

Minicurso de Python para Matemática

Pedro H A Konzen

17 de julho de 2023

Conteúdo

1	Licença	2
2	Sobre a linguagem	2
2.1	Instalação e execução	3
2.1.1	Console online	3
2.2	Utilização	3
3	Elementos da linguagem	4
3.1	Tipos/objetos básicos	4
3.2	Operações aritméticas elementares	6
3.3	Funções e constantes elementares	7
3.4	Operadores de comparação elementares	8
3.5	Operadores lógicos elementares	9
3.6	Conjuntos	9
3.7	n -uplas	12
3.8	Listas	13
3.9	Dicionários	16
4	Função, ramificação e repetição	17
4.1	Definindo funções	17
4.2	Ramificação	19
4.3	Repetição	20
4.3.1	while	20
4.3.2	for	21

4.3.3	range	21
5	Elementos da computação matricial	22
5.1	NumPy array	22
5.1.1	Inicialização de um array	24
5.1.2	Manipulação de arrays	25
5.1.3	Operadores elemento-a-elemento	26
5.2	Elementos da álgebra linear	27
5.2.1	Vetores	27
5.2.2	Produto escalar e norma	28
5.2.3	Matrizes	29
5.2.4	Inicialização de matrizes	30
5.2.5	Multiplicação de matrizes	30
5.2.6	Traço e Determinante de uma matriz	31
5.2.7	Rank e inversa de uma matriz	32
5.2.8	Autovalores e autovetores de uma matriz	33
6	Gráficos	33
	Referências Bibliográficas	35

1 Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

2 Sobre a linguagem

Python é uma **linguagem de programação de alto nível e multiparadigma**. Ou seja, é relativamente próxima das linguagens humanas naturais, é desenvolvida para aplicações diversas e permite a utilização de diferentes paradigmas de programação (programação estruturada, orientada a objetos, orientada a eventos, paralelização, etc.).

- Site oficial

<https://www.python.org/>

2.1 Instalação e execução

Para executar um código **Python** em seu computador é necessário instalar um interpretador. No [site oficial do Python](#) estão disponíveis para *download* interpretadores gratuitos e com licença livre para uso. Neste minicurso, vamos utilizar **Python 3** instalado em um sistema **Linux**. Para outros sistemas, pode ser necessário fazer algumas pequenas adequações.

2.1.1 Console online

Alternativamente, há consoles online **Python** disponíveis na web. Para quem tem conta [Google](#), o [Google Colab](#) disponibiliza um **notebook Python** gratuito.

2.2 Utilização

A execução de códigos **Python** pode ser feita de três formas básicas:

- em modo interativo em um console/notebook **Python**;
- por execução de um código `arqnome.py` em um console/notebook **Python**;
- por execução de um código `arqnome.py` em um terminal;

Exemplo 2.1. Implemente o seguinte pseudocódigo.

```
s = "Ola, mundo!".  
imprime(s). (imprime a string s)
```

- a) em modo iterativo no console;
- b) escrevendo o código `ola.py` e executando-o no console;
- c) escrevendo o código `ola.py` e executando-o no terminal.

Resolução. Seguem as implementações em cada caso.

- a) Em modo iterativo.

Iniciamos um console **Python** em terminal digitando

```
$ python3
```

Então, digitamos

```
1 >>> s = "Olá, Mundo!"
2 >>> print(s) #imprime a string s
3 Olá, Mundo!
```

Para encerrar o console, digitamos

```
1 >>> quit()
```

b) Executando um *script* `ola.py` no console.

Primeiramente, escrevemos o código

```
1 s = "Olá, Mundo!"
2 print(s) # imprime a string s
```

em um editor de texto (ou no seu IDE de preferência) e salvamo-lo em `/caminho/ola.py`. Então, executamo-lo no console **Python** com

```
1 >>> exec(open('/pasta/codigo.py').read())
2 Olá, mundo!
3 >>> quit()
```

c) Executando o código em terminal.

Considerando que já temos o código salvo em `/caminho/ola.py`, executamo-lo com

```
1 $ python3 /caminho/codigo.py
2 Olá, mundo!
3 $ exit
```

3 Elementos da linguagem

3.1 Tipos/objetos básicos

Python é uma **linguagem** de programação **dinâmica** em que as variáveis são declaradas automaticamente ao receberem um valor. Por exemplo, consideremos as seguintes instruções

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x * 2.0
```

Na primeira instrução, a variável `x` recebe o valor inteiro 1 e, então, é armazenado na memória do computador como um objeto da classe `int` (número inteiro). Na segunda instrução, `y` recebe o valor decimal 2.0 (resultado de 1×2.0) e é armazenado como um objeto da classe `float` (ponto flutuante de 64-bits). Podemos verificar isso, com as seguintes instruções

```
1 >>> print(x, y)
2 1 2.0
3 >>> print(type(x), type(y))
4 <class 'int'> <class 'float'>
```

Códigos `Python` admitem comentários e continuação de linha como no seguinte exemplo

```
1 >>> # isto é um comentário
2 >>> s = "isto é uma \
3 ... string"
4 >>> print(s)
5 isto é uma string
6 >>> type(s)
7 <class 'str'>
```

Observação 3.1. (Notação científica) O `Python` aceita notação científica. Por exemplo 5.2×10^{-2} é digitado da seguinte forma

```
1 >>> 5.2e-2
2 0.052
```

Observação 3.2. Além dos tipos numéricos e `string`, `Python` também conta com os tipos de dados `list` (lista), `tuple` (n -upla) e `dict` (dicionário). Estudaremos estes tipos mais adiante neste minicurso.

Exercício 3.1.1. Antes de implementar, diga qual o valor de `x` após as seguintes instruções.

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x
3 >>> y = 0
```

Justifique seu resposta e verifique-a.

Exercício 3.1.2. Implemente um código em que o usuário entre com valores para as variáveis x e y ¹. Então, os valores das variáveis são permutados entre si.

3.2 Operações aritméticas elementares

Os operadores aritméticos elementares são:

$+$: adição

$-$: subtração

$*$: multiplicação

$/$: divisão

$**$: potenciação

$\%$: módulo

$//$: divisão inteira

Consideremos o seguinte exemplo

```
1 >>> 2+8*3/2**2-1
2 7.0
```

Observamos que as operações $**$ tem precedência sobre as operações $*$, $/$, $\%$, $//$, as quais têm precedência sobre as operações $+$, $-$. Operações de mesma precedência seguem a ordem da esquerda para direita, conforme escritas na linha de comando. Usa-se parênteses para alterar a precedência entre as operações, por exemplo

```
1 >>> (2+8*3)/2**2-1
2 5.5
```

Consulte mais informações sobre a precedência de operadores em [Python Docs](#).

Exercício 3.2.1. Compute as raízes do seguinte polinômio quadrático

$$p(x) = x^2 - x - 2 \quad (1)$$

¹A entrada de valores via console pode ser feita com a função [Python input](#). Consulte [Python Docs](#).

usando a fórmula de Bhaskara². Dica: para calcular \sqrt{x} use `x**(1/2)`.

O operador `%`módulo computa o resto da divisão e o operador `//` a divisão inteira, por exemplo

```
1 >>> 5 % 2
2 1
3 >>> 5 // 2
4 2
```

Exercício 3.2.2. Use o [Python](#) para computar os inteiros não negativos q e r tais que

$$25 = q \cdot 5 + r, \quad (2)$$

sendo r o menor possível.

3.3 Funções e constantes elementares

O módulo Python [math](#) disponibiliza várias funções e constantes elementares. Para usá-las, precisamos importar o módulo para nossa seção. Fazemos isso com a instrução

```
1 >>> import math
```

Com isso, temos acesso a todas as definições e declarações contidas neste módulo. Por exemplo

```
1 >>> math.pi
2 3.141592653589793
3 >>> math.cos(math.pi)
4 -1.0
5 >>> math.sqrt(2)
6 1.4142135623730951
7 >>> math.log(math.e)
8 1.0
```

Observação 3.3. Notemos que `math.log` é a função logaritmo natural, i.e. $\ln(x) = \log_e(x)$. A implementação [Python](#) para o logaritmo de base 10 é `math.log(x,10)` ou, mais acurado, `math.log10`.

²Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático e astrônomo indiano. Fonte: [Wikipédia](#).

Exercício 3.3.1. Compute

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $e^{\log_3(\pi)}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

.

Exercício 3.3.2. Refaça o Exercício usando a função `math.sqrt` para computar a raiz quadrada do discriminante.

3.4 Operadores de comparação elementares

Os operadores de comparação elementares são

`==`: igual a

`!=`: diferente de

`>`: maior que

`<`: menor que

`>=`: maior ou igual que

`<=`: menor ou igual que

Estes operadores retornam os valores lógicos `True` (verdadeiro) ou `False` (falso).

Por exemplo, temos

```
1 >>> x = 2
2 >>> x + x == 4
3 True
```

Exercício 3.4.1. Atribua a variável `x` o valor $\sqrt{3}$. Então, verifique se o valor computado de x^2 é maior que 3. Em caso negativo, verifique se x^2 é menor que 3. Comente o resultado obtido.

3.5 Operadores lógicos elementares

Os operadores lógicos elementares são:

`and` : e lógico

`or` : ou lógico

`not` : não lógico

A tabela booleana³ do “e” lógico é

A	B	A <code>and</code> B
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

Podemos verificar isso no `Python` como segue

```

1 >>> True and True
2 True
3 >>> True and False
4 False
5 >>> False and True
6 False
7 >>> False and False
8 False

```

Exercício 3.5.1. Construa as tabelas booleanas do operador `or` e do `not`.

Exercício 3.5.2. Use `Python` para verificar se $1.4 \leq \sqrt{2} < 1.5$. E, também, verifique se $\sqrt{3} > 1.7$ ou $\sqrt{3} \geq 1.7321$.

Exercício 3.5.3. Implemente uma instrução para computar o operador `xor` (ou exclusivo). Dadas duas afirmações A e B, `A xor B` é `True` no caso de uma, e somente uma, das afirmações ser `True`, caso contrário é `False`.

3.6 Conjuntos

`Python` tem conjuntos finitos como um tipo básico de variável. Um conjunto é uma coleção de itens **não ordenada** e **imutável** e **não admite**

³George Boole, 1815 - 1864, matemático e filósofo britânico. Fonte: [Wikipédia](#).

itens duplicados. Por exemplo,

```

1 >>> a = {1, 2, 3}
2 >>> type(a)
3 <class 'set'>
4 >>> b = set((2, 1, 3, 3))
5 >>> b
6 {1, 2, 3}
7 >>> a == b
8 True
9 >>> # conjunto vazio
10 >>> e = set()
```

aloca o conjunto $a = \{1, 2, 3\}$. Note que o conjunto b é igual a a . Observamos que o conjunto vazio deve ser construído com a instrução `set()` e não com `{}`⁴.

Observação 3.4. A função `Python len` retorna o número de elementos de um conjunto. Por exemplo,

```

1 >>> len(a)
2 3
```

Operadores envolvendo conjuntos:

-: diferença entre conjuntos;

|: união de conjuntos;

&: interseção de conjuntos;

^: diferença simétrica;

Exemplo 3.1. Sejam os conjuntos

$$A = \{2, \pi, -0.25, 3, \text{'banana'}\}, \quad (3)$$

$$B = \{\text{'laranja'}, 3, \arccos(-1), -1\} \quad (4)$$

Compute

a) $A \setminus B$

b) $A \cup B$

⁴Isso constrói um dicionário vazio, como introduziremos logo mais.

c) $A \cap B$

d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Resolução. Começamos alocando os conjuntos como segue

```
1 >>> import math
2 >>> A = {2, math.pi, -0.25, 3, 'banana'}
3 >>> B = {'laranja', 3, math.acos(-1), -1}
```

a) $A \setminus B$

```
1 >>> A - B
2 {-0.25, 2, 'banana'}
```

b) $A \cup B$

```
1 >>> A | B
2 {-0.25, 2, 3, 3.141592653589793, \
3 'laranja', 'banana', -1}
```

c) $A \cap B$

```
1 >>> A & B
2 {3, 3.141592653589793}
```

d) $A \Delta B$

```
1 >>> A ^ B
2 {-0.25, 2, 'laranja', 'banana', -1}
```

Observação 3.5. [Python](#) disponibiliza a sintaxe de compreensão de conjuntos. Por exemplo,

```
1 >>> {x for x in A if type(x) == str}
2 {'banana'}
```

Exercício 3.6.1. Considere o conjunto

$$Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Faça um código [Python](#) para extrair o subconjunto dos números pares do conjunto Z .

3.7 *n*-uplas

Em **Python** *n*-uplas (*tuples*) é uma sequência de objetos, i.e. **uma coleção ordenada, indexada e imutável**. Por exemplo, na sequência temos um par, uma tripla e uma quadrupla

```
1 >>> a = (1, 2)
2 >>> a
3 (1, 2)
4 >>> b = -1, 1, 0
5 (-1, 1, 0)
6 >>> c = (0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
7 >>> c
8 (0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
9 >>> len(c)
10 4
```

Os elementos de um **tuple** são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de um **tuple** usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 >>> c[2]
2 {2, -1}
```

Pode-se também extrair uma fatia (um subconjunto) usando-se a notação `:`. Por exemplo,

```
1 >>> c[1:3]
2 ('laranja', {2, -1})
```

- Operadores básicos:

`+`: concatenação

```
1 >>> (1, 2) + (3, 4, 5)
2 (1, 2, 3, 4, 5)
```

`*`: repetição

```
1 >>> (1, 2) * 2
2 (1, 2, 1, 2)
```

`in`: pertencimento

```
1 >>> 1 in (-1, 0, 1, 2)
2 True
```

Exercício 3.7.1. Aloque os conjuntos

$$A = \{-1, 0, 2\}, \quad (6)$$

$$B = \{2, 3, 5\}. \quad (7)$$

Então, compute o produto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Qual o número de elementos da $A \times B$? Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 3.5).

Exercício 3.7.2. Aloque o gráfico discreto da função⁵ $f(x) = x^2$ para $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$. Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 3.5).

3.8 Listas

O tipo `Python list` permite alocar em uma única variável uma lista de itens ordenada. Por exemplo, observemos as seguintes listas

```
1 >>> x = [-1, 2, -3, -5]
2 >>> type(x)
3 <class 'list'>
4 >>> y = ['a', 'b', 'a']
5 >>> y
6 ['a', 'b', 'a']
7 >>> vazia = []
8 >>> len(x)
9 4
```

Os elementos de uma lista são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de uma lista usando-se sua posição. Por exemplo,

⁵O gráfico de uma função restrito a um conjunto A é o conjunto $G(f)|_A = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$.

```
1 >>> x[0]
2 -1
3 >>> y[2] = 'c'
4 >>> y
5 ['a', 'b', 'c']
```

Pode-se fazer um corte de elementos de uma lista usando o operador `:`. Por exemplo,

```
1 >>> x = [1, 2, -1, 3, -2]
2 >>> x[2:5]
3 [-1, 3, -2]
```

Operadores básicos:

`+`: concatenação

```
1 >>> [1, 2] + [3, 4, 5]
2 [1, 2, 3, 4, 5]
```

`*`: repetição

```
1 >>> [1, 2] * 2
2 [1, 2, 1, 2]
```

`in`: pertencimento

```
1 >>> 1 in [-1, 0, 1, 2]
2 True
```

Observação 3.6. Listas contam com várias funções prontas para a execução de diversas tarefas práticas como, por exemplo, inserir/deletar itens, contar ocorrências, ordenar itens, etc. Consulte [Python Docs](#).

Observação 3.7. (Alocação *versus* cópia) Estude o seguinte exemplo

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 0, 1]
```

Notamos que `y` aponta para o mesmo endereço de memória de `x`. Para copiar uma lista e alocá-la em um novo endereço de memória, deve-se usar a função `list.copy()`, como segue

```

1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x.copy()
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 3, 1]
6 >>> y
7 [2, 0, 1]

```

Exercício 3.8.1. Implemente uma lista para alocar os primeiros 5 elementos da sequência de Fibonacci⁶.

Exercício 3.8.2. Uma aplicação do Método Babilônico⁷ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \quad (8)$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Implemente uma lista para alocar as quatro primeiras aproximações da solução, i.e. x_0, x_1, x_2, x_3 .

Exercício 3.8.3. Aloque os seguintes vetores como listas no [Python](#)

$$x = (-1, 3, -2), \quad (10)$$

$$y = (4, -2, 0). \quad (11)$$

Então, compute

a) $x + y$

b) $x \cdot y$

Dica: use uma compreensão de lista e os métodos [Python zip](#) e [sum](#).

Exercício 3.8.4. Uma matriz pode ser alocada como uma lista de listas [Python](#), alocando cada linha como uma lista e a matriz como a lista destas listas. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

⁶Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

⁷Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

pode ser alocada como a seguinte lista de listas

```
1 >>> M = [[1, -2], [2, 3]]
2 >>> M
3 [[1, -2], [2, 3]]
```

Use listas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e o vetor coluna

$$x = (2, -3, 1), \quad (14)$$

então compute Ax .

3.9 Dicionários

Em [Python](#) um dicionário é um mapeamento objeto a objeto, cada par (chave:valor) é separado por uma vírgula. Por exemplo,

```
1 >>> a = {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
2 >>> a
3 {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
4 >>> b = {1: 2.71, (1,2): 2, 'a': {1,0,-1}}
5 >>> b
6 {1: 2.71, (1, 2): 2, 'a': {0, 1, -1}}
7 >>> d = {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
8 >>> d
9 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
```

O acesso a um item do dicionário é feito usando-se sua **chave**. Por exemplo,

```
1 >>> d['b']
2 2
3 >>> d[1.4] = 1
4 >>> d
5 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b'}
```

Pode-se adicionar um novo par, simplesmente, atribuindo valor a uma nova chave. Por exemplo,


```

1 >>> d[1.5] = 0
2 >>> d
3 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b', 1.5: 0}

```

Observação 3.8. Consulte sobre mais sobre dicionários em [Python Docs](#).

Exercício 3.9.1. Considere a função afim

$$f(x) = 3 - x. \quad (15)$$

Implemente um dicionário para alocar a raiz da função, a interseção com o eixo y e seu coeficiente angular.

Exercício 3.9.2. Considere a função quadrática

$$g(x) = x^2 - x - 2 \quad (16)$$

Implemente um dicionário para alocar suas raízes, vértice e interseção com o eixo y .

4 Função, ramificação e repetição

Nesta seção, vamos introduzir funções e estruturas de ramificação e de repetição. Estes são procedimentos fundamentais na programação estruturada.

4.1 Definindo funções

Em [Python](#), uma função é definida com a palavra-chave `def` seguida de seu nome e seus parâmetros encapsulados entre parênteses e por dois-pontos `:`. Suas instruções formam o corpo da função, iniciam-se na linha abaixo e devem estar indentadas. A indentação define o escopo da função. Por exemplo, a seguinte função imprime o valor da função

$$f(x) = 2x - 3 \quad (17)$$

```

1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     print(y)
4 ...
5 >>> f(2)
6 1

```

Você pode protestar que `f` não é uma função e, sim, um procedimento, pois não retorna valor. Para uma função retornar um objeto, usamos a instrução `return`. Por exemplo,

```
1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     return y
4 ...
5 >>> z = f(2)
6 >>> z
7 1
```

Observação 4.1. Para funções pequenas, pode-se utilizar a instrução `lambda` de funções anônimas. Por exemplo,

```
1 >>> f = lambda x: 2*x - 3
2 >>> f(3)
3 3
```

Observação 4.2. Consulte mais informações sobre a definição de funções em [Python Docs](#).

Exercício 4.1.1. Implemente uma função para computar as raízes de um polinômio de grau 1 $p(x) = ax + b$.

Exercício 4.1.2. Implemente uma função para computar as raízes de um polinômio de grau 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercício 4.1.3. Implemente uma função que computa o produto escalar de dois vetores

$$x = (x_0, x_1, x_2), \quad (18)$$

$$y = (y_0, y_1, y_2). \quad (19)$$

Use listas para representar os vetores no [Python](#).

Exercício 4.1.4. Implemente uma função que computa o determinante de matrizes 2×2 . Use lista de listas para representar as matrizes.

Exercício 4.1.5. Implemente uma função que computa a multiplicação matrix-vetor Ax , com A 2×2 e x um vetor coluna de dois elementos.

Exercício 4.1.6. (Recursividade) Implemente uma função recursiva para computar o fatorial de um número natural n , i.e. $n!$.

4.2 Ramificação

Uma estrutura de ramificação é uma instrução para a tomada de decisões durante a execução de um programa. No [Python](#), está disponível a instrução `if`. Consultemos o seguinte exemplo.

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('par')
```

Aqui, a função `paridade` recebe o valor `n`. Se (`if`) o resto da divisão de `n` por 2 é igual a zero (condição), então (`:`) imprime a *string* `par`.

Observação 4.3. A indentação determina o escopo de cada instrução `if`.

Também está disponível a instrução `if-else`. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('par')  
4     else:  
5         print('impar')
```

Agora, se (`if`) a condição (`n%2 == 0`) for verdadeira (`True`), então imprime `par`, senão (`else`) imprime `impar`.

Ainda, é possível ter instruções `if-else` encadeadas. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('eh divisivel por 2')  
4     elif (n%3 == 0):  
5         print('eh divisivel por 3')  
6     else:  
7         print('nao eh divisivel por 2 e 3')
```

Observe que `elif` deve ser utilizado no lugar de `else if`.

Exercício 4.2.1. Implemente uma função que recebe dois números n e m e imprime o maior deles.

Exercício 4.2.2. Implemente uma função que recebe os coeficientes de um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (20)$$

e classifique-o como um polinômio de grau 0, 1 ou 2.

4.3 Repetição

Estruturas de repetição são instruções que permitem que a execução repetida de uma região do código. São duas instruções disponíveis `while` e `for`.

4.3.1 `while`

A sintaxe da instrução `while` é

```
1 while expressao:
2     comando 0
3     .
4     .
5     .
6     comando n
```

Isto é, enquanto (`while`) a expressão (`expressao`) for verdadeira, os comandos `comando 0` a `comando n` serão repetidamente executados em ordem. Por exemplo, o seguinte código computa a soma dos 10 primeiros números naturais e, então imprime-a.

```
1 n = 0
2 s = 0
3 while (n < 10):
4     s += n
5     n += 1
6 print(s)
```

Observação 4.4. As instruções de controle `break`, `continue` são bastante úteis em várias situações. A primeira, encerra as repetições e, a segunda, pula para uma nova repetição. Consulte mais em [Python Docs](#).

Exercício 4.3.1. Use `while` para imprimir os dez primeiros números ímpares.

Exercício 4.3.2. Uma aplicação do Método Babilônico⁸ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \tag{21}$$

⁸Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Faça um código com `while` para computar aproximação x_i , tal que $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$.

4.3.2 for

A estrutura `for` tem a sintaxe

```
1 for i in iteravel:
2     escopo
```

onde, `iteravel` pode ser qualquer objeto de uma classe iterável (conjunto, *n*-upla, lista, dicionário, *string*). Os comandos dentro do escopo (determinado pela indentação) são repetidos para cada iterada *i*. Por exemplo,

```
1 >>> for i in [0,1,2]:
2     ...     print(i)
3     ...
4 0
5 1
6 2
```

4.3.3 range

A função `Python range([start,]stop[,sep])` é particularmente útil na construção de instruções `for`. Ela cria um objeto de classe iterável de `start` (incluído) a `stop` (excluído), de elementos igualmente separados por `sep`. Por padrão, `start=0`, `sep=1` caso omitidos. Por exemplo,

```
1 >>> for i in range(1,6,2):
2     ...     print(i)
3     ...
4 1
5 3
6 5
```

ou

```
1 >>> for i in range(3):
2     ...     print(i)
```

```
3 ...
4 0
5 1
6 2
```

Exercício 4.3.3. Escreva uma função que retorne o n -ésimo termo da função de Fibonacci⁹, $n \geq 1$.

Exercício 4.3.4. Implemente uma função para computar o produto escalar de dois vetores de n elementos. Assuma que os vetores estão alocados em listas.

Exercício 4.3.5. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times n$ por um vetor coluna x de n elementos. Assuma que o vetor está alocada como uma lista e a matriz como uma lista de listas por linhas.

Exercício 4.3.6. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times m$ por uma matriz B de $m \times n$. Assuma que as matrizes estão alocadas como listas de listas por linhas de cada matriz.

5 Elementos da computação matricial

Nesta seção, vamos explorar a [NumPy](#) (Numerical Python), biblioteca para tratamento numérico de dados. Ela é extensivamente utilizada nos mais diversos campos da ciência e da engenharia. Aqui, vamos nos restringir a introduzir algumas de suas ferramentas para a computação matricial.

Usualmente, a biblioteca é importada como segue

```
1 >>> import numpy as np
```

5.1 NumPy array

Um `array` é uma tabela de valores (vetor, matriz ou multidimensional) e contém informação sobre os dados brutos, indexação e como interpretá-los. **Os elementos são todos do mesmo tipo** (diferente de uma lista Python), referenciados pela propriedade `dtype`. A indexação dos elementos

⁹Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

pode ser feita por um `tuple` de inteiros não negativos, por booleanos, por outro `array` ou por números inteiros. O `rank` de um `array` é seu número de dimensões (chamadas de `axes`¹⁰). O `shape` é um `tuple` de inteiros que fornece seu tamanho (número de elementos) em cada dimensão. Sua inicialização pode ser feita usando-se listas simples ou encadeadas. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,3,-1,2])
2 >>> print(a)
3 [ 1  3 -1  2]
4 >>> a.dtype
5 dtype('int64')
6 >>> a.shape
7 (4,)
8 >>> a[2]
9 -1
10 >>> a[1:3]
11 array([ 3, -1])
```

temos um `array` de números inteiros com quatro elementos dispostos em um único `axis` (eixo). Podemos interpretá-lo como uma representação de um vetor linha ou coluna, i.e.

$$a = (1, 3, -1, 2) \quad (23)$$

vetor coluna ou a^T vetor linha.

Outro exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1.0,2,3],[-3,-2,-1]])
2 >>> a.dtype
3 dtype('float64')
4 >>> a.shape
5 (2, 3)
6 >>> a[1,1]
7 -2.0
```

temos um `array` de números decimais (`float`) dispostos em um arranjo com dois `axes` (eixos). O primeiro `axis` tem tamanho 2 e o segundo tem tamanho 3. Ou seja, podemos interpretá-lo como uma matriz de duas linhas e três

¹⁰Do inglês, plural de *axis*, eixo.

colunas. Podemos fazer sua representação algébrica como

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

5.1.1 Inicialização de um array

O **NumPy** conta com úteis funções de inicialização de **array**. Vejam algumas das mais frequentes:

- `np.zeros()`: inicializa um **array** com todos seus elementos iguais a zero.

```
1 >>> np.zeros(2)
2 array([0., 0.]
```

- `np.ones()`: inicializa um **array** com todos seus elementos iguais a 1.

```
1 >>> np.ones((3,2), dtype='int')
2 array([[1, 1],
3        [1, 1],
4        [1, 1]])
```

- `np.empty()`: inicializa um **array** sem alocar valores para seus elementos¹¹.

```
1 >>> np.empty(3)
2 array([4.9e-324, 1.5e-323, 2.5e-323])
```

- `np.arange()`: inicializa um **array** com uma sequência de elementos¹².

```
1 >>> np.arange(1,6,2)
2 array([1, 3, 5])
```

- `np.linspace(a, b[, num=n])`: inicializa um **array** como uma sequência de elementos que começa em **a**, termina em **b** (incluídos) e contém **n** elementos igualmente espaçados.

```
1 >>> np.linspace(0, 1, num=5)
2 array([0.    , 0.25, 0.5   , 0.75, 1.    ])
```

¹¹Atenção! Os valores dos elementos serão dinâmicos conforme “lixo” da memória.

¹²Similar a função Python [range](#).

5.1.2 Manipulação de arrays

Outras duas funções importantes no tratamento de `arrays` são:

- `arr.reshape()`: permite a alteração da forma de um `array`.

```
1 >>> a = np.array([-2,-1])
2 >>> a
3 array([-2, -1])
4 >>> a.reshape(2,1)
5 array([[ -2],
6        [ -1]])
```

O `arr.reshape()` também permite a utilização de um coringa `-1` que será dinamicamente determinado de forma obter-se uma estrutura adequada. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.reshape((-1,1))
6 array([[1],
7        [2],
8        [3],
9        [4]])
```

- `arr.transpose()`: computa a transposta de uma matriz.

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.transpose()
6 array([[1, 3],
7        [2, 4]])
```

- `np.concatenate()`: concatena arrays.

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> c = np.concatenate((a,b))
4 >>> c
```

```
5 array([1, 2, 2, 3])
6 >>> a = a.reshape((1,-1))
7 >>> a.ndim
8 2
9 >>> b = b.reshape((1,-1))
10 >>> b
11 array([[2, 3]])
12 >>> d = np.concatenate((a,b), axis=0)
13 >>> d
14 array([[1, 2],
15         [2, 3]])
```

5.1.3 Operadores elemento-a-elemento

Os operadores aritméticos disponível no Python atuam elemento-a-elemento nos arrays. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> a+b
4 array([3, 5])
5 >>> a-b
6 array([-1, -1])
7 >>> b*a
8 array([2, 6])
9 >>> a**b
10 array([1, 8])
11 >>> 2*b
12 array([4, 6])
```

O NumPy também conta com várias funções matemáticas elementares que operam elemento-a-elemento em arrays. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([np.pi, np.sqrt(2)])
2 >>> a
3 array([3.14159265, 1.41421356])
4 >>> np.sin(a)
5 array([1.22464680e-16, 9.87765946e-01])
6 >>> np.exp(a)
7 array([23.14069263, 4.11325038])
```

Observação 5.1. O `NumPy` contém um série de outras funções práticas para a manipulação de `arrays`. Consulte [NumPy: the absolute basics for beginners](#).

5.2 Elementos da álgebra linear

O `NumPy` conta com um módulo de álgebra linear

```
1 >>> from numpy import linalg
```

5.2.1 Vetores

Um vetor podem ser representado usando um `array` de um eixo (dimensão) ou um com dois eixos, caso se queira diferenciá-lo entre um vetor linha ou coluna. Por exemplo, os vetores

$$a = (2, -1, 7), \quad (25)$$

$$b = (3, 1, 0)^T \quad (26)$$

podem ser alocados com

```
1 >>> x = np.array([2, -1, 7])
2 >>> y = np.array([3, 1, 0])
```

Caso queira-se que x siga um arranjo em coluna, pode-se modificar como segue

```
1 >>> a = a.reshape((-1, 1))
2 >>> a
3 array([[ 2],
4        [-1],
5        [ 7]])
```

Como já vimos, o `NumPy` conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a vetores (consulte a Subseção 5.1.3). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 5.2.1. Aloque cada um dos seguintes vetores como um `NumPy` array:

a) $x = (1.2, -3.1, 4)$

b) $y = x^T$

c) $z = (\pi, \sqrt{2}, e^{-2})^T$

5.2.2 Produto escalar e norma

Dados dois vetores,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (27)$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (28)$$

define-se o **produto escalar** por

$$x \cdot y = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} \quad (29)$$

Com o **NumPy**, podemos computá-lo com a função `np.dot()`. Por exemplo,

```
1 >>> x = np.array([-1, 0, 2, 4])
2 >>> y = np.array([0, 1, 1, -1])
3 >>> np.dot(x, y)
4 -2
```

A norma (euclidiana) de um vetor é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}. \quad (30)$$

O **NumPy** conta com a função `np.linalg.norm()` para computá-la. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.norm(y)
2 1.7320508075688772
```

Exercício 5.2.2. Faça um código para computar o produto escalar $x \cdot y$ sendo

$$x = (1.2, \ln(2), 4), \quad (31)$$

$$y = (\pi^2, \sqrt{3}, e) \quad (32)$$

5.2.3 Matrizes

Uma matriz pode ser alocada como um [NumPy array](#) de dois eixos (dimensões). Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \quad (34)$$

podem ser alocadas como segue

```
1 >>> A = np.array([[2, -1, 7], [3, 1, 0]])
2 >>> A
3 array([[ 2, -1,  7],
4         [ 3,  1,  0]])
5 >>> B = np.array([[4, 0], [2, 1], [-8, 6]])
6 >>> B
7 array([[ 4,  0],
8         [ 2,  1],
9         [-8,  6]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a matrizes (consulte a Subseção [5.1.3](#)). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 5.2.3. Aloque cada uma das seguintes matrizes como um Numpy array:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

b) $B = A^T$

Exercício 5.2.4. Seja

```
1 >>> A = np.array([[2, 1], [1, 1], [-3, -2]])
```

Determine o formato (`shape`) dos seguintes `arrays`:

- a) `A[:,0]`
- b) `A[:,0:1]`
- c) `A[1:3,0]`
- d) `A[1:3,0:1]`
- e) `A[1:3,0:2]`

5.2.4 Inicialização de matrizes

Além das inicializações de `arrays` já estudadas na Subseção 5.1.1, temos mais algumas que são particularmente úteis no caso de matrizes.

- `np.eye(n)`: retorna a matriz identidade $n \times n$.

```
1 >>> np.eye(3)
2 array([[1., 0., 0.],
3        [0., 1., 0.],
4        [0., 0., 1.]])
```

- `np.diag(v)`: retorna uma matriz diagonal formada pela `list` `v`.

```
1 >>> np.diag([1,2,3])
2 array([[1, 0, 0],
3        [0, 2, 0],
4        [0, 0, 3]])
```

Exercício 5.2.5. Aloque a matriz escalar $C = [c_{ij}]_{i,j=0}^{99}$, sendo $c_{ii} = \pi$ e $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

5.2.5 Multiplicação de matrizes

A multiplicação da matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,l-1}$ pela matriz $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^{l-1,m-1}$ e a matriz $C = AB = [c_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,m-1}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{l-1} a_{ik} b_{k,j} \quad (36)$$

O `NumPy` tem a função `np.matmul()` para computar a multiplicação de matrizes. Por exemplo,

```

1 >>> C = np.matmul(A,B)
2 >>> C
3 array([[ -50,   41],
4        [  14,    1]])

```

Observação 5.2. É importante notar que `np.matmul(A,B)` é a multiplicação de matrizes, enquanto que `*` consiste na multiplicação elemento a elemento. Alternativamente a `np.matmul(A,B)` pode-se usar `A @ B`.

Exercício 5.2.6. Aloque as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Então, se existirem, compute e forneça as dimensões das seguintes matrizes

- CD
- $D^T E$
- $D^T C$
- DE

5.2.6 Traço e Determinante de uma matriz

O **NumPy** tem a função `arr.trace()` para computar o **traço** de uma matriz (soma dos elementos de sua diagonal). Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> A.trace()
3 -1

```

Já, o **determinante** é fornecido no módulo `np.linalg`. Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> np.linalg.det(A)
3 25.000000000000007

```

Exercício 5.2.7. Compute e verifique os traços e os determinantes das seguintes matrizes

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

5.2.7 Rank e inversa de uma matriz

O **rank** de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes. O NumPy conta com a função `matrix_rank()` para computá-lo. Por exemplo,

```

1 >>> np.linalg.matrix_rank(np.eye(3))
2 3
3 >>> A = np.array([[1, 2, 3], [-1, 1, -1], [0, 3, 2]])
4 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
5 2

```

A inversa de uma matriz **full rank** pode ser computada com a função `np.linalg.inv()`. Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[1, 2, 3], [-1, 1, -1], [1, 3, 2]])
2 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
3 3
4 >>> Ainv = np.linalg.inv(A)
5 >>> np.matmul(A, Ainv)
6 array([[ 1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
7        [ 1.11022302e-16,  1.00000000e+00,  2.22044605e-16],
8        [-2.22044605e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])

```

Exercício 5.2.8. Compute, se possível, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Verifique suas respostas.

5.2.8 Autovalores e autovetores de uma matriz

Um auto-par (λ, v) , λ um escalar chamado de autovalor e $v \neq 0$ é um vetor chamado de autovetor, é tal que

$$A\lambda = \lambda v. \quad (44)$$

O [NumPy](#) tem a função `np.linalg.eig()` para computar os auto-pares de uma matriz. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.eig(np.eye(3))
2 (array([1., 1., 1.]), array([[1., 0., 0.],
3     [0., 1., 0.],
4     [0., 0., 1.])))
```

Observamos que a função retorna uma tupla, sendo o primeiro item um `array` contendo os autovalores (repetidos conforme suas multiplicidades) e o segundo item é a matriz dos autovetores, onde estas são suas colunas.

Exercício 5.2.9. Compute os auto-pares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Então, verifique se, de fato, $A\lambda = \lambda v$ para cada auto-par (λ, v) computado.

6 Gráficos

[Matplotlib](#) é uma biblioteca [Python](#) livre e gratuita para a visualização de dados. É muito utilizada para a criação de gráficos estáticos, animados ou iterativos. Aqui, vamos introduzir alguma de suas ferramentas básicas para gráficos.

Para utilizá-la, é necessário instalá-la. Pacotes de instalação estão disponíveis para os principais sistemas operacionais, consulte a sua loja de *apps* ou [Matplotlib Installation](#). Para importá-la, usamos

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
```

Observação 6.1. Se você está usando um console [Python](#) remoto, você pode querer adicionar a seguinte linha de comando para que os gráficos sejam visualizados no próprio console.

```
1 >>> %matplotlib inline
```

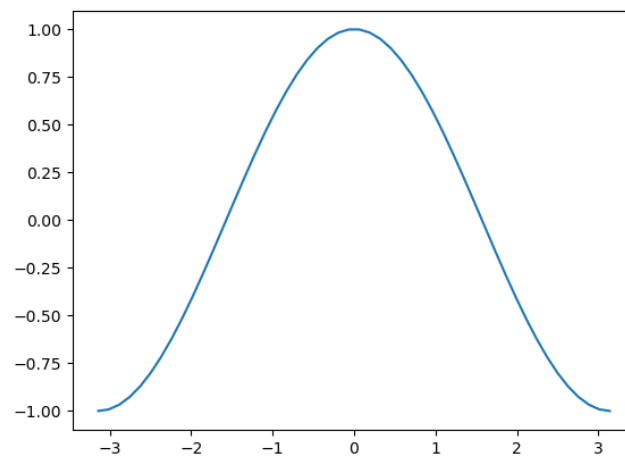


Figura 1: Esboço do gráfico da função $y = \sin(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Gráficos bidimensionais podem ser criados com a função `plt.plot(x,y)`, onde `x` e `y` são `arrays` que fornecem os pontos cartesianos (x_i, y_i) a serem plotados. Por exemplo,

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
2 >>> x = np.linspace(-np.pi, np.pi)
3 >>> y = np.cos(x)
4 >>> plt.plot(x,y)
5 [<matplotlib.lines.Line2D object at 0x7f99f578a370>]
6 >>> plt.show()
```

produz o seguinte esboço do gráfico da função $y = \sin(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Consulte a Figura 1.

Observação 6.2. Matplotlib é uma poderosa ferramenta para a visualização de gráficos. Consulte a galeria de exemplos no seu site oficial

<https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html>

Exercício 6.0.1. Crie um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções no intervalo indicado:

a) $y = \cos(x)$, $[0, 2\pi]$

b) $y = x^2 - x + 1$, $[-2, 2]$

c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $(-1, 1)$

Referências

- [1] Learn python: simply easy learning.
<https://www.tutorialspoint.com/python/index.htm>, 2021.
- [2] NumPy. <https://numpy.org/>, 2021.
- [3] The python tutorial. <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>, 2021.
- [4] SciPy. <https://www.scipy.org/>, 2021.
- [5] S. Banin. *Python 3 - Conceitos e Aplicações - Uma abordagem didática*. Editora Saraiva, 2021.
- [6] J. A. Ribeiro. *Introdução à Programação e aos Algoritmos*. Grupo GEN, 2019.
- [7] R. Wazlawick. *Introdução a Algoritmos e Programação com Python - Uma Abordagem Dirigida Por Testes*. Grupo GEN, 2017.