1^+$.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.130)$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.131)$$

◇

ER 2.3.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \quad (2.132)$$

Solução. A função f tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1)^2 - 1 \quad (2.133)$$

$$= (-1 + 1)^2 - 1 = -1, \quad (2.134)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \quad (2.135)$$

$$= -1. \quad (2.136)$$

Como ambos os limites laterais são iguais a -1 , concluímos que

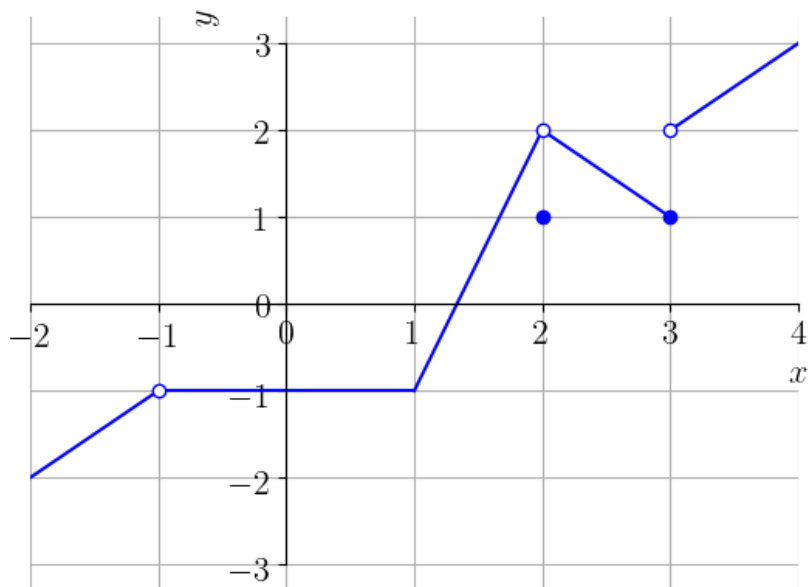
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \quad (2.137)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 2.3.4. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Exercício 2.3.5. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \quad (2.138)$$

calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Exercício 2.3.6. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x + 1 & , x > 1, \end{cases} \quad (2.139)$$

calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Exercício 2.3.7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2|x|}. \quad (2.140)$$

Exercício 2.3.8. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.141)$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

2.4 Limite no infinito

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow \infty$. Dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente pequenos**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (2.142)$$

Veja a Figura 2.7.

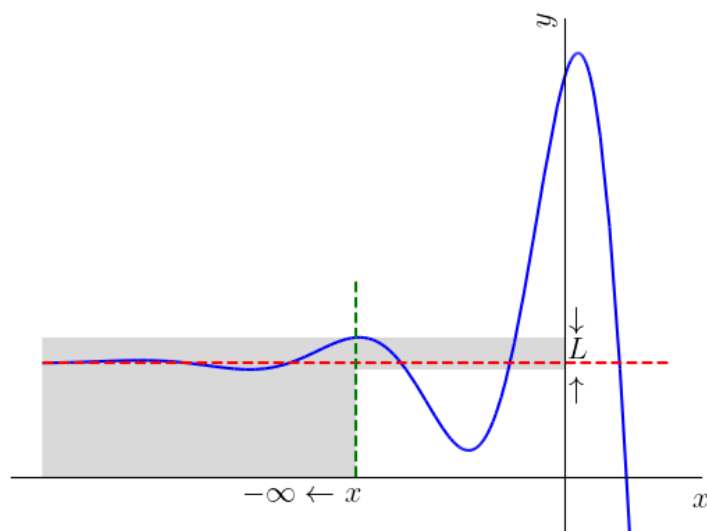


Figura 2.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende ∞ , se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente grandes**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.143)$$

Veja a Figura 2.8.

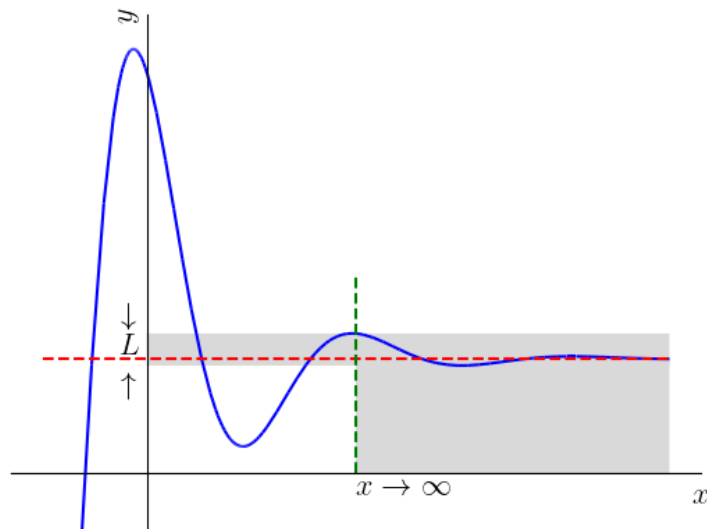


Figura 2.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow \infty$.

Exemplo 2.4.1. Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$. A Figura 2.9 é um esboço do gráfico desta função.

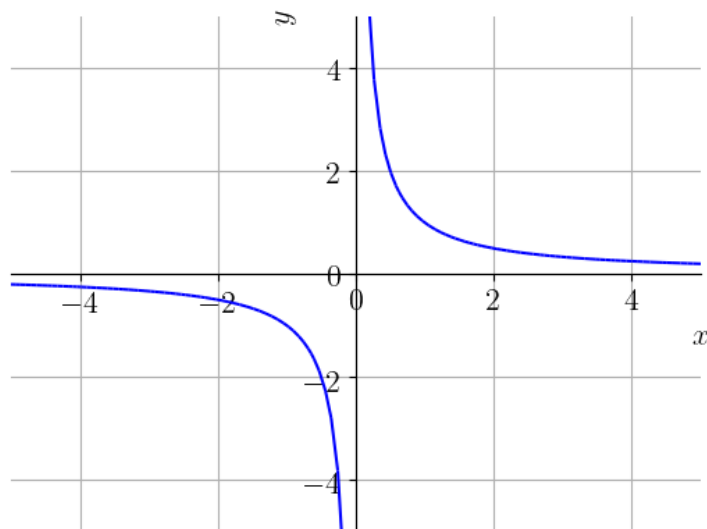


Figura 2.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.144)$$

Também, quanto maiores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.145)$$

Podemos computar estes limites com o [Python+SymPy](#), usando os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(1/x,x,-oo)
4 limit(1/x,x,oo)
```

Observação 2.4.1. (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que L , M e k são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad (2.146)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (2.147)$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (2.148)$$

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (2.149)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (2.150)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (2.151)$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (2.152)$$

Exemplo 2.4.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (2.153)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (2.154)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (2.155)$$

Exemplo 2.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.156)$$

Observamos que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador.

Observação 2.4.2. Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$, temos¹

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (2.157)$$

Exemplo 2.4.4. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.4.3), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \quad (2.158)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (2.159)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (2.160)$$

¹Demonstração é feita no Exercício 2.5.6.

2.4.1 Assíntotas horizontais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

A reta $y = L$ é dita assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (2.161)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.162)$$

Exemplo 2.4.5. No Exemplo 2.4.3, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.163)$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.164)$$

Consulte a Figura 2.10.

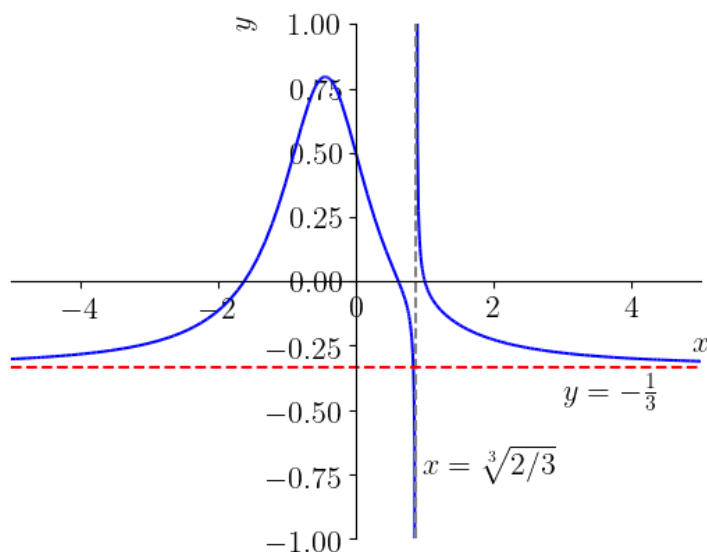


Figura 2.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (2.165)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (2.166)$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

Exemplo 2.4.6. (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.167)$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 2.11.

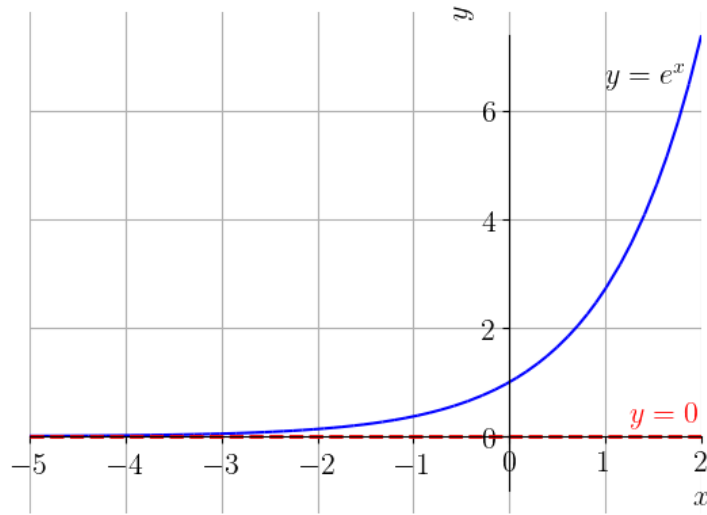


Figura 2.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

Exemplo 2.4.7. (Função logística) Na ecologia, a função logística ²

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0} e^{-rt}\right)} \quad (2.168)$$

²Consulte mais em [Wikipédia](#).

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo $P(t)$ o número de indivíduos da população no tempo t . O parâmetro P_0 é o número de indivíduos na população no tempo inicial $t = 0$, $r > 0$ é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e K é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt} \right)} = K \quad (2.169)$$

Ou seja, $P(t) = K$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $P = P(t)$ e é o limite de saturação do crescimento populacional. Na Figura 2.12, temos o esboço do gráfico da função logística para $t \geq 0$.

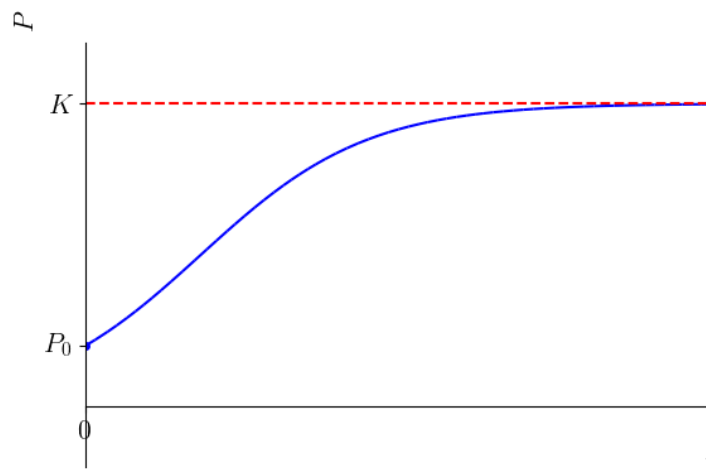


Figura 2.12: Esboço do gráfico da função logística.

2.4.2 Limite no infinito de função periódica

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função f é periódica quando existe um número T tal que

$$f(x) = f(x + T), \quad (2.170)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de f . As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas³.

O limite no infinito de funções periódicas não existe⁴. De fato, se f não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro k . Desta forma, não existe número L que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de x suficientemente grandes (ou pequenos).

Exemplo 2.4.8. Não existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen}(x), \quad (2.171)$$

pois os valores de $\text{sen } x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 2.13.

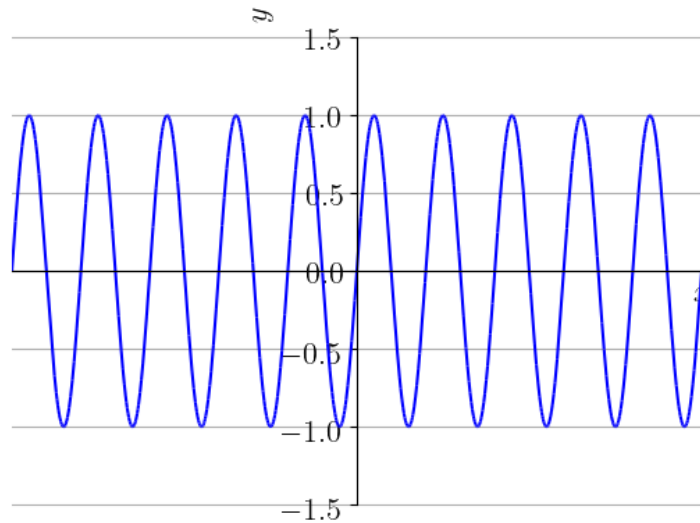


Figura 2.13: Esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen } x$.

Com o [Python+SymPy](#), ao computarmos $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen } x$ com o comando:

³Consulte mais nas [Notas de Aula - Pré-Cálculo - Funções Trigonômicas](#)

⁴À exceção de funções constantes.


```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(sin(x), x, oo)

```

obtemos como saída o intervalo $[-1, 1]$, indicando que o limite não existe, pois $\sin x$ oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

Exercícios resolvidos

ER 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1. \quad (2.172)$$

Solução. Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \quad (2.173)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) + 1, \quad (2.174)$$

observando que $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \rightarrow \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (2.175)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (2.176)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(1/(x-1)+1, x, oo)

```

◇

ER 2.4.2. Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (2.177)$$

Solução. Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (2.178)$$

Começamos com $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (2.179)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (2.180)$$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Agora, vamos ver a tendência da função para $x \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (2.181)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (2.182)$$

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função f .

Os seguintes comandos do [Python+SymPy](#) permitem plotar o esboço do gráfico da função f (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
4 L = limit(f(x),x,oo)
5 p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],\
6         line_color="blue",show=False)
7 q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
8 p.extend(q)
9 p.show()
```

◇

ER 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}. \quad (2.183)$$

Solução. Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 2.4.6, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.184)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(-x) \quad (2.185)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0. \quad (2.186)$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 2.14.

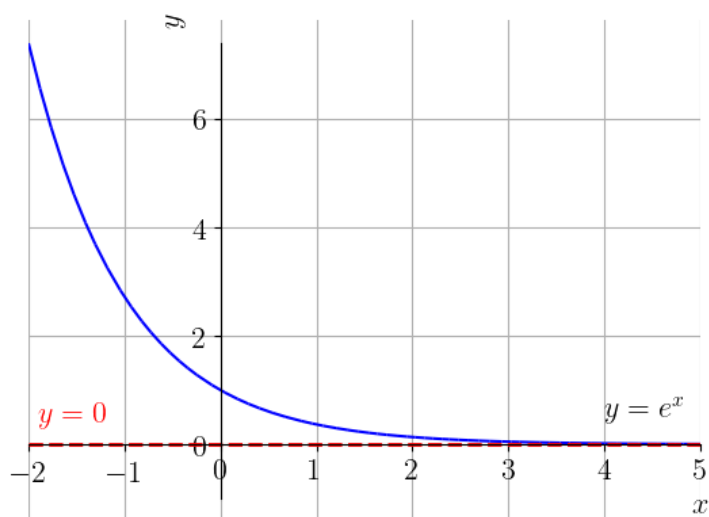


Figura 2.14: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(exp(-x), x, oo)
```

◇

Exercícios

Exercício 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \quad (2.187)$$

Exercício 2.4.2. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + e^{-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} - 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e - e^x$

Exercício 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (2.188)$$

Exercício 2.4.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x. \quad (2.189)$$

Exercício 2.4.5. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + e^{-x}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1.$

2.5 Limites infinitos

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando x tende a um número x_0 , se $f(x)$ é arbitrariamente grande para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , mas $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (2.190)$$

A Figura 2.15, é uma ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

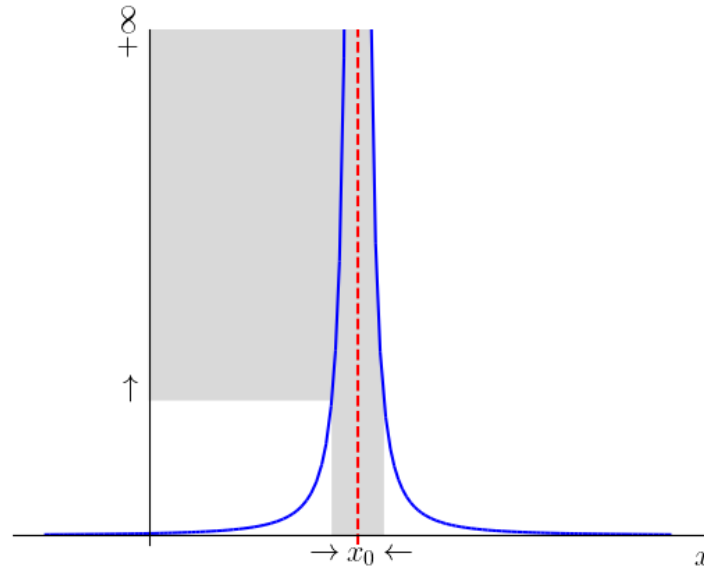


Figura 2.15: Ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

Exemplo 2.5.1. Vejamos o caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (2.191)$$

Ao tomarmos x próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

| | | | | | | | |
|--------|------------|------------|------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| x | -10^{-1} | -10^{-2} | -10^{-3} | $\rightarrow 0 \leftarrow$ | 10^{-3} | 10^{-2} | 10^{-1} |
| $f(x)$ | 10^2 | 10^4 | 10^6 | $\rightarrow \infty \leftarrow$ | 10^6 | 10^4 | 10^2 |

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.16.

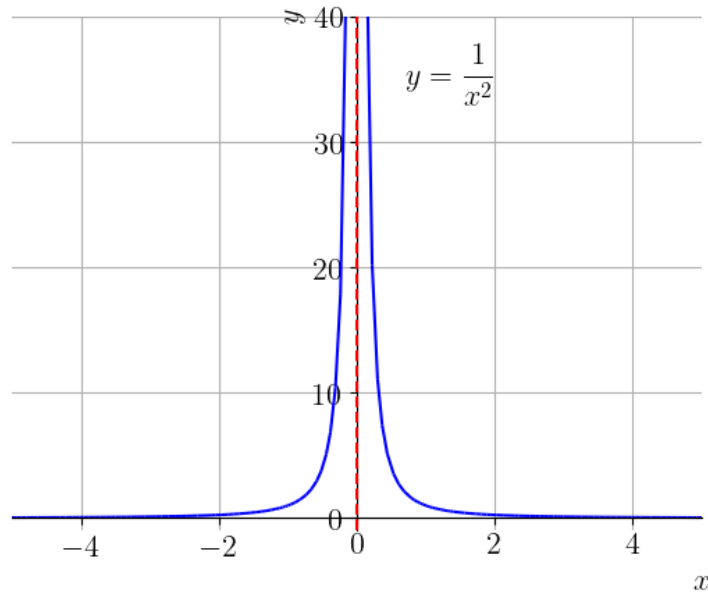


Figura 2.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer x suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (2.192)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad (2.193)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty. \quad (2.194)$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x > x_0$.

Exemplo 2.5.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \quad (2.195)$$

De fato, conforme tomamos valores de x próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.17.

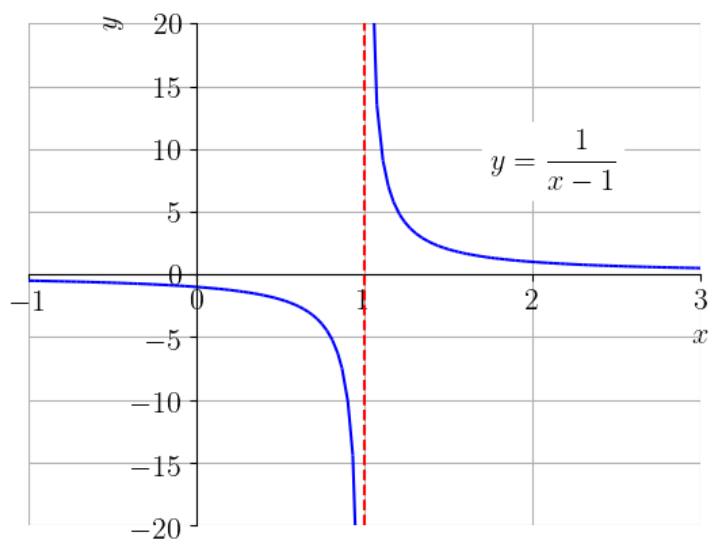


Figura 2.17: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(1/(x-1), x, 0, '+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando x tende a x_0 , quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de x suficientemente próximos de x_0 , com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty. \quad (2.196)$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow x_0^\pm$.

Exemplo 2.5.3. Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (2.197)$$

e que não podemos concluir que este limite é ∞ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (2.198)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (2.199)$$

Exemplo 2.5.4.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \quad (2.200)$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo x . Veja a Figura 2.18.

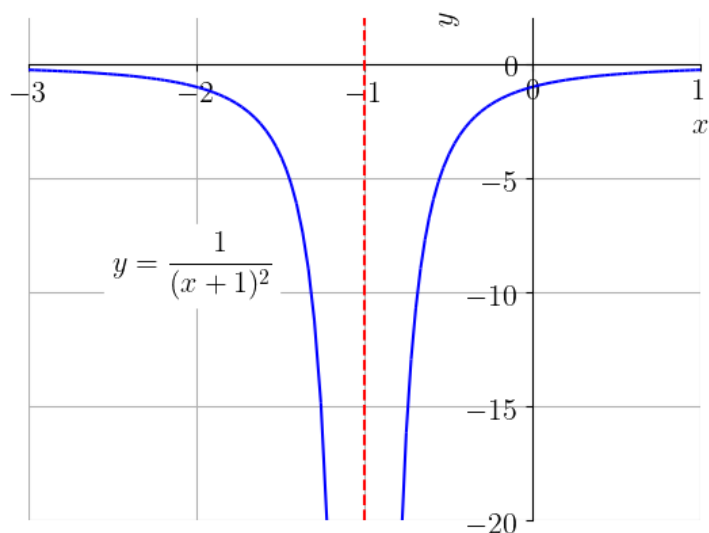


Figura 2.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(-1/(x+1)**2, x, -1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

2.5.1 Assíntotas verticais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad (2.201)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad (2.202)$$

Exemplo 2.5.5. O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (2.203)$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 2.19.

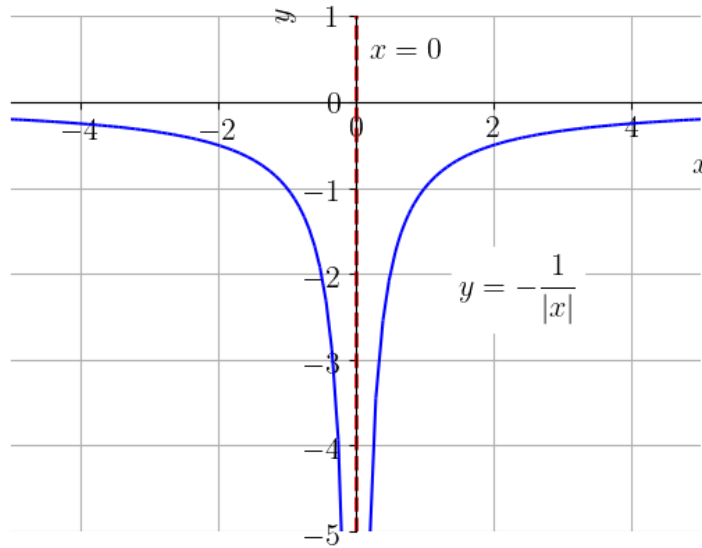


Figura 2.19: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

Exemplo 2.5.6. A função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ não está definida para valores de x tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \quad (2.204)$$

$$x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1 \quad (2.205)$$

Nestes pontos o gráfico de f pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty, \quad (2.206)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.207)$$

e, também, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.208)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty. \quad (2.209)$$

Com isso, temos que as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f . Veja a Figura 2.20 para o esboço do gráfico desta função.

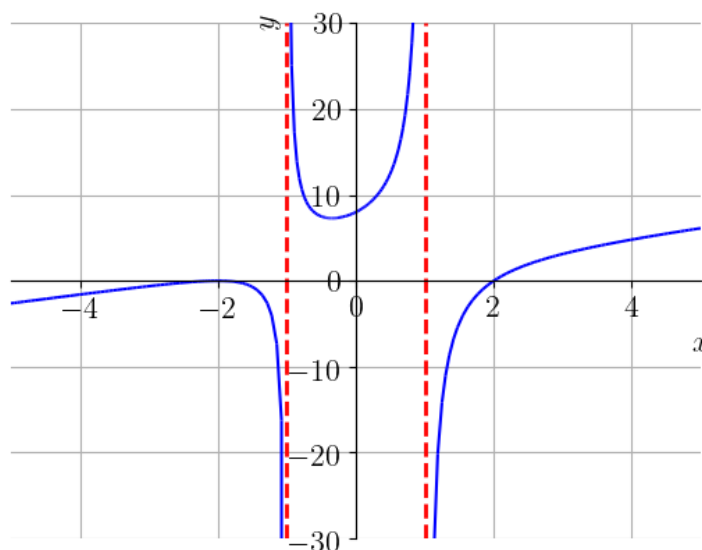


Figura 2.20: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$.

Exemplo 2.5.7. (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y = \ln x$ é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (2.210)$$

i.e., $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y = \ln x$ ser a função inversa de $y = e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y = 0$ ⁵. A Figura 2.21 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

⁵Veja o Exemplo 2.4.6.

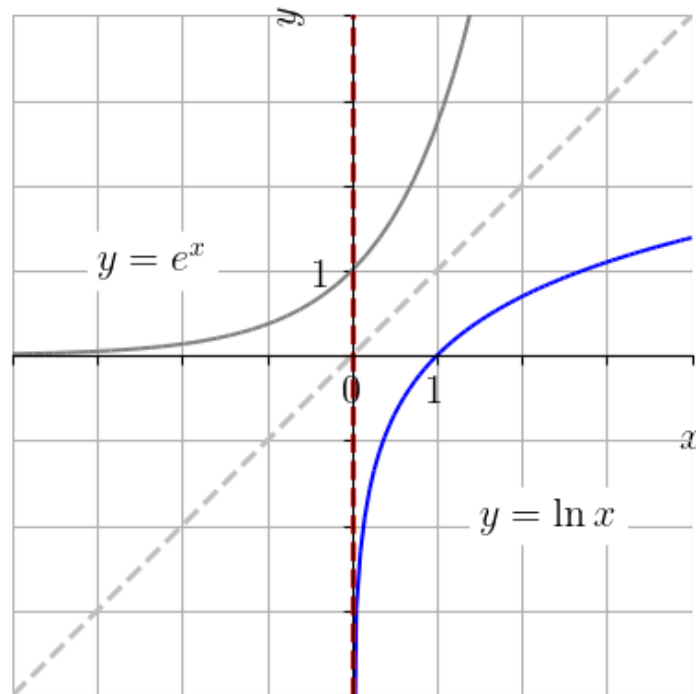


Figura 2.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

Exemplo 2.5.8. As funções trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ têm assíntotas verticais $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ para k inteiro. Já, as funções trigonométricas $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para k inteiro. Consulte mais em [Funções Trigonométricas](#) nas [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

2.5.2 Assíntotas oblíquas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assíntota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

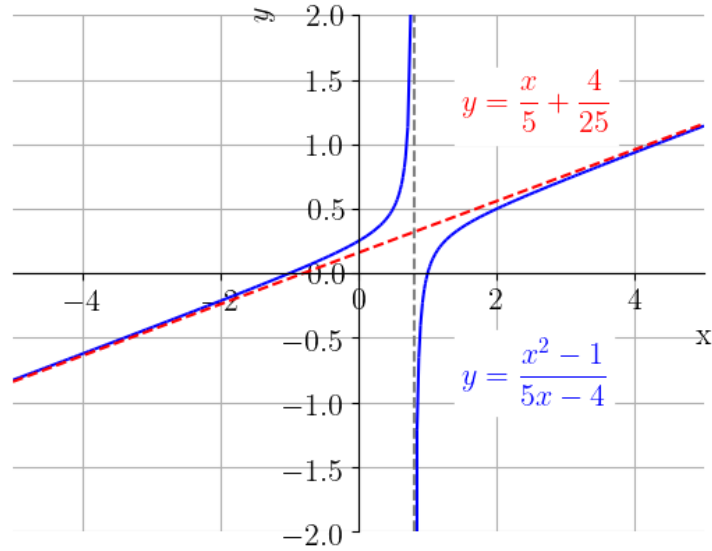


Figura 2.22: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$.

Exemplo 2.5.9. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (2.211)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (2.212)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, i.e. $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 2.22.

Observação 2.5.1. Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

2.5.3 Limites infinitos no infinito

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad (2.213)$$

quando os valores da função f são arbitrariamente grandes para todos os valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad (2.214)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad (2.215)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (2.216)$$

Exemplo 2.5.10. Vejamos os seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$

Exemplo 2.5.11.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (2.217)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \overset{0^+}{\cancel{\frac{10}{x}}} + \overset{0^+}{\cancel{\frac{300}{x^3}}}}{\overset{0^+}{\cancel{\frac{1}{x^3}}}} = \infty. \quad (2.218)$$

Proposição 2.5.1. Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n. \quad (2.219)$$

Exemplo 2.5.12. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.11, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \quad (2.220)$$

$$= \infty. \quad (2.221)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 2.5.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \quad (2.222)$$

Solução. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} \xrightarrow{0^-} \frac{-1}{0^+} = -\infty. \quad (2.223)$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x - 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-2}{y} \quad (2.224)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y-1}{y} \quad (2.225)$$

$$= -\infty. \quad (2.226)$$

Podemos usar o seguinte comando **Python+SymPy** para computar este limite:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit((x-2)/(1-x), x, 1, '-')
```

◇

ER 2.5.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1|. \quad (2.227)$$

Solução. Começamos observando que

$$\ln |x - 1| = \begin{cases} \ln(1 - x) & , x < 1, \\ \ln(x - 1) & , x > 1. \end{cases} \quad (2.228)$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln |x - 1| &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^6. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |x - 1| &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^7. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1| = -\infty. \quad (2.229)$$

Podemos usar os seguintes comandos [Python](#)+[SymPy](#) para computar os limites laterais:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(log(abs(x-1)), x, 1, '-')
4 limit(log(abs(x-1)), x, 1, '+')
```

◇

ER 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}. \quad (2.230)$$

Solução. Tratando-se de uma função racional, temos⁸

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \quad (2.231)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \quad (2.232)$$

$$= \infty. \quad (2.233)$$

⁸Veja a Observação 2.4.2. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 2.20.

◇

ER 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2}. \quad (2.234)$$

Solução. Observamos que $1 - x^2 \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x^2$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0. \quad (2.235)$$

◇

ER 2.5.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (2.236)$$

Solução. Podemos verificar que trata-se de uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Neste caso, podemos calcular o limite pela multiplicação (em cima e em baixo) pelo inverso do fator dominante no radical, i.e. $1/\sqrt{x^2}$. Ou seja, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (2.237)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \quad (2.238)$$

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \rightarrow \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{|x|}} \quad (2.239)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2 \frac{x}{x}} \quad (2.240)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.241)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.242)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (2.243)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 2.5.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}. \quad (2.244)$$

Exercício 2.5.2. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (2.245)$$

Exercício 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 - 1}. \quad (2.246)$$

Exercício 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \quad (2.247)$$

Exercício 2.5.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2x} \quad (2.248)$$

Exercício 2.5.6. Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (2.249)$$

Exercício 2.5.7. Mostre que $y = x^2$ é assíntota ao gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}. \quad (2.250)$$

2.6 Continuidade

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Dizemos que uma **função** f é **contínua** em um ponto x_0 , quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (2.251)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.252)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou **à direita**. Quando a **função** f não é contínua em um dado ponto x_0 , dizemos que f é **descontínua** neste ponto.

Exemplo 2.6.1. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (2.253)$$

Na Figura 2.23, temos um esboço do gráfico de f .

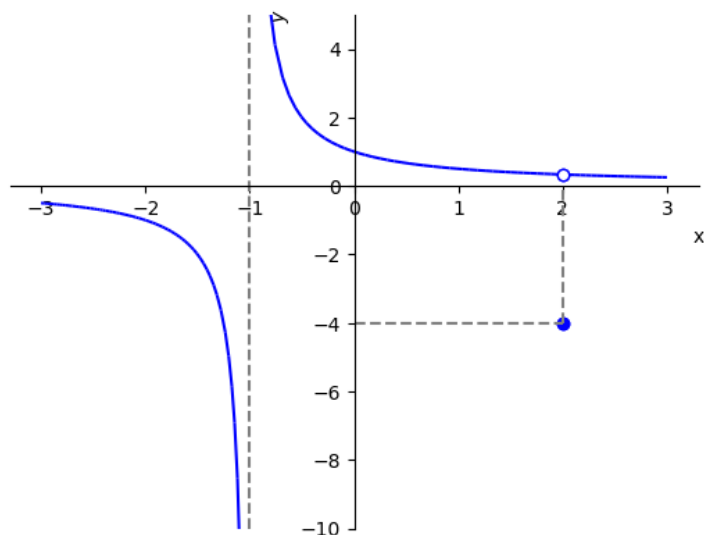


Figura 2.23: Esboço do gráfico da função f definida no Exemplo 2.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (2.254)$$

Com isso, concluímos que f é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \quad (2.255)$$

logo, $f(-1)$ não está definido e, portanto, f é descontínua neste ponto. Observemos que f tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (2.256)$$

Portanto, concluímos que f é descontínua em $x = 2$.

Uma função f é dita ser **contínua em um intervalo** (a, b) , quando f é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

Exemplo 2.6.2. (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.257)$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 2.24.

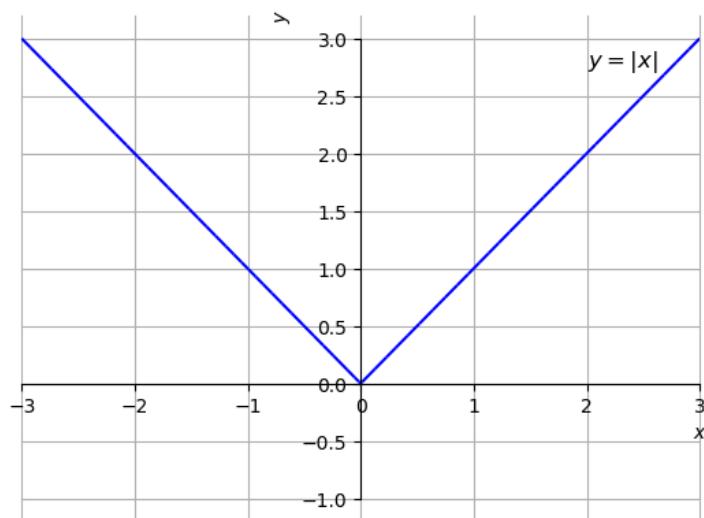


Figura 2.24: Esboço do gráfico de $f(x) = |x|$.

Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de x . Também, para $x \in (0, \infty)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de x . Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (2.258)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (2.259)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|. \quad (2.260)$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

2.6.1 Propriedades de funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em $x = c_0$ e k um número real, então também são contínuas em $x = c_0$ as funções:

- a) $k \cdot f$
- b) $f \pm g$

- c) $f \cdot g$
- d) f/g , se $g(x_0) \neq 0$
- e) f^k , se existe $f^k(x_0)$.

Exemplo 2.6.3. Temos que $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ são exemplos de funções contínuas em toda parte. Segue das propriedades acima que:

- a) $f_a(x) = 2x$ é contínua em toda parte.
- b) $f_b(x) = x + |x|$ é contínua em toda parte.
- c) $f_c(x) = 2x|x|$ é contínua em toda parte.
- d) $f_d(x) = \frac{|x|}{x}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- e) $f_e(x) = x^2$ é contínua em toda parte.

Exemplo 2.6.4. Polinômios são contínuos em toda parte. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad (2.261)$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \quad (2.262)$$

Exemplo 2.6.5. Funções racionais $r(x) = p(x)/q(x)$ são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad (2.263)$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad (2.264)$$

pois f não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (2.265)$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \quad (2.266)$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0 - 1}{0^2 - 1} = 1 = f(0). \quad (2.267)$$

Ou seja, f é contínua nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

Observação 2.6.1. São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Se f é contínua no ponto x_0 e g é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0 .

Exemplo 2.6.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (2.268)$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

b) $y = \left| \frac{x - 1}{x^2 - 1} \right|$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (2.269)$$

Exemplo 2.6.7. Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + 4} \cdot e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x + 4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \quad (2.270)$$

Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que qualquer dada função f contínua em um intervalo $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Consulte a Figura 2.25.

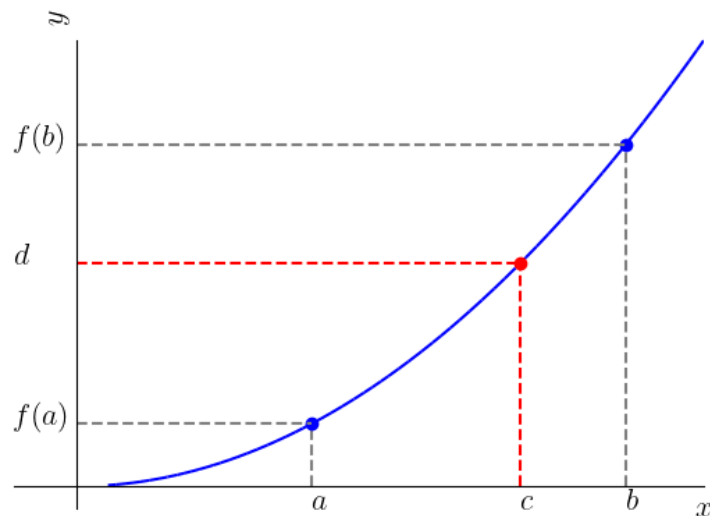


Figura 2.25: Ilustração sobre o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 2.6.1. (Teorema do valor intermediário) Seja f função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Exemplo 2.6.8. Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, f é contínua no intervalo $[0, 2]$ e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 2.26.

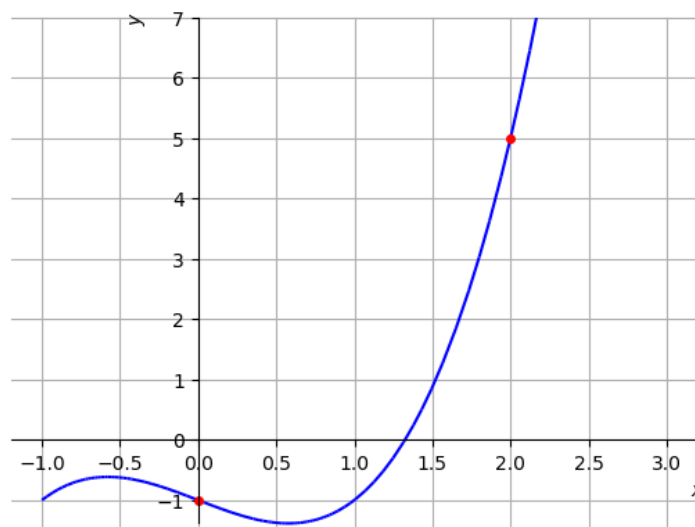


Figura 2.26: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (2.271)$$

Solução. Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \quad (2.272)$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a -1 e, portanto, contínua.

Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad (2.273)$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua.

Concluimos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

◇

ER 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.274)$$

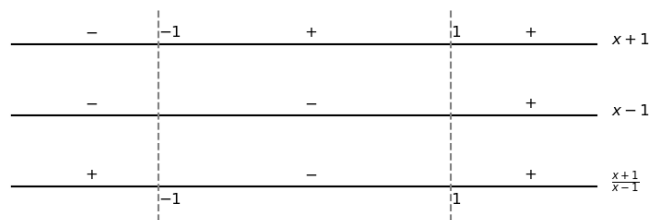
Solução. A função f pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

- a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. g é contínua para todo $x > 0$;
- b) a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função h tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \quad (2.275)$$

Fazendo o estudo de sinal



vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Em resumo, h é contínua em $(0, \infty)$ e g é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. f é contínua em $(1, \infty)$.

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \quad (2.276)$$

Exercício 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \quad (2.277)$$

Exercício 2.6.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2} - \cos x}{2} \right). \quad (2.278)$$

2.7 Limites e desigualdades

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo x em um certo intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (2.279)$$

Observe que a tomada do **limite não preserva a desigualdade estrita**.

Exemplo 2.7.1. As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (2.280)$$

Observação 2.7.1. A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x). \quad (2.281)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

2.7.1 Limites de funções limitadas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Se $f(x) \leq L$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em x_0 , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq L. \quad (2.282)$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 2.7.2. Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x. \quad (2.283)$$

Como $|\sen x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad (2.284)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} = 0. \quad (2.285)$$

Logo, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x = 0. \quad (2.286)$$

2.7.2 Teorema do confronto

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Teorema 2.7.1. (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em $x = a$ (consulte a Figura 2.27), e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (2.287)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (2.288)$$

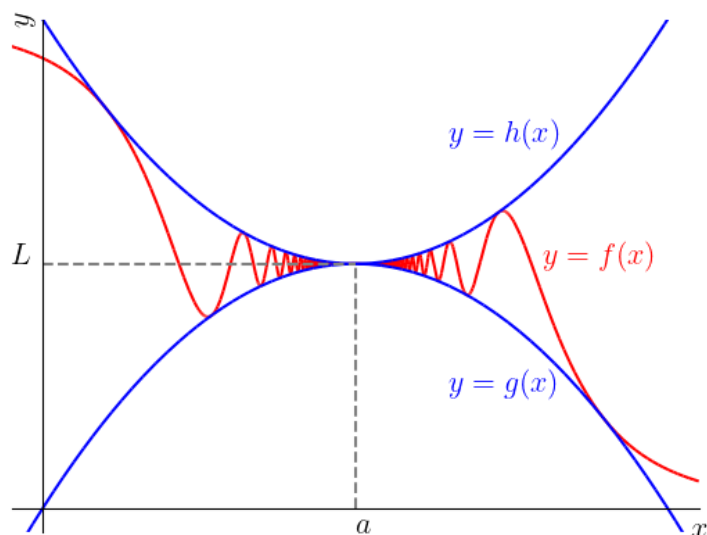


Figura 2.27: Ilustração sobre o Teorema 2.7.1.

Demonstração. Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (2.289)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (2.290)$$

□

Exemplo 2.7.3. Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (2.291)$$

Observação 2.7.2. O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

Exemplo 2.7.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.292)$$

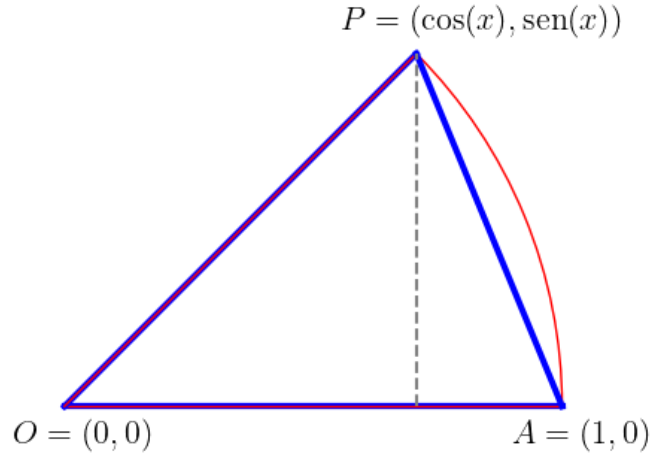


Figura 2.28: Ilustração referente ao Exemplo 2.7.4.

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $P = (\cos x, \sin x)$ (consulte a Figura 2.28), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (2.293)$$

i.e.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x < x, \quad (2.294)$$

para todo $0 < x < \pi/2$.

É certo que $\sin x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\sin x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.295)$$

Lembrando que $\sin x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\sin x = \sin -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.296)$$

Logo, de (2.295) e (2.296), temos

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|. \quad (2.297)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (2.298)$$

do Teorema do confronto, concluimos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.299)$$

Observação 2.7.3. Do exemplo anterior (Exemplo 2.7.4), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.300)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (2.301)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (2.302)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right] \quad (2.303)$$

$$= 1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \right)^2. \quad (2.304)$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0. \quad (2.305)$$

Então, retornando a equação (2.304), concluimos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.306)$$

2.7.3 Limites envolvendo $(\sin x)/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1. \quad (2.307)$$

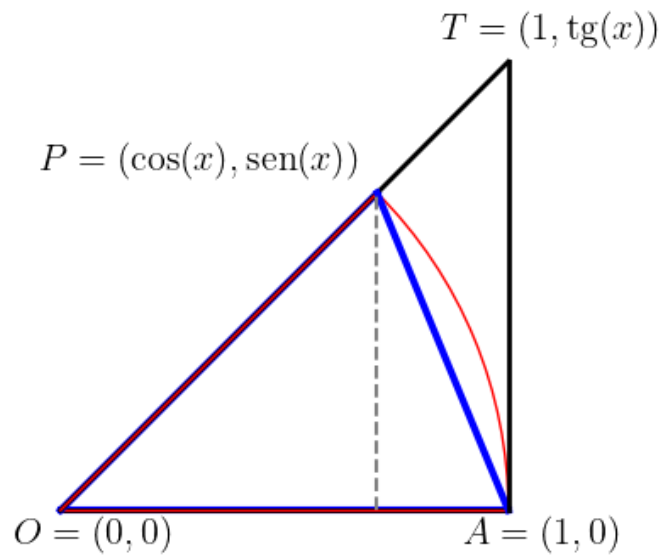


Figura 2.29: Ilustração para o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0,0)$, $P = (\cos x, \text{sen } x)$, $A = (1,0)$ e $T = (1, \text{tg } x)$ (consulte Figura 2.29), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (2.308)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2}. \quad (2.309)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\sin x$ ⁹, obtemos

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2.310)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (2.311)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (2.312)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.313)$$

Agora, usando o fato de que $\sin x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (2.314)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.315)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

Exemplo 2.7.5. Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (2.316)$$

Veja o Exercício 2.7.4.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 2.7.1. Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (2.317)$$

⁹ $\sin x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

Solução. Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \overset{0}{\nearrow} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \overset{0}{\nearrow}. \quad (2.318)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad (2.319)$$

◇

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 2.7.1. Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$.

Exercício 2.7.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x. \quad (2.320)$$

Exercício 2.7.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x}. \quad (2.321)$$

Exercício 2.7.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (2.322)$$

Exercício 2.7.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (2.323)$$

2.8 Exercícios finais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 2.8.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.324)$$

Exercício 2.8.2. Calcule os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^x$

Capítulo 3

Derivadas

3.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos estudar a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, estudamos as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

3.1.1 Reta secante e reta tangente

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função f pelos pontos x_0 e x_1 , $x_0 \neq x_1$, como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.1)$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Veja a Figura 3.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

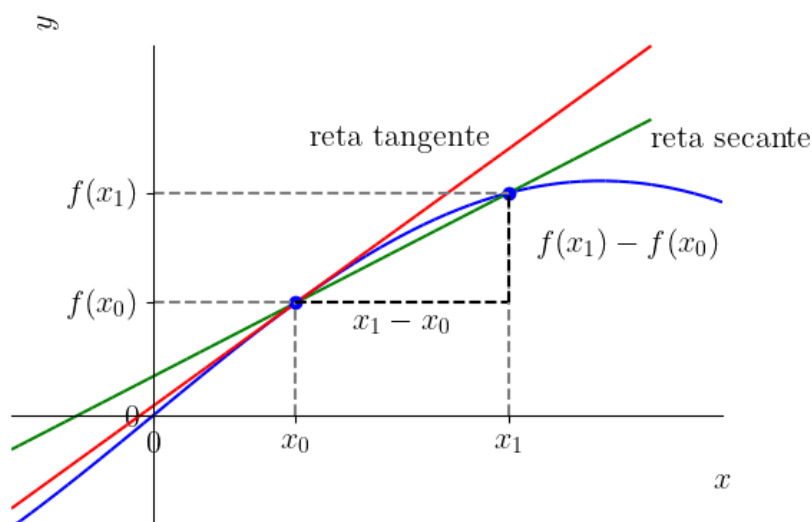


Figura 3.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelha) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função f em $x = x_0$ é a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.3)$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.4)$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos x_0 e x_1 , quando $x_1 \rightarrow x_0$. Veja a Figura 3.1.

Observação 3.1.1. Fazendo a mudança de variável $h = x_1 - x_0$, temos que (3.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.5)$$

De fato, da mudança de variável, temos que $x_1 = x_0 + h$ e quando $x_1 \rightarrow x_0$,

temos que $h = x_1 - x_0 \rightarrow 0$. Ou seja,

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.7)$$

Exemplo 3.1.1. Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.8)$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad (3.9)$$

$$= \frac{4 - 1}{1} = 3. \quad (3.10)$$

Logo, a reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.11)$$

$$y = 3(x - 1) + f(1) \quad (3.12)$$

$$y = 3x - 2. \quad (3.13)$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

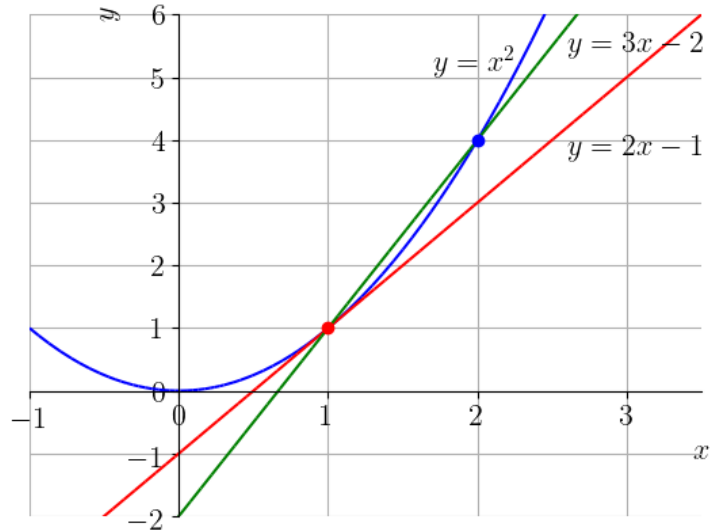


Figura 3.2: Esboços dos gráficos de $f(x) = x^2$ (azul), da reta secante pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ (verde) e da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$ (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 é

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} \quad (3.15)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \quad (3.16)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{1} = 2. \quad (3.17)$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ tem coeficiente angular $m_{\text{tg}} = 2$ e equação

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (3.18)$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o [Python+SymPy](#), podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x,y = symbols('x,y')
3      ...: x0 = 1
4      ...: x1 = 2
5      ...: f = lambda x: x**2
6      ...: msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
7      ...: Eq(y, msec*(x-x0)+f(x0))
8      Out: Eq(y, 3.0*x - 2.0)

```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x,y = symbols('x,y')
3      ...: h = Symbol('h')
4      ...: x0 = 1
5      ...: f = lambda x: x**2
6      ...: mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)
7      ...: Eq(y, mtg*(x-x0)+f(x0))
8      ...:
9      Out: Eq(y, 2*x - 1)

```

3.1.2 Taxa de variação

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A **taxa de variação média** de uma função f quando x varia de x_0 a x_1 é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.19)$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de f no ponto x_0 , a qual é definida como

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.20)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.21)$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

Exemplo 3.1.2. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo t_0 ao tempo t_1 é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (3.22)$$

Por exemplo, se $s(t) = 15t^2 + t$ (km), então a velocidade média do objeto entre $t_0 = 1\text{h}$ e $t_1 = 3\text{h}$ é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.23)$$

$$= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \quad (3.24)$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \quad (3.25)$$

$$= 61 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.26)$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo $t_0 = 1$ é

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \quad (3.27)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(t_0 + h)^2 + (t_0 + h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \quad (3.28)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \quad (3.29)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \quad (3.30)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 30t_0 + 15h + 1 \quad (3.31)$$

$$= 30t_0 + 1 = 31 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.32)$$

Exemplo 3.1.3. Seja $c(x) = \sqrt{x}$ (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O

custo médio da produção de $x_0 = 4$ a $x_1 = 9$ é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} \quad (3.34)$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} \quad (3.35)$$

$$= \frac{3 - 2}{5} \quad (3.36)$$

$$= 0,2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.37)$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa está produzindo $x_0 = 4$ milhões de unidades é

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0=4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (3.38)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.39)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \quad (3.40)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \quad (3.42)$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 0,25 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.43)$$

Observação 3.1.2. Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

3.1.3 Derivada em um ponto

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **derivada** de uma função f **em um ponto** $x = x_0$ é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ e é definida por

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.44)$$

Exemplo 3.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = k$, k constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0. \quad (3.46)$$

b) $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.47)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \quad (3.48)$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \quad (3.49)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \quad (3.50)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.51)$$

Exemplo 3.1.5. Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por $r(x) = x^2$ (milhões de reais), onde x é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando $x = x_0 = 1$ é

$$r'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \quad (3.52)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad (3.53)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \quad (3.54)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 3.1.1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Faça, então, os esboços dos gráficos de f e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x_0 = 4$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.55)$$

A derivada de f no ponto x_0 é

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.56)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \quad (3.57)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \quad (3.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \quad (3.59)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}. \quad (3.60)$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + \sqrt{4} \quad (3.61)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \quad (3.62)$$

Veja a Figura 3.3 para os esboços dos gráfico de f e da reta tangente.

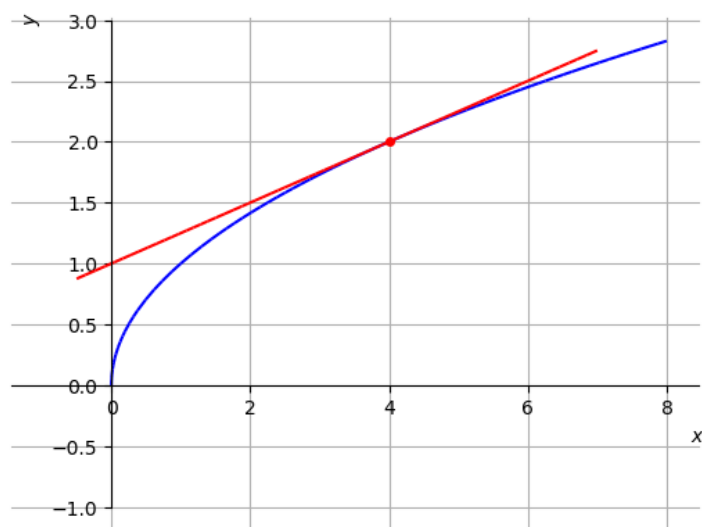


Figura 3.3: Esboços do gráfico da função f e da reta tangente no ponto $x_0 = 4$.

◇

ER 3.1.2. Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \quad (3.63)$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \quad (3.64)$$

onde x é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando $x = 1$ mi.

Solução. O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \quad (3.65)$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto $x_0 = 1$ é

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0 + h) - l(x_0)}{h} \quad (3.66)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - c(x_0 + h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \quad (3.67)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0) - (c(x_0 + h) - c(x_0))}{h} \quad (3.68)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h} \quad (3.69)$$

$$= r'(x_0) - c'(x_0) \quad (3.70)$$

$$= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (3.71)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.72)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.1.1. Calcule as derivadas conforme indicado:

- a) $f(x) = 2$, $f'(-1)$;
- b) $g(x) = 10^6$, $g'(10^8)$;
- c) $h(x) = \ln 2e$, $h'(-\pi)$;

Exercício 3.1.2. Calcule as derivadas conforme indicado:

- a) $f(x) = 2 + x$, $f'(-1)$;
- b) $g(x) = 10^6 - 2x$, $g'(-3)$;
- c) $h(x) = \ln(2e) + ex$, $h'(10^6)$;

Exercício 3.1.3. Calcule as derivadas conforme indicado:

- a) $f(x) = x$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = -2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = ex$, $h'(10^6)$;

Exercício 3.1.4. Determine a reta secante ao gráfico de $f(x) = 5 - x^2$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Então, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$. Por fim, faça os esboços dos gráficos de f , da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

Exercício 3.1.5. Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo $c(x) = 2\sqrt{x}$ e rendimento $r(x) = \frac{1}{100}x^3$, dados em milhões de reais com x em milhares de unidades. Calcule:

a) o custo marginal quando $x = 1$;

b) o rendimento marginal quando $x = 1$;

c) o lucro marginal quando $x = 1$.

3.2 Função derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **derivada** de uma função f em relação à variável x é a função $f' = \frac{df}{dx}$ cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.73)$$

quando este limite existe. Dizemos que f é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto x de seu domínio, quando o limite dado em (3.73) existe. Se isso ocorre para todo número real x , dizemos que f é derivável em toda parte.

Exemplo 3.2.1. A derivada de $f(x) = x^2$ é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.74)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (3.75)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \quad (3.76)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \quad (3.77)$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte. A Figura 3.4.

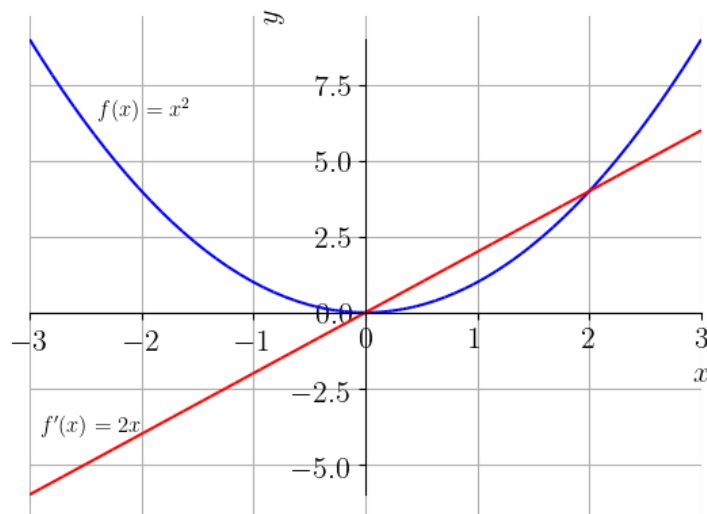


Figura 3.4: Esboços dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$.

Com o [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
1 from sympy import *
2 x,h = symbols('x,h')
3 f = lambda x: x**2
4 limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)
```


Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
1      diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
1      diff(x**2)
```

para computar a derivada de x^2 em relação a x .

Observação 3.2.1. A derivada à direita (à esquerda) de uma função f em um ponto x é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{df}{dx^{\pm}} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.78)$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

Exemplo 3.2.2. Vamos calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Para $x = 0$, só faz sentido calcular a derivada lateral à direita:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \quad (3.79)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \quad (3.80)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cancel{\sqrt{h}} \overline{0^+}} + \infty. \quad (3.81)$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. Agora, para $x > 0$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (3.82)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (3.83)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (3.84)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.85)$$

Na Figura 3.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

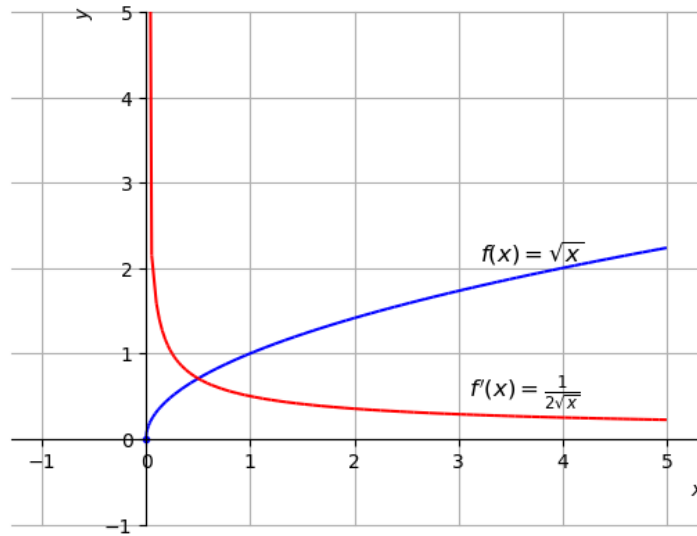


Figura 3.5: Esboços dos gráficos da função $f(x) = \sqrt{x}$ e de sua derivada.

No **SymPy**, a computação de $f'_+(0)$ pode ser feita com os comandos¹:

```
1 from sympy import *
2 h = Symbol('h')
3 limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
1 diff(sqrt(x),x)
```

Exemplo 3.2.3. A função valor absoluto é derivável para todo $x \neq 0$ e não é derivável em $x = 0$. De fato, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.86)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \quad (3.87)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.88)$$

¹Por padrão no **SymPy**, o limite é tomado à direita.

Analogamente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.89)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.90)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.91)$$

Agora, para $x = 0$, devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad (3.92)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.93)$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Na figura 3.6, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = |x|$ e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por $\text{sign}(x)$. Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

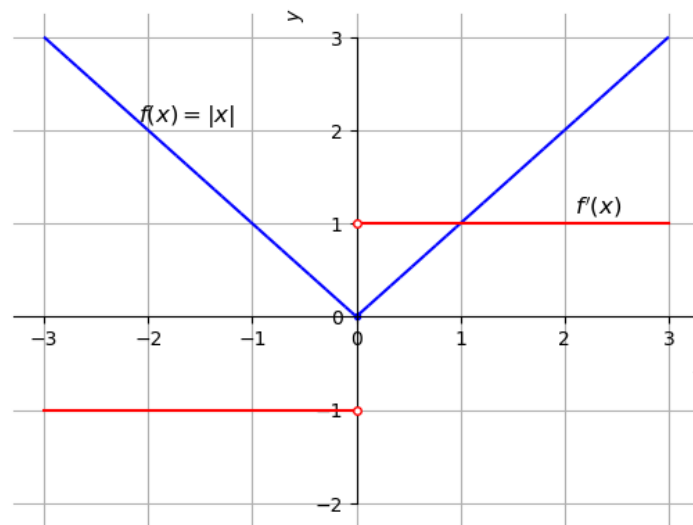


Figura 3.6: Esboços dos gráficos da função $f(x) = |x|$ e de sua derivada.

No [SymPy](#), podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
1 In : from sympy import *
2     ...: x = symbols('x', real=True)
3     ...: diff(abs(x))
4 Out: sign(x)
```

3.2.1 Continuidade de uma função derivável

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar](#)

Uma função $y = f(x)$ **derivável** em $x = x_0$ é **contínua** neste ponto. De fato, lembramos que f é contínua em $x = x_0$ quando x_0 é um ponto de seu domínio e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.95)$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad (3.96)$$

ou, ainda,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0. \quad (3.97)$$

Vamos mostrar que este é o caso quando f é derivável em $x = x_0$. Neste caso, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} \quad (3.98)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \cdot h \quad (3.99)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot h \quad (3.100)$$

$$= 0. \quad (3.101)$$

Ou seja, de fato, se f é derivável em $x = x_0$, então f é contínua em $x = x_0$.

Observação 3.2.2. A recíproca não é verdadeira, uma função f ser contínua em um ponto $x = x_0$ não garante que ela seja derivável em $x = x_0$. No Exemplo 3.2.3, vimos que a função valor absoluto $f(x) = |x|$ não derivável em $x = 0$, enquanto esta função é contínua (veja, também, o Exemplo 2.6.2).

3.2.2 Derivadas de ordens mais altas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação a x é a função $y = f'(x)$. Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de f , denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right). \quad (3.102)$$

Exemplo 3.2.4. Seja $f(x) = x^3$. Então, a primeira derivada de f é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.103)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad (3.104)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \quad (3.105)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2. \quad (3.106)$$

De posse da primeira derivada $f'(x) = 3x^2$, podemos calcular a segunda derivada de f , como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (3.107)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (3.108)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \quad (3.109)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} \quad (3.110)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + h = 6x, \quad (3.111)$$

i.e. $f''(x) = 6x$.

No **SymPy**, podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: diff(x**3,x,2)
4      Out: 6*x

```

Generalizando, quando existe, a n -ésima derivada de uma função $y = f(x)$, $n \geq 1$, é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{d^n}{dx^n} f(x) := \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right], \quad (3.112)$$

com $f^{(3)} \equiv f'''$, $f^{(2)} \equiv f''$, $f^{(1)} \equiv f'$ e $f^{(0)} \equiv f$.

Exemplo 3.2.5. A terceira derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f'''(x) = [f''(x)]'$. No exemplo anterior (Exemplo 3.2.4), calculamos $f''(x) = 6x$. Logo,

$$f'''(x) = [6x]' \quad (3.113)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} \quad (3.114)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6 = 6. \quad (3.115)$$

A quarta derivada de $f(x) = x^3$ em relação a x é $f^{(4)}(x) \equiv 0$, bem como $f^{(5)}(x) \equiv 0$. Verifique!

No [SymPy](#), podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: diff(x**3,x,3)
4      Out: 6

```

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 3.2.1. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em relação a x .

Solução. Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.116)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} \quad (3.117)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \quad (3.118)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \quad (3.119)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \quad (3.120)$$

◇

ER 3.2.2. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = |x - 1|$.

Solução. O gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ tem um bico no ponto $x = 1$ (verifique!). Para valores de $x < 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.121)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{<0} - \overbrace{|x-1|}^{<0}}{h} \quad (3.122)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h+1+x-1}{h} \quad (3.123)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.124)$$

Para valores de $x > 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.125)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{>0} - \overbrace{|x-1|}^{>0}}{h} \quad (3.126)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-1-x+1}{h} \quad (3.127)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.128)$$

Ou seja, temos que $f(x) = |x - 1|$ é diferenciável para $x \neq 1$. Agora, para $x = 1$, temos

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.129)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{|h|}^{<0} - |1-1|}{h} \quad (3.130)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (3.131)$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.132)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{|h|}^{>0} - |1-1|}{h} \quad (3.133)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (3.134)$$

$$(3.135)$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, temos que $\nexists f'(1)$. Concluimos que $f(x) = |x - 1|$ é diferenciável nos pontos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

◇

ER 3.2.3. Calcule a segunda derivada em relação a x da função

$$f(x) = x - x^2. \quad (3.136)$$

Solução. Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.137)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} \quad (3.138)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} \quad (3.139)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 1 - 2x - \overset{0}{h} = 1 - 2x. \quad (3.140)$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (3.141)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (3.142)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2(x+h) - (1 - 2x)}{h} \quad (3.143)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2 = -2. \quad (3.144)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 3.2.1. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

- a) $f(x) = 2$
- b) $g(x) = -3$
- c) $h(x) = \sqrt{e}$

Exercício 3.2.2. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

- a) $f(x) = 2x$
- b) $g(x) = -3x$
- c) $h(x) = \sqrt{e}x$

Exercício 3.2.3. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \quad (3.145)$$

Exercício 3.2.4. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Exercício 3.2.5. Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \quad (3.146)$$

calcule:

a) $f'(x)$

b) $f''(x)$

c) $f'''(x)$

d) $f^{(4)}$

e) $f^{(1001)}(x)$

3.3 Regras básicas de derivação

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Nesta seção, vamos estudar sobre algumas regras fundamentais para o cálculo da derivada de funções. Começaremos pelas derivadas de função constante, de função potência e de função exponencial. Em seguida, passamos a derivadas da soma, multiplicação e quociente de funções.

3.3.1 Derivadas de função constante e função potência

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vejamos as derivadas da função constante e da função potência.

- $(k)' = 0$, onde k é uma constante.

De fato, para $f(x) \equiv k$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.147)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \quad (3.148)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (3.149)$$

- $(x)' = 1$.

De fato, para a função identidade $f(x) = x$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.150)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.151)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.152)$$

$$(3.153)$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, para $n > 1$ inteiro positivo.

De fato, para $f(x) = x^n$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.154)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (3.155)$$

Usando binômio de Newton², temos

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k, \quad (3.156)$$

onde os coeficientes binomiais são

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3.157)$$

Assim, segue que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (3.158)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \quad (3.159)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (3.160)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos as regras de derivação acima:

²Isaac Newton, 1643 - 1727, matemático inglês. Fonte: [Wikipédia](#).

```

1  from sympy import *
2  # (k)' = 0
3  k = Symbol('k', real=True, constant=True)
4  diff(k,x)
5
6  # (x)' = 1
7  x = Symbols('x')
8  diff(x,x)
9
10 # (x^n)' = nx^(n-1)
11 n = Symbols('n', integer=True, positive=True)
12 diff(x**n,x)

```

Exemplo 3.3.1. Vejamos os seguintes casos:

- a) $(-1)' = 0$.
- b) $(\sqrt{2})' = 0$.
- c) $(x^3)' = 3x^2$.
- d) $(x^{11})' = 11x^{10}$.

3.3.2 Derivada de função exponencial

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vejamos o cálculo da derivada de função exponencial.

- $(a^x)' = a^x \ln a$, para $a > 0$ e $a \neq 1$.

De fato, tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.161)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (3.162)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \quad (3.163)$$

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad (3.164)$$

Pode-se mostrar que³

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \quad (3.165)$$

Desta forma, temos

$$f'(x) = a^x \ln a = (a^x)'. \quad (3.166)$$

- $(e^x)' = e^x$.

De fato, $(a^x)' = a^x \ln a$, para $a > 0$ e $a \neq 1$. Tomando $a = e$, temos

$$(e^x)' = e^x \underbrace{\ln e}_{=1} = e^x. \quad (3.167)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
1 from sympy import *
2 a = Symbol('a', real=True)
3 # (a^x)'
4 diff(a**x, x)
5
6 # (e^x)'
7 diff(E**x, x)
```

Exemplo 3.3.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$.

b) $(e^x)' = e^x$.

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
# a)
diff(2**x, x)
# b)
diff(E**x, x)
```

³Pode-se mostrar isso a partir da definição integral da função logaritmo.

3.3.3 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam k um número real, $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $(k \cdot u)' = k \cdot u'.$

De fato, pela definição da derivada temos

$$(k \cdot u)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \quad (3.168)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \quad (3.169)$$

$$= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \xrightarrow{u'} \quad (3.170)$$

$$= k \cdot u'. \quad (3.171)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

```
1 from sympy import *
2 k = Symbol('k', real=True)
3 u = Function('u', real=True)
4 diff(k*u(x), x)
```

- $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

De fato, temos

$$(u + v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} \quad (3.172)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) + v(x + h) - [u(x) + v(x)]}{h} \quad (3.173)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + h) - u(x)}{h} \right] u' \quad (3.174)$$

$$+ \left[\frac{v(x + h) - v(x)}{h} \right] v' \quad (3.175)$$

$$= u'(x) + v'(x). \quad (3.176)$$

Também, como $(-v)' = (-1 \cdot v)' = -1 \cdot v' = -v'$, temos

$$(u - v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \quad (3.177)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
1      from sympy import *
2      u = Function('u', real=True)
3      v = Function('v', real=True)
4      diff(u(x)+v(x), x)
```

Exemplo 3.3.3. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = 2x$.

Para calcularmos f' , podemos identificar $f = k \cdot u$, com $k = 2$ e $u(x) = x$. Então, usando a regra da multiplicação por constante $(ku)' = ku'$, temos

$$f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2 \cdot 1 = 2. \quad (3.178)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      diff(2*x, x)
```

b) $f(x) = 2x + 3$.

Observamos que $f = u + v$, com $u(x) = 2x$ e $v(x) \equiv 3$. Então, da regra da soma $(u + v)' = u' + v'$, temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \quad (3.179)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x')
3      diff(2*x+3,x)
```

c) $f(x) = e^x - x^2$.

Observamos que $f = u - v$, com $u(x) = e^x$ e $v(x) = x^2$. Usando a regra da subtração $(u - v)' = u' - v'$ temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \quad (3.180)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x')
3      diff(exp(x)-x**2,x)
```

3.3.4 Regras do produto e do quociente

[[Vídeo](#)] | [[Áudio](#)] | [[Contatar](#)]

Sejam $y = u(x)$ e $y = v(x)$ funções deriváveis. Então:

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

De fato, da definição da derivada temos

$$(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \quad (3.181)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (3.182)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \right. \quad (3.183)$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (3.184)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \quad (3.185)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \quad (3.186)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.187)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
1      u = Function('u', real=True)
2      v = Function('v', real=True)
3      diff(u(x)*v(x), x)
```

$$\bullet \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ no caso de } v(x) \neq 0.$$

De fato, da definição de derivada temos

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \quad (3.188)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \quad (3.189)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \right. \quad (3.190)$$

$$\left. - \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.191)$$

$$= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \right. \quad (3.192)$$

$$\left. - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.193)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad (3.194)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 u = Function('u', real=True)
4 v = Function('v', real=True)
5 simplify(diff(u(x)/v(x), x))
```

Exemplo 3.3.4. Vamos calcular a derivada em relação a x da função $f(x) = x^2(x-1)$ de duas formas.

1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$f'(x) = [x^2(x-1)]' \quad (3.195)$$

$$= (x^3 - x^2)' \quad (3.196)$$

$$= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \quad (3.197)$$

$$= 3x^2 - 2x, \quad (x^n)' = nx^{n-1}. \quad (3.198)$$

2. Utilizando a regra do produto.

Observamos que $f = u \cdot v$, com $u(x) = x^2$ e $v(x) = x - 1$. Então, da regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$, com $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 1$, temos

$$f'(x) = [\overbrace{x^2}^u \overbrace{(x-1)}^v]' \quad (3.199)$$

$$= \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{u' \cdot v} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{u \cdot v'} \quad (3.200)$$

$$= 2x^2 - 2x + x^2 \quad (3.201)$$

$$= 3x^2 - 2x. \quad (3.202)$$

Exemplo 3.3.5. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$. Observamos que $f = (u/v)$ com $u(x) \equiv 1$ e $v(x) = x^2$. Tendo em vista que $u'(x) \equiv 0$ e $v'(x) = 2x$, temos da regra do quociente que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \quad (3.203)$$

$$= \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}, \quad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \quad (3.204)$$

$$= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \quad (3.205)$$

$$= -2x^{-3}. \quad (3.206)$$

Observação 3.3.1. Com abuso de linguagem, temos

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (3.207)$$

com n inteiro. No caso de $n = 1$, temos $(x)' \equiv 1$. No caso de $n \leq 0$, devemos ter $x \neq 0$ ⁴. Mais ainda, a regra também vale para $n = 1/2$, veja o Exemplo 3.2.2.

Exemplo 3.3.6. Voltando ao exemplo anterior (Exemplo 3.3.5), temos

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \quad (3.208)$$

Exemplo 3.3.7. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = xe^x$. Usando a regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$ com $u(x) = x$ e $v(x) = e^x$, temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \quad (3.209)$$

$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u' \cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u \cdot v'} \quad (3.210)$$

$$= (x + 1)e^x. \quad (3.211)$$

3.3.5 Tabela de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$(ku)' = ku' \quad (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (3.212)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3.213)$$

$$(k)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (3.214)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x \quad (3.215)$$

$$(3.216)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

⁴Devido a indeterminação de 0^0 e a inexistência de 0^n com n negativo

ER 3.3.1. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \quad (3.217)$$

Solução.

$$f'(x) = \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2 \right]'}^{(u-v)'} \quad (3.218)$$

$$= \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) \right]'}^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \quad (3.219)$$

$$= (x^2 + x)'(1 + x^3) + (x^2 + x)(1 + x^3)' - 2(x^2)' \quad (3.220)$$

$$= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 - 4x \quad (3.221)$$

$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \quad (3.222)$$

$$= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \quad (3.223)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2*x**2,x)
4 simplify(d)
```

◇

ER 3.3.2. Calcule

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right). \quad (3.224)$$

Solução. Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right) = \frac{(x^2 + x)'(1 - x^3) - (x^2 + x)(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2} \quad (3.225)$$

$$= \frac{(2x + 1)(1 - x^3) + (x^2 + x)3x^2}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.226)$$

$$= \frac{2x - 2x^4 + 1 - x^3 + 3x^4 + 3x^3}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.227)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} \quad (3.228)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 d = diff((x**2+x)/(1-x**3), x)
4 simplify(d)
```

◇

ER 3.3.3. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.229)$$

No caso, temos $f(x) = xe^{-x}$ e $x_0 = 1$. Calculamos

$$f'(x) = [xe^{-x}]' = \left[\frac{x}{e^x} \right] \quad (3.230)$$

$$= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \quad (3.231)$$

$$= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \quad (3.232)$$

$$= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \quad (3.233)$$

$$= (1-x)e^xe^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \quad (3.234)$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad (3.235)$$

$$y = 0 \cdot (x - 1) + e^{-1} \quad (3.236)$$

$$y = \frac{1}{e}. \quad (3.237)$$

Na Figura 3.7, temos os esboços dos gráfico da função f e sua reta tangente no ponto $x = 1$.

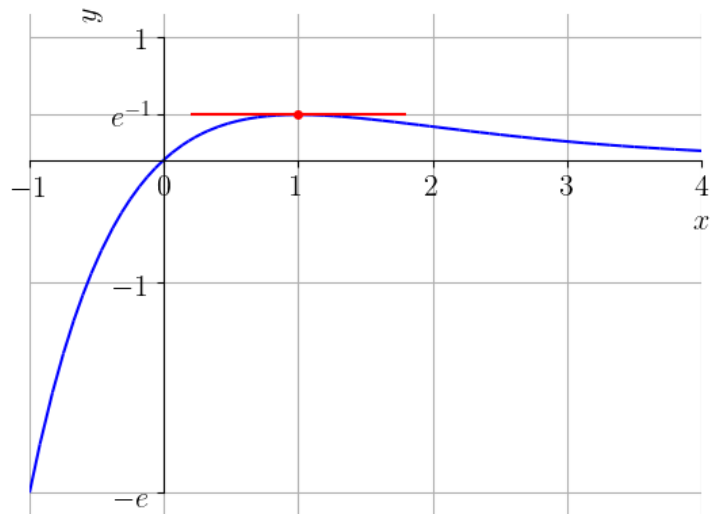


Figura 3.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Com o [SymPy](#), podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      f = x*exp(-x)
4      x0 = 1
5      f1 = diff(f,x)
6      # y =
7      f1.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)
```

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 3.3.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 - 5x^3$

b) $g(x) = (2x - 1)(2 - 4x^2)$

c) $h(x) = \frac{2-4x^2}{2x-1}$

Exercício 3.3.2. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = xe^x$

b) $g(x) = xe^{2x}$

c) $g(x) = xe^{-2x}$

Exercício 3.3.3. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $g(x) = x \ln x^2$

c) $g(x) = x \ln x^2 e^x$

Exercício 3.3.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$.

3.4 Derivadas de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\operatorname{sen}' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \quad (3.238)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(h) + \cos(x) \operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen} x}{h} \quad (3.239)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad (3.240)$$

$$= \operatorname{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \quad (3.241)$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que⁵

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0. \quad (3.242)$$

Logo, temos

$$\mathbf{\text{sen}' } x = \mathbf{\cos } x. \quad (3.243)$$

De forma similar, temos

$$\cos' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad (3.244)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \text{sen}(x) \text{sen}(h) - \cos x}{h} \quad (3.245)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \text{sen}(x) \frac{\text{sen } h}{h} \quad (3.246)$$

$$= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}. \quad (3.247)$$

Ou seja,

$$\mathbf{\cos' } x = \mathbf{-\text{sen } x}. \quad (3.248)$$

Exemplo 3.4.1. A derivada de $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ é

$$f'(x) = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)' \quad (3.249)$$

$$= (\text{sen}^2 x)' + (\cos^2 x)' \quad (3.250)$$

$$= (\text{sen } x \cdot \text{sen } x)' + (\cos x \cdot \cos x)' \quad (3.251)$$

$$= \cos x \cdot \text{sen } x + \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x \cdot \text{sen } x \quad (3.252)$$

$$= 0, \quad (3.253)$$

conforme esperado.

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)
```

⁵Veja a Seção 2.7.3.

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$

Dem.:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' \quad (3.254)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \quad (3.255)$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (3.256)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 \quad (3.257)$$

$$= \sec^2 x. \quad (3.258)$$

- $\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x$

Dem.:

$$\operatorname{cotg}' x = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' \quad (3.259)$$

$$= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.260)$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.261)$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \quad (3.262)$$

$$= -\operatorname{cossec}^2 x. \quad (3.263)$$

- $\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$

Dem.:

$$\sec' x = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \quad (3.264)$$

$$= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} \quad (3.265)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad (3.266)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \quad (3.267)$$

$$= \operatorname{tg} x \sec x. \quad (3.268)$$

$$\bullet \operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cotg x$$

Dem.:

$$\operatorname{cosec}' x = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' \quad (3.269)$$

$$= \frac{-\sin' x}{\sin^2 x} \quad (3.270)$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \quad (3.271)$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \quad (3.272)$$

$$= -\cotg x \operatorname{cosec} x. \quad (3.273)$$

Observação 3.4.1. Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

Exemplo 3.4.2. A derivada em relação a x de

$$f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \quad (3.274)$$

pode ser calculada como segue

$$f'(x) = \left(\frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \right)' \quad (3.275)$$

$$= \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec' x}{\sec^2 x} \quad (3.276)$$

$$= \frac{(1 + \sec^2 x) \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} \quad (3.277)$$

$$= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\sec x}. \quad (3.278)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff((x+tan(x))/sec(x), x)
```

3.4.1 Tabela de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$(ku)' = ku' \quad (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (3.279)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3.280)$$

$$(k)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (3.281)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x \quad (3.282)$$

$$\operatorname{sen}' x = \cos x \quad \cos' x = -\operatorname{sen} x \quad (3.283)$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \quad \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x \quad (3.284)$$

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x \quad \operatorname{cossec}' x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \quad (3.285)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 3.4.1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.286)$$

No caso deste exercício, temos $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$. Assim sendo, calculamos a derivada em relação a x de $f(x)$, i.e.

$$f'(x) = \sin' x = \cos x. \quad (3.287)$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad (3.288)$$

$$y = \cos(0)(x - 0) + \sin(0) \quad (3.289)$$

$$y = x. \quad (3.290)$$

Na Figura 3.8, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

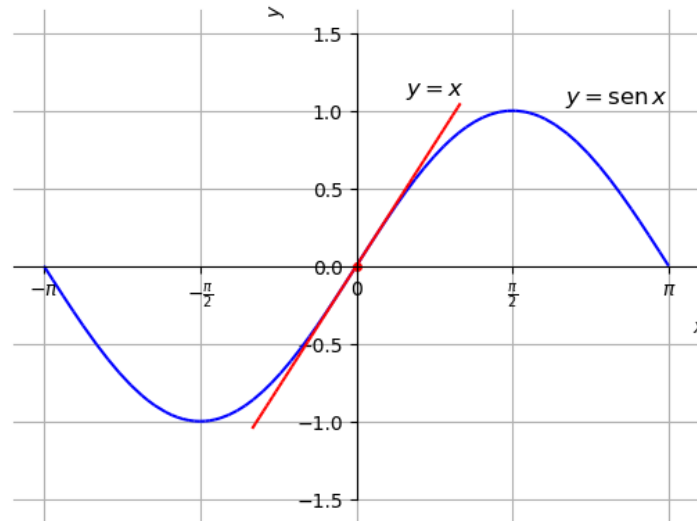


Figura 3.8: Esboços dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto $x = 0$.

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      f = sin(x)
4      x0 = 0
5
6      # reta tangente
7      rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
8      print("Reta tangente: y = %s" % rt)
9
10     # graficos
11     plot(f,rt,(x,-pi,pi))

```

◇

ER 3.4.2. Resolva a equação

$$\sec'(x) = 0, \quad (3.291)$$

para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solução. Temos

$$0 = \sec'(x) \quad (3.292)$$

$$= \sec(x) \operatorname{tg}(x) \quad (3.293)$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad (3.294)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \quad (3.295)$$

donde segue que

$$\operatorname{sen}(x) = 0. \quad (3.296)$$

Por fim, observamos que para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, a função seno se anula somente em $x = \pi$, a qual é a solução da equação.

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.4.1. Calcule a derivada em relação a x de

a) $f(x) = \sin(x) - \cos^2(x)$

b) $g(x) = \sin^2(x) \cos(x)$

c) $h(x) = \frac{2 \operatorname{tg}(x)}{\sec(x)}$

Exercício 3.4.2. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \cos x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

Exercício 3.4.3. Calcule a derivada em relação a x de

a) $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$

b) $g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$

c) $g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$

3.5 Regra da cadeia

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam f e g , com g derivável em x e f derivável em $g(x)$, então $(f \circ g)$ é derivável em x , sendo

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad (3.297)$$

chamada de regra da cadeia.

Exemplo 3.5.1. A derivada em relação a x de $h(x) = (x + 1)^2$ pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

A função h é a composição da função $f(x) = x^2$ com a função $g(x) = x + 1$, i.e. $h(x) = f(g(x))$. Temos $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 1$. Então, segue

pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \quad (3.298)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (3.299)$$

$$= 2(x+1) \cdot 1 \quad (3.300)$$

$$= 2x + 2. \quad (3.301)$$

b) por cálculo direto.

Observando que $h(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, temos

$$h'(x) = (x^2 + 2x + 1)' \quad (3.302)$$

$$= (x^2)' + (2x)' + (1)' \quad (3.303)$$

$$= 2x + 2. \quad (3.304)$$

Com o [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff((x+1)**2, x)
4 2*x + 2
```

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}, \quad (3.305)$$

onde u é uma função derivável em x e f é derivável em $u(x)$.

Exemplo 3.5.2. Vamos calcular a derivada em relação a x de $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Temos que $g(x) = f(u(x))$, com $f(x) = \sqrt{x}$ e $u(x) = x^2 + 1$. Observando que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad u'(x) = 2x, \quad (3.306)$$

segue pela regra da cadeia que

$$g'(x) = \frac{d}{dx} f(u) \quad (3.307)$$

$$= f'(u) \frac{du}{dx} \quad (3.308)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \quad (3.309)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (3.310)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sqrt(x**2+1), x)
4 x/sqrt(x**2 + 1)
```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (3.311)$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que h é derivável em x com g derivável em $h(x)$ e f derivável em $f(g(h(x)))$.

Exemplo 3.5.3. Vamos calcular a derivada em relação a x de $f(x) = \text{sen}(\cos(x^2))$. Pela regra da cadeia, temos

$$[\text{sen}(\cos(x^2))]' = \cos(\cos(x^2)) \cdot [\cos(x^2)]' \quad (3.312)$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\text{sen}(x^2) \cdot (x^2)'] \quad (3.313)$$

$$= -\cos(\cos(x^2)) \cdot \text{sen}(x^2) \cdot 2x. \quad (3.314)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sin(cos(x**2)))
4 -2*x*sin(x**2)*cos(cos(x**2))
```

3.5.1 Tabela de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$(ku)' = ku' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (3.315)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.316)$$

$$(k)' = 0 \qquad \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad (3.317)$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \qquad (3.318)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.319)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.320)$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.321)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 3.5.1. Calcule a derivada em relação a x de

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}. \qquad (3.322)$$

Solução. Da regra da cadeia aplicada à função exponencial, temos

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}. \qquad (3.323)$$

Então, com $u = \sqrt{x+1}$, segue

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{\sqrt{x+1}} \qquad (3.324)$$

$$= e^{\sqrt{x+1}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x+1}). \qquad (3.325)$$

Agora, aplicamos a regra da cadeia para a função raiz quadrada, i.e.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}, \qquad (3.326)$$

com $u = x + 1$. Segue, então

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx}(x+1) \quad (3.327)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \quad (3.328)$$

Portanto, concluímos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}. \quad (3.329)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      diff(exp(sqrt(x+1)), x)
4      exp(sqrt(x + 1))/(2*sqrt(x + 1))
```

◇

ER 3.5.2. Mostre que a [função logística](#)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (3.330)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1 - f(x)). \quad (3.331)$$

Solução. Vamos calcular a derivada em relação a x da função logística, i.e.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \quad (3.332)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\left(1 + e^{-x} \right)^{-1} \right] \quad (3.333)$$

$$= -1 \cdot \left(1 + e^{-x} \right)^{-2} \cdot \underbrace{\left(1 + e^{-x} \right)'}_{=-e^{-x}} \quad (3.334)$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x} \right)^2}. \quad (3.335)$$

Por outro lado, temos

$$f(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) \quad (3.336)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(\frac{1 + e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}}\right) \quad (3.337)$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}. \quad (3.338)$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1 - f(x)). \quad (3.339)$$

◇

ER 3.5.3. Assuma que o custo de produção de uma unidade empresarial seja modelada pela função

$$c(x) = \sqrt{x - 1} + e^{x-7}, \quad (3.340)$$

onde c é o custo em função da produção x . Determine o custo marginal quando $x = 3$.

Solução. O custo marginal é a função derivada do custo em relação à produção. Calculando, temos

$$c'(x) = (\sqrt{x - 1} + e^{x-7}) \quad (3.341)$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x - 1})'}_{(u^n)' = nu^{n-1}u'} + \underbrace{(e^{x-7})'}_{(e^u)' = e^u u'} \quad (3.342)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} + e^{x-7}. \quad (3.343)$$

Logo, o custo marginal quando $x = 3$ é

$$c'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3 - 1}} + e^{3-7} = \sqrt{2} + e^{-4}. \quad (3.344)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exemplo 3.5.4. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = (2x - 3)^9$

b) $g(x) = \frac{1}{(2x - 3)^{51}}$

Exemplo 3.5.5. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = 2^{3x-1}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

Exemplo 3.5.6. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções

a) $f(x) = \text{sen}(\pi x)$

b) $g(x) = \cos(\sqrt{x})$

c) $h(x) = \text{tg}(2x)$

d) $u(x) = \text{cotg}(3 - x)$

e) $v(x) = \sec\left(\frac{1}{x^2}\right)$

f) $z(x) = \text{cossec}(5x + x^2)$

Exercício 3.5.1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \quad (3.345)$$

no ponto $x = 3$.

3.6 Diferenciabilidade da função inversa

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja f uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto I . Então, pode-se mostrar que sua inversa f^{-1} é diferenciável em qualquer ponto da

imagem da f no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3.346)$$

Exemplo 3.6.1. Seja $f(x) = (2x - 1)^2$ para $x > 1/2$. Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = (2x - 1)^2 \quad (3.347)$$

$$\sqrt{y} = 2x - 1 \quad (3.348)$$

$$x = \frac{\sqrt{y} + 1}{2} \quad (3.349)$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1). \quad (3.350)$$

Calculando a derivada de f^{-1} diretamente, temos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1)' \quad (3.351)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (3.352)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad (3.353)$$

Agora, usando (3.346) e observando que $f'(x) = 8x - 4$, obtemos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (3.354)$$

$$= \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1) - 4}, \quad (3.355)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad (3.356)$$

como esperado.

Observação 3.6.1. (Derivada da função logarítmica)

- Tomando $f(x) = e^x$ temos $f^{-1}(x) = \ln x$ e, daí por (3.346)

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (3.357)$$

- Tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f^{-1}(x) = \log_a x$ e, por (3.346),

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3.358)$$

Exemplo 3.6.2. Vamos calcular a derivada em relação a x da função

$$f(x) = \ln \frac{1}{x}. \quad (3.359)$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada da função logarítmica, temos

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \quad (3.360)$$

Portanto, temos

$$f'(x) = \left(\ln \frac{1}{x} \right)' \quad (3.361)$$

$$= \frac{1}{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) \quad (3.362)$$

$$= -\frac{1}{x}. \quad (3.363)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(log(1/x), x)
4 -1/x
```

Observação 3.6.2. (Derivada de função potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad (3.364)$$

para qualquer n inteiro⁶. Agora, se $r \neq 0$ e $r \neq 1$ é um número real, temos

$$y = x^r \quad (3.365)$$

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x. \quad (3.366)$$

⁶Mais precisamente, para $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Daí, derivando ambos os lados desta última equação e observando que $y = y(x)$, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} r \ln x \quad (3.367)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \quad (3.368)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y \quad (3.369)$$

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}. \quad (3.370)$$

Ou seja, a regra da potência

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}, \quad (3.371)$$

vale para todo r real, com $r \neq 0$ e $r \neq 1$.

Exemplo 3.6.3. Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \quad (3.372)$$

$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \quad (3.373)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.374)$$

b)

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}. \quad (3.375)$$

Exemplo 3.6.4. A regra da cadeia aplicada a derivada da função potência é

$$\frac{d}{dx} u^r = r u^{r-1} \frac{du}{dx}. \quad (3.376)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^2 - 1} = \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \quad (3.377)$$

$$= \frac{2}{3} x \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{3} - 1} \quad (3.378)$$

$$= \frac{2}{3} x \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.379)$$

$$= \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}. \quad (3.380)$$

3.6.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja $f(x) = \sin x$ restrita a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \arcsin x. \quad (3.381)$$

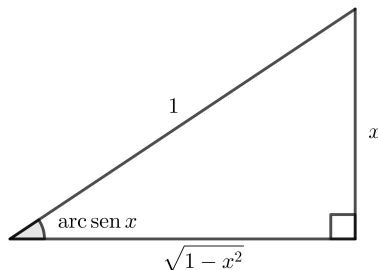


Figura 3.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (3.346) com $f(x) = \sin x$ e $f'(x) = \arcsin x$, donde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}. \quad (3.382)$$

Como $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ (veja Figura 3.9), concluímos

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.383)$$

Exemplo 3.6.5. A regra da cadeia aplicada à derivada da função arco seno é

$$\frac{d}{dx} \arcsen u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}. \quad (3.384)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \arcsen x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}. \quad (3.385)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(asin(x**2), x)
4 2*x/sqrt(-x**4 + 1)
```

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.386)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (3.387)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.388)$$

Exemplo 3.6.6. A regra da cadeia aplicada a função arco tangente é

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}. \quad (3.389)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} \sqrt{x} \quad (3.390)$$

$$= \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}. \quad (3.391)$$

No [SymPy](#), temos:

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      diff(atan(sqrt(x)))
4      1/(2*sqrt(x)*(x + 1))

```

3.6.2 Tabela de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$(ku)' = ku' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (3.392)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.393)$$

$$(k)' = 0 \qquad \frac{d}{dx} u^r = r u^{r-1} \frac{du}{dx} \qquad (3.394)$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \qquad (3.395)$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \qquad (3.396)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.397)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.398)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.399)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \qquad (3.400)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \qquad (3.401)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cossec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \qquad (3.402)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.6.1. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$. Faça, então, um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x_0 = 1$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.403)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1). \quad (3.404)$$

Observando que

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (3.405)$$

temos que a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1 \quad (3.406)$$

$$y = x - 1. \quad (3.407)$$

Na Figura 3.10, temos um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

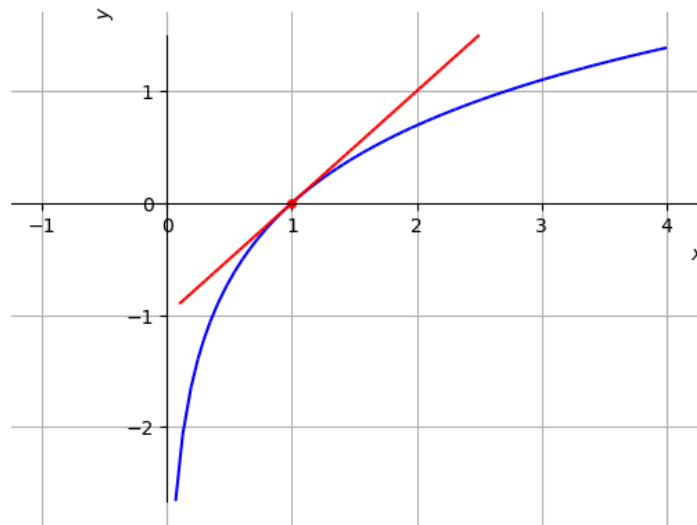


Figura 3.10: Esboço dos gráficos da função logarítmica natural e da reta tangente no ponto $x = 1$.

No **SymPy**, temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
```

```

3      rt = diff(log(x)).subs(x,1)*(x-1)+log(1)
4      print("y = %s" % rt)
5      y = x - 1

```

◇

ER 3.6.2. Resolva a equação

$$\frac{d}{dx} \arctan x = 1. \quad (3.408)$$

Solução. Lembrando que

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad (3.409)$$

temos

$$\frac{d}{dx} \arctan x = 1 \quad (3.410)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad (3.411)$$

$$1+x^2 = 1 \quad (3.412)$$

$$x^2 = 0 \quad (3.413)$$

$$x = 0. \quad (3.414)$$

◇

ER 3.6.3. Calcule

$$\frac{d}{dx} x^x. \quad (3.415)$$

Solução. Observamos que

$$y = x^x \quad (3.416)$$

$$\ln y = \ln x^x \quad (3.417)$$

$$\ln y = x \ln x. \quad (3.418)$$

Agora, derivando em relação a x ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln x) \quad (3.419)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x \quad (3.420)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) \quad (3.421)$$

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x(1 + \ln x). \quad (3.422)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 3.6.1. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x^2$

b) $g(x) = \ln(xe^x)$

Exercício 3.6.2. Calcule a derivada em relação a x das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $g(x) = (1 + 2x)^e$

Exercício 3.6.3. Calcule

$$\frac{d}{dx}(1+x)^x. \quad (3.423)$$

Exercício 3.6.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \arctg x$ no ponto $x = 0$.

3.7 Derivação implícita

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \quad (3.424)$$

A derivada dy/dx pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}g(y(x)) = \frac{d0}{dx} \quad (3.425)$$

$$g'(y(x))\frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.426)$$

Exemplo 3.7.1. Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.427)$$

Aqui, vamos calcular dy/dx de duas maneiras diferentes.

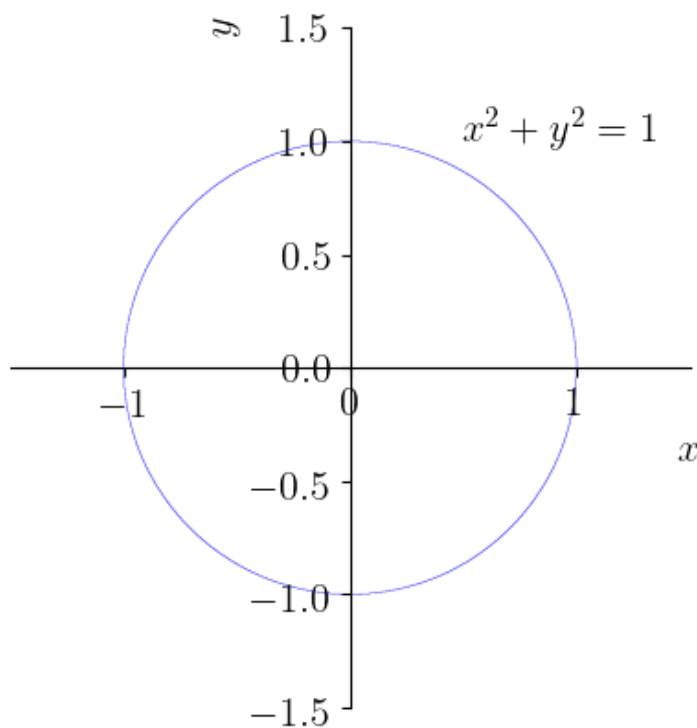


Figura 3.11: Esboço do gráfico da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

a) Por derivação direta. Isolando y em (3.427), temos

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad (3.428)$$

o que está bem definido para $-1 \leq x \leq 1$. Calculando a derivada, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\pm\sqrt{1-x^2}) \quad (3.429)$$

$$= \pm \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (3.430)$$

$$= \mp \frac{x}{y} \quad (3.431)$$

Ou seja, para $y < 0$, temos $y' = x/y$ e, para $y > 0$, temos $y' = -x/y$. Logo, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.432)$$

b) Por derivação implícita. Derivamos ambos os lados da (3.427) em relação a x

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 1 \quad (3.433)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2(x)) = 0 \quad (3.434)$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.435)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.436)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.437)$$

Observação 3.7.1 (Derivadas de potências racionais de x). Vamos mostrar que

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}, \quad (3.438)$$

para qualquer **número racional** $r \neq 0$. Denotando $r = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$y = x^{m/n} \quad (3.439)$$

$$\Leftrightarrow \quad (3.440)$$

$$y^n = x^m \quad (3.441)$$

Da derivação de função potência com expoente inteiro, temos

$$\frac{d}{dx}y^n = \frac{d}{dx}x^m \quad (3.442)$$

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad (3.443)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{m-1}y^{1-n} \quad (3.444)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{m-1}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-n} \quad (3.445)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{m-1}x^{\frac{m}{n}(1-n)} \quad (3.446)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{m-1+\frac{m}{n}(1-n)} \quad (3.447)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \quad (3.448)$$

Logo, segue o resultados que queríamos demonstrar.

Exemplo 3.7.2. Vamos calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ para

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.449)$$

Primeiramente, precisamos calcular dy/dx . Isso foi feito no Exemplo 3.7.1, onde obtivemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.450)$$

Antes de derivarmos novamente, vamos reescrever essa última expressão da seguinte forma

$$y\frac{dy}{dx} = -x \quad (3.451)$$

Derivando

$$\frac{d}{dx}\left[y\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[-x] \quad (3.452)$$

$$1\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = -1 \quad (3.453)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = -1 \quad (3.454)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2}{y^2} - 1. \quad (3.455)$$

Exercícios resolvidos

ER 3.7.1. Calcule dy/dx para a lemniscata de Bernoulli⁷

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \quad (3.456)$$

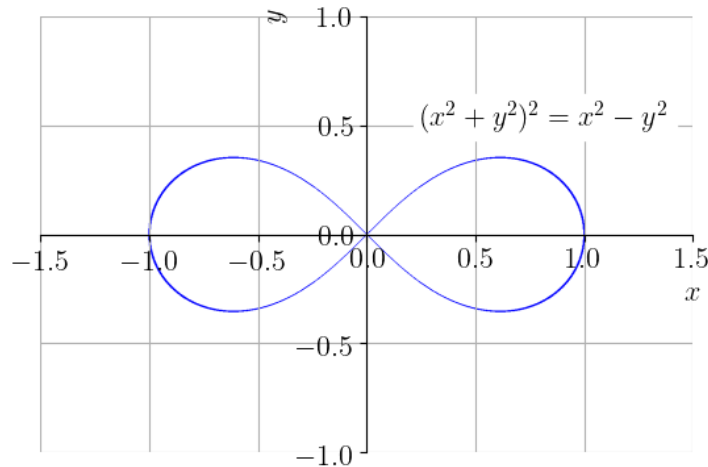


Figura 3.12: Esboço da lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Solução.

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx} [x^2 - y^2] \quad (3.457)$$

$$2(x^2 + y^2) \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 2x - 2y \frac{dy}{dx} \quad (3.458)$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$2(y + 2x^2y + 2y^2) \frac{dy}{dx} = 2x - 4xy^2 - 4x^3 \quad (3.459)$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2x^3 - 2xy^2}{y + 2x^2y + 2y^3} \quad (3.460)$$

◇

⁷Jacob Bernoulli, 1655 - 1705, matemático suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

ER 3.7.2. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3.461)$$

no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$ é dada por

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \quad (3.462)$$

onde, nesse caso, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.463)$$

Calculamos dy/dx como segue

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 1 \quad (3.464)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2(x)) = 0 \quad (3.465)$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.466)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.467)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.468)$$

Com isso, temos

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)} \quad (3.469)$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (3.470)$$

$$= -1. \quad (3.471)$$

Concluimos que a equação da reta tangente é

$$y = -1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.472)$$

$$y = -x + \sqrt{2}. \quad (3.473)$$

◇

Exercícios

Exercício 3.7.1. Calcule dy/dx para:

a) $x + 2xy - x^3 = 3$

b) $x^2 + y^2 = xy$

Exercício 3.7.2. Calcule d^2y/dx^2 para

$$x^2 + y^2 = xy \quad (3.474)$$

Exercício 3.7.3. Encontre o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de

$$y^2 = x - 1 \quad (3.475)$$

nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 1)$.

Exercício 3.7.4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência de centro $C = (1, 1)$ e raio $r = 1$ que passa pela origem $O = (0, 0)$.

Exercício 3.7.5. Seja c a circunferência de raio $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (3.476)$$

Mostra que a reta tangente ao gráfico de c em qualquer ponto arbitrário $P = (x_0, y_0) \in c$ é perpendicular a reta \overline{OP} , i.e. a reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ e pelo ponto P .

Capítulo 4

Aplicações da derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Observação 4.0.1. Nos códigos [SymPy](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x', real=True)
```

4.1 Regra de L'Hôpital

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A regra de L'Hôpital é uma técnica para o cálculo de limites de indeterminações. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto contendo $x = a$, exceto possivelmente em $x = a$, e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (4.1)$$

Se, ainda, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ existe ou for $\pm\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.2)$$

Esta é a versão da regra de L'Hôpital para indeterminações do tipo $0/0$. Sem grandes modificações, é diretamente estendida para os casos $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Exemplo 4.1.1. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}. \quad (4.3)$$

a) Pela regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)'}{(x^2-1)'} \quad (4.4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

b) Por eliminação do fator comum.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \quad (4.7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

No [SymPy](#)¹, temos

```
>>> limit((x-1)/(x**2-1),x,1)
1/2
```

Exemplo 4.1.2. O limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} \quad (4.10)$$

é uma indeterminação 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{0}{\cancel{2x-4}}}{\overset{0}{\cancel{3x^2-6x}}} \quad (4.11)$$

que também é uma indeterminação do tipo 0/0. Agora, aplicando a regra de L'Hôpital novamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{3x^2-6x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{6x-6} = \frac{1}{3}. \quad (4.12)$$

¹Veja a Observação 4.0.1.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{1}{3}. \quad (4.13)$$

No [SymPy](#)², temos

```
>>> limit((x**2-4*x+4)/(x**3-3*x**2+4),x,2)
1/3
```

Observação 4.1.1. A regra de L'Hôpital também pode ser usada para indeterminações do tipo ∞/∞ .

Exemplo 4.1.3. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}, \quad (4.14)$$

que é uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty. \quad (4.15)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 4.1.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}. \quad (4.16)$$

Solução. Observamos tratar-se de uma indeterminação do tipo $0/0$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \nearrow 1}{x^2 \nearrow 0}. \quad (4.17)$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \nearrow 1}{2x \nearrow 0} = -\infty. \quad (4.18)$$

²Veja a Observação 4.0.1.

◇

ER 4.1.2. (Indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$)

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x}. \quad (4.19)$$

Solução. Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \overset{\infty}{x^{51}} \overset{0}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{\infty}{x^{51}}}{\overset{\infty}{e^x}} \quad (4.20)$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital sucessivamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{51}}{e^x} \quad (4.21)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot x^{50}}{e^x} \quad (4.22)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot 50 \cdot x^{49}}{e^x} \quad (4.23)$$

$$\vdots \quad (4.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51!}{\overset{\infty}{e^x}} = 0. \quad (4.25)$$

◇

ER 4.1.3. (Indeterminação do tipo $\infty - \infty$)

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad (4.26)$$

Solução. Trata-se de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\overset{\infty}{\frac{1}{x}} - \overset{\infty}{\frac{1}{e^x - 1}} \right). \quad (4.27)$$

Neste caso, calculando a subtração, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + x}{xe^x - x}, \quad (4.28)$$

a qual é uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{e^x}{\cancel{1}} \overset{0}{\nearrow}}{\underset{e^x}{\cancel{(x+1)}} \overset{0}{\nearrow}} \quad (4.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{(x+2)e^x} \quad (4.30)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

◇

ER 4.1.4. (Indeterminação do tipo 1^∞)

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}. \quad (4.32)$$

Solução. Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞ . Em tais casos, a seguinte estratégia pode ser útil. Nos pontos de continuidade da função logaritmo natural, temos

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left((1+x)^{1/x} \right) \quad (4.33)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{\ln(1+x)}{\cancel{1}} \overset{0}{\nearrow}}{\overset{0}{\searrow} \cancel{x}} \quad (4.34)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1. \quad (4.35)$$

Ou seja,

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e. \quad (4.36)$$

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 4.1.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+3x+2}. \quad (4.37)$$

Exercício 4.1.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-51} e^x. \quad (4.38)$$

Exercício 4.1.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right). \quad (4.39)$$

Exercício 4.1.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{2x}}. \quad (4.40)$$

4.2 Extremos de funções

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja f uma função com domínio D . Dizemos que f tem o valor **máximo global**³ $f(a)$ no ponto $x = a$ quando

$$f(x) \leq f(a), \quad (4.41)$$

para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que f tem o valor **mínimo global**⁴ $f(b)$ no ponto $x = b$ quando

$$f(x) \geq f(b), \quad (4.42)$$

para todo $x \in D$. Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos globais** (ou extremos absolutos).

Exemplo 4.2.1. A função $f(x) = x^2$ tem valor mínimo global no ponto $x = 0$ e não assume valor máximo global. A função $g(x) = -x^2$ tem valor máximo global no ponto $x = 0$ e não assume valor mínimo global. A função $h(x) = x^3$ não assume valores mínimo e máximo globais. Veja a Figura 4.1.

³Também chamado de máximo absoluto.

⁴Também chamado de mínimo absoluto.

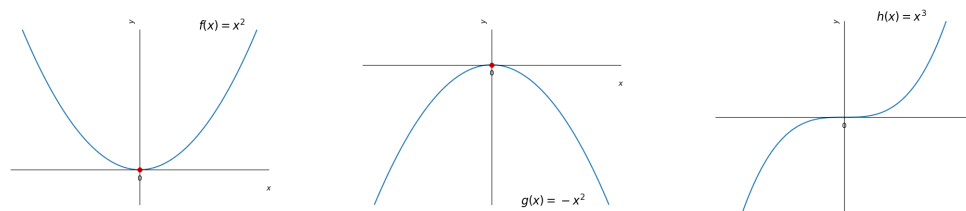


Figura 4.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 4.2.1.

Teorema 4.2.1. (Teorema do valor extremo) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo como um valor mínimo global em $[a, b]$.

Exemplo 4.2.2. Vejamos os seguintes casos:

- a) A função $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ é contínua no intervalo fechado $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Assume valor mínimo global 1 no ponto $x = 1$. Ainda, assume valor máximo global igual a 2 no ponto $x = 0$. Veja Figura 4.2.

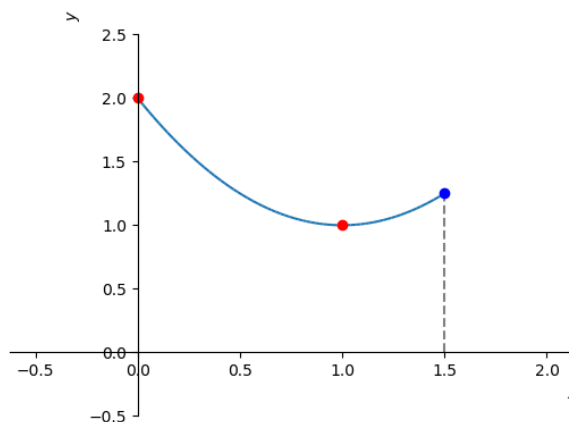


Figura 4.2: Esboço do gráfico de $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ no intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Veja o Exemplo 4.2.2 a).

- b) A função $g(x) = \ln x$ é contínua no intervalo $(0, e]$. Neste intervalo, assume valor máximo global no ponto $x = e$, mas não assume valor mínimo global. Veja Figura 4.3.

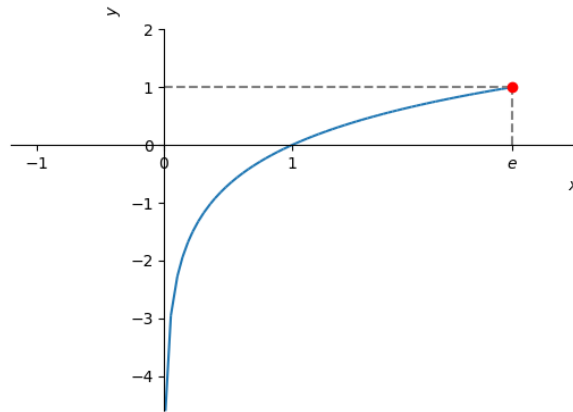


Figura 4.3: Esboço do gráfico de $g(x) = \ln x$ no intervalo $(0, e]$. Veja o Exemplo 4.2.2 b).

- c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \quad (4.43)$$

definida no intervalo $[0, 1]$ é descontínua no ponto $x = 1$. Neste intervalo, assume valor mínimo global no ponto $x = 0$, mas não assume valor máximo global. Veja a Figura 4.4.

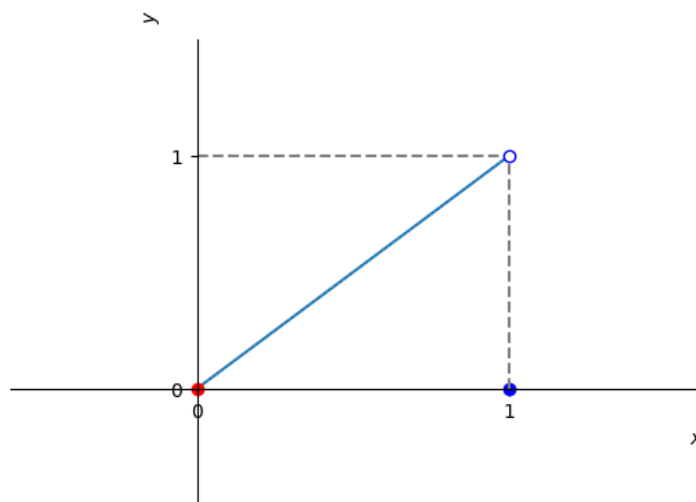


Figura 4.4: Esboço do gráfico de $h(x)$ no intervalo $[0,1]$. Veja o Exemplo 4.2.2 c).

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior $x = a$ de seu domínio, se $f(x) < f(a)$ para todo x em um intervalo aberto em torno de a , excluindo-se $x = a$. Analogamente, f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior $x = b$ de seu domínio, se $f(x) > f(b)$ para todo x em um intervalo aberto em torno de b , excluindo-se $x = b$. Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos). Um tal ponto é chamado de **ponto de máximo local** ou de **mínimo local**, conforme o caso.

Exemplo 4.2.3. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ |x| & , -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \quad (4.44)$$

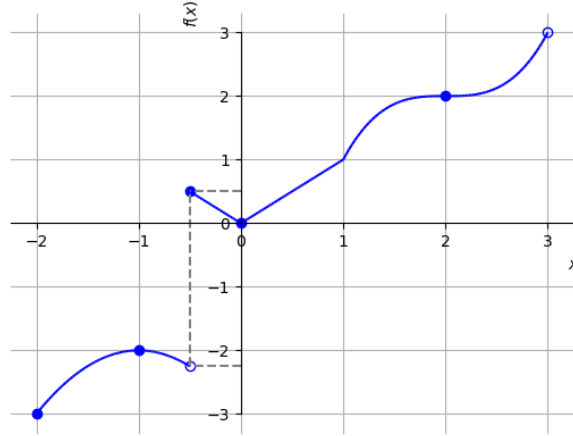


Figura 4.5: Esboço do gráfico de $f(x)$ discutida no Exemplo 4.2.3.

Na Figura 4.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que f tem valores máximos locais nos pontos $x = -1$ e $x = -1/2$. No ponto $x = 0$ tem um valor mínimo local. Observamos que $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$ não são pontos de extremos locais desta função. No ponto $x = -2$, f tem seu valor mínimo global. Ainda, f não tem valor máximo global.

Teorema 4.2.2. (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se f possui um valor extremo local em um ponto $x = a$ e f é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \quad (4.45)$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função f pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde $f' = 0$,
2. pontos interiores de seu domínio onde f' não existe, ou
3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função f onde $f' = 0$ ou f' não existe, é chamado de **ponto crítico** da função.

Observação 4.2.1. Uma função tem valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

Exemplo 4.2.4. Consideramos a função $f(x)$ discutida no Exemplo 4.2.3. No ponto $x = -1$, $f'(-1) = 0$ e f tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = 2$, também temos $f'(2) = 0$, mas f não tem valor extremo neste ponto.

No ponto $x = 0$, $f'(0)$ não existe e f tem valor mínimo local neste ponto. No ponto, $x = -1/2$, $f'(1/2)$ não existe e f tem valor máximo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que f tem valor mínimo global no ponto $x = -2$, mas não tem extremo global no ponto $x = 3$.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 4.2.1. Determine os pontos extremos da função $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ no intervalo $[-2, 1]$.

Solução. Os valores extremos de um função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como $f(x) = (x+1)^2 - 1$ é diferenciável no intervalo $(-2, 1)$, seus pontos críticos são pontos tais que $f' = 0$. Para identificá-los, calculamos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x + 1) = 0 \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow x = -1. \quad (4.47)$$

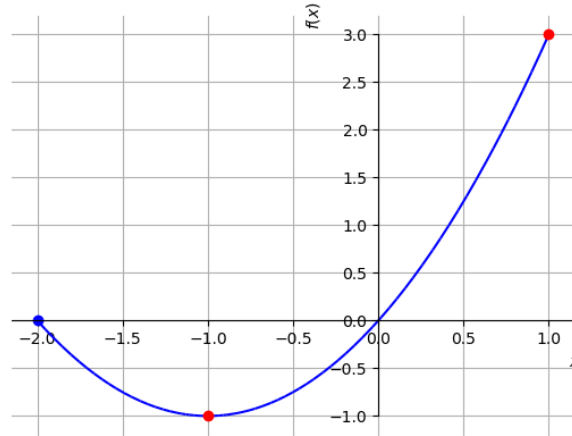


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ discutida no Exercício Resolvido 4.2.1.

Desta forma, f pode ter valores extremos nos pontos $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 4.6) e a seguinte tabela:

| x | -2 | -1 | 1 |
|--------|----|----|---|
| $f(x)$ | 0 | -1 | 3 |

Daí, podemos concluir que f tem o valor mínimo global (e local) de $f(-1) = -1$ no ponto $x = -1$ e tem valor máximo global de $f(1) = 3$ no ponto $x = 1$.

Podemos usar o [SymPy](#) para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos⁵:

```
>>> f = (x+1)**2-1, f
>>> f = (x+1)**2-1; f
(x + 1)**2 - 1
>>> f1 = diff(f,x); f1
2*x + 2
>>> xc = solve(f1,x); xc
```

⁵Veja a Observação 4.0.1.


```
[ -1]
>>> f.subs(x,-2); f.subs(x,-1); f.subs(x,1)
>>> plot(f,(x,-2,1))
```

◇

ER 4.2.2. Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1, 1]$.

Solução. Como f é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$, temos que seus pontos críticos são tais que $f'(x) = 0$. Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4.48)$$

é o único ponto crítico de f . Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura 4.7) vemos que f não tem valor extremo local neste ponto. Assim, seus pontos extremos só podem ocorrer nos extremos do domínio $[-1, 1]$. Concluimos que $f(-1) = -1$ é o valor mínimo global de f e $f(1) = 1$ é seu valor máximo global.

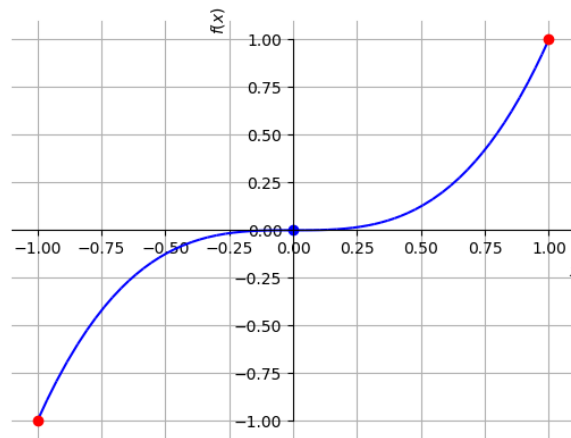


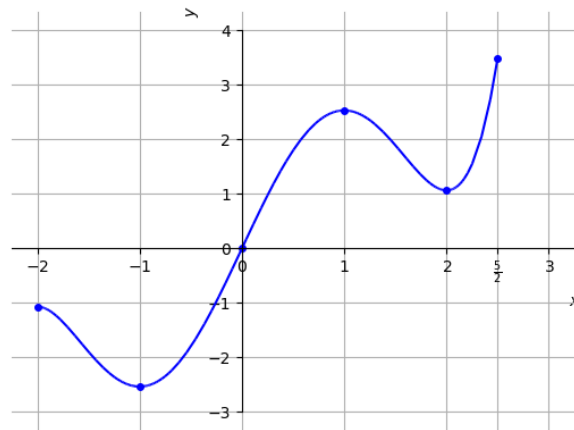
Figura 4.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3$ discutida no Exercício Resolvido 4.2.2.

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 4.2.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Determine e classifique os pontos extremos desta função.

Exercício 4.2.2. Dada a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ restrita ao intervalo $[-1, 2]$, determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

Exercício 4.2.3. Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ restrita ao intervalo $[0, 3]$, determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

Exercício 4.2.4. Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ restrita ao intervalo $[0, \infty)$, determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

Exercício 4.2.5. Dada a função $f(x) = x^{1/3}$ restrita ao intervalo $[-1, 1]$, determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

4.3 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

4.3.1 Teorema de Rolle

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O Teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

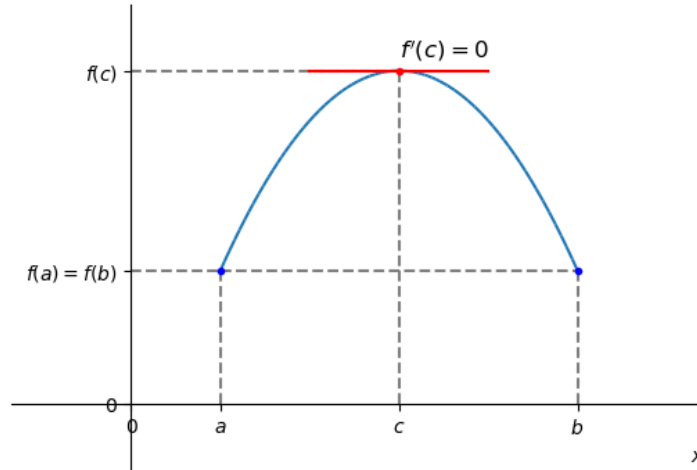


Figura 4.8: Ilustração do Teorema de Rolle.

Teorema 4.3.1. (Teorema de Rolle) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se

$$f(a) = f(b), \quad (4.49)$$

então existe pelo menos um **ponto crítico** $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0. \quad (4.50)$$

Exemplo 4.3.1. O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ tem pelo menos um ponto crítico no intervalo $(0,1)$ e no intervalo $(1,3)$. De fato, temos $p(0) = p(1) = 1$ e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Analogamente, como também $p(1) = p(3) = 1$, segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo $(1,3)$. Veja o esboço do gráfico de p na Figura 4.9.

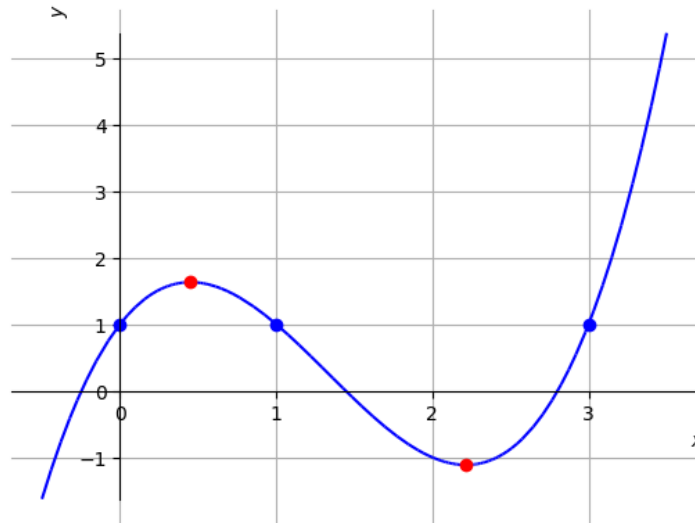


Figura 4.9: Esboço do gráfico de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

De fato, como todo polinômio é derivável em toda parte, podemos calcular os pontos críticos como segue.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{6} \quad (4.52)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,45 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,22. \quad (4.53)$$

Podemos usar os seguintes comandos⁶ para computar os pontos críticos de p e plotar seu gráfico:

```
>>> p = x**3 - 4*x**2 + 3*x + 1
>>> pc = solve(p.diff()); pc
[-sqrt(7)/3 + 4/3, sqrt(7)/3 + 4/3]
>>> plot(p, (x, -0.5, 3.5))
```

Exemplo 4.3.2. Vejamos os seguintes casos em que o Teorema de Rolle não se aplica:

⁶Veja a Observação 4.0.1.

a) A função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases} \quad (4.54)$$

é tal que $f(0) = f(1) = 0$, entretanto sua derivada $f'(x) = 1$ no intervalo $(0, 1)$. Ou seja, a condição da f ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle. Veja a Figura 4.10 para o esboço do gráfico desta função.

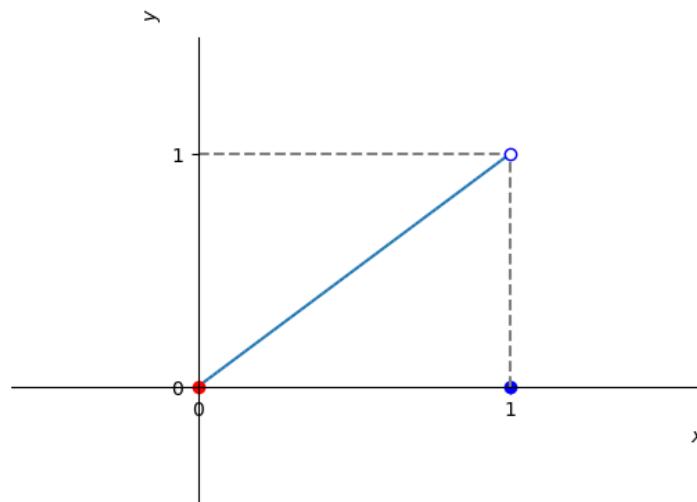


Figura 4.10: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 4.3.2 a).

- b) Não existe ponto tal que a derivada da $g(x) = -|x - 1| + 1$ seja nula. Entretanto, notemos que $g(0) = g(2) = 0$ e g contínua no intervalo fechado $[0, 2]$. O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois g não é derivável no intervalo $(0, 2)$, mais especificamente, no ponto $x = 1$. Veja a Figura 4.11.

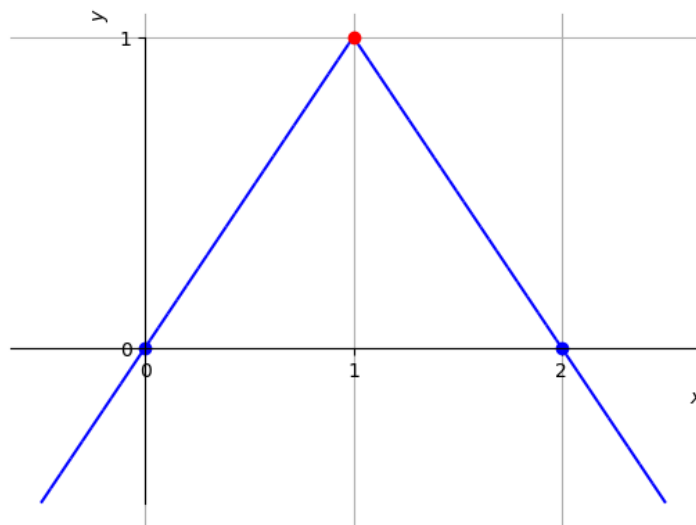


Figura 4.11: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 4.3.2 b).

4.3.2 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

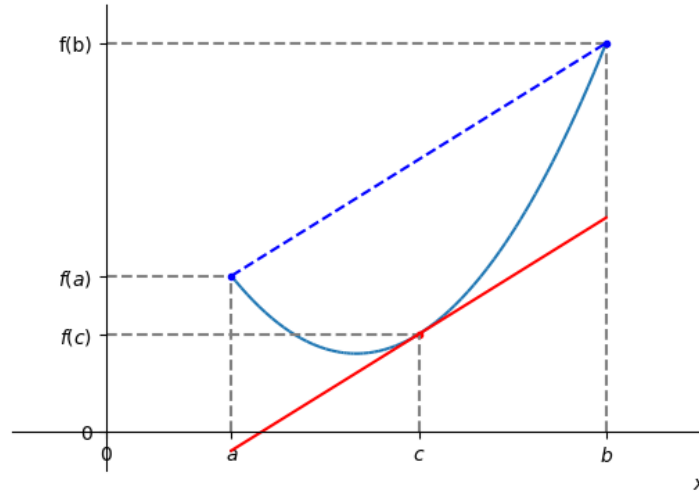


Figura 4.12: Ilustração do Teorema do valor médio.

Teorema 4.3.2. (Teorema do valor médio) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.55)$$

Observação 4.3.1. Em um contexto de aplicação, o Teorema do valor médio relaciona a taxa de variação média da função em um intervalo $[a, b]$ com a taxa de variação instantânea da função em um ponto interior deste intervalo.

Exemplo 4.3.3. A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[0, 2]$ e diferenciável no intervalo $(0, 2)$. Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto $c \in (0, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \quad (4.56)$$

De fato, $f'(x) = 2x$ e, portanto, tomando $c = 1$, temos $f'(c) = 2$.

Corolário 4.3.1. (Funções com derivadas nulas são constantes) Se $f'(x) = 0$ para todos os pontos em um intervalo (a, b) , então f é constante neste intervalo.

Demonstração. De fato, sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ e, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$. Então, temos f é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) . Segue do teorema do valor médio que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (4.57)$$

Como $f'(c) = 0$, temos $f(x_2) = f(x_1)$. Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo (a, b) , logo é constante neste intervalo. \square

Corolário 4.3.2. (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os pontos em um intervalo aberto (a, b) , então $f(x) = g(x) + C$, C constante, para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração. Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função $h(x) = f(x) - g(x)$. \square

Corolário 4.3.3. (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 4.3.4. Vamos estudar a monotonicidade da função polinomial $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$. Na Figura 4.13, temos o esboço de seu gráfico.

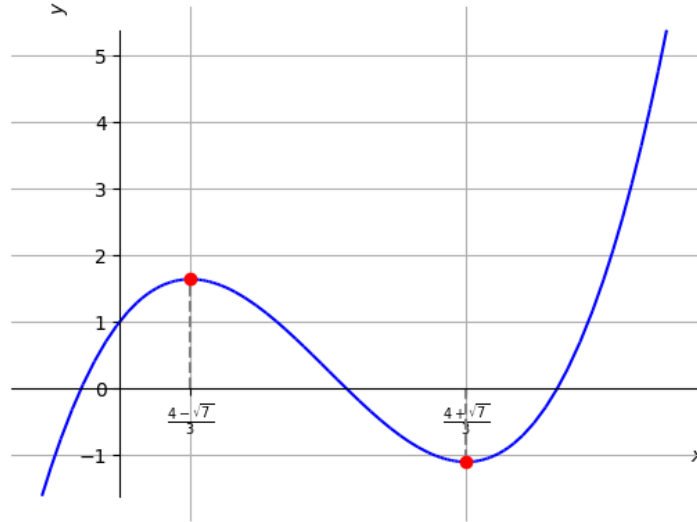


Figura 4.13: Esboço do gráfico de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

Podemos usar o Corolário 4.3.3 para estudarmos a monotonicidade (i.e. intervalos de crescimento ou decrescimento). Isto é, fazemos o estudo de sinal da derivada de f . Calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3. \quad (4.58)$$

Logo, temos



Ou seja, $f'(x) < 0$ no conjunto $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ e $f'(x) < 0$ no conjunto $\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)$. Concluimos que f é **crescente** nos intervalos $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right]$ e $\left[\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$, enquanto que f é **decrescente** no intervalo $\left[\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right]$.

Exemplo 4.3.5. A função exponencial $f(x) = e^x$ é crescente em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = e^x > 0, \quad (4.59)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 4.3.1. Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

Solução. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida pelo carro e t o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, existe tempo $t_1 \in (0, 1,5)$ tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1,5) - s(0)}{1,5 - 0} = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ km/h.} \quad (4.60)$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

◇

ER 4.3.2. Estude a monotonicidade da função gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

Solução. Para estudarmos a monotonicidade de uma função, podemos fazer o estudo de sinal de sua derivada. Neste caso, temos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}. \quad (4.61)$$

Assim, vemos que

| | | | |
|---|---|---|---------|
| + | | - | $-2x$ |
| + | 0 | + | e^x |
| + | | - | $f'(x)$ |
| | 0 | | |

Concluimos que f é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e decrescente no intervalo $(0, \infty)$.

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 4.3.1. Estude a monotonicidade de $f(x) = x^2 - 2x$.

Exercício 4.3.2. Estude a monotonicidade de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Exercício 4.3.3. Estude a monotonicidade de $f(x) = \ln x$.

Exercício 4.3.4. Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

4.4 Teste da primeira derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Seção 4.2, vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 4.3.3 nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja c um ponto crítico de uma função contínua f e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b) contendo c , exceto possivelmente no ponto c . Movendo-se no sentido positivo em x :

- se $f'(x)$ muda de negativa para positiva em c , então f possui um mínimo local em c ;
- se $f'(x)$ muda de positiva para negativa em c , então f possui um máximo local em c ;
- se f' não muda de sinal em c , então c não é um extremo local de f .

Veja a Figura 4.14.

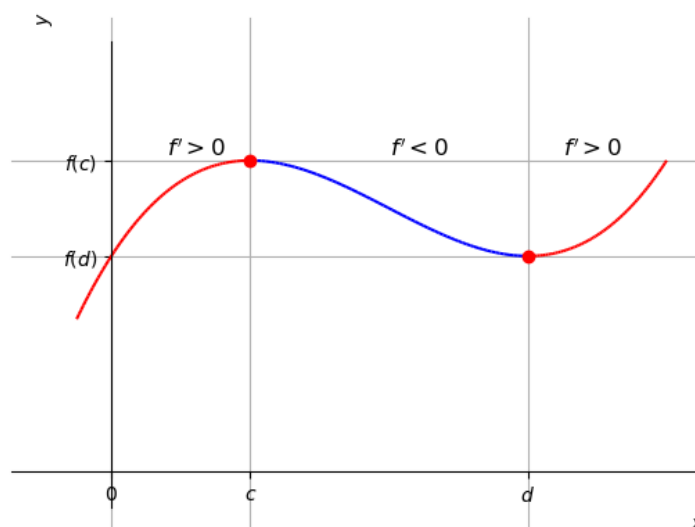


Figura 4.14: Ilustração do teste da primeira derivada com c ponto de máximo local e d ponto de mínimo local.

Exemplo 4.4.1. Consideremos a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$. Como f é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.62)$$

Temos $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Segue, que os pontos críticos são

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad (4.63)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \quad (4.64)$$

Com isso, temos

| Intervalo | $x < 1$ | $1 < x < 3$ | $3 < x$ |
|-----------|-----------|-------------|-----------|
| f' | + | - | + |
| f | crescente | decrecente | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 1$ é ponto de máximo local e que $x_2 = 3$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar o [SymPy](#) para computarmos a derivada de f com o comando⁷

```
f1 = diff(x**3/3-2*x**2+3*x+3)
```

Então, podemos resolver $f'(x) = 0$ com o comando

```
solve(f1)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da f' com os comandos

```
reduce_inequalities(f1<0)
```

```
reduce_inequalities(f1>0)
```

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 4.4.1. Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \quad (4.65)$$

Solução. Como o domínio da f é $(-\infty, \infty)$ e f é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.66)$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.67)$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.68)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3 \pm 1}{2}. \quad (4.69)$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \quad (4.70)$$

Portanto, os pontos críticos são $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Fazendo o estudo de sinal da f' , temos

⁷Veja a Observação 4.0.1.

| | $x < 0$ | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ | $2 < x$ |
|----------------|------------|-------------|-------------|-----------|
| $4x$ | - | + | + | + |
| $x^2 - 3x + 2$ | + | + | - | + |
| $f'(x)$ | - | + | - | + |
| f | decrecente | crescente | decrecente | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 0$ é ponto de mínimo local, $x_2 = -2$ é ponto de máximo local e $x_3 = -1$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)⁸ para resolvermos este exercício:

```
# f'
fl = Lambda(x, diff(x**4 - 4*x**3 + 4*x**2,x))
# f'(x) = 0
solve(fl(x))
# fl(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# fl(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
```

◇

ER 4.4.2. Encontre o valor máximo global de $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

Solução. Como f é diferenciável em toda parte, temos que seu máximo ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (4.71)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (4.72)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (4.73)$$

Fazendo o estudo de sinal da derivada, obtemos

| | $x < 0$ | $0 < x$ |
|------|-----------|------------|
| f' | + | - |
| f | crescente | decrecente |

⁸Veja a Observação 4.0.1.

Portanto, do teste da primeira derivada, podemos concluir que $x = 2$ é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é $f(2) = e^{-2}$. Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty, \quad (4.74)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{-x} = 0. \quad (4.75)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de f é $f(2) = e^{-2}$.

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)⁹ para resolvermos este exercício:

```
# f(x)
f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
# f'(x)
fl = Lambda(x, diff(f(x), x))
# pontos críticos
xc = solve(fl(x))
# f'(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# f'(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
# lim f(x), x->-oo
limit(f(x), x, -oo)
# lim f(x), x->oo
limit(f(x), x, oo)
# f(2)
f(xc[0])
```

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 4.4.1. Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^2 - 2x$.

⁹Veja a Observação 4.0.1.

Exercício 4.4.2. Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Exercício 4.4.3. Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$.

4.5 Concavidade e o Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O gráfico de uma função diferenciável f é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto I , se f' é crescente em I ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto I , se f' é decrescente em I .

Assumindo que f é duas vezes diferenciável, temos que a monotonicidade de f' está relacionada ao sinal de f'' (a segunda derivada de f). Logo, o gráfico de f é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto I , se $f'' > 0$ em I ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto I , se $f'' < 0$ em I .

Exemplo 4.5.1. Vejamos os seguintes casos:

- a) o gráfico de $f(x) = x^2$ é uma parábola côncava para cima em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = 2x, \quad (4.76)$$

uma função crescente em toda parte. Também, temos

$$f''(x) = 2 > 0, \quad (4.77)$$

em toda parte.

- b) o gráfico de $g(x) = -x^2$ é uma parábola côncava para baixo em toda parte. De fato, temos

$$g'(x) = -2x, \quad (4.78)$$

uma função decrescente em toda parte. Também, temos

$$g''(x) = -2 < 0, \quad (4.79)$$

em toda parte.

- c) o gráfico da função $h(x) = x^3$ é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$. De fato, temos

$$h'(x) = x^2, \quad (4.80)$$

que é uma função decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$. Também, temos

$$h''(x) = 2x \quad (4.81)$$

que assume valores negativos em $(-\infty, 0)$ e valores positivos em $(0, \infty)$.

Um ponto em que o gráfico de uma função f muda de concavidade é chamado de **ponto de inflexão**. Em tais pontos temos

$$f'' = 0 \quad \text{ou} \quad \nexists f''. \quad (4.82)$$

Exemplo 4.5.2. Vejamos os seguintes casos:

- a) O gráfico da função $f(x) = x^3$ tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$f'(x) = 3x^2 \quad (4.83)$$

que é diferenciável em toda parte com

$$f''(x) = 6x. \quad (4.84)$$

Logo, os pontos de inflexão ocorrem quando

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \quad (4.85)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.86)$$

- b) O gráfico da função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0. \quad (4.87)$$

Segue que

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad x \neq 0, \quad (4.88)$$

donde $g'' > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $g'' < 0$ em $(0, \infty)$. Isto é, o gráfico de g muda de concavidade em $x = 0$, $\nexists g''(0)$, sendo g côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo em $(0, \infty)$.

4.5.1 Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $x = x_0$ um ponto crítico de uma dada função f duas vezes diferenciável e f'' contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$. Temos

- a) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então $x = x_0$ é um ponto de mínimo local de f ;
- b) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então $x = x_0$ é um ponto de máximo local de f .

Exemplo 4.5.3. A função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ tem pontos críticos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.89)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad (4.90)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2. \quad (4.91)$$

A segunda derivada de f é

$$f''(x) = 12x - 18. \quad (4.92)$$

Logo, como $f''(x_1) = f''(1) = -6 < 0$, temos que $x_1 = 1$ é ponto de máximo local de f . E, como $f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$, temos que $x_2 = 2$ é ponto de mínimo local de f .

Observação 4.5.1. Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então $x = x_0$ pode ser ponto extremo local de f ou não. Ou seja, o teste é inconclusivo.

Exemplo 4.5.4. Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = x^3$ tem ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.94)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (4.95)$$

Neste caso, $x = 0$ não é ponto de extremo local e temos $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$.

b) A função $f(x) = x^4$ tem um ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \quad (4.96)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.97)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (4.98)$$

Neste caso, $x = 0$ é ponto de mínimo local e temos $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 4.5.1. Encontre o valor máximo global de $f(x) = (x - 1)e^{-x}$.

Solução. Como f é diferenciável em toda parte, temos que seu valor máximo (se existir) ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (4.99)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (4.100)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (4.101)$$

Agora, usando o teste da segunda derivada, temos

$$f''(x) = (x - 3)e^{-x} \Rightarrow f''(2) = -e^{-2} < 0. \quad (4.102)$$

Logo, $x = 2$ é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é $f(2) = e^{-2}$. Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty, \quad (4.103)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{-x} = 0. \quad (4.104)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de f é $f(2) = e^{-2}$.

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)¹⁰ para resolvermos este exercício:

```
>>> f = (x-1)*exp(-x)
>>> f1 = diff(f,x)
>>> f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
>>> f1 = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(f1(x))
[2]
>>> f11 = Lambda(x, diff(f(x),x,2))
>>> f11(2)
-2
-e
>>> f(2), f1(2), f11(2)
-2      -2
e , 0, -e
>>> limit(f(x),x,oo)
0
>>> limit(f(x),x,-oo)
-oo
```

◇

ER 4.5.2. Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad (4.105)$$

restrita ao intervalo de $[-1, 3]$.

Solução. Como f é diferenciável em $(-1, 3)$, temos que seus extremos locais ocorrem nos seguintes pontos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \quad (4.106)$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.107)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2. \quad (4.108)$$

Calculando a segunda derivada de f , temos

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8. \quad (4.109)$$

¹⁰Veja a Observação 4.0.1.

Do teste da segunda derivada, temos

$$f''(x_1) = f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ pto. mín. local} \quad (4.110)$$

$$f''(x_2) = f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ pto. máx. local} \quad (4.111)$$

$$f''(x_3) = f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ pto. mín. local} \quad (4.112)$$

Agora, vejamos os valores de f em cada ponto de interesse.

| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------|----|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 0 | 1 | 0 | 9 |

Então, podemos concluir que $x = -1$ e $x = 3$ são pontos de máximo global (o valor máximo global é $f(-1) = f(3) = 9$), $x = 1$ é ponto de máximo local, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de mínimo global (o valor mínimo global é $f(0) = f(2) = 0$).

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy¹¹](#) para resolvermos este exercício:

```
>>> f = Lambda(x, x**4 - 4*x**3 + 4*x**2)
>>> f1 = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(f1(x))
[0, 1, 2]
>>> f11 = Lambda(x, diff(f1(x),x))
>>> f11(0), f11(1), f11(2)
(8, -4, 8)
>>> f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)
(9, 0, 1, 0, 9)
```

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 4.5.1. Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^2 - 2x$.

¹¹Veja a Observação 4.0.1.

Exercício 4.5.2. Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Exercício 4.5.3. Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$.

Exercício 4.5.4. Seja $f(x) = -x^4$. Mostre que $x = 0$ é ponto de máximo local de f e que $f'(0) = f''(0) = 0$.

Capítulo 5

Integração

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Observação 5.0.1. Nos códigos [Python](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_session()
```

5.1 Noção de integral

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

5.1.1 Soma de Riemann

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Seja, também, P a seguinte **partição** de $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}, \quad (5.1)$$

onde $n + 1$ é o número de pontos na partição. Definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (5.2)$$

o tamanho de cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ da partição, com $i = 1, 2, \dots, n$. A **norma da partição** é definida por

$$\|P\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i, \quad (5.3)$$

i.e. o tamanho do maior subintervalo da partição. Com isso, chama-se de uma **soma de Riemann** toda a expressão da forma

$$S_n := \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (5.4)$$

onde $x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$ (arbitrariamente escolhido).

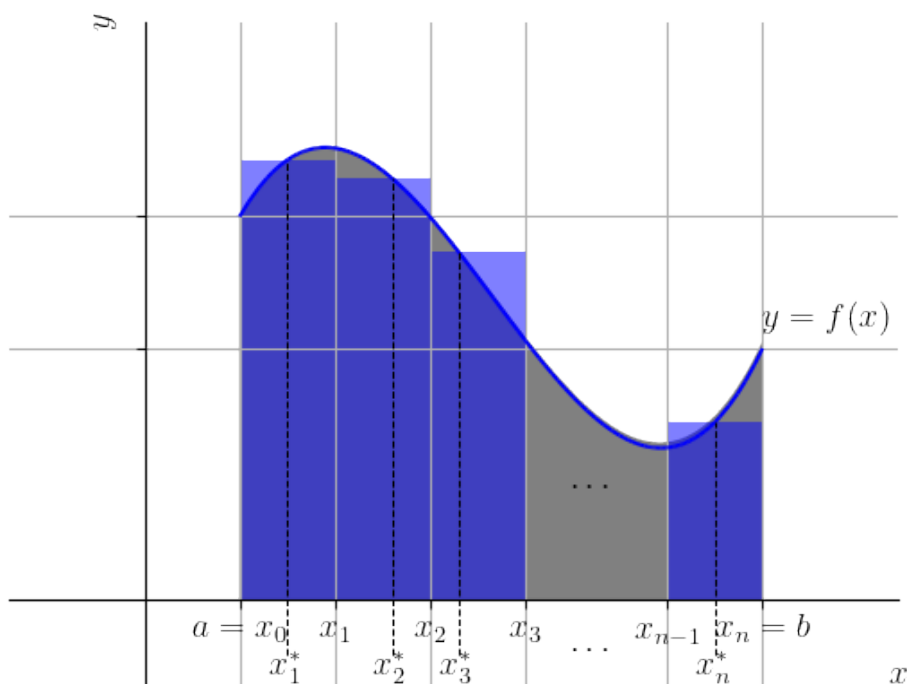


Figura 5.1: Ilustração da soma de Riemann.

Observação 5.1.1. (Aproximação da área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa, uma soma de Riemann é uma aproximação da área sob seu gráfico e o eixo das abscissas¹. Veja a Figura 5.1.

¹Veja o Exercício 5.1.4 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

5.1.2 Integral

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A integral (definida) de a até b de uma dada função f em relação a x é denotada e definida por

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (5.5)$$

De forma genérica, a integral definida de a até b é o limite das somas de Riemann quando a norma das partições P do intervalo $[a, b]$ tendem a zero. Quando o limite existe, dizemos que f é **integrável** no intervalo $[a, b]$.

Observação 5.1.2. Na notação de integral definida acima, chamamos a de **limite inferior** e b de **limite superior de integração**, f é chamada de **integrando** e x de **variável de integração**.

Observação 5.1.3. Funções contínuas são funções integráveis.

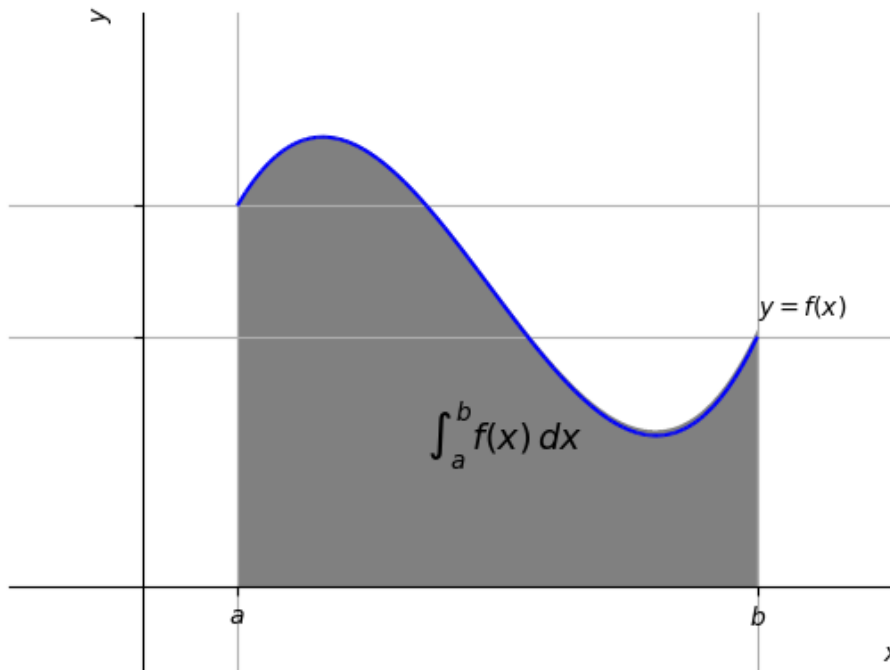


Figura 5.2: A integral definida como a área sob o gráfico.

Observação 5.1.4. (Área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.6)$$

é a área sob o gráfico de f^2 . Veja a Figura 5.2.

Exemplo 5.1.1. Vamos calcular

$$\int_0^1 1 dx. \quad (5.7)$$

Aqui, o integrando é a função constante $f(x) \equiv 1$ e o **intervalo de integração** é $[a, b]$. Da Observação 5.1.4, temos que esta integral é a área sob o gráfico de f no intervalo $[0, 1]$. Esta área é um retângulo de altura 1 e comprimento 1. Logo,

$$\int_0^1 1 dx = 1 \cdot 1 = 1. \quad (5.8)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 5.1.1. Calcule

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.9)$$

Solução. Esta integral corresponde à área sob o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ restrita ao intervalo $[-1, 1]$. Observando que

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 1, \quad (5.11)$$

vemos que esta é a área do semicírculo de raio 1. Logo,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (5.12)$$

◇

²Veja o Exercício 5.1.5 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

ER 5.1.2. Determine a função $F(x)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x t \, dt, \quad (5.13)$$

para todo $x \geq 0$. Então, mostre que $F'(x) = x$.

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 5.1.1. Calcule

$$\int_{-1}^2 2 \, dx. \quad (5.17)$$

Exercício 5.1.2. Calcule

$$\int_{-3}^{-1} 1 - x \, dx. \quad (5.18)$$

Exercício 5.1.3. Determine $F(x)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x t + 1 \, dt. \quad (5.19)$$

para $x \geq 0$. Então, calcule $F'(x)$.

Exercício 5.1.4. Faça uma interpretação geométrica da uma soma de Riemann aplicada a uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

Exercício 5.1.5. Faça uma interpretação geométrica de

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (5.20)$$

quando f é uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

Exercício 5.1.6. Calcule

$$\int_{-1}^2 -1 \, dx. \quad (5.21)$$

Exercício 5.1.7. Calcule

$$\int_{-1}^1 x \, dx. \quad (5.22)$$

5.2 Propriedades de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 5.1, vimos que a integral definida de uma dada função f em um intervalo $[a, b]$ está associada à área (líquida) entre seu gráfico e as retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Veja a Figura 5.2.

Com base nesta noção geométrica, podemos inferir as seguintes propriedades de integração para funções integráveis f e g :

- a) $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- b) $\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$
- c) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$
- d) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$
- e) $\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a)$

Exemplo 5.2.1. Sejam f e g funções integráveis tais que

$$\int_{-1}^4 f(x) \, dx = 2, \quad (5.23)$$

$$\int_4^5 f(x) \, dx = 3, \quad (5.24)$$

$$\int_{-1}^4 g(x) \, dx = -1. \quad (5.25)$$

Então, vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int_4^{-1} g(x) dx = - \int_{-1}^4 g(x) dx = -(-1) = 1. \quad (5.26)$$

b)

$$\int_{-1}^{-1} 4f(x) dx = 0. \quad (5.27)$$

c)

$$\int_{-1}^4 -2g(x) dx = -2 \int_{-1}^4 g(x) dx = 2. \quad (5.28)$$

d)

$$\int_{-1}^4 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_{-1}^4 f(x) dx - \int_{-1}^4 2g(x) dx \quad (5.29)$$

$$= 2 - 2 \int_{-1}^4 g(x) dx \quad (5.30)$$

$$= 2 + 2 = 4. \quad (5.31)$$

e)

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \quad (5.32)$$

$$= 2 + 3 = 5. \quad (5.33)$$

Exemplo 5.2.2. Lembrando que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, temos da propriedade e) acima que

$$2\pi \min_{x \in [-\pi, \pi]} \{\text{sen}(x)\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x) dx \leq 2\pi \max_{x \in [p, \pi]} \{\text{sen}(x)\} \quad (5.34)$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x) dx \leq 2\pi. \quad (5.35)$$

5.2.1 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Com base na noção de integral, define-se a média de uma função f no intervalo $[a, b]$ por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (5.36)$$

no caso de f ser integrável neste intervalo.

Teorema 5.2.1. (Teorema do valor médio para integrais) Se f for contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.37)$$

Demonstração. Vejamos uma ideia da demonstração. Da propriedade de integração e) acima, temos

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}. \quad (5.38)$$

Agora, pelo Teorema do valor intermediário (Teorema 2.6.1), temos f assume todos os valores entre seus valores mínimo e máximo. Logo, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.39)$$

□

Exemplo 5.2.3. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, $a \neq b$, e

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \quad (5.40)$$

então f possui pelo menos um zero neste intervalo. De fato, do Teorema do valor médio para integrais, temos que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0. \quad (5.41)$$

5.2.2 Teorema fundamental do cálculo, parte I

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja f uma função integrável e F a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (5.42)$$

para algum número real a dado.

Teorema 5.2.2. (Teorema fundamental do cálculo, parte I) Se f é contínua em $[a, b]$, então é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.43)$$

sendo

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (5.44)$$

Demonstração. Vejamos a ideia da demonstração. Da definição de derivada, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (5.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \right] \quad (5.46)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (5.47)$$

Agora, do Teorema do valor médio para integrais (Teorema 5.2.1), temos que existe $c_h \in [x, x+h]$ tal que

$$f(c_h) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(x) dx = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (5.48)$$

Notemos que $c_h \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$ e, portanto, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \quad (5.49)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \quad (5.50)$$

$$= f(x). \quad (5.51)$$

□

Exemplo 5.2.4. Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} \int_1^x t^2 dt = x^2. \quad (5.52)$$

b)

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \text{sen}(t) dt = \text{sen}(x) \quad (5.53)$$

5.2.3 Integral indefinida

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema 5.2.2), mostra que a derivada da integral de uma função f (contínua) é uma função F tal que

$$F'(x) = f(x). \quad (5.54)$$

Dizemos que F é uma **primitiva** da função f .

Observamos que se F é uma primitiva de f , então $G(x) = F(x) + C$ também é primitiva de f para qualquer constante C , i.e.

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x). \quad (5.55)$$

Mais ainda, do Corolário 4.3.2 do Teorema do valor médio para derivadas, temos que quaisquer duas primitivas de uma mesma função diferem-se apenas uma constante.

Com isso, definimos **integral indefinida** de f em relação a x por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.56)$$

onde F é qualquer primitiva de f e C uma constante indeterminada.

Exemplo 5.2.5. Vejamos os seguintes casos:

a) $\int dx = x + C$

b) $\int 2x dx = x^2 + C$

c) $\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$

d) $\int e^x dx = e^x + C$

5.2.4 Teorema fundamental do cálculo, parte II

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Teorema 5.2.3. (Teorema fundamental do cálculo, parte II) Se f é contínua em $[a, b]$ e F é qualquer primitiva de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.57)$$

Demonstração. Vejamos a ideia da demonstração. A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema 5.2.2), nos garante a existência de

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (5.58)$$

Seja, então, F uma primitiva qualquer de f . Logo,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] \quad (5.59)$$

$$= G(b) - G(a) \quad (5.60)$$

$$= \int_a^b f(t) dx - \int_a^a f(t) dt \quad (5.61)$$

$$= \int_a^b f(t) dx. \quad (5.62)$$

□

Exemplo 5.2.6. Vejamos os seguintes casos:

1. $\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1$
2. $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$
3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Observação 5.2.1. Do Teorema fundamental do cálculo, parte II, temos

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (5.63)$$

De fato, se F é uma primitiva de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.64)$$

$$= -[F(a) - F(b)] \quad (5.65)$$

$$= -\int_b^a f(x) dx. \quad (5.66)$$

Exemplo 5.2.7. Temos que

$$\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1. \quad (5.67)$$

Agora,

$$\int_1^0 dx = x|_1^0 = 0 - 1 = -1. \quad (5.68)$$

Conforme esperado, temos

$$\int_0^1 dx = -\int_1^0 dx. \quad (5.69)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 5.2.1. Calcule

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} dx. \quad (5.70)$$

Solução. Primeiramente, notemos que

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad (5.71)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C. \quad (5.72)$$

Então, usando as propriedades de integração, temos

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} dx = \int_1^{\sqrt{e}} x dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} dx \quad (5.73)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} - [\ln x]_1^{\sqrt{e}} \quad (5.74)$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{e})^2}{2} - \frac{1}{2} \right] - [\ln \sqrt{e} - \ln 1] \quad (5.75)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(e) - 0 \quad (5.76)$$

$$= \frac{e}{2} - 1. \quad (5.77)$$

◇

ER 5.2.2. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = \sin(x)$ e as retas $y = 0$, $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$.

Solução. Lembrando que a integral definida está associada a área sob o gráfico do integrando, temos que a área desejada pode ser calculada por

$$A = - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx, \quad (5.78)$$

pois $\sin(x) < 0$ para $x \in (-\pi/2, 0)$ e $\sin(x) > 0$ para $x \in (0, \pi/2)$. Também, observamos que

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C. \quad (5.79)$$

Logo, do Teorema fundamental do cálculo segue que

$$A = - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \quad (5.80)$$

$$= -[-\cos(x)]_{-\pi/2}^0 + [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \quad (5.81)$$

$$= -[-1 - 0] + [-0 - (-1)] = 2. \quad (5.82)$$

◇

ER 5.2.3. Encontre a função $y = y(x)$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad (5.83)$$

e $y(0) = 1$.

Solução. Integrando ambos os lados da equação diferencial em relação a x , temos

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C \quad (5.84)$$

Agora, da condição $y(0) = 1$, segue

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + C = 1 \quad (5.85)$$

$$\Rightarrow C = 1. \quad (5.86)$$

Concluimos que $y = x^2/2 + 1$.

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 5.2.1. Sejam f e g tais que

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (5.87)$$

$$\int_{-2}^0 g(x) dx = 1. \quad (5.88)$$

Calcule

a) $\int_{-1}^{-1} f(x) - 51 \cdot g(x) dx$

b) $\int_{-2}^0 2g(x) - \frac{1}{2}f(x) dx$

c) $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$

Exercício 5.2.2. Calcule

a) $\int_{-1}^2 2 dx$

b) $\int_{-3}^{-1} 1 - x dx$

c) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

Exercício 5.2.3. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ e as retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

Exercício 5.2.4. Encontre a função $y = y(x)$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \quad (5.89)$$

e $y(\pi) = 1$.

5.3 Regras básicas de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 5.2, definimos a integral indefinida por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.90)$$

onde F é uma **primitiva** de f , i.e. $F' = f$, e C é uma **constante indeterminada**. Na sequência, vamos discutir sobre as regras básicas para o cálculo de integrais.

5.3.1 Integral de função potência

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na derivada de função potência, podemos afirmar que

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1. \quad (5.91)$$

De fato, temos

$$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right)' = (r+1) \cdot \frac{x^r}{r+1} = x^r, \quad (5.92)$$

para $r \neq -1$.

Exemplo 5.3.1. Vejamos os seguintes casos:

$$\text{a) } \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

Exemplo 5.3.2. Vamos calcular

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx. \quad (5.93)$$

Da regra da potência, temos

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad (5.94)$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 \quad (5.95)$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \quad (5.96)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (5.97)$$

5.3.2 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Das regras de multiplicação por constante e da soma para derivadas, podemos concluir que

$$\bullet \int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx, \quad k \neq 0 \text{ constante.}$$

De fato, seja F uma primitiva de f . Temos $(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$, i.e. $k \cdot F$ é primitiva de $k \cdot f$.

$$\bullet \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

De fato, sejam F uma primitiva de f e G uma primitiva de g . Temos $(F + G)' = F' + G' = f + g$, i.e. $F + G$ é primitiva de $f + g$.

Observação 5.3.1. Como $(x)' = 1$, temos que a **integral de função constante** $f(x) \equiv k$ é

$$\int k \, dx = k \int 1 \cdot dx = k \cdot x + C. \quad (5.98)$$

Exemplo 5.3.3. Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int 2x \, dx = 2 \int x \, dx \quad (5.99)$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \quad (5.100)$$

$$= x^2 + C \quad (5.101)$$

3

b)

$$\int (2x^2 - 3x + 1) \, dx = \int 2x^2 \, dx - \int 3x \, dx + \int dx \quad (5.102)$$

$$= 2 \int x^2 \, dx - 3 \int x \, dx + x + C \quad (5.103)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad (5.104)$$

Exemplo 5.3.4. Vamos calcular

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx. \quad (5.105)$$

Temos

$$\int x^2 + 1 \, dx = \int x^2 \, dx + \int dx \quad (5.106)$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C. \quad (5.107)$$

³Como C é uma constante indeterminada, $2 \cdot C$ também é uma constante indeterminada.

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 \quad (5.108)$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) \quad (5.109)$$

$$= \frac{4}{3}. \quad (5.110)$$

5.3.3 Integral de $1/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 1.10, a função logaritmo natural $y = \ln x$ foi definida como a inversa da função exponencial natural $y = e^x$. Pode-se mostrar que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt, \quad x > 0. \quad (5.111)$$

Isto está de acordo com o fato de que da parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad (5.112)$$

Agora, da Regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d(-x)}{dx} \quad (5.113)$$

$$= \frac{1}{x}. \quad (5.114)$$

Com isso, podemos concluir que

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C. \quad (5.115)$$

Exemplo 5.3.5. Vamos calcular

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx. \quad (5.116)$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^e \quad (5.117)$$

$$= \ln(e) - \ln(1) \quad (5.118)$$

$$= 1. \quad (5.119)$$

5.3.4 Integral da função exponencial natural

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Da derivada da função exponencial natural, temos

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (5.120)$$

Exemplo 5.3.6.

$$\int e^{2+x} dx = \int e^2 e^x dx \quad (5.121)$$

$$= e^2 \int e^x dx \quad (5.122)$$

$$= e^2 e^x + C \quad (5.123)$$

$$= e^{2+x} + C \quad (5.124)$$

5.3.5 Integrais de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Com base na derivada de funções trigonométricas, temos

•

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.125)$$

•

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (5.126)$$

Exemplo 5.3.7. Vamos calcular

$$\int_0^\pi \cos(x) - \text{sen}(x) dx. \quad (5.127)$$

Temos

$$\int \cos(x) - \text{sen}(x) dx = \int \cos(x) dx - \int \text{sen}(x) dx \quad (5.128)$$

$$= \text{sen}(x) + \cos(x) + C. \quad (5.129)$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^{\pi} \cos(x) - \sin(x) dx = \sin(x) + \cos(x)|_0^{\pi} \quad (5.130)$$

$$= \sin(\pi) + \cos(\pi) - [\sin(0) + \cos(0)] \quad (5.131)$$

$$= -1 - 1 = -2. \quad (5.132)$$

5.3.6 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.133)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.134)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.135)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (5.136)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.137)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.138)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (5.139)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 5.3.1. Calcule a área total entre as curvas $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

Solução. Tendo em vista que $x^2 - 1 \leq 0$ para $x \in [0, 1]$ e $x^2 - 1 \geq 0$ para $x \in [1, 2]$, temos que a área A pedida é igual a

$$A = -\int_0^1 x^2 - 1 dx + \int_1^2 x^2 - 1 dx. \quad (5.140)$$

Agora, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 - 1 \, dx = \int x^2 \, dx - \int dx \quad (5.141)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + C. \quad (5.142)$$

Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \quad (5.143)$$

$$= - \left[\frac{1}{3} - 1 \right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right] \quad (5.144)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}. \quad (5.145)$$

Podemos usar o [SymPy](#) para calcular a área, com os seguintes comandos⁴:

```
>>> -integrate(x**2-1,(x,0,1))+integrate(x**2-1,(x,1,2))
2
```

◇

ER 5.3.2. Calcule

$$\int \frac{1}{2x} \, dx. \quad (5.146)$$

Solução. Das regras básicas de integração, temos

$$\int \frac{1}{2x} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \quad (5.147)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} \, dx \quad (5.148)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x) + C \quad (5.149)$$

$$= \ln \sqrt{x} + C. \quad (5.150)$$

No [SymPy](#), temos⁵:

```
>>> integrate(1/(2*x),x)
log(x)/2
```

◇

⁴Veja a Observação 5.0.1.

⁵Veja a Observação 5.0.1.

5.3.7 Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 5.3.1. Calcule

a) $\int dx$

b) $\int x^{-2} dx$

c) $\int \sqrt{x} dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Exercício 5.3.2. Calcule

a) $\int 1 + x^{-2} dx$

b) $\int x - \frac{1}{x} dx$

Exercício 5.3.3. Calcule

a) $2 \cos(x) dx$

b) $1 - \sin(x) dx$

Exercício 5.3.4. Calcule

$$\int_{-1}^1 x^3 dx. \quad (5.151)$$

Exercício 5.3.5. Calcule a área total entre as curvas $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

5.4 Integração por substituição

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja $u = u(x)$. A regra de integração por substituição é

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.152)$$

De fato, se

$$\int f(u) du = F(u) + C, \quad (5.153)$$

então, da regra da cadeia (Seção 3.5), temos

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) \quad (5.154)$$

$$= f(u(x))u'(x), \quad (5.155)$$

i.e. $F(u(x))$ é primitiva de $f(u(x))u'(x)$.

Exemplo 5.4.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\int 2(2x + 1)^2 dx.$

Tomamos $f(u) = u^2$ com $u(x) = 2x + 1$, donde $u'(x) = 2$. Logo

$$\int 2(2x + 1)^2 dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (5.156)$$

$$= \int f(u) du \quad (5.157)$$

$$= \int u^2 du \quad (5.158)$$

$$= \frac{u^3}{3} + C \quad (5.159)$$

$$= \frac{(2x + 1)^3}{3} + C. \quad (5.160)$$

b) $\int \pi \operatorname{sen}(\pi x) dx.$

Tomando $f(u) = \text{sen}(u)$, $u = \pi x$, temos $u'(x) = \pi$. Logo

$$\int \pi \text{sen}(\pi x) dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (5.161)$$

$$= \int f(u) du \quad (5.162)$$

$$= \int \text{sen}(u) du \quad (5.163)$$

$$= -\cos(u) + C \quad (5.164)$$

$$= -\cos(\pi x) + C. \quad (5.165)$$

Exemplo 5.4.2. Consideremos

$$\int (2x + 1)^2 dx. \quad (5.166)$$

Substituindo

$$u = 2x + 1 \quad (5.167)$$

temos

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}. \quad (5.168)$$

Portanto,

$$\int (2x + 1)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2} \quad (5.169)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du \quad (5.170)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad (5.171)$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \quad (5.172)$$

$$= \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C. \quad (5.173)$$

5.4.1 Integral de função exponencial

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Subseção 5.3.4, vimos que

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.174)$$

Agora, com a regra da substituição, temos

$$\int a^x dx = \int e^{\ln a^x} dx \quad (5.175)$$

$$= \int e^{x \ln a} dx, \quad (5.176)$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tomando

$$u = x \ln a \Rightarrow du = \ln(a) dx. \quad (5.177)$$

Segue que

$$\int a^x dx = \int e^u \frac{du}{\ln a} \quad (5.178)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int e^u du \quad (5.179)$$

$$= \frac{e^u}{\ln a} + C \quad (5.180)$$

$$= \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C \quad (5.181)$$

$$= \frac{e^{\ln a^x}}{\ln a} + C \quad (5.182)$$

$$= \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.183)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.184)$$

Exemplo 5.4.3. Vamos calcular

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx. \quad (5.185)$$

Por substituição, tomamos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad (5.186)$$

segue

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx = \int \cdot 2^u \frac{du}{2} \quad (5.187)$$

$$= \frac{1}{2} \int \cdot 2^u du \quad (5.188)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^u}{\ln 2} + C \quad (5.189)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C \quad (5.190)$$

5.4.2 Integral de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Seção 5.3.5, vimos que

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad \text{e} \quad (5.191)$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C. \quad (5.192)$$

Exemplo 5.4.4. Vamos calcular

$$\int \text{sen}^2(x) dx. \quad (5.193)$$

Usando a identidade trigonométrica ??, temos

$$\int \text{sen}^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \quad (5.194)$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx. \quad (5.195)$$

Agora, tomando $u = 2x$, temos $du = 2 dx$, donde

$$\int \cos(2x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{2} \quad (5.196)$$

$$= \frac{1}{2} \text{sen}(u) + C \quad (5.197)$$

$$= \frac{1}{2} \text{sen}(2x) + C. \quad (5.198)$$

Retornando a 5.195, obtemos

$$\int \text{sen}^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C. \quad (5.199)$$

Agora, com o método da substituição podemos calcular

$$\int \operatorname{tg}(x) dx. \quad (5.200)$$

Observamos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx. \quad (5.201)$$

Escolhendo

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx. \quad (5.202)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\int \frac{1}{u} du \quad (5.203)$$

$$= -\ln |u| + C \quad (5.204)$$

$$= -\ln |\cos(x)| + C \quad (5.205)$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| + C \quad (5.206)$$

$$= \ln |\sec(x)| + C. \quad (5.207)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C. \quad (5.208)$$

Exemplo 5.4.5. Vamos calcular

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) dx. \quad (5.209)$$

Usando a regra de substituição, escolhemos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx. \quad (5.210)$$

Fazendo a substituição e calculando, obtemos

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) dx = \int \operatorname{tg}(u) \frac{du}{2} \quad (5.211)$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(u) du \quad (5.212)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(u)| + C \quad (5.213)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(x^2)| + C. \quad (5.214)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função tangente, obtemos⁶

$$\int \cot g(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C. \quad (5.215)$$

Agora, vamos calcular

$$\int \sec(x) dx. \quad (5.216)$$

Observamos que

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \quad (5.217)$$

$$= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx. \quad (5.218)$$

Então, fazendo a substituição

$$u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \Rightarrow du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x), \quad (5.219)$$

temos

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \quad (5.220)$$

$$= \int \frac{1}{u} du \quad (5.221)$$

$$= \ln |u| + C \quad (5.222)$$

$$= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (5.223)$$

Ou seja, obtemos

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (5.224)$$

Exemplo 5.4.6. Vamos calcular

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du. \quad (5.225)$$

Fazendo a substituição

$$v = \frac{u}{2} \Rightarrow dv = \frac{du}{2}, \quad (5.226)$$

⁶Veja o Exercício 5.4.9.

segue

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du = \int \sec(v) \cdot 2 dv \quad (5.227)$$

$$= 2 \int \sec(v) dv \quad (5.228)$$

$$= 2 \ln |\sec(v) + \operatorname{tg}(v)| + C \quad (5.229)$$

$$= 2 \ln \left| \sec\left(\frac{u}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) \right| + C. \quad (5.230)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função secante, obtemos⁷

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C. \quad (5.231)$$

5.4.3 Integrais definidas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A regra de substituição para integrais definidas é

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.232)$$

Exemplo 5.4.7. Vamos calcular

$$\int_0^1 e^{-2x} dx. \quad (5.233)$$

Por substituição, escolhemos

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx. \quad (5.234)$$

⁷Veja o Exercício [5.4.11](#).

Logo,

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} e^u \frac{du}{-2} \quad (5.235)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{-2} e^u du \quad (5.236)$$

$$= -\frac{1}{2} [e^u]_0^{-2} \quad (5.237)$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-2} - e^0) \quad (5.238)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}. \quad (5.239)$$

Alternativamente, podemos calcular a integral indefinida primeiramente e, então, usar o Teorema Fundamental do Cálculo com a primitiva obtida. Ou seja, temos

$$\int e^{-2x} dx = \int e^u \frac{du}{-2} \quad (5.240)$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u du \quad (5.241)$$

$$= -\frac{1}{2} e^u + C \quad (5.242)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} + C. \quad (5.243)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \quad (5.244)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^0 \quad (5.245)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}, \quad (5.246)$$

como esperado.

No [SymPy](#), temos⁸:

⁸Veja a Observação [5.0.1](#).

```
>>> integrate(exp(-2*x),(x,0,1))
```

$$-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}$$

5.4.4 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.247)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.248)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.249)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (5.250)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.251)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.252)$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.253)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C \quad (5.254)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (5.255)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (5.256)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (5.257)$$

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (5.258)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 5.4.1. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.259)$$

Solução. Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.260)$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \quad (5.261)$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \quad (5.262)$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{u^2} du \quad (5.263)$$

$$= 7 \int u^{-2} du \quad (5.264)$$

$$= 7 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \quad (5.265)$$

$$= -\frac{7}{u} \quad (5.266)$$

$$= \frac{7}{1-x}. \quad (5.267)$$

◇

ER 5.4.2. Calcule

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx. \quad (5.268)$$

Solução. Fazendo a substituição

$$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx, \quad (5.269)$$

temos

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{u} du \quad (5.270)$$

$$= \ln |u| + C \quad (5.271)$$

$$= \ln |e^x - 1| + C. \quad (5.272)$$

No [SymPy](#), temos⁹:

```
>>> integrate(exp(x)/(exp(x)-1),x)
      x
log(e  - 1)
```

◇

ER 5.4.3. Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.273)$$

Solução. Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- **Solução 1:** aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.274)$$

Escolhendo, $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x dx$. Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.275)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.276)$$

$$= -\frac{1}{2} \left. \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_{u=1}^0 \quad (5.277)$$

$$= -\frac{1}{3} \left. \sqrt{u^3} \right|_{u=1}^0 \quad (5.278)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (5.279)$$

- **Solução 2:** calculando uma primitiva em função de x . Para obtermos uma primitiva em função de x , calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.280)$$

⁹Veja a Observação 5.0.1.

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x dx$ e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.281)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.282)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (5.283)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \quad (5.284)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \quad (5.285)$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (5.286)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)¹⁰:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2), (x,0,1))
```

◇

ER 5.4.4. Calcule a área total entre as curvas $y = (1-x)^3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

Solução. A função $f(x) = (1-x)^3$ é positiva em $(0, 1)$ e negativa em $(1, 2)$. Logo, a área é igual a

$$A = \int_0^1 (1-x)^3 dx - \int_1^2 (1-x)^3 dx. \quad (5.287)$$

Agora, calculamos

$$\int (1-x)^3 dx. \quad (5.288)$$

Para tanto, fazemos a substituição

$$u = 1 - x \Rightarrow du = -dx. \quad (5.289)$$

¹⁰Veja a Observação 5.0.1.

Logo,

$$\int (1-x)^3 dx = - \int u^3 du \quad (5.290)$$

$$= -\frac{u^4}{4} + C \quad (5.291)$$

$$= -\frac{(1-x)^4}{4} + C. \quad (5.292)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$A = \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 - \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_1^2 \quad (5.293)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (5.294)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (5.295)$$

No [SymPy](#), temos¹¹:

```
>>> integrate((1-x)**3,(x,0,1))-integrate((1-x)**3,(x,1,2))
1/2
```

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 5.4.1. Calcule

a) $\int \sin(2x) dx$

b) $\int \sqrt{x-1} dx$

c) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

¹¹Veja a Observação 5.0.1.

Exercício 5.4.2. Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (5.296)$$

Exercício 5.4.3. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx. \quad (5.297)$$

Exercício 5.4.4. Calcule

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x} dx. \quad (5.298)$$

Exercício 5.4.5. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.299)$$

Exercício 5.4.6. Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx. \quad (5.300)$$

Exercício 5.4.7. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx. \quad (5.301)$$

Exercício 5.4.8. Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) e^{\operatorname{tg}(x)} dx. \quad (5.302)$$

Solução. $e - 1$

◇

Exercício 5.4.9. Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \cotg(x) dx = \ln |\sen(x)| + C. \quad (5.303)$$

Exercício 5.4.10. Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (5.304)$$

Exercício 5.4.11. Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)| + C. \quad (5.305)$$

5.5 Integração por partes

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis, então da regra do produto para derivadas temos

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \quad (5.306)$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{du}{dx} v dx + \int u \frac{dv}{dx} dx, \quad (5.307)$$

donde

$$uv = \int v du + \int u dv. \quad (5.308)$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.309)$$

Exemplo 5.5.1. Vamos calcular

$$\int x e^x dx. \quad (5.310)$$

Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \quad (5.311)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x. \quad (5.312)$$

Observa-se que no cálculo de v , desprezamos a constante indeterminada. Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (5.313)$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad (5.314)$$

$$= x e^x - e^x + C. \quad (5.315)$$

No [SymPy¹²](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),x)
      x
(x-1)e
```

5.5.1 A integral do logaritmo natural

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vamos calcular

$$\int \ln x dx. \quad (5.316)$$

Usando integração por partes, tomamos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.317)$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \quad (5.318)$$

¹²Veja a Observação [5.0.1](#).

Segue que

$$\int \ln x \, dx = \int u \, dv \quad (5.319)$$

$$= uv - \int v \, du \quad (5.320)$$

$$= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} \, dx \quad (5.321)$$

$$= x \ln(x) - \int dx \quad (5.322)$$

$$= x \ln(x) - x + C. \quad (5.323)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (5.324)$$

Exemplo 5.5.2. Vamos calcular

$$\int \ln(2x) \, dx. \quad (5.325)$$

Da equação 5.324, temos

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (5.326)$$

Usando a regra da substituição (veja Seção 5.4), escolhemos

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx. \quad (5.327)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \ln(2x) \, dx = \int \ln(u) \frac{du}{2} \quad (5.328)$$

$$= \frac{1}{2} \int \ln(u) \, du \quad (5.329)$$

$$= \frac{u \ln(u)}{2} - \frac{u}{2} + C \quad (5.330)$$

$$= x \ln(2x) - x + C. \quad (5.331)$$

No [SymPy¹³](#), temos:

¹³Veja a Observação 5.0.1.

```
>>> integrate(log(2*x),x)
x*log(2*x) - x
```

Exemplo 5.5.3. Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx. \quad (5.332)$$

Para integrar por partes, podemos escolher

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx \quad (5.333)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (5.334)$$

Então, segue

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx. \quad (5.335)$$

Agora, aplicamos integração por partes a esta última integral. Tomamos as seguintes novas escolhas

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx \quad (5.336)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow dv = e^x \quad (5.337)$$

Segue que

$$\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \int \operatorname{sen}(x)e^x dx. \quad (5.338)$$

Substituindo este resultado na equação (5.335), obtemos

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x dx. \quad (5.339)$$

Somando este primeiro termo em ambos os lados desta equação, obtemos

$$2 \int \operatorname{sen}(x)e^x dx = (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))e^x. \quad (5.340)$$

Daí, concluímos que

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}e^x + C. \quad (5.341)$$

No [SymPy](#)¹⁴, temos:

¹⁴Veja a Observação 5.0.1.

```
>>> integrate(sin(x)*exp(x),x)
      x      x
e  · sin(x)  e  · cos(x)
-----  -  -----
      2      2
```

5.5.2 Integral definida

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis em x . Segue que $du = u'(x) dx$ e $dv = v'(x) dx$. Segue que a fórmula de integração por partes para integrais definidas é

$$\int_{x=a}^b u dv = uv|_{x=a}^b - \int_{x=a}^b v du. \quad (5.342)$$

Exemplo 5.5.4. Vamos calcular

$$\int_0^2 x e^{-x} dx. \quad (5.343)$$

Para aplicar integração por partes, escolhemos

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad (5.344)$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad (5.345)$$

Segue da fórmula de integração por partes para integrais definidas que

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \quad (5.346)$$

$$= -2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_0^2 \quad (5.347)$$

$$= -3e^{-2} + 1. \quad (5.348)$$

No [SymPy¹⁵](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),(x,0,2))
      -2
- 3e  + 1
```

¹⁵Veja a Observação 5.0.1.

5.5.3 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.349)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.350)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.351)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (5.352)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.353)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.354)$$

$$\int \ln x dx = x \ln(x) - x + C \quad (5.355)$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.356)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C \quad (5.357)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (5.358)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (5.359)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (5.360)$$

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (5.361)$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 5.5.1. Calcule

$$\int x \ln x dx. \quad (5.362)$$

Solução. Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.363)$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.364)$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}. \quad (5.365)$$

Segue que

$$\int x \ln x dx = \int u dv \quad (5.366)$$

$$= uv - \int v du \quad (5.367)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \quad (5.368)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \quad (5.369)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad (5.370)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (5.371)$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do [SymPy¹⁶](#):

```
>>> integrate(x*log(x),x)
      2      2
x  · log(x)  x
----- - ----
      2      4
```

◇

ER 5.5.2. Calcule

$$\int_{-1}^1 x e^x dx. \quad (5.372)$$

¹⁶Veja a Observação 5.0.1.

Solução. Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (5.373)$$

Para tanto, escolhemos $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^x dx = e^x + C. \quad (5.374)$$

Escolhendo $C = 0$ e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^1 xe^x dx = \int_{-1}^1 f(x)g'(x) dx \quad (5.375)$$

$$= f(x)g(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x)f'(x) dx \quad (5.376)$$

$$= xe^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \quad (5.377)$$

$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1 \quad (5.378)$$

$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \quad (5.379)$$

$$= 2e^{-1}. \quad (5.380)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)¹⁷:

```
>>> integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
-1
2·e
```

◇

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 5.5.1. Calcule

a) $\int x \sin(x) dx$

b) $\int x \cos(x) dx$

¹⁷Veja a Observação 5.0.1.

c) $\int x^2 \ln(x) dx$

Exercício 5.5.2. Calcule

$$\int \log_2(x) dx. \quad (5.381)$$

Exercício 5.5.3. Calcule

a) $\int x^2 e^x dx$

b) $\int x^2 \sin(x) dx$

Exercício 5.5.4. Calcule

$$\int \cos(x) e^x dx. \quad (5.382)$$

Exercício 5.5.5. Calcule

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$

b) $\int_{-\pi}^0 x \cos(x) dx$

c) $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

Exercício 5.5.6. Calcule

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx. \quad (5.383)$$

5.6 Integração por frações parciais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

5.7 Integração por substituição trigonométrica

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Capítulo 6

Aplicações da integral

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Observação 6.0.1. Nos códigos [Python](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_session()
```

6.1 Cálculo de áreas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ está associada a área entre o gráfico da função f e o eixo das abscissas no intervalo $[a, b]$ (Veja Seção 5.1). Ocorre que se f for não negativa, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Se f for negativa, então $\int_a^b f(x) dx < 0$. Por isso, dizemos que $\int_a^b f(x) dx$ é a **área líquida** (ou com sinal) entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

Exemplo 6.1.1. Vamos calcular a área total entre o gráfico de $f(x) = (x - 1)^3$ e o eixo das abscissas, restrito ao intervalo $[0, 2]$.

Começamos fazendo o estudo de sinal de f no intervalo. Como $x - 1 \leq 0$ para $x \leq 1$ e $x - 1 \geq 0$ para $x \geq 1$, temos que $f(x) < 0$ em $[0, 1]$ e $f(x) > 0$

em $[1, 2]$. Logo, a área total é dada por

$$A = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx. \quad (6.1)$$

]

Agora, usando a substituição $u = x - 1$, temos $du = dx$ e segue que

$$\int f(x) dx = \int (x - 1)^3 dx \quad (6.2)$$

$$= \int u^3 du \quad (6.3)$$

$$= \frac{u^4}{4} + C \quad (6.4)$$

$$= \frac{(x - 1)^4}{4} + C. \quad (6.5)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad (6.6)$$

$$= - \left[\frac{(x - 1)^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{(x - 1)^4}{4} \right]_1^2 \quad (6.7)$$

$$= - \left[\frac{(1 - 1)^4}{4} - \frac{(0 - 1)^4}{4} \right] + \left[\frac{(2 - 1)^4}{4} - \frac{(1 - 1)^4}{4} \right] \quad (6.8)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (6.9)$$

No [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos¹:

```
>>> -integrate((x-1)**3,(x,0,1))+integrate((x-1)**3,(x,1,2))
1/2
```

6.1.1 Áreas entre curvas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

¹Veja a Observação [5.0.1](#).

Observamos que se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (6.10)$$

corresponde à área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ restritas ao intervalo $[a, b]$. Ou seja, fazendo $h(x) = f(x) - g(x)$, temos que

$$\int_a^b h(x) dx \quad (6.11)$$

é a área entre essas curvas restritas ao intervalo $[a, b]$. Ainda, se $f(x) \leq g(x)$, entre a área entre elas é dada por

$$-\int_a^b h(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \quad (6.12)$$

Exemplo 6.1.2. Vamos calcular a área entre as curvas $y = (x-1)^3$, $y = x-1$, $x = 0$ e $x = 2$.

Começamos definindo $h(x) = (x-1)^3 - (x-1)$. A fim de fazermos o estudo de sinal de h , identificamos seus zeros.

$$h(x) = (x-1)^3 - (x-1) \quad (6.13)$$

$$= (x-1) [(x-1)^2 - 1] \quad (6.14)$$

$$= (x-1)(x^2 - 2x) \quad (6.15)$$

$$= (x-1) \cdot x \cdot (x-2). \quad (6.16)$$

Ou seja, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ são as raízes de h . Daí, segue seu estudo de sinal:

| | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ |
|---------|-------------|-------------|
| $(x-1)$ | - | + |
| x | + | + |
| $(x-2)$ | - | - |
| $h(x)$ | + | - |

Assim, temos que a área desejada pode ser calculada como

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx. \quad (6.17)$$

Agora, calculamos a integral de h , i.e.

$$\int h(x) dx = \int (x-1)^3 - (x-1) dx \quad (6.18)$$

$$= \int (x-1)^3 dx - \int x dx + \int dx \quad (6.19)$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C. \quad (6.20)$$

Por fim, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx \quad (6.21)$$

$$= \left[\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \left[\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \quad (6.22)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.24)$$

No [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos²:

```
>>> f = (x-1)**3-(x-1)
>>> integrate(f,(x,0,1))-integrate(f,(x,1,2))
1/2
```

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

ER 6.1.1. Cálculo a área entre a reta $y = 1$ e o gráfico de $f(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$.

Solução. Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$ descontada a área sob o gráfico de

²Veja a Observação [5.0.1](#).

$f(x) = x^2$ restrita ao intervalo $[0,1]$. Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2 dx \quad (6.25)$$

$$= 1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad (6.26)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6.27)$$

◇

ER 6.1.2. Calcule a área entre as curvas $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$.

Solução. O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$. Como $f(x) \geq g(x)$ neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) dx \quad (6.28)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx \quad (6.29)$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \quad (6.30)$$

$$= \frac{1}{6}. \quad (6.31)$$

◇

ER 6.1.3. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$.

Solução. Para calcularmos a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$, fazemos:

1. O estudo de sinal de f no intervalo $[-1,1]$.

(a) Cálculo das raízes de f no intervalo $[-1,1]$.

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \quad (6.34)$$

(b) Os sinais de $f(x)$.

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (6.35)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (6.36)$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

(a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^3 - x dx \quad (6.37)$$

$$= \int x^3 dx - \int x dx \quad (6.38)$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \quad (6.39)$$

(b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (6.40)$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \quad (6.41)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.42)$$

Podemos computar a solução deste exercícios usando os seguintes comandos do [SymPy](#)³. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

◇

³Veja Observação 6.0.1.

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Exercício 6.1.1. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e a reta $y = 1$ restritas ao intervalo $[-1, 1]$.

Exercício 6.1.2. Calcule a área entre as curvas $y = x$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$.

6.2 Volumes por fatiamento e rotação

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

6.3 Problema de valor inicial

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

Exercício 2.1.1. a) -1 ; b) -1 ; c) 2 ; d) $\#$

Exercício 2.1.2. a) $-\frac{3}{2}$; b) -1 ; c) -1

Exercício 2.1.3. a) 2 ; b) 2 ; c) -3 ; d) π

Exercício 2.1.4. a) 2 ; b) -2 ; c) -3 ; d) e

Exercício 2.2.1. a) 4 ; b) 2π ; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

Exercício 2.2.2. a) $-3/2$; b) $5/2$; c) -3

Exercício 2.2.3. a) -6 ; b) -3 ;

Exercício 2.2.4. a) $2/3$; b) $1/3$;

Exercício 2.2.5. a) 2 ; b) -1 ; c) 1

Exercício 2.2.6. a) 6 ; b) 10 ; c) 12

Exercício 2.2.7. a) $1/2$; b) $-1/3$;

Exercício 2.2.8. a) $\frac{7}{4}$; b) 3;

Exercício 2.2.9. $-1/4$

Exercício 2.3.4. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) $\frac{7}{4}$

Exercício 2.3.5. a) 2; b) 2; c) 2

Exercício 2.3.6. a) 2; b) 3; c) $\frac{7}{4}$

Exercício 2.3.7. $-\frac{1}{2}$

Exercício 2.3.8. 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é $[-1, 1]$.

Exercício 2.4.1. 2

Exercício 2.4.2. a) 1; b) 3; c) -1 ; d) e

Exercício 2.4.3. $-1/2$

Exercício 2.4.4. não existe.

Exercício 2.4.5. a) 1; b) -3

Exercício 2.5.1. ∞

Exercício 2.5.2. $x = 2$; $x = -2$

Exercício 2.5.3. ∞

Exercício 2.5.4. $-\infty$

Exercício 2.5.5. $-\frac{1}{2}$

Exercício 2.5.6. Dica: use as regras para o cálculo de limites.

Exercício 2.5.7. Dica: Observe que $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ e analise o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercício 2.6.1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

Exercício 2.6.2. $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

Exercício 2.6.3. 0

Exercício 2.7.1. 1

Exercício 2.7.2. 0

Exercício 2.7.3. $\frac{1}{2}$

Exercício 2.7.4. 0

Exercício 2.7.5. 0

Exercício 2.8.1. ∞

Exercício 2.8.2. a) ∞ ; b) 0

Exercício 3.1.1. a) 0; b) 0; c) 0

Exercício 3.1.2. a) -1 ; b) -2 ; c) e

Exercício 3.1.3. a) -1 ; b) -2 ; c) e

Exercício 3.1.4. reta secante: $y = -3x + 7$; reta tangente: $y = -2x + 6$; dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

Exercício 3.1.5. a) $1000 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; b) $30 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; c) $-970 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$.

Exercício 3.2.1. a) 0; b) 0; c) 0

Exercício 3.2.2. a) 2; b) -3 ; c) \sqrt{e}

Exercício 3.2.3. $f'(x) = 2x - 2$

Exercício 3.2.4. $(1, \infty)$

Exercício 3.2.5. a) $2x - 3x^2$; b) $2 - 6x$; c) -6 ; d) 0; e) 0

Exercício 3.3.1. a) $f'(x) = -15x^2$; b) $g'(x) = -24x^2 + 8x + 4$; c) $h'(x) = \frac{4(2x^2 - 2x(2x - 1) - 1)}{(2x - 1)^2}$

Exercício 3.3.2. a) $f'(x) = (1 + x)e^x$; b) $g'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$; c) $h'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$

Exercício 3.3.3. a) $f'(x) = 2/x$; b) $g'(x) = \ln x^2 + 2$; c) $h'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

Exercício 3.3.4. $y = x - 1$

Exercício 3.4.1. a) $f'(x) = \sin(2x) + \cos(x)$; b) $g'(x) = \sin(x) \cdot (2 - 3\sin^2(x))$; c) $h'(x) = 2\cos(x)$

Exercício 3.4.2. $y = 1$. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

Exercício 3.4.3. a) $f'(x) = \sec^2(x) + \operatorname{cosec}^2(x)$; b) $g'(x) = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotg}(x)$; c) $h'(x) = \frac{1}{2} \sec^2(x)$

Exercício 3.5.0. a) $f'(x) = 18(2x - 3)^8$; b) $g'(x) = -\frac{102}{(2x - 3)^{52}}$;

Exercício 3.5.0. a) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-1} \ln 2$; b) $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Exercício 3.5.0. a) $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$; b) $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\sqrt{x})$; c) $h'(x) = 2 \sec^2(2x)$; d) $u'(x) = \operatorname{cosec}^2(3 - x)$; e) $v'(x) = -\frac{2}{x^2} \sec\left(\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; f) $z'(x) = -(5 + 2x) \operatorname{cosec}(5x + x^2) \operatorname{cotg}(5x + x^2)$

Exercício 3.5.1. $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{4}$

Exercício 3.6.1. a) $f'(x) = \frac{2}{x \ln 2}$; b) $g'(x) = \frac{1+x}{x}$

Exercício 3.6.2. a) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; b) $g'(x) = 2e(1 + 2x)^{e-1}$

Exercício 3.6.3. $x(1 + x)^{x-1} + (1 + x)^x \ln(1 + x)$

Exercício 3.6.4. $y = x$

Exercício 3.7.1. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - 1}{2x}$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y}{x}$

Exercício 3.7.2. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x + y - 2}{x^2}$

Exercício 3.7.3. $(0, 0)$

Exercício 3.7.4. $y = -x$

Exercício 4.1.1. 1

Exercício 4.1.2. ∞

Exercício 4.1.3. ∞

Exercício 4.1.4. e

Exercício 4.2.1. $x = -1$ ponto de mínimo global; $x = 1$ ponto de máximo local; $x = 2$ ponto de mínimo local; $x = \frac{5}{2}$ ponto de máximo global.

Exercício 4.2.2. a) $x = 1$; b) $x = -1$ ponto de máximo global; $x = 1$ ponto de mínimo local e global; c) $f(-1) = 6$ valor máximo global; $f(1) = 2$ valor mínimo local e global;

Exercício 4.2.3. a) $x = 1$; b) $x = 1$ ponto de máximo local e global; $x = 3$ ponto de mínimo global; c) $f(1) = 2$ valor máximo local e global; $f(3) = -2$ valor mínimo global;

Exercício 4.2.4. a) $x = 1$; b) $x = 0$ ponto de mínimo global; c) $f(0) = 0$ valor mínimo global;

Exercício 4.2.5. a) $x = 0$; b) $x = -1$ ponto de mínimo global; $x = 1$ ponto de máximo global; c) $f(-1) = -1$ valor mínimo global; $f(1) = 1$ valor máximo global;

Exercício 4.3.1. Decrescente: $(-\infty, 1]$; Crescente: $[1, \infty)$

Exercício 4.3.2. Decrescente: $[-1, 1]$; Crescente: $(-\infty, -1]$; $[1, \infty)$

Exercício 4.3.3. Crescente: $(0, \infty)$

Exercício 4.4.1. $x = 1$ ponto de mínimo global

Exercício 4.4.2. $x_1 = -1$ ponto de máximo local; $x_2 = 1$ ponto de mínimo local;

Exercício 4.4.3. $x_1 = 0$ ponto de máximo local; $x_2 = 2/5$ ponto de mínimo local;

Exercício 4.5.1. $x = 1$ ponto de mínimo global

Exercício 4.5.2. $x_1 = -1$ ponto de máximo local; $x_2 = 1$ ponto de mínimo local;

Exercício 4.5.3. $x_1 = 0$ ponto de máximo local; $x_2 = 2/5$ ponto de mínimo local;

Exercício 4.5.4. $f'(x) = -4x^3$, $f'(0) = 0$. Pelo teste da 1. derivada, temos que $x = 0$ é ponto de máximo local. $f''(x) = -12x^2$, $f''(0) = 0$.

Exercício 5.1.0. A integral definida

$$\int_0^x t \, dt \quad (5.14)$$

é a área sob o gráfico de $f(t) = t$ restrita no intervalo $[0, x]$. Isto é, a área do triângulo retângulo de base x e altura x . Logo,

$$F(x) = \int_0^x t \, dt = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}. \quad (5.15)$$

Ou seja, temos $F(x) = x^2/2$ e, portanto,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x. \quad (5.16)$$

Exercício 5.1.1. 6

Exercício 5.1.2. 6

Exercício 5.1.3. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$; $F'(x) = x + 1$.

Exercício 5.1.4. Dica: a soma de Riemann é uma aproximação da área líquida sob o gráfico da função.

Exercício 5.1.5. Dica: $\int_a^b f(x) dx$ é a área líquida sob o gráfico da função.

Exercício 5.1.6. -3

Exercício 5.1.7. 0

Exercício 5.2.1. a) 0; b) 3; c) $-5/2$

Exercício 5.2.2. a) 6; b) 6; c) 2

Exercício 5.2.3. $4/3$

Exercício 5.2.4. $y = \sin(x) + 1$

Exercício 5.3.1. a) $x + C$; b) $-\frac{1}{x} + C$; c) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$; d) $2x^{1/2} + C$

Exercício 5.3.2. a) $x - \frac{1}{x} + C$; b) $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$

Exercício 5.3.3. a) $2\sin(x) + C$; b) $x + \cos(x) + C$

Exercício 5.3.4. 0

Exercício 5.3.5. $1/2$

Exercício 5.4.1. a) $\frac{-\cos(2x)}{2} + C$; b) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$; c) $\frac{\sin^2(x)}{2} + C$

Exercício 5.4.2. $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

Exercício 5.4.3. $1/2$

Exercício 5.4.4. $\frac{3\ln^2(x)}{2} + C$

Exercício 5.4.5. $\frac{7}{2}$

Exercício 5.4.6. 4

Exercício 5.4.7. $\frac{1}{2}$

Exercício 5.4.10. $\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$

Exercício 5.5.1. a) $\sin(x) - x\cos(x) + C$; b) $\cos(x) + x\sin(x) + C$;
c) $\frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

Exercício 5.5.2. $\frac{x\ln(x)}{\log_2(x)} - \frac{x}{\log_2(x)} + C$

Exercício 5.5.3. a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$; b) $-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

Exercício 5.5.4. $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}e^x + C$

Exercício 5.5.5. a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$

Exercício 5.5.6. $-\frac{5}{e} + e$

Exercício 6.1.1. 2

Exercício 6.1.2. 1

Referências Bibliográficas

- [1] H. Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.
- [2] J. Stewart. *Cálculo*. Thomson Learning, 2006.
- [3] G. Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.