

Matemática Numérica II

Pedro H A Konzen

17 de julho de 2023

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios de matemática numérica. Como ferramenta computacional de apoio didático, apresentam-se códigos em `Python`.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Conteúdo

| | |
|--|------------|
| Capa | i |
| Licença | ii |
| Prefácio | iii |
| Sumário | vi |
| 1 Derivação | 1 |
| 1.1 Derivadas de primeira ordem | 1 |
| 1.1.1 Desenvolvimento por polinômio de Taylor | 3 |
| 1.2 Derivadas de segunda ordem | 8 |
| 1.3 Diferenças finitas por polinômios interpoladores | 11 |
| 1.3.1 Fórmulas de dois pontos | 12 |
| 1.3.2 Fórmulas de cinco pontos | 14 |
| 2 Técnicas de extrapolação | 16 |
| 2.1 Extrapolação de Richardson | 16 |
| 2.1.1 Sucessivas extrapolações | 21 |
| 2.1.2 Exercícios | 22 |
| 3 Integração | 24 |
| 3.1 Regras de Newton-Cotes | 24 |
| 3.1.1 Regras de Newton-Cotes fechadas | 25 |
| 3.1.2 Regras de Newton-Cotes abertas | 28 |
| 3.2 Regras compostas de Newton-Cotes | 30 |
| 3.2.1 Regra composta do ponto médio | 31 |
| 3.2.2 Regra composta do trapézio | 31 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.3 | Regra composta de Simpson | 32 |
| 3.3 | Quadratura de Romberg | 35 |
| 3.4 | Grau de exatidão | 36 |
| 3.5 | Quadratura Gauss-Legendre | 39 |
| 3.5.1 | Intervalos de integração arbitrários | 45 |
| 3.6 | Quadraturas gaussianas com pesos | 48 |
| 3.6.1 | Quadratura de Gauss-Chebyshev | 48 |
| 3.6.2 | Quadratura de Gauss-Laguerre | 50 |
| 3.6.3 | Quadratura de Gauss-Hermite | 51 |
| 3.7 | Método de Monte Carlo | 53 |
| 4 | Problema de Valor Inicial | 55 |
| 4.1 | Método de Euler | 55 |
| 4.1.1 | Análise Numérica | 59 |
| 4.1.2 | Exercícios | 64 |
| 4.2 | Métodos de Taylor de Alta Ordem | 66 |
| 4.2.1 | Análise Numérica | 69 |
| 4.2.2 | Exercícios | 71 |
| 4.3 | Métodos de Runge-Kutta | 72 |
| 4.3.1 | Métodos de Runge-Kutta de ordem 2 | 73 |
| 4.3.2 | Método de Runge-Kutta de ordem 4 | 78 |
| 4.3.3 | Exercícios | 79 |
| 4.4 | Método de Euler Implícito | 81 |
| 4.4.1 | Análise Numérica | 83 |
| 4.4.2 | Exercícios | 85 |
| 4.5 | Método adaptativo com controle de erro | 87 |
| 4.5.1 | Exercícios | 89 |
| 4.6 | Métodos de passo múltiplo | 89 |
| 4.6.1 | Métodos de Adams-Bashforth | 91 |
| 4.6.2 | Exercícios | 93 |
| 5 | Problema de valor de contorno | 95 |
| 5.1 | Método de diferenças finitas | 95 |
| 6 | Equações Diferenciais Parciais | 102 |
| 6.1 | Equação de Poisson | 102 |
| 6.2 | Equação do calor | 108 |
| 6.3 | Equação da onda | 113 |

Capítulo 1

Derivação

[[tag:revisar]]

Neste capítulo, discutimos os métodos fundamentais de derivação numérica de funções.

1.1 Derivadas de primeira ordem

[[tag:revisar]]

A derivada de uma função f num ponto x é, por definição,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.1)$$

Assim sendo e assumindo $h > 0$ ¹ próximo de zero, temos que $f'(x)$ pode ser aproximada pela razão fundamental, i.e.

$$f'(x) \approx \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{D_h f(x)}. \quad (1.2)$$

Analisando a Figura 1.1 vemos que, geometricamente, isto é análogo a aproximar a declividade da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x, f(x))$ pela declividade da reta secante ao gráfico da função f pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$.

¹Para fixar notação, assumiremos $h > 0$ ao longo deste capítulo.

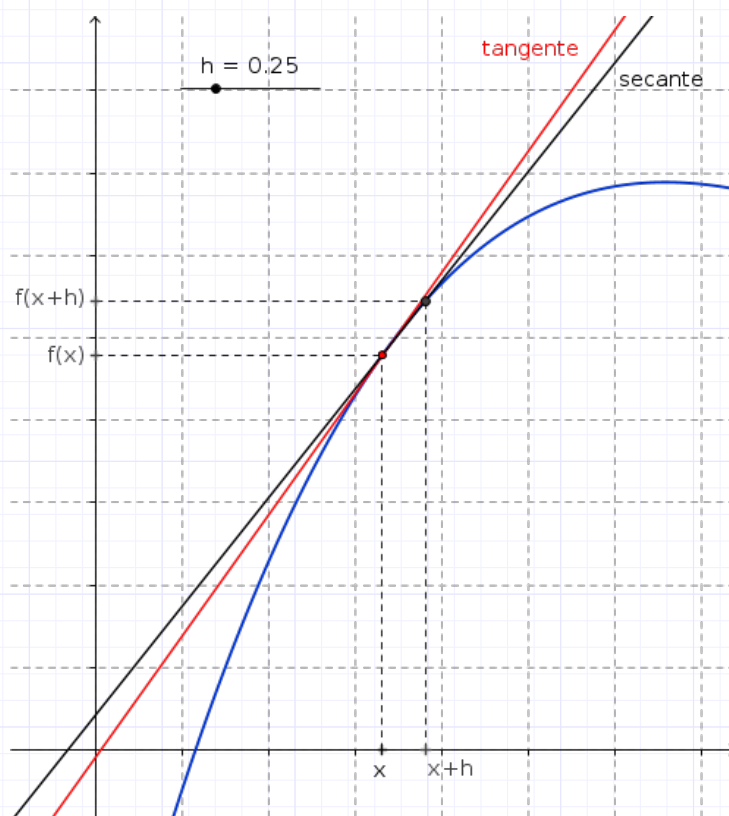


Figura 1.1: Interpretação geométrica da aproximação da derivada pela razão fundamental. Veja no [Geogebra](#).

Exemplo 1.1.1. A derivada de $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$ é $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 0,5$. Agora, usando a aproximação pela razão fundamental (1.2), temos

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) \approx D_h f(x) = \frac{f \left(\frac{\pi}{3} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{3} \right)}{h} \quad (1.3)$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{h}. \quad (1.4)$$

Na Tabela 1.1 temos os valores desta aproximação para diferentes escolhas da passo h .

| h | $Df(\pi/3)$ |
|------------|-------------|
| 10^{-1} | 4,55902E-1 |
| 10^{-2} | 4,95662E-1 |
| 10^{-3} | 4,99567E-1 |
| 10^{-5} | 4,99996E-1 |
| 10^{-10} | 5.00000E-1 |

Tabela 1.1: Valores aproximados da derivada de $f(x) = \sin(x)$ no ponto $x = \pi/6$ usado a expressão (1.2).

No GNU Octave, podemos fazer estes cálculos com o seguinte código:

```
f = @(x) sin(x);
Df = @(x,h) (f(x+h)-f(x))/h;
x=pi/3;
h=1e-1;
printf('%1.5e\n',Df(x,h))
```

A aproximação (1.2) é uma **fórmula de diferenças finitas**. Existem várias aproximações deste tipo que podem ser derivadas. Além disso, tais derivações nos permitem estimar o erro na utilização de tais fórmulas para a aproximação de derivadas. Na sequência, discutiremos o desenvolvimento de fórmulas de diferenças finitas usando polinômios de Taylor.

1.1.1 Desenvolvimento por polinômio de Taylor

[[tag:revisar]]

Aqui, discutimos a obtenção de fórmulas de diferenças finitas via polinômio de Taylor.

Diferenças finitas progressiva de ordem h

[[tag:revisar]]

A aproximação por polinômio de Taylor de grau 1 de uma dada função f em torno no ponto x é

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2). \quad (1.5)$$

Agora, isolando $f'(x)$, obtemos

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h). \quad (1.6)$$

Isto nos fornece a chamada fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem h

$$D_{+,h}f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.7)$$

Observemos que a ordem da fórmula se refere a ordem do **erro de truncamento** com respeito ao passo h .

Exemplo 1.1.2. Consideremos o problema de aproximar a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$. Usando a fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem h obtemos

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx D_{+,h}f(x) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \quad (1.8)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}. \quad (1.9)$$

Na Tabela 1.2 temos os valores desta aproximação para diferentes escolhas de h , bem como, o erro absoluto da aproximação de $f'(\pi/3)$ por $D_{+,h}f(\pi/3)$.

No GNU Octave, podemos fazer estes cálculos com o seguinte código:

```
f = @(x) sin(x);
Df = @(x,h) (f(x+h)-f(x))/h;
x=pi/3;
h=1e-1;
printf('%1.5e %1.1e\n',Df(x,h),abs(cos(x)-Df(x,h)))
```

Tabela 1.2: Resultados referente ao Exemplo 1.1.2.

| h | $D_{+,h}f(\pi/3)$ | $ f'(\pi/3) - D_{+,h}f(\pi/3) $ |
|------------|-------------------|---------------------------------|
| 10^{-1} | 4,55902E-1 | 4,4E-2 |
| 10^{-2} | 4,95662E-1 | 4,3E-3 |
| 10^{-3} | 4,99567E-1 | 4,3E-4 |
| 10^{-5} | 4,99996E-1 | 4,3E-6 |
| 10^{-10} | 5.00000E-1 | 4,1E-8 |

Observação 1.1.1. No exemplo acima (Exemplo 1.1.2), podemos observar que o erro absoluto na aproximação de $f'(x)$ por $D_{+,h}f(x)$ decresce conforme a ordem do erro de truncamento para valores moderados de h (veja, Tabela 1.2). Agora, para valores de h muito pequenos (por exemplo, $h = 10^{-10}$), o erro $|f'(x) - D_{+,h}f(x)|$ não segue mais a tendência de decaimento na mesma do de truncamento. Isto se deve a dominância dos erros de arredondamento para valores muito pequenos de h .

Para mais informações sobre o comportamento do erro de arredondamento em fórmulas de diferenças finitas, veja, por exemplo, [REAMAT - Cálculo Numérico - Versão GNU Octave - Diferenças Finitas - Erro de arredondamento](#).

Diferenças finitas regressiva de ordem h

[[tag:revisar]]

Substituindo h por $-h$ na equação (1.5), obtemos

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + O(h^2), \quad (1.10)$$

donde obtemos a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem h

$$D_{-,h}f(x) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h}. \quad (1.11)$$

Exemplo 1.1.3. Consideremos o problema de aproximar a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$. Usando a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem h obtemos

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx D_{-,h}f(x) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{h} \quad (1.12)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{h}. \quad (1.13)$$

Na Tabela 1.3 temos os valores desta aproximação para diferentes escolhas de h , bem como, o erro absoluto da aproximação de $f'(\pi/3)$ por $D_{-,h}f(\pi/3)$.

Tabela 1.3: Resultados referente ao Exemplo 1.1.3.

| h | $D_{-,h}f(\pi/3)$ | $ f'(\pi/3) - D_{-,h}f(\pi/3) $ |
|------------|-------------------|---------------------------------|
| 10^{-1} | 5,42432E-1 | 4,2E-2 |
| 10^{-2} | 5,04322E-1 | 4,3E-3 |
| 10^{-3} | 5,00433E-1 | 4,3E-4 |
| 10^{-5} | 5,00004E-1 | 4,3E-6 |
| 10^{-10} | 5.00000E-1 | 4,1E-8 |

No GNU Octave, podemos fazer estes cálculos com o seguinte código:

```
f = @(x) sin(x);
Df = @(x,h) (f(x)-f(x-h))/h;
x=pi/3;
h=1e-1;
printf('%1.5E %1.1E\n',Df(x,h),abs(cos(x)-Df(x,h)))
```

Diferenças finitas central de ordem h^2

[[tag:revisar]]

Usando o polinômio de Taylor de grau 2 para aproximar a função $f(x)$ em torno de x , obtemos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + O(h^3) \quad (1.14)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + O(h^3). \quad (1.15)$$

Então, subtraindo esta segunda equação da primeira, temos

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + O(h^3). \quad (1.16)$$

Agora, isolando $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2), \quad (1.17)$$

o que nos fornece a chamada fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2

$$D_{0,h^2}f(x) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (1.18)$$

Exemplo 1.1.4. Consideremos o problema de aproximar a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$. Usando a fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 obtemos

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx D_{0,h^2}f(x) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \quad (1.19)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h}. \quad (1.20)$$

Tabela 1.4: Resultados referente ao Exemplo 1.1.4.

| h | $D_{0,h^2}f(\pi/3)$ | $ f'(\pi/3) - D_{0,h^2}f(\pi/3) $ |
|------------|---------------------|-----------------------------------|
| 10^{-1} | 4,99167E-1 | 8,3E-04 |
| 10^{-2} | 4,99992E-1 | 8,3E-06 |
| 10^{-3} | 5,00000E-1 | 8,3E-08 |
| 10^{-5} | 5,00000E-1 | 8,3E-10 |
| 10^{-10} | 5,00000E-1 | 7,8E-12 |

Na Tabela 1.4 temos os valores desta aproximação para diferentes escolhas de h , bem como, o erro absoluto da aproximação de $f'(\pi/3)$ por $D_{0,h^2}f(\pi/3)$.

No GNU Octave, podemos fazer estes cálculos com o seguinte código:

```
f = @(x) sin(x);
Df = @(x,h) (f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
x=pi/3;
h=1e-1;
printf('%1.5E %1.1E\n',Df(x,h),abs(cos(x)-Df(x,h)))
```

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 1.1.1. Calcule aproximações da derivada de

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} + x \quad (1.21)$$

no ponto $x = 2,5$ dadas pelas seguintes fórmulas de diferenças finitas com $h = 10^{-2}$:

- a) progressiva de ordem h .
- b) regressiva de ordem h .
- c) central de ordem h^2 .

Exercício 1.1.2. Considere a seguinte tabela de pontos

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| y_i | 1,86 | 1,90 | 2,01 | 2,16 | 2,23 | 2,31 |

Calcule aproximações de dy/dx usando diferenças finitas centrais de ordem h^2 quando possível e, caso contrário, diferenças finitas progressiva ou regressiva conforme o caso.

1.2 Derivadas de segunda ordem

[[tag:revisar]]

Diferentemente do que é costumeiro em técnicas analíticas, no âmbito da matemática numérica é preferível obter aproximações diretas de derivadas de segunda ordem, em vez de utilizar aproximações sucessivas de derivadas de primeira ordem. Na sequência, desenvolveremos e aplicaremos uma fórmula de diferenças finitas central para a aproximação de derivadas de segunda ordem.

Consideremos os seguintes polinômios de Taylor de grau 3 de $f(x)$ em torno do ponto x

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + O(h^4), \quad (1.22)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + O(h^4). \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

Somando estas duas equações, obtemos

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^4). \quad (1.25)$$

Então, isolando $f''(x)$ temos

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2). \quad (1.26)$$

Isto nos leva a definição da **fórmula de diferenças finitas de ordem h^2 para a derivada segunda**

$$D_{0,h^2}^2 f(x) := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \quad (1.27)$$

Exemplo 1.2.1. Consideremos o problema de computar a derivada segunda de $f(x) = x^2 + \sin x$ no ponto $x = \pi/6$. Analiticamente, $f''(\pi/6) = 2 - \sin(\pi/6) = 1,5$. Numericamente, vamos explorar as seguintes duas aproximações:

- a) Aplicação de sucessivas diferenças finitas centrais de ordem h^2 para derivada primeira, i.e.

$$f''(x) \approx D_{0,h^2} D_{0,h^2} f(x) = \frac{D_{0,h^2} f(x+h) - D_{0,h^2} f(x-h)}{2h} \quad (1.28)$$

- b) Aplicação da fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 para a derivada segunda, i.e.

$$f''(x) \approx D_{0,h^2}^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \quad (1.29)$$

Na Tabela 1.5 temos os valores computados em ambos os casos e seus respectivos erros absolutos para diversas escolhas de h . Observamos que a aplicação da diferença finita D_{0,h^2}^2 fornece resultados mais precisos (para valores moderados de h) do que as sucessivas aplicações de D_{0,h^2} . De fato, uma rápida inspeção de (1.28) mostra que

$$D_{0,h^2} D_{0,h^2} f(x) = \underbrace{\frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}}_{D_{0,(2h)^2}^2 f(x)}. \quad (1.30)$$

No GNU Octave, podemos fazer estes cálculos com o seguinte código:

Notas de Aula - Pedro Konzen */* Licença CC-BY-SA 4.0

Tabela 1.5: Resultados referente ao Exemplo 1.2.1. Notação: $\delta_{DD} := |f''(\pi/6) - D_{0,h^2}D_{0,h^2}f(\pi/6)|$ e $\delta_{D^2} := |f''(\pi/6) - D_{0,h^2}^2f(\pi/6)|$.

| h | $D_{0,h^2}D_{0,h^2}f(\pi/6)$ | δ_{DD} | $D_{0,h^2}^2f(\pi/6)$ | δ_{D^2} |
|-----------|------------------------------|---------------|-----------------------|----------------|
| 10^{-1} | 1,50166 | 1,7E-03 | 1,50042 | 4,2E-04 |
| 10^{-2} | 1,50002 | 1,7E-05 | 1,50000 | 4,2E-06 |
| 10^{-3} | 1,50000 | 1,7E-07 | 1,50000 | 4,2E-08 |
| 10^{-5} | 1,50000 | 1,2E-07 | 1,50000 | 1,2E-07 |

```
f = @(x) sin(x) + x^2;
Df = @(x,h) (f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
DDf = @(x,h) (Df(x+h,h)-Df(x-h,h))/(2*h);
D2f = @(x,h) (f(x+h) - 2*f(x) + f(x-h))/(h^2);
x=pi/6;
h=1e-1;
printf('%1.5E %1.1E %1.5E %1.1E\n',...
    DDf(x,h),abs(1.5-DDf(x,h)),...
    D2f(x,h),abs(1.5-D2f(x,h)))
```

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 1.2.1. Use a fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 para computar aproximações da segunda derivada de

$$f(x) = \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} + x \quad (1.31)$$

no ponto $x = 2,5$. Para tanto, use os passos

- a) $h = 10^{-1}$
- b) $h = 10^{-2}$
- c) $h = 10^{-3}$
- d) $h = 10^{-4}$

Por fim, com base nos resultados obtidos, qual foi o maior passo que forneceu a aproximação com precisão de pelo menos 5 dígitos significativos? Justifique sua resposta.

Exercício 1.2.2. Considere a seguinte tabela de pontos

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| y_i | 1,86 | 1,90 | 2,01 | 2,16 | 2,23 | 2,31 |

Calcule a aproximação d^2y/dx^2 no ponto $x = 2,2$ usando a fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 .

1.3 Diferenças finitas por polinômios interpoladores

[[tag:revisar]]

Aqui, discutimos a obtenção de fórmulas de diferenças finitas por polinômios interpoladores. Seja $p(x)$ o polinômio interpolador dos pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n+1}$ de uma dada função $f(x)$, com $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$. Então, pelo teorema de Lagrange temos

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \quad (1.32)$$

onde $R(x)$ é o erro na aproximação de $f(x)$ por $p(x)$ e tem a forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j). \quad (1.33)$$

onde $\xi = \xi(x)$.

Deste modo, a ideia para obtermos as fórmulas de diferenças é aproximar-mos $f'(x)$ por $p'(x)$. Entretanto, isto nos coloca a questão de estimarmos o erro $|f'(x) - p'(x)|$. Por sorte temos o seguinte teorema.

Teorema 1.3.1. *Seja $p(x)$ o polinômio interpolador de uma dada função $f(x)$ pelo pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n+1}$, com $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$. Se $f(x)$ é $(n +$*

1.3. DIFERENÇAS FINITAS POR POLINÔMIOS INTERPOLADORES

1) continuamente diferenciável, então o resíduo $R_{n+1}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - p^{(k)}(x)$ é

$$R_{n+1}^{(k)} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1-k)!} \prod_{j=1}^{n+1-k} (x - \xi_j), \quad (1.34)$$

onde ξ_j é um ponto tal que $x_j < \xi_j < x_{j+k}$, $j = 1, 2, \dots, n+1-k$, e $\eta = \eta(x)$ é algum ponto no intervalo de extremos x e ξ_j .

Demonstração. Veja [3, Ch.6, Sec.5]. □

1.3.1 Fórmulas de dois pontos

[[tag:revisar]]

Seja $p(x)$ o polinômio interpolador de Lagrange de $f(x)$ pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_1 < x_2$, i.e.

$$f(x) = p(x) + R_2(x) \quad (1.35)$$

$$= f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + R_2(x). \quad (1.36)$$

Denotando $h = x_2 - x_1$, temos

$$f(x) = f(x_1) \frac{x - x_2}{-h} + f(x_2) \frac{x - x_1}{h} + R_2(x). \quad (1.37)$$

e, derivando com respeito a x

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} + R_2^{(1)}(x), \quad (1.38)$$

onde $R_2^{(1)}(x)$ é dado conforme o teorema 1.3.1.

Agora, escolhendo $x = x_1$, temos $x_2 = x_1 + h = x + h$ e, obtemos a **fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem h**

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{D_{+,h}f(x)} + O(h). \quad (1.39)$$

Se escolhermos $x = x_2$, temos $x_1 = x_2 - h = x - h$, obtemos a **fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem h**

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x-h)}{h}}_{D_{-,h}f(x)} + O(h). \quad (1.40)$$

Fórmulas de três pontos

[[tag:revisar]]

Para obtermos fórmulas de diferenças finitas de três pontos consideramos o polinômio interpolador de Lagrange de $f(x)$ pelos pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$, $x_1 < x_2 < x_3$, i.e.

$$f(x) = f(x_1) \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad (1.41)$$

$$+ f(x_2) \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (1.42)$$

$$+ f(x_3) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + R_3(x). \quad (1.43)$$

Derivando em relação a x , obtemos

$$f'(x) = f(x_1) \frac{(x_2-x_3)(2x-x_2-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \quad (1.44)$$

$$+ f(x_2) \frac{(x_1-x_3)(-2x+x_1+x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \quad (1.45)$$

$$+ f(x_3) \frac{(x_1-x_2)(2x-x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} + R_3^{(1)}(x). \quad (1.46)$$

Aqui, podemos escolher por obter fórmulas de diferenças com passo constante ou não. Por exemplo, denotando $h_1 = x_2 - x_1$ e $h_2 = x_3 - x_2$ e escolhendo $x = x_1$, temos $x_2 = x + h_1$ e $x_3 = x + h_1 + h_2$. Fazendo estas substituições na expressão acima, obtemos seguinte fórmula de diferenças finitas progressiva

$$D_{+,h_1,h_2}f(x) = \frac{1}{h_1h_2(h_1+h_2)} (-h_2(2h_1+h_2)f(x) \quad (1.47)$$

1.3. DIFERENÇAS FINITAS POR POLINÔMIOS INTERPOLADORES

$$+ (h_1 + h_2)^2 f(x + h_1) \quad (1.48)$$

$$- h_1^2 f(x + h_1 + h_2) \Big). \quad (1.49)$$

Agora, assumindo um passo constante $h = h_1 = h_2$, obtemos a **fórmula de diferenças progressiva de ordem h^2**

$$D_{+,h^2} f(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)]. \quad (1.50)$$

Escolhendo $x = x_2$, $x_1 = x - h$ e $x_3 = x + h$ na equação (1.44), obtemos a **fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2**

$$D_{0,h^2} = \frac{1}{2h} [f(x + h) - f(x - h)]. \quad (1.51)$$

Por fim, escolhendo $x = x_3$, $x_1 = x - 2h$ e $x_2 = x - h$ na equação (1.44), obtemos a **fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem h^2**

$$D_{-,h^2} = \frac{1}{2h} [3f(x) - 4f(x - h) + f(x - 2h)]. \quad (1.52)$$

1.3.2 Fórmulas de cinco pontos

[[tag:revisar]]

Aqui, usamos o polinômio interpolador de Lagrange da função $f(x)$ pelos pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ e $(x_5, f(x_5))$, com $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Isto nos fornece

$$f(x) = \sum_{i=1}^5 f(x_i) \left(\prod_{j=1, j \neq i}^5 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) + R_5(x). \quad (1.53)$$

Calculando a derivada em relação a x , temos

$$f'(x) = \sum_{i=1}^5 f(x_i) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^5 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) + R_5^{(1)}(x). \quad (1.54)$$

Por exemplo, substituindo $x_1 = x - 2h$, $x_2 = x - h$, $x_3 = x$, $x_4 = x + h$ e $x_5 = x + 2h$ na equação acima, obtemos fórmula de diferenças finitas central de ordem h^4

$$D_{+,h^4} f(x) := \frac{1}{12h} [f(x - 2h) - 8f(x - h) + 8f(x + h) - f(x + 2h)]. \quad (1.55)$$

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 1.3.1. Use a fórmula de diferenças finitas central de ordem h^4 para computar a aproximação da derivada de

$$f(x) = \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} + x \quad (1.56)$$

no ponto $x = 2,5$ com passo $h = 0,1$.

Exercício 1.3.2. Obtenha as seguintes fórmulas de diferenças finitas de 5 pontos com passo h constante e com:

- a) 4 pontos para frente.
- b) 1 ponto para traz e 3 pontos para frente.
- c) 2 pontos para traz e 2 pontos para frente.
- d) 3 pontos para traz e 1 pontos para frente.
- e) 4 pontos para traz.

Exercício 1.3.3. Considere a seguinte tabela de pontos

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| y_i | 1,86 | 1,90 | 2,01 | 2,16 | 2,23 | 2,31 |

Calcule a aproximação dy/dx nos pontos tabelados usando as fórmulas de diferenças finitas obtidas no exercício anteriores (Exercício 1.3.2). Para tanto, dê preferência para fórmulas centrais sempre que possível.

Capítulo 2

Técnicas de extrapolação

[[tag:revisar]]

Neste capítulo, estudamos algumas técnicas de extrapolação, as quais serão usadas nos próximos capítulos.

2.1 Extrapolação de Richardson

[[tag:revisar]]

Seja $F_1(h)$ uma aproximação de I tal que

$$I = F_1(h) + \underbrace{k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3}_{\text{erro de truncamento}} + O(h^4). \quad (2.1)$$

Então, dividindo h por 2, obtemos

$$I = F_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 \frac{h}{2} + k_2 \frac{h^2}{4} + k_3 \frac{h^3}{8} + O(h^4). \quad (2.2)$$

Agora, de forma a eliminarmos o termo de ordem h das expressões acima, subtraímos (2.1) de 2 vezes (2.2), o que nos leva a

$$I = \underbrace{\left[F_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h) \right) \right]}_{F_2(h)} - k_2 \frac{h^2}{2} - k_3 \frac{3h^3}{4} + O(h^4). \quad (2.3)$$

Ou seja, denotando

$$F_2(h) := F_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h)\right) \quad (2.4)$$

temos que $N_2(h)$ é uma aproximação de I com erro de truncamento da ordem de h^2 , uma ordem a mais de $N_1(h)$. Ou seja, esta combinação de aproximações de ordem de truncamento h nos fornece uma aproximação de ordem de truncamento h^2 .

Analogamente, consideremos a aproximação de I por $N_2(h/2)$, *i.e.*

$$I = F_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2 \frac{h^2}{8} - k_2 \frac{3h^3}{32} + O(h^4) \quad (2.5)$$

Então, subtraindo (2.3) de 4 vezes (2.5) de, obtemos

$$I = \underbrace{\left[3F_2\left(\frac{h}{2}\right) + \left(F_2\left(\frac{h}{2}\right) - F_2(h)\right)\right]}_{F_3(h)} + k_3 \frac{3h^3}{8} + O(h^4). \quad (2.6)$$

Observemos, ainda, que $N_3(h)$ pode ser reescrita na forma

$$F_3(h) = F_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_2\left(\frac{h}{2}\right) - F_2(h)}{3}, \quad (2.7)$$

a qual é uma aproximação de ordem h^3 para I .

Para fazermos mais um passo, consideramos a aproximação de I por $F_3(h/2)$, *i.e.*

$$I = F_3\left(\frac{h}{2}\right) + k_3 \frac{3h^3}{64} + O(h^4). \quad (2.8)$$

E, então, subtraindo (2.6) de 8 vezes (2.8), temos

$$I = \underbrace{\left[F_3\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{F_3\left(\frac{h}{2}\right) - F_3(h)}{7}\right)\right]}_{F_4(h)} + O(h^4). \quad (2.9)$$

Ou seja,

$$F_4(h) = \left[F_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_3\left(\frac{h}{2}\right) - F_3(h)}{7} \right] \quad (2.10)$$

é uma aproximação de I com erro de truncamento da ordem h^4 . Estes cálculos nos motivam o seguinte teorema.

Teorema 2.1.1. *Seja $F_1(h)$ uma aproximação de I com erro de truncamento da forma*

$$I - F_1(h) = \sum_{i=1}^n k_i h^i + O(h^{n+1}). \quad (2.11)$$

Então, para $j \geq 2$,

$$F_j(h) := F_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{F_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - F_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1} \quad (2.12)$$

é uma aproximação de I com erro de truncamento da forma

$$I - F_j(h) = \sum_{i=j}^n (-1)^{j-1} \frac{(2^{i-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (2^{i-l-1} - 1)}{2^{(j-1)(i-j+1)} d_j} k_i h^i + O(h^{n+1}), \quad (2.13)$$

onde d_j é dado recursivamente por $d_{j+1} = 2^{j-1} d_j$, com $d_2 = 1$.

Demonstração. Fazemos a demonstração por indução. O resultado para $j = 2$ segue de (2.3). Assumimos, agora, que vale

$$I - F_j(h) = (-1)^{j-1} \frac{(2^{j-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (2^{j-l-1} - 1)}{2^{(j-1)d_j}} k_j h^j + \sum_{i=j+1}^n (-1)^{j-1} \frac{(2^{i-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (2^{i-l-1} - 1)}{2^{(j-1)(i-j+1)} d_j} k_i h^i + O(h^{n+1}). \quad (2.14)$$

para $j \geq 2$. Então, tomamos

$$I - F_j\left(\frac{h}{2}\right) = (-1)^{j-1} \frac{(2^{j-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (2^{j-l-1} - 1)}{2^{(j-1)d_j}} k_j \frac{h^j}{2^j}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=j+1}^n (-1)^{j-1} \frac{(2^{i-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (2^{i-l-1} - 1)}{2^{(j-1)(i-j+1)} d_j} k_i \frac{h^i}{2^i} \\
& + O(h^{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, subtraímos (2.14) de 2^j vezes (2.15), o que nos fornece

$$\begin{aligned}
I &= \left[F_j \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{F_j \left(\frac{h}{2} \right) - F_j(h)}{2^j - 1} \right] \\
&+ \sum_{i=j+1}^n (-1)^{(j+1)-1} \frac{(2^{i-1} - 1) \prod_{l=1}^{(j+1)-2} (2^{i-l-1} - 1)}{2^{((j+1)-1)(i-(j+1)+1)} 2^{j-1} d_j} k_i h^i \\
&+ O(h^{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

□

Corolário 2.1.1. *Seja $F_1(h)$ uma aproximação de I com erro de truncamento da forma*

$$I - F_1(h) = \sum_{i=1}^n k_1 h^{2i} + O(h^{2n+2}). \tag{2.17}$$

Então, para $j \geq 2$,

$$F_j(h) := F_{j-1} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{F_{j-1} \left(\frac{h}{2} \right) - F_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1} \tag{2.18}$$

é uma aproximação de I com erro de truncamento da forma

$$\begin{aligned}
I - F_j(h) &= \sum_{i=j}^n (-1)^{j-1} \frac{(4^{i-1} - 1) \prod_{l=1}^{j-2} (4^{i-l-1} - 1)}{4^{(j-1)(i-j+1)} d_j} k_i h^{2i} \\
&+ O(h^{n+1}),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde d_j é dado recursivamente por $d_{j+1} = 4^{j-1} d_j$, com $d_2 = 1$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao do Teorema 2.1.1. □

Exemplo 2.1.1. Dada uma função $f(x)$, consideremos sua aproximação por diferenças finitas progressiva de ordem h , i.e.

$$\underbrace{f'(x)} I = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{F_1(h)} + \frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + O(h^3). \quad (2.20)$$

Estão, considerando a primeira extrapolação de Richardson, temos

$$F_2(h) = F_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h)\right) \quad (2.21)$$

$$= 4 \frac{f(x+h/2) - f(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.22)$$

$$= \frac{-f(x+h) + 4f(x+h/2) - 3f(x)}{h}, \quad (2.23)$$

a qual é a fórmula de diferenças finitas progressiva de três pontos com passo $h/2$, i.e. $D_{+,(h/2)^2}f(x)$ (veja, Fórmula (1.50)).

Exemplo 2.1.2. Dada uma função $f(x)$, consideremos sua aproximação por diferenças finitas central de ordem h^2 , i.e.

$$\underbrace{f'(x)} I = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{F_1(h)} - \frac{f'''(x)}{6}h^2 - \frac{f^{(5)}(x)}{120}h^4 + O(h^6). \quad (2.24)$$

Estão, considerando a primeira extrapolação de Richardson, temos

$$F_2(h) = F_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\left(F_1\left(\frac{h}{2}\right) - F_1(h)\right)}{3} \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{6h} [f(x-h) - 8f(x-h/2) + 8f(x+h/2) - f(x+h)] \quad (2.26)$$

a qual é a fórmula de diferenças finitas central de cinco pontos com passo $h/2$, i.e. $D_{+,(h/2)^4}f(x)$ (veja, Fórmula (1.55)).

2.1.1 Sucessivas extrapolações

[[tag:revisar]]

Sucessivas extrapolações de Richardson podem ser computadas de forma robusta com o auxílio de uma tabela. Seja $F_1(h)$ uma dada aproximação de uma quantidade de interesse I com erro de truncamento da forma

$$I - F_1(h) = k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots + k_n h^n + O(h^{n+1}). \quad (2.27)$$

Então, as sucessivas extrapolações $F_2(h)$, $F_3(h)$, \dots , $F_n(h)$ podem ser organizadas na seguinte forma tabular

$$T = \begin{bmatrix} F_1(h) & & & & \\ F_1(h/2) & F_2(h) & & & \\ F_1(h/2^2) & F_2(h/2) & F_3(h) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ F_1(h/2^n) & F_2(h/2^{n-1}) & F_3(h/2^{n-2}) & \cdots & F_n(h) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Desta forma, temos que

$$F_j\left(\frac{h}{2^{i-1}}\right) = t_{i,j-1} + \frac{t_{i,j-1} - t_{i-1,j-1}}{2^{j-1} - 1} \quad (2.29)$$

com $j = 2, 3, \dots, n$ e $j \geq i$, onde $t_{i,j}$ é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz T .

Exemplo 2.1.3. Consideremos o problema de aproximar a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$. Usando a fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem h obtemos

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \underbrace{\frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}}_{F_1(h) := D_{+,h} f(\pi/3)} \\ &\quad + \frac{f''(x)}{2} h + \frac{f'''(x)}{6} h^2 + \cdots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Na Tabela 2.1 temos os valores das aproximações de $f'(\pi/3)$ computadas via sucessivas extrapolações de Richardson a partir de (2.30) com $h = 0.1$.

Tabela 2.1: Resultados referente ao Exemplo 2.1.3.

| $O(h)$ | $O(h^2)$ | $O(h^3)$ | $O(h^4)$ |
|------------|------------|------------|------------|
| 4,55902E-1 | | | |
| 4,78146E-1 | 5,00389E-1 | | |
| 4,89123E-1 | 5,00101E-1 | 5,00005E-1 | |
| 4,94574E-1 | 5,00026E-1 | 5,00001E-1 | 5,00000E-1 |

Exemplo 2.1.4. Novamente, consideremos o problema de aproximar a derivada da função $f(x) = \sin(x)$ no ponto $\pi/3$. A fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 tem a forma

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{2h}}_{F_1(h) := D_{0,h}f(\pi/3)} - \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \frac{f^{(5)}(x)}{120}h^4 - \dots \quad (2.31)$$

Na Tabela 2.2 temos os valores das aproximações de $f'(\pi/3)$ computadas via sucessivas extrapolações de Richardson a partir de (2.31) com $h = 1$.

Tabela 2.2: Resultados referente ao Exemplo 2.1.4.

| $O(h^2)$ | $O(h^4)$ | $O(h^6)$ | $O(h^8)$ |
|------------|------------|------------|------------|
| 4,20735E-1 | | | |
| 4,79426E-1 | 4,98989E-1 | | |
| 4,94808E-1 | 4,99935E-1 | 4,99998E-1 | |
| 4,98699E-1 | 4,99996E-1 | 5,00000E-1 | 5,00000E-1 |

2.1.2 Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 2.1.1. Mostre que a primeira extrapolação de Richardson de

$$D_{-,h}f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (2.32)$$

é igual a

$$D_{-(h/2)^2}f(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h}. \quad (2.33)$$

Exercício 2.1.2. Considere o problema de aproximar a derivada de

$$f(x) = \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} + x \quad (2.34)$$

no ponto $x = 2,5$. Para tanto, use de sucessivas extrapolações de Richardson a partir da aproximação por diferenças finitas:

- a) progressiva de ordem h , com $h = 0,5$.
- b) regressiva de ordem h , com $h = 0,5$.
- c) central de ordem h^2 , com $h = 0,5$.

Nas letras a) e b), obtenha as aproximações de ordem h^3 e, na letra c) obtenha a aproximação de ordem h^6 .

Capítulo 3

Integração

[[tag:revisar]]

Neste capítulo, discutimos os métodos numéricos fundamentais para a aproximação de integrais definidas de funções. Tais métodos são chamados de **quadraturas numéricas** e têm a forma

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i, \quad (3.1)$$

onde x_i e w_i são, respectivamente, o i -ésimo nodo e o i -ésimo peso da quadratura, $i = 1, 2, \dots, n$.

3.1 Regras de Newton-Cotes

[[tag:revisar]]

Dada uma função $f(x)$ e um intervalo $[a, b]$, denotamos por

$$I := \int_a^b f(x) dx. \quad (3.2)$$

a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. A ideia das regras de Newton-Cotes é aproximar I pela integral de um polinômio interpolador de $f(x)$ por pontos previamente selecionados.

Seja, então, $p(x)$ o polinômio interpolador de grau n de $f(x)$ pelos dados pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n+1}$, com $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ e $x_i \in [a, b]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n+1$. Então, pelo teorema de Lagrange, temos

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \quad (3.3)$$

onde

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} \quad (3.4)$$

e

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j), \quad (3.5)$$

onde $\xi = \xi(x)$ pertencente ao intervalo $[x_1, x_{n+1}]$. Deste modo, temos

$$I := \int_a^b f(x) \quad (3.6)$$

$$= \int_a^b p(x) dx + \int_a^b R_{n+1}(x) dx \quad (3.7)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j} dx}_{\text{quadratura}} + \underbrace{\int_a^b R_{n+1}(x) dx}_{\text{erro de truncamento}} \quad (3.8)$$

Ou seja, nas quadraturas (regras) de Newton-Cotes, os nodos são as abscissas dos pontos interpolados e os pesos são as integrais dos polinômios de Lagrange associados.

Na sequência, abordaremos as regras de Newton-Cotes mais usuais e estimaremos o erro de truncamento caso a caso. Para uma abordagem mais geral, recomenda-se consultar [3, Cap. 7, Sec. 1.1].

3.1.1 Regras de Newton-Cotes fechadas

[[tag:revisar]]

As regras de Newton-Cotes fechadas são aqueles que a quadratura incluem os extremos do intervalo de integração, i.e. os nodos extremos são $x_1 = a$ e $x_{n+1} = b$.

Regra do trapézio

[[tag:revisar]]

A regra do trapézio é obtida tomando-se os nodos $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Então, denotando $h := b - a$ ¹, os pesos da quadratura são:

$$w_1 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx \quad (3.9)$$

$$= \frac{(b - a)}{2} = \frac{h}{2} \quad (3.10)$$

e

$$w_2 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx \quad (3.11)$$

$$= \frac{(b - a)}{2} = \frac{h}{2}. \quad (3.12)$$

Agora, estimamos o erro de truncamento com

$$E := \int_a^b R_2(x) dx \quad (3.13)$$

$$= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2} (x - a)(x - b) dx \quad (3.14)$$

$$\leq C \left| \int_a^b (x - a)(x - b) dx \right| \quad (3.15)$$

$$= C \frac{(b - a)^3}{6} = O(h^3). \quad (3.16)$$

Portanto, a **regra do trapézio** é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + O(h^3). \quad (3.17)$$

Exemplo 3.1.1. Consideremos o problema de computar a integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1/4]$. Analiticamente, temos

$$I = \int_0^{1/4} xe^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^{1/4} \quad (3.18)$$

¹Neste capítulo, h é escolhido como a distância entre os nodos.

$$= \frac{1 - e^{-1/4}}{2} = 3,02935\text{E}-2. \quad (3.19)$$

Agora, usando a regra do trapézio, obtemos a seguinte aproximação para I

$$I \approx \frac{h}{2}(f(0) + f(1/2)) \quad (3.20)$$

$$= \frac{1/4}{2} \left(0 + \frac{1}{4} e^{-(1/4)^2} \right) = 2,93567\text{E}-2. \quad (3.21)$$

Regra de Simpson

[[tag:revisar]]

A regra de Simpson é obtida escolhendo-se os nodos $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$ e $x_3 = b$. Com isso e denotando $h = (b-a)/2$, calculamos os seguintes pesos:

$$w_1 = \int_a^b \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} dx \quad (3.22)$$

$$= \frac{(b-a)}{6} = \frac{h}{3}, \quad (3.23)$$

$$w_2 = \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} dx \quad (3.24)$$

$$= 4 \frac{(b-a)}{6} = 4 \frac{h}{3} \quad (3.25)$$

e

$$w_3 = \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} dx \quad (3.26)$$

$$= \frac{(b-a)}{6} = \frac{h}{3}. \quad (3.27)$$

Isto nos fornece a chamada **regra de Simpson**

$$I \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (3.28)$$

Nos resta estimar o erro de truncamento da regra de Simpson. Para tanto, consideramos a expansão em polinômio de Taylor de grau 3 de $f(x)$ em torno do ponto x_2 , i.e.

$$f(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2}(x - x_2)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f'''(x_2)}{6}(x - x_2)^3 \\
& + \frac{f^{(4)}(\xi_1(x))}{24}(x - x_2)^4,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= 2hf(x_2) + \frac{h^3}{3}f''(x_2) \\
&+ \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi_1(x))(x - x_2)^4 dx.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Daí, usando da fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 , temos

$$f''(x_2) = \frac{f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)}{h^2} + O(h^2). \tag{3.31}$$

Ainda, o último termo da equação (3.30) pode ser estimado por

$$\left| \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(\xi_1(x))(x - x_2)^4 dx \right| \leq C \left| \int_a^b (x - x_2)^4 dx \right| \tag{3.32}$$

$$= C(b - a)^5 = O(h^5). \tag{3.33}$$

Então, de (3.30), (3.31) e (3.1.1), temos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] + O(h^5), \tag{3.34}$$

o que mostra que a **regra de Simpson tem erro de truncamento da ordem h^5** .

Exemplo 3.1.2. Aproximando a integral dada no Exemplo 3.1.1 pela a regra de Simpson, temos

$$\int_0^{1/4} f(x) dx \approx \frac{1/8}{3} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right] \tag{3.35}$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{1}{2}e^{-(1/8)^2} + \frac{1}{4}e^{-(1/4)^2} \right] \tag{3.36}$$

$$= 3,02959E-2. \tag{3.37}$$

3.1.2 Regras de Newton-Cotes abertas

[[tag:revisar]]

As regras de Newton-Cotes abertas não incluem os extremos dos intervalos como nodos das quadraturas.

Regra do ponto médio

[[tag:revisar]]

A regra do ponto médio é obtida usando apenas o nodo $x_1 = (a + b)/2$. Desta forma, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x_1) dx + \int_a^b f'(\xi(x))(x - x_1) dx, \quad (3.38)$$

donde, denotando $h := (b - a)$, temos

$$\int_a^b f(x) dx = hf\left(\frac{a+b}{2}\right) + O(h^3). \quad (3.39)$$

Deixa-se para o leitor a verificação do erro de truncamento (veja, Exercício 3.1.3).

Exemplo 3.1.3. Aproximando a integral dada no Exemplo 3.1.1 pela a regra do ponto médio, temos

$$\int_0^{1/4} f(x) dx \approx \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{8}\right) \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{32} e^{-(1/8)^2} \quad (3.41)$$

$$= 3,07655\text{E}-2 \quad (3.42)$$

Exercício

[[tag:revisar]]

Exercício 3.1.1. Aproxime

$$\int_{-1}^0 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.43)$$

usando a:

- regra do ponto médio.
- regra do trapézio.
- regra de Simpson.

Exercício 3.1.2. Considere a seguinte tabela de pontos

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| y_i | 1,86 | 1,90 | 2,01 | 2,16 | 2,23 | 2,31 |

Assumindo que $y = f(x)$, calcule:

- a) $\int_{2,1}^{2,3} f(x) dx$ usando a regra do ponto médio.
- b) $\int_{2,0}^{2,5} f(x) dx$ usando a regra do trapézio.
- c) $\int_{2,0}^{2,4} f(x) dx$ usando a regra de Simpson.

Exercício 3.1.3. Mostre que o erro de truncamento da regra do ponto médio é da ordem de h^3 , onde h é o tamanho do intervalo de integração.

Exercício 3.1.4. Obtenha a regra de Newton-Cotes aberta de 2 pontos e estime seu erro de truncamento.

3.2 Regras compostas de Newton-Cotes

[[tag:revisar]]

Regras de integração numérica compostas (ou quadraturas compostas) são aquelas obtidas da composição de quadraturas aplicadas aos subintervalos do intervalo de integração. Mais especificamente, a integral de uma dada função $f(x)$ em um dado intervalo $[a, b]$ pode ser reescrita como uma soma de integrais em sucessivos subintervalos de $[a, b]$, i.e.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad (3.46)$$

onde $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$. Então, a aplicação de uma quadratura em cada integral em $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, nos fornece uma regra composta.

3.2.1 Regra composta do ponto médio

[[tag:revisar]]

Consideremos uma partição uniforme do intervalo de integração $[a, b]$ da forma $a = \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{n+1} = b$, com $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, aplicando a regra do ponto médio a cada integral nos subintervalos $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{x}_{i+1}} f(x) dx \quad (3.47)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[hf \left(\frac{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}}{2} \right) + O(h^3) \right]. \quad (3.48)$$

Agora, observando que $h := (b - a)/n$ e escolhendo os nodos $x_i = a + (i - 1/2)h$, $i = 1, 2, \dots, n$, obtemos a **regra composta do ponto médio com n subintervalos**

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n hf(x_i) + O(h^2). \quad (3.49)$$

Exemplo 3.2.1. Consideremos o problema de computar a integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. Usando a regra composta do ponto médio com n subintervalos, obtemos a aproximação

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_I \approx \underbrace{\sum_{i=1}^n hf(x_i)}_S, \quad (3.50)$$

onde $h = 1/(4n)$ e $x_i = (i - 1/2)h$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na Tabela 3.1, temos as aproximações computadas com diversos números de subintervalos, bem como, seus erros absolutos.

3.2.2 Regra composta do trapézio

[[tag:revisar]]

Para obtermos a regra composta do trapézio, consideramos uma partição uniforme do intervalo de integração $[a, b]$ da forma $a = x_1 < x_2 < \dots <$

Tabela 3.1: Resultados referentes ao Exemplo 3.2.1.

| n | S | $ I - S $ |
|------|------------|-----------|
| 1 | 3,89400E-1 | 7,3E-2 |
| 10 | 3,16631E-1 | 5,7E-4 |
| 100 | 3,16066E-1 | 5,7E-6 |
| 1000 | 3,16060E-1 | 5,7E-8 |

$x_{n+1} = b$ com $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, aplicando a regra do trapézio em cada integração nos subintervalos, obtemos

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (3.51)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] + O(h^3) \right\} \quad (3.52)$$

$$= f(x_1) \frac{h}{2} + \sum_{i=2}^n h f(x_i) + f(x_{n+1}) \frac{h}{2} + O(h^2). \quad (3.53)$$

Desta forma, a regra composto do trapézio com n subintervalos é

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(x_1) + \sum_{i=2}^n 2f(x_i) + f(x_{n+1}) \right] + O(h^2), \quad (3.54)$$

onde $h = (b - a)/n$ e $x_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 3.2.2. Consideremos o problema de computar a integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. Usando a regra composta do trapézio com n subintervalos, obtemos a aproximação

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_I \approx \frac{h}{2} \underbrace{\left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_i) + f(x_{n+1}) \right]}_S, \quad (3.55)$$

onde $h = 1/(4n)$ e $x_i = (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na Tabela 3.2, temos as aproximações computadas com diversos números de subintervalos, bem como, seus erros absolutos.

3.2.3 Regra composta de Simpson

[[tag:revisar]]

Tabela 3.2: Resultados referentes ao Exemplo 3.2.2.

| n | S | $ I - S $ |
|------|------------|-----------|
| 1 | 1,83940E-1 | 1,3E-1 |
| 10 | 3,14919E-1 | 1,1E-3 |
| 100 | 3.16049E-1 | 1,1E-5 |
| 1000 | 3,16060E-1 | 1,1E-7 |

A fim de obtermos a regra composta de Simpson, consideramos uma partição uniforme do intervalo de integração $[a, b]$ da forma $a = \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{n+1} = b$, com $h = (\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i)/2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, aplicando a regra de Simpson a cada integral nos subintervalos $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{x}_{i+1}} f(x) dx \quad (3.56)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h}{3} \left[f(\tilde{x}_i) + 4f\left(\frac{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}}{2}\right) + f(\tilde{x}_{i+1}) \right] + O(h^5) \right\}. \quad (3.57)$$

Então, observando que $h = (b - a)/(2n)$ e tomando $x_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$, obtemos a regra composta de Simpson com n subintervalos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_{2i-1}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i}) + f(x_{n+1}) \right] + O(h^4) \quad (3.58)$$

Exemplo 3.2.3. Consideremos o problema de computar a integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. Usando a regra composta de Simpson com n subintervalos, obtemos a aproximação

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_I \approx \frac{h}{3} \underbrace{\left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_{2i-1}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i}) + f(x_{n+1}) \right]}_S, \quad (3.59)$$

onde $h = 1/(8n)$ e $x_i = (i - 1)h$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na Tabela 3.3, temos as aproximações computadas com diversos números de subintervalos, bem como, seus erros absolutos.

Tabela 3.3: Resultados referentes ao Exemplo 3.2.3.

| n | S | $ I - S $ |
|------|------------|-----------|
| 1 | 3,20914E-1 | 4,9E-3 |
| 10 | 3,16061E-1 | 3,4E-7 |
| 100 | 3,16060E-1 | 3,4E-11 |
| 1000 | 3,16060E-1 | 4,2E-15 |

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.2.1. Aproxime

$$\int_{-1}^0 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.60)$$

usando a:

- regra composta do ponto médio com 10 subintervalos.
- regra composta do trapézio com 10 subintervalos.
- regra composta de Simpson com 10 subintervalos.

Exercício 3.2.2. Considere a seguinte tabela de pontos

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| y_i | 1,86 | 1,90 | 2,01 | 2,16 | 2,23 | 2,31 |

Assumindo que $y = f(x)$, e usando o máximo de subintervalos possíveis, calcule:

- $\int_{2,0}^{2,4} f(x) dx$ usando a regra do ponto médio composta.
- $\int_{2,0}^{2,5} f(x) dx$ usando a regra do trapézio composta.
- $\int_{2,0}^{2,4} f(x) dx$ usando a regra de Simpson composta.

3.3 Quadratura de Romberg

[[tag:revisar]]

A quadratura de Romberg é construída por sucessivas extrapolações de Richardson da regra do trapézio composta. Sejam $h_k = (b - a)/(2k)$, $x_i = a + (i - 1)h_k$ e

$$R_{k,1} := \frac{h_k}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=2}^{2k} f(x_i) + f(b) \right] \quad (3.61)$$

a regra do trapézio composta com $2k$ subintervalos de

$$I := \int_a^b f(x) dx. \quad (3.62)$$

Por sorte, o erro de truncamento de aproximar I por $R_{k,1}$ tem a seguinte forma

$$I - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i h_k^{2i}, \quad (3.63)$$

o que nos permite aplicar a extrapolação de Richardson para obter aproximações de mais alta ordem.

Mais precisamente, para obtermos uma aproximação de I com erro de truncamento da ordem h^{2n} , $h = (b - a)$, computamos $R_{k,1}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Então, usamos das sucessivas extrapolações de Richardson

$$R_{k,j} := R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad (3.64)$$

$j = 2, 3, \dots, n$, de forma a computarmos $R_{n,n}$, a qual fornece a aproximação desejada.

Exemplo 3.3.1. Consideremos o problema de aproximar a integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. Para obtermos uma quadratura de Romberg de ordem 4, calculamos

$$R_{1,1} := \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = 1,83940E-1 \quad (3.65)$$

$$R_{2,1} := \frac{1}{4} [f(0) + 2f(1/2) + f(1)] = 2,86670E-1. \quad (3.66)$$

Então, calculando

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 3,20914\text{E}-1, \quad (3.67)$$

a qual é a aproximação desejada.

Tabela 3.4: Resultados referentes ao Exemplo 3.3.1.

| k | $R_{k,1}$ | $R_{k,2}$ | $R_{k,3}$ | $R_{k,4}$ |
|---|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1,83940E-1 | | | |
| 2 | 2,86670E-1 | 3,20914E-1 | | |
| 3 | 3,08883E-1 | 3,16287E-1 | 3,15978E-1 | |
| 4 | 3,14276E-1 | 3,16074E-1 | 3,16059E-1 | 3,16061E-1 |

Na Tabela 3.4, temos os valores de aproximações computadas pela quadratura de Romberg até ordem 8.

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.3.1. Aproxime

$$\int_{-1}^0 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.68)$$

usando a quadratura de Romberg de ordem 4.

3.4 Grau de exatidão

[[tag:revisar]]

O grau de exatidão é uma medida de exatidão de uma quadratura numérica. Mais precisamente, dizemos que uma dada quadratura numérica de nodos e pesos $\{(x_i, w_i)\}_{i=1}^n$ tem grau de exatidão m , quando

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{i=1}^n p(x_i) w_i \quad (3.69)$$

para todo polinômio $p(x)$ de grau menor m . Ou ainda, conforme descrito na definição a seguir.

Definição 3.4.1. Dizemos que uma dada quadratura numérica de pontos e nodos $\{x_i, w_i\}_{i=1}^n$ tem **grau de exatidão** m , quando

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=1}^n x_i^k w_i, \forall k \leq m. \quad (3.70)$$

Exemplo 3.4.1. Determinemos o grau de exatidão da regra do ponto médio. Para tanto, verificamos para quais k vale

$$\int_a^b x^k dx = (b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^k. \quad (3.71)$$

Vejam os:

- $k = 0$:

$$\int_a^b x^0 dx = x \Big|_a^b = b - a, \quad (3.72)$$

$$(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^0 = b - a. \quad (3.73)$$

- $k = 1$:

$$\int_a^b x^1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad (3.74)$$

$$(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^1 = (b-a) \frac{(a+b)}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}. \quad (3.75)$$

- $k = 2$:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad (3.76)$$

$$(b-a) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \neq \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}. \quad (3.77)$$

Ou seja, a regra do ponto média tem grau de exatidão 1.

Exemplo 3.4.2. Determinemos o grau de exatidão da regra de Simpson. Para tanto, verificamos para quais k vale

$$\int_a^b x^k dx = \frac{(b-a)}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)^k. \quad (3.78)$$

Vejam os:

- $k = 0$:

$$\int_a^b x^0 dx = x|_a^b = b - a, \quad (3.79)$$

$$\frac{(b-a)}{6} \left(a^0 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^0 + b^0 \right) = b - a. \quad (3.80)$$

- $k = 1$:

$$\int_a^b x^1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad (3.81)$$

$$\frac{(b-a)}{6} \left(a^1 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^1 + b^1 \right) = \frac{(b-a)}{2} (a+b) \quad (3.82)$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}. \quad (3.83)$$

- $k = 2$:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad (3.84)$$

$$\frac{(b-a)}{6} \left(a^2 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + b^2 \right) = \frac{(b-a)}{3} (a^2 + ab + b^2) \quad (3.85)$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}. \quad (3.86)$$

- $k = 3$:

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}, \quad (3.87)$$

$$\frac{(b-a)}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + b^3 \right) \quad (3.88)$$

$$= \frac{(b-a)}{6} \left[\frac{3a^3}{2} + \frac{3b}{2}a^2 + \frac{3a}{2}b^2 + \frac{3b^3}{2} \right] \quad (3.89)$$

$$= \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}. \quad (3.90)$$

- $k = 4$:

$$\int_a^b x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_a^b = \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5}, \quad (3.91)$$

$$\frac{(b-a)}{6} \left(a^4 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 + b^4 \right) \neq \frac{b^5}{5} - \frac{a^5}{5}. \quad (3.92)$$

Ou seja, a regra de Simpson tem grau de exatidão 3.

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.4.1. Determine o grau de exatidão da regra do trapézio.

Exercício 3.4.2. Determine o nodo e o peso da quadratura numérica de um único nodo e de grau de exatidão 1 para o intervalo de integração $[-1, 1]$.

3.5 Quadratura Gauss-Legendre

[[tag:revisar]]

Quadraturas gaussianas são quadraturas numéricas de máximo grau de exatidão. Especificamente, quadraturas de Gauss-Legendre são quadraturas gaussianas para integrais da forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (3.93)$$

Consideremos o problema de determinar a quadratura de Gauss-Legendre de apenas um ponto. Começamos por exigir o grau de exatidão 0, o que nos leva a

$$w_1 x_1^0 = \int_{-1}^1 x^0 dx \Rightarrow w_1 = x|_{-1}^1 = 2. \quad (3.94)$$

Agora, exigindo o grau de exatidão 1, obtemos

$$w_1 x_1^1 = \int_{-1}^1 x^1 dx \Rightarrow 2x_1 = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (3.95)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0. \quad (3.96)$$

Com isso, concluímos que a quadratura de apenas um nodo de maior grau de exatidão para tais integrais é a de nodo $x_1 = 0$ e $w_1 = 2$. A qual é, por acaso, a regra do ponto médio.

Observamos, também, que cada grau de exatidão nos fornece uma condição para determinarmos os nodos e os pesos da desejada quadratura. Mais precisamente, seguindo o raciocínio anterior, para determinarmos a quadratura de n pontos com maior grau de exatidão possível para integrais no intervalo $[-1, 1]$, acabaremos tendo que resolver um sistema de equações

$$\sum_{i=1}^n x_i^k w_i = \int_{-1}^1 x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1. \quad (3.97)$$

Isto é, como teremos $2n$ incógnitas (n nodos e n pesos) a determinar, poderemos exigir o grau de exatidão máximo de $2n - 1$.

O sistema (3.97) é um sistema não linear para os nodos e a determinação de soluções para n grande não é uma tarefa trivial. Alternativamente, veremos que os pontos da quadratura de Gauss-Legendre de n nodos são as raízes do polinômio de Legendre de grau n . Por definição, o polinômio de Legendre de grau n , denotado por $P_n(x)$, satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 p(x) P_n(x) dx = 0, \quad (3.98)$$

para todo polinômio $p(x)$ de grau menor que n . Com isso, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1. *A quadratura de Gauss-Legendre de n nodos tem as raízes do polinômio de Legendre de grau n como seus nodos e seus pesos são dados por*

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \quad (3.99)$$

Demonstração. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n as raízes do polinômio de Legendre de grau n . Queremos mostrar que

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^n p(x_i) w_i, \quad (3.100)$$

para todo polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual $2n - 1$. Primeiramente, suponhamos que $p(x)$ seja um polinômio de grau menor que n . Então, tomando sua representação por polinômio de Lagrange nos nodos x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, temos

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n p(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (3.101)$$

$$= \sum_{i=1}^n p(x_i) \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (3.102)$$

$$= \sum_{i=1}^n p(x_i) w_i. \quad (3.103)$$

Isto mostra o resultado para polinômios $p(x)$ de grau menor que n . Agora, suponhamos que $p(x)$ é um polinômio de grau maior ou igual que n e menor ou igual a $2n - 1$. Dividindo $p(x)$ pelo polinômio de Legendre de grau n , $P_n(x)$, obtemos

$$p(x) = q(x)P_n(x) + r(x), \quad (3.104)$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômio de grau menor que n . Ainda, nas raízes x_1, x_2, \dots, x_n temos $p(x_i) = r(x_i)$ e da ortogonalidade dos polinômios de Legendre (veja, equação (3.98)), temos

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 q(x)P_n(x) + r(x) dx \quad (3.105)$$

$$= \int_{-1}^1 r(x) dx. \quad (3.106)$$

Agora, do resultado anterior aplicado a $r(x)$, temos

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^n r(x_i)w_i = \sum_{i=1}^n p(x_i)w_i. \quad (3.107)$$

Isto complete o resultado para polinômios de grau menor ou igual a $2n-1$. \square

Exemplo 3.5.1. Consideremos a quadratura de Gauss-Legendre de 2 nodos. Do teorema anterior (Teorema 3.5.1, seus nodos são as raízes do polinômio de Legendre de grau 2

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad (3.108)$$

as quais são

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.109)$$

Os pesos são, então

$$w_1 = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx \quad (3.110)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}x \right]_{-1}^1 \quad (3.111)$$

$$= 1 \quad (3.112)$$

e

$$w_2 = \int_{-1}^1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} dx \quad (3.113)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right]_{-1}^1 \quad (3.114)$$

$$= 1 \quad (3.115)$$

Ou seja, a quadratura de Gauss-Legendre de 2 pontos tem o seguinte conjunto de nodos e pesos $\{(x_1 = -\sqrt{3}/3, w_1 = 1), (x_2 = \sqrt{3}/3, w_2 = 1)\}$. Esta, por sua vez, é exata para polinômios de grau menor ou igual a 3. De fato, verificando para potência de x^k temos:

- $k = 0$:

$$\int_{-1}^1 x^0 dx = 2 \quad (3.116)$$

$$x_1^0 w_1 + x_2^0 w_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0 = 2. \quad (3.117)$$

- $k = 1$:

$$\int_{-1}^1 x^1 dx = 0 \quad (3.118)$$

$$x_1^1 w_1 + x_2^1 w_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1 = 0. \quad (3.119)$$

- $k = 2$:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad (3.120)$$

$$x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}. \quad (3.121)$$

- $k = 3$:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad (3.122)$$

$$x_1^3 w_1 + x_2^3 w_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 0. \quad (3.123)$$

- $k = 4$:

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} \quad (3.124)$$

$$x_1^4 w_1 + x_2^4 w_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = \frac{2}{9}. \quad (3.125)$$

Tabela 3.5: Conjunto de nodos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre.

| n | x_i | w_i |
|-----|--|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 |
| 3 | 0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ | $\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$ |
| 4 | $\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ $\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ | $\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$ $\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$ |
| 5 | 0 $\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$ $\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$ | $\frac{128}{225}$ $\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$ $\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$ |

Observação 3.5.1. O conjunto de nodos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ são apresentados na Tabela 3.5². Alternativamente, a quadratura de Gauss-Legendre com n pontos tem seus nodos iguais as raízes de $P_n(x)$ (o polinômio de Legendre de grau n), e os pesos dados por (3.99) ou [6, Cap.4, Sec. 4.6]:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.126)$$

Exemplo 3.5.2. Considere o problema de obter uma aproximação para $I = \int_{-1}^1 \cos(x) dx$ usando a quadratura de Gauss-Legendre. Calculemos algumas

²Disponível em https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_quadrature&oldid=837460315.

aproximações com $n = 1, 2$ e 3 pontos:

- $n = 1$:

$$\int_{-1}^1 \cos(x) dx \approx 2 \cos 0 = 2. \quad (3.127)$$

- $n = 2$:

$$\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx \approx \cos(-\sqrt{3}/3) + \cos(-\sqrt{3}/3) = 1,67582. \quad (3.128)$$

- $n = 3$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx &\approx \frac{8}{9} \cos 0 + \frac{5}{9} \cos(-\sqrt{3/5}) \\ &+ \frac{5}{9} \cos(\sqrt{3/5}) = 1,68300. \end{aligned} \quad (3.129)$$

| n | \tilde{I} | $ I - \tilde{I} $ |
|-----|-------------|-------------------|
| 1 | 2,00000 | 3,2E-01 |
| 2 | 1,67582 | 7,1E-03 |
| 3 | 1,68300 | 6,2E-05 |
| 4 | 1,68294 | 2,8E-07 |
| 5 | 1,68294 | 7,9E-10 |

Tabela 3.6: Resultados referentes ao Exemplo 3.5.2.

Na Tabela 3.6, temos as aproximações de I com a quadratura de Gauss-Legendre de $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 pontos (detonado por \tilde{I} , bem como, o erro absoluto com respeito ao valor analítico da integral.

3.5.1 Intervalos de integração arbitrários

[[tag:revisar]]

Observamos que a quadratura de Gauss-Legendre foi desenvolvida para aproximar integrais definidas no intervalo $[-1, 1]$. Por sorte, uma integral definida em um intervalo arbitrário $[a, b]$ pode ser reescrita como uma integral

no intervalo $[-1, 1]$ através de uma mudança de variável apropriada. Mais precisamente, assumindo a mudança de variável

$$x = \frac{b-a}{2}(u+1) + a \quad (3.130)$$

temos

$$dx = \frac{b-a}{2} du \quad (3.131)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}(u+1) + a\right) \cdot \frac{b-a}{2} du. \quad (3.132)$$

Portanto, para computarmos $\int_a^b f(x) dx$ podemos aplicar a quadratura de Gauss-Legendre na integral definida no $[-1, 1]$ dada conforme acima.

Exemplo 3.5.3. Usemos a quadratura de Gauss-Legendre com 2 pontos para aproximar a integral

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx. \quad (3.133)$$

Fazendo a mudança de variável $x = u/2 + 1/2$, temos

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} du. \quad (3.134)$$

Então, aplicando a quadratura temos

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (3.135)$$

$$= 3,12754\text{E}-1. \quad (3.136)$$

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.5.1. Aproxime

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.137)$$

usando a quadratura de Gauss-Legendre com:

- a) $n = 1$ ponto.
- b) $n = 2$ pontos.
- c) $n = 3$ pontos.
- d) $n = 4$ pontos.
- e) $n = 5$ pontos.

Exercício 3.5.2. Aproxime

$$\int_0^1 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.138)$$

usando a quadratura de Gauss-Legendre com:

- a) $n = 1$ ponto.
- b) $n = 2$ pontos.
- c) $n = 3$ pontos.
- d) $n = 4$ pontos.
- e) $n = 5$ pontos.

Exercício 3.5.3. Aproxime

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.139)$$

usando a quadratura de Gauss-Legendre com:

- a) $n = 5$ ponto.
- b) $n = 10$ pontos.
- c) $n = 20$ pontos.

3.6 Quadraturas gaussianas com pesos

[[tag:revisar]]

A quadratura gaussiana estudada na seção anterior (Seção 3.5) é um caso particular de quadraturas de máximo grau de exatidão para integrais da forma

$$\int_a^b f(x)w(x) dx, \quad (3.140)$$

onde $w(x)$ é positiva e contínua, chamada de função peso. Como anteriormente, os nodos x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, da quadratura gaussiana de n pontos são as raízes do polinômio $p_n(x)$ que é ortogonal a todos os polinômios de grau menor que n . Aqui, isto significa

$$\int_a^b q(x)p_n(x)w(x) dx = 0, \quad (3.141)$$

para todo polinômio $q(x)$ de grau menor que n .

3.6.1 Quadratura de Gauss-Chebyshev

[[tag:revisar]]

Quadraturas de Gauss-Chebyshev são quadraturas gaussianas para integrais da forma

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-1/2} dx. \quad (3.142)$$

Neste caso, na quadratura gaussiana de n pontos os nodos x_i são as raízes do n -ésimo polinômio de Chebyshev $T_n(x)$. Pode-se mostrar (veja, por exemplo, [3, Cap. 7, Sec. 4.1]) que o conjunto de pontos desta quadratura são dados por

$$x_i = \cos \left(\frac{2i-1}{2n} \pi \right), \quad (3.143)$$

$$w_i = \frac{\pi}{n}. \quad (3.144)$$

Exemplo 3.6.1. Considere o problema de aproximar a integral

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.145)$$

Usando a quadratura de Gauss-Chebyshev de n pontos temos:

- $n = 1$:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \pi e^{-\cos(\pi/2)^2} = \pi. \quad (3.146)$$

- $n = 2$:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2} e^{-\cos(\pi/4)^2} + \frac{\pi}{2} e^{-\cos(3\pi/4)^2} \quad (3.147)$$

$$= 1,90547. \quad (3.148)$$

- $n = 3$:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3} e^{-\cos(\pi/6)^2} + \frac{\pi}{3} e^{-\cos(\pi/2)^2} + \frac{\pi}{3} e^{-\cos(5\pi/6)^2} \quad (3.149)$$

$$= 2,03652. \quad (3.150)$$

| n | \tilde{I} |
|-----|-------------|
| 1 | 3,14159 |
| 2 | 1,90547 |
| 3 | 2,03652 |
| 4 | 2,02581 |
| 5 | 2,02647 |
| 6 | 2,02644 |
| 10 | 2,02644 |

Tabela 3.7: Resultados referentes ao Exemplo 3.6.1.

Na Tabela 3.7, temos as aproximações \tilde{I} da integral computadas com a quadratura de Gauss-Chebyshev com diferentes números de pontos.

3.6.2 Quadratura de Gauss-Laguerre

[[tag:revisar]]

Quadraturas de Gauss-Laguerre são quadraturas gaussianas para integrais da forma

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx. \quad (3.151)$$

Neste caso, na quadratura gaussiana de n pontos os nodos x_i são as raízes do n -ésimo polinômio de Laguerre $L_n(x)$ e os pesos por

$$w_i = -\frac{1}{n[L'_n(x_i)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.152)$$

Na Tabela 3.8, temos os pontos da quadratura de Gauss-Laguerre para diversos valores de n .

Tabela 3.8: Pontos da quadratura de Gauss-Laguerre.

| n | x_i | w_i |
|-----|---------------|---------------|
| 1 | 1,0000000E+00 | 1,0000000E+00 |
| 2 | 3,4142136E+00 | 1,4644661E-01 |
| | 5,8578644E-01 | 8,5355339E-01 |
| 3 | 6,2899451E+00 | 1,0389257E-02 |
| | 2,2942804E+00 | 2,7851773E-01 |
| | 4,1577456E-01 | 7,1109301E-01 |
| | 9,3950709E+00 | 5,3929471E-04 |
| 4 | 4,5366203E+00 | 3,8887909E-02 |
| | 1,7457611E+00 | 3,5741869E-01 |
| | 3,2254769E-01 | 6,0315410E-01 |
| | 1,2640801E+01 | 2,3369972E-05 |
| 5 | 7,0858100E+00 | 3,6117587E-03 |
| | 3,5964258E+00 | 7,5942450E-02 |
| | 1,4134031E+00 | 3,9866681E-01 |
| | 2,6356032E-01 | 5,2175561E-01 |

Exemplo 3.6.2. Na Tabela 3.9, temos as aproximações \tilde{I} da integral $I = \int_0^{\infty} \sin(x)e^{-x} dx$ obtidas pela quadratura de Gauss-Laguerre com diferentes pontos n .

| n | \tilde{I} |
|-----|-------------|
| 1 | 8,41471E-01 |
| 2 | 4,32459E-01 |
| 3 | 4,96030E-01 |
| 4 | 5,04879E-01 |
| 5 | 4,98903E-01 |

Tabela 3.9: Resultados referentes ao Exemplo 3.6.1.

3.6.3 Quadratura de Gauss-Hermite

[[tag:revisar]]

Quadraturas de Gauss-Hermite são quadraturas gaussianas para integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx. \quad (3.153)$$

Seus nodos x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as raízes do n -ésimo polinômio de Hermite e os pesos são dados por

$$w_i = \frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2}. \quad (3.154)$$

Na Tabela 3.10, temos os pontos da quadratura de Gauss-Hermite para diversos valores de n .

Exemplo 3.6.3. Na Tabela 3.11, temos as aproximações \tilde{I} da integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sen}(x)e^{-x^2} dx$ obtidas pela quadratura de Gauss-Hermite com diferentes pontos n .

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.6.1. Aproxime

$$\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen}(x+2) - e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3.155)$$

usando a quadratura de Gauss-Chebyshev com:

Tabela 3.10: Pontos da quadratura de Gauss-Hermite.

| n | x_i | w_i |
|-----|----------------|---------------|
| 1 | 0,0000000E+00 | 1,7724539E+00 |
| 2 | -7,0710678E-01 | 8,8622693E-01 |
| | 7,0710678E-01 | 8,8622693E-01 |
| 3 | -1,2247449E+00 | 2,9540898E-01 |
| | 1,2247449E+00 | 2,9540898E-01 |
| | 0,0000000E+00 | 1,1816359E+00 |
| 4 | -1,6506801E+00 | 8,1312835E-02 |
| | 1,6506801E+00 | 8,1312835E-02 |
| | -5,2464762E-01 | 8,0491409E-01 |
| | 5,2464762E-01 | 8,0491409E-01 |
| | -2,0201829E+00 | 1,9953242E-02 |
| 5 | 2,0201829E+00 | 1,9953242E-02 |
| | -9,5857246E-01 | 3,9361932E-01 |
| | 9,5857246E-01 | 3,9361932E-01 |
| | 0,0000000E+00 | 9,4530872E-01 |
| | | |

| n | \tilde{I} |
|-----|-------------|
| 1 | 0,00000E+00 |
| 2 | 8,14199E-01 |
| 3 | 6,80706E-01 |
| 4 | 6,90650E-01 |
| 5 | 6,90178E-01 |

Tabela 3.11: Resultados referentes ao Exemplo 3.6.3.

- a) $n = 1$ ponto.
- b) $n = 2$ pontos.
- c) $n = 3$ pontos.
- d) $n = 4$ pontos.
- e) $n = 5$ pontos.

Exercício 3.6.2. Aproxime

$$\int_0^{\infty} (\text{sen}(x+2) - e^{-x^2}) e^{-x} dx \quad (3.156)$$

usando a quadratura de Gauss-Laguerre com:

- a) $n = 3$ pontos.
- b) $n = 4$ pontos.
- c) $n = 5$ pontos.

Exercício 3.6.3. Aproxime

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(x+2)e^{-x^2} - e^{-2x^2} dx \quad (3.157)$$

usando a quadratura de Gauss-Hermite com:

- a) $n = 3$ pontos.
- b) $n = 4$ pontos.
- c) $n = 5$ pontos.

3.7 Método de Monte Carlo

[[tag:revisar]]

O método de Monte Carlo é uma técnica não determinística para a aproximação de integrais. Mais especificamente, o método compreende a aproximação

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (3.158)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são pontos de uma sequência aleatória em $[a, b]$. Aqui, não vamos entrar em detalhes sobre a escolha desta sequência e, sem mais justificativas, assumiremos uma sequência de pontos uniformemente distribuídos no intervalo de integração.

Exemplo 3.7.1. Na tabela 3.12 temos aproximações \tilde{I} computadas para

$$I = \int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad (3.159)$$

usando o método de Monte Carlo com diferentes números de pontos n . Aqui, os pontos foram gerados no GNU Octave pela sequência *quasi*-randômica obtida da função `rand` inicializada com `seed=0`.

| n | \tilde{I} | $ I - \tilde{I} $ |
|--------|-------------|-------------------|
| 10 | 2,53304E-01 | 6,3E-02 |
| 100 | 3,03149E-01 | 1,3E-02 |
| 1000 | 3,08415E-01 | 7,6E-03 |
| 10000 | 3,16385E-01 | 3,2E-04 |
| 100000 | 3,15564E-01 | 5,0E-04 |

Tabela 3.12: Resultados referentes ao Exemplo 3.7.1.

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 3.7.1. Use o método de Monte Carlo para obter uma aproximação de

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin(x+2) - e^{-x^2}}{x^2 + \ln(x+2)} dx \quad (3.160)$$

com precisão de 10^{-2} .

Capítulo 4

Problema de Valor Inicial

Neste capítulo, discutimos sobre técnicas numéricas para aproximar a solução de Equações Diferenciais Ordinárias com valor inicial (condição inicial), i.e. problemas da forma

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t > t_0, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (4.1b)$$

onde $\mathbf{y} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ é a função incógnita com dadas $\mathbf{f} : (t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

4.1 Método de Euler

Dado um problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0, \quad (4.2a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (4.2b)$$

temos que $f(t, y)$ é a derivada da solução $y(t)$ no tempo t . Então, aproximando a derivada pela razão fundamental de passo $h > 0$

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \quad (4.3)$$

obtemos

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx f(t, y) \quad (4.4)$$

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \quad (4.5)$$

Isto nos motiva a **iteração do Método de Euler**¹

$$y^{(0)} = y_0, \quad (4.6a)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(t^{(k)}, y^{(k)}), \quad (4.6b)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $y^{(k)} \approx y(t^{(k)})$, $t^{(k)} = t_0 + kh$ e **passo** $h > 0$.

Exemplo 4.1.1. Consideramos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \text{sen}(t), t > 0 \quad (4.7a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.7b)$$

Sua solução analítica é

$$y(t) = e^t - \frac{1}{2} \text{sen}(t) - \frac{1}{2} \cos(t). \quad (4.8)$$

Para computarmos a solução pelo Método de Euler, reescrevemos o problema da seguinte forma

$$y' = y + \text{sen}(t), t > 0 \quad (4.9a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad (4.9b)$$

donde identificamos $f(t, y) := y + \text{sen}(t)$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 1/2$.

¹Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

Tabela 4.1: Resultados obtidos para o problema do Exemplo 4.1.1 com $h = 1\text{E}-1$.

| k | $t^{(k)}$ | $y^{(k)}$ | $y\left(t^{(k)}\right)$ |
|-----|-----------|-----------|-------------------------|
| 0 | 0.0 | 5.00E-1 | 5.00E-1 |
| 1 | 0.1 | 5.50E-1 | 5.58E-1 |
| 2 | 0.2 | 6.15E-1 | 6.32E-1 |
| 3 | 0.3 | 6.96E-1 | 7.24E-1 |
| 4 | 0.4 | 7.96E-1 | 8.37E-1 |
| 5 | 0.5 | 9.14E-1 | 9.70E-1 |
| 6 | 0.6 | 1.05E+0 | 1.13E+0 |
| 7 | 0.7 | 1.22E+0 | 1.31E+0 |
| 8 | 0.8 | 1.40E+0 | 1.52E+0 |
| 9 | 0.9 | 1.61E+0 | 1.76E+0 |
| 10 | 1.0 | 1.85E+0 | 2.03E+0 |

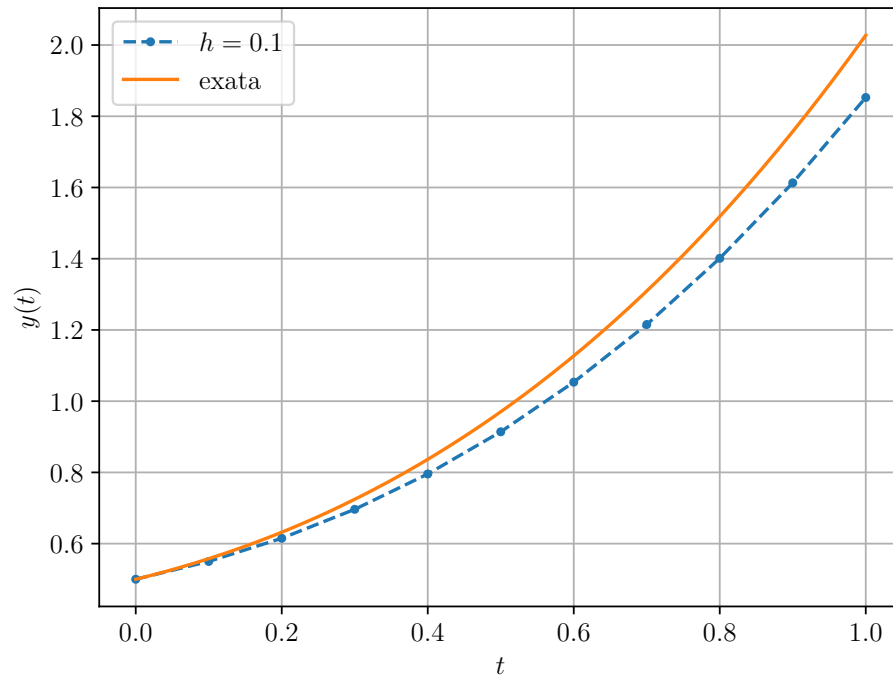


Figura 4.1: Esboço das soluções numérica (pontos) e analítica (linha) para o problema do Exemplo 4.1.1.

Código 4.1: euler.py

```

1 def euler(f, t0, y0, h, n):
2     t = np.empty(n+1)
3     t[0] = t0
4     y = np.empty(n+1)
5     y[0] = y0
6     for k in range(n):
7         t[k+1] = t[k] + h
8         y[k+1] = y[k] + h*f(t[k], y[k])
9     return t, y

```


4.1.1 Análise Numérica

O Método de Euler com passo h aplicado ao problema de valor inicial (4.2), pode ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{y}(t^{(0)}; h) = y_0, \quad (4.10a)$$

$$\tilde{y}(t^{(k+1)}; h) = \tilde{y}(t^{(k)}; h) + h\Phi(t^{(k)}, \tilde{y}(t^{(k)}); h), \quad (4.10b)$$

onde $\tilde{y}(t^{(k)})$ representa a aproximação da solução exata y no tempo $t^{(k)} = t_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Métodos que podem ser escritos dessa forma, são chamados de **Métodos de Passo Simples** (ou único). No caso específico do Método de Euler, temos

$$\Phi(t, y; h) := f(t, y(t)). \quad (4.11)$$

Consistência

Agora, considerando a solução exata y de (4.2), introduzimos

$$\Delta(t, y; h) := \begin{cases} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, & h \neq 0, \\ f(t, y(t)), & h = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Com isso, vamos analisar o chamado **erro de discretização local**

$$\tau(t, y; h) := \Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h), \quad (4.13)$$

que estabelece uma medida quantitativa com que a solução exata $y(t)$ no tempo $t + h$ satisfaz a iteração do método de passo simples.

Definição 4.1.1. (Consistência.) Um método de passo simples é dito ser **consistente** quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t, y; h) = 0, \quad (4.14)$$

ou, equivalentemente, quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(t, y; h) = f(t, y). \quad (4.15)$$

Observação 4.1.1. (Consistência do Método de Euler.) Da Definição 4.1.1, temos que o **Método de Euler é consistente**. De fato, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t, y; h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h)) \quad (4.16)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f(t, y(t)) \right) \quad (4.17)$$

$$= y'(t) - f(t, y(t)) = 0. \quad (4.18)$$

A **ordem do erro de discretização local** de um método de passo simples é dita ser p , quando

$$\tau(t, y; h) = O(h^p), \quad (4.19)$$

ou seja, quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(t, y; h)}{h^p} = C, \quad (4.20)$$

para alguma constante C .

Para determinarmos a ordem do Método de Euler, tomamos a **expansão em série de Taylor**² da solução exata $y(t)$ em torno de t , i.e.

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \frac{h^3}{6}y'''(t + \theta h), \quad (4.21)$$

para algum $0 < \theta < 1$. Como $y'(t) = f(t, y(t))$, temos

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) \quad (4.22)$$

$$= f_t(t, y) + f_y(t, y)y' \quad (4.23)$$

$$= f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y). \quad (4.24)$$

Então, rearranjando os termos em (4.21), obtemos

$$\Delta(t, y; h) = f(t, y(t)) + \frac{h}{2}[f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] + O(h^2). \quad (4.25)$$

Portanto, para o Método de Euler temos

$$\tau(t, y; h) := \Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h) \quad (4.26)$$

²Brook Taylor, 1685 - 1731, matemático britânico. Fonte: [Wikipédia](#).

$$= \Delta(t, y; h) - f(t, y) \quad (4.27)$$

$$= \frac{h}{2} [f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] + O(h^2) \quad (4.28)$$

$$= O(h). \quad (4.29)$$

Isto mostra que o Método de Euler é de ordem 1.

Convergência

A análise acima trata apenas da consistência do Método de Euler. Para analisarmos a convergência de métodos de passo simples, definimos o erro de discretização global

$$e(t; h_n) := \tilde{y}(t; h_n) - y(t), \quad (4.30)$$

onde $\tilde{y}(t; h_n) \approx y(t)$ para $h_n := (t - t_0)/n$. Dizemos que o método é convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(t; h_n) = 0. \quad (4.31)$$

Ainda, dizemos que o método tem erro de discretização global de ordem p quando

$$e(t; h_n) = O(h_n^p) \quad (4.32)$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$, $t_f > t_0$.

Lema 4.1.1. ([8, Cap. 7, Seção 7.2]) Se a sequência $(\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{R}}$ satisfaz a estimativa

$$|\xi^{(k+1)}| \leq (1 + \delta) |\xi^{(k)}| + B, \quad (4.33)$$

para dados $\delta > 0$ e $B \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, então

$$|\xi^{(n)}| \leq e^{n\delta} |\xi^{(0)}| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B. \quad (4.34)$$

Demonstração. De forma iterativa, temos

$$|\xi^{(1)}| \leq (1 + \delta) |\xi^{(0)}| + B \quad (4.35)$$

$$|\xi^{(2)}| \leq (1 + \delta) |\xi^{(1)}| + B \quad (4.36)$$

$$= (1 + \delta)^2 |\xi^{(0)}| + (1 + \delta)B + B \quad (4.37)$$

$$\vdots \quad (4.38)$$

$$|\xi^{(k)}| \leq (1 + \delta)^k |\xi^{(0)}| + B \sum_{k=0}^{k-1} (1 + \delta)^k \quad (4.39)$$

$$= (1 + \delta)^k |\xi^{(0)}| + B \frac{(1 + \delta)^k - 1}{\delta}. \quad (4.40)$$

Observando que $0 < 1 + \delta \leq e^\delta$ para $\delta > -1$, concluímos que

$$|\xi^{(k)}| \leq e^{k\delta} |\xi^{(0)}| + \frac{e^{k\delta} - 1}{\delta} B. \quad (4.41)$$

□

Teorema 4.1.1. (Estimativa do Error Global.) Considere o PVI (4.2), para $t_0 = a$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Suponha que f é Lipschitz contínua em y

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|, \quad (4.42)$$

para todo $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ e que exista $M > 0$ tal que

$$|y''(t)| \leq M, \quad (4.43)$$

para todo $t \in [a, b]$. Então, as iteradas do Método de Euler $y^{(k)} \approx y(t^{(k)})$, $t^{(k)} = t_0 + kh$, $h > (b - a)/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$, satisfazem a seguinte **estimativa do erro de discretização global**

$$|y^{(k)} - y(t^{(k)})| \leq \frac{hM}{2L} \left[e^{L(t^{(k)} - t_0)} - 1 \right]. \quad (4.44)$$

Demonstração. Para $k = 0$ o resultado é imediato. Agora, usamos o polinômio de Taylor

$$y(t^{(k+1)}) = y(t^{(k)}) + hf(t^{(k)}, y(t^{(k)})) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^{(k)}), \quad (4.45)$$

onde $t^{(k)} \leq \xi^{(k)} \leq t^{(k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Já, as iteradas de Euler são

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(t^{(k)}, y^{(k)}). \quad (4.46)$$

Subtraindo essas equações, obtemos

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} - y(t^{(k+1)}) &= y^{(k)} - y(t^{(k)}) \\ &\quad + h \left[f(t^{(k)}, y^{(k)}) - f(t^{(k)}, y(t^{(k)})) \right] - \frac{h^2}{2} y''(\xi^{(k)}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Da hipótese de f Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} |y^{(k+1)} - y(t^{(k+1)})| &\leq |y^{(k)} - y(t^{(k)})| \\ &\quad + hL |y^{(k)} - y(t^{(k)})| + \frac{h^2}{2} |y''(\xi^{(k)})| \end{aligned} \quad (4.48)$$

Ou, ainda,

$$|y^{(k+1)} - y(t^{(k+1)})| \leq (1 + hL) |y^{(k)} - y(t^{(k)})| + \frac{h^2 M}{2}. \quad (4.49)$$

Do Lema 4.1.1, temos

$$|y^{(k+1)} - y(t^{(k+1)})| \leq \frac{h^2 M}{2} \frac{e^{khL} - 1}{hL}, \quad (4.50)$$

donde segue a estimativa do erro global (4.44). \square

Observação 4.1.2. (Convergência.) Do Teorema 4.1.1, a ordem do erro de discretização global de um método de passo simples é igual a sua ordem do erro de discretização local. Portanto, o Método de Euler é convergente e é de ordem 1.

Exemplo 4.1.2. Consideramos o seguinte problema de valor inicial

$$y' = y + 1, t > 0 \quad (4.51a)$$

$$y(0) = 0. \quad (4.51b)$$

Na Tabela 4.2, temos as aproximações $\tilde{y}(1)$ de $y(1)$ computadas pelo Método de Euler com diferentes passos h . A solução analítica deste problema é $y(t) = e^t - 1$.

Tabela 4.2: Resultados referentes ao Exemplo 4.1.2.

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 1.59374 | $1.2\text{E}-1$ |
| 10^{-2} | 1.70481 | $1.3\text{E}-2$ |
| 10^{-3} | 1.71692 | $1.4\text{E}-3$ |
| 10^{-5} | 1.71827 | $1.4\text{E}-5$ |
| 10^{-7} | 1.71828 | $1.4\text{E}-7$ |
| 10^{-9} | 1.71828 | $1.4\text{E}-9$ |

Erros de Arredondamento

O Teorema 4.1.1 não leva em consideração os erros de arredondamento. Levando em conta esses erros, a iteração do Método de Euler tem a forma

$$\tilde{y}^{(0)} = y_0 + \delta^{(k)}, \quad (4.52a)$$

$$\tilde{y}^{(k+1)} = \tilde{y}^{(k)} + hf(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}) + \delta^{(k+1)}, \quad (4.52b)$$

onde $\delta^{(k)}$ é o erro devido a arredondamentos na k -ésima iterada, $t^{(k)} = t_0 + hk$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Assumindo as hipóteses do Teorema 4.1.1, podemos mostrar a seguinte estimativa de erro global

$$\begin{aligned} |\tilde{y}^{(k+1)} - y(t^{(k+1)})| &\leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) [e^{L(t^{(k)} - t_0)} - 1] \\ &\quad + |\delta_0| e^{L(t^{(k)} - t_0)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

para $\delta^{(k)} < \delta$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

4.1.2 Exercícios

Exercício 4.1.1. O problema de valor inicial

$$y' = \pi [\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)], \quad t > 0 \quad (4.54a)$$

$$y(0) = 0. \quad (4.54b)$$

tem solução analítica $y(t) = \sin(\pi t) \cos(\pi t)$. Compute a aproximação $\tilde{y}(1) \approx y(1)$ pelo Método de Euler com passo $h = 10^{-1}$ e forneça o erro $e(1, h) := \tilde{y}(1, h) - y(1)$.

Exercício 4.1.2. Use o Método de Euler para computar a solução de

$$y' = e^{2t} - 2y, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.55a)$$

$$y(0) = 0. \quad (4.55b)$$

Escolha um passo h adequado de forma que $y(1)$ seja computado com precisão de 5 dígitos significativos.

Exercício 4.1.3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + e^{-y^2+1} = 2, \quad t > 1, \quad (4.56a)$$

$$y(1) = -1. \quad (4.56b)$$

Use o Método de Euler para computar o valor aproximado de $y(2)$ com precisão de 6 dígitos significativos.

Exercício 4.1.4. Use o Método de Euler para computar a solução de

$$y' = -30y, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.57a)$$

$$y(0) = \frac{1}{3} \quad (4.57b)$$

A solução analítica é $y(t) = \frac{1}{3}e^{-30t}$. Compute a solução aproximação $\tilde{y}(1)$ e o erro $|\tilde{y}(1) - y(1)|$ usando o passo $h = 10^{-1}$. O erro obtido está de acordo com a estimativa (4.44)?

Análise Numérica

Exercício 4.1.5. Mostre que se $\delta > -1$, então $0 < 1 + \delta \leq e^\delta$.

Exercício 4.1.6. Seja dado um PVI (4.2), $t_0 \leq t \leq t_f$. Sejam $\tilde{y}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, as aproximações computadas conforme em (4.52), com $\delta^{(k)} < \delta$. Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 4.1.1, mostre a estimativa de erro global (4.53).

Exercício 4.1.7. Assumindo um erro de arredondamento máximo de $\delta > 0$, use (4.53) para obter uma estimativa para a melhor escolha de h .

4.2 Métodos de Taylor de Alta Ordem

Métodos de Taylor³ são usados para computar a solução numérica de Problemas de Valor Inicial (PVI) da forma

$$y' = f(t, y), \quad t_0 < t \leq t_f, \quad (4.58a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (4.58b)$$

onde $y : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}$ é a função incógnita, dada $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dado valor inicial $y_0 \in \mathbb{R}$.

Na Seção 4.1, vimos que a ordem do erro de discretização local do Método de Euler⁴ é também a do erro de discretização global. Este resultado é generalizado pelo Teorema 4.2.1, para todo o método de passo simples

$$y^{(0)} = y_0, \quad (4.59a)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\Phi(t^{(k)}, y^{(k)}), \quad (4.59b)$$

onde $y^{(k)} \approx y(t^{(k)})$, $t^{(k)} = t_0 + kh$, $h = (t_f - t_0)/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Antes, lembramos que o erro de discretização local é definido por

$$\tau(t, y; h) := \Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h), \quad (4.60)$$

onde

$$\Delta(t, y; h) := \begin{cases} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, & h \neq 0, \\ f(t, y(t)), & h = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Já, o erro de discretização global é definido por

$$e(t; h_n) := \tilde{y}(t; h_n) - y(t), \quad (4.62)$$

onde $\tilde{y}(t; h_n) \approx y(t)$ dada por (4.59) para $h_n = (t - t_0)/n$.

³Brook Taylor, 1685 - 1731, matemático britânico. Fonte: [Wikipédia](#).

⁴Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

Com o objetivo de desenvolvermos métodos de alta ordem, podemos usar o polinômio de Taylor de ordem m de $y = y(t)$

$$y(t) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^m y}{dt^m}(t) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} y}{dt^{m+1}}(\xi), \quad (4.63)$$

donde

$$y(t) = y(t) + hf(t, y) + \frac{h^2}{2}f'(t, y) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}(t, y) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^m f}{dt^m}(\xi, y(\xi)) \quad (4.64)$$

e, portanto

$$\Delta(t, y; h) = f(t, y) + \frac{h}{2}f'(t, y) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}(t, y) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^m f}{dt^m}(\xi, y(\xi)) \quad (4.65)$$

Isto nos motiva a **iteração do Método de Taylor de Ordem m** :

$$y^{(0)} = y_0, \quad (4.66a)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hT^{(m)}(t^{(k)}, y^{(k)}), \quad (4.66b)$$

onde

$$T^{(m)}(t^{(k)}, y^{(k)}) := f(t^{(k)}, y^{(k)}) + \frac{h}{2}f'(t^{(k)}, y^{(k)}) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}}(t^{(k)}, y^{(k)}) \quad (4.67)$$

Exemplo 4.2.1. Considere o PVI

$$y' = y + \sin(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.68a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.68b)$$

Vamos usar o Método de Taylor de Ordem 2 para computar sua solução e comparar com a solução analítica

$$y(t) = e^t - \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} \cos(t). \quad (4.69)$$

| h | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|-------------------------|
| 10^{-1} | 4.9E-3 |
| 10^{-2} | 5.2E-5 |
| 10^{-3} | 5.2E-7 |
| 10^{-4} | 5.2E-9 |
| 10^{-5} | 5.2E-11 |

Código 4.2: taylor.py

```

1 import numpy as np
2
3 def taylor(Phi, t0, y0, h, n):
4     t = t0
5     y = y0
6     for k in range(n):
7         y += h*Phi(t, y, h)
8         t += h
9     return t, y
10
11 def f(t, y):
12     return y + np.sin(t)
13
14 def fl(t, y):
15     return f(t, y) + np.cos(t)
16
17 def Phi(t, y, h):
18     return f(t, y) + h/2*fl(t, y)
19
20 # analítica
21 def exata(t):
22     return np.exp(t) - 0.5*np.sin(t) - 0.5*np.cos(t)
23
24 h = 1e-1

```

```

25 n = round(1/h)
26 t,y = taylor(Phi, 0., 0.5, h, n)

```

4.2.1 Análise Numérica

Teorema 4.2.1. (**Convergência**, [8, Cap. 7, Seção 7.2].) Considere o PVI (4.58), para $t_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Seja Φ contínua em

$$G := \{(t, y, h) : a \leq t \leq b, |y - y(t)| \leq \gamma, 0 \leq |h| \leq h_0\}, \quad (4.70)$$

para $h_0 > 0$ e $\gamma > 0$. Sejam também, M, N constantes tais que

$$|\Phi(t, y; h) - \Phi(t, z; h)| \leq M|y - z|, \quad (4.71)$$

para todas $(t, y; h), (t, z; h) \in G$. Se, ainda, para algum $p > 0$ e para todo $t \in [a, b]$, $|h| \leq h_0$, temos a **estimativa do erro de discretização local**

$$|\tau(t, y(t); h)| \leq N|h|^p, \quad (4.72)$$

então existe \bar{h} , $0 < \bar{h} < h_0$, tal que vale a seguinte **estimativa do erro de discretização global**

$$|e(t; h_n)| \leq |h_n|^p N \frac{e^{M|t-t_0|} - 1}{M}, \quad (4.73)$$

para todo $t \in [a, b]$ e para todo $h_n = (t - t_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, com $|h_n| \leq \bar{h}$.

Demonstração. Seja

$$\tilde{\Phi}(t, y; h) := \begin{cases} \Phi(t, y; h) & , (t, y, h) \in G, \\ \Phi(t, y(t) + \gamma; h) & , t \in [a, b], |h| \leq h_0, y \geq y(t) + \gamma, \\ \Phi(t, y(t) - \gamma; h) & , t \in [a, b], |h| \leq h_0, y \leq y(t) - \gamma, \end{cases} \quad (4.74)$$

A função $\tilde{\Phi}$ é contínua em

$$\tilde{G} := \{(t, y; h) : t \in [a, b], y \in \mathbb{R}, |h| \geq h_0\} \quad (4.75)$$

e satisfaz

$$|\tilde{\Phi}(t, y; h) - \tilde{\Phi}(t, z; h)| \leq M|y - z|, \quad (4.76)$$

para todas $(t, y; h), (t, z; h) \in \tilde{G}$. Ainda, como $\tilde{\Phi}(t, y(t); h) = \Phi(t, y(t); h)$, também temos que

$$|\Delta(t, y(t); h) - \tilde{\Phi}(t, y(t); h)| \leq N|h|^p, \quad (4.77)$$

para $t \in [a, b]$ e $|h| \leq h_0$.

Sejam, $\tilde{y}^{(k)} := \tilde{y}(t^{(k)}; h)$, $t^{(k)} = t_0 + kh$, $\tilde{y}^{(0)} = y_0$:

$$\tilde{y}^{(k+1)} = \tilde{y}^{(k)} + h\tilde{\Phi}(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}; h), y(t^{(k+1)}) = y(t^{(k)}) + h\Delta(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h). \quad (4.78)$$

Definindo $\tilde{e}^{(k)} := \tilde{y}^{(k)} - y(t^{(k)})$, obtemos a fórmula de recorrência

$$\tilde{e}^{(k+1)} = \tilde{e}^{(k)} + h[\tilde{\Phi}(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}; h) - \Delta(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h)] \quad (4.79)$$

$$= \tilde{e}^{(k)} + h[\tilde{\Phi}(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}; h) - \tilde{\Phi}(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h)] \quad (4.80)$$

$$+ h[\tilde{\Phi}(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h) - \Delta(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h)]. \quad (4.81)$$

Agora, de (4.76) e (4.77), temos

$$|\tilde{\Phi}(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}; h) - \tilde{\Phi}(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h)| \leq M|\tilde{e}^{(k)}| \quad (4.82)$$

$$|\Delta(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h) - \tilde{\Phi}(t^{(k)}, y(t^{(k)}); h)| \leq N|h|^p \quad (4.83)$$

Portanto, de (4.81), temos

$$|\tilde{e}^{(k+1)}| \leq (1 + |h|M)|\tilde{e}^{(k)}| + N|h|^{p+1} \quad (4.84)$$

Então, do Lema 4.1.1, temos

$$|\tilde{e}^{(k)}| \leq N|h|^p \frac{e^{k|h|M} - 1}{M}. \quad (4.85)$$

Sejam, agora, $t \in [a, b]$, $t \neq t_0$ fixo e $h := h_n = (t - t_0)/n$, $n > 0$. Então, $t^{(n)} = t_0 + nh = t$ e de (4.85) temos

$$|\tilde{e}(t, h_n)| \leq N|h_n|^p \frac{e^{M|t-t_0|} - 1}{M}, \quad (4.86)$$

para todo $t \in [a, b]$, $|h_n| \leq h_0$. Uma vez que $|t - t_0| \leq |b - a|$ e $\gamma > 0$, existe \bar{h} , $0 < \bar{h} \leq h_0$, tal que $|\tilde{e}(t, h_n)| \leq \gamma$ para todo $t \in [a, b]$ e $|h_n| \leq \bar{h}$. Logo, para o método de passo simples (4.59) gerado por Φ , temos para $|h| \leq \bar{h}$ que

$$\tilde{y}^{(k)} = y^{(k)}, \quad (4.87)$$

$$\tilde{e}^{(k)} = e^{(k)}, \quad (4.88)$$

$$\tilde{\Phi}(t^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}; h) = \Phi(t^{(k)}, y^{(k)}; h). \quad (4.89)$$

Concluimos que

$$|e(t, h_n)| \leq N|h_n|^p \frac{e^{M|t-t_0|} - 1}{M}, \quad (4.90)$$

para todo $t \in [a, b]$ e $h_n = (t - t_0)/n$, $n = 1, 2, \dots$, com $|h_n| \leq \bar{h}$. \square

4.2.2 Exercícios

Exercício 4.2.1. Use o Método de Taylor de $O(h^2)$ para computar a solução de

$$y' + \cos(t) = y, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.91a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.91b)$$

A solução analítica é $y(t) = \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t)$. Faça testes numéricos com $h = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} e 10^{-4} , observe os resultados obtidos e o erro $\varepsilon := |\tilde{y}(1) - y(1)|$, onde \tilde{y} corresponde a solução numérica. O erro tem o comportamento esperado? Justifique sua resposta.

Exercício 4.2.2. Use o Método de Taylor $O(h^2)$ para computar a solução do PVI (4.91) com $h = 10^{-1}$. Faça um esboço do gráfico do erro $e(t; h = 10^{-1}) = |\tilde{y}(t) - y(t)|$ e verifique se ele tem a forma esperada conforme a estimativa do erro global (4.73).

Exercício 4.2.3. Use o Método de Taylor de $O(h^3)$ para computar a solução do PVI (4.91). Escolha o passo h de forma que a solução numérica tenha precisão de 6 dígitos significativos.

Exercício 4.2.4. Considere o seguinte PVI

$$y' = y^2 - ty, \quad 1 < t \leq 2, \quad (4.92a)$$

$$y(1) = -2. \quad (4.92b)$$

Compute a solução com o Método de Taylor de $O(h^p)$ com passo $h = 10^{-1}$:

a) $p = 2$.

b) $p = 3$.

c) $p = 4$.

Exercício 4.2.5. Considere o seguinte PVI

$$y' - t^2 y = 0, \quad 1 < t \leq 3, \quad (4.93a)$$

$$y(1) = \frac{1}{2}. \quad (4.93b)$$

Compute a solução com o Método de Taylor de $O(h^p)$ com passo $h = 10^{-1}$:

a) $p = 2$.

b) $p = 3$.

c) $p = 4$.

Análise Numérica

Exercício 4.2.6. Considere o PVI (4.91). Verifique que o Método de Taylor de $O(h^2)$ satisfaz as estimativas do erro local (4.72) e do erro global (4.73). Forneça valor estimados para os parâmetros N e M .

4.3 Métodos de Runge-Kutta

Seja um Problema de Valor Inicial (PVI) da forma

$$y' = f(t, y), \quad t_0 < t \leq t_f, \quad (4.94a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (4.94b)$$

onde $y : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}$ é a função incógnita, dada $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dado valor inicial $y_0 \in \mathbb{R}$. Seguimos usando a notação $y^{(k)} \approx y(t^{(k)})$, $t^{(k)} = t_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = (t_f - t_0)/n$.

Os métodos de Runge⁵-Kutta⁶ de s -estágios são métodos de passo simples da seguinte forma

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h \underbrace{\sum_{i=1}^s c_i \phi_i(t^{(k)}, y^{(k)})}_{:=\Phi(t^{(k)}, y^{(k)})}, \quad (4.95)$$

onde

$$\phi_1 := f(t^{(k)}, y^{(k)}), \quad (4.96a)$$

$$\phi_2 := f(t^{(k)} + \alpha_2 h, y^{(k)} + h\beta_{2,1}\phi_1), \quad (4.96b)$$

$$\phi_3 := f(t^{(k)} + \alpha_3 h, y^{(k)} + h(\beta_{3,1}\phi_1 + \beta_{3,2}\phi_2)), \quad (4.96c)$$

\vdots

$$\phi_s := f\left(t^{(i)} + \alpha_s h, y^{(i)} + h \sum_{j=1}^{s-1} \beta_{s,j} \phi_j\right), \quad (4.96d)$$

com os coeficientes c_i, α_i , $i = 1, 2, \dots, s$ e $\beta_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, s-1$, escolhidos de forma a obtermos um método de passo simples com erro local da ordem desejada.

Na sequência, discutimos alguns dos métodos de Runge-Kutta usualmente utilizados. Pode-se encontrar uma lista mais completa em [3, Cap. 8, Seção 3.2].

4.3.1 Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

Precisamos apenas de 2 estágios para obtermos métodos de Runge-Kutta de ordem 2. Tomamos a forma

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h \underbrace{(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2)}_{:=\Phi(t^{(k)}, y^{(k)})} \quad (4.97)$$

⁵Carl David Tolmé Runge, 1856 - 1927, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia](#).

⁶Martin Wilhelm Kutta, 1867 - 1944, matemático alemão. Fonte: [Wikipédia](#).

com

$$\phi_1(t^{(k)}, y^{(k)}) := f(t^{(k)}, y^{(k)}), \quad (4.98a)$$

$$\phi_2(t^{(k)}, y^{(k)}) := f(t^{(k)} + \alpha_2 h, y^{(k)} + h\beta_{2,1}f(t^{(k)}, y^{(k)})). \quad (4.98b)$$

Nosso objetivo é de determinar os coeficientes $c_1, c_2, \alpha_2, \beta_{2,1}$ tais que o método (4.97) tenha erro de discretização local de $O(h^2)$. Da definição do erro local (4.60)

$$\tau(t, y; h) := \Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h), \quad (4.99)$$

e por polinômio de Taylor de $y(t)$ ⁷

$$\Delta(t, y; h) = f(t, y(t)) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t, y) + O(h^2) \quad (4.100)$$

$$= f(t, y(t)) + \frac{h}{2} [f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] + O(h^2). \quad (4.101)$$

De (4.97), temos

$$\Phi(t, y; h) = c_1 f(t, y) + c_2 f(t + \alpha_2 h, y + h\beta_{2,1}f(t, y)) \quad (4.102)$$

Agora, tomando a expansão por série de Taylor de $\Phi(t, y; h)$, temos

$$\Phi(t, y; h) = (c_1 + c_2)f(t, y) + c_2 h[\alpha_2 f_t(t, y) + \beta_{2,1} f_y(t, y)f(t, y)] + O(h^2). \quad (4.103)$$

Então, por comparação de (4.101) e (4.103), temos

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (4.104)$$

$$c_2 \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (4.105)$$

$$c_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}. \quad (4.106)$$

Este sistema tem mais de uma solução possível.

⁷Consulte (4.65) para mais detalhes sobre a expansão em polinômio de Taylor de $\Delta(t, y; h)$.

Método do Ponto Médio

O Método do Ponto Médio é um método de Runge-Kutta de ordem 2 proveniente da escolha de coeficientes

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= 1, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}, \\ \beta_{2,1} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Logo, a iteração do Método do Ponto Médio é

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= y_0 \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + hf \left(t^{(k)} + \frac{h}{2}, y^{(k)} + \frac{h}{2} f(t^{(k)}, y^{(k)}) \right), \end{aligned} \tag{4.108}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 4.3.1. Consideramos o seguinte PVI

$$y' - y = \sin(t), 0 < t \leq 1, \tag{4.109a}$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \tag{4.109b}$$

Na Tabela 4.3, temos as aproximações $\tilde{y}(1) \approx y(1)$ computadas pelo Método do Ponto Médio com diferentes passos h .

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2.02175 | 5.6E-03 |
| 10^{-2} | 2.02733 | 6.0E-05 |
| 10^{-3} | 2.02739 | 6.1E-07 |
| 10^{-4} | 2.02740 | 6.1E-09 |
| 10^{-5} | 2.02740 | 6.1E-11 |
| 10^{-6} | 2.02740 | 1.9E-12 |

Tabela 4.3: Resultados referentes ao Exemplo 4.3.1.

Código 4.3: pm.py

```

1  import numpy as np
2
3  def pm(f, t0, y0, h, n):
4      t = t0
5      y = y0
6      for k in range(n):
7          ya = y + h/2*f(t, y)
8          y += h*f(t+h/2, ya)
9          t += h
10     return t, y
11
12 def f(t, y):
13     return y + np.sin(t)
14
15 # analítica
16 def exata(t):
17     return np.exp(t) - 0.5*np.sin(t) - 0.5*np.cos(t)
18
19 h = 1e-1
20 n = round(1./h)
21 t,y = pm(f, 0., 0.5, h, n)
22 print(f'{h:.1e}: {y:.5e} {np.abs(y-exata(1)):.1e}')

```

Método de Euler Modificado

O Método de Euler Modificado é um método de Runge-Kutta de ordem 2 proveniente da escolha de coeficientes

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{2}, \\
 c_2 &= \frac{1}{2}, \\
 \alpha_2 &= 1, \\
 \beta_{21} &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.110}$$

Logo, a **iteração do Método de Euler Modificado** é

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= y_0 \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \frac{h}{2} \left[f(t^{(k)}, y^{(k)}) \right. \\ &\quad \left. + f(t^{(k)} + h, y^{(k)} + hf(t^{(k)}, y^{(k)})) \right]. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Exemplo 4.3.2. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.112a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.112b)$$

Na Tabela 4.4, temos as aproximações $\tilde{y}(1)$ de $y(1)$ computadas pelo Método de Euler modificado com diferentes passos h .

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2.02096 | 6.4E-03 |
| 10^{-2} | 2.02733 | 6.9E-05 |
| 10^{-3} | 2.02739 | 6.9E-07 |
| 10^{-4} | 2.02740 | 6.9E-09 |
| 10^{-5} | 2.02740 | 6.9E-11 |
| 10^{-6} | 2.02740 | 2.0E-12 |

Tabela 4.4: Resultados referentes ao Exemplo 4.3.2

Código 4.4: eulerm.py

```

1 import numpy as np
2
3 def eulerm(f, t0, y0, h, n):
4     t = t0
5     y = y0
6     for k in range(n):
7         ya = y + h*f(t, y)
8         y += h/2 * (f(t, y) \
9                     + f(t+h, ya))
10        t += h
11    return t, y

```

```

12
13 def f(t, y):
14     return y + np.sin(t)
15
16 # analítica
17 def exata(t):
18     return np.exp(t) - 0.5*np.sin(t) - 0.5*np.cos(t)
19
20 h = 1e-1
21 n = round(1./h)
22 t,y = eulerm(f, 0., 0.5, h, n)
23 print(f'{h:.1e}: {y:.5e} {np.abs(y-exata(1)):.1e}')

```

4.3.2 Método de Runge-Kutta de ordem 4

Um dos métodos de Runge-Kutta mais empregados é o seguinte método de ordem 4:

$$\begin{aligned}
 y^{(0)} &= y_0, \\
 y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \frac{h}{6}(\phi_1 + 2\phi_2 + 2\phi_3 + \phi_4),
 \end{aligned}
 \tag{4.113}$$

com

$$\phi_1 := f(t^{(k)}, y^{(k)}), \tag{4.114a}$$

$$\phi_2 := f(t^{(k)} + h/2, y^{(k)} + h\phi_1/2), \tag{4.114b}$$

$$\phi_3 := f(t^{(k)} + h/2, y^{(k)} + h\phi_2/2), \tag{4.114c}$$

$$\phi_4 := f(t^{(k)} + h, y^{(k)} + h\phi_3), \tag{4.114d}$$

Exemplo 4.3.3. Consideremos o seguinte PVI

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \tag{4.115a}$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \tag{4.115b}$$

Na Tabela 4.5, temos as aproximações $\tilde{y}(1) \approx y(1)$ computadas pelo Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem com diferentes passos h .

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2.02739 | 2.8E-06 |
| 10^{-2} | 2.02740 | 3.1E-10 |
| 10^{-3} | 2.02740 | 3.0E-14 |
| 10^{-4} | 2.02740 | 4.4E-14 |

Tabela 4.5: Resultados referentes ao Exemplo 4.3.3

4.3.3 Exercícios

Exercício 4.3.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + e^{-y^2+1} = 2, 1 < t \leq 2, \quad (4.116)$$

$$y(1) = -1. \quad (4.117)$$

Use os seguintes métodos de Runge-Kutta com passo $h = 0,1$ para computar o valor aproximado de $y(2)$:

- a) Método do Ponto Médio.
- b) Método de Euler Modificado.
- c) Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.

Exercício 4.3.2. (4.91) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + \cos(t) = y, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.118a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.118b)$$

A solução analítica é $y(t) = \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t)$. Faça testes numéricos com $h = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} e 10^{-4} , observe os resultados obtidos e o erro $\varepsilon := |\tilde{y}(1) - y(1)|$, onde \tilde{y} corresponde a solução numérica. Faça testes para:

- a) Método do Ponto Médio.
- b) Método de Euler Modificado.
- c) Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.

O erro tem o comportamento esperado? Justifique sua resposta.

Exercício 4.3.3. Considere os métodos de Runge-Kutta aplicados para computar a solução do PVI (4.91). Para cada um, faça um esboço do gráfico do erro $e(t; h = 10^{-1}) = |\tilde{y}(t) - y(t)|$ e verifique se ele tem a forma esperada conforme a estimativa do erro global (4.73).

Exercício 4.3.4. Mostre que o **Método de Kutta** é $O(h^3)$. Sua iteração é definida por

$$\begin{aligned}y^{(0)} &= y_0, \\y^{(k+1)} &= y^{(k)} + \frac{h}{6} (\phi_1 + 4\phi_2 + \phi_3),\end{aligned}\tag{4.119}$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n$, onde

$$\begin{aligned}\phi_1 &= f(t, y) \\ \phi_2 &= f(t + h/2, y + h\phi_1/2) \\ \phi_3 &= f(t + h, y - h\phi_1 + 2h\phi_2).\end{aligned}\tag{4.120}$$

Aplique-o para o PVI dado no Exercício (4.91) e verifique se o erro global satisfaz a ordem esperada.

Exercício 4.3.5. Considere o seguinte PVI

$$y' = y^2 - ty, \quad 1 < t \leq 2, \tag{4.121a}$$

$$y(1) = -2. \tag{4.121b}$$

Use os seguintes métodos de Runge-Kutta com passo $h = 0.1$ para computar o valor aproximado de $y(2)$:

- a) Método do Ponto Médio.
- b) Método de Euler Modificado.
- c) Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.

Exercício 4.3.6. Considere o seguinte PVI

$$y' - t^2 y = 0, \quad 1 < t \leq 3, \tag{4.122a}$$

$$y(1) = \frac{1}{2}. \tag{4.122b}$$

Use os seguintes métodos de Runge-Kutta com passo $h = 10^{-2}$ para computar o valor aproximado de $y(3)$:

- Método do Ponto Médio.
- Método de Euler Modificado.
- Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.

4.4 Método de Euler Implícito

Seja o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' = f(t, y), t_0 < t \leq t_f, \quad (4.123a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (4.123b)$$

com dados $t_0, t_f \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, sendo a função $y = y(t)$ a incógnita.

Consideramos a discretização no tempo $t^{(k)} := t_0 + hk$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, com passo $h := (t_f - t_0)/n$. De (4.123) e do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$y(t^{(k+1)}) = y(t^{(k)}) + \int_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} f(t, y) dt. \quad (4.124)$$

A integral pode ser aproximada por

$$\int_{t^{(k)}}^{t^{(k+1)}} f(t, y) dt \approx hf(t^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \quad (4.125)$$

donde obtemos

$$y(t^{(k+1)}) \approx y(t^{(k)}) + hf(t^{(k+1)}, y^{(k+1)}). \quad (4.126)$$

Isto nos motiva a **iteração do Método de Euler Implícito**⁸

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= y_0, \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + hf(t^{(k+1)}, y^{(k+1)}), \end{aligned} \quad (4.127)$$

sendo $y^{(k)} \approx y(t^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

⁸Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

Exemplo 4.4.1. Consideremos o seguinte PVI

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.128a)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.128b)$$

Na Tabela 4.6, temos as aproximações $\tilde{y}(1) \approx y(1)$ computadas pelo Método de Euler Implícito com diferentes passos h .

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2.23660 | 2.1E-1 |
| 10^{-2} | 2.04660 | 1.9E-2 |
| 10^{-3} | 2.02930 | 1.9E-3 |
| 10^{-4} | 2.02759 | 1.9E-4 |
| 10^{-5} | 2.02741 | 1.9E-5 |
| 10^{-6} | 2.02740 | 1.9E-6 |

Tabela 4.6: Resultados referentes ao Exemplo 4.4.1

Código 4.5: eulerImp.py

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import fsolve
3
4 def eulerimp(f, t0, y0, h, n):
5     t = t0
6     y = y0
7     for k in range(n):
8         y = fsolve(lambda x:
9                     x - y - h*f(t+h, x),
10                    x0 = y, xtol=1e-14)[0]
11         t += h
12     return t, y
13
14 def f(t, y):
15     return y + np.sin(t)
16
17 # analítica
18 def exata(t):
19     return np.exp(t) - 0.5*np.sin(t) - 0.5*np.cos(t)

```



```

20
21 h = 1e-1
22 n = round(1./h)
23 t,y = eulerimp(f, 0., 0.5, h, n)
24 print(f'{h:.1e}: {y:.5e} {np.abs(y-exata(1)):.1e}')
```

4.4.1 Análise Numérica

O Método de Euler Implícito é $O(h)$. De fato, tomando o polinômio de Taylor

$$y(t) = y(t+h) - hf(t+h, y(t+h)) + O(h^2), \quad (4.129)$$

temos

$$\tau(t, y; h) := \Delta(t, y; h) - \Phi(t, y; h) \quad (4.130)$$

$$= \underbrace{\frac{y(t+h) - y(t)}{h}}_{:=\Delta} - \underbrace{f(t+h, y(t+h); h)}_{:=\Phi} \quad (4.131)$$

$$= O(h). \quad (4.132)$$

Estabilidade

Um método de dito ser estável quando pequenas perturbações na condição inicial produzem pequenas alterações nas aproximações subsequentes, i.e. os resultados dependem continuamente dos dados iniciais.

Exemplo 4.4.2. Consideramos o seguinte PVI

$$y' = -40y, 0 < t \leq 1, \quad (4.133a)$$

$$y(0) = \frac{1}{3}. \quad (4.133b)$$

A solução exata é $y(t) = \frac{1}{5}e^{-40t}$. Na tabela abaixo, temos os resultados obtidos por computações com o Método de Euler (Explícito, \tilde{y}_e) e o Método de Euler Implícito (\tilde{y}_i) para $h = 10^{-1}$ e 10^{-2} .

| h | $ \tilde{y}_e(1) - y(1) $ | $ \tilde{y}_i(1) - y(1) $ |
|-----------|---------------------------|---------------------------|
| 10^{-1} | 2.0E+04 | 3.8E-08 |
| 10^{-2} | 1.4E-18 | 8.1E-16 |

Estabilidade do Euler Explícito

Consideramos o PVI

$$y' = \lambda y, t > 0, \quad (4.134a)$$

$$y(0) = y_0, \quad (4.134b)$$

para dados $\lambda < 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

A iteração do [Método de Euler Explícito](#) para este PVI consiste em

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= y_0, \\ y^{(k+1)} &= y^{(k)} + h\lambda y^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.135)$$

donde temos

$$y^{(k+1)} = (1 + h\lambda)^{k+1} y_0. \quad (4.136)$$

Tendo em vista a solução exata $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$, temos que o erro global é

$$\left| y(t^{(k)}) - y^{(k)} \right| = \left| y_0 e^{\lambda h k} - y_0 (1 + h\lambda)^k \right| \quad (4.137)$$

$$= \left| (e^{\lambda h})^k - (1 + h\lambda)^k \right| |y_0| \quad (4.138)$$

e, portanto, a exatidão é determinada por quão bem $1 + h\lambda$ aproxima $e^{\lambda h}$. Observamos que, para qualquer $\lambda < 0$, $(e^{\lambda h})^k \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, para $y^{(k)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0$, é necessário que $|1 + h\lambda| < 1$, i.e. o passo do Método de Euler fica restrito

$$h < \frac{2}{|\lambda|} \quad (4.139)$$

Supondo um erro de arredondamento δ_0 (apenas) na condição inicial, as aproximações subsequentes do Método de Euler Explícito ficariam

$$y^{(k+1)} = (1 + h\lambda)^{k+1} (y_0 + \delta_0), \quad (4.140)$$

donde temos que

$$\delta^{(k)} = (1 + h\lambda)^k \delta_0 \quad (4.141)$$

é o valor propagado de δ_0 na k -ésima iteração. Ou seja, quando $|1 + h\lambda| > 1$, temos que $\delta^{(k)} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e o método é instável. Concluimos que o [Método de Euler Explícito é estável para](#)

$$h < \frac{2}{|\lambda|}. \quad (4.142)$$

Estabilidade do Euler Implícito

O Método de Euler Implícito é incondicionalmente estável. Para o PVI (4.134), o método produz as aproximações

$$y^{(k)} = (1 - h\lambda)^{-k} y_0. \quad (4.143)$$

Aqui, para qualquer $\lambda < 0$, temos que

$$(1 - h\lambda)^{-k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.144)$$

para qualquer escolha do passo $h > 0$. Isto mostra a estabilidade incondicional do método. Também, o Exercício 4.4.7 mostra que o método é convergente para o PVI (4.134).

4.4.2 Exercícios

Exercício 4.4.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' = 50y + 50, 0 < t \leq 1, \quad (4.145a)$$

$$y(0) = 0, \quad (4.145b)$$

com solução exata $y(t) = e^{50t} - 1$. Use o Método de Euler Implícito com $h = 10^{-1}$ para computar uma aproximação de $y(1)$. Então, verifique a ordem de convergência para diferentes passos $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ e 10^{-4} .

Exercício 4.4.2. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' = -50y + 50, 0 < t \leq 1, \quad (4.149a)$$

$$y(0) = 2, \quad (4.149b)$$

com solução exata $y(t) = 1 + e^{-50t}$. Com $h = 10^{-1}$, compute a aproximação de $y(1)$ dada pelo

a) Método de Euler Explícito.

b) Método de Euler Implícito.

Por que os resultados são tão diferentes entre os métodos? Escolha um passo h em que ambos produzam resultados satisfatórios e justifique sua escolha.

Exercício 4.4.3. Use o Método de Euler Implícito, com $h = 10^{-1}$, para computar aproximações para a solução do PVI discutido no Exemplo 4.1.1. Compare os resultados com aqueles apresentados com o Método de Euler Explícito.

Exercício 4.4.4. O problema de valor inicial

$$y' = \pi [\cos^2(\pi t) - \sin^2(\pi t)], \quad t > 0 \quad (4.150a)$$

$$y(0) = 0. \quad (4.150b)$$

tem solução analítica $y(t) = \sin(\pi t) \cos(\pi t)$. Compute a aproximação $\tilde{y}(1) \approx y(1)$ pelo Método de Euler Implícito com passo $h = 10^{-1}$ e forneça o erro $\varepsilon := |\tilde{y}(1, h) - y(1)|$.

Exercício 4.4.5. Use o Método de Euler Implícito para computar a solução de

$$y' = e^{2t} - 2y, \quad 0 < t \leq 1, \quad (4.151a)$$

$$y(0) = 0. \quad (4.151b)$$

Escolha um passo h adequado de forma que $y(1)$ seja computado com precisão de 5 dígitos significativos.

Exercício 4.4.6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + e^{-y^2+1} = 2, \quad t > 1, \quad (4.152a)$$

$$y(1) = -1. \quad (4.152b)$$

Use o Método de Euler Implícito para computar o valor aproximado de $y(2)$ com precisão de 6 dígitos significativos.

Análise Numérica

Exercício 4.4.7. Mostre que o Método de Euler Implícito é convergente para a solução exata do PVI (4.134) para qualquer $\lambda < 0$.

4.5 Método adaptativo com controle de erro

[[tag:revisar]]

Consideremos um problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0, \quad (4.157)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (4.158)$$

e um método de passo simples

$$y^{(1)} = y_0, \quad (4.159)$$

$$y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) = y^{(i)} + h^{(i+1)}\Phi(t^{(i)}, y^{(i)}; h^{(i+1)}), \quad (4.160)$$

com $t^{(i)} = t_0 + (i - 1)h^{(i)}$. Nesta seção, discutiremos uma estimativa para o maior valor de $h^{(i+1)}$ tal que o erro de discretização global $e(t^{(i+1)}; h^{(i+1)})$ seja controlado por uma dada tolerância TOL , i.e.

$$|e(t^{(i+1)}; h^{(i+1)})| := |y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y(t^{(i+1)})| \approx TOL. \quad (4.161)$$

Para um método de ordem h^p , pode-se mostrar que (veja, [3, Cap. 7, Seç. 7.2])

$$y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) = y(t^{(i+1)}) + e_p(t^{(i+1)})(h^{(i+1)})^p, \quad (4.162)$$

onde $e(t^{(i+1)})$ é uma função apropriada. Então, assumindo que $e(t^{(i)}; h^{(i)}) = 0$, temos

$$e_p(t^{(i+1)}) = h^{(i+1)}e'_p(t^{(i)}) \quad (4.163)$$

e, portanto, para termos (4.161) impomos que

$$|(h^{(i+1)})^{p+1}e'_p(t^{(i)})| = TOL. \quad (4.164)$$

Daí, se obtermos uma aproximação para $e'_p(t^{(i)})$ teremos uma aproximação para o passo $h^{(i+1)}$.

Para estimarmos $e_p(t^{(i+1)})$, observamos que de (4.162) temos

$$y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right) = y(t^{(i+1)}) + e_p(t^{(i+1)})\frac{(h^{(i+1)})^p}{2^p} \quad (4.165)$$

e, então, subtraindo esta de (4.162) temos

$$y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right) = e_p(t^{(i+1)})\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right)^p (2^p - 1), \quad (4.166)$$

donde

$$e_p(t^{(i+1)})\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right)^p = \frac{y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right)}{2^p - 1}. \quad (4.167)$$

Daí, de (4.163), obtemos

$$e'_p(t^{(i)})h^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right)^p = \frac{y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right)}{2^p - 1}, \quad (4.168)$$

o que nos fornece a seguinte aproximação de $e'_p(t^{(i)})$

$$e'_p(t^{(i)}) = \frac{1}{(h^{(i+1)})^{p+1}} \frac{2^p}{2^p - 1} \left[y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right) \right]. \quad (4.169)$$

Assim sendo, de (4.164) temos que o passo $h^{(i+1)}$ apropriado é tal que

$$\frac{2^p}{2^p - 1} \left| y^{(i+1)}(h^{(i+1)}) - y^{(i+1)}\left(\frac{h^{(i+1)}}{2}\right) \right| \approx TOL. \quad (4.170)$$

Com base nesta estimativa podemos propor o seguinte método de passo adaptativo. Partindo de uma escolha arbitrária de h , computamos $y^{(i+1)}(h)$ e $y^{(i+1)}(h/2)$ de $y^{(i)}$. Então, enquanto

$$\frac{2^p}{2^p - 1} \left| y^{(i+1)}(h) - y^{(i+1)}\left(\frac{h}{2}\right) \right| > TOL, \quad (4.171)$$

tomamos sucessivas divisões de h por 2, até satisfazermos (4.170). Obtido o h que satisfaz (4.170), temos computado $y^{(i+1)}$ com $h^{(i+1)} = h$.

Exemplo 4.5.1. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.172)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.173)$$

A Figura 4.2 mostra a comparação entre $y(t)$ e a solução numérica obtida da aplicação do Método de Euler com passo adaptativo. No método, utilizamos o passo inicial $h^{(1)} = 0,1$ e tolerância $TOL = 10^{-4}$. Ao compararmos esta figura com a Figura (4.1) fica evidente o controle do erro.

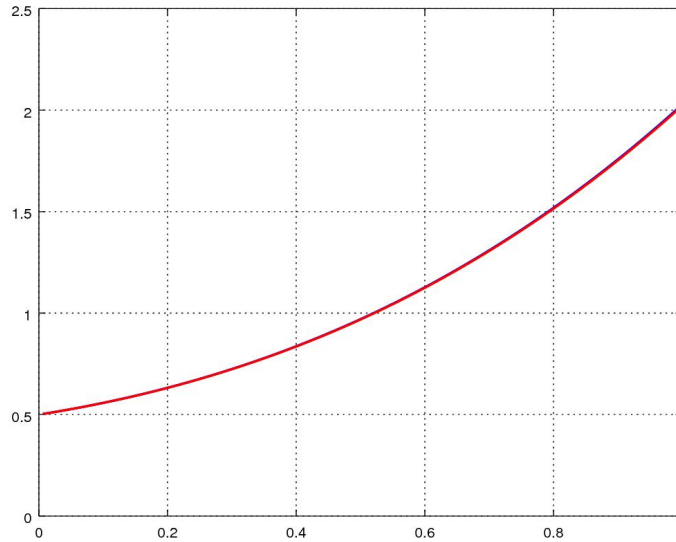


Figura 4.2: Resultados referentes ao Exemplo 4.5.1.

4.5.1 Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 4.5.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + e^{-y^2+1} = 2, \quad t > 1, \quad (4.174)$$

$$y(1) = -1. \quad (4.175)$$

Use o Método de Euler com passo adaptativo para computar o valor aproximado de $y(2)$. Para tanto, utilize o passo inicial $h = 0,1$ e a tolerância de $TOL = 10^{-4}$.

4.6 Métodos de passo múltiplo

[[tag:revisar]]

Dado um problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0, \quad (4.176)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (4.177)$$

temos

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (4.178)$$

De forma mais geral, consideramos uma partição uniforme no tempo $\{t_0 = t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(i)} < \dots < t^{(n)} = t_f\}$, onde t_f é um determinado tempo para o qual queremos computar uma aproximação para $y(t_f)$. Também, denotamos o passo no tempo por $h = (t_f - t_0)/n$. Com isso, a solução $y(t)$ satisfaz

$$y(t^{(i+k)}) = y(t^{(i-j)}) + \int_{t^{(i-j)}}^{t^{(i+k)}} f(s, y(s)) ds. \quad (4.179)$$

A ideia é, então, aproximar a integral acima por uma quadratura numérica.

Seguindo as regras de Newton-Cotes (veja, Cap. 3 Seção 3.1), escolhemos os nodos da quadratura como $x_l = t^{(i-l+1)}$, $l = 1, 2, \dots, m$, e, então

$$\int_{t^{(i-j)}}^{t^{(i+k)}} f(x, y(x)) dx \approx \sum_{l=1}^m f(x_l, y(x_l)) w_l, \quad (4.180)$$

e

$$w_l = \int_{t^{(i-j)}}^{t^{(i+k)}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^m \frac{x - x_p}{x_l - x_p} dx. \quad (4.181)$$

Agora, fazendo a mudança de variável $u = (x - t^{(i)})/h$, obtemos

$$w_l = h \int_{-j}^k \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^m \frac{u + p - 1}{-l + p} du \quad (4.182)$$

Assim sendo, temos o seguinte esquema numérico

$$y^{(i+k)} = y^{(i-j)} + h \sum_{l=1}^m c_l f(t^{(i-l+1)}, y^{(i-l+1)}), \quad (4.183)$$

onde

$$c_l = \int_{-j}^k \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq l}}^m \frac{s + p - 1}{-l + p} ds. \quad (4.184)$$

Diferentes escolhas de j , k e m não fornecem diferentes métodos. Observamos, ainda, que a ordem de um tal método de passo múltiplo é determinada pela ordem de truncamento da quadratura numérica usada (veja, por exemplo, [?, Cap. 5, Seç. 5.6]).

4.6.1 Métodos de Adams-Bashforth

[[tag:revisar]]

Métodos de Adams-Bashforth são métodos de passo múltiplo obtidos ao escolhermos $j = 0$ e $k = 1$ no esquema numérico (4.183). Com isso, ao escolhermos m obtemos um método de ordem $O(h^m)$ [?, Cap. 5, Seç. 5.6].

Método de Adams-Bashforth de ordem 2

[[tag:revisar]]

Tomando $m = 2$ em (4.184), temos

$$c_1 = \int_0^1 s + 1 \, ds = \frac{3}{2} \quad (4.185)$$

e

$$c_2 = \int_0^1 -s \, ds = -\frac{1}{2}. \quad (4.186)$$

Então, de (4.183) temos a iteração do **método de Adams-Bashforth de 2 passos**:

$$y^{(1)} = y_0, \quad (4.187)$$

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{h}{2} [3f(t^{(i)}, y^{(i)}) - f(t^{(i-1)}, y^{(i-1)})], \quad (4.188)$$

com $t^{(i)} = t_0 + (i - 1)h$.

Exemplo 4.6.1. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.189)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.190)$$

Na Tabela 4.7, temos as aproximações $\tilde{y}(1)$ de $y(1)$ computadas pelo método de Adams-Bashforth de 2 passos. Como este método é de ordem 2, escolhemos inicializá-lo pelo método do ponto médio, de forma a mantermos a consistência.

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2,01582 | 1,2E-02 |
| 10^{-2} | 2,02727 | 1,3E-04 |
| 10^{-3} | 2,02739 | 1,3E-06 |
| 10^{-4} | 2,02740 | 1,3E-08 |
| 10^{-5} | 2,02740 | 1,3E-10 |

Tabela 4.7: Resultados referentes ao Exemplo 4.6.1

Método de Adams-Bashforth de ordem 3

[[tag:revisar]]

Tomando $m = 3$ em (4.184) obtemos, de (4.183), a iteração do **método de Adams-Bashforth de 3 passos**:

$$y^{(1)} = y_0, \quad (4.191)$$

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{h}{12} \left[23f(t^{(i)}, y^{(i)}) - 16f(t^{(i-1)}, y^{(i-1)}) + 5f(t^{(i-2)}, y^{(i-2)}) \right], \quad (4.192)$$

com $t^{(i)} = t_0 + (i - 1)h$.

Exemplo 4.6.2. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.193)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.194)$$

Na Tabela 4.8, temos as aproximações $\tilde{y}(1)$ de $y(1)$ computadas pelo método de Adams-Bashforth de 3 passos. Como este método é de ordem 3, escolhemos inicializá-lo pelo método de Runge-Kutta de ordem 4, de forma a garantirmos a consistência.

Método de Adams-Bashforth de ordem 4

[[tag:revisar]]

Tomando $m = 4$ em (4.184) obtemos, de (4.183), a iteração do **método de Adams-Bashforth de 4 passos**:

$$y^{(1)} = y_0, \quad (4.195)$$

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2,02696 | 4,3E-04 |
| 10^{-2} | 2,02739 | 5,9E-07 |
| 10^{-3} | 2,02740 | 6,1E-10 |
| 10^{-4} | 2,02740 | 6,6E-13 |

Tabela 4.8: Resultados referentes ao Exemplo 4.6.2

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \frac{h}{24} \left[55f(t^{(i)}, y^{(i)}) - 59f(t^{(i-1)}, y^{(i-1)}) + 37f(t^{(i-2)}, y^{(i-2)}) - 9f(t^{(i-3)}, y^{(i-3)}) \right], \quad (4.196)$$

com $t^{(i)} = t_0 + (i - 1)h$.

Exemplo 4.6.3. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$y' - y = \sin(t), t > 0 \quad (4.197)$$

$$y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.198)$$

Na Tabela 4.9, temos as aproximações $\tilde{y}(1)$ de $y(1)$ computadas pelo método de Adams-Bashforth de 4 passos. Como este método é de ordem 3, escolhemos inicializá-lo pelo método de Runge-Kutta de ordem 4, de forma a mantermos a consistência.

| h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-----------|----------------|-------------------------|
| 10^{-1} | 2,02735 | 5,0E-05 |
| 10^{-2} | 2,02740 | 7,7E-09 |
| 10^{-3} | 2,02740 | 7,9E-13 |

Tabela 4.9: Resultados referentes ao Exemplo 4.6.3

4.6.2 Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 4.6.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' + e^{-y^2+1} = 2, \quad t > 1, \quad (4.199)$$

$$y(1) = -1. \quad (4.200)$$

Inicializando pelo Método de Euler, use os seguintes métodos de passo múltiplo com $h = 0,1$ para computar o valor aproximado de $y(2)$:

- a) método de Adams-Bashforth de ordem 2.
- b) método de Adams-Bashforth de ordem 3.
- c) método de Adams-Bashforth de ordem 4.

Capítulo 5

Problema de valor de contorno

[[tag:revisar]]

Neste capítulo, discutimos sobre a aplicação do método de diferenças finitas para aproximar a solução de problemas de valores de contorno da forma

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = f(x), \quad c_1 < x < c_2, \quad (5.1)$$

$$\eta_1 u'(c_1) + \theta_1 u(c_1) = g_1 \quad (5.2)$$

$$\eta_2 u'(c_2) + \theta_2 u(c_2) = g_2 \quad (5.3)$$

onde a incógnita $u = u(x)$ e os são dados os coeficientes $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ e a função $f(x)$. Nas condições de contorno, são dados os coeficientes η_1 e θ_1 não simultaneamente nulos, bem como, os coeficientes η_2 e θ_2 , também, não simultaneamente nulos.

5.1 Método de diferenças finitas

[[tag:revisar]]

Consideramos o seguinte problema linear de valor de contorno

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = f(x), \quad c_1 < x < c_2, \quad (5.4)$$

$$\eta_1 u'(c_1) + \theta_1 u(c_1) = g_1 \quad (5.5)$$

$$\eta_2 u'(c_2) + \theta_2 u(c_2) = g_2 \quad (5.6)$$

onde a incógnita $u = u(x)$ e os são dados os coeficientes $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ e a função $f(x)$. Nas condições de contorno, são dados os coeficientes η_1 e θ_1 não simultaneamente nulos, bem como, os coeficientes η_2 e θ_2 , também, não simultaneamente nulos.

A aproximação pelo método de diferenças finitas de (5.4)-(5.6) surge da substituição das derivadas por fórmulas de diferenças finitas. Isto requer a a prévia discretização do domínio do problema. Mais precisamente, a aplicação do método de diferenças finitas envolve três procedimentos básicos: 1. discretização do domínio, 2. discretização das equações, 3. resolução do problema discreto.

1. Discretização do domínio

A discretização do domínio refere-se ao particionamento do mesmo em pontos espaçados uniformemente ou não. Aqui, para mantermos a simplicidade, vamos considerar apenas o caso de um particionamento uniforme. Desta forma, escolhemos o número n de pontos da partição e, então, o passo é dado por

$$h = \frac{c_2 - c_1}{n - 1}, \quad (5.7)$$

e os pontos da partição podem ser indexados da seguinte forma

$$x_i = c_1 + (i - 1)h. \quad (5.8)$$

2. Discretização das equações

Começando pela equação (5.4), no ponto $x = x_i$ temos

$$\alpha(x_i)u''(x_i) + \beta(x_i)u'(x_i) + \gamma(x_i)u(x_i) = f(x_i) \quad (5.9)$$

para $i = 2, 3, \dots, n - 1$. Podemos substituir a segunda derivada de u pela fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 , i.e.

$$u''(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}}_{D_{0,h^2}^2 u(x_i)} + O(h^2). \quad (5.10)$$

A primeira derivada de u também pode ser substituída pela fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 , i.e.

$$u'(x_i) = \underbrace{\frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}}_{D_{0,h^2} u(x_i)} + O(h^2). \quad (5.11)$$

Agora, denotando $u_i \approx u(x_i)$, temos $u_{i-1} \approx u(x_i - h)$ e $u_{i+1} \approx u(x_i + h)$. Então, substituindo as derivadas pelas fórmulas de diferenças finitas acima na equação (5.9), obtemos

$$\alpha(x_i) \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \right) + \beta(x_i) \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + \gamma(x_i)u_i + O(h^2) = f(x_i), \quad (5.12)$$

para $i = 2, 3, \dots, n-1$. Rearranjando os termos e desconsiderando o termo do erro de truncamento, obtemos o seguinte sistema discreto de equações lineares

$$\left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} - \frac{\beta(x_i)}{2h} \right) u_{i-1} + \left(\gamma(x_i) - \frac{2\alpha(x_i)}{h^2} \right) u_i + \left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} + \frac{\beta(x_i)}{2h} \right) u_{i+1} = f(x_i), \quad (5.13)$$

para $i = 2, 3, \dots, n-1$. Observe que este sistema consiste em $n-2$ equações envolvendo as n incógnitas u_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Para fechá-lo, usamos as condições de contorno.

Usando a fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem h^2 para a derivada $u'(c_1)$ temos

$$u'(c_1) = \frac{-3u(c_1) + 4u(c_1 + h) - u(c_1 + 2h)}{2h} + O(h^2). \quad (5.14)$$

Então, observando que c_1 corresponde ao ponto x_1 na partição do domínio, temos $u_1 \approx u(c_1)$, $u_2 = u(c_1 + h)$ e $u_3 = u(c_1 + 2h)$ e, portanto de (5.5) temos

$$\eta_1 \left(\frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h} \right) + \theta_1 u_1 + O(h^2) = g_1. \quad (5.15)$$

Então, desconsiderando o termo do erro de truncamento, obtemos a seguinte equação discreta

$$\left(\theta_1 - \frac{3\eta_1}{2h} \right) u_1 + \frac{2\eta_1}{h} u_2 - \frac{\eta_1}{2h} u_3 = g_1. \quad (5.16)$$

Procedendo de forma análoga para a condição de contorno (5.6), usamos a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem h^2 para a derivada $u'(c_2)$,

i.e.

$$u'(c_2) = \frac{3u(c_2) - 4u(c_2 - h) + u(c_2 - 2h)}{2h} + O(h^2). \quad (5.17)$$

Aqui, temos $u_n \approx u(c_2)$, $u_{n-1} \approx u(c_2 - h)$ e $u_{n-2} \approx u(c_2 - 2h)$, e de (5.6) obtemos

$$\eta_2 \left(\frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h} \right) + \theta_2 u_n + O(h^2) = g_2. \quad (5.18)$$

Então, desconsiderando o termo do erro de truncamento, obtemos

$$\frac{\eta_2}{2h} u_{n-2} - \frac{2\eta_2}{h} u_{n-1} + \left(\theta_2 + \frac{3\eta_2}{2h} \right) u_n = g_2. \quad (5.19)$$

Por fim, as equações (5.16)-(5.19) formam o seguinte problema discretizado pelo método de diferenças finitas

$$\left(\theta_1 - \frac{3\eta_1}{2h} \right) u_1 + \frac{2\eta_1}{h} u_2 - \frac{\eta_1}{2h} u_3 = g_1. \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} - \frac{\beta(x_i)}{2h} \right) u_{i-1} + \left(\gamma(x_i) - \frac{2\alpha(x_i)}{h^2} \right) u_i \\ & + \left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} + \frac{\beta(x_i)}{2h} \right) u_{i+1} = f(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\frac{\eta_2}{2h} u_{n-2} - \frac{2\eta_2}{h} u_{n-1} + \left(\theta_2 + \frac{3\eta_2}{2h} \right) u_n = g_2. \quad (5.22)$$

3. Resolução do problema discreto

O problema discreto (5.20)-(5.22) consiste em um sistema linear de n equações com n incógnitas. Na forma matricial temos

$$A\tilde{u} = b \quad (5.23)$$

onde $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ é o vetor das incógnitas, b é o vetor dos termos constantes $b = (g_1, f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{n-1}), g_2)$ e A é a matriz dos coeficientes. Observamos que os coeficientes não nulos da matriz A são:

$$a_{11} = \left(\theta_1 - \frac{3\eta_1}{2h} \right), \quad (5.24)$$

$$a_{12} = \frac{2\eta_1}{h}, \quad (5.25)$$

$$a_{13} = -\frac{\eta_1}{2h}, \quad (5.26)$$

$$a_{i,i-1} = \left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} - \frac{\beta(x_i)}{2h} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.27)$$

$$a_{i,i} = \left(\gamma(x_i) - \frac{2\alpha(x_i)}{h^2} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.28)$$

$$a_{i,i+1} = \left(\frac{\alpha(x_i)}{h^2} + \frac{\beta(x_i)}{2h} \right), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.29)$$

$$a_{n,n-2} = \frac{\eta_2}{2h}, \quad (5.30)$$

$$a_{n,n-1} = -\frac{2\eta_2}{h}, \quad (5.31)$$

$$a_{n,n} = \left(\theta_2 + \frac{3\eta_2}{2h} \right). \quad (5.32)$$

Com isso em mente, a matriz A tem a seguinte estrutura

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & \\ & & & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} & \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

A resolução do sistema discreto se resume, então, a resolver o sistema $A\tilde{u} = b$, o que pode ser feito por qualquer método numérica apropriada.

Exemplo 5.1.1. Consideremos o seguinte problema de valor de contorno

$$-u'' = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (5.34)$$

$$u(0) = 0, \quad (5.35)$$

$$u(2) = \sin(2). \quad (5.36)$$

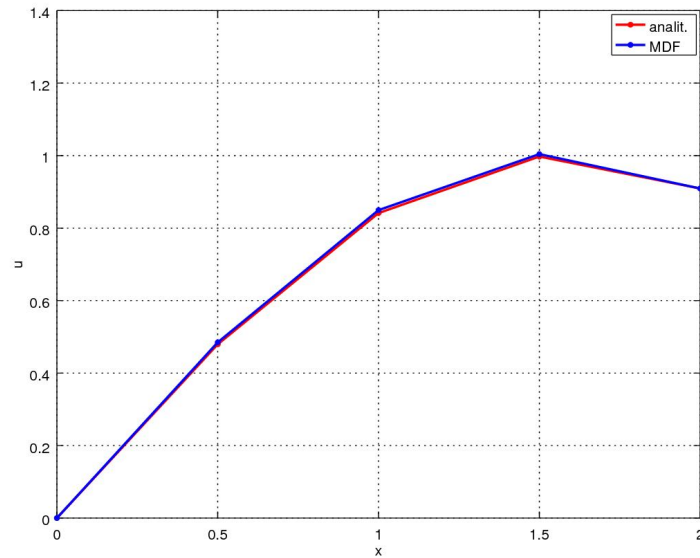


Figura 5.1: Resultado referente ao Exemplo 5.1.1.

A solução analítica deste problema é $u(x) = \sin(x)$. Agora, usando a abordagem pelo método de diferenças finitas abordado nesta seção, obtemos o seguinte problema discreto

$$u_1 = 0, \quad (5.37)$$

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = \sin(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.38)$$

$$u_n = \sin(2), \quad (5.39)$$

onde $h = \pi/(n-1)$ e $x_i = (i-1)h$.

| h | n | $\ \tilde{u} - u\ _{L^2}$ |
|-----------|------|---------------------------|
| 10^{-1} | 21 | 1,0E-03 |
| 10^{-2} | 201 | 3,3E-05 |
| 10^{-3} | 2001 | 1,0E-06 |

Tabela 5.1: Resultados referentes ao Exemplo 5.1.1.

Resolvendo este sistema com $h = 0,5$ obtemos a solução numérica apresentada na Figura 5.1. Ainda, na Tabela 5.1 temos a comparação na norma L^2 da

solução numérica $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ com a solução analítica $u(x) = \sin(x)$ para diferentes escolhas de h .

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 5.1.1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$-u'' + u' = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (5.40)$$

$$u(-1) = 0, \quad (5.41)$$

$$u'(1) = 0, \quad (5.42)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Use uma aproximação adequada pelo método de diferenças finitas para obter o valor aproximado de $u(0)$ com precisão de 2 dígitos significativos.

Capítulo 6

Equações Diferenciais Parciais

[[tag:revisar]]

Neste capítulo, discutimos alguns tópicos fundamentais da aplicação do método de diferenças finitas para a simulação (aproximação da solução) de equações diferenciais parciais.

6.1 Equação de Poisson

[[tag:revisar]]

A equação de Poisson em um domínio retangular $D = (x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}}) \times (y_{\text{ini}}, y_{\text{fin}})$ com condições de contorno de Dirichlet homogêneas refere-se o seguinte problema

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), (x, y) \in D, \quad (6.1)$$

$$u(x_{\text{ini}}, y) = 0, y_{\text{ini}} \leq y \leq y_{\text{fin}}, \quad (6.2)$$

$$u(x_{\text{fin}}, y) = 0, y_{\text{ini}} \leq y \leq y_{\text{fin}}, \quad (6.3)$$

$$u(x, y_{\text{ini}}) = 0, x_{\text{ini}} \leq x \leq x_{\text{fin}}, \quad (6.4)$$

$$u(x, y_{\text{fin}}) = 0, x_{\text{ini}} \leq x \leq x_{\text{fin}}, \quad (6.5)$$

onde $u = u(x, y)$ é a incógnita.

A aplicação do método de diferenças finitas para resolver este problema consiste dos mesmos passos usados para resolver problemas de valores de

contorno (veja Capítulo 5), a saber: 1. construção da malha, 2. discretização das equações, 3. resolução do problema discreto.

1. Construção da malha

Tratando-se do domínio retangular $\bar{D} = [x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}}] \times [y_{\text{ini}}, y_{\text{fin}}]$, podemos construir uma malha do produto cartesiano de partições uniformes dos intervalos $[x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}}]$ e $[y_{\text{ini}}, y_{\text{fin}}]$. Mais explicitamente, tomamos

$$x_i := x_{\text{ini}} + (i - 1)h_x, \quad h_x = \frac{x_{\text{fin}} - x_{\text{ini}}}{n_x - 1}, \quad (6.6)$$

$$y_j := y_{\text{ini}} + (j - 1)h_y, \quad h_y = \frac{y_{\text{fin}} - y_{\text{ini}}}{n_y - 1}, \quad (6.7)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n_x$, $j = 1, 2, \dots, n_y$, sendo n_x e n_y o número de subintervalos escolhidos para as partições em x e y , respectivamente.

O produto cartesiano das partições em x e y nos fornece uma partição do domínio \bar{D} da forma

$$P(\bar{D}) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_i, y_j), \dots, (x_{n_x}, y_{n_y})\}, \quad (6.8)$$

cujos nodos (x_i, y_j) podem ser indexados (enumerados) por $k = j + (i - 1)n_x$. Por simplicidade, no decorrer do texto, assumiremos $n_x = n_y =: n$ e, por conseguinte, $h_x = h_y = h$.

2. Discretização das equações

Usando a fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 para a segunda derivada, temos

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2} + O(h^2), \quad (6.9)$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)}{h^2} + O(h^2). \quad (6.10)$$

Daí, denotando $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ temos

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad (6.11)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2). \quad (6.12)$$

Então, da equação 6.1 temos

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2) = f(x_i, y_j). \quad (6.13)$$

Adora, denotando $u_k := u_{j+(i-1)n}$, desprezando o termo do erro de truncamento e rearranjando os termos nesta última equação temos

$$\frac{1}{h^2}u_{k-n} + \frac{1}{h^2}u_{k-1} - \frac{4}{h^2}u_k + \frac{1}{h^2}u_{k+1} + \frac{1}{h^2}u_{k+n} = f(x_i, y_j), \quad (6.14)$$

para $i, j = 2, 3, \dots, n-1$. Isto é, esta última expressão nos fornece um sistema de $(n-2)^2$ equações para n^2 incógnitas u_k .

Para fechar o sistema, usamos as condições de contorno (6.2)-(6.5):

$$u_{1,j} = 0, \quad u_{n,j} = 0, \quad (6.15)$$

$$u_{i,1} = 0, \quad u_{i,n} = 0, \quad (6.16)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Com isso, o problema discreto obtido da aplicação do método de diferenças finitas consiste no sistema linear de n^2 equações (6.14)-e(6.16) para as n^2 incógnitas u_k , $k = 1, 2, \dots, n^2$.

3. Resolução do problema discreto

O problema discreto (6.14)-(6.16) pode ser escrito na forma matricial

$$A\tilde{u} = b, \quad (6.17)$$

onde o vetor da incógnitas é $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n^2})$ e o vetor dos termos constantes b é tal que

$$i = 1, n, j = 1, 2, \dots, n : b_k = 0, \quad (6.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, n : b_k = 0, \quad (6.19)$$

$$i, j = 2, 3, \dots, n-1 : b_k = f(x_i, y_j). \quad (6.20)$$

Além disso, a matriz dos coeficientes A é tal que

$$i = 1, n, j = 1, 2, \dots, n : a_{k,k} = 1, \quad (6.21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, n : a_{k,k} = 1, \quad (6.22)$$

$$i, j = 2, 3, \dots, n-1 : a(k, k-n) = \frac{1}{h^2}, \quad (6.23)$$

$$a(k, k-1) = \frac{1}{h^2}, \quad (6.24)$$

$$a(k, k) = -\frac{4}{h^2}, \quad (6.25)$$

$$a(k, k+1) = \frac{1}{h^2}, \quad (6.26)$$

$$a(k, k+n) = \frac{1}{h^2}. \quad (6.27)$$

Assim sendo, basta empregarmos um método apropriado para resolver o sistema linear (6.17) para obter a solução aproximada de u nos nodos (x_i, y_j) .

Exemplo 6.1.1. Consideremos o seguinte problema

$$u_{xx} + u_{yy} = -\sin(x)\sin(y), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), \quad (6.28)$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (6.29)$$

$$u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \quad (6.30)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (6.31)$$

$$u(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (6.32)$$

A Figura 6.1 mostra um esboço do gráfico da solução aproximada obtida pelo método de diferenças finitas apresentado acima (equações (6.14)-(6.16)) com $n = 11$, i.e. $h = \pi/10$.

| n | $\ \tilde{u} - u\ _{L^2}$ |
|-----|---------------------------|
| 6 | 4,2E-2 |
| 11 | 2,1E-2 |
| 21 | 1,0E-2 |
| 41 | 5,1E-3 |
| 81 | 2,6E-3 |

Tabela 6.1: Resultados referentes ao Exemplo 6.1.1.

Na Tabela 6.1 temos a norma L^2 da diferença entre a solução aproximada \tilde{u} e a solução analítica $u(x, y) = 0,5 \sin(x) \sin(y)$ nos pontos de malha computados com diferentes escolhas de n .

Os resultados obtidos neste exemplo podem ser obtidos no GNU Octave com o seguinte código:

Notas de Aula - Pedro Konzen */* Licença CC-BY-SA 4.0

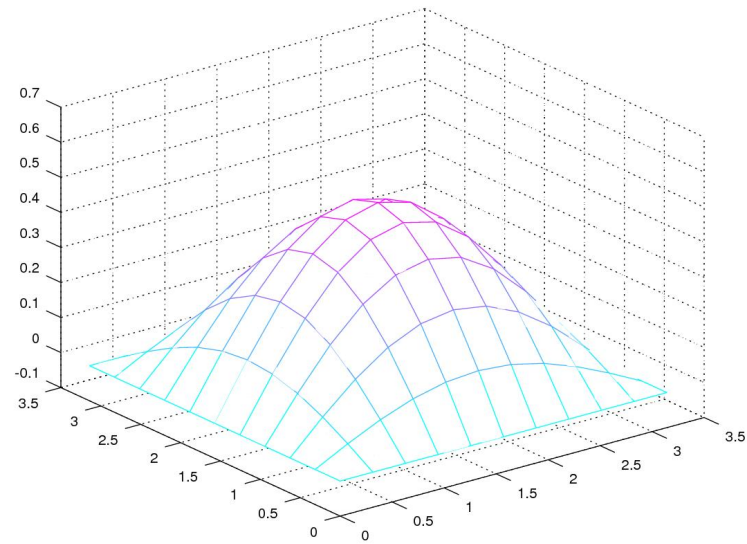


Figura 6.1: Resultado referente ao Exemplo 6.1.1.

```
#params
n=11;
h=pi/(n-1);

#fonte
f = @(x,y) -sin(x).*sin(y);

#malha
x = linspace(0,pi,n);
y = linspace(0,pi,n);

#sistema MDF
A = sparse(n*n,n*n);
b = zeros(n*n,1);

#cc x=0 e x=pi
for i=[1,n]
    for j=1:n
```



```
        k = i + (j-1)*n;
        A(k,k)=1;
        b(k) = 0;
    endfor
endfor

#cc y=0, y=pi
for j=[1,n]
    for i=1:n
        k = i + (j-1)*n;
        A(k,k)=1;
        b(k) = 0;
    endfor
endfor

#nodos internos
for i=2:n-1
    for j=2:n-1
        k = i + (j-1)*n;
        A(k,k-n) = 1/h^2;
        A(k,k-1) = 1/h^2;
        A(k,k) = -4/h^2;
        A(k,k+1) = 1/h^2;
        A(k,k+n) = 1/h^2;

        b(k) = f(x(i),y(j));
    endfor
endfor

u = A\b;

#visu
z = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        k = i + (j-1)*n;
        z(i,j) = u(k);
    endfor
```

```

endfor
colormap("cool")
mesh(x,y,z)

ua = zeros(n*n,1);
for i=1:n
    for j=1:n
        k=i+(j-1)*n;
        ua(k) = 0.5*sin(x(i))*sin(y(j));
    endfor
endfor
printf("%d %1.5E %1.1E\n",n,h,norm(u-ua))

```

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 6.1.1.

$$-(u_{xx} + u_{yy}) = f(x), (x, y) \in (0, 1)^2, \quad (6.33)$$

$$u(0, y) = 0, y \in [0, 1], \quad (6.34)$$

$$u(1, y) = 0, y \in [0, 1], \quad (6.35)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, x \in [0, 1], \quad (6.36)$$

$$u(x, 1) = 0, x \in [0, 1]. \quad (6.37)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0,5 \\ 0 & , x > 0,5 \end{cases} \quad (6.38)$$

Use uma aproximação adequada pelo método de diferenças finitas para obter o valor aproximado de $u(0,5, 0,5)$ com precisão de 2 dígitos significativos.

6.2 Equação do calor

[[tag:revisar]]

A equação do calor definida em $D = (x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}})$ com condição inicial dada e condições de contorno de Dirichlet homogêneas refere-se o seguinte problema

$$u_t - \alpha u_{xx} = f(t, x), \quad t > t_0, \quad x \in D, \quad (6.39)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad x \in D, \quad (6.40)$$

$$u(t, x_{\text{ini}}) = 0, \quad t > t_0, \quad (6.41)$$

$$u(t, x_{\text{fin}}) = 0, \quad t > t_0 \quad (6.42)$$

onde $u = u(t, x)$ é a incógnita.

O problema acima é um problema de valor inicial com condições de contorno. Uma das estratégias numéricas de solução é o chamado método de Rothe, o qual trata separadamente as discretizações espacial e temporal. Aqui, vamos começar pela discretização espacial e, então, trataremos a discretização temporal.

Discretização espacial

Na discretização espacial, aplicaremos o método de diferenças finitas. Começamos considerando uma partição do domínio $P(\overline{D}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com pontos $x_i = x_{\text{ini}} + (i - 1)h$ igualmente espaçados por $h = (x_{\text{fin}} - x_{\text{ini}})$. Então, denotando $u_i = u_i(t) \approx u(t, x_i)$ e usando da fórmula de diferenças finitas central de ordem h^2 para as derivadas segundas na equação (6.39), temos

$$\frac{d}{dt} u_i - \alpha \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(t, x_i), \quad (6.43)$$

para $i = 2, 3, \dots, n - 1$. Agora, das condições de contorno, temos $u_1 = 0$ e $u_n = 0$, donde obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d}{dt} u_2 = -\frac{2\alpha}{h^2} u_2 + \frac{\alpha}{h^2} u_3 + f(t, x_2), \quad (6.44)$$

$$\frac{d}{dt} u_i = \frac{\alpha}{h^2} u_{i-1} - \frac{2\alpha}{h^2} u_i + \frac{\alpha}{h^2} u_{i+1} + f(t, x_i), \quad (6.45)$$

$$\frac{d}{dt} u_{n-1} = \frac{\alpha}{h^2} u_{n-2} - \frac{2\alpha}{h^2} u_{n-1} + f(t, x_{n-1}), \quad (6.46)$$

$$(6.47)$$

onde $i = 3, 4, \dots, n - 2$ e com condições iniciais dadas por (6.40), i.e.

$$u_j(t_0) = u_0(x), \quad j = 2, 3, \dots, n - 1. \quad (6.48)$$

Ainda, observamos que o sistema (6.44) pode ser escrito de forma mais compacta como

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = A\tilde{u} + \tilde{f}, \quad (6.49)$$

onde $\tilde{u}(t) = (u_2(t), u_3(t), \dots, u_{n-1}(t))$, $\tilde{f}(t) = (f(t, x_2), f(t, x_3), \dots, f(t, x_{n-1}))$ e A é uma matriz $(n-2) \times (n-2)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2\alpha}{h^2} & \frac{\alpha}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{h^2} & -\frac{2\alpha}{h^2} & \frac{\alpha}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{h^2} & -\frac{2\alpha}{h^2} & \frac{\alpha}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{h^2} & -\frac{2\alpha}{h^2} \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

Discretização temporal

Aqui, vamos usar o método de Euler (veja, ??) para aproximar a solução de (6.50)-(6.48). Para tanto, escolhemos um passo de tempo $h_t > 0$ e denotamos $t^{(k)} = t_0 + (k-1)h_t$, $\tilde{u}^{(k)} \approx \tilde{u}(t^{(k)})$ e $\tilde{f}^{(k)} = \tilde{f}(t^{(k)})$. Com isso, a iteração do método de Euler nos fornece

$$\tilde{u}^{(1)} = \tilde{u}_0 \quad (6.51)$$

$$\tilde{u}^{(k+1)} = \tilde{u}^{(k)} + h_t (A\tilde{u}^{(k)} + \tilde{f}^{(k)}), \quad (6.52)$$

com $k = 1, 2, \dots$. Equivalentemente, escrevemos

$$\tilde{u}^{(1)} = \tilde{u}_0 \quad (6.53)$$

$$\tilde{u}^{(k+1)} = (I - h_t A) \tilde{u}^{(k)} + h_t \tilde{f}^{(k)}. \quad (6.54)$$

Observação 6.2.1. O esquema numérico acima é **condicionalmente estável**. Pode-se mostrar a seguinte condição de estabilidade [?, Cap. 12, Seq. 2]:

$$\alpha \frac{h_t}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (6.55)$$

Exemplo 6.2.1. Consideremos o seguinte problema

$$u_t - u_{xx} = \sin(x), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (6.56)$$

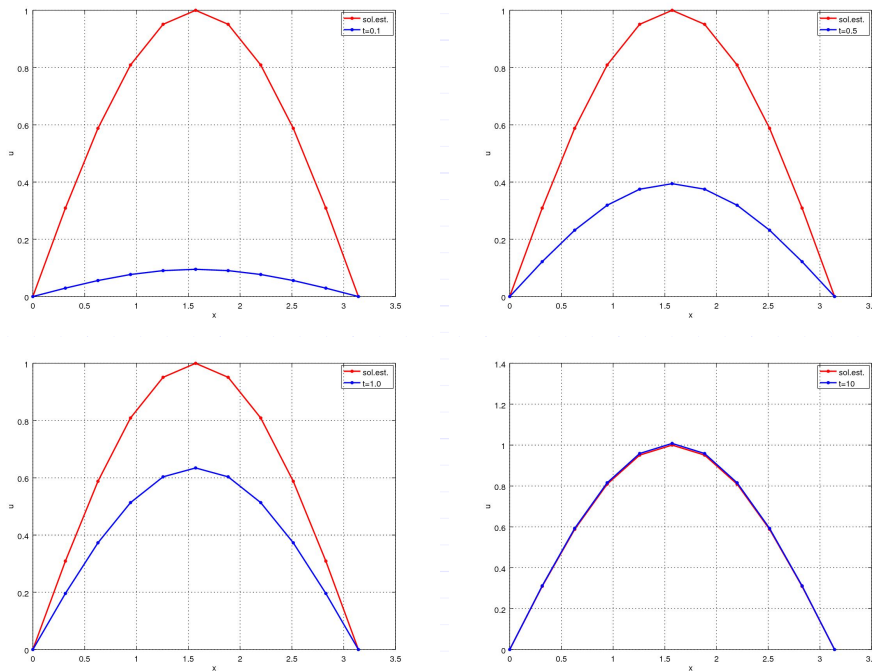


Figura 6.2: Resultados referentes ao Exemplo 6.2.1.

$$u(0,x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (6.57)$$

$$u(t,0) = 0, \quad t > 0 \quad (6.58)$$

$$u(t,\pi) = 0, \quad t > 0. \quad (6.59)$$

Este problema tem solução estacionário $u(x) = \sin(x)$. Na Figura 6.2, temos o esboço das soluções numéricas em diferentes tempos t usando o esquema numérico acima com $h = 10^{-1}$ e $h_t = 10^{-3}$.

No GNU Octave, podemos computar os resultados discutidos neste exemplo com o seguinte código:

```
#params
n=11;
h=pi/(n-1);

tf=1;
ht=10^-3;
```

```
nt=round(tf/ht)+1;

#fonte
f = @(x) sin(x);

#malha
t=[0:ht:(nt-1)*ht]';
x=[0:h:(n-1)*h]';

#matriz MDF
A = sparse(n-2,n-2);
A(1,1)=-2/h^2;
A(1,2)=1/h^2;
for i=2:n-3
    A(i,i-1)=1/h^2;
    A(i,i)=-2/h^2;
    A(i,i+1)=1/h^2;
endfor
A(n-2,n-3)=1/h^2;
A(n-2,n-2)=-2/h^2;

#c.i.
u=zeros(n,1);

#iter. de Euler
for k=1:nt-1
    u(2:n-1)=u(2:n-1)+ht*(A*u(2:n-1)+f(x(2:n-1)));
endfor

#visu
uest = @(x) sin(x);
plot(x,uest(x),'r.-',...
     x,u,'b.-');grid
xlabel('x');
ylabel('u');
legend('sol.est.','sol.num.');
```

Exercícios

[[tag:revisar]]

Exercício 6.2.1. Considere o seguinte problema

$$u_t - u_{xx} = f(x), \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.60)$$

$$u(0, x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6.61)$$

$$u(t, 0) = 1, \quad t > 0 \quad (6.62)$$

$$u(t, 1) = 0, \quad t > 0. \quad (6.63)$$

com

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0,5, \\ 0 & , x > 0,5 \end{cases} \quad (6.64)$$

Use o método de diferenças finitas para obter uma aproximação de $u(1, 0.5)$ com dois dígitos significativos de precisão.

6.3 Equação da onda

[[tag:revisar]]

A equação da onda definida em $D := (x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}})$ com condições iniciais dadas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas refere-se o seguinte problema

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, \quad t > t_0, \quad x \in D, \quad (6.65)$$

$$u(x, t_0) = f(x), \quad x \in D, \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = g(x), \quad x \in D, \quad (6.67)$$

$$u(x_{\text{ini}}, t) = 0, \quad t > t_0, \quad (6.68)$$

$$u(x_{\text{fin}}, t) = 0, \quad t > t_0 \quad (6.69)$$

onde $u = u(x, t)$ é a incógnita.

Aqui, para aplicarmos o método de diferenças finitas, vamos escolher os tempos $t^{(j)} = t_0 + (j - 1)h_t$, $j = 1, 2, \dots, n_t$, com passo temporal $h_t > 0$, e

os pontos $x_i = x_{\text{ini}} + (i - 1)h_x$, $i = 1, 2, \dots, n_x$, com passo no espaço espacial $h_x = (x_{\text{fin}} - x_{\text{ini}})/(n_x - 1)$.

Da escolha das discretizações temporal e espacial, podemos usar a fórmula de diferenças finitas de ordem 2 para discretizarmos a equação (6.65). Para tanto, denotamos $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$ e de (6.65) temos

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_t^2} - \alpha \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = 0, \quad (6.70)$$

para $j = 2, 3, \dots, n_t - 1$ e $i = 2, 3, \dots, n_x - 1$. Rearranjando os termos, temos

$$u_{i,j+1} = \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{i-1,j} + 2 \left(1 - \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} \right) u_{i,j} + \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{i+1,j} - u_{i,j-1}, \quad (6.71)$$

para $j = 2, 3, \dots, n_t - 1$ e $i = 2, 3, \dots, n_x - 1$.

Agora, das condições de contorno (6.68) e (6.69), temos $u_{1,j} = u_{n_x,j} = 0$, $j = 2, 3, \dots, n_t$. Com isso, o sistema (6.71) torna-se

$$u_{2,j+1} = 2 \left(1 - \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} \right) u_{2,j} + \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{3,j} - u_{2,j-1}, \quad (6.72)$$

$$u_{i,j+1} = \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{i-1,j} + 2 \left(1 - \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} \right) u_{i,j} + \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{i+1,j} - u_{i,j-1}, \quad (6.73)$$

$$u_{n_x-1,j+1} = \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} u_{n_x-2,j} + 2 \left(1 - \alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} \right) u_{n_x-1,j} - u_{n_x-1,j-1}, \quad (6.74)$$

$$(6.75)$$

para $i = 3, 4, \dots, n_x$ e $j = 2, 3, \dots, n_t$. Este sistema de equações pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 2(1-\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 2(1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{2,j-1} \\ u_{3,j-1} \\ \vdots \\ u_{n_x-1,j-1} \end{bmatrix}, \quad (6.76)$$

para $j = 2, 3, \dots, n_t - 1$, onde $\lambda := \alpha h_t^2 / h_x^2$.

Esta última equação (6.76) nos permite computar iterativamente a aproximação $u_{i,j+1}$ a partir das aproximações $u_{i,j}$ e $u_{i,j-1}$. Para inicializar as iterações, precisamos de $u_{i,1}$ e $u_{i,2}$, $i = 2, 3, \dots, n_x$. A primeira é dada pela condição inicial (6.66), da qual temos

$$u_{i,1} = f(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n_x. \quad (6.77)$$

Agora, usando a fórmula de diferenças finitas progressiva de ordem 1 na condições inicial (6.67), obtemos

$$u_{i,2} = u_{i,1} + h_t g(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n_x. \quad (6.78)$$

Com tudo isso, observamos que as equações (6.77), (6.78) e (6.76), nesta ordem, nos fornece um algoritmo iterativo no tempo para computar as aproximações da solução u .

Observação 6.3.1. Pode-se mostrar a seguinte condição de estabilidade

$$\alpha \frac{h_t^2}{h_x^2} \leq 1. \quad (6.79)$$

Exemplo 6.3.1. Consideremos o seguinte problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6.80)$$

$$u(0, x) = x(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad (6.81)$$

$$u_t(0, x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6.82)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t > 0 \quad (6.83)$$

$$u(t, \pi) = 0, \quad t > 0. \quad (6.84)$$

Na Figura 6.3, temos o esboço das soluções numéricas em diferentes tempos t usando o esquema numérico acima com $h_t = 10^{-2}$ e $h_x = 10^{-1}$.

No GNU Octave, podemos computar os resultados discutidos neste exemplo com o seguinte código:

```
#params
nx=11;
```

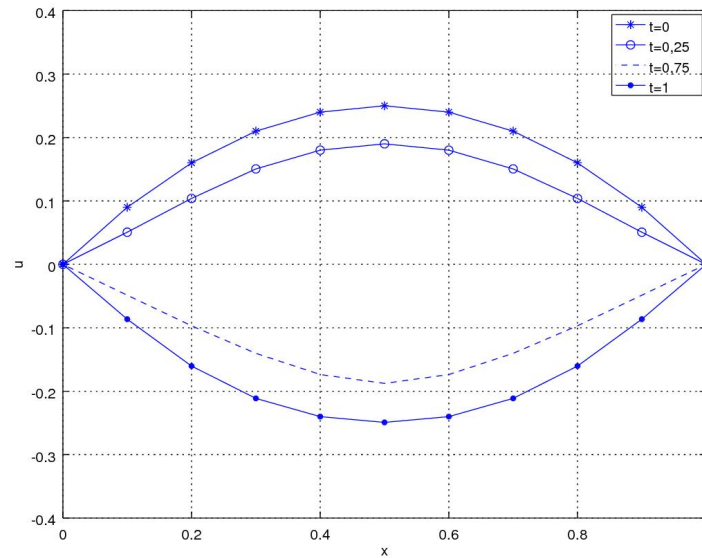


Figura 6.3: Resultados referentes ao Exemplo 6.3.1.

```

hx=1/(nx-1);

tf=1;
ht=10^-2;
nt=round(tf/ht)+1;

lambda = ht^2/hx^2;

#malha
t=[0:ht:(nt-1)*ht]';
x=[0:hx:(nx-1)*hx]';

#u
u0=zeros(nx,1);
u1=zeros(nx,1);
u=zeros(nx,1);

#c.i. 1

```

```
for i=2:nx-1
    u0(i)=x(i)*(1-x(i));
endfor

#c.i. 2
u1=zeros(nx,1);
for i=2:nx-1
    u1(i)=u0(i)+ht*0;
endfor

#matriz MDF
A = sparse(nx-2,nx-2);
A(1,1)=2*(1-lambda);
A(1,2)=lambda;
for i=2:nx-3
    A(i,i-1)=lambda;
    A(i,i)=2*(1-lambda);
    A(i,i+1)=lambda;
endfor
A(nx-2,nx-3)=lambda;
A(nx-2,nx-2)=2*(1-lambda);

#iteracoes
for k=2:nt-1
    u(2:nx-1)=A*u1(2:nx-1) - u0(2:nx-1);
    u0=u1;
    u1=u;
endfor

#visu
plot(x,u1,'b-');grid
xlabel('x');
ylabel('u');
```

Exercício

[[tag:revisar]]

Exercício 6.3.1. Considere o seguinte problema

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6.85)$$

$$u(0, x) = x(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad (6.86)$$

$$u_t(0, x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad (6.87)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad t > 0 \quad (6.88)$$

$$u(t, \pi) = 0, \quad t > 0. \quad (6.89)$$

Use o método de diferenças finitas para obter uma aproximação de $u(0,75, 1)$ com dois dígitos significativos de precisão.

Resposta dos Exercícios

Exercício 1.1.1. a) $D_{+,h}f(2,5) = 1,05949$; b) $D_{-,h}f(2,5) = 1,05877$;
c) $D_{0,h^2}f(2,5) = 1,05913$;

Exercício 1.1.2.

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| dy/dx | 4,0E-1 | 7,5E-1 | 1,3E+0 | 1,1E+0 | 7,5E-1 | 8,0E-1 |

Exercício 1.2.1. a) $7,25162\text{E}-2$; b) $7.24701\text{E}-2$; c) $7,24696\text{E}-2$; d) $7,24696\text{E}-2$; $h = 10^{-2}$;

Exercício 1.2.2. $4,0$;

Exercício 1.3.1. $1,05913$

Exercício 1.3.2.

- a) $\frac{1}{12h} [3f(x-4h) - 16f(x-3h) + 36f(x-2h) - 48f(x-h) + 25f(x)]$
b) $\frac{1}{12h} [-f(x-3h) + 6f(x-2h) - 18f(x-h) + 10f(x) + 3f(x+h)]$
c) $\frac{1}{12h} [f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)]$
d) $\frac{1}{12h} [-3f(x-h) - 10f(x) + 18f(x+h) - 6f(x+2h) + f(x+3h)]$
d) $\frac{1}{12h} [-25f(x) + 48f(x+h) - 36f(x+2h) + 16f(x+3h) - 3f(x+4h)]$

Exercício 1.3.3.

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| dy/dx | 1,7500E-1 | 7,2500E-1 | 1,4250E+0 | 1,1250E+0 | 4,2500E-1 | 1,6750E+0 |

Exercício 2.1.2. a) 1,05919; b) 1,05916; c) 1,05913

Exercício 3.1.1. a) $3,33647E-1$; b) $1,71368E-1$; c) $2,79554E-1$

Exercício 3.1.2. a) $4,02000E-1$; b) $1,04250E+0$; c) $8,08667E-1$

Exercício 3.1.3. Use um procedimento semelhante aquele usado para determinar a ordem do erro de truncamento da regra de Simpson.

Exercício 3.1.4.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{2} \left[f\left(a + \frac{1}{3}(b-a)\right) \right. \quad (3.44)$$

$$\left. + f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) \right] + O(h^3), \quad h = \frac{(b-a)}{3} \quad (3.45)$$

Exercício 3.2.1. a) $2,69264E-1$; b) $2,68282E-1$; c) $2,68937E-1$

Exercício 3.2.2. a) $8,12000E-1$; b) 1,03850; c) $8,11667E-1$

Exercício 3.3.1. $2,68953E-1$

Exercício 3.4.1. 1

Exercício 3.4.2. $x_1 = 0$, $w_1 = 2$

Exercício 3.5.1. a) $-2,61712E-1$; b) $2,55351E-1$; c) $8,97510E-2$; d) $1,27411E-1$; e) $1,21016E-1$.

Exercício 3.5.2. a) $-1,54617E-1$; b) $-1,50216E-1$; c) $-1,47026E-1$; d) $-1,47190E-1$; e) $-1,47193E-1$.

Exercício 3.5.3. a) $1,21016E-1$; b) $1,21744E-1$; c) $1,21744E-1$

Exercício 3.6.1. a) $-2,84951E-01$; b) $2,66274E-01$; c) $1,49496E-01$; d) $1,60085E-01$; e) $1,59427E-01$.

Exercício 3.6.2. a) $-1,03618E-1$; b) $-5,56446E-2$; c) $-4,19168E-2$

Exercício 3.6.3. a) $-1,31347$; b) $-1,23313$; c) $-1,26007$

Exercício 3.7.1. $1,2E-1$

Exercício 4.1.1. $\tilde{y}(1.5) = 3.14159E-1$, $e(1, h) = 3.1E-01$

Exercício 4.1.2. $h = 10^{-6}$, $\tilde{y}(1) = 1.8134E+0$

Exercício 4.1.3. $-5.58858E-1$

Exercício 4.1.4. $|\tilde{y}(1) - y(1)| = 3.4E+2$. Dica: verifique as hipóteses do Teorema 4.1.1.

Exercício 4.1.5. Dica: use o polinômio de Taylor de grau 2 de e^δ .

Exercício 4.1.6. Dica: estude a demonstração do Teorema 4.1.1.

Exercício 4.1.7. $h = \sqrt{2\delta/M}$. Dica: Encontre o mínimo de $E(h) := M/2 + \delta/h^2$.

| | h | $\tilde{y}(1)$ | $ \tilde{y}(1) - y(1) $ |
|-------------------------|--------|----------------|-------------------------|
| Exercício 4.2.1. | $1E-1$ | $-1.52293E-1$ | $1.7E-3$ |
| | $1E-2$ | $-1.50602E-1$ | $1.8E-5$ |
| | $1E-3$ | $-1.50585E-1$ | $1.8E-7$ |
| | $1E-4$ | $-1.50584E-1$ | $1.8E-9$ |

Exercício 4.2.2. Dica: o gráfico de $e(t; h = 10^{-1})$ tem a forma de uma função exponencial crescente.

Exercício 4.2.3. $h = 10^{-2}$, $\tilde{y}(1) = -1.50584\text{E}-1$

Exercício 4.2.4. Dica: $y(2) = -2.10171\text{E}-1$.

Exercício 4.2.5. Dica: $y(2) = 2.90306\text{E}+3$.

Exercício 4.3.1. a) $-6.00654\text{E}-1$; b) $-6.00703\text{E}-1$; c) $-5.99608\text{E}-1$

Exercício 4.3.3. Dica: o gráfico de $e(t; h = 10^{-1})$ tem a forma de uma função exponencial crescente para todos os métodos de R-K.

Exercício 4.3.5. Dica: $y(2) = -2.10171\text{E}-1$.

Exercício 4.3.6. Dica: $y(3) = 2.90306\text{E}+3$.

Exercício 4.4.1. Dica.

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(t^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \quad (4.146)$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h(50y^{(k+1)} + 50) \quad (4.147)$$

$$y^{(k+1)} = \frac{y^{(k)} + 50h}{1 - 50h}. \quad (4.148)$$

Exercício 4.4.2. Dica: consulte a condição de estabilidade (4.142).

Exercício 4.4.4. $\tilde{y}(1.5) = 3.14159\text{E}-1$, $\varepsilon = 3.1\text{E}-01$

Exercício 4.4.7.

$$y(t^{(k)}) = y_0 e^{\lambda t^{(k)}} \quad (4.153)$$

$$= y_0 \lim_{h \rightarrow 0^+} (1 - h\lambda)^{-t^{(k)}/h} \quad (4.154)$$

$$= y_0 \lim_{h \rightarrow 0^+} (1 - h\lambda)^{-k} \quad (4.155)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} y^{(k)}. \quad (4.156)$$

Exercício 4.5.1. $-5.99240\text{E}-1$

Exercício 4.6.1. a) $-6,00696\text{E}-1$; b) $-5,96694\text{E}-1$; c) $-5,96161\text{E}-1$

Exercício 5.1.1. $7,2\text{E}-1$

Exercício 6.1.1. Código. $2,9\text{E}-2$

Exercício 6.2.1. Código. $5,6\text{E}-1$

Exercício 6.3.1. Código. $6,3\text{E}-2$

Bibliografia

- [1] Björk, A.. Numerical Methods for Least Squares Problems. SIAM, 1996.
- [2] Burden, R.L.; Faires, J.D.; Burden, A.M.. Análise Numérica. 3. ed., Cengage Learning, 2016. ISBN: 978-8522123414. Acesso [SABI+UFRGS](#).
- [3] Isaacson, E.; Keller H.B.. Analysis of Numerical Methods. Dover, 1994.
- [4] Lemire, D.. Number Parsing at a Gigabyte per Second. Software: Practice and Experience, 51(8), 2021, 1700-1727. DOI: [10.1002/spe.2984](#).
- [5] Nocedal, J.; Wright, S.J.. Numerical Optimization. Springer, 2006.
- [6] Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P.. Numerical Recipes. 3. ed., Cambridge University Press, 2007.
- [7] Ralston, A.; Rabinowitz, P.. A First Course in Numerical Analysis. 2. ed., Dover: New York, 2021. ISBN 048641454X.
- [8] Stoer, J.; Bulirsch, R.. Introduction to numerical analysis. 2. ed., Springer-Verlag, 1993.