Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

5 de maio de 2021

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python[1] são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

[1]Veja a Observação 1.0.1.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

Observação 1.0.1. Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos Python[1] com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

1.1 Equações a diferenças

▶ Vídeo disponível!

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f\left(y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n); n\right) = 0, \tag{1.1}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \geq 0$ número natural e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

Exemplo 1.1.1. Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y(n+1) = (1+r)y(n) \tag{1.2}$$

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja $y(0)$ o valor da aplicação inicial, então

$$y(1) = (1 + r)y(0) \tag{1.3}$$

é o valor corrigido a taxa r no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y(2) = (1 + r)y(1) \tag{1.4}$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y(n + 1) = ry(n)\left(1 - \frac{y(n)}{K}\right), \tag{1.5}$$

onde $y(n)$ representa o tamanho da população no período n, r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**[2]

$$y(n + 2) = y(n + 1) + y(n), \tag{1.6}$$

onde $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$.

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k-ésima ordem). É dita ser **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y(n + k), y(n + k - 1), \ldots, y(n)$, noutro caso é dita ser **não linear**.

Exemplo 1.1.2. No Exemplo 1.1.1, temos

a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.

b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.

c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

[2] Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: Wikipedia.

A **solução** de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números $(y(n))_{n=0}^{\infty} = (y(0), y(1), \ldots, y(n), \ldots)$ que satisfazem a equação.

Exemplo 1.1.3. Vamos calcular os primeiros quatro valores da solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \tag{1.7}$$
$$y(0) = 0. \tag{1.8}$$

Para tanto, podemos fazer o seguinte procedimento iterativo. Tendo o valor inicial $y(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} y(1) &= 2y(0) - 1 && (1.9)\\ &= 2 \cdot 0 - 1 && (1.10)\\ &= -1. && (1.11) \end{aligned}$$

Calculado $y(1) = -1$, temos

$$\begin{aligned} y(2) &= 2y(1) - 1 && (1.12)\\ &= 2 \cdot (-1) - 1 && (1.13)\\ &= -3. && (1.14) \end{aligned}$$

Então, seguimos

$$\begin{aligned} y(3) &= 2y(2) - 1 && (1.15)\\ &= 2 \cdot (-3) - 1 && (1.16)\\ &= -7. && (1.17)\\ y(4) &= 2y(3) - 1 && (1.18)\\ &= 2 \cdot (-7) - 1 && (1.19)\\ &= -15. && (1.20) \end{aligned}$$

Com estes cálculos, podemos concluir que a solução da equação a diferenças é uma sequência da forma

$$(y(n))_{n=0}^{\infty} = (0, -1, -3, -7, -15, \ldots). \tag{1.21}$$

Podemos ilustrar a solução conforme feito na figura abaixo.

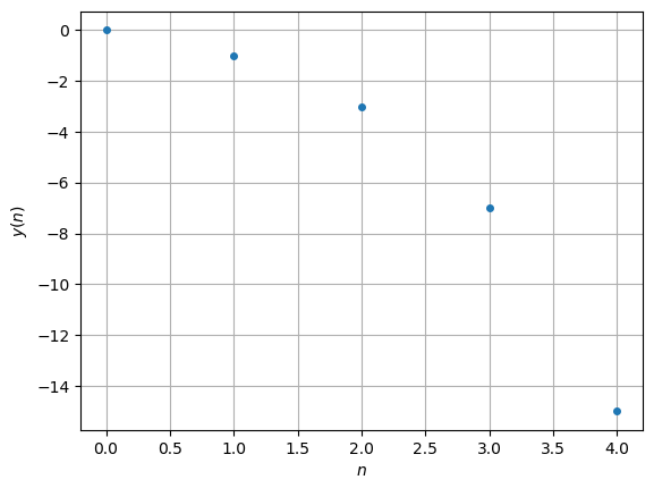

Figura 1.1: Esboço do gráfica da solução da equação a diferenças discutida no Exemplo 1.1.3.

Para algumas equações a diferenças, é possível escrever a **solução** como uma **forma fechada**

$$y(n) = g(n), \tag{1.22}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $g : n \mapsto g(n)$ é a **função discreta** que representa a solução.

Exemplo 1.1.4. Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y(n+1) = (1+r)y(n), \quad n \geq 0. \tag{1.23}$$

A partir do valor inicial $y(0)$, temos

$$\begin{align}
y(1) &= (1+r)y(0) \tag{1.24}\\
y(2) &= (1+r)y(1) \tag{1.25}\\
&= (1+r)(1+r)y(0) \tag{1.26}\\
&= (1+r)^2y(0) \tag{1.27}\\
y(3) &= (1+r)y(2) \tag{1.28}\\
&= (1+r)(1+r)^2y(0) \tag{1.29}\\
&= (1+r)^3y(0) \tag{1.30}\\
&\vdots \tag{1.31}
\end{align}$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y(n) = (1+r)^n y(0), \tag{1.32}$$

onde o valor inicial $y(0)$ é arbitrário.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Calcule $y(10)$, sendo que

$$y(n+1) = 1{,}05y(n), \quad n \geq 0, y(0) = 1000. \tag{1.33}$$

Solução. Observamos que

$$\begin{align}
y(1) &= 1{,}05y(0) \tag{1.34}\\
y(2) &= 1{,}05y(1) \tag{1.35}\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05y(0) \tag{1.36}\\
&= 1{,}05^2y(0) \tag{1.37}\\
y(3) &= 1{,}05y(2) \tag{1.38}\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05^2y(0) \tag{1.39}\\
&= 1{,}05^3y(0) \tag{1.40}\\
&\vdots \tag{1.41}
\end{align}$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = 1{,}05^n y(0). \tag{1.42}$$

Portanto,

$$y(10) = 1{,}05^{10}y(0) \tag{1.43}$$
$$= 1{,}05^{10} \cdot 1000 \tag{1.44}$$
$$\approx 1628{,}89. \tag{1.45}$$

◊

ER 1.1.2. Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores $y(n)$ no final do n-ésimo ano.

Solução. No final do ano $n+2 \geq 0$, o número de flores é igual a

$$y(n+2) = 2u(n+2) + 3d(n+2), \tag{1.46}$$

onde $u(n+2)$ é o número de flores plantadas a um ano e $d(n+2)$ é o número de flores plantas há pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$u(n+2) = u(n+1) + 2d(n+1) \tag{1.47}$$

e

$$d(n+2) = u(n+1) + d(n+1). \tag{1.48}$$

Com isso, temos

$$y(n+2) = 2\left[u(n+1) + 2d(n-1)\right] + 3\left[u(n+1) + d(n-1)\right] \tag{1.49}$$
$$= 2y(n+1) + u(n+1) + d(n+1) \tag{1.50}$$
$$= 2y(n+1) + \underbrace{u(n) + 2d(n)}_{u(n+1)} + \underbrace{u(n) + d(n)}_{d(n+1)} \tag{1.51}$$
$$= 2y(n+1) + 2u(n) + 3d(n) \tag{1.52}$$
$$= 2y(n) + y(n). \tag{1.53}$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y(n+2) = 2y(n+1) + y(n+2). \tag{1.54}$$

◊

Exercícios

E 1.1.1. Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

a) $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1$

b) $ny(n+1) = y(n)\ln(n+1)$

c) $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1$

d) $y(n+1) - [1 - y(n)]\,[1 + y(n)] = 0$

e) $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}$

E 1.1.2. Para cada uma das seguintes equações a diferenças, calcule $y(3)$.

a) $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1, \quad y(0) = 1$

b) $ny(n+1) = y(n)\ln(n+1), \quad y(1) = 1$

E 1.1.3. Para cada uma das seguintes equações a diferenças, calcule $y(4)$.

a) $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1, \quad y(0) = 1, y(1) = 0$

b) $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}, \quad y(0) = 1, y(1) = 1$

E 1.1.4. Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de $y(0)$ reais e que o cartão não está mais em uso.

E 1.1.5. Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no n-ésimo mês.

Capítulo 2

Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0, \tag{2.1}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

2.1 Equações lineares

Nesta seção, discutimos sobre equações a diferenças de ordem 1 e lineares. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \tag{2.2}$$

onde $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, n_0 número inteiro, $a : n \mapsto a(n)$ e $g : n \mapsto g(n)$ é o termo fonte. A equação é dita ser **homogênea** quando $g \equiv 0$ e, caso contrário, é dita ser **não homogênea**.

2.1.1 Equação homogênea

▶ Vídeo disponível!

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.3}$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para $n \geq n_0$, temos

$$y(n+1) = a(n)y(n) \tag{2.4}$$
$$= a(n)a(n-1)y(n-1) \tag{2.5}$$
$$= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \tag{2.6}$$
$$\vdots \tag{2.7}$$
$$= a(n)a(n-1)\cdots a(n_0)y(n_0). \tag{2.8}$$

Ou seja, dado o valor inicial $y(n_0)$, temos a solução[1]

$$y(n) = a(n_0)a(n_0+1)\cdots a(n-1)y(n_0). \tag{2.9}$$

A fim de termos uma notação mais prática, vamos usar a notação de produtório[2]

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} a(n) = a(n_0)a(n_0+1)\cdots a(n-1). \tag{2.10}$$

Com esta notação, a solução de (2.3) pode ser escrita como segue

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0), \tag{2.11}$$

assumindo a notação de que $\prod_{i=n+1}^{n} a(i) = 1$.

Exemplo 2.1.1. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.12}$$

a) Por iterações diretas.

Comparando com (2.3), temos $a(n) = 2$ para todo n. Calculando a solu-

[1] A demonstração por ser feita por indução matemática.
[2] Veja mais em Wiki: Produtório.

ção por iterações diretas, temos

$$
\begin{aligned}
y(n+1) &= 2y(n) && (2.13)\\
&= 2 \cdot 2y(n-1) && (2.14)\\
&= 2^2 y(n-1) && (2.15)\\
&= 2^2 \cdot 2y(n-2) && (2.16)\\
&= 2^3 y(n-2) && (2.17)\\
&\vdots\\
&= 2^{n+1} y(0) && (2.18)
\end{aligned}
$$

ou, equivalentemente, temos a solução

$$y(n) = 2^n y(0). \tag{2.19}$$

b) Por 2.11.

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) && (2.20)\\
&= (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{\text{n vezes}}) y(0) && (2.21)\\
&= 2^n y(0). && (2.22)
\end{aligned}
$$

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.

No Python[3], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.12) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0
```

2.1.2 Equação não homogênea

▶ Vídeo disponível!

[3]Veja a Observação 1.0.1.

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.23}$$

pode ser obtida por iterações diretas.

Vejamos, para $n \geq n_0$ temos

$$\begin{align}
y(n+1) &= a(n)y(n) + g(n) \tag{2.24}\\
&= a(n)\left[a(n-1)y(n-1) + g(n-1)\right] + g(n) \tag{2.25}\\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) + a(n)g(n-1) + g(n) \tag{2.26}\\
&= a(n)a(n-1)\left[a(n-2)y(n-2) + g(n-2)\right] \nonumber\\
&\quad + a(n)g(n-1) + g(n) \tag{2.27}\\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \nonumber\\
&\quad + a(n)a(n-1)g(n-2) + a(n)g(n-1) + g(n) \tag{2.28}\\
&\vdots \nonumber\\
&= a(n)a(n-1)\cdots a(n_0)y(n_0) \nonumber\\
&\quad + a(n_0+1)a(n_0+2)\cdots a(n)g(n_0) \nonumber\\
&\quad + a(n_0+2)a(n_0+3)\cdots a(n)g(n_0+1) \nonumber\\
&\quad + \cdots + a(n)g(n-1) + g(n) \tag{2.29}
\end{align}$$

Logo, podemos inferir que a solução é dada por[4]

$$\begin{align}
y(n) &= a(n_0)a(n_0+1)\cdots a(n-1)y(n_0) \nonumber\\
&\quad + a(n_0+1)a(n_0+2)\cdots a(n-1)g(n_0) \nonumber\\
&\quad + a(n_0+2)a(n_0+3)\cdots a(n-1)g(n_0+1) \nonumber\\
&\quad + \cdots + a(n-1)g(n-2) + g(n-1) \tag{2.30}
\end{align}$$

Aqui, por maior praticidade, vamos empregar a notação de somatório[5]

$$\sum_{i=n_0}^{n} a(i) = a(n_0) + a(n_0+1) + \cdots + a(n). \tag{2.31}$$

[4]A demonstração por ser feita por indução matemática.

[5]Veja mais em Wiki: Somatório

Com isso, a solução de (2.23) pode ser escrita como segue

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \\
&+ \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(j)\right] g(i).
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

No último termo, consideramos a notação $\sum_{j=i+1}^{i} a(i) = 0$.

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução de

$$
y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.33}
$$

Comparando com (2.23), temos $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$ para todo n.

1. Cálculo por iterações diretas.

   Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$
\begin{aligned}
y(n+1) &= 2y(n) - 1 && (2.34)\\
&= 2 \cdot [2y(n-1) - 1] - 1 && (2.35)\\
&= 2^2 y(n-1) - 2 - 1 && (2.36)\\
&= 2^2 \cdot [2y(n-2) - 1] - 2 - 1 && (2.37)\\
&= 2^3 y(n-2) - 2^2 - 2 - 1 && (2.38)\\
&\cdots \\
&= 2^{n+1} y(0) - \sum_{i=0}^{n} 2^i && (2.39)
\end{aligned}
$$

   Logo, temos

$$
y(n) = 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i. \tag{2.40}
$$

   Este último termo, é a soma dos termos da **progressão geométrica**[6] de razão $q = 2$ e termo inicial 1 (veja Subseção 2.1.3), i.e.

$$
\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{2.41}
$$

[6]Veja mais em Wiki:Progressão geométrica.

Portanto, a solução (2.23) é

$$y(n) = 2^n y(0) - \frac{1-2^n}{1-2} \tag{2.42}$$
$$= 2^n y(0) - 2^n + 1. \tag{2.43}$$

2. Cálculo por (2.32).

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.44}$$
$$+\sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(j)\right] g(i) \tag{2.45}$$
$$= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \tag{2.46}$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right](-1) \tag{2.47}$$
$$= 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \tag{2.48}$$
$$= 2^n y(0) - 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \tag{2.49}$$

Este último somatório é a soma dos termos da progressão geométrica de razão $q = 1/2$ e termo inicial 1 ((veja Subseção 2.1.3), equação (2.60)). Logo,

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$
$$= 2\left(1-2^{-n}\right). \tag{2.51}$$

Retornando a (2.49), temos

$$y(n) = 2^n y(0) - 2^{n-1}\cdot 2\cdot\left(1-2^{-n}\right) \tag{2.52}$$
$$= 2^n y(0) - 2^n + 1. \tag{2.53}$$

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.

No Python[7], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.12) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)-1)
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0 + 1
```

Observamos que esta solução é equivalente à (2.53), pois

$$y(n) = 2^n y(0) - 2^n + 1 \tag{2.54}$$
$$= 2^n \left[y(0) - 1\right] + 1, \tag{2.55}$$

onde $y(0)$ é um valor inicial arbitrário.

2.1.3 Somas definidas

Seguem algumas somas definidas que podem ser úteis na resolução de equações a diferenças.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.56}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.57}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{2.58}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} \tag{2.59}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1 \tag{2.60}$$
$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{(q-1)(n+1)q^{n+1} - q^{n+2} + q}{(q-1)^2} \tag{2.61}$$

[7] Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Calcule a solução da equação à diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.62}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.63}$$

Solução. De (2.11), temos

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right] y(0) \tag{2.64}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \tag{2.65}$$
$$= 2^{-n}. \tag{2.66}$$

No Python[8], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),S(1)/2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):1})
Out: 0.5**n
```

◊

ER 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0, \tag{2.67}$$
$$y(0) = 0. \tag{2.68}$$

[8]Veja a Observação 1.0.1.

Solução. De (2.32), temos

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i & (2.69)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \cdot 2^{-i} & (2.70)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} \cdot 2^{-2i} & (2.71)\\
&= 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^i & (2.72)\\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} & (2.73)\\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) & (2.74)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{4^n}\right) & (2.75)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - 2^{n-1}2^{-2n}\right) & (2.76)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - 2^{-n-1}\right) & (2.77)\\
&= \frac{2}{3}\left(2^{n} - 2^{-n}\right). & (2.78)
\end{aligned}
$$

No Python[9], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)+(1/2)**n)
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):0})
Out: 2*2**n/3 - 2*2**(-n)/3
```

◊

[9]Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios

E 2.1.1. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.79}$$

E 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = \frac{1}{3}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.80}$$

$$y(0) = -1. \tag{2.81}$$

E 2.1.3. Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1%. Considerando $y(0) = 100$, qual o valor de $y(n)$ no n-ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução. Então, calcule o valor da dívida no 36º mês.

E 2.1.4. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n) - 3, \quad n \geq 0, \tag{2.82}$$

$$y(0) = 2. \tag{2.83}$$

E 2.1.5. Calcule a solução de

$$y(n+1) = ny(n) + n!, \quad n \geq 0, \tag{2.84}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.85}$$

E 2.1.6. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + 2^n, \quad n \geq 0, \tag{2.86}$$

$$y(0) = 2. \tag{2.87}$$

E 2.1.7. Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1% e com parcelas mensais fixas de \$1. Considerando $y(0) = 100$, qual o valor de $y(n)$ no n-ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução.

E 2.1.8. Calcule a solução de

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq 0, \tag{2.88}$$

onde a e b são constantes com $a \neq 1$.

2.2 Estudo assintótico de equações lineares

▶ Vídeo disponível!

Nesta seção, vamos introduzir aspectos básicos sobre o comportamento assintótico de soluções de equações a diferenças de primeira ordem e lineares.

Seja

$$y(n+1) = f(y(n),n), \quad n \geq n_0, \tag{2.89}$$

uma equação a diferenças com valor inicial $y(n_0)$. Dizemos que y^* é **ponto de equilíbrio** da equação, quando y^* é tal que

$$f(y^*,n) = y^*, \tag{2.90}$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, ao escolhermos $y(n_0) = y^*$, então a solução de equação a diferenças (2.89) é

$$y(n) = y^*. \tag{2.91}$$

Exemplo 2.2.1. Vamos calcular o(s) ponto(s) de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{4}{3}y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.92}$$

Neste caso, por comparação com (2.89), temos $f(y(n),n) = \dfrac{4}{3}y(n) - 1$.

Para calcularmos o(s) ponto(s) de equilíbrio, resolvemos

$$f(y^*,n) = y^* \tag{2.93}$$
$$\frac{4}{3}y^* - 1 = y^* \tag{2.94}$$
$$\left(\frac{4}{3} - 1\right) y^* = 1 \tag{2.95}$$
$$\frac{1}{3}y^* = 1 \tag{2.96}$$
$$y^* = 3. \tag{2.97}$$

Com isso, concluímos que $y^* = 3$ é o único ponto de equilíbrio de (2.92).

Notamos que, de fato, ao escolhermos $y(0) = 3$, temos

$$y(1) = \frac{4}{3}y(0) - 1 = 3 \tag{2.98}$$
$$y(2) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \tag{2.99}$$
$$y(3) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \tag{2.100}$$
$$\vdots \tag{2.101}$$
$$y(n) = 3. \tag{2.102}$$

Seja a equação a diferenças de primeira ordem, linear e com coeficientes constantes

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \tag{2.103}$$

Se $a = 1$ e $b = 0$, então todo número real y^* é ponto de equilíbrio de (2.103). Agora, se $a = 1$ e $b \neq 0$, então (2.103) não tem ponto de equilíbrio. Por fim, se $a \neq 1$, então

$$y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.104}$$

é o único ponto de equilíbrio de (2.103). Este é o caso do Exemplo 2.2.1.

Um ponto de equilíbrio é um **atrator global** quando

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = y^*, \tag{2.105}$$

para qualquer valor inicial $y(n_0)$. Neste caso, também dizemos que y^* é um ponto de equilíbrio **assintoticamente globalmente estável**.

Uma equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.106}$$

com $-1 < a < 1$, tem $y^* = 0$ como atrator global. De fato, a solução desta equação a diferenças é

$$\begin{align} y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a\right] y(n_0) \tag{2.107}\\ &= a^{n-n_0} y(n_0). \tag{2.108}\end{align}$$

Logo, temos

$$\begin{align} \lim_{n\to\infty} y(n) &= \lim_{n\to\infty} \cancelto{0}{a^{n-n_0}} y(n_0) \tag{2.109}\\ &= 0. \tag{2.110}\end{align}$$

Exemplo 2.2.2. Para a equação a diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2} y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.111}$$

temos que $y^* = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável.

Um equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \tag{2.112}$$

com $-1 < a < 1$, tem

$$y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.113}$$

como ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável. De fato, a solução desta equação é

$$
\begin{aligned}
y(n) = {} & \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a\right] y(n_0) \\
& + \sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a\right] b && (2.114)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} a^{n-1-i}b && (2.115)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + a^{n-1}b\sum_{i=n_0}^{n-1} a^{-i} && (2.116)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + a^{n-1}b\sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j-n_0} && (2.117)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + a^{n-n_0-1}b\sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j} && (2.118)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + a^{n-n_0-1}b\frac{(1-a^{-(n-n_0)})}{1-a^{-1}} && (2.119)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + a^{n-n_0-1}b\frac{\frac{a^{n-n_0}-1}{a^{n-n_0}}}{\frac{a-1}{a}} && (2.120)\\
= {} & a^{n-n_0}y(n_0) + b\frac{1-a^{n-n_0}}{1-a} && (2.121)\\
= {} & \left(y(n_0) - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-n_0} + \frac{b}{1-a}. && (2.122)
\end{aligned}
$$

Observamos que esta última equação, confirma que

$$y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.123}$$

é ponto de equilíbrio de (2.112) e é assintoticamente globalmente estável, pois

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y(n) = {} & \lim_{n\to\infty}\left[\left(y(n_0) - \frac{b}{1-a}\right)\cancelto{0}{a^{n-n_0}} + \frac{b}{1-a}\right] && (2.124)\\
= {} & \frac{b}{1-a}. && (2.125)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.2.3. A equação a diferenças

$$y(n+1) = 4y(n) - 1, \quad n \geq 0, \tag{2.126}$$

tem $y^* = 1/3$ como ponto de equilíbrio, o qual não é um atrator global. De fato, para qualquer escolha de $y(0) \neq y^*$, temos

$$y(n) = \underbrace{\left(y(0) - \frac{1}{3}\right)}_{\neq 0} 4^n + \frac{1}{3}. \tag{2.127}$$

Logo, vemos que $y(n) \to \pm\infty$ quando $n \to \infty$, onde o sinal é igual ao do termo $y(0) - 1/3$.

Observamos as seguintes computações no Python[10]:

```
In : y=1/3
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
...:
...: y
Out: -21.0
```

Ou seja, $y(30) = -21.0$ computando por iterações recorrentes, enquanto que o valor esperado é $y(30) = 1/3$, sendo este um ponto de equilíbrio da equação a diferenças.

O que está ocorrendo nestas computações é um fenômeno conhecido como cancelamento catastrófico em máquina. No computador, o valor inicial $y(0) = 1/3$ é computado com um pequeno erro de arredondamento. Do que vimos acima, se $y(0) \neq 1/3$, então $y(n) \to \pm\infty$ quando $n \to \infty$.

No Python[11], podemos fazer as computações exatas na aritmética dos números racionais. Para tanto, podemos usar o seguinte código:

```
In : from sympy import Rational
...: y=Rational(1,3)
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
```

[10]Veja a Observação 1.0.1.
[11]Veja a Observação 1.0.1.

```
...:
...: y
Out: 1/3
```

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = ny(n), \quad n \geq 0. \tag{2.128}$$

Solução. Temos que y^* é ponto de equilíbrio da equações a diferenças, quando

$$y^* = ny^* \tag{2.129}$$
$$(1-n)y^* = 0 \tag{2.130}$$

para todo $n \geq 0$. Logo, $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio da equação a diferenças.

◊

ER 2.2.2. Verifique se $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável de

$$y(n+1) = \frac{1}{n+1}y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.131}$$

Solução. Primeiramente, confirmamos que $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio, pois

$$\frac{1}{n+1}y^* = 0 = y^*, \quad n \geq 0. \tag{2.132}$$

Por fim, a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}\right] y(0) \tag{2.133}$$
$$= \frac{1}{n!}y(0). \tag{2.134}$$

Daí, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}y(0) = 0 = y^*. \tag{2.135}$$

Logo, concluímos que $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável da equação a diferenças dada.

◊

Exercícios

E 2.2.1. Calcule o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = -y(n) + 1 \tag{2.136}$$

E 2.2.2. O ponto de equilíbrio da equação a diferenças do Exercício 2.2.1 é um atrator global? Justifique sua resposta.

E 2.2.3. Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n) + \frac{1}{2}, \quad n \geq 2, \tag{2.137}$$

e diga se ele é um atrator global. Justifique sua resposta.

E 2.2.4. Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = 2y(n) + 1, \quad n \geq 2, \tag{2.138}$$

e diga se ele é assintoticamente globalmente estável. Justifique sua resposta.

E 2.2.5. Considere um financiamento de valor \$100 com taxa de juros 1% a.m. e amortizações fixas mensais de valor \$$a$. O valor devido $y(n+1)$ no $n+1$-ésimo mês pode ser modelado pela seguinte equações a diferenças

$$y(n+1) = 1{,}01y(n) - a, \quad n \geq 0, \tag{2.139}$$

com valor inicial $y(0) = 100$. Calcule o valor a mínimo a ser amortizado mensalmente de forma que o valor devido permaneça sempre constante.

2.3 Alguns aspectos sobre equações não lineares

O estudo de equações a diferenças não lineares é bastante amplo, podendo chegar ao estado da arte. Nesta seção, vamos abordar alguns conceitos fundamentais para a análise de equações de primeira ordem e não lineares, i.e. equações da forma

$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.140}$$

onde f é uma função não linear nas incógnitas $y(n+1)$ ou $y(n)$.

2.3.1 Solução

A variedade de formas que uma equação a diferenças não linear pode ter é enorme e não existem formas fechadas para a solução da grande maioria delas. No entanto, sempre pode-se buscar calcular a solução por iteração direta, i.e.

$$y(n_0) = \text{valor inicial}, \tag{2.141}$$
$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0,\ n = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots \tag{2.142}$$

Exemplo 2.3.1. Vamos calcular a solução da seguinte equação a diferenças não linear

$$y(n+1) = y^2(n), \quad n \geq 0. \tag{2.143}$$

A partir do valor inicial $y(0)$ e por iterações diretas, temos

$$\begin{aligned}
y(1) &= y^2(0), && (2.144)\\
y(2) &= [y(1)]^2 && (2.145)\\
&= \left[y^2(0)\right]^2 && (2.146)\\
&= y^{2^2}(0), && (2.147)\\
y(3) &= [y(2)]^2 && (2.148)\\
&= \left[y^{2^2}(0)\right]^2 && (2.149)\\
&= y^{2^3}(0) && (2.150)\\
&\vdots && (2.151)
\end{aligned}$$

Disso, podemos inferir que a solução de 2.143 é

$$y(n) = y^{2^n}(0). \tag{2.152}$$

2.3.2 Pontos de equilíbrio

Introduzimos pontos de equilíbrio na Seção 2.2 e, aqui, vamos estudá-los no contexto de equação a diferenças de primeira ordem e não lineares. Um dos primeiros aspectos a serem notados é que equação não lineares podem ter vários pontos de equilíbrio, ter somente um ou não ter.

Exemplo 2.3.2. (Ponto de equilíbrio) Vejamos os seguintes casos:

a) $y(n+1) = y(n)^2 + 1$, $n \geq 0$

Se y^* é ponto de equilíbrio, então

$$y^* = (y^*)^2 + 1 \tag{2.153}$$

$$(y^*)^2 - y^* + 1 = 0, \tag{2.154}$$

a qual não admite solução real. Ou seja, a equação a diferenças deste item não tem ponto de equilíbrio.

b) $y(n+1) = y(n)^2$, $n \geq 0$

$$y^* = (y^*)^2 \tag{2.155}$$

$$(y^*)^2 - y^* = 0 \tag{2.156}$$

$$y^*(y^* - 1) = 0, \tag{2.157}$$

Neste caso, a equação a diferenças tem dois pontos de equilíbrio, a saber, $y_1^* = 0$ e $y_2^* = 1$.

c) $[y(n+1) - 1] \cdot [y(n) - 1] = 0$, $n \geq 0$

$$(y^* - 1) \cdot (y^* - 1) = 0 \tag{2.158}$$

$$(y^* - 1)^2 = 0 \tag{2.159}$$

$$y^* = 1 \tag{2.160}$$

Concluímos que esta equação tem $y^* = 1$ como seu único ponto de equilíbrio.

d) $y(n+1) = y(n)\cos(y(n))\,,\ n \geq 0$

$$y^* = y^* \cos(y^*) \tag{2.161}$$
$$[\cos(y^*) - 1]\, y^* = 0 \tag{2.162}$$
$$\cos(y^*) = 1 \tag{2.163}$$

Disso, temos que $y^* = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de equilíbrio da equação a diferenças dada.

Equações a diferenças não lineares podem ter pontos de equilíbrio eventuais. Mais especificamente, uma equação a diferenças

$$f(y(n+1), y(n); n) = 0, \quad n \geq n_0, \tag{2.164}$$

tem y^* como **ponto de equilíbrio eventual** quando existe $n_1 > n_0$ tal que

$$y(n) = y^*, \quad n \geq n_1. \tag{2.165}$$

Exemplo 2.3.3. (Ponto de equilíbrio eventual) A equação a diferenças

$$y(n+1) = |2y(n) - 2|, \quad n \geq 0, \tag{2.166}$$
$$y(0) = 1, \tag{2.167}$$

tem $y^* = 2$ como ponto de equilíbrio eventual. De fato, por iterações diretas temos

$$y(1) = |2y(0) - 2| \tag{2.168}$$
$$= |2 \cdot 1 - 2| = 0 \tag{2.169}$$
$$y(2) = |2y(1) - 2| \tag{2.170}$$
$$= |2 \cdot 0 - 2| = 2 \tag{2.171}$$
$$y(3) = |2y(2) - 2| \tag{2.172}$$
$$= |2 \cdot 2 - 2| = 2 \tag{2.173}$$
$$\vdots \tag{2.174}$$
$$y(n) = 2, \quad n \geq 2. \tag{2.175}$$

Um ponto de equilíbrio y^* de (2.164) é dito ser **estável** quando, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|y(0) - y^*| < \delta \Rightarrow |y(n) - y^*| < \epsilon, \tag{2.176}$$

para todo $n > 0$. Em outras palavras, para todo n, a solução $y(n)$ está arbitráriamente próxima de y^* para toda escolha de valor inicial $y(0) \neq y^*$ suficientemente próximo de y^*. Quando este não é o caso, y^* é dito ser ponto de equilíbrio **instável**.

Exemplo 2.3.4. Vamos estudar os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = \left(y^2(n) - 1\right)^2 + 1, \quad n \geq 0. \tag{2.177}$$

Vamos calcular os pontos de equilíbrio.

$$y^* = \left[(y^*)^2 - 1\right]^2 + 1 \tag{2.178}$$

$$y^* = (y^*)^2 - 2y^* + 2 \tag{2.179}$$

$$(y^*)^2 - 3y^* + 2 = 0 \tag{2.180}$$

$$y_1^* = 1, \quad y_2^* = 2 \tag{2.181}$$

Tomamos o ponto de equilíbrio $y^* = 1$. Seja $\epsilon > 0$ e escolhemos $0 < \delta < 1$ tal que $\delta < \epsilon$. Então, para qualquer valor inicial

$$y(0) = 1 \pm \delta \tag{2.182}$$

temos

$$y(1) = (y(0) - 1)^2 + 1 \tag{2.183}$$

$$= \delta^2 + 1 < 1 + \epsilon \tag{2.184}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 3

Equações de ordem 2 ou mais alta

Neste capítulo, temos uma rápida introdução a equações a diferenças de ordem 2 ou mais alta.

3.1 Equações lineares de ordem 2

▶ Vídeo disponível!

Aqui, vamos considerar equações lineares de ordem 2 com coeficientes constantes e homogêneas, i.e. equações da forma

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0, \tag{3.1}$$

onde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$.

A ideia para resolver uma tal equação é de buscar por soluções da forma

$$y(n) = \lambda^n, \tag{3.2}$$

onde λ é um escalar não nulo (número real ou complexo). Substituindo em (3.1), obtemos

$$\lambda^{n+2} + p_1\lambda^{n+1} + p_2\lambda^n = 0 \tag{3.3}$$

$$\lambda^n\left(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2\right) = 0. \tag{3.4}$$

Ou seja, λ deve satisfazer a **equação característica**

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0. \tag{3.5}$$

3.1.1 Caso de raízes reais distintas

Aqui, vamos encontrar a solução geral para (3.1) quando a equação característica associada (3.5) tem raízes reais distintas. As raízes podem ser obtidas da fórmula de Bhaskara, i.e.

$$\lambda_1,\lambda_2 = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}, \tag{3.6}$$

onde $p_1^2 - 4p_2 > 0$. Com isso, temos as soluções

$$y_1(n) = \lambda_1^n, \tag{3.7}$$
$$y_2(n) = \lambda_2^n. \tag{3.8}$$

Estas são chamadas de **soluções fundamentais**, pois pode-se mostrar que qualquer solução da equação a diferenças (3.1) pode ser escrita como combinação linear de $y_1(n)$ e $y_2(n)$. Ou seja, a solução geral de (3.1) é

$$y(n) = c_1 \underbrace{\lambda_1^n}_{y_1(n)} + c_2 \underbrace{\lambda_2^n}_{y_2(n)}, \tag{3.9}$$

onde c_1 e c_2 são constantes indeterminadas.

Exemplo 3.1.1. Vamos encontrar a solução geral de

$$y(n+2) - 4y(n) = 0. \tag{3.10}$$

Para tanto, resolvemos a **equação característica** associada

$$\lambda^2 - 4 = 0 \tag{3.11}$$
$$\lambda^2 = 4 \tag{3.12}$$
$$\lambda = \pm 2 \tag{3.13}$$

Com isso, temos as soluções fundamentais $y_1(n) = (-2)^n$ e $y_2(n) = 2^n$. A **solução geral** é

$$y(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot 2^n. \tag{3.14}$$

3.1.2 Caso de raízes reais duplas

Agora, vamos encontrar a solução geral para (3.1) quando a equação característica associada (3.5) tem raízes reais duplas, i.e.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_1}{2}. \tag{3.15}$$

Neste caso, múltiplos de

$$y_1(n) = \lambda_{1,2}^n \tag{3.16}$$

não nos fornecem todas as soluções possíveis da equação a diferenças. Entretanto, temos que

$$y_2(n) = n\lambda_{1,2}^{n-1}, \tag{3.17}$$

também é solução. De fato, substituindo em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
y_2(n+2) + p_1 y_2(n+1) + p_2 y_2(n) = 0 \quad (3.18)\\
(n+2)\lambda_{1,2}^{n+1} + p_1 \cdot (n+1)\lambda_{1,2}^n + p_2 \cdot n\lambda_{1,2}^{n-1} = 0 \quad (3.19)\\
n\lambda_{1,2}^{-1}\left(\underbrace{\lambda_{1,2}^{n+2} + p_1 \cdot \lambda_{1,2}^{n+1} + p_2\lambda_{1,2}^n}_{=0}\right) + 2\lambda_{1,2}^{n+1} + p_1\lambda_{1,2}^n = 0 \quad (3.20)\\
2\left(-\frac{p_1}{2}\right)^{n+1} + p_1\left(-\frac{p_1}{2}\right)^n = 0 \quad (3.21)\\
(-1)^{n+1}\frac{p_1^{n+1}}{2^n} + (-1)^n\frac{p_1^{n+1}}{2^n} = 0 \quad (3.22)\\
0 = 0. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Com isso, temos que a **solução geral** da equação a diferenças é dada por

$$y(n) = c_1\lambda_{1,2}^n + c_2 n\lambda_{1,2}^{n-1}. \tag{3.24}$$

Exemplo 3.1.2. Vamos encontrar a solução geral de

$$y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0. \tag{3.25}$$

Começamos encontrando as soluções da equação característica associada

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad (3.26)\\
(\lambda+2)^2 = 0 \quad (3.27)\\
\lambda_{1,2} = -2. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Desta forma, temos as soluções fundamentais

$$y_1(n) = (-2)^n \tag{3.29}$$
$$y_2(n) = n \cdot (-2)^{n-1} \tag{3.30}$$

e a solução geral

$$y(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot n \cdot (-2)^{n-1} \tag{3.31}$$
$$y(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot n \cdot \frac{(-2)^n}{-2} \tag{3.32}$$
$$y(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot n \cdot (-2)^n \tag{3.33}$$
$$y(n) = (-2)^n \cdot (c_1 + c_2 \cdot n) \tag{3.34}$$

3.1.3 Caso de raízes complexas

Agora, vamos encontrar a solução geral para (3.1) quando a equação característica associada (3.5) tem raízes reais duplas, i.e.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta. \tag{3.35}$$

Neste caso, temos a **solução geral**

$$y(n) = c_1(\alpha - i\beta)^n + c_2(\alpha + i\beta)^n. \tag{3.36}$$

Exemplo 3.1.3. Vamos encontrar a solução geral de

$$y(n+2) + 4y(n) = 0. \tag{3.37}$$

Resolvemos a equação característica associada.

$$\lambda^2 + 4 = 0 \tag{3.38}$$
$$\lambda^2 = -4 \tag{3.39}$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \tag{3.40}$$

Com isso, temos a solução geral

$$y(n) = c_1 \cdot (-2i)^n + c_2 \cdot (2i)^n. \tag{3.41}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. A **sequência de Fibonacci**[1]

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \tag{3.42}$$

tem valores iniciais $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ e os demais valores $y(n+2) = y(n+1) + y(n)$. Logo, a sequência é solução da equação a diferenças

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.43}$$

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 1. \tag{3.44}$$

Resolva esta equação a diferença de forma a obter uma forma fechada para $y(n)$, i.e. o n-ésimo valor na sequência de Fibonacci.

Solução. A equação a diferenças

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0 \tag{3.45}$$

é linear e com coeficientes constantes. Desta forma, temos a equação característica associada

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{3.46}$$

a qual tem raízes reais distintas

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Logo, a solução geral desta equação é

$$y(n) = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1. \tag{3.47}$$

Agora, aplicando os valores iniciais $y(1) = 1$ e $y(2) = 2$, obtemos

$$y(1) = 1 \Rightarrow c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$y(2) = 1 \Rightarrow c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

[1] Leonardo Fibonacci, c.1170 - c1250, matemático italiano. Fonte: Wikipédia.

Resolvendo, obtemos

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{3.48}$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{3.49}$$

Concluímos que a solução é

$$y(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1. \tag{3.50}$$

♢

ER 3.1.2. Entre a solução da seguinte equações a diferenças

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0, \quad n \geq 0, \tag{3.51}$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1. \tag{3.52}$$

Solução. Trata-se de uma equação a diferenças de ordem 2 com coeficientes constantes e homogênea. A equação característica associada é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \tag{3.53}$$

com raízes reais duplas $\lambda_{1,2} = 1$. Assim sendo, a solução geral é

$$y(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot n \cdot 1^n \tag{3.54}$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n. \tag{3.55}$$

Aplicando os valores iniciais, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \tag{3.56}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_2 = 1 \tag{3.57}$$

Logo, temos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Concluímos que a solução é a sequência constante

$$y(n) = 1. \tag{3.58}$$

♢

ER 3.1.3. Resolva a seguinte equação a diferenças

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2 = 0. \tag{3.59}$$

Solução. Sendo a equação a diferenças linear homogênea com coeficientes constantes, resolvemos a equação característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \tag{3.60}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} \tag{3.61}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i \tag{3.62}$$

Sendo estas as raízes, temos a solução geral

$$y(n) = c_1(1-i)^n + c_2(1+i)^n. \tag{3.63}$$

◊

Exercícios

E 3.1.1. Calcule a solução geral de

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 0 \tag{3.64}$$

E 3.1.2. Calcule a solução geral de

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = 0 \tag{3.65}$$

E 3.1.3. Calcule a solução geral de

$$y(n+2) + 4y(n+1) + 13y(n) = 0 \tag{3.66}$$

E 3.1.4. Resolva

$$y(n+2) - 2y(n+1) - 8y(n) = 0, \quad n \geq 0, \tag{3.67}$$

$$y(0) = 2, \quad y(1) = -1. \tag{3.68}$$

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

E 1.1.2. a) $y(3) = 3 + 3\sqrt{2}$; b) $y(3) = \frac{1}{2}\ln(2)\ln(3)$

E 1.1.3. a) $y(4) = 1$; b) $y(4) = 0$

E 1.1.4. $y(n+1) = 3y(n)$.

E 1.1.5. Sequência de Fibonacci

E 2.1.1. $y(n) = 3^n y(0)$

E 2.1.2. $y(n) = -\frac{1}{3^n}$

E 2.1.3. $y(n+1) = 1{,}01 \cdot y(n)$, $y(0) = 100$; $y(n) = 100 \cdot 1{,}01^n$; $y(36) \approx 143{,}08$

E 2.1.4. $y(n) = \frac{1}{2}(3^n + 3)$

E 2.1.5. $y(n) = n!$

E 2.1.6. $y(n) = 2^n \left(\frac{n}{2} + 2\right)$

E 2.1.7. $y(n+1) = 1{,}01 \cdot y(n) - 1$, $y(0) = 100$; $y(n) = 100$;

E 2.1.8. $y(n) = \left(y(0) - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$

E 2.2.1. 1/2

E 2.2.2. não

E 2.2.3. $y^* = 1$; atrator global

E 2.2.4. $y^* = -1$; não é assintoticamente globalmente estável

E 2.2.5. $a = 1$

E 3.1.1. $y(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$

E 3.1.2. $y(n) = 2^n(c_1 + c_2 \cdot n)$

E 3.1.3. $y(n) = c_1(-2-3i)^n + c_2(-2+3i)^n$

E 3.1.4. $y(n) = \frac{3}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n$

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, 3. edition, 2005.