

# Minicurso de Python para Matemática

Pedro H A Konzen

19 de julho de 2022

## Sumário

<b>1</b>	<b>Licença</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sobre a linguagem</b>	<b>2</b>
2.1	Instalação e execução . . . . .	3
2.1.1	Console online . . . . .	3
2.2	Utilização . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Elementos da linguagem</b>	<b>4</b>
3.1	Tipos/objetos básicos . . . . .	4
3.2	Operações aritméticas elementares . . . . .	6
3.3	Funções e constantes elementares . . . . .	7
3.4	Operadores de comparação elementares . . . . .	8
3.5	Operadores lógicos elementares . . . . .	8
3.6	Conjuntos . . . . .	9
3.7	$n$ -uplas . . . . .	11
3.8	Listas . . . . .	13
3.9	Dicionários . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Função, ramificação e repetição</b>	<b>17</b>
4.1	Definindo funções . . . . .	17
4.2	Ramificação . . . . .	19
4.3	Repetição . . . . .	20
4.3.1	while . . . . .	20
4.3.2	for . . . . .	21

4.3.3	range . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Elementos da computação matricial</b>	<b>22</b>
5.1	NumPy array . . . . .	22
5.1.1	Inicialização de um array . . . . .	24
5.1.2	Manipulação de arrays . . . . .	25
5.1.3	Operadores elemento-a-elemento . . . . .	26
5.2	Elementos da álgebra linear . . . . .	27
5.2.1	Vetores . . . . .	27
5.2.2	Produto escalar e norma . . . . .	28
5.2.3	Matrizes . . . . .	29
5.2.4	Inicialização de matrizes . . . . .	30
5.2.5	Multiplicação de matrizes . . . . .	30
5.2.6	Traço e Determinante de uma matriz . . . . .	31
5.2.7	Rank e inversa de uma matriz . . . . .	32
5.2.8	Autovalores e autovetores de uma matriz . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Gráficos</b>	<b>33</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>35</b>

## 1 Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

## 2 Sobre a linguagem

**Python** é uma **linguagem de programação** de **alto nível** e **multiparadigma**. Ou seja, é relativamente próxima das linguagens humanas naturais, é desenvolvida para aplicações diversas e permite a utilização de diferentes paradigmas de programação (programação estruturada, orientada a objetos, orientada a eventos, paralelização, etc.).

- Site oficial

<https://www.python.org/>

## 2.1 Instalação e execução

Para executar um código [Python](#) em seu computador é necessário instalar um interpretador. No [site oficial do Python](#) estão disponíveis para *download* interpretadores gratuitos e com licença livre para uso. Neste minicurso, vamos utilizar **Python 3** instalado em um sistema [Linux](#). Para outros sistemas, pode ser necessário fazer algumas pequenas adequações.

### 2.1.1 Console online

Alternativamente, há consoles online [Python](#) disponíveis na web. Para quem tem conta [Google](#), o [Google Colab](#) disponibiliza um **notebook Python** gratuito.

## 2.2 Utilização

A execução de códigos [Python](#) pode ser feita de três formas básicas:

- em modo interativo em um console/notebook [Python](#);
- por execução de um código `arqnome.py` em um console/notebook [Python](#);
- por execução de um código `arqnome.py` em um terminal;

**Exemplo 2.1.** Implemente o seguinte pseudocódigo.

```
s = "Ola, mundo!".  
imprime(s). (imprime a string s)
```

- a) em modo iterativo no console;
- b) escrevendo o código `ola.py` e executando-o no console;
- c) escrevendo o código `ola.py` e executando-o no terminal.

**Resolução.** Seguem as implementações em cada caso.

- a) Em modo iterativo.

Iniciamos um console [Python](#) em terminal digitando

```
$ python3
```

Então, digitamos

```
1      >>> s = "Olá, Mundo!"
2      >>> print(s) #imprime a string s
3      Olá, Mundo!
```

Para encerrar o console, digitamos

```
1      >>> quit()
```

b) Executando um *script* `ola.py` no console.

Primeiramente, escrevemos o código

```
1      s = "Olá, Mundo!"
2      print(s) # imprime a string s
```

em um editor de texto (ou no seu IDE de preferência) e salvamo-lo em `/caminho/ola.py`. Então, executamo-lo no console [Python](#) com

```
1      >>> exec(open('/pasta/codigo.py').read())
2      Olá, mundo!
3      >>> quit()
```

c) Executando o código em terminal.

Considerando que já temos o código salvo em `/caminho/ola.py`, executamo-lo com

```
1      $ python3 /caminho/codigo.py
2      Olá, mundo!
3      $ exit
```

## 3 Elementos da linguagem

### 3.1 Tipos/objetos básicos

[Python](#) é uma **linguagem** de programação **dinâmica** em que as variáveis são declaradas automaticamente ao receberem um valor. Por exemplo, consideremos as seguintes instruções

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x * 2.0
```

Na primeira instrução, a variável `x` recebe o valor inteiro 1 e, então, é armazenado na memória do computador como um objeto da classe `int` (número inteiro). Na segunda instrução, `y` recebe o valor decimal 2.0 (resultado de  $1 \times 2.0$ ) e é armazenado como um objeto da classe `float` (ponto flutuante de 64-bits). Podemos verificar isso, com as seguintes instruções

```
1 >>> print(x, y)
2 1 2.0
3 >>> print(type(x), type(y))
4 <class 'int'> <class 'float'>
```

Códigos `Python` admitem comentários e continuação de linha como no seguinte exemplo

```
1 >>> # isto é um comentário
2 >>> s = "isto é uma \
3 ... string"
4 >>> print(s)
5 isto é uma string
6 >>> type(s)
7 <class 'str'>
```

**Observação 3.1.** (Notação científica) O `Python` aceita notação científica. Por exemplo  $5.2 \times 10^{-2}$  é digitado da seguinte forma

```
1 >>> 5.2e-2
2 0.052
```

**Observação 3.2.** Além dos tipos numéricos e *string*, `Python` também conta com os tipos de dados `list` (lista), `tuple` (*n*-upla) e `dict` (dicionário). Estudaremos estes tipos mais adiante neste minicurso.

**Exercício 3.1.1.** Antes de implementar, diga qual o valor de `x` após as seguintes instruções.

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x
3 >>> y = 0
```

Justifique seu resposta e verifique-a.

**Exercício 3.1.2.** Implemente um código em que o usuário entre com valores para as variáveis  $x$  e  $y$ <sup>1</sup>. Então, os valores das variáveis são permutados entre si.

## 3.2 Operações aritméticas elementares

Os operadores aritméticos elementares são:

`+`: adição

`-`: subtração

`*`: multiplicação

`/`: divisão

`**`: potenciação

`%`: módulo

`//`: divisão inteira

Consideremos o seguinte exemplo

```
1 >>> 2+8*3/2**2-1
2 7.0
```

Observamos que as operações `**` tem precedência sobre as operações `*`, `/`, `%`, `//`, as quais têm precedência sobre as operações `+`, `-`. Operações de mesma precedência seguem a ordem da esquerda para direita, conforme escritas na linha de comando. Usa-se parênteses para alterar a precedência entre as operações, por exemplo

```
1 >>> (2+8*3)/2**2-1
2 5.5
```

Consulte mais informações sobre a precedência de operadores em [Python Docs](#).

**Exercício 3.2.1.** Compute as raízes do seguinte polinômio quadrático

$$p(x) = x^2 - x - 2 \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>A entrada de valores via console pode ser feita com a função `Python input`. Consulte [Python Docs](#).

usando a fórmula de Bhaskara<sup>2</sup>. Dica: para calcular  $\sqrt{x}$  use `x**(1/2)`.

O operador `%`módulo computa o resto da divisão e o operador `//` a divisão inteira, por exemplo

```
1 >>> 5 % 2
2 1
3 >>> 5 // 2
4 2
```

**Exercício 3.2.2.** Use o [Python](#) para computar os inteiros positivos  $q$  e  $r$  tais que

$$25 = q \cdot 5 + r, \quad (2)$$

sendo  $r$  o menor possível.

### 3.3 Funções e constantes elementares

O módulo Python [math](#) disponibiliza várias funções e constantes elementares. Para usá-las, precisamos importar o módulo para nossa seção. Fazemos isso com a instrução

```
1 >>> import math
```

Com isso, temos acesso a todas as definições e declarações contidas neste módulo. Por exemplo

```
1 >>> math.pi
2 3.141592653589793
3 >>> math.cos(math.pi)
4 -1.0
5 >>> math.sqrt(2)
6 1.4142135623730951
7 >>> math.log(math.e)
8 1.0
```

**Observação 3.3.** Notemos que `math.log` é a função logaritmo natural, i.e.  $\ln(x) = \log_e(x)$ . A implementação [Python](#) para o logaritmo de base 10 é `math.log(x,10)` ou, mais acurado, `math.log10`.

**Exercício 3.3.1.** Compute

---

<sup>2</sup>Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático e astrônomo indiano. Fonte: [Wikipédia](#).

a)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b)  $e^{\log_3(\pi)}$

c)  $\sqrt[3]{-27}$

.

**Exercício 3.3.2.** Refaça o Exercício usando a função `math.sqrt` para computar a raiz quadrada do discriminante.

### 3.4 Operadores de comparação elementares

Os operadores de comparação elementares são

`==`: igual a

`!=`: diferente de

`>`: maior que

`<`: menor que

`>=`: maior ou igual que

`<=`: menor ou igual que

Estes operadores retornam os valores lógicos `True` (verdadeiro) ou `False` (falso).

Por exemplo, temos

```
1 >>> x = 2
2 >>> x + x == 4
3 True
```

**Exercício 3.4.1.** Atribua a variável `x` o valor  $\sqrt{3}$ . Então, verifique se o valor computado de  $x^2$  é maior que 3. Em caso negativo, verifique se  $x^2$  é menor que 3. Comente o resultado obtido.

### 3.5 Operadores lógicos elementares

Os operadores lógicos elementares são:



**and:** e lógico

**or:** ou lógico

**not:** não lógico

A tabela booleana<sup>3</sup> do “e” lógico é

Valor	Valor	Resultado
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

Podemos verificar isso no [Python](#) como segue

```
1 >>> True and True
2 True
3 >>> True and False
4 False
5 >>> False and True
6 False
7 >>> False and False
8 False
```

**Exercício 3.5.1.** Construa as tabelas booleanas do operador **or** e do **not**.

**Exercício 3.5.2.** Use [Python](#) para verificar se  $1.4 \leq \sqrt{2} < 1.5$ . E, também, verifique se  $\sqrt{3} > 1.7$  ou  $\sqrt{3} \geq 1.7321$ .

**Exercício 3.5.3.** Implemente uma instrução para computar o operador **xor** (ou exclusivo). Dadas duas afirmações A e B, **A xor B** é **True** no caso de uma, e somente uma, das afirmações ser **True**, caso contrário é **False**.

## 3.6 Conjuntos

[Python](#) tem conjuntos finitos como um tipo básico de variável. Um conjunto é uma coleção de itens **não ordenada** e **imutável** e **não admite itens duplicados**. Por exemplo,

```
1 >>> a = {1, 2, 3}
2 >>> type(a)
```

---

<sup>3</sup>George Boole, 1815 - 1864, matemático e filósofo britânico. Fonte: [Wikipédia](#).

```
3 <class 'set'>
4 >>> b = set((2, 1, 3, 3))
5 >>> b
6 {1, 2, 3}
7 >>> a == b
8 True
9 >>> # conjunto vazio
10 >>> e = set()
```

aloca o conjunto  $a = \{1, 2, 3\}$ . Note que o conjunto  $b$  é igual a  $a$ . Observamos que o conjunto vazio deve ser construído com a instrução `set()` e não com `{}`<sup>4</sup>.

**Observação 3.4.** A função [Python](#) `len` retorna o número de elementos de um conjunto. Por exemplo,

```
1 >>> len(a)
2 3
```

Operadores envolvendo conjuntos:

-: diferença entre conjuntos;

|: união de conjuntos;

&: interseção de conjuntos;

^: diferença simétrica;

**Exemplo 3.1.** Sejam os conjuntos

$$A = \{2, \pi, -0.25, 3, \text{'banana'}\}, \quad (3)$$

$$B = \{\text{'laranja'}, 3, \arccos(-1), -1\} \quad (4)$$

Compute

a)  $A \setminus B$

b)  $A \cup B$

c)  $A \cap B$

d)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

---

<sup>4</sup>Isso constrói um dicionário vazio, como introduziremos logo mais.

**Resolução.** Começamos alocando os conjuntos como segue

```
1 >>> import math
2 >>> A = {2, math.pi, -0.25, 3, 'banana'}
3 >>> B = {'laranja', 3, math.acos(-1), -1}
```

a)  $A \setminus B$

```
1 >>> A - B
2 {-0.25, 2, 'banana'}
```

b)  $A \cup B$

```
1 >>> A | B
2 {-0.25, 2, 3, 3.141592653589793, \
3 'laranja', 'banana', -1}
```

c)  $A \cap B$

```
1 >>> A & B
2 {3, 3.141592653589793}
```

d)  $A \Delta B$

```
1 >>> A ^ B
2 {-0.25, 2, 'laranja', 'banana', -1}
```

**Observação 3.5.** [Python](#) disponibiliza a sintaxe de compreensão de conjuntos. Por exemplo,

```
1 >>> {x for x in A if type(x) == str}
2 {'banana'}
```

**Exercício 3.6.1.** Considere o conjunto

$$Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}. \quad (5)$$

Faça um código [Python](#) para extrair o subconjunto dos números pares do conjunto  $Z$ .

## 3.7 *n-uplas*

Em [Python](#) *n-uplas* (*tuples*) é uma sequência de objetos, i.e. **uma coleção ordenada, indexada e imutável**. Por exemplo, na sequência temos um par, uma tripla e uma quadrupla

```
1 >>> a = (1, 2)
2 >>> a
3 (1, 2)
4 >>> b = -1, 1, 0
5 (-1, 1, 0)
6 >>> c = (0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
7 >>> c
8 (0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
9 >>> len(c)
10 4
```

Os elementos de um **tuple** são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de um **tuple** usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 >>> c[2]
2 {2, -1}
```

Pode-se também extrair uma fatia (um subconjunto) usando-se a notação `:`. Por exemplo,

```
1 >>> c[1:3]
2 ('laranja', {2, -1})
```

- Operadores básicos:

`+`: concatenação

```
1 >>> (1, 2) + (3, 4, 5)
2 (1, 2, 3, 4, 5)
```

`*`: repetição

```
1 >>> (1, 2) * 2
2 (1, 2, 1, 2)
```

`in`: pertencimento

```
1 >>> 1 in (-1, 0, 1, 2)
2 True
```

**Exercício 3.7.1.** Aloque os conjuntos

$$A = \{-1, 0, 2\}, \quad (6)$$

$$B = \{2, 3, 5\}. \quad (7)$$

Então, compute o produto cartesiano  $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ . Qual o número de elementos da  $A \times B$ ? Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 3.5).

**Exercício 3.7.2.** Aloque o gráfico discreto da função<sup>5</sup>  $f(x) = x^2$  para  $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ . Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 3.5).

## 3.8 Listas

O tipo `Python list` permite alocar em uma única variável uma lista de itens ordenada. Por exemplo, observemos as seguintes listas

```
1 >>> x = [-1, 2, -3, -5]
2 >>> type(x)
3 <class 'list'>
4 >>> y = ['a', 'b', 'a']
5 >>> y
6 ['a', 'b', 'a']
7 >>> vazia = []
8 >>> len(x)
9 4
```

Os elementos de uma lista são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de uma lista usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 >>> x[0]
2 -1
3 >>> y[2] = 'c'
4 >>> y
5 ['a', 'b', 'c']
```

---

<sup>5</sup>O gráfico de uma função restrito a um conjunto  $A$  é o conjunto  $G(f)|_A = \{(x,y) : x \in A, y = f(x)\}$ .

Pode-se fazer um corte de elementos de uma lista usando o operador `:`. Por exemplo,

```
1 >>> x = [1, 2, -1, 3, -2]
2 >>> x[2:5]
3 [-1, 3, -2]
```

Operadores básicos:

`+`: concatenação

```
1 >>> [1, 2] + [3, 4, 5]
2 [1, 2, 3, 4, 5]
```

`*`: repetição

```
1 >>> [1, 2] * 2
2 [1, 2, 1, 2]
```

`in`: pertencimento

```
1 >>> 1 in [-1, 0, 1, 2]
2 True
```

**Observação 3.6.** Listas contam com várias funções prontas para a execução de diversas tarefas práticas como, por exemplo, inserir/deletar itens, contar ocorrências, ordenar itens, etc. Consulte [Python Docs](#).

**Observação 3.7.** (Alocação *versus* cópia) Estude o seguinte exemplo

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 0, 1]
```

Notamos que `y` aponta para o mesmo endereço de memória de `x`. Para copiar uma lista e alocá-la em um novo endereço de memória, deve-se usar a função `list.copy()`, como segue

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x.copy()
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
```

```
5    [2, 3, 1]
6    >>> y
7    [2, 0, 1]
```

**Exercício 3.8.1.** Implemente uma lista para alocar os primeiros 5 elementos da sequência de Fibonacci<sup>6</sup>.

**Exercício 3.8.2.** Uma aplicação do Método Babilônico<sup>7</sup> para a aproximação da solução da equação  $x^2 - 2 = 0$ , consiste na iteração

$$x_0 = 1, \quad (8)$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Implemente uma lista para alocar as quatro primeiras aproximações da solução, i.e.  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

**Exercício 3.8.3.** Aloque os seguintes vetores como listas no [Python](#)

$$x = (-1, 3, -2), \quad (10)$$

$$y = (4, -2, 0). \quad (11)$$

Então, compute

a)  $x + y$

b)  $x \cdot y$

Dica: use uma compreensão de lista e os métodos [Python zip](#) e [sum](#).

**Exercício 3.8.4.** Uma matriz pode ser alocada como uma lista de listas [Python](#), alocando cada linha como uma lista e a matriz como a lista destas listas. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

pode ser alocada como a seguinte lista de listas

---

<sup>6</sup>Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

<sup>7</sup>Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

```
1 >>> M = [[1, -2], [2, 3]]
2 >>> M
3 [[1, -2], [2, 3]]
```

Use listas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

e o vetor coluna

$$x = (2, -3, 1), \quad (14)$$

então compute  $Ax$ .

### 3.9 Dicionários

Em [Python](#) um dicionário é um mapeamento objeto a objeto, cada par (chave:valor) é separado por uma vírgula. Por exemplo,

```
1 >>> a = {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
2 >>> a
3 {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
4 >>> b = {1: 2.71, (1,2): 2, 'a': {1,0,-1}}
5 >>> b
6 {1: 2.71, (1, 2): 2, 'a': {0, 1, -1}}
7 >>> d = {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
8 >>> d
9 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
```

O acesso a um item do dicionário é feito usando-se sua **chave**. Por exemplo,

```
1 >>> d['b']
2 2
3 >>> d[1.4] = 1
4 >>> d
5 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b'}
```

Pode-se adicionar um novo par, simplesmente, atribuindo valor a uma nova chave. Por exemplo,



```

1 >>> d[1.5] = 0
2 >>> d
3 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b', 1.5: 0}

```

**Observação 3.8.** Consulte sobre mais sobre dicionários em [Python Docs](#).

**Exercício 3.9.1.** Considere a função afim

$$f(x) = 3 - x. \quad (15)$$

Implemente um dicionário para alocar a raiz da função, a interseção com o eixo  $y$  e seu coeficiente angular.

**Exercício 3.9.2.** Considere a função quadrática

$$g(x) = x^2 - x - 2 \quad (16)$$

Implemente um dicionário para alocar suas raízes, vértice e interseção com o eixo  $y$ .

## 4 Função, ramificação e repetição

Nesta seção, vamos introduzir funções e estruturas de ramificação e de repetição. Estes são procedimentos fundamentais na programação estruturada.

### 4.1 Definindo funções

Em [Python](#), uma função é definida com a palavra-chave **def** seguida de seu nome e seus parâmetros encapsulados entre parênteses e por dois-pontos `:`. Suas instruções formam o corpo da função, iniciam-se na linha abaixo e devem estar indentadas. A indentação define o escopo da função. Por exemplo, a seguinte função imprime o valor da função

$$f(x) = 2x - 3 \quad (17)$$

```

1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     print(y)
4 ...
5 >>> f(2)
6 1

```

Você pode protestar que `f` não é uma função e, sim, um procedimento, pois não retorna valor. Para uma função retornar um objeto, usamos a instrução `return`. Por exemplo,

```
1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     return y
4 ...
5 >>> z = f(2)
6 >>> z
7 1
```

**Observação 4.1.** Para funções pequenas, pode-se utilizar a instrução `lambda` de funções anônimas. Por exemplo,

```
1 >>> f = lambda x: 2*x - 3
2 >>> f(3)
3 3
```

**Observação 4.2.** Consulte mais informações sobre a definição de funções em [Python Docs](#).

**Exercício 4.1.1.** Implemente uma função para computar as raízes de uma polinômio de grau 1  $p(x) = ax + b$ .

**Exercício 4.1.2.** Implemente uma função para computar as raízes de uma polinômio de grau 2  $p(x) = ax^2 + bx + c$ .

**Exercício 4.1.3.** Implemente uma função que computa o produto escalar de dois vetores

$$x = (x_0, x_1, x_2), \quad (18)$$

$$y = (y_0, y_1, y_2). \quad (19)$$

Use listas para representar os vetores no [Python](#).

**Exercício 4.1.4.** Implemente uma função que computa o determinante de matrizes  $2 \times 2$ . Use lista de listas para representar as matrizes.

**Exercício 4.1.5.** Implemente uma função que computa a multiplicação matrix-vetor  $Ax$ , com  $A$   $2 \times 2$  e  $x$  um vetor coluna de dois elementos.

**Exercício 4.1.6.** (Recursividade) Implemente uma função recursiva para computar o fatorial de um número natural  $n$ , i.e.  $n!$ .

## 4.2 Ramificação

Uma estrutura de ramificação é uma instrução para a tomada de decisões durante a execução de um programa. No [Python](#), está disponível a instrução `if`. Consultemos o seguinte exemplo.

```
1 def paridade(n):
2     if (n%2 == 0):
3         print('par')
```

Aqui, a função `paridade` recebe o valor `n`. Se (`if`) o resto da divisão de `n` por 2 é igual a zero (condição), então (`:`) imprime a *string* `par`.

**Observação 4.3.** A indentação determina o escopo de cada instrução `if`.

Também está disponível a instrução `if-else`. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):
2     if (n%2 == 0):
3         print('par')
4     else:
5         print('impar')
```

Agora, se (`if`) a condição (`n%2 == 0`) for verdadeira (`True`), então imprime `par`, senão (`else`) imprime `impar`.

Ainda, é possível ter instruções `if-else` encadeadas. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):
2     if (n%2 == 0):
3         print('eh divisivel por 2')
4     elif (n%3 == 0):
5         print('eh divisivel por 3')
6     else:
7         print('nao eh divisivel por 2 e 3')
```

Observe que `elif` deve ser utilizado no lugar de `else if`.

**Exercício 4.2.1.** Implemente uma função que recebe dois números  $n$  e  $m$  e imprime o maior deles.

**Exercício 4.2.2.** Implemente uma função que recebe os coeficientes de um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (20)$$

e classifique-o como um polinômio de grau 0, 1 ou 2.

## 4.3 Repetição

Estruturas de repetição são instruções que permitem que a execução repetida de uma região do código. São duas instruções disponíveis **while** e **for**.

### 4.3.1 while

A sintaxe da instrução **while** é

```
1 while expressao:
2     comando 0
3     .
4     .
5     .
6     comando n
```

Isto é, enquanto (**while**) a expressão (**expressao**) for verdadeira, os comandos **comando 0** a **comando n** serão repetidamente executados em ordem. Por exemplo, o seguinte código computa a soma dos 10 primeiros números naturais e, então imprime-a.

```
1 n = 0
2 s = 0
3 while (n < 10):
4     s += n
5     n += 1
6 print(s)
```

**Observação 4.4.** As instruções de controle **break**, **continue** são bastante úteis em várias situações. A primeira, encerra as repetições e, a segunda, pula para uma nova repetição. Consulte mais em [Python Docs](#).

**Exercício 4.3.1.** Use **while** para imprimir os dez primeiros números ímpares.

**Exercício 4.3.2.** Uma aplicação do Método Babilônico<sup>8</sup> para a aproximação

---

<sup>8</sup>Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

da solução da equação  $x^2 - 2 = 0$ , consiste na iteração

$$x_0 = 1, \quad (21)$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Faça um código com **while** para computar aproximação  $x_i$ , tal que  $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$ .

#### 4.3.2 for

A estrutura **for** tem a sintaxe

```
1  for i in iteravel:
2      escopo
```

onde, `iteravel` pode ser qualquer objeto de uma classe iterável (conjunto, *n*-upla, lista, dicionário, *string*). Os comandos dentro do escopo (determinado pela indentação) são repetidos para cada iterada *i*. Por exemplo,

```
1  >>> for i in [0,1,2]:
2      ...     print(i)
3  ...
4  0
5  1
6  2
```

#### 4.3.3 range

A função [Python range\(\[start,\]stop\[,sep\]\)](#) é particularmente útil na construção de instruções **for**. Ela cria um objeto de classe iterável de **start** (incluído) a **stop** (excluído), de elementos igualmente separados por **sep**. Por padrão, **start**=0, **sep**=1 caso omitidos. Por exemplo,

```
1  >>> for i in range(1,6,2):
2      ...     print(i)
3  ...
4  1
5  3
6  5
```

ou

```
1 >>> for i in range(3):
2     ...     print(i)
3     ...
4 0
5 1
6 2
```

**Exercício 4.3.3.** Escreva uma função que retorne o  $n$ -ésimo termo da função de Fibonacci<sup>9</sup>,  $n \geq 1$ .

**Exercício 4.3.4.** Implemente uma função para computar o produto escalar de dois vetores de  $n$  elementos. Assuma que os vetores estão alocados em listas.

**Exercício 4.3.5.** Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz  $A$   $n \times n$  por um vetor coluna  $x$  de  $n$  elementos. Assuma que o vetor está alocada como uma lista e a matriz como uma lista de listas por linhas.

**Exercício 4.3.6.** Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz  $A$   $n \times m$  por uma matriz  $B$  de  $m \times n$ . Assuma que as matrizes estão alocadas como listas de listas por linhas de cada matriz.

## 5 Elementos da computação matricial

Nesta seção, vamos explorar a [NumPy](#) (Numerical Python), biblioteca para tratamento numérico de dados. Ela é extensivamente utilizada nos mais diversos campos da ciência e da engenharia. Aqui, vamos nos restringir a introduzir algumas de suas ferramentas para a computação matricial.

Usualmente, a biblioteca é importada como segue

```
1 >>> import numpy as np
```

### 5.1 NumPy array

Um **array** é uma tabela de valores (vetor, matriz ou multidimensional) e contém informação sobre os dados brutos, indexação e como interpretá-los. **Os elementos são todos do mesmo tipo** (diferente de uma lista

---

<sup>9</sup>Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

Python), referenciados pela propriedade `dtype`. A indexação dos elementos pode ser feita por um **tuple** de inteiros não negativos, por booleanos, por outro **array** ou por números inteiros. O **rank** de um **array** é seu número de dimensões (chamadas de **axes**<sup>10</sup>). O **shape** é um **tuple** de inteiros que fornece seu tamanho (número de elementos) em cada dimensão. Sua inicialização pode ser feita usando-se listas simples ou encadeadas. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,3,-1,2])
2 >>> print(a)
3 [ 1  3 -1  2]
4 >>> a.dtype
5 dtype('int64')
6 >>> a.shape
7 (4,)
8 >>> a[2]
9 -1
10 >>> a[1:3]
11 array([ 3, -1])
```

temos um **array** de números inteiros com quatro elementos dispostos em um único **axis** (eixo). Podemos interpretá-lo como uma representação de um vetor linha ou coluna, i.e.

$$a = (1, 3, -1, 2) \quad (23)$$

vetor coluna ou  $a^T$  vetor linha.

Outro exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1.0,2,3],[-3,-2,-1]])
2 >>> a.dtype
3 dtype('float64')
4 >>> a.shape
5 (2, 3)
6 >>> a[1,1]
7 -2.0
```

temos um **array** de números decimais (**float**) dispostos em um arranjo com dois **axes** (eixos). O primeiro **axis** tem tamanho 2 e o segundo tem tamanho 3. Ou seja, podemos interpretá-lo como uma matriz de duas linhas e três

---

<sup>10</sup>Do inglês, plural de *axis*, eixo.

colunas. Podemos fazer sua representação algébrica como

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 5.1.1 Inicialização de um array

O NumPy conta com úteis funções de inicialização de `array`. Vejam algumas das mais frequentes:

- `np.zeros()`: inicializa um `array` com todos seus elementos iguais a zero.

```
1 >>> np.zeros(2)
2 array([0., 0.]
```

- `np.ones()`: inicializa um `array` com todos seus elementos iguais a 1.

```
1 >>> np.ones((3,2), dtype='int')
2 array([[1, 1],
3        [1, 1],
4        [1, 1]])
```

- `np.empty()`: inicializa um `array` sem alocar valores para seus elementos<sup>11</sup>.

```
1 >>> np.empty(3)
2 array([4.9e-324, 1.5e-323, 2.5e-323])
```

- `np.arange()`: inicializa um `array` com uma sequência de elementos<sup>12</sup>.

```
1 >>> np.arange(1,6,2)
2 array([1, 3, 5])
```

- `np.linspace(a, b[, num=n])`: inicializa um `array` como uma sequência de elementos que começa em `a`, termina em `b` (incluídos) e contém `n` elementos igualmente espaçados.

```
1 >>> np.linspace(0, 1, num=5)
2 array([0. , 0.25, 0.5 , 0.75, 1.  ])
```

---

<sup>11</sup>Atenção! Os valores dos elementos serão dinâmicos conforme “lixo” da memória.

<sup>12</sup>Similar a função Python `range`.



### 5.1.2 Manipulação de arrays

Outras duas funções importantes no tratamento de `arrays` são:

- `arr.reshape()`: permite a alteração da forma de um `array`.

```
1 >>> a = np.array([-2,-1])
2 >>> a
3 array([-2, -1])
4 >>> a.reshape(2,1)
5 array([[ -2],
6        [ -1]])
```

O `arr.reshape()` também permite a utilização de um coringa `-1` que será dinamicamente determinado de forma obter-se uma estrutura adequada. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.reshape((-1,1))
6 array([[1],
7        [2],
8        [3],
9        [4]])
```

- `arr.transpose()`: computa a transposta de uma matriz.

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.transpose()
6 array([[1, 3],
7        [2, 4]])
```

- `np.concatenate()`: concatena arrays.

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> c = np.concatenate((a,b))
4 >>> c
```

```
5     array([1, 2, 2, 3])
6     >>> a = a.reshape((1,-1))
7     >>> a.ndim
8     2
9     >>> b = b.reshape((1,-1))
10    >>> b
11    array([[2, 3]])
12    >>> d = np.concatenate((a,b), axis=0)
13    >>> d
14    array([[1, 2],
15           [2, 3]])
```

### 5.1.3 Operadores elemento-a-elemento

Os operadores aritméticos disponível no Python atuam elemento-a-elemento nos arrays. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> a+b
4 array([3, 5])
5 >>> a-b
6 array([-1, -1])
7 >>> b*a
8 array([2, 6])
9 >>> a**b
10 array([1, 8])
11 >>> 2*b
12 array([4, 6])
```

O NumPy também conta com várias funções matemáticas elementares que operam elemento-a-elemento em arrays. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([np.pi, np.sqrt(2)])
2 >>> a
3 array([3.14159265, 1.41421356])
4 >>> np.sin(a)
5 array([1.22464680e-16, 9.87765946e-01])
6 >>> np.exp(a)
7 array([23.14069263, 4.11325038])
```

**Observação 5.1.** O [NumPy](#) contém um série de outras funções práticas para a manipulação de `arrays`. Consulte [NumPy: the absolute basics for beginners](#).

## 5.2 Elementos da álgebra linear

O [NumPy](#) conta com um módulo de álgebra linear

```
1 >>> from numpy import linalg
```

### 5.2.1 Vetores

Um vetor podem ser representado usando um `array` de um eixo (dimensão) ou um com dois eixos, caso se queira diferenciá-lo entre um vetor linha ou coluna. Por exemplo, os vetores

$$a = (2, -1, 7), \quad (25)$$

$$b = (3, 1, 0)^T \quad (26)$$

podem ser alocados com

```
1 >>> x = np.array([2, -1, 7])
2 >>> y = np.array([3, 1, 0])
```

Caso queira-se que  $x$  siga um arranjo em coluna, pode-se modificar como segue

```
1 >>> a = a.reshape((-1, 1))
2 >>> a
3 array([[ 2],
4        [-1],
5        [ 7]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a vetores (consulte a Subseção 5.1.3). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

**Exercício 5.2.1.** Aloque cada um dos seguintes vetores como um [NumPy array](#):

a)  $x = (1.2, -3.1, 4)$

b)  $y = x^T$

c)  $z = (\pi, \sqrt{2}, e^{-2})^T$

### 5.2.2 Produto escalar e norma

Dados dois vetores,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (27)$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (28)$$

define-se o **produto escalar** por

$$x \cdot y = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} \quad (29)$$

Com o [NumPy](#), podemos computá-lo com a função `np.dot()`. Por exemplo,

```
1 >>> x = np.array([-1, 0, 2, 4])
2 >>> y = np.array([0, 1, 1, -1])
3 >>> np.dot(x, y)
4 -2
```

A norma (euclidiana) de um vetor é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}. \quad (30)$$

O [NumPy](#) conta com a função `np.linalg.norm()` para computá-la. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.norm(y)
2 1.7320508075688772
```

**Exercício 5.2.2.** Faça um código para computar o produto escalar  $x \cdot y$  sendo

$$x = (1.2, \ln(2), 4), \quad (31)$$

$$y = (\pi^2, \sqrt{3}, e) \quad (32)$$

### 5.2.3 Matrizes

Uma matriz pode ser alocada como um [NumPy](#) array de dois eixos (dimensões). Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \quad (34)$$

podem ser alocadas como segue

```
1 >>> A = np.array([[2,-1,7],[3,1,0]])
2 >>> A
3 array([[ 2, -1,  7],
4         [ 3,  1,  0]])
5 >>> B = np.array([[4,0],[2,1],[-8,6]])
6 >>> B
7 array([[ 4,  0],
8         [ 2,  1],
9         [-8,  6]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a matrizes (consulte a Subseção [5.1.3](#)). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

**Exercício 5.2.3.** Aloque cada uma das seguintes matrizes como um Numpy array:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

b)  $B = A^T$

**Exercício 5.2.4.** Seja

```
1 >>> A = np.array([[2,1],[1,1],[-3,-2]])
```

Determine o formato (**shape**) dos seguintes **arrays**:

- a) `A[:,0]`
- b) `A[:,0:1]`
- c) `A[1:3,0]`
- d) `A[1:3,0:1]`
- e) `A[1:3,0:2]`

### 5.2.4 Inicialização de matrizes

Além das inicializações de **arrays** já estudadas na Subseção 5.1.1, temos mais algumas que são particularmente úteis no caso de matrizes.

- `np.eye(n)`: retorna a matriz identidade  $n \times n$ .

```
1 >>> np.eye(3)
2 array([[1., 0., 0.],
3        [0., 1., 0.],
4        [0., 0., 1.]])
```

- `np.diag(v)`: retorna uma matriz diagonal formada pela **list** **v**.

```
1 >>> np.diag([1,2,3])
2 array([[1, 0, 0],
3        [0, 2, 0],
4        [0, 0, 3]])
```

**Exercício 5.2.5.** Aloque a matriz escalar  $C = [c_{ij}]_{i,j=0}^{99}$ , sendo  $c_{ii} = \pi$  e  $c_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

### 5.2.5 Multiplicação de matrizes

A multiplicação da matriz  $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,l-1}$  pela matriz  $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^{l-1,m-1}$  e a matriz  $C = AB = [c_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,m-1}$  tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{l-1} a_{ik} b_{k,j} \quad (36)$$

O **NumPy** tem a função `np.matmul()` para computar a multiplicação de matrizes. Por exemplo,

```

1 >>> C = np.matmul(A,B)
2 >>> C
3 array([[ -50,   41],
4        [  14,    1]])

```

**Observação 5.2.** É importante notar que `np.matmul(A,B)` é a multiplicação de matrizes, enquanto que `*` consiste na multiplicação elemento a elemento. Alternativamente a `np.matmul(A,B)` pode-se usar `A @ B`.

**Exercício 5.2.6.** Aloque as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Então, se existirem, compute e forneça as dimensões das seguintes matrizes

- a)  $CD$
- b)  $D^T E$
- c)  $D^T C$
- d)  $DE$

### 5.2.6 Traço e Determinante de uma matriz

O **NumPy** tem a função `arr.trace()` para computar o **traço** de uma matriz (soma dos elementos de sua diagonal). Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> A.trace()
3 -1

```

Já, o **determinante** é fornecido no módulo `np.linalg`. Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> np.linalg.det(A)
3 25.000000000000007

```

**Exercício 5.2.7.** Compute e verifique os traços e os determinantes das seguintes matrizes

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

### 5.2.7 Rank e inversa de uma matriz

O **rank** de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes. O [NumPy](#) conta com a função `matrix_rank()` para computá-lo. Por exemplo,

```

1 >>> np.linalg.matrix_rank(np.eye(3))
2 3
3 >>> A = np.array([[1, 2, 3], [-1, 1, -1], [0, 3, 2]])
4 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
5 2

```

A inversa de uma matriz **full rank** pode ser computada com a função `np.linalg.inv()`. Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[1, 2, 3], [-1, 1, -1], [1, 3, 2]])
2 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
3 3
4 >>> Ainv = np.linalg.inv(A)
5 >>> np.matmul(A, Ainv)
6 array([[ 1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
7        [ 1.11022302e-16,  1.00000000e+00,  2.22044605e-16],
8        [-2.22044605e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])

```

**Exercício 5.2.8.** Compute, se possível, a matriz inversa de cada uma das



seguintes matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Verifique suas respostas.

### 5.2.8 Autovalores e autovetores de uma matriz

Um auto-par  $(\lambda, v)$ ,  $\lambda$  um escalar chamado de autovalor e  $v \neq 0$  é um vetor chamado de autovetor, é tal que

$$A\lambda = \lambda v. \quad (44)$$

O [NumPy](#) tem a função `np.linalg.eig()` para computar os auto-pares de uma matriz. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.eig(np.eye(3))
2 (array([1., 1., 1.]), array([[1., 0., 0.],
3     [0., 1., 0.],
4     [0., 0., 1.])))
```

Observamos que a função retorna uma tupla, sendo o primeiro item um `array` contendo os autovalores (repetidos conforme suas multiplicidades) e o segundo item é a matriz dos autovetores, onde estes são suas colunas.

**Exercício 5.2.9.** Compute os auto-pares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Então, verifique se, de fato,  $A\lambda = \lambda v$  para cada auto-par  $(\lambda, v)$  computado.

## 6 Gráficos

[Matplotlib](#) é uma biblioteca [Python](#) livre e gratuita para a visualização de dados. É muito utilizada para a criação de gráficos estáticos, animados ou

iterativos. Aqui, vamos introduzir alguma de suas ferramentas básicas para gráficos.

Para utilizá-la, é necessário instalá-la. Pacotes de instalação estão disponíveis para os principais sistemas operacionais, consulte a sua loja de *apps* ou [Matplotlib Installation](#). Para importá-la, usamos

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
```

**Observação 6.1.** Se você está usando um console [Python](#) remoto, você pode querer adicionar a seguinte linha de comando para que os gráficos sejam visualizados no próprio console.

```
1 >>> %matplotlib inline
```

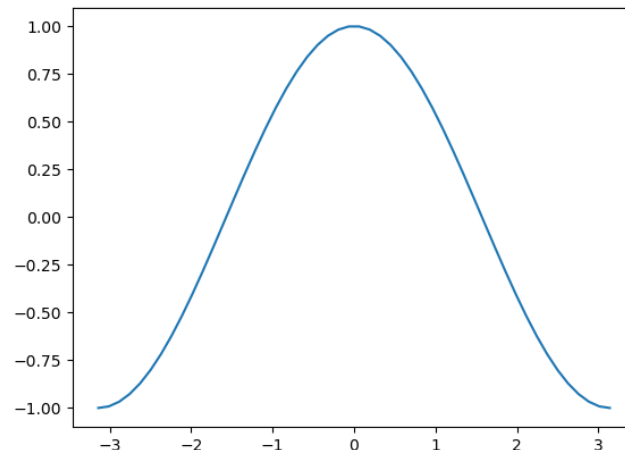


Figura 1: Esboço do gráfico da função  $y = \cos(x)$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Gráficos bidimensionais podem ser criados com a função `plt.plot(x,y)`, onde `x` e `y` são `arrays` que fornecem os pontos cartesianos  $(x_i, y_i)$  a serem plotados. Por exemplo,

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
2 >>> x = np.linspace(-np.pi, np.pi)
3 >>> y = np.cos(x)
4 >>> plt.plot(x,y)
5 [<matplotlib.lines.Line2D object at 0x7f99f578a370>]
```

```
6 >>> plt.show()
```

produz o seguinte esboço do gráfico da função  $y = \sin(x)$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Consulte a Figura 1.

**Observação 6.2.** Matplotlib é uma poderosa ferramenta para a visualização de gráficos. Consulte a galeria de exemplos no seu site oficial

<https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html>

**Exercício 6.0.1.** Crie um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções no intervalo indicado:

a)  $y = \cos(x)$ ,  $[0, 2\pi]$

b)  $y = x^2 - x + 1$ ,  $[-2, 2]$

c)  $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ,  $(-1, 1)$

## Referências

- [1] Learn python: simply easy learning. <https://www.tutorialspoint.com/python/index.htm>, 2021.
- [2] NumPy. <https://numpy.org/>, 2021.
- [3] The python tutorial. <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>, 2021.
- [4] SciPy. <https://www.scipy.org/>, 2021.
- [5] S. Banin. *Python 3 - Conceitos e Aplicações - Uma abordagem didática*. Editora Saraiva, 2021.
- [6] J. A. Ribeiro. *Introdução à Programação e aos Algoritmos*. Grupo GEN, 2019.
- [7] R. Wazlawick. *Introdução a Algoritmos e Programação com Python - Uma Abordagem Dirigida Por Testes*. Grupo GEN, 2017.