

# Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

6 de outubro de 2020

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica no espaço euclidiano tridimensional. Mais especificamente, discute-se sobre sistemas de coordenadas, estudo de retas, planos e cônicas.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
<b>1 Sistema de coordenadas</b>	<b>1</b>
1.1 Sistema de coordenadas no espaço . . . . .	1
<b>2 Estudo de retas</b>	<b>8</b>
2.1 Sistema de coordenadas no espaço . . . . .	8
2.2 Equações da reta . . . . .	11
2.2.1 Equação vetorial de uma reta . . . . .	11
2.2.2 Equações paramétricas de uma reta . . . . .	13
2.2.3 Equações da reta na forma simétrica . . . . .	14
2.2.4 Exercícios resolvidos . . . . .	15
<b>3 Estudo de planos</b>	<b>19</b>
3.1 Equações do plano . . . . .	19
3.1.1 Equação vetorial do plano . . . . .	19
3.1.2 Equações paramétricas do plano . . . . .	20
3.1.3 Equação geral do plano . . . . .	22
3.1.4 Exercícios resolvidos . . . . .	22
<b>4 Cônicas</b>	<b>24</b>
4.1 Elipse . . . . .	24
4.1.1 Equação reduzida da elipse . . . . .	26

---

4.2	Hipérbole . . . . .	27
4.2.1	Equação reduzida da hipérbole . . . . .	28
4.3	Parábola . . . . .	30
4.3.1	Equação reduzida de uma parábola . . . . .	31
<b>Respostas dos Exercícios</b>		<b>32</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>33</b>

# Capítulo 1

## Sistema de coordenadas

A geometria analítica é uma área interdisciplinar da matemática que faz o estudo de objetos da geometria através de estruturas algébricas (equações e inequações algébricas). Para tanto, o primeiro passo é a construção (definição) de um sistema de coordenadas, no qual os objetos geométricos serão referenciados.

### 1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço (euclidiano) é constituído de um ponto  $O$  e uma base de vetores  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto  $P$  determina de forma única um vetor  $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$  e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto  $P$  tem coordenadas  $(x, y, z)$ . Veja a figura abaixo.

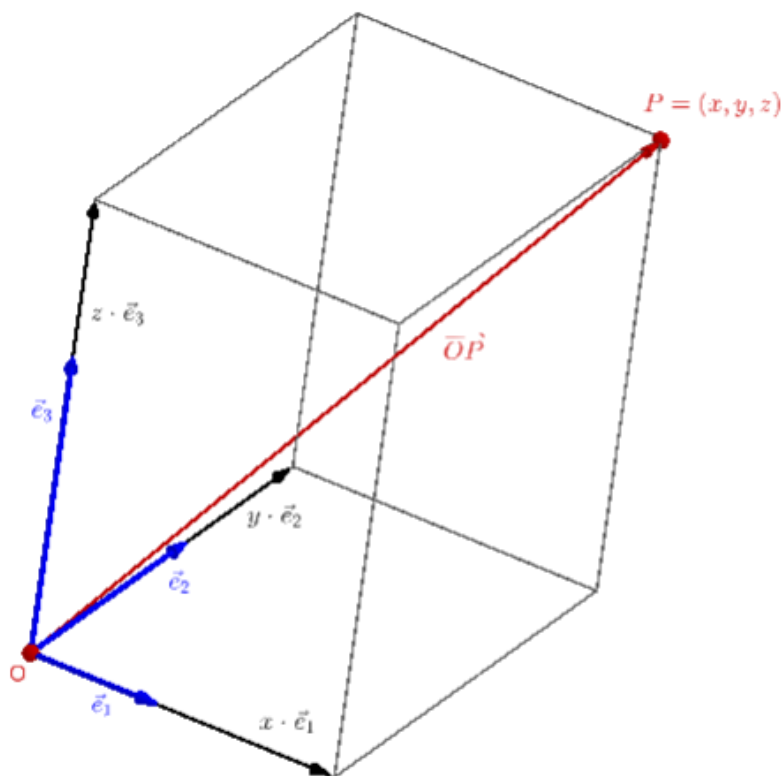


Figura 1.1: Ilustração de um sistema de coordenadas no espaço.

O ponto  $O$  é chamado de **origem** (do sistema de coordenadas) e tem coordenadas  $O = (0,0,0)$ . Dado um ponto  $P = (x,y,z)$ , chama-se  $x$  de sua **abscissa**,  $y$  de sua **ordenada** e  $z$  de sua **cota**. As retas que passam por  $O$  e têm, respectivamente, as mesmas direções de  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contêm  $O$  e representantes de dois vetores da base  $B$  são chamados de **planos coordenados**.

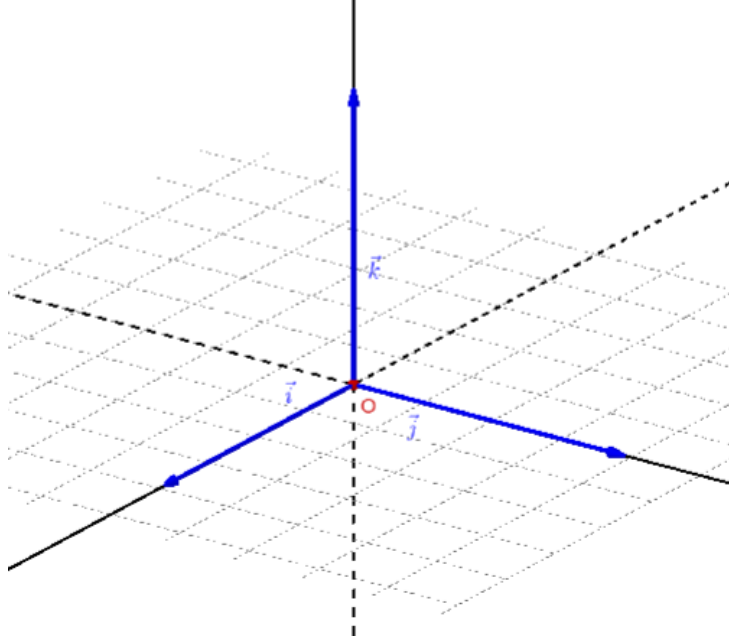


Figura 1.2: Ilustração de um sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com um **sistema de coordenadas ortonormal**, i.e. sistema cuja base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 2.1.

**Observação 1.1.1.** (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Sabendo as coordenadas dos pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , temos que as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (1.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (1.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (1.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (1.4)$$

Em uma linguagem menos formal, podemos dizer que as coordenadas de  $\overrightarrow{AB}$  é a resultante das coordenadas do ponto final menos as coordenadas do ponto de partida. Veja a figura abaixo.



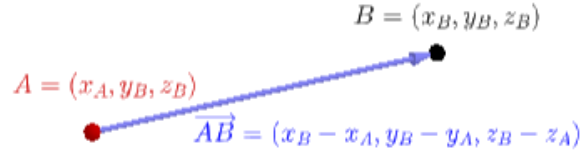


Figura 1.3: Relação entre as coordenadas dos pontos de partida e de chegada de um vetor.

**Exemplo 1.1.1.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (1.5)$$

**Observação 1.1.2.** (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , podemos calcular as coordenadas do ponto médio  $M = (x_M, y_M, z_M)$  do segmento  $AB$ . Veja a figura abaixo.

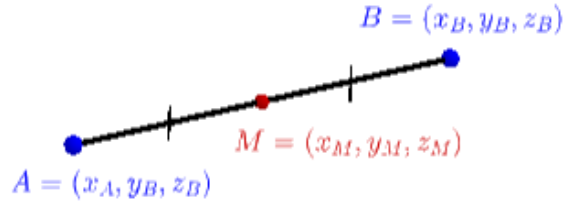


Figura 1.4: Coordenadas do ponto médio de um segmento.

Do fato de que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ , temos

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (1.6)$$

Logo, segue que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad (1.7)$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \quad (1.8)$$

$$z_M - z_A = z_B - z_M \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente,

$$2x_M = x_A + x_B \quad (1.10)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (1.11)$$

$$2z_M = z_A + z_B \quad (1.12)$$

Portanto, concluímos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (1.13)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (1.14)$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (1.15)$$

Logo, temos

$$M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \quad (1.16)$$

**Exemplo 1.1.2.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o ponto médio do segmento  $AB$  tem coordenadas:

$$M = \left( \frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) \quad (1.17)$$

$$= (1, 0, 1). \quad (1.18)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $C = (x, 2, 2)$  vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados  $AC$  e  $BC$  são congruentes. Determine o valor de  $x$ .

**Solução.** Sendo os lados  $AC$  e  $BC$  congruentes, temos  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (1.19)$$

e as coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (1.20)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (1.25)$$

◇

**ER 1.1.2.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $M$  o ponto médio do intervalo  $AB$ . Determine as coordenadas do ponto  $P$  de forma que  $2AP = AM$ .

**Solução.** As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left( \frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left( 0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Agora, denotando  $P = (x_P, y_P, z_P)$ , temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left( 0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left( 1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (1.28)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (1.29)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (1.30)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (1.31)$$

Logo,  $P = (-1/2, 1, 3/4)$ .

◇

**Exercícios**

**E 1.1.1.** Sejam dados os pontos  $A = (1, -1, 2)$  e  $B = (0, 1, -2)$ . Determine as coordenadas do vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ .

**E 1.1.2.** Sejam dados os pontos  $E = (-1, 2, 0)$  e  $F = (2, -1, 1)$ . Calcule o ponto médio do segmento  $EF$ .

**E 1.1.3.** Sejam dados os pontos  $A = (-1, 1, -1)$  e  $M = (0, 1, 3)$ . Determine o ponto  $B$  tal que  $M$  seja o ponto médio do segmento  $AB$ .

**E 1.1.4.** Sejam dados os pontos  $A = (1, -1, 1)$ ,  $B = (2, 1, 0)$  e  $C = (x, 2, 1)$ . Determine  $x$  tal que  $ABC$  forme um triângulo retângulo com hipotenusa  $BC$ .

**E 1.1.5.** Determine a distância entre os pontos  $C = (2, -1, 0)$  e  $D = (1, 1, 1)$ .

## Capítulo 2

### Estudo de retas

Neste capítulo, vamos estudar retas no espaço (euclidiano) tridimensional. Vamos começar fixando um sistema de coordenadas, no qual iremos desenvolver equações para retas.

#### 2.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço é constituído de um ponto  $O$  e uma base de vetores  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto  $P$  determina de forma única um vetor  $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$  e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto  $P$  tem coordenadas  $(x, y, z)$ .

O ponto  $O$  é chamado de **origem** (do sistema de coordenados) e tem coordenadas  $(0, 0, 0)$ . Dado um ponto  $P = (x, y, z)$ , chama-se  $x$  de sua **abscissa**,  $y$  de sua **ordenada** e  $z$  de sua **cota**. As retas que passam por  $O$  e têm, respectivamente, as mesmas direções de  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém  $O$  e representantes de dois vetores da base  $B$  são chamados de **planos coordenados**.

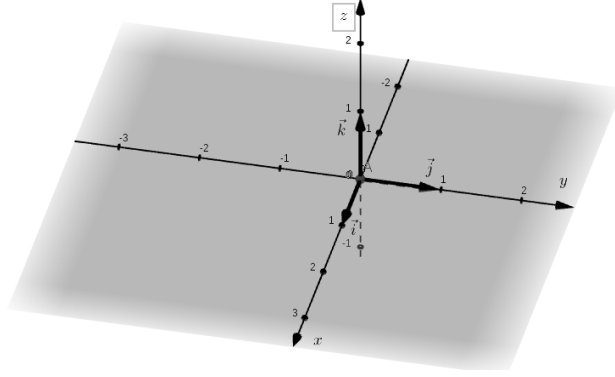


Figura 2.1: Sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com **sistemas de coordenadas ortogonais**, i.e. sistema cuja base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 2.1.

**Observação 2.1.1.** (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Sabendo as coordenadas dos pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , temos que as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (2.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (2.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (2.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.1.1.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (2.5)$$

**Observação 2.1.2.** (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , podemos calcular as coordenadas do ponto médio  $M = (x_M, y_M, z_M)$  do segmento  $AB$ , do fato de que  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ . Portanto

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (2.6)$$

donde

$$2x_M = x_A + x_B \quad (2.7)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (2.8)$$

$$2z_M = z_A + z_B. \quad (2.9)$$

Logo, temos  $M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$ .

**Exemplo 2.1.2.** Dados os pontos  $A = (-1, 1, 2)$  e  $B = (3, -1, 0)$ , temos que o ponto médio do segmento  $AB$  tem coordenadas:

$$M = \left( \frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (1, 0, 1). \quad (2.10)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $C = (x, 2, 2)$  vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados  $AC$  e  $BC$  são congruentes. Determine o valor de  $x$ .

**Solução.** Sendo os lados  $AC$  e  $BC$  congruentes, temos  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ . As coordenadas de  $\overrightarrow{AC}$  são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (2.11)$$

e as coordenadas de  $\overrightarrow{BC}$  são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (2.12)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (2.17)$$

◇

**ER 2.1.2.** Sejam  $A = (-1, 2, 1)$ ,  $B = (1, -2, 0)$  e  $M$  o ponto médio do intervalo  $AB$ . Determine as coordenadas do ponto  $P$  de forma que  $2AP = AM$ .

**Solução.** As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left( \frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left( 0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Agora, denotando  $P = (x_P, y_P, z_P)$ , temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left( 0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left( 1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.20)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (2.21)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (2.22)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (2.23)$$

Logo,  $P = (-1/2, 1, 3/4)$ .

◇

## Exercícios

Em construção ...

## 2.2 Equações da reta

### 2.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja  $r$  uma reta dada,  $\vec{v}$  um vetor paralelo a  $r$  e  $A$  um ponto de  $r$  (veja a Figura 2.2). Assim sendo,  $P$  é um ponto de  $r$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.24)$$



Esta é chamada **equação vetorial da reta**  $r$ .

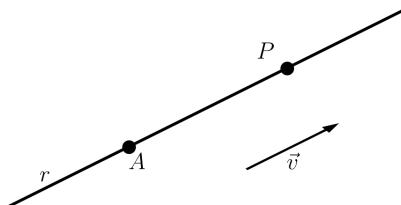


Figura 2.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto  $A \in r$  e qualquer vetor  $\vec{v} \parallel r$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . O vetor  $\vec{v}$  escolhido é chamado de **vetor diretor**.

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $A = (-1, -1, -2)$  e  $B = (2, 1, 3)$  (veja a Figura 2.3). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3, 2, 5) \quad (2.25)$$

é um vetor diretor de  $r$ . Desta forma, uma equação vetorial da reta  $r$  é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.26)$$

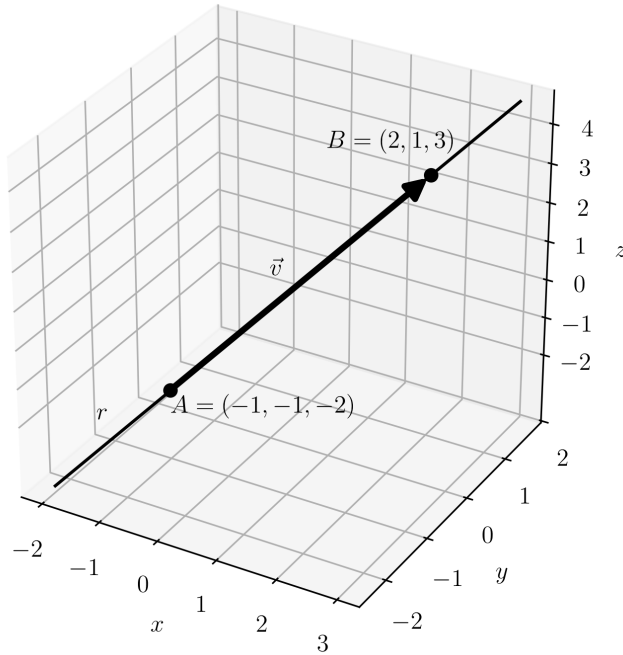


Figura 2.3: Esboço da reta discutida no Exemplo 2.2.1.

### 2.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e tenha vetor diretor  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Assim,  $P = (x, y, z) \in r$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.27)$$

Equivalentemente,

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(v_1, v_2, v_3). \quad (2.28)$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \quad (2.29)$$

$$y - y_A = \lambda v_2, \quad (2.30)$$

$$z - z_A = \lambda v_3, \quad (2.31)$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \quad (2.32)$$

$$y = y_A + \lambda v_2, \quad (2.33)$$

$$z = z_A + \lambda v_3, \quad (2.34)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta  $r$ .

**Exemplo 2.2.2.** A reta  $r$  discutida no Exemplo 2.2.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (2.35)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (2.36)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (2.37)$$

De fato, tomando  $\lambda = 0$ , temos  $(x, y, z) = (-1, -1, -2) = A \in r$ . E, tomado  $\lambda = 1$ , temos  $(x, y, z) = (-1 + 3, -1 + 2, -2 + 5) = (2, 1, 3) = B \in r$ . Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Com o Sympy, podemos plotar o gráfico de  $r$  usando o seguinte código<sup>1</sup>:

```
var('lbda', real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda, -1+2*lbda, -2+5*lbda, (lbda, -1, 2))
```

### 2.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja  $r$  uma reta que passa pelo ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e tem  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  como vetor diretor. Então,  $r$  tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1 \lambda, \quad (2.38)$$

$$y = y_A + v_2 \lambda, \quad (2.39)$$

$$z = z_A + v_3 \lambda. \quad (2.40)$$

Isolando  $\lambda$  em cada uma das equações, obtemos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \quad (2.41)$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

---

<sup>1</sup>Veja a Observação ??.

**Exemplo 2.2.3.** No Exemplo 2.2.2, consideramos a reta  $r$  de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (2.42)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (2.43)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (2.44)$$

Para obtermos as equações de  $r$  na forma simétrica, basta isolarmos  $\lambda$  em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}. \quad (2.45)$$

## 2.2.4 Exercícios resolvidos

**ER 2.2.1.** Seja  $r$  a reta que passa pelo ponto  $A = (-1, -1, -2)$  e tem  $\vec{v} = (3, 2, 5)$  como vetor diretor. Determine o valor de  $x$  de forma que  $P = (x, 0, 1/2)$  seja um ponto de  $r$ .

**Solução.**  $P = (x, 0, 1/2)$  é um ponto de  $r$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.46)$$

Ou seja,

$$\left( x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2) \right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (2.47)$$

Ou, equivalentemente,

$$\left( x + 1, 1, \frac{5}{2} \right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (2.48)$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x + 1 = \lambda 3 \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{2} \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

◇

**ER 2.2.2.** Seja  $r$  a reta de equações paramétricas

$$x = 1 - \lambda, \quad (2.52)$$

$$y = \lambda, \quad (2.53)$$

$$z = -3. \quad (2.54)$$

Determine uma equação vetorial de  $r$ .

**Solução.** Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes de  $\lambda$  estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta  $r$ , temos que  $A = (1, 0, -3) \in r$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 0)$  é um vetor diretor. Logo, temos que a reta  $r$  tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}, \quad (2.55)$$

com  $A = (1, 0, 3)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ .

◇

**ER 2.2.3.** Sabendo que  $r$  é uma reta que passa pelos pontos  $A = (2, -3, 1)$  e  $B = (-1, 1, 0)$ , determine o valor de  $t$  tal que

$$x = 2 + t\lambda, \quad (2.56)$$

$$y = -2 + 4\lambda, \quad (2.57)$$

$$z = 1 - \lambda, \quad (2.58)$$

sejam equação paramétricas de  $r$ .

**Solução.** Para que estas sejam equações paramétricas de  $r$ , é necessário que  $\vec{v} = (t, 4, -1)$  seja um vetor diretor de  $r$ . Em particular,  $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$ . Logo, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$(t, 4, -1) = \beta(-1 - 2, 1 - (-3), 0 - 1) = \beta(-3, 4, -1). \quad (2.59)$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos  $\beta = 1$ . Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \Rightarrow t = -3. \quad (2.60)$$



**ER 2.2.4.** Seja  $r$  uma reta, cujas equações na forma simétrica são

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \quad (2.61)$$

Determine equações paramétricas desta reta e faça um esboço de seu gráfico.

**Solução.** Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro  $\lambda$  tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \quad (2.62)$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \quad (2.63)$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \quad (2.64)$$

Daí, isolando  $x$ ,  $y$  e  $z$  em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \quad (2.65)$$

$$y = 2 + 3\lambda, \quad (2.66)$$

$$z = 1 - 2\lambda. \quad (2.67)$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando  $\lambda = 0$ , temos  $A = (-1, 2, 1) \in r$ . Agora, tomando  $\lambda = 1$ , temos  $B = (1, 5, -1) \in r$ . Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 2.4.

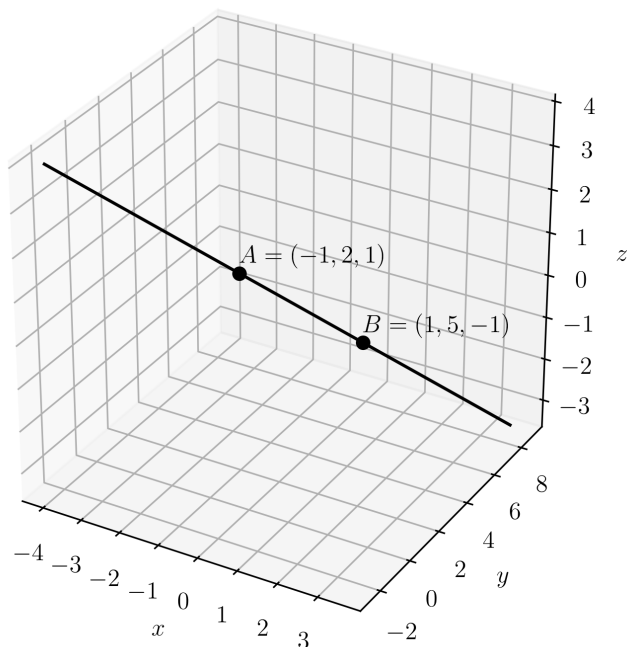


Figura 2.4: Esboço do gráfico da reta  $r$  do Exercício Resolvido [2.2.4](#).

◇

# Capítulo 3

## Estudo de planos

**Observação 3.0.1.** Neste capítulo, assumimos que os códigos Python têm o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

### 3.1 Equações do plano

Um plano  $\pi$  fica unicamente determinado por um ponto  $A \in \pi$  e dois vetores linearmente independentes  $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$ <sup>1</sup>.

#### 3.1.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A$  e os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Então, um ponto  $P \in \pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$  é coplanar a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , i.e.  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes. Ou seja,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

esta última é chamada de **equação vetorial do plano**.

**Exemplo 3.1.1.** Consideremos o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e pelos vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$  (Veja a Figura 3.1. Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>No sentido que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm representantes no plano  $\pi$ .



para  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

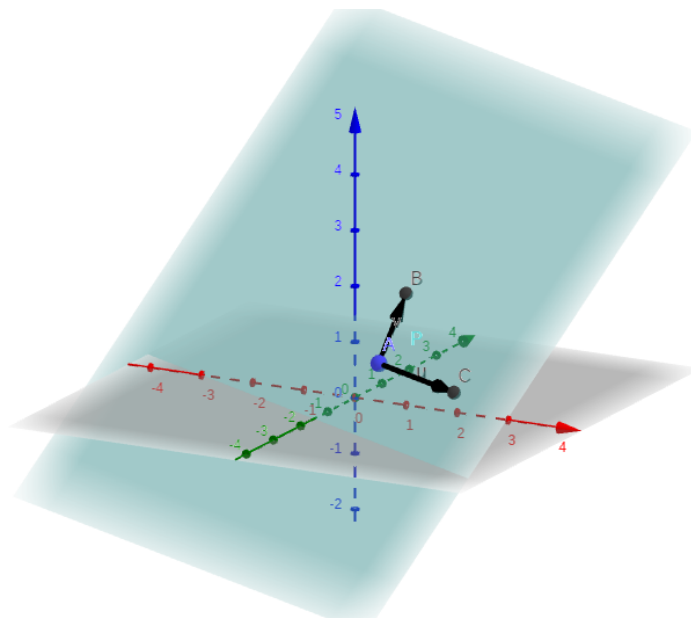


Figura 3.1: Esboço do plano  $\pi$  discutido no Exemplo 3.1.1.

Tomando, por exemplo,  $\lambda = -1$  e  $\beta = 1$ , obtemos

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \quad (3.3)$$

$$= -(2, -1, 0) + (0, 1, 1) \quad (3.4)$$

$$= (-2, 2, 1). \quad (3.5)$$

Observando que as coordenadas do ponto  $P$  são iguais as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , temos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \quad (3.6)$$

$$= (1, -1, 1) + (-2, 2, 1) \quad (3.7)$$

$$= (-1, 1, 2). \quad (3.8)$$

Ou seja,  $P = (-1, 1, 2) \in \pi$ .

### 3.1.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano  $\pi$  com  $A = (x_A, y_A, z_A) \in \pi$  e os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \pi$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \pi$  linearmente independentes. Então, todo o ponto  $P =$

$(x, y, z)$  do plano  $\pi$  satisfaz

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.9)$$

para dados parâmetros  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ . Assim, temos

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad (3.10)$$

$$= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). \quad (3.11)$$

Portanto, temos

$$x - x_A = \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (3.12)$$

$$y - y_A = \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (3.13)$$

$$z - z_A = \lambda u_3 + \beta v_3. \quad (3.14)$$

Ou, equivalentemente,

$$x = x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (3.15)$$

$$y = y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (3.16)$$

$$z = z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \quad (3.17)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

**Exemplo 3.1.2.** No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ . Do que vimos acima, temos que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad (3.18)$$

$$y = -1 - \lambda + \beta, \quad (3.19)$$

$$z = 1 + \beta, \quad (3.20)$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o Sympy. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                           (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                           xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

### 3.1.3 Equação geral do plano

Seja  $\pi$  o plano determinado pelo ponto  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e pelos vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Sabemos que  $P = (x, y, z) \in \pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto  $[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$ . Logo,

$$0 = [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (3.21)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

$$= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \quad (3.23)$$

$$- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \quad (3.24)$$

$$+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \quad (3.25)$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (3.26)$$

com  $a, b, c, d$  não todos nulos ou, equivalentemente,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ . Esta última é chamada **equação geral do plano**.

**Exemplo 3.1.3.** No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano  $\pi$  determinado pelo ponto  $A = (1, -1, 1)$  e os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ . Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos  $P = (x, y, z)$  e calculamos

$$0 = [\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (3.27)$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

$$= -x - 2y + 2z - 3. \quad (3.29)$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \quad (3.30)$$

### 3.1.4 Exercícios resolvidos

**ER 3.1.1.** Seja  $\pi$  um plano tal que  $A = (2, 0, -1) \in \pi$ ,  $P = (0, 1, -1) \in \pi$  e  $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \pi$ . Determine uma equação vetorial para  $\pi$ .

**Solução.** Para obtermos uma equação vetorial do plano  $\pi$ , precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em  $\pi$ . Do enunciado, temos o ponto  $A = (2, 0, -1) \in \pi$  e o vetor  $\vec{u}$ . Portanto, precisamos encontrar um vetor  $\vec{v} \in \pi$  tal que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam l.i.. Por sorte, temos  $P = (0, 1, -1) \in \pi$  e, portanto  $\overrightarrow{AP} \in \pi$ . Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \quad (3.31)$$

$$= (-2, 1, 0), \quad (3.32)$$

pois  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano  $\pi$  é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.33)$$

$$= \lambda(1, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0), \quad (3.34)$$

com  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

◇

**ER 3.1.2.** Seja  $\pi$  o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \quad (3.35)$$

$$y = \beta, \quad (3.36)$$

$$z = 1 - \lambda + \beta. \quad (3.37)$$

Determine o valor de  $z_P$  de forma que  $P = (-1, 2, z_P) \in \pi$ .

**Solução.** Para que  $P = (-1, 2, z_P)$  pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \quad (3.38)$$

$$2 = \beta, \quad (3.39)$$

$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \quad (3.40)$$

Das duas primeiras equações, obtemos  $\lambda = 0$  e  $\beta = 2$ . Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \quad (3.41)$$

◇

Em construção ...

# Capítulo 4

## Cônicas

### 4.1 Elipse

Sejam  $F_1, F_2$  pontos sobre um plano  $\pi$ ,  $c$  a distância entre  $c_1$  e  $c_2$  e  $a > c$ . Chama-se **elipse** de **focos**  $F_1$  e  $F_2$  ao conjunto de pontos  $P$  tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (4.1)$$

Veja a Figura [4.1](#).

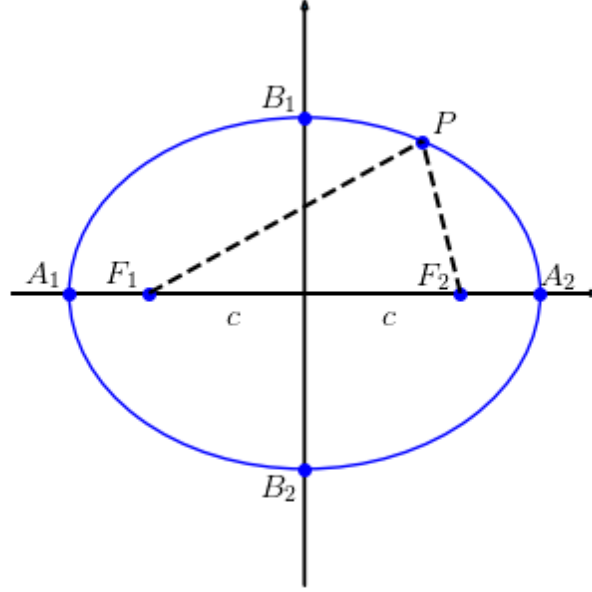


Figura 4.1: Ilustração de uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Dada uma tal elipse, identificamos  $2c = |F_1F_2|$  como a **distância focal**. Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento  $A_1A_2$  é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \quad (4.2)$$

O ponto médio do segmento  $F_1F_2$  é chamado de **centro** da elipse. Sejam  $B_1$  e  $B_2$  os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento  $A_1A_2$ . Assim sendo, o segmento  $B_1B_2$  é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \quad (4.3)$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4.4)$$

Notemos que  $0 \leq e < 1$ . Para  $e = 0$ , temos  $c = 0$  e, portanto  $F_1 = F_2$ . Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em  $F_1$  (ou  $F_2$ ) e diâmetro  $2a$ . No que  $e$  tende a 1, a elipse tende ao segmento  $A_1A_2$ .

Por fim, notemos que o triângulo  $B_1OF_2$  é retângulo,  $|OF_2| = c$ ,  $|F_2B_1| = a$  e  $|OB_1| = b$ . Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ ,  $c \geq 0$ , os focos de uma dada elipse (veja a Figura 4.1). Se  $P = (x, y)$  é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (4.6)$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad (4.7)$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (4.8)$$

temos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad (4.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (4.10)$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2. \quad (4.11)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (4.12)$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \quad (4.13)$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \quad (4.14)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (4.15)$$

Como  $a > c$ , dividimos por  $a^2 - c^2$  e depois por  $a^2$  para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (4.16)$$

Por fim, da equação (4.5), temos  $a^2 - c^2 = b^2$ , o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.17)$$

## Exercícios resolvidos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

## 4.2 Hipérbole

Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos sobre um plano  $\pi$  e. Sejam, também,  $c$  tal que  $|F_1F_2| = 2c$  e  $a < c$ . O lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \quad (4.18)$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura 4.2.



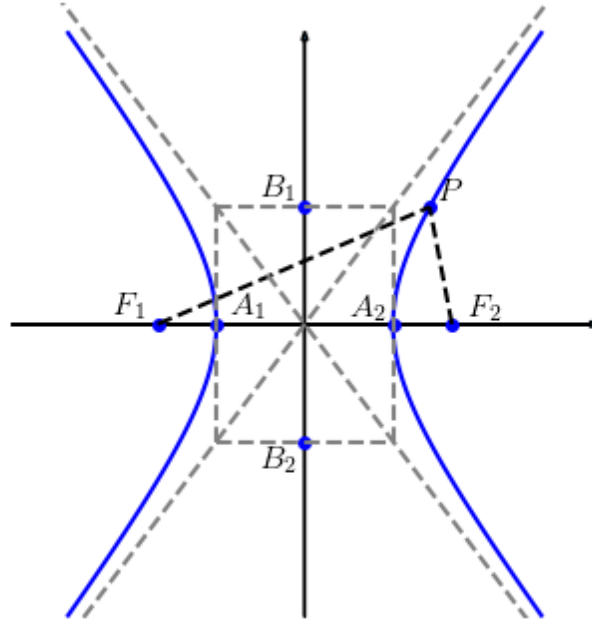


Figura 4.2: Ilustração de uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de **focos** da hipérbole e  $2c = |F_1F_2|$  é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos  $F_1$  e  $F_2$  é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , sendo que o segmento  $A_1A_2$  é chamado de **eixo real** (ou transverso) da hipérbole. O comprimento deste eixo é  $|A_1A_2| = 2a$ .

Sejam  $B_1$  e  $B_2$  pontos  $c$  distantes de  $A_1$  e  $A_2$  e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento  $B_1B_2$  é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando  $2b = |B_1B_2|$ , temos do triângulo retângulo  $B_1OA_1$  que

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (4.19)$$

### 4.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da

hipérbole. Desta forma, temos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ . Então,  $P = (x, y)$  é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \quad (4.20)$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (4.22)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad (4.23)$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \quad (4.24)$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (4.25)$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (4.26)$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (4.27)$$

Lembrando que  $c^2 = a^2 + b^2$ , temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (4.28)$$

Dividindo por  $a^2b^2$ , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.29)$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Em construção ...

## 4.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta  $d$  e um ponto  $F$  não pertencente a  $d$ . Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos  $P$  do plano que são equidistantes de  $F$  e de  $d$ , i.e.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (4.30)$$

Veja a Figura 4.3.

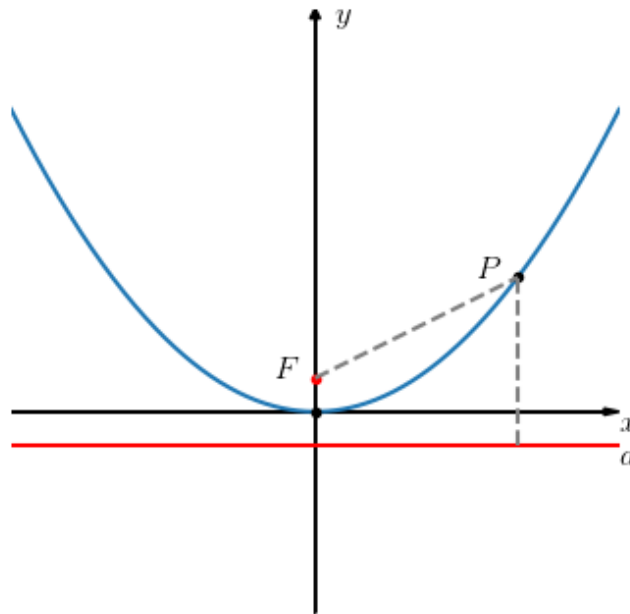


Figura 4.3: Ilustração de uma parábola.

O ponto  $F$  é chamado de **foco** da parábola. A reta  $d$  é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a  $d$  e que passa pelo ponto  $F$  é chamada de **eixo** da parábola. O ponto  $V$  de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

### 4.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja  $p$  tal que

$$F = (0, p/2). \quad (4.31)$$

Logo, a diretriz tem equação  $y = -p/2$ . Da definição de parábola,  $P = (x, y)$  pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (4.32)$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \quad (4.33)$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \quad (4.34)$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \quad (4.35)$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

**Observação 4.3.1.** Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco  $F = (p/2, 0)$ , tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \quad (4.36)$$

### Exercícios resolvidos

Em construção ...

### Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.1.**  $\vec{v} = (1, -2, 4)$

**E 1.1.2.**  $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**E 1.1.3.**  $B = (1, 1, 7)$

**E 1.1.4.**  $x = -5$

**E 1.1.5.**  $|CD| = \sqrt{6}$

# Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.