

# Cálculo I

Pedro H A Konzen

11 de maio de 2021

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Sumário

# Capítulo 1

## Fundamentos sobre funções

**Observação 1.0.1.** Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#) com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

### 1.1 Definição e gráfico de funções

Uma **função** de um conjunto  $D$  em um conjunto  $Y$  é uma regra que associa um único elemento  $y \in Y$ <sup>1</sup> a cada elemento  $x \in D$ . Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo,  $f$  e escrevemos  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , para denotar que a função  $f$  toma valores de entrada em  $D$  e de saída em  $Y$ .

O conjunto  $D$  de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores  $f(x)$  tal que  $x \in D$  é chamado de **imagem** da função.

Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e

---

<sup>1</sup> $y \in Y$  denota que  $y$  é um elemento do conjunto  $Y$ .

a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

**Exemplo 1.1.1.** Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

- $y = x^2$ :
  - Para qualquer número real  $x$ , temos que  $x^2$  também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)<sup>2</sup> é o conjunto  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .
  - Para cada número real  $x$ , temos  $y = x^2 \geq 0$ . Além disso, para cada número real não negativo  $y$ , temos que  $x = \sqrt{y}$  é tal que  $y = x^2$ . Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e.  $[0, \infty)$ .
- $y = 1/x$ :
  - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
  - Primeiramente, observemos que se  $y = 0$ , então não existe número real tal que  $0 = 1/x$ . Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número  $y \neq 0$ , temos que  $x = 1/y$  é tal que  $y = 1/x$ . Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
- $y = \sqrt{1 - x^2}$ :
  - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \quad (1.2)$$

Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$  (ou, equivalentemente, o intervalo  $[-1, 1]$ ).

---

<sup>2</sup>O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.

Com o [SymPy](#), podemos usar o comando<sup>3</sup>

```
reduce_inequalities(1-x**2>=0,[x])
```

para resolvermos a inequação  $1 - x^2 \geq 0$ .

- Uma vez que  $-1 \leq x \leq 1$ , temos que  $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$  e, portanto,  $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ . Ou seja, a imagem desta função é o intervalo  $[0, 1]$ .

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$  tal que  $x$  pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \quad (1.3)$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

**Exemplo 1.1.2.** A Figura ?? mostra os esboços dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

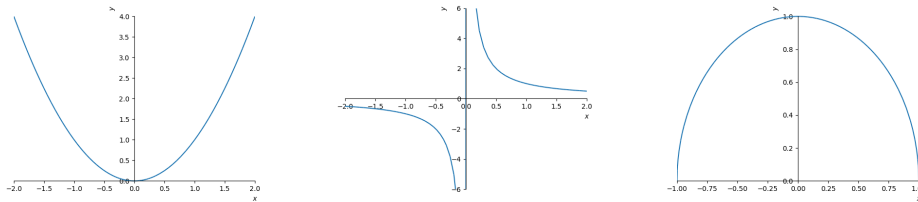


Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$  dadas no Exemplo ??.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos<sup>4</sup>:

```
plot(x**2,(x,-2,2))
plot(1/x,(x,-1,1),ylim=(-10,10))
plot(sqrt(1-x**2),(x,-1,1))
```

<sup>3</sup>Veja a Observação ??.

<sup>4</sup>Veja a Observação ??.

### 1.1.1 Categorizações de funções

#### Funções algébricas

**Funções algébricas** são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

#### Funções transcendent

**Funções transcendent** são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

#### Funções definidas por partes

**Funções definidas por partes** são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**<sup>5</sup>

$$|x| = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura ??.

---

<sup>5</sup>Esta função também pode ser definida por  $|x| = \sqrt{x^2}$ .



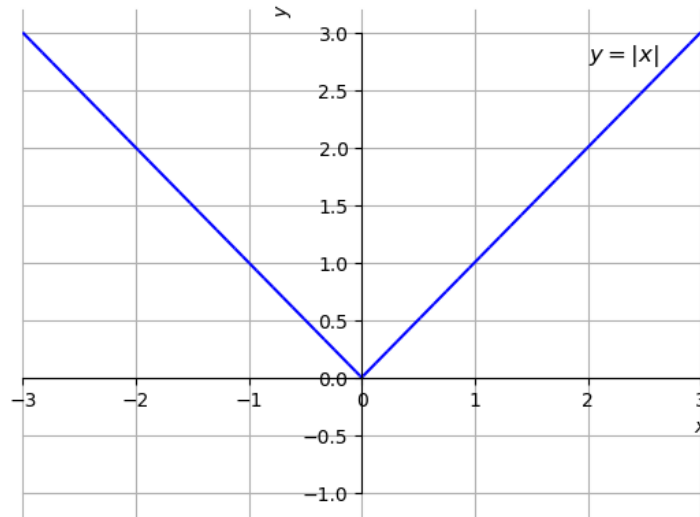


Figura 1.2: Esboço do gráfico da função valor absoluto  $y = |x|$ .

## Exercícios

**Exemplo 1.1.3.** Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e.  $f(x) = x$ .

**Exemplo 1.1.4.** Determine o domínio e a imagem da função  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Exemplo 1.1.5.** Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \quad (1.5)$$

## 1.2 Função afim

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \quad (1.6)$$

sendo  $m$  e  $b$  parâmetros<sup>6</sup> dados. O parâmetro  $m$  é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro  $b$  é chamado de **coeficiente constante**<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>números reais.

<sup>7</sup>Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

Quando  $m = 0$ , temos uma **função constante**  $f(x) = b$ . Esta tem domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $\{b\}$ . Quando  $b = 0$ , temos uma **função linear**  $f(x) = mx$ , cujo domínio é  $(-\infty, \infty)$  e imagem é  $(-\infty, \infty)$ .

Por outro lado, toda função linear com  $m \neq 0$  tem  $(-\infty, \infty)$  como domínio e imagem.

**Exemplo 1.2.1.** A Figura ?? mostra esboços dos gráficos das funções afins  $f(x) = -5/2$ ,  $f(x) = 2$  e  $f(x) = 2x - 1$ .

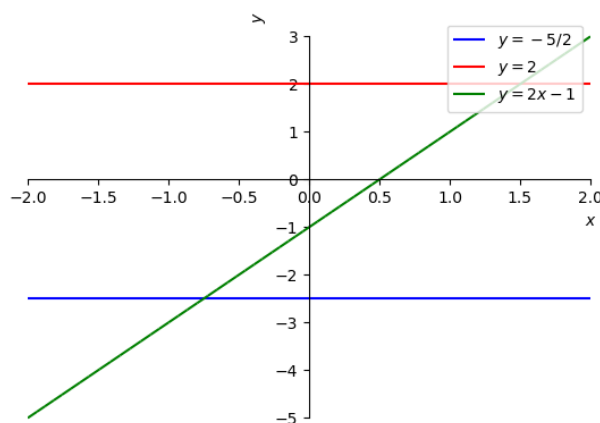


Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções afins  $y = -5/2$ ,  $y = 2$  e  $y = 2x - 1$  discutidas no Exemplo ??.

Com o [SymPy](#), podemos plotar os gráficos destas funções com os seguintes comandos<sup>8</sup>:

```
plot(-5/2, (x, -2, 2))
plot(2, (x, -2, 2))
plot(2*x-1, (x, -2, 2))
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular  $m$  controla a inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ <sup>9</sup>.

<sup>8</sup>Veja a Observação ??.

<sup>9</sup>eixo das abscissas

Quando  $m = 0$ , temos uma reta horizontal. Quando  $m > 0$  temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando  $m < 0$  temos uma reta com inclinação negativa.

**Exemplo 1.2.2.** A Figura ?? mostra esboços dos gráficos das funções lineares  $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = 2x$ ,  $f_4(x) = -2x$ ,  $f_5(x) = -x$  e  $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$ .

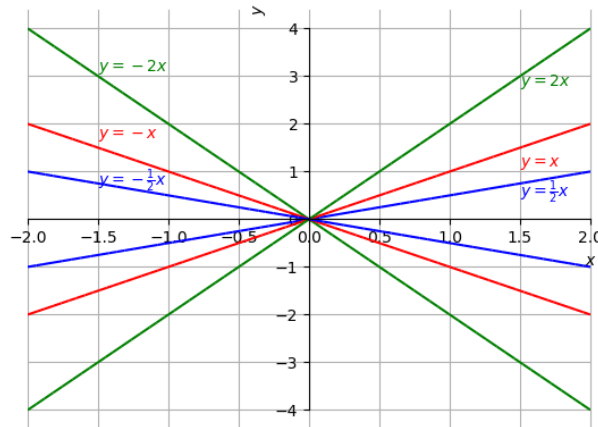


Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo ??.

Verifique, plotando os gráficos com o [SymPy](#)!

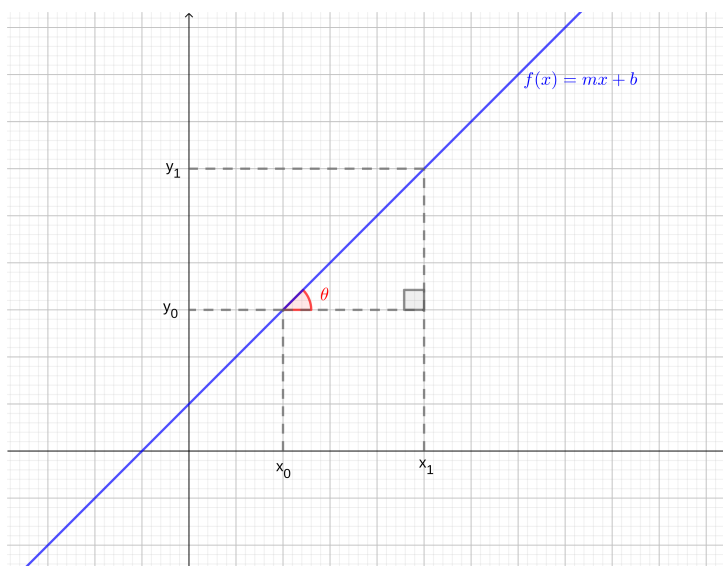


Figura 1.5: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo ângulo de declividade (veja a Figura ??). Para definirmos este ângulo, sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ ,  $x_0 < x_1$ , pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim  $f(x) = mx + b$ . O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_0)$  e o segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_1)$ . Denotando este ângulo por  $\theta$ , temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1.7)$$

$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \quad (1.8)$$

$$= m, \quad (1.9)$$

o que justifica chamar  $m$  de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , com  $x_0 \neq x_1$ , determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \quad (1.10)$$

$$mx_1 + b = y_1 \quad (1.11)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \quad (1.12)$$

Daí, substituindo o valor de  $m$  na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0. \quad (1.13)$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_m (x - x_0) + y_0. \quad (1.14)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Trace o esboço da reta que representa o gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ .

**Solução.** Para esboçar o gráfico de uma função afim, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função  $f(x) = -x - 1$ , temos

$x$	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, -2)$  em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura ??.

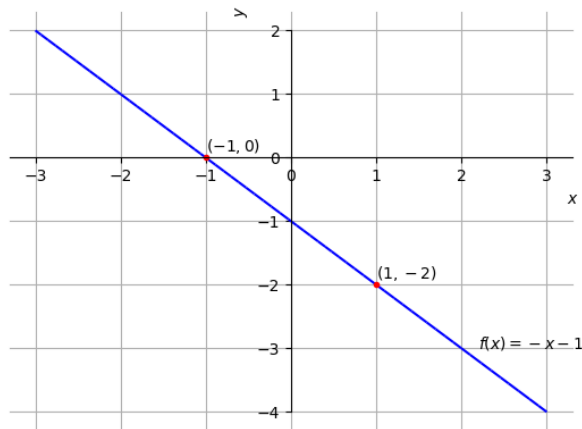


Figura 1.6: Esboço do gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ .

Com o [SymPy](#), podemos plotar o gráfico da função  $f(x) = -x - 1$  com o seguinte comando<sup>10</sup>:

```
plot(-x-1, (x, -3, 3))
```

◇

**ER 1.2.2.** Determine a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(1, -1)$  e  $(2, 1)$ .

**Solução.** Vamos usar (??). Para tanto, tomamos  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  e  $(x_1, y_1) = (2, 1)$ . Desta forma, temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \quad (1.15)$$

De (??), temos

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad (1.16)$$

$$= 2(x - 1) + (-1) \quad (1.17)$$

$$= 2x - 3. \quad (1.18)$$

---

<sup>10</sup>Veja a Observação ??.

Ou seja, a função afim desejada é  $f(x) = 2x - 3$ .

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código<sup>11</sup>:

```
x0 = 1
y0 = -1

x1 = 2
y1 = 1

m = (y1-y0)/(x1-x0)

print(m*(x-x0) + y0)
```

◇

**ER 1.2.3.** Verifique se as retas  $y = -x - 1$  e  $y = 2x - 3$  se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

**Solução.** As retas dadas são gráficos das funções afins  $f(x) = -x - 1$  e  $g(x) = 2x - 3$ . Como os coeficientes angulares de  $f(x)$  e  $g(x)$  são diferentes, temos que as retas têm ângulos de declividade diferentes e, portanto, são retas concorrentes<sup>12</sup>.

Agora, vamos determinar o ponto de interseção. No ponto de interseção dos gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$  deve ocorrer que  $f(x) = g(x)$ . Segue

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x - 1 = 2x - 3 \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}. \quad (1.21)$$

Assim, temos que as retas se interceptam no ponto de abscissa  $x = 2/3$ . Para determinar a ordenada deste ponto, podemos usar qualquer uma das funções. Usando  $f(x)$  temos

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} - 3 = \frac{4 - 9}{3} = -\frac{5}{3}. \quad (1.22)$$

---

<sup>11</sup>Veja a Observação .

<sup>12</sup>Retas concorrentes são retas que se interceptam em um ponto.

Concluimos que as retas se interceptam no ponto  $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ .

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código<sup>13</sup>:

```
f = lambda x: -x-1
g = lambda x: 2*x-3

px = solve(f(x)-g(x))[0]
py = f(px)

print(px, py)
```

◇

## Exercícios

**Exemplo 1.2.3.** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

- a)  $f_1(x) = x$
- b)  $f_2(x) = -x$
- c)  $f_3(x) = x - 1$
- d)  $f_4(x) = -x + 1$

**Exemplo 1.2.4.** Determine a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(-2, 1)$  e  $(0, -2)$ .

**Exemplo 1.2.5.** Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 2x - 1$ .

## 1.3 Função potência

Uma função da forma  $f(x) = x^n$ , onde  $n \neq 0$  é uma constante, é chamada de **função potência**.

---

<sup>13</sup>Veja a Observação .



Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de  $n$ . Quando  $n$  é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são  $(-\infty, \infty)$ . Veja a Figura ??.

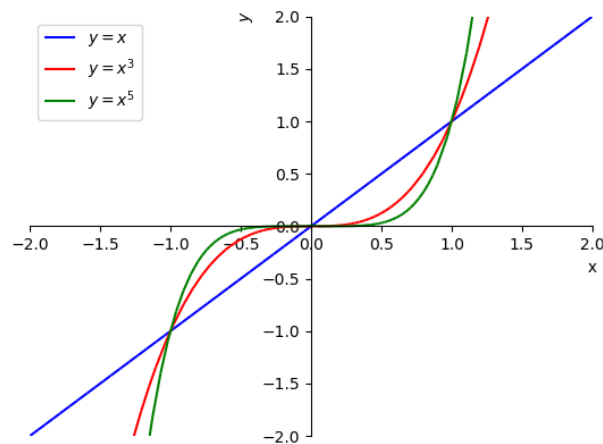


Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x$ ,  $y = x^3$  e  $y = x^5$ .

Funções potências com  $n$  positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem  $[0, \infty)$ . Veja a Figura ??.

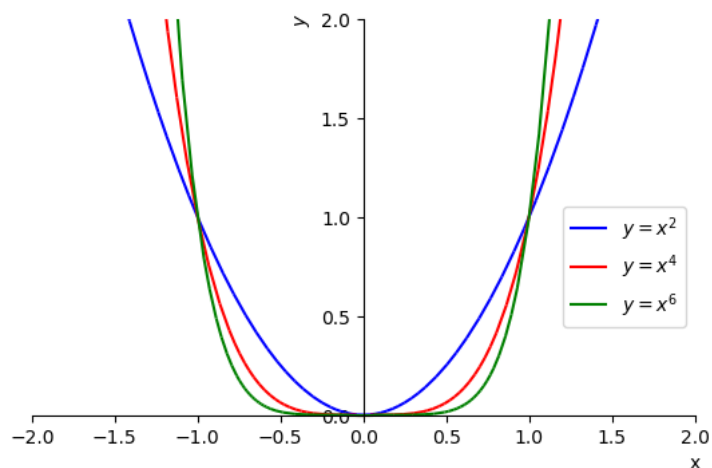


Figura 1.8: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x^2$ ,  $y = x^4$  e  $y = x^6$ .

Funções potências com  $n$  inteiro negativo ímpar não são definidas em  $x = 0$ , tendo domínio e imagem igual a  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Também, quando  $n$  inteiro negativo par, a função potência não está definida em  $x = 0$ , tem domínio  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , mas imagem  $(0, \infty)$ . Veja a Figura ??.

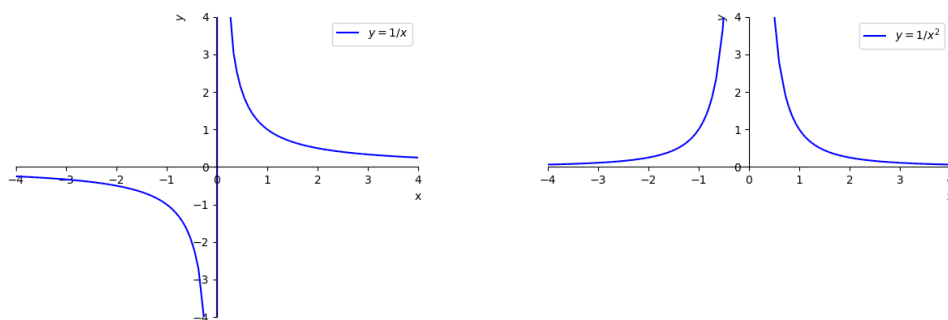


Figura 1.9: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = 1/x$  (esquerda),  $y = 1/x^2$  (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando  $n = 1/2$ ,  $1/3$ ,  $3/2$  e  $2/3$ . Veja a Figura ??.

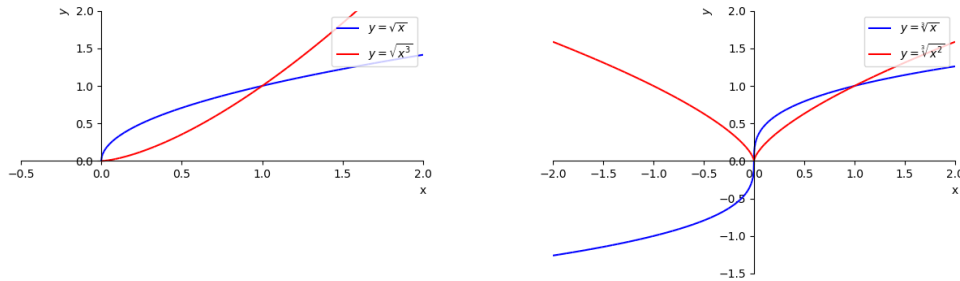


Figura 1.10: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{x^3}$ . Direita:  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 1.3.1.** Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^{5/2}$ ;

b)  $g(x) = x^{5/3}$ .

**Solução.**

- a) Vamos analisar a função  $f(x) = x^{5/2}$ . Como  $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$  e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que  $x^5$  deve ser não negativo. Daí,  $x$  deve ser não negativo. Logo, o domínio de  $f(x) = x^{5/2}$  é  $[0, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura ??.

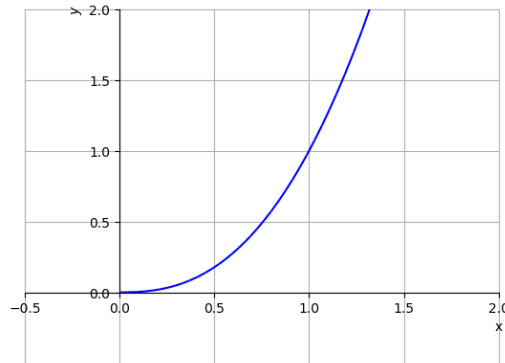


Figura 1.11: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^{5/2}$ .

Para plotar o gráfico de  $f(x)$  com o [SymPy](#), basta digitar<sup>14</sup>, por exemplo:

```
plot(x**(5/2), (x, 0, 2))
```

- b) Vamos analisar a função  $g(x) = x^{5/3}$ . Como  $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ , não temos restrição sobre os valores de  $x$ . Logo, o domínio da função  $g$  é  $(-\infty, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura ??.

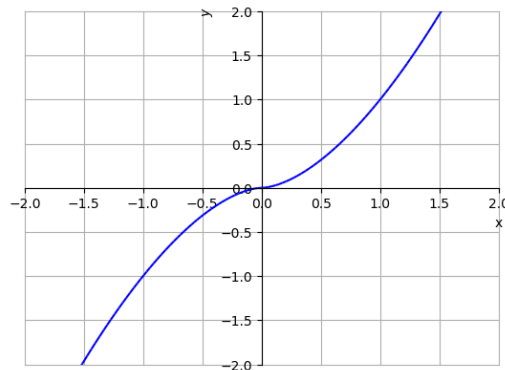


Figura 1.12: Esboço do gráfico de  $g(x) = x^{5/3}$ .

Para plotar o gráfico de  $g(x)$  com o [SymPy](#), digitamos<sup>15</sup>:

<sup>14</sup>Veja a Observação ??.

<sup>15</sup>Veja a Observação ??.

```
p = plot(x**(5/3),(x,0,2),line_color="blue",show=False)
q = plot(-(-x)**(5/3),(x,-2,0),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

Você sabe o porquê não pode-se usar, simplesmente, o seguinte comando?

```
plot(x**(5/3),(x,-2,2))
```

◇

**ER 1.3.2.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

**Solução.** Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de interseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa  $x$  tais que

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 1 = x\sqrt[3]{x} \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow x^4 = 1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (1.30)$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 1$ . Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura ???. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando  $f(x)$ , temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1). \quad (1.31)$$

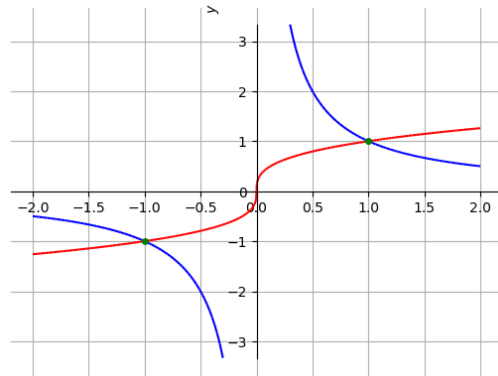


Figura 1.13: Interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  (azul) e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  (vermelho).

Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$  e  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ . De (??), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) + (-1) \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow y = x + 1 - 1 \Rightarrow y = x. \quad (1.33)$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  tem equação  $y = x$ .

Os seguintes comandos, mostrar como podemos resolver este problema usando o [SymPy](#)<sup>16</sup>:

```
f = lambda x: 1/x
# x nao negativo
g1 = lambda x: cbrt(x)
# x negativo
g2 = lambda x: -cbrt(-x)

x0 = solve(f(x)-g2(x))[0]
x1 = solve(f(x)-g1(x))[0]
```

<sup>16</sup>Veja a Observação ??.

```
y0 = f(x0)
y1 = f(x1)

print('y = ', (y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0)
```

◇

## Exercícios

**E 1.3.1.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

- a)  $f(x) = x^7$ ;
- b)  $g(x) = x^8$ .

**E 1.3.2.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

- a)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$ ;
- b)  $g(x) = \frac{1}{x^8}$ .

**E 1.3.3.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ;
- b)  $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ .

## 1.4 Função polinomial

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.34)$$

onde  $a_i$  são coeficientes reais,  $a_n \neq 0$  e  $n$  é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte<sup>17</sup>. Polinômios de grau ímpar tem imagem  $(-\infty, \infty)$ . Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura ??.

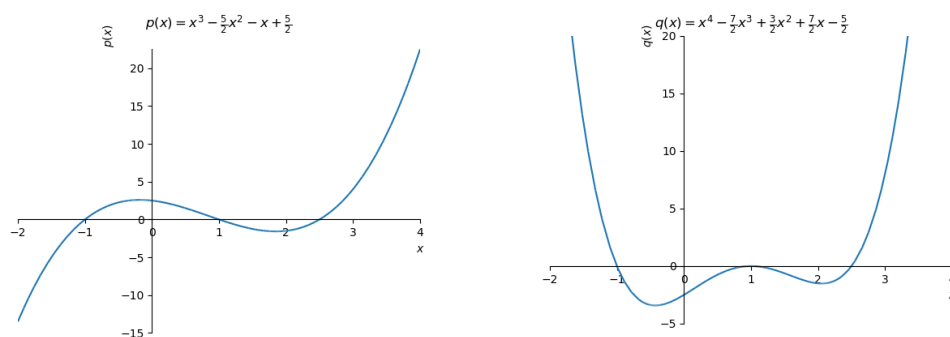


Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda  $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$ . Direita:  $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$ .

Quando  $n = 0$ , temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando  $n = 1$ , temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando  $n = 2$  temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando  $n = 3$ , temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

### 1.4.1 Função quadrática

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (1.35)$$

onde  $a$  é chamado de **coeficiente do termo quadrático**,  $b$  o **coeficiente do termo linear** e  $c$  o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.36)$$

<sup>17</sup>Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é  $(-\infty, \infty)$



O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando  $a > 0$  e, **côncava para baixo** quando  $a < 0$ . Veja a Figura ??.

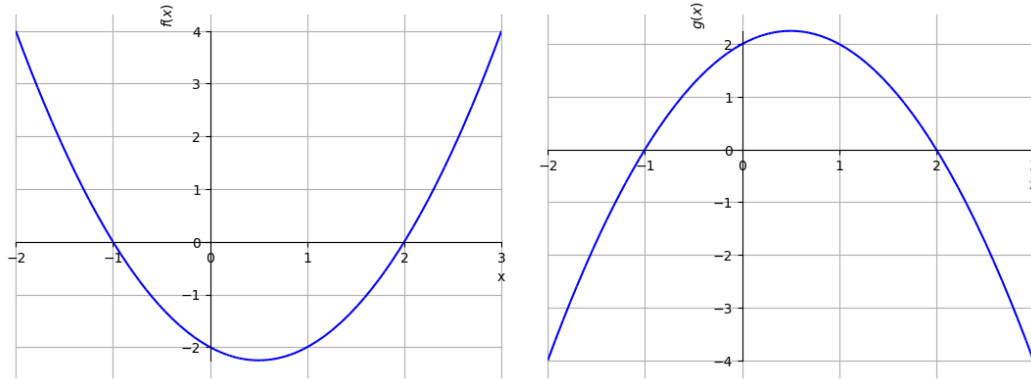


Figura 1.15: Esboço dos gráficos das funções quadráticas  $f(x) = x^2 - x - 2$  (esquerda) e  $g(x) = -x^2 + x + 2$  (direita).

O **vértice** da função quadrática  $f(x)$  com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor máximo (mínimo)** em todo o seu domínio natural. Quando  $f$  têm zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros  $x_0$  e  $x_1$  da função, i.e. o vértice  $V = (x_v, y_v)$  é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \quad (1.37)$$

O valor  $x_v$  é a abscissa do ponto em que a função quadrática  $f$  atinge o valor máximo (valor mínimo)  $y_v$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 1.4.1.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

**Solução.** Determinar os zeros da função  $f$  significa entrar todos os valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$  (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de  $f$  intersepta o eixo das abscissas). Temos

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0. \quad (1.40)$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (??) na equação  $x^2 - x - 2 = 0$ , obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.41)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad (1.42)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad (1.43)$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \quad (1.44)$$

$$= -1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad (1.45)$$

Com isso, temos que os zeros da função  $f$  ocorrem nos pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ .

Com o [SymPy](#), podemos calcular os zeros da função  $f$  com o seguinte comando<sup>18</sup>:

```
solve(x**3-x**2-2*x)
```

◇

**ER 1.4.2.** Determine o valor mínimo da função  $f(x) = x^2 - x - 2$ .

**Solução.** Como  $f$  é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo,  $f$  atinge seu valor mínimo no seu vértice. Por sorte, os zeros de  $f$  são  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 2$ . Logo, o vértice tem abscissa

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (1.46)$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de  $f$  é  $1/2$  e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 - 8}{4} = -\frac{9}{4}. \quad (1.47)$$

Podemos resolver este exercício com o seguinte código [SymPy](#)<sup>19</sup>:

---

<sup>18</sup>Veja a Observação ??.

<sup>19</sup>Veja a Observação ??.

```
f = lambda x: x**2-x-2
z = solve(f(x))
f((z[0]+z[1])/2)
```

◇

## Exercícios

**E 1.4.1.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$ .

**E 1.4.2.** Determine o valor máximo da função  $f(x) = -x^2 + x + 2$ .

## 1.5 Função racional

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (1.48)$$

onde  $p(x)$  e  $q(x) \not\equiv 0$  são polinômios.

Funções racionais não estão definidas nos zeros de  $q(x)$ . Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura ?? para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \quad (1.49)$$

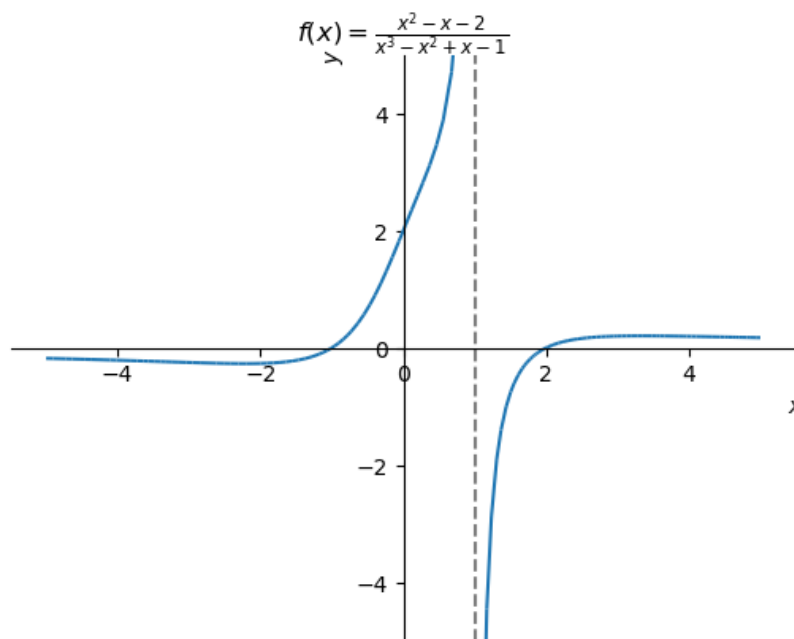


Figura 1.16: Esboço do gráfico da função racional  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ .

Com o estudo do cálculo de limites, veremos que a reta  $y = 0$  (eixo das abscissas) é uma assíntota horizontal e a reta  $x = 1$  (reta tracejada) é uma assíntota vertical ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto  $x = 1$  está relacionada ao fato de que o denominador se anula em  $x = 1$ . Ainda, para  $x \neq 1$  temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \quad (1.50)$$

Com isso, podemos concluir que o domínio da função  $f(x)$  é  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

## Exercícios resolvidos

**E 1.5.1.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \quad (1.51)$$

**Solução.** Como  $f(x)$  é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (1.52)$$

Logo, o domínio de  $f(x)$  é o conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

◇

**E 1.5.2.** Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x - 1}{x - 1}. \quad (1.53)$$

**Solução.** Tendo em vista que o denominador se anula em  $x = 1$ , o domínio de  $g$  é  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que  $g(x) = 1$  para  $x \neq 1$ . I.e.,  $g$  é uma função constante para valores de  $x \neq 1$  e não está definida em  $x = 1$ . Veja a Figura ?? para o esboço do gráfico da função  $g$ .

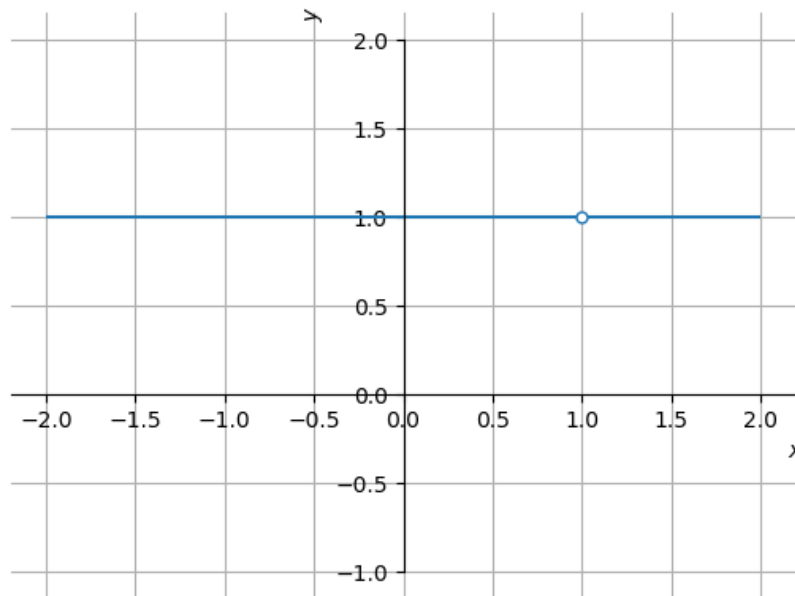


Figura 1.17: Esboço do gráfico da função  $g(x) = (x - 1)/(x - 1)$ .

Com o [SymPy](#), o comando<sup>20</sup>

```
plot((x-1)/(x-1), (x, -2, 2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em  $x = 1$ . Isto ocorre, pois os gráficos com o [SymPy](#) são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.

Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

◇

## Exercícios

**E 1.5.3.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}. \quad (1.54)$$

## 1.6 Funções trigonométricas

### 1.6.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno  $y = \text{sen}(x)$  e cosseno  $y = \text{cos}(x)$  podem ser definidas a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura ??). Seja  $x$  o ângulo<sup>21</sup> de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta  $r$  na Figura ??). Seja, então,  $(a, b)$  o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária<sup>22</sup>. Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = a, \quad \text{cos}(x) = b. \quad (1.55)$$

<sup>20</sup>Veja a Observação ??.

<sup>21</sup>Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.

<sup>22</sup>Circunferência do círculo de raio 1.

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $[-1, 1]$ .

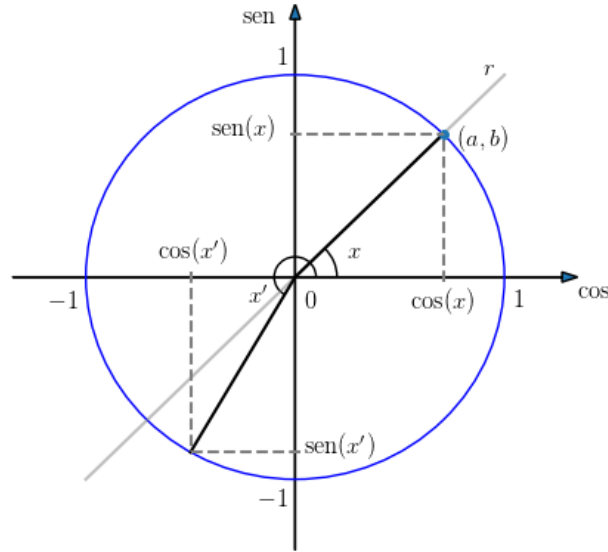


Figura 1.18: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura ?? podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.56)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.57)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (1.58)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.59)$$

$$(1.60)$$

As funções seno e cosseno estão definidas no [SymPy](#) como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de  $\pi/6$ , digitamos:

$\sin(\pi/6)$

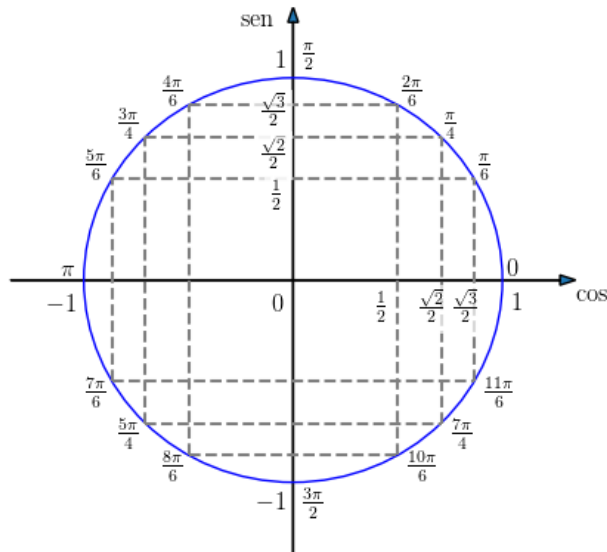


Figura 1.19: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função**  $f(x)$  é dita **periódica** quando existe um número  $p$ , chamado de período da função, tal que

$$f(x + p) = f(x) \quad (1.61)$$

para qualquer valor de  $x$  no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período  $2\pi$ , i.e.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (1.62)$$

para qualquer valor de  $x$ .

Na Figura ??, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.



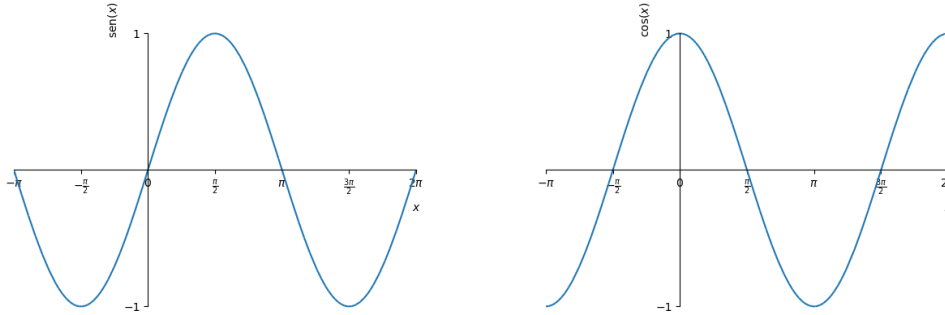


Figura 1.20: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

### 1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad (1.63)$$

$$\operatorname{sec}(x) := \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \quad (1.64)$$

No [SymPy](#), as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções **tan**, **cot**, **sec** e **csc**, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de  $\operatorname{cosec}(\pi/4)$  com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura ??, temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, \infty)$  e período  $\pi$ .

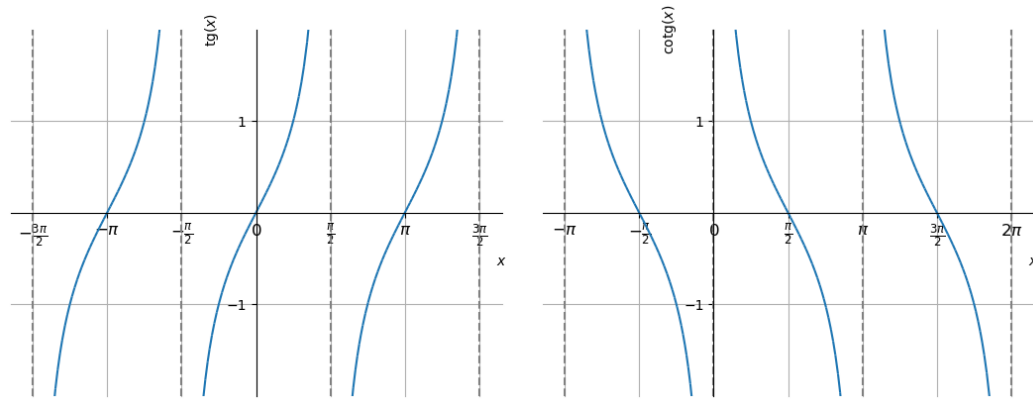


Figura 1.21: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura ??, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$  e período  $\pi$ .

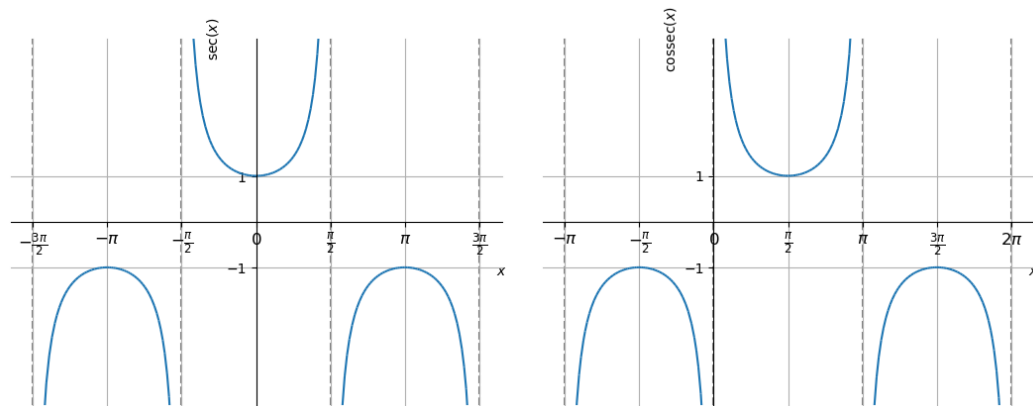


Figura 1.22: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

### 1.6.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Começemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1.65)$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \quad (1.66)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \quad (1.67)$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.68)$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.69)$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (1.70)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (1.71)$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (1.72)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (1.73)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 1.6.1.** Mostre que

$$\cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.74)$$

**Solução.** A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (1.75)$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}. \quad (1.76)$$

Então, isolando  $\cos x$ , obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad (1.77)$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.78)$$

◇

## Exercícios

**E 1.6.1.** Mostre que  $\operatorname{sen} x$  é uma função ímpar, i.e.

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \quad (1.79)$$

para todo número real  $x$ .

**E 1.6.2.** Mostre que  $\cos x$  é uma função par, i.e.

$$\cos x = \cos(-x) \quad (1.80)$$

para todo número real  $x$ .

## 1.7 Operações com funções

### 1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$  com domínio em comum  $D$ . Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  para todo  $x \in D$  tal que  $g(x) \neq 0$ .

**Exemplo 1.7.1.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$ . Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$  e está definida em toda parte.
- $(g - f)(x) = x - x^2$  e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$  e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$  e tem domínio  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ <sup>23</sup>.

### 1.7.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$ . Definimos a **função composta** de  $f$  com  $g$  por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \quad (1.81)$$

Seu domínio consiste dos valores de  $x$  que pertençam ao domínio da  $g$  e tal que  $g(x)$  pertença ao domínio da  $f$ .

**Exemplo 1.7.2.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ . A função composta  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ .

### 1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

### 1.7.4 Translações

Dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que a o gráfico de  $y = f(x) + k$  é uma translação vertical do gráfico de  $f$ . Se  $k > 0$ , observamos uma translação vertical para cima. Se  $k < 0$ , observamos uma translação vertical para baixo.

**Exemplo 1.7.3.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k = x^2 + k$  para  $k = 1$ .

<sup>23</sup>Observemos que não podemos simplificar o  $x$ , pois a função  $y = x$  é diferente da função  $y = x^2/x$ .

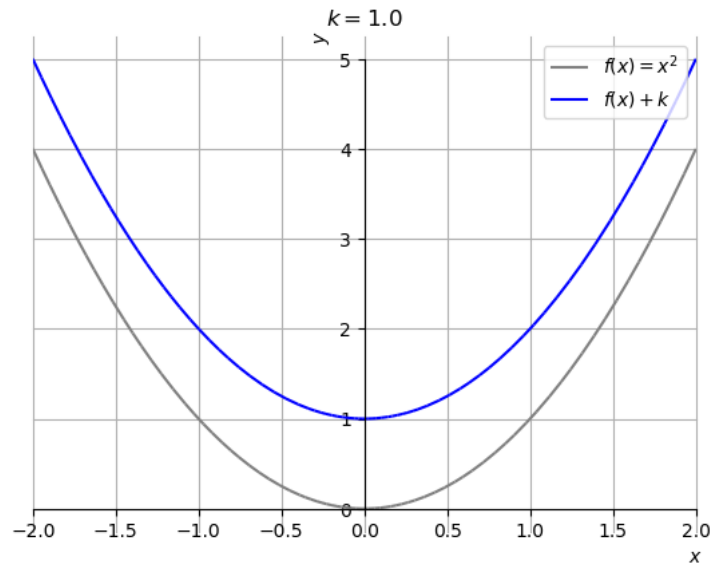


Figura 1.23: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $f(x) + k$  com  $k = 1$ .

O seguinte código Python<sup>24</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k$ :

```
k = 1
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -2, 2), line_color="gray", show=False)
q = plot(f(x)+k, (x, -2, 2), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("k = %1.1f" % k)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x)+k$"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

<sup>24</sup>Veja a Observação ??.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de  $k$  e a função  $f$  para vermos o efeito das translações verticais.

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que o gráfico de  $y = f(x + k)$  é uma translação horizontal do gráfico de  $f$  em  $k$  unidades. Se  $k > 0$ , observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se  $k < 0$ , observamos uma translação horizontal para a direita.

**Exemplo 1.7.4.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k) = (x + k)^2$  para  $k = 1$ .

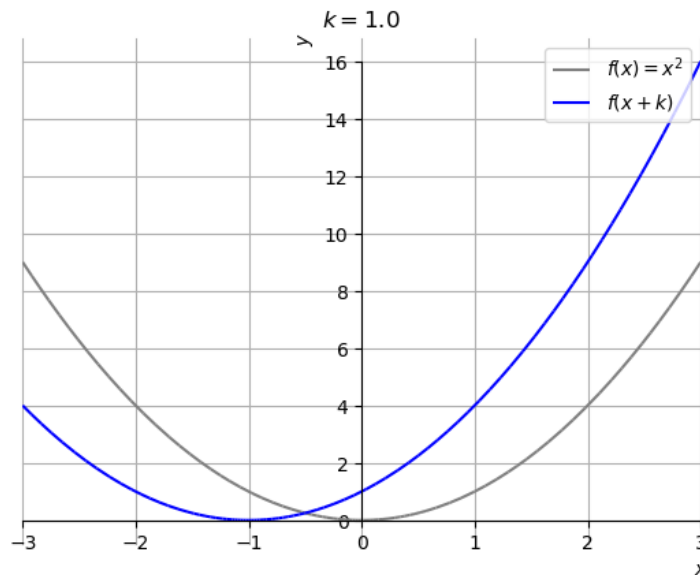


Figura 1.24: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $f(x + k)$  com  $k = 1$ .

O seguinte código Python<sup>25</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k)$ :

```
k = 1
```

---

<sup>25</sup>Veja a Observação ??.

```

f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -3, 3), line_color="gray", show=False)
q = plot(f(x+k), (x, -3, 3), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("k = %1.1f" % k)
p.xlabel = 'x'
p.ylabel = 'y'
p[0].label = "f(x) = x^2"
p[1].label = "f(x+k)"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar o valor de  $k$  e a função  $f$  para vermos o efeito das translações horizontais.

### 1.7.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função  $f$  e uma constante  $\alpha$ . Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$  é uma dilatação vertical do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = \alpha f(x)$  é uma contração vertical do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma contração horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma dilatação horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ .

**Exemplo 1.7.5.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot x^2$  para  $\alpha = 2$ .



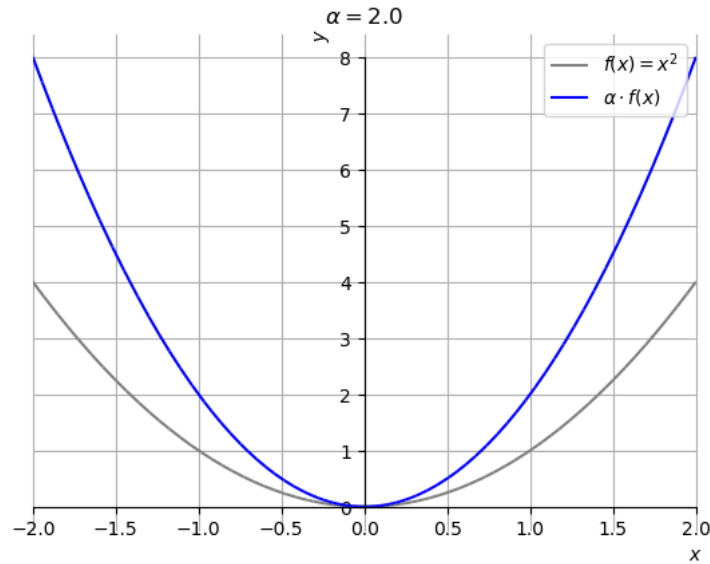


Figura 1.25: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $\alpha \cdot f(x)$  com  $\alpha = 2$ .

O seguinte código Python<sup>26</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $\alpha \cdot f(x)$ :

```
alpha = 2
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -2, 2), line_color="gray", show=False)
q = plot(alpha*f(x), (x, -2, 2), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha = %.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$\alpha \cdot f(x)$"
p.save('fig_ex_dilavert.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

<sup>26</sup>Veja a Observação ??.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilavert.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de  $\alpha$  e a função  $f$  para vermos o efeito das dilatações/contrações verticais.

**Exemplo 1.7.6.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^2 - 2(\alpha \cdot x) + 1$  para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

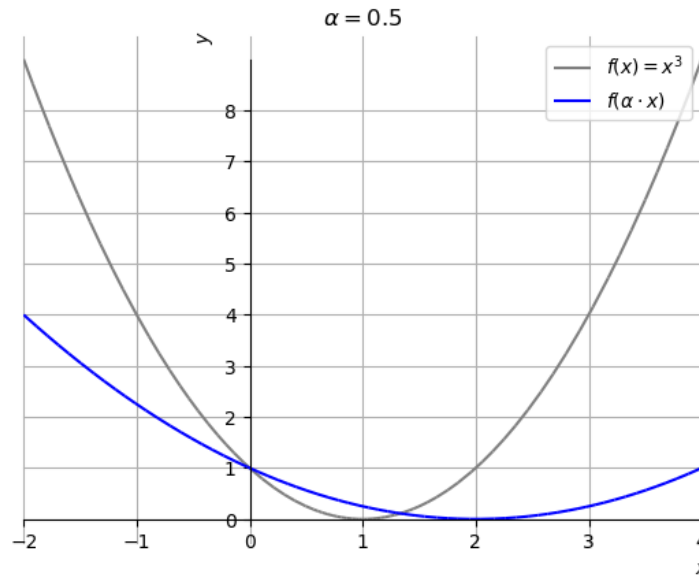


Figura 1.26: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  e  $f(\alpha \cdot x)$  com  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

O seguinte código Python<sup>27</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x)$ :

```
alpha = 0.5
f = lambda x: x**2-2*x+1

p = plot(f(x),(x,-2,4),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(alpha*x),(x,-2,4),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha = %1.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
```

<sup>27</sup>Veja a Observação ??.

```
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^3$"
p[1].label = "$f(\alpha \cdot x)$"
p.save('fig_ex_dilahoriz.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(0,9))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilahoriz.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações horizontais.

### 1.7.6 Reflexões

Seja dada uma função  $f$ . O gráfico da função  $y = -f(x)$  é uma reflexão em torno do eixo das abscissas do gráfico da função  $f$ . Já, o gráfico da função  $y = f(-x)$  é uma reflexão em torno do eixo das ordenadas do gráfico da função  $f$ .

**Exemplo 1.7.7.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$ .

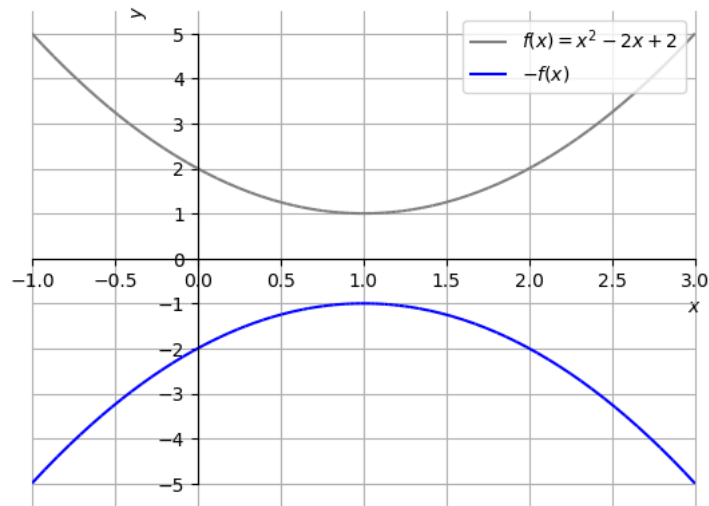


Figura 1.27: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $-f(x)$ .

O seguinte código Python<sup>28</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x)$ :

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(-f(x),(x,-1,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$-f(x)$"
p.save('fig_ex_reflex.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-5,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_reflex.png', bbox_inches='tight')
```

<sup>28</sup>Veja a Observação ??.

Podemos alterar a função  $f$  para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das abscissas.

**Exemplo 1.7.8.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x) = x^2 + 2x + 2$ .

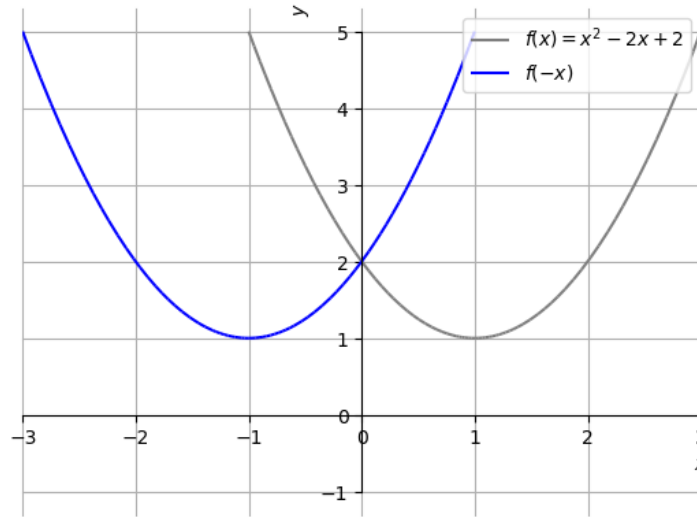


Figura 1.28: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $f(-x)$ .

O seguinte código Python<sup>29</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x)$ :

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="none",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$f(-x)$"
p[2].label = ""
```

<sup>29</sup>Veja a Observação ??.

```
p.save('fig_ex_refley.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-1,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_refley.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar a função  $f$  para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das ordenadas.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.7.1.** Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \quad (1.82)$$

Determine a função composta  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**Solução.** Começamos determinando a função composta

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (1.83)$$

$$= f(x^2 + 1) \quad (1.84)$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^2 - \sqrt{x^2 + 1 - 1}}{x^2 + 1} \quad (1.85)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{x^2}}{x^2 + 1} \quad (1.86)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - |x|}{x^2 + 1}. \quad (1.87)$$

Agora, observamos que  $g$  está definida em toda parte e tem imagem  $[1, \infty)$ . Como o domínio da  $f$  é  $[1, \infty)$ , temos que  $(f \circ g)$  está definida em toda parte.

◇

**ER 1.7.2.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$ .

**Solução.** Começamos traçando o gráfico de  $f_1(x) = x^3$ . Então, obtemos o gráfico de  $f_2(x) = (x-1)^3$  por translação de uma unidade à direita. O

gráfico de  $f_3(x) = 2(x - 1)^3$  é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de  $f_4(x) = 2(x - 1)^3 + 1$  é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura ??.

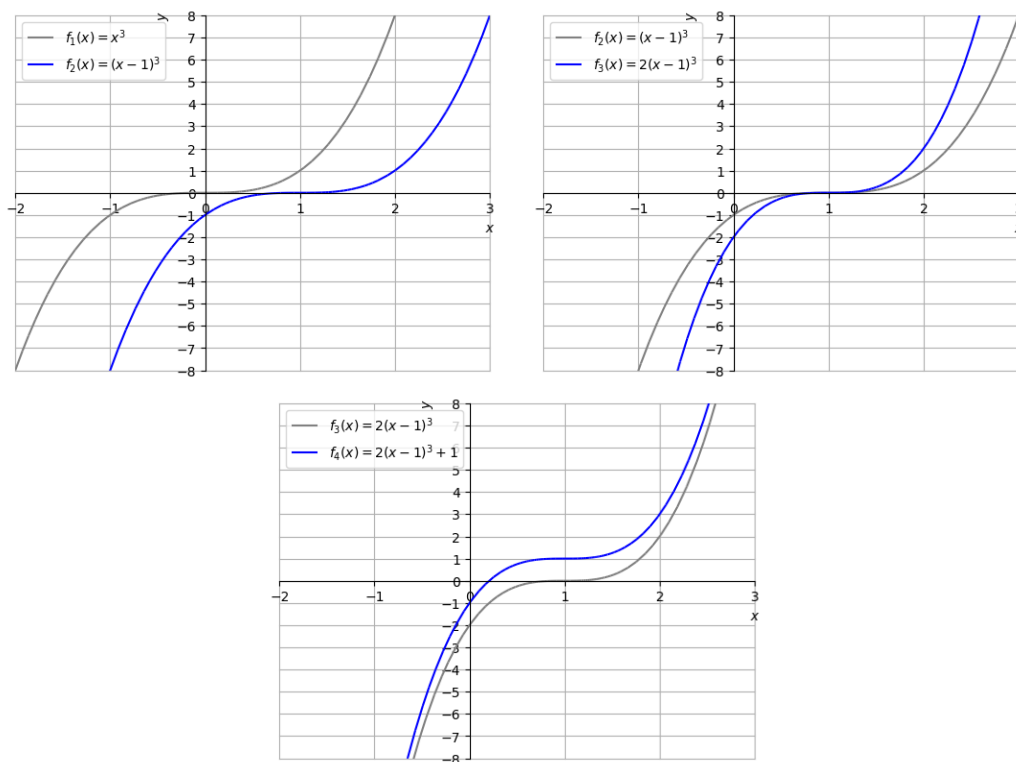


Figura 1.29: Construção do esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x - 1)^3 + 1$ .

◇

## Exercícios

**E 1.7.1.** Sejam  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Determine a função  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**E 1.7.2.** Faça um esboço do gráfico de  $g(x) = 2x^3 - 1$ .

## 1.8 Propriedades de funções

### 1.8.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma função  $f$  é dita ser crescente quando  $f(x_1) < f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$  no seu domínio. É dita não decrescente quando  $f(x_1) \leq f(x_2)$  para todos os  $x_1 < x_2$  no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando  $f(x_1) > f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ . E, por fim, é dita não crescente quando  $f(x_1) \geq f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ , sempre no seu domínio.

**Exemplo 1.8.1.** Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade**  $f(x) = x$  é crescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0, \\ 2 & , 0 < x \leq 1, \\ (x - 1)^2 + 2 & , x > 1 \end{cases} \quad (1.88)$$

é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

**Exemplo 1.8.2.** A função  $f(x) = x^2$  é uma função decrescente no intervalo  $(-\infty, 0]$  e crescente no intervalo  $[0, \infty)$ .

### 1.8.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função**  $f$  é dita **par** quando  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio.

**Exemplo 1.8.3.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  é uma função par.
- $f(x) = x^3$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \sin x$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$  é uma função par.
- $f(x) = x + 1$  não é par nem ímpar.



### 1.8.3 Funções injetoras

Uma dada **função**  $f$  é dita **injetora** quando  $f(x_1) \neq f(x_2)$  para todos  $x_1 \neq x_2$  no seu domínio.

**Exemplo 1.8.4.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$  é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$  é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora  $y = f(x)$ , existe uma única função  $g$  tal que

$$g(f(x)) = x, \quad (1.89)$$

para todo  $x$  no domínio da  $f$ . Tal função  $g$  é chamada de **função inversa** de  $f$  é comumente denotada por  $f^{-1}$ .<sup>30</sup>

**Exemplo 1.8.5.** Vamos calcular a função a função inversa de  $f(x) = x^3 + 1$ . Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \quad (1.90)$$

Então, isolando  $x$ , temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \quad (1.91)$$

Desta forma, concluímos que  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ . Verifique que  $f^{-1}(f(x)) = x$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ !

**Observação 1.8.1.** Os gráficos de uma dada função injetora  $f$  e de sua inversa  $f^{-1}$  são simétricos em relação a **reta identidade**  $y = x$ .

### Exercícios resolvidos

**ER 1.8.1.** Defina os intervalos em que a função  $f(x) = -|x + 1|$  é crescente ou decrescente.

**Solução.** A função  $f$  é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função  $f(x) = |x|$ . Veja a Figura ??.

<sup>30</sup>Observe que, em geral,  $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ .

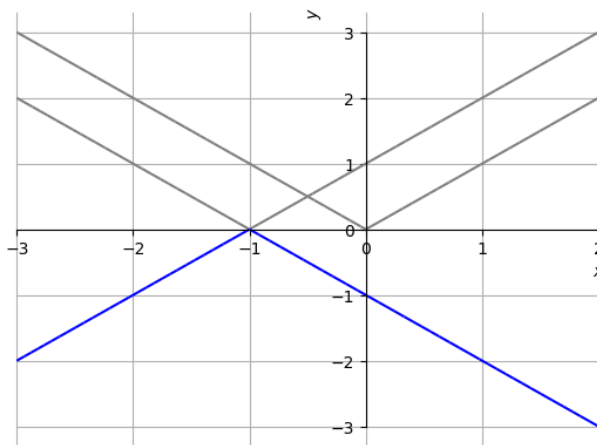


Figura 1.30: Esboço do gráfico de  $f(x) = -|x + 1|$ .

Do esboço do gráfico de  $f$ , podemos inferir que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, -1]$  e decrescente no intervalo  $[-1, \infty)$ .

◇

**ER 1.8.2.** Analise a paridade da função  $\operatorname{tg}(x)$ .

**Solução.** Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\operatorname{tg} x. \quad (1.92)$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

◇

**ER 1.8.3.** Calcule a função inversa de  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ .

**Solução.** Para obtermos a função inversa de uma função  $f$ , resolvemos  $y = f(x)$  para  $x$ . Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x + 1} \quad (1.93)$$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \quad (1.94)$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \quad (1.95)$$

Logo, temos  $f^{-1}(x) = x^2 - 1$  restrita ao conjunto imagem da  $f$ , i.e. o domínio de  $f^{-1}$  é  $[0, \infty)$ .

◇

## Exercícios

**E 1.8.1.** Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x+5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (1.96)$$

**E 1.8.2.** Analise a paridade da função  $\operatorname{cosec} x$ .

**E 1.8.3.** Seja  $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$ . Calcule  $f^{-1}$  e determine seu domínio.

## 1.9 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \quad (1.97)$$

onde  $a \neq 1$  é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem  $(0, \infty)$ . O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos  $(-1, 1/a)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, a)$ . Veja a Figura ??.

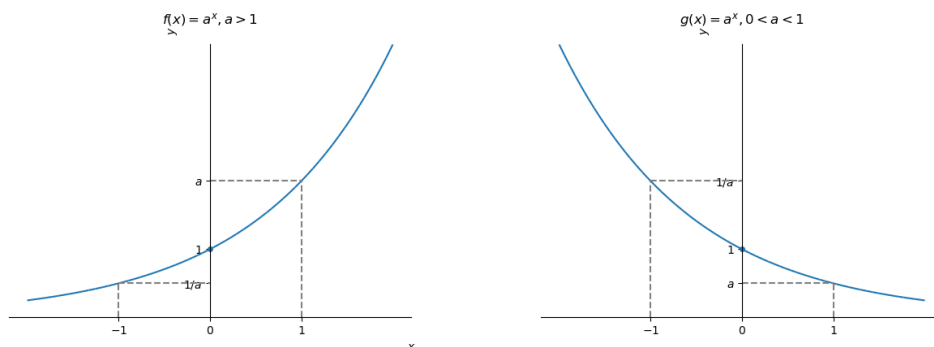


Figura 1.31: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $g(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.9.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $f(x) = e^x$  de função exponencial natural.

No [SymPy](#)<sup>31</sup>, o número de Euler é obtido com a constante E:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

## Exercícios resolvidos

**ER 1.9.1.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

**Solução.** Primeiramente, observamos que  $f(x) = e^{-2x+1} - 1 = e^{-2(x-\frac{1}{2})} - 1$ . 1. Então, partindo do gráfico de  $e^{-x}$ , fazemos uma translação de  $\frac{1}{2}$  unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de  $\frac{1}{2}$  vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura ??.

---

<sup>31</sup>Veja a Observação ??

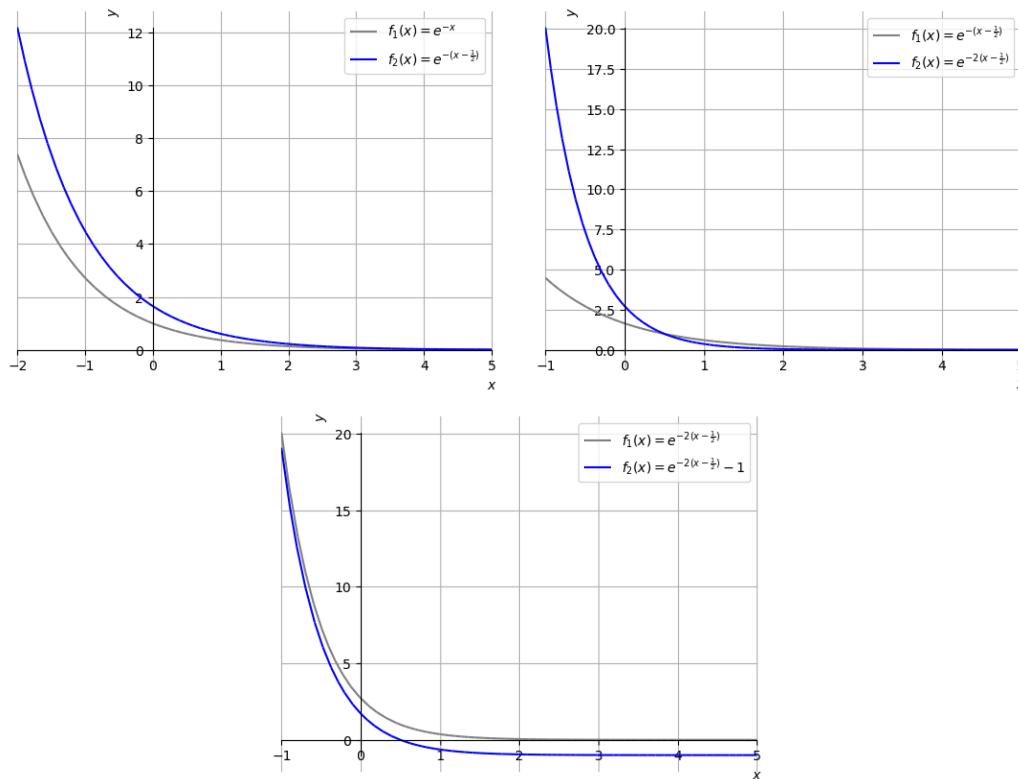


Figura 1.32: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

◇

## Exercícios

**E 1.9.1.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = 2e^{x-1} + 2$ .

## 1.10 Funções logarítmicas

A **função logarítmica**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , é a função inversa da função exponencial  $y = a^x$ . Veja a Figura ???. O domínio da função logarítmica é  $(0, \infty)$  e a imagem  $(-\infty, \infty)$ .

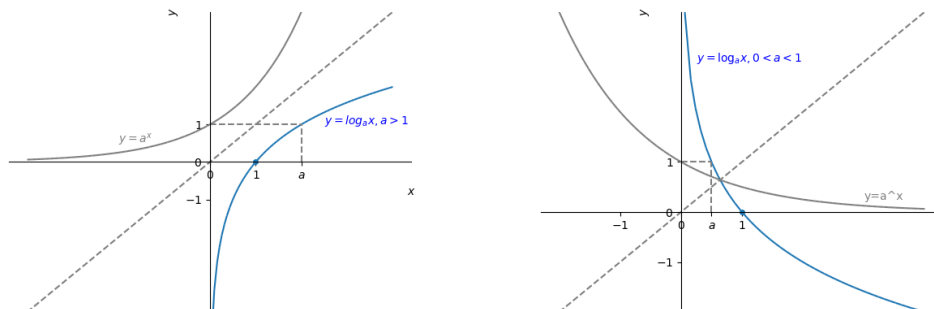


Figura 1.33: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda)  $y = \log_a x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $y = \log_a x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.10.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $y = \log_e x$  de função exponencial natural e denotamo-la por  $y = \ln x$ .

No [SymPy](#), podemos computar  $\log_a x$  com a função `log(x,a)`. O  $\ln x$  é computado com `log(x)`.

**Observação 1.10.2.** Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ ;
- $\log_a 1 = 0$ ;
- $\log_a a = 1$ ;
- $\log_a a^x = x$ ;
- $a^{\log_a x} = x$ ;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ .
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.10.1.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x + 2) + 1$  e determine seu domínio.

**Solução.** Para fazermos o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ , podemos começar com o gráfico de  $f_1(x) = \ln x$ . Então, podemos transladá-lo 2 unidades à esquerda, de forma a obtermos  $f_2(x) = \ln(x + 2) = f_1(x + 2)$ . Por fim, transladamos o gráfico de  $f_2(x)$  uma unidade para cima, obtendo o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x + 2) + 1 = f_2(x) + 1$ . Veja a Figura ??.

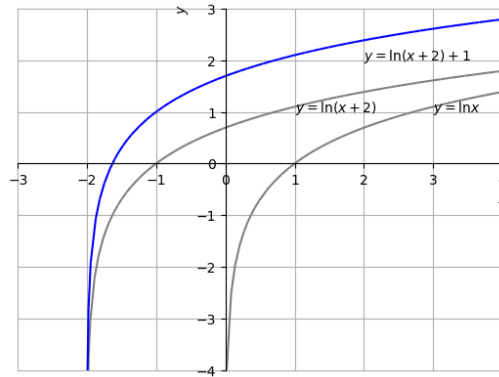


Figura 1.34: Esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ .

Ainda, o domínio de  $\ln x$  é  $(0, \infty)$ . Como,  $f(x) = \ln(x + 2) + 1$  é uma translação de duas unidades à esquerda e uma para cima de  $\ln x$ , temos que o domínio de  $f(x)$  é  $(-2, \infty)$ .

◇

**ER 1.10.2.** Resolva a seguinte equação para  $x$

$$\ln(x + 2) + 1 = 1. \quad (1.98)$$

**Solução.** Podemos calcular a solução pelos seguintes passos:

$$\ln(x + 2) + 1 = 1 \Rightarrow \ln(x + 2) = 0 \quad (1.99)$$

$$\Rightarrow x + 2 = e^0 \quad (1.100)$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2 = -1. \quad (1.101)$$

$$(1.102)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar a solução com o seguinte comando<sup>32</sup>:

```
solve(Eq(log(x+2)+1,1),x)
```

◇

## Exercícios

**E 1.10.1.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \log(x - 2) - 1$  e determine seu domínio.

**E 1.10.2.** Resolva a seguinte equação para  $x$

$$\ln(x + 1)^2 = 0. \quad (1.103)$$

---

<sup>32</sup>Veja a Observação ??.



# Capítulo 2

## Limites

**Observação 2.0.1.** Ao longo deste capítulo, ao apresentarmos códigos [Python](#) estaremos assumindo os seguintes comandos prévios:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

### 2.1 Noção de limites

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto  $x_0$ , exceto talvez em  $x_0$ . Quando o valor de  $f(x)$  é arbitrariamente próximo de um número  $L$  para  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (2.1)$$

e dizemos que o limite da função  $f$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$ . Veja a Figura ??.

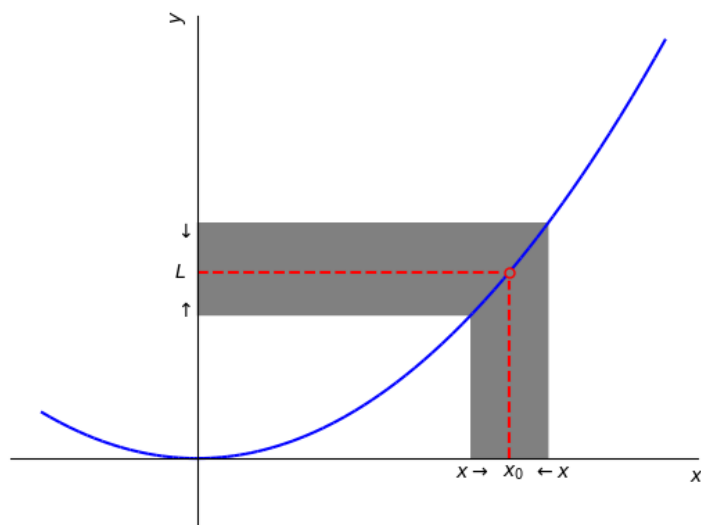


Figura 2.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

**Exemplo 2.1.1.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (2.2)$$

Na Figura ??, temos um esboço do gráfico desta função.

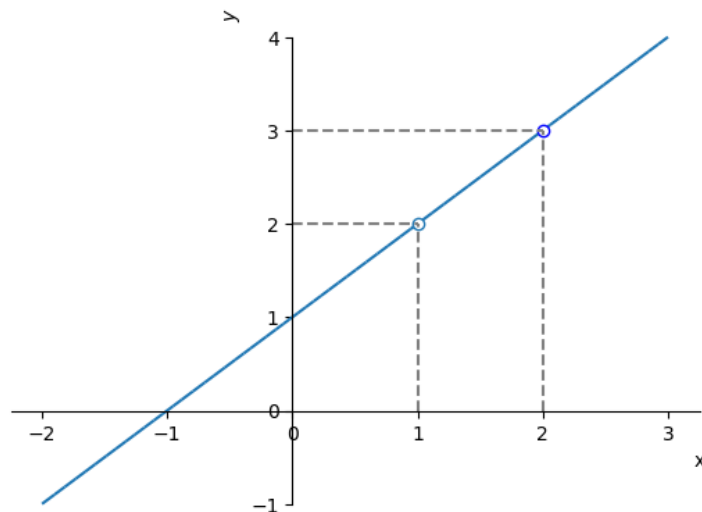


Figura 2.2: Esboço do gráfico da função  $f(x)$  dada no Exemplo ??.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

$x$	-0,01	-0,001	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , embora  $f(1)$  não esteja definido.

$x$	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , embora  $f(2)$  também não esteja definido. Verifique!

### 2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (2.3)$$

seja qual for a constante  $k$ . Veja a Figura ??.

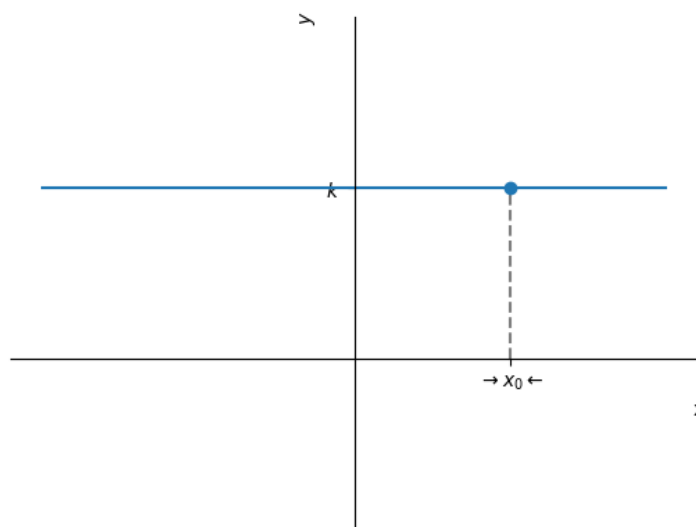


Figura 2.3: Esboço do gráfico de uma função constante  $f(x) = k$ .

**Exemplo 2.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{2} - e = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (2.4)$$

seja qual for o ponto  $x_0$ . Vejamos a Figura ??.

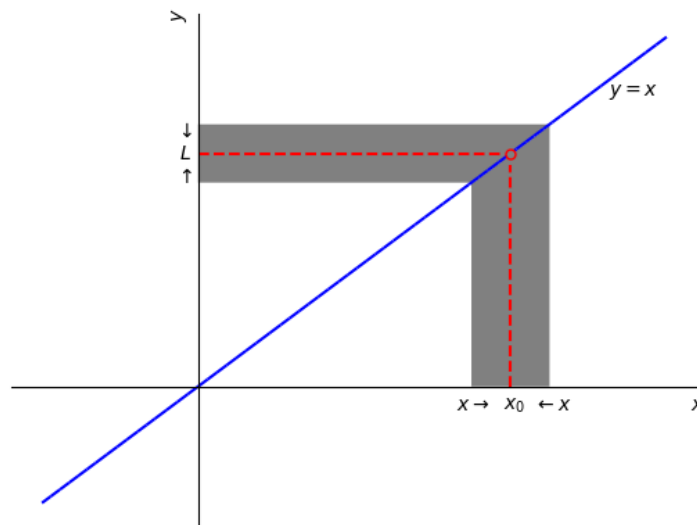


Figura 2.4: Noção de limite para a função identidade  $f(x) = x$ .

**Exemplo 2.1.3.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Estime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x. \quad (2.5)$$

**Solução.** Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto  $x_0$ , computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

$x$	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,460	2,691	2,716	$\rightarrow 2,72 \leftarrow$	2,719	2,721	2,746

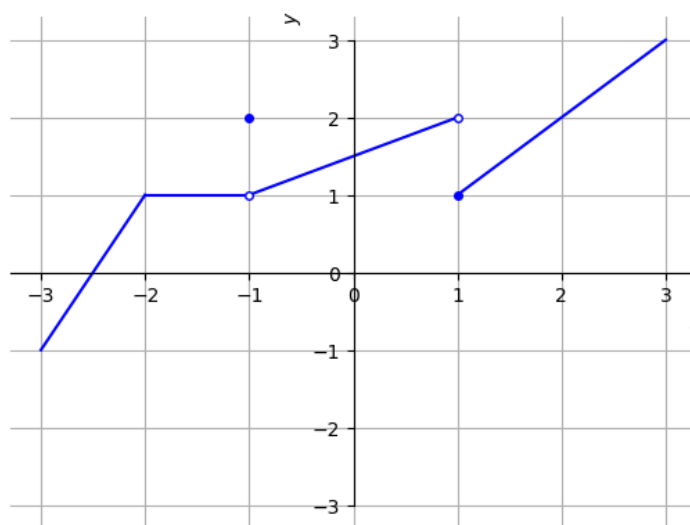
Com isso, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x \approx 2,72. \quad (2.6)$$

Mais adiante, veremos que  $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \approx 2,718281828459045\dots$

◇

**ER 2.1.2.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Solução.**

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de  $-2$  e a direita de  $-2$  (i.e.  $x > -2$ ), podemos observar que  $f(x) = 1$ . Para tais valores de  $x$  a esquerda de  $-2$  (i.e.  $x < -2$ ), vemos que os valores de  $f(x)$  tornam-se próximos

de 1. Isto é, temos que os valores de  $f(x)$  podemos ser tomados arbitrariamente próximos de  $L = 1$ , se tomarmos  $x$  suficientemente próximo de  $-2$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1. \quad (2.7)$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Mesmo sendo  $f(-1) = 2$ , observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de  $x$  suficientemente próximos de  $-1$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1. \quad (2.8)$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Aqui, para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0 = 1$  e a esquerda ( $x < 1$ ), vemos que os valores de  $f(x)$  são próximos de  $L = 2$ . Entretanto, para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0 = 1$  e a direita ( $x > 1$ ), temos que os valores de  $f(x)$  são próximos de  $L = 1$ . Ou seja, não é possível escolher um valor  $L$  tal que  $f(x)$  esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos  $x$  suficientemente próximo de  $x_0 = 1$ , pois  $L$  dependerá de  $x$  estar a esquerda ou a direita de do ponto  $x_0 = 1$ . Concluimos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.9)$$

◇

## Exercícios

**E 2.1.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de

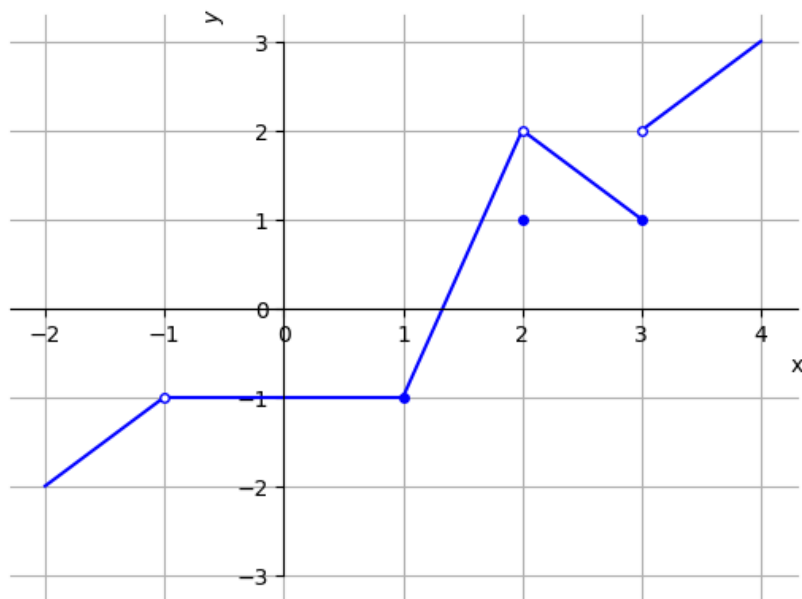


gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**E 2.1.2.** Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício ??), forneça

- 1.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$
- 2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

**E 2.1.3.** Forneça o valor dos seguintes limites:



- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 2$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} 2$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3$
- d)  $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

**E 2.1.4.** Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} x$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -3} x$
- d)  $\lim_{x \rightarrow e} x$

## 2.2 Regras para o cálculo de limites

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2, \quad (2.10)$$

com  $x_0, L_1, L_2$  números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL_1, \quad (2.11)$$

para qualquer número real  $k$ .

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (2.12)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.13)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.14)$$

desde que  $L_2 \neq 0$ .

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = L_1^s, \quad (2.15)$$

se  $L_1^s$  é um número real.

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (2.16)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (2.17)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit(2*x,x,-1)
```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.18)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.19)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (2.20)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit(x**2-1,x,-1)
```

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2} \quad (2.21)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)^2} \quad (2.22)$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \quad (2.23)$$

$$= 1. \quad (2.24)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit(sqrt(1-x**2),x,0)
```

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)(x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1)(x - 2)} \quad (2.25)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)} \quad (2.26)$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1. \quad (2.27)$$

**Proposição 2.2.1.** (Limites de polinômios) Se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.28)$$

para qualquer número real  $b$  dado.

*Demonstração.* Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação. Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (2.30)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.31)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = p(b). \quad (2.32)$$

□

**Exemplo 2.2.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}. \quad (2.33)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

**Proposição 2.2.2.** (Limite de funções racionais) Sejam  $r(x) = p(x)/q(x)$  é uma função racional e  $b$  um número real tal que  $q(b) \neq 0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.34)$$

*Demonstração.* Segue da regra do limite do quociente e da Proposição ??:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (2.35)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.36)$$

□

**Exemplo 2.2.3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = 1. \quad (2.37)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

**2.2.1 Indeterminação 0/0**

Quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.38)$$

é uma **indeterminação do tipo 0/0**. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum  $(x - a)$ .

**Exemplo 2.2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3. \quad (2.39)$$

No **SymPy**, podemos computar o limite acima com

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

**Exemplo 2.2.5.** No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (2.40)$$

temos que o denominador  $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  se anula em  $x = 1$ , assim como o denominador  $q(x) = x^2 + x - 2$ . Assim sendo,  $(x - 1)$  é um fator comum entre  $p(x)$  e  $q(x)$ . Para explicitá-lo,

$$\frac{p(x)}{x - 1} = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad \frac{q(x)}{x - 1} = x + 2. \quad (2.41)$$

No **SymPy**, podemos computar estas divisões com os seguintes comandos

```
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad \text{e} \quad q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (2.42)$$

Com isso, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (2.43)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (2.44)$$

**Exemplo 2.2.6.** No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} \quad (2.45)$$

temos uma indeterminação do tipo  $0/0$  envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (2.46)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.47)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.48)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit((sqrt(1-x)-1)/x,x,0)
```

## Exercícios resolvidos

**ER 2.2.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.50)$$

**Solução.** Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - x^2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}} \quad (2.51)$$

$$= \frac{-1 - (-1)^2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3}} \quad (2.52)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \quad (2.53)$$

$$= -1. \quad (2.54)$$

◇

**ER 2.2.2.** Assumindo que o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$  e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (2.55)$$

forneça o valor de  $L$ .

**Solução.** Das propriedades de limites, temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1 &\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 2} = 1 \\
 &\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{2 + 2} = 1 \\
 &\Rightarrow \frac{L - 2}{4} = 1 \\
 &\Rightarrow L - 2 = 4 \\
 &\Rightarrow L = 6.
 \end{aligned}$$

◇

**ER 2.2.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.56)$$

**Solução.** Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - \sqrt{x^2 + 3} = 0. \quad (2.57)$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0, \quad (2.58)$$

concluimos se tratar de uma indeterminação 0/0. Por racionalização, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{2 + \sqrt{x^2 + 3}} \quad (2.59)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{4 - (x^2 + 3)} \quad (2.60)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{1 - x^2} \quad (2.61)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{(1 + x)(1 - x)} \quad (2.62)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{1 - x} \quad (2.63)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (2.64)$$

◇

**Exercícios****E 2.2.1.** Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad (2.65)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 2 \cdot f(x).$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \pi \cdot f(x).$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x).$

**E 2.2.2.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{2}, \quad (2.66)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2g(x)$

**E 2.2.3.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2, \quad (2.67)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$

**E 2.2.4.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \quad (2.68)$$

calcule:



- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$   
b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

**E 2.2.5.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4, \quad (2.69)$$

calcule:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{g(x)}$   
b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x)}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

**E 2.2.6.** Calcule os limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2} -3x$   
b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

**E 2.2.7.** Calcule os limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1}$   
b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

**E 2.2.8.** Calcule os limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

**E 2.2.9.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x - 2}}{x - 6}. \quad (2.70)$$

## 2.3 Limites laterais

Seja dada uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(a, x_0)$ . O **limite lateral à esquerda** de  $f$  no ponto  $x_0$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (2.71)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x < x_0$ . Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (2.72)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x < x_0$  suficientemente próximo de  $a$ . Veja a Figura ??.

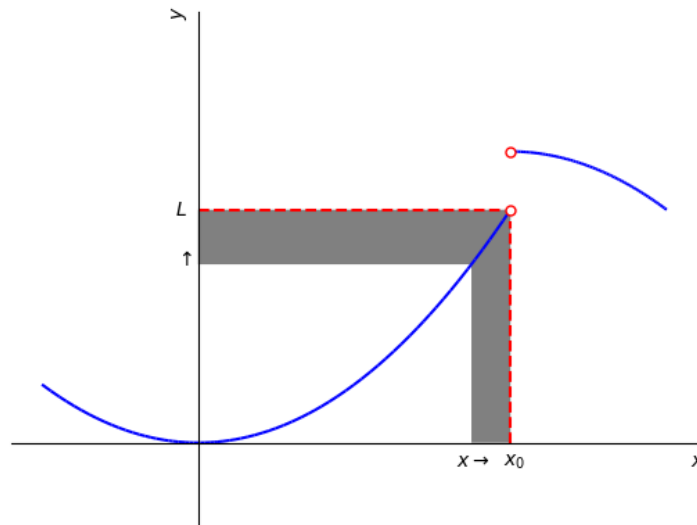


Figura 2.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(x_0, b)$ , o **limite lateral à direita** de  $f$  no ponto  $x_0$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (2.73)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x > x_0$ . Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad (2.74)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x > x_0$  suficientemente próximo de  $x_0$ . Veja a Figura ??.

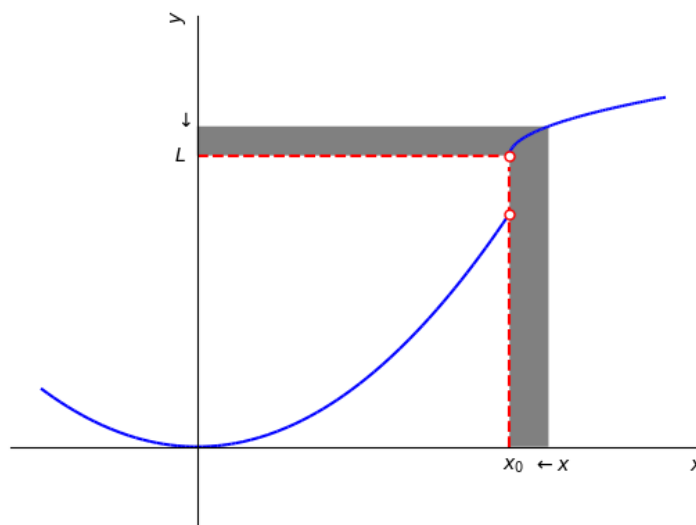


Figura 2.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

**Observação 2.3.1.** Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} x = x_0, \quad (2.75)$$

onde  $x_0$  e  $k$  são quaisquer números reais.

**E 2.3.1.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (2.76)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.77)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de  $x = 0$ , trabalhamos com  $x < 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (2.78)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (2.79)$$

Verifique!

Usando o [SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos<sup>1</sup>:

```
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')

```

**Teorema 2.3.1.** *Existe o limite de uma dada função  $f$  no ponto  $x = x_0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se, e somente se, existem e são iguais a  $L$  os limites laterais à esquerda e à direita de  $f$  no ponto  $x = x_0$ .*

**E 2.3.2.** No exemplo anterior (Exemplo ??), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (2.80)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema ??), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (2.81)$$

**E 2.3.3.** Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (2.82)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (2.83)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (2.84)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (2.85)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (2.86)$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, concluímos que não existe o limite de  $|x|/x$  no ponto  $x = 0$ .

No [SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

---

<sup>1</sup>Veja a Observação ??

`limit(abs(x)/x,x,0)`

fornece o valor 1 como saída.

**Observação 2.3.2.** As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_2, \quad (2.87)$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = k L_1, \quad (2.88)$$

para qualquer número real  $k$ .

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (2.89)$$

- regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.90)$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.91)$$

desde que  $L_2 \neq 0$ .

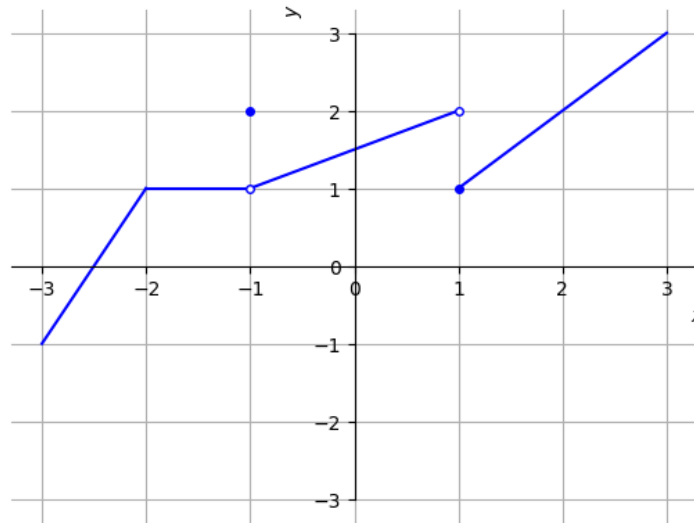
- regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (f(x))^s = \left( \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \right)^s = L_1^s, \quad (2.92)$$

se  $L_1^s$  é um número real.

## Exercícios resolvidos

**ER 2.3.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Solução.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Para valores  $x < -2$  e suficientemente próximos de  $-2$ , podemos observar que  $f(x)$  fica arbitrariamente próximo de  $1$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1. \quad (2.93)$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Mesmo sendo  $f(-1) = 2$ , observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de  $x > -1$  e suficientemente próximos de  $-1$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad (2.94)$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de  $x < 1$  e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2. \quad (2.95)$$

Notamos também que, neste caso,  $f(x)$  não tende para  $f(1) = 1$  quando  $x$  tende a 1 pela esquerda.

d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de  $x > 1$  e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.96)$$

Aqui,  $f(x) \rightarrow f(1) = 1$  quando  $x \rightarrow 1^+$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.97)$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.98)$$

◇

**ER 2.3.2.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \quad (2.99)$$



**Solução.** A função  $f$  tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de  $x_0 = -1$ . Portanto, para calcularmos  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)^2 - 1 \quad (2.100)$$

$$= (-1+1)^2 - 1 = -1, \quad (2.101)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \quad (2.102)$$

$$= -1. \quad (2.103)$$

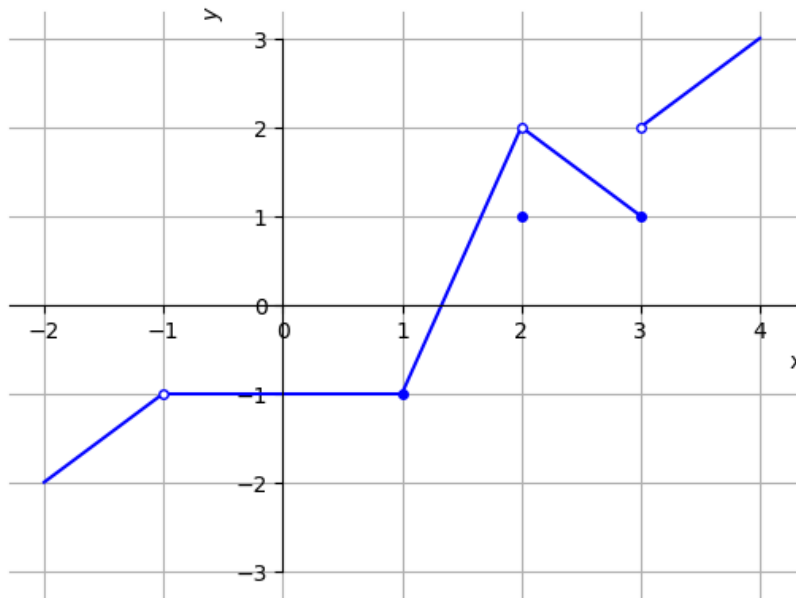
Como ambos os limites laterais são iguais a  $-1$ , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \quad (2.104)$$

◇

## Exercícios

**E 2.3.4.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**E 2.3.5.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \quad (2.105)$$

calcule

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**E 2.3.6.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x + 1 & , x > 1, \end{cases} \quad (2.106)$$

calcule

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**E 2.3.7.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2|x|}. \quad (2.107)$$

**E 2.3.8.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.108)$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

## 2.4 Limite no infinito

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função  $f(x)$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $x \rightarrow \infty$ .

Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , se os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de  $L$  para valores de  $x$  suficientemente pequenos. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (2.109)$$

Veja a Figura ??.

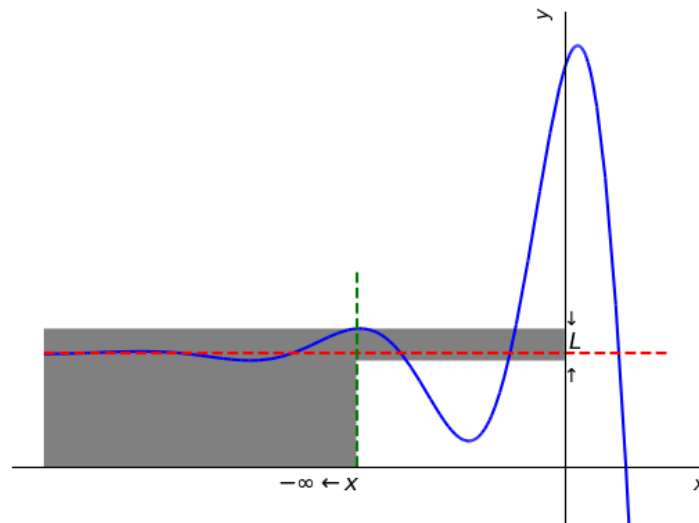


Figura 2.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando  $x \rightarrow -\infty$ .

Analogamente, dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende  $\infty$ , se os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente próximos de  $L$  para valores de  $x$  sufici-

entamente grandes. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.110)$$

Veja a Figura ??.

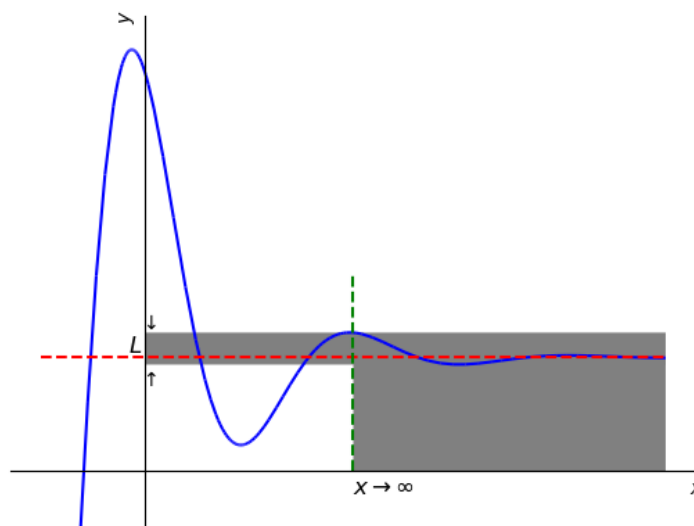


Figura 2.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando  $x \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 2.4.1.** Vamos inferir os limites de  $f(x) = 1/x$  para  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow \infty$ . A Figura ?? é um esboço do gráfico desta função.

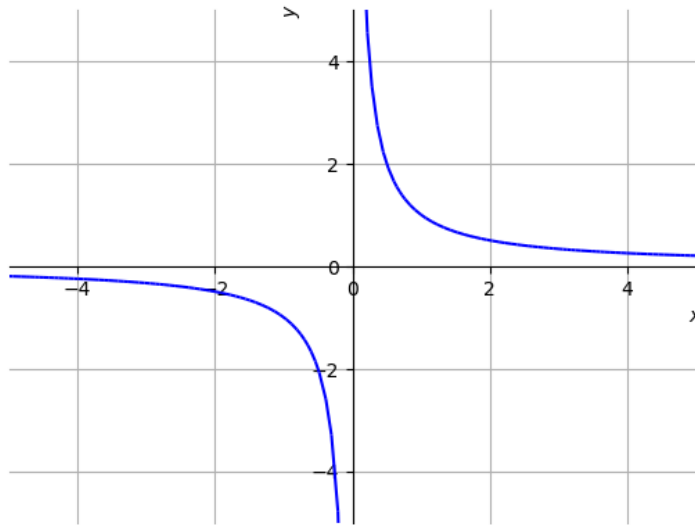


Figura 2.9: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/x$ .

Observamos que quanto menores os valores de  $x$ , mais próximos de 0 são os valores de  $f(x) = 1/x$ . Daí, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.111)$$

Também, quanto maiores os valores de  $x$ , mais próximos de 0 são os valores de  $f(x) = 1/x$ . Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.112)$$

Podemos computar estes limites com o [SymPy](#), usando os seguintes comandos<sup>2</sup>:

```
limit(1/x,x,-oo)
limit(1/x,x,oo)
```

**Observação 2.4.1.** (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que  $L$ ,  $M$  e  $k$  são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (2.113)$$

---

<sup>2</sup>Veja a Observação ??.

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (2.114)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (2.115)$$

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (2.116)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (2.117)$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (2.118)$$

### Exemplo 2.4.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (2.119)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (2.120)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (2.121)$$

### Exemplo 2.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.122)$$

Observe que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. Para contornar este problema, podemos multiplicar e dividir por  $1/x^3$  (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3}. \quad (2.123)$$

Então, aplicando a regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.124)$$

**Observação 2.4.2.** Dados dois polinômios  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (2.125)$$

**Exemplo 2.4.4.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo ??), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.126)$$

### 2.4.1 Assíntotas horizontais

A reta  $y = L$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.127)$$

**Exemplo 2.4.5.** No Exemplo ??, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.128)$$

Logo, temos que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.129)$$

. Veja a Figura ??.

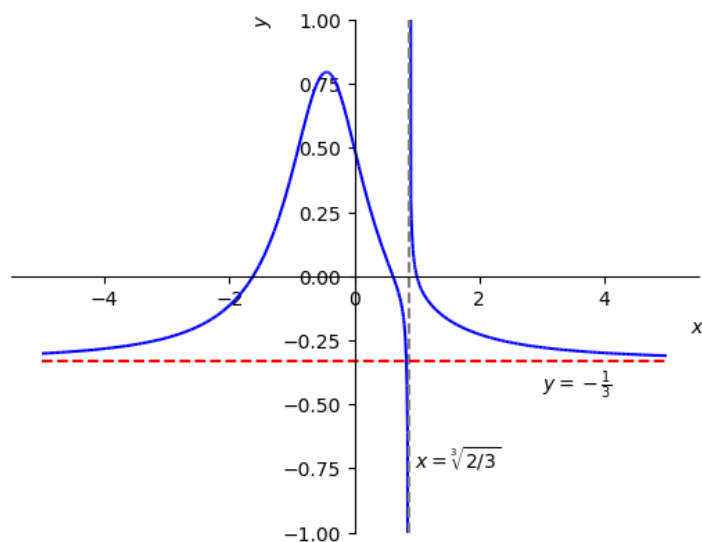


Figura 2.10: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$ .

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.130)$$

O que reforça que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal desta função.

**Exemplo 2.4.6.** (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.131)$$

donde temos que  $y = 0$  é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura ??.



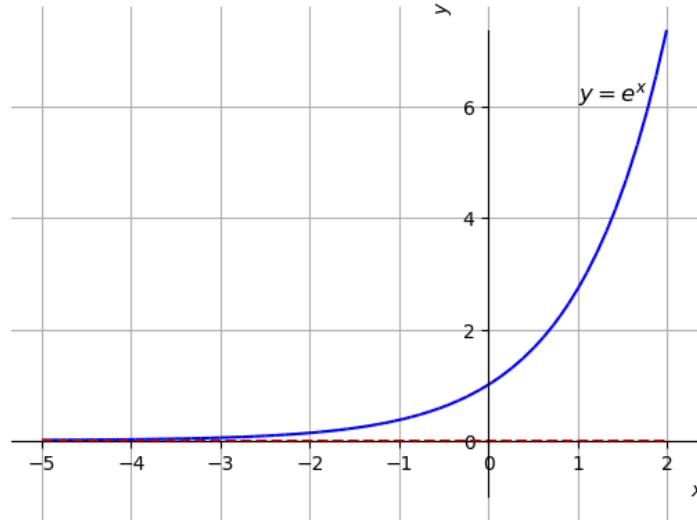


Figura 2.11: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^x$ .

**Exemplo 2.4.7.** (Função logística) Na ecologia, a [função logística](#)

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0} e^{-rt}\right)} \quad (2.132)$$

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo  $P(t)$  o número de indivíduos da população no tempo  $t$ . O parâmetro  $P_0$  é o número de indivíduos na população no tempo inicial  $t = 0$ ,  $r > 0$  é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e  $K$  é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0} e^{-rt}\right)^0} = K \quad (2.133)$$

Ou seja,  $P(t) = K$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $P = P(t)$  e é o limite de saturação do crescimento populacional. Na Figura ??, temos o esboço do gráfico da função logística para  $t \geq 0$ .

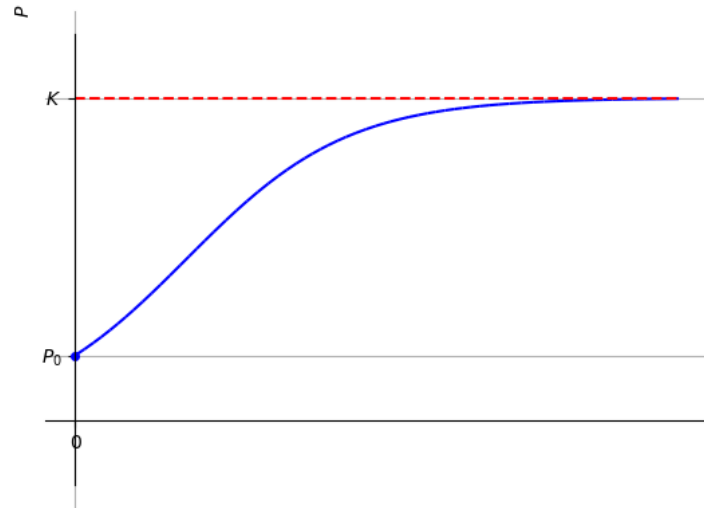


Figura 2.12: Esboço do gráfico da função logística.

### 2.4.2 Limite no infinito de função periódica

Uma função  $f$  é periódica quando existe um número  $T$  tal que

$$f(x) = f(x + T), \quad (2.134)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  no domínio de  $f$ . As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas (veja a Seção ??).

O limite no infinito de funções periódicas não existe<sup>3</sup>. De fato, se  $f$  não é constante, então existem números  $x_1 \neq x_2$  tal que  $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ . Como a função é periódica,  $f(x_1 + kT) = y_1$  e  $f(x_2 + kT) = y_2$  para todo número inteiro  $k$ . Desta forma, não existe número  $L$  que possamos tomar  $f(x)$  arbitrariamente próxima, para todos os valores de  $x$  suficientemente grandes (ou pequenos).

**Exemplo 2.4.8.** Não existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x), \quad (2.135)$$

pois os valores de  $\sin x$  oscilam periodicamente no intervalo  $[-1, 1]$ . Veja a Figura ??.

<sup>3</sup>À exceção de funções constantes.

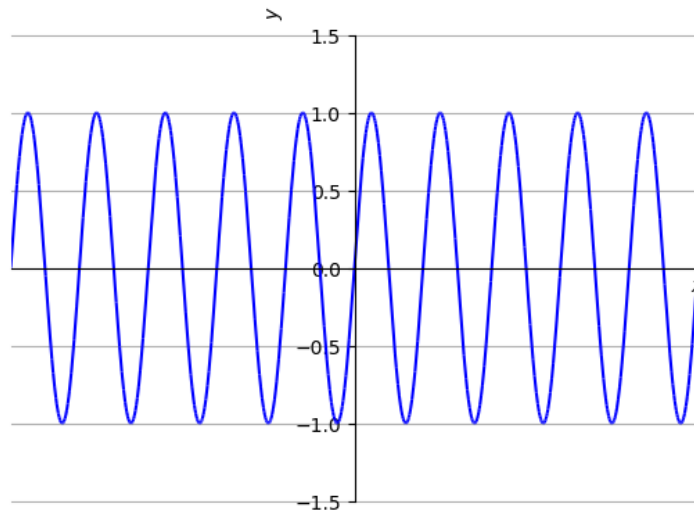


Figura 2.13: Esboço do gráfico de  $f(x) = \sin x$ .

No [SymPy](#), ao computarmos  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  com o comando<sup>4</sup>:

```
limit(sin(x), x, oo)
```

obtemos como saída o intervalo  $[-1, 1]$ , indicando que o limite não existe, pois  $\sin x$  oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

## Exercícios resolvidos

**ER 2.4.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1. \quad (2.136)$$

**Solução.** Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \quad (2.137)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-1} \right) + 1, \quad (2.138)$$

observando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-1)$  existe. De fato, o gráfico de  $g(x) = 1/(x-1)$  é uma translação de uma unidade à esquerda da função  $f(x) = 1/x$ . Uma

---

<sup>4</sup>Veja a Observação ??

translação horizontal finita não altera o comportamento da função para  $x \rightarrow \infty$ . Portanto, como  $f(x) = 1/x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , temos que  $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (2.139)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (2.140)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando<sup>5</sup>:

```
limit(1/(x-1)+1,x,oo)
```

◇

**ER 2.4.2.** Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (2.141)$$

**Solução.** Uma reta  $y = L$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (2.142)$$

Começamos com  $x \rightarrow -\infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (2.143)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (2.144)$$

Logo,  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f(x)$ .

Agora, vamos ver a tendência da função para  $x \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} = \frac{4}{2} = 2. \quad (2.145)$$

---

<sup>5</sup>Veja a Observação ??.

Portanto, concluímos que  $y = 2$  é a única assíntota horizontal ao gráfico da função  $f$ .

Os seguintes comandos<sup>6</sup> do [SymPy](#) permitem plotar o esboço do gráfico da função  $f$  (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
L = limit(f(x),x,oo)
p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],line_color="blue",show=False)
q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

◇

**ER 2.4.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (2.146)$$

**Solução.** Seguindo a ideia aplicada no Exemplo ??, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (2.147)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \quad (2.148)$$

---

<sup>6</sup>Veja a Observação ??.

Lembramos que  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Como  $x \rightarrow \infty$ , temos  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{|x|}} \quad (2.149)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2 \frac{x}{x}} \quad (2.150)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.151)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.152)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (2.153)$$

◇

**ER 2.4.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}. \quad (2.154)$$

**Solução.** Observamos que o gráfico de  $f(x) = e^{-x}$  é uma reflexão em torno do eixo  $y$  do gráfico da função  $g(x) = e^x$ . No Exemplo ??, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.155)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0. \quad (2.156)$$

Veja o esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-x}$  na Figura ??.

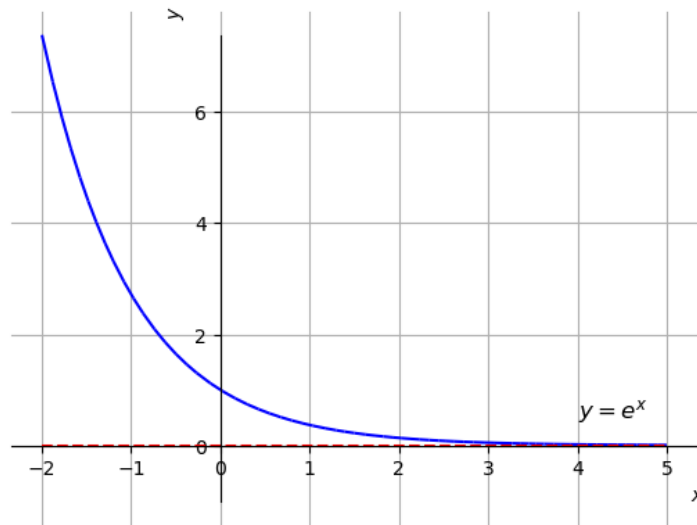


Figura 2.14: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-x}$ .

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando<sup>7</sup>:

```
limit(exp(-x),x,oo)
```

◇

## Exercícios

**E 2.4.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \quad (2.157)$$

**E 2.4.2.** Calcule

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + e^{-x}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} - 1$

---

<sup>7</sup>Veja a Observação ??.

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e - e^x$

**E 2.4.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (2.158)$$

**E 2.4.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x. \quad (2.159)$$

**E 2.4.5.** Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+e^{-x}}.$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1.$

## 2.5 Limites infinitos

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é infinito quando  $x$  tende a um número  $x_0$ , quando  $f(x)$  torna-se arbitrariamente grande para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , mas  $x \neq 0$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (2.160)$$

A Figura ??, é uma ilustração de  $f(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow x_0$ .



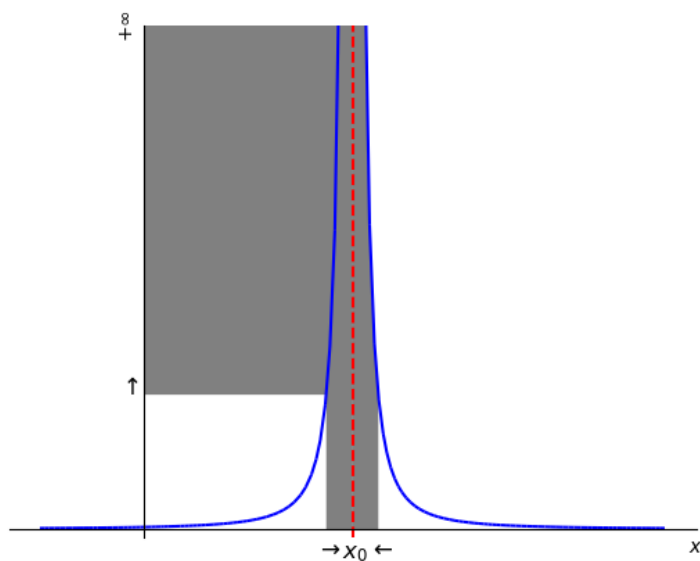


Figura 2.15: Ilustração de  $f(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Exemplo 2.5.1.** Vejamos o caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (2.161)$$

Ao tomarmos  $x$  próximo de  $x_0 = 0$ , obtemos os seguintes valores de  $f(x)$ :

$x$	$-10^{-1}$	$-10^{-2}$	$-10^{-3}$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
$f(x)$	$-10^2$	$-10^4$	$-10^6$	$\rightarrow \infty \leftarrow$	$10^6$	$10^4$	$10^2$

Veja o esboço do gráfico de  $f(x)$  na Figura ??.

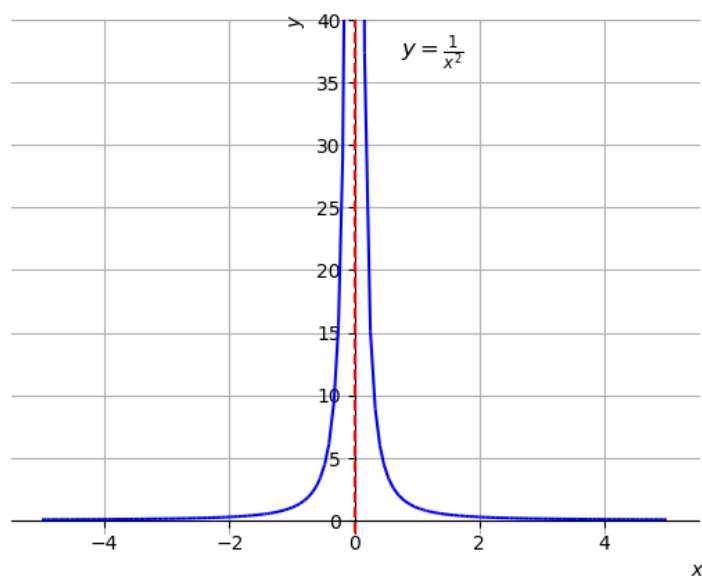


Figura 2.16: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/x^2$ .

Podemos concluir que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer  $x$  suficientemente próximo de 0, com  $x \neq 0$ . I.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (2.162)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando<sup>8</sup>:

```
limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty. \quad (2.163)$$

No primeiro caso, os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente grandes conforme os valores de  $x \rightarrow x_0$  e  $x < x_0$ . No segundo caso, os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente grandes conforme os valores de  $x \rightarrow x_0$  e  $x > x_0$ .

---

<sup>8</sup>Veja a Observação ??.

**Exemplo 2.5.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \quad (2.164)$$

De fato, conforme tomamos valores de  $x$  próximos de 1, com  $x > 1$ , os valores de  $f(x) = 1/(x-1)$  tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de  $f(x)$  na Figura ??.

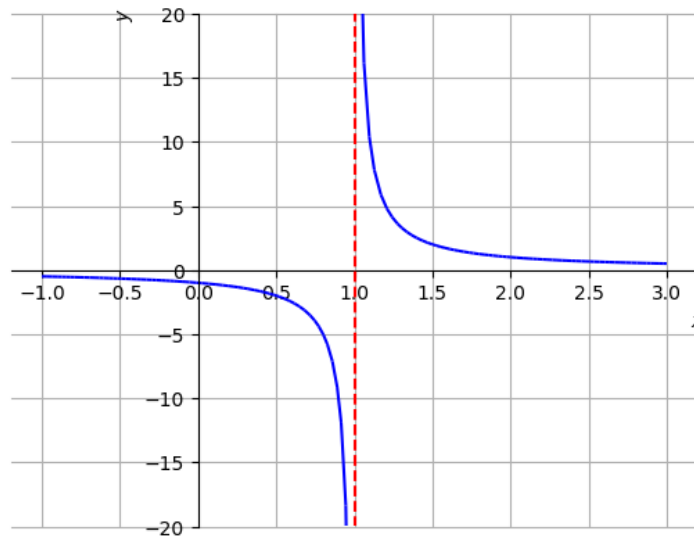


Figura 2.17: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/(x-1)$ .

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando<sup>9</sup>:

```
limit(1/(x-1),x,0,'+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é menos infinito quando  $x$  tende a  $x_0$ , quando  $f(x)$  torna-se arbitrariamente pequeno para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , com  $x \neq x_0$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty. \quad (2.165)$$

De forma similar, definimos os limites laterais  $f(x) \rightarrow -\infty$  quando  $x \rightarrow x_0^\pm$ .

---

<sup>9</sup>Veja a Observação ??.

**Exemplo 2.5.3.** Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (2.166)$$

e que não podemos concluir que este limite é  $\infty$  ou  $-\infty$ . Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (2.167)$$

**Exemplo 2.5.4.**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \quad (2.168)$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função  $f(x) = 1/(x+1)^2$ . Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de  $y = 1/x^2$ , seguida de uma reflexão em torno de eixo  $x$ . Veja a Figura ??.

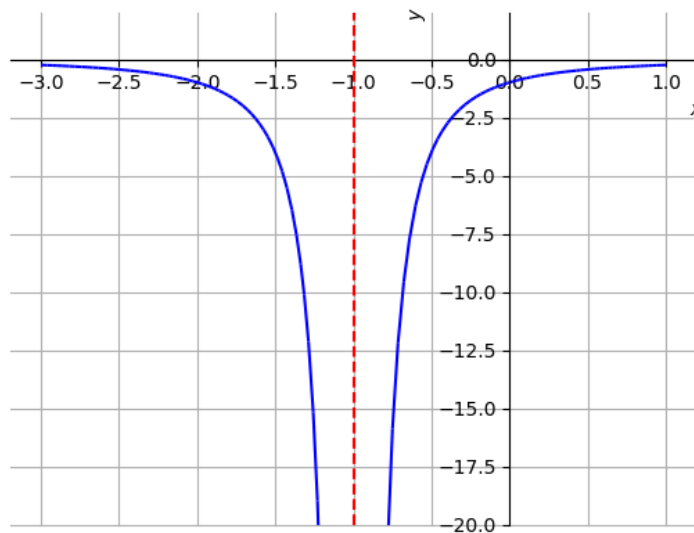


Figura 2.18: Esboço do gráfico de  $f(x) = -1/(x+1)^2$ .

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando<sup>10</sup>:

```
limit(-1/(x+1)**2,x,-1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

---

<sup>10</sup>Veja a Observação ??.

### 2.5.1 Assíntotas verticais

Uma reta  $x = x_0$  é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad (2.169)$$

**Exemplo 2.5.5.** O gráfico da função  $f(x) = -1/|x|$  tem uma assíntota vertical em  $x = 0$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (2.170)$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura ??.

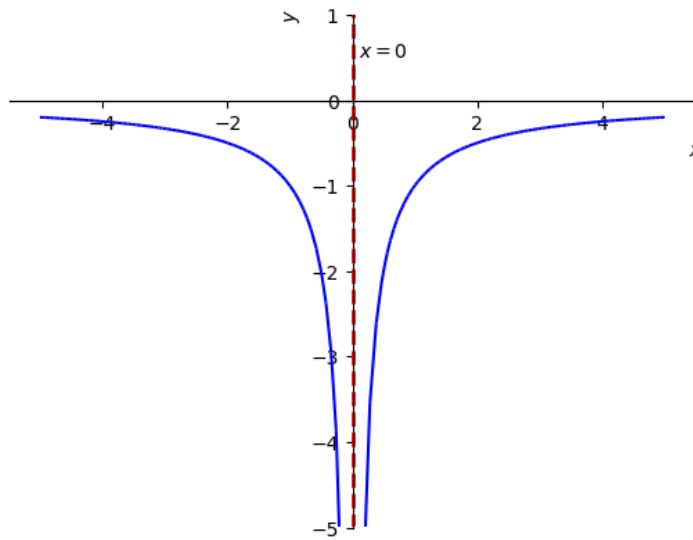


Figura 2.19: Esboço do gráfico de  $f(x) = -1/|x|$ .

**Exemplo 2.5.6.** A função  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$  não está definida para valores de  $x$  tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (2.171)$$

Nestes pontos o gráfico de  $f$  pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty, \quad (2.172)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.173)$$

e, também, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.174)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty. \quad (2.175)$$

Com isso, temos que as retas  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas verticais ao gráfico da função  $f$ . Veja a Figura ?? para o esboço do gráfico desta função.

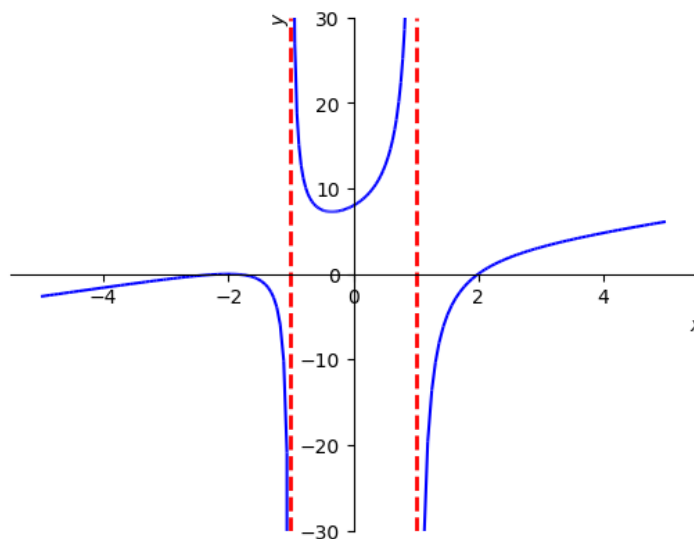


Figura 2.20: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ .

**Exemplo 2.5.7.** (Função logarítmica) A função logarítmica natural  $y = \ln x$  é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (2.176)$$

i.e.,  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $\ln x$ . Isto decorre do fato de  $y = \ln x$  ser a função inversa de  $y = e^x$  e, esta, ter uma assíntota horizontal  $y = 0$ <sup>11</sup>. A Figura ?? é um esboço do gráfico da função  $\ln x$ .

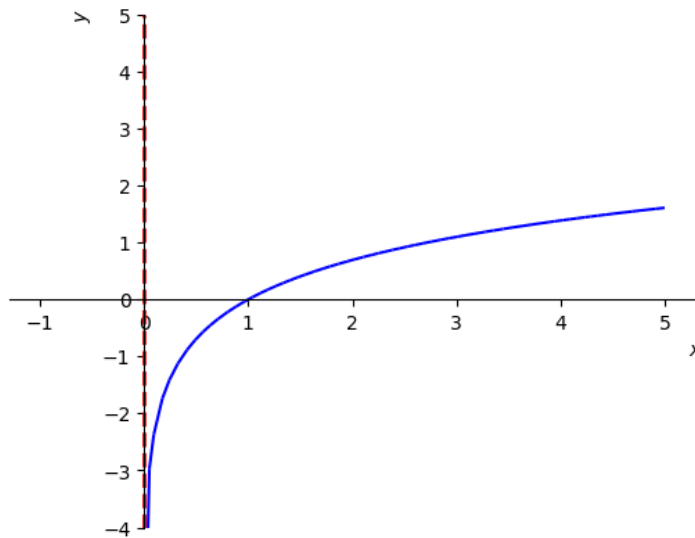


Figura 2.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

**Exemplo 2.5.8.** As funções trigonométricas  $y = \sec x$  e  $y = \operatorname{tg} x$  têm assíntotas verticais  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  para  $k$  inteiro. Veja as Figuras ??.

**Exemplo 2.5.9.** As funções trigonométricas  $y = \operatorname{cosec} x$  e  $y = \operatorname{cotg} x$  têm assíntotas verticais  $x = k\pi$  para  $k$  inteiro. Veja as Figuras ??.

## 2.5.2 Assíntotas oblíquas

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assíntota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

<sup>11</sup>Veja o Exemplo ??.

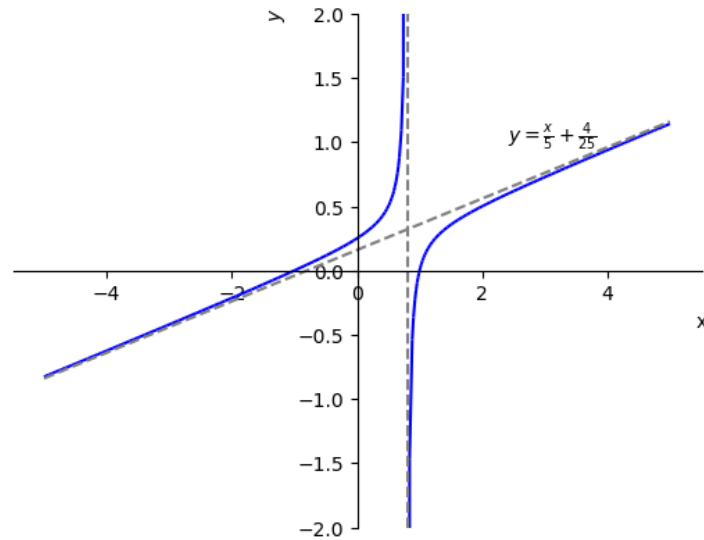


Figura 2.22: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$ .

**Exemplo 2.5.10.** Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (2.177)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (2.178)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , i.e.  $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Com isso, concluímos que  $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f(x)$ . Veja a Figura ??.

**Observação 2.5.1.** Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.



### 2.5.3 Limites infinitos no infinito

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad (2.179)$$

quando os valores da função  $f$  são arbitrariamente grandes para todos os valores de  $x$  suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (2.180)$$

**Exemplo 2.5.11.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$

**Exemplo 2.5.12.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (2.181)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{10}{x} + \frac{300}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \infty. \quad (2.182)$$

$\begin{matrix} & 0^+ & & 0^+ \\ & \nearrow & & \nearrow \\ 1 - \frac{10}{x} + \frac{300}{x^3} & & & \\ & \searrow & & \searrow \\ & 0^+ & & \\ & \nearrow & & \nearrow \\ & \frac{1}{x^3} & & \end{matrix}$

**Proposição 2.5.1.** Dado um polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n. \quad (2.183)$$

**Exemplo 2.5.13.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo ??, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty. \quad (2.184)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.5.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \quad (2.185)$$

**Solução.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} \xrightarrow{0^-} -\infty. \quad (2.186)$$

Outra forma de calcular este limite é observar que  $y = 1 - x \rightarrow 0^+$  quando  $x \rightarrow 1^-$ . Assim, fazendo a mudança de variável  $y = 1 - x$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y-1}{y} = -\infty. \quad (2.187)$$

Podemos usar o seguinte comando [SymPy<sup>12</sup>](#) para computar este limite:

```
limit((x-2)/(1-x), x, 1, '-')

```

◇

**ER 2.5.2.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x-1|. \quad (2.188)$$

**Solução.** Começamos observando que

$$\ln |x-1| = \begin{cases} \ln(1-x) & , x < 1, \\ \ln(x-1) & , x > 1. \end{cases} \quad (2.189)$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln |x-1| &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^{13}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |x-1| &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^{14}. \end{aligned}$$

---

<sup>12</sup>Veja a Observação ??.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1| = -\infty. \quad (2.190)$$

Podemos usar os seguintes comandos [SymPy](#)<sup>15</sup> para computar os limites laterais:

```
limit(log(abs(x-1)),x,1,'-')
limit(log(abs(x-1)),x,1,'+')
```

◇

**ER 2.5.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}. \quad (2.191)$$

**Solução.** Tratando-se de uma função racional, temos<sup>16</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty. \quad (2.192)$$

◇

**ER 2.5.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2}. \quad (2.193)$$

**Solução.** Observamos que  $1 - x^2 \rightarrow -\infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Desta forma, fazendo a mudança de variáveis  $y = 1 - x^2$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0. \quad (2.194)$$

◇

## Exercícios

**E 2.5.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}. \quad (2.195)$$

---

<sup>15</sup>Veja a Observação ??.

<sup>16</sup>Veja a Observação ???. Veja, também, o gráfico desta função na Figura ??.

**E 2.5.2.** Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (2.196)$$

**E 2.5.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 - 1}. \quad (2.197)$$

**E 2.5.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \quad (2.198)$$

## 2.6 Continuidade

Dizemos que uma **função**  $f$  é **contínua** em um ponto  $x_0$ , quando  $f(x_0)$  está definida, existe o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.199)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direta**. Quando a **função**  $f$  não é contínua em um dado ponto  $x_0$ , dizemos que  $f$  é **descontínua** neste ponto.

**Exemplo 2.6.1.** Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (2.200)$$

Na Figura ??, temos um esboço do gráfico de  $f$ .

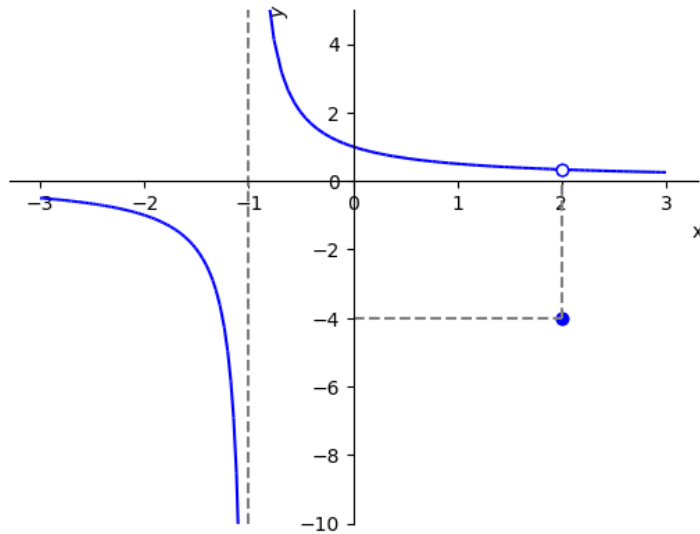


Figura 2.23: Esboço do gráfico da função  $f$  definida no Exemplo ??.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

- a)  $x = -2$ . Neste ponto, temos  $f(-2) = -1$  e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (2.201)$$

Com isso, concluímos que  $f$  é contínua no ponto  $x = -2$ .

- b)  $x = -1$ . Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \quad (2.202)$$

logo,  $f(-1)$  não está definido e, portanto,  $f$  é descontínua neste ponto. Observemos que  $f$  tem uma assíntota vertical em  $x = -1$ , verifique!

- c)  $x = 2$ . Neste ponto, temos  $f(2) = -4$  e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (2.203)$$

Portanto, concluímos que  $f$  é descontínua em  $x = 2$ .

Uma função  $f$  é dita ser **contínua em um intervalo**  $(a, b)$ , quando  $f$  é contínua em todos os pontos  $x_0 \in (a, b)$ . Para intervalos,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $[a, b]$ , empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em  $(-\infty, \infty)$ , dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

**Exemplo 2.6.2.** (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.204)$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura ??.

Observamos que para  $x \in (-\infty, 0)$  temos  $|x| = -x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Também, para  $x \in (0, \infty)$  temos  $|x| = x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Agora, em  $x = 0$ , temos  $|0| = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (2.205)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (2.206)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|. \quad (2.207)$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

**Proposição 2.6.1.** (Propriedades de funções contínuas) Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $x = c_0$  e  $k$  um número real, então também são contínuas em  $x = c_0$  as funções:

- $kf$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $f/g$ , se  $g(c_0) \neq 0$
- $f^k$ , se existe  $f^k(c_0)$ .

**Exemplo 2.6.3. Polinômios são contínuos em toda parte.** Isto é, se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad (2.208)$$

para qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \quad (2.209)$$

**Exemplo 2.6.4. Funções racionais  $r(x) = p(x)/q(x)$  são contínuas em todos os pontos de seus domínios.** Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad (2.210)$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad (2.211)$$

pois  $f$  não está definida nestes pontos. Agora, para  $x_0 \neq 1$  e  $x_0 \neq -1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (2.212)$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \quad (2.213)$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \quad (2.214)$$

Ou seja,  $f$  é contínua nos intervalos  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ , que coincide com seu domínio.

**Observação 2.6.1.** São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

**Proposição 2.6.2.** (Composição de funções contínuas) Se  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  e  $g$  é contínua no ponto  $f(x_0)$ , então  $g \circ f$  é contínua no ponto  $x_0$ .

**Exemplo 2.6.5.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $y = \sqrt{x^2-1}$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (2.215)$$

Isto é, esta função é contínua em  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

b)  $y = \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (2.216)$$

**Exemplo 2.6.6.** Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} \cdot e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x+4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \quad (2.217)$$

**Teorema 2.6.1.** (Teorema do valor intermediário) Uma função  $f$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

**Exemplo 2.6.7.** Podemos afirmar que  $f(x) = x^3 - x - 1$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $(0, 2)$ . De fato,  $f$  é contínua no intervalo  $[0, 2]$  e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(2) = 5 > 0$ . Observemos que  $y = 0$  está entre  $f(0)$  e  $f(2)$ . Veja a Figura ??.

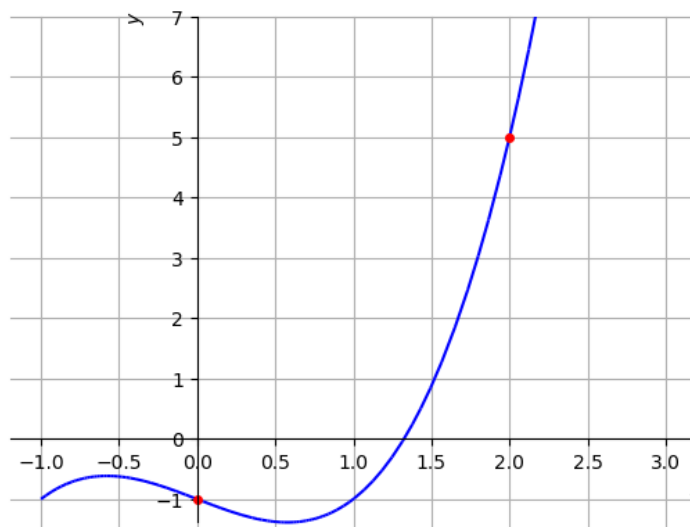


Figura 2.24: Esboço do gráfico da função  $f(x) = x^3 - x - 1$ .



**Exercícios resolvidos**

**ER 2.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (2.218)$$

**Solução.** Observamos que a função é descontínua em  $x = 0$ , pois não está definida neste ponto. Agora, para  $x < 0$ , temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \quad (2.219)$$

Ou seja, para  $x < 0$  a função é constante igual a  $-1$  e, portanto, contínua.

Para  $x > 0$ , temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad (2.220)$$

I.e., para  $x > 0$  a função é constante igual a  $1$  e, portanto, contínua.

Concluimos que  $f(x)$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Faça o esboço do gráfico desta função!

◇

**ER 2.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.221)$$

**Solução.** A função  $f$  pode ser vista como a composição da função logaritmo natural  $g(x) = \ln x$  com a função racional  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Observamos que:

- a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e.  $g$  é contínua para todo  $x > 0$ ;
- b) a função racional  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$  é contínua para todo  $x \neq 1$ .

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função  $f(x) = g(h(x))$  é contínua nos pontos de continuidade da função  $h$  tais que  $h(x) > 0$ , i.e. para  $x \neq 1$  e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \quad (2.222)$$

Fazendo o estudo de sinal

-	-1	+	1	+	$x+1$
-		-		+	$x-1$
+	-1	-	1	+	$\frac{x+1}{x-1}$

vemos que  $h(x) > 0$  em  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

Em resumo,  $h$  é contínua em  $(0, \infty)$  e  $g$  é contínua e positiva em  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . A função  $f = (h \circ g)$  é contínua na interseção destes conjuntos, i.e.  $f$  é contínua em  $(1, \infty)$ .

◇

## Exercícios

**E 2.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \quad (2.223)$$

**E 2.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \quad (2.224)$$

**E 2.6.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \ln \left( \frac{\sin \frac{x}{2} - \cos x}{2} \right). \quad (2.225)$$

## 2.7 Limites e desigualdades

Se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$  em um certo intervalo aberto contendo  $x_0$ , exceto possivelmente em  $x = x_0$ , e existem os limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (2.226)$$

Observe que a tomada do limite não preserva a desigualdade estrita.

**E 2.7.1.** As funções  $f(x) = x^2/3$  e  $g(x) = x^2/2$  são tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \neq 0$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (2.227)$$

**Observação 2.7.1.** A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x < x_0$  e existem os limites laterais à esquerda de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x). \quad (2.228)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

### 2.7.1 Limites de funções limitadas

Se  $f(x) \leq L$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $x_0$ , exceto possivelmente em  $x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq L. \quad (2.229)$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

**Exemplo 2.7.1.** Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x. \quad (2.230)$$

Como  $|\sen x| \leq 1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} = 0. \quad (2.231)$$

Logo, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sen x = 0. \quad (2.232)$$

## 2.7.2 Teorema do confronto

**Teorema 2.7.1.** (Teorema do confronto) Se  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (2.233)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (2.234)$$

*Demonstração.* Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (2.235)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (2.236)$$

□

**E 2.7.2.** Toda função  $f(x)$  tal que  $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$ , para todo  $x \neq 0$ , tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (2.237)$$

**Observação 2.7.2.** O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

**Exemplo 2.7.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.238)$$

De fato, começamos assumindo  $0 < x < \pi/2$ . Tomando  $O = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $P = (\cos x, \sin x)$ , observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (2.239)$$

i.e.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x < x, \quad (2.240)$$

para todo  $0 < x < \pi/2$ .

É certo que  $\sin x < -x$  para  $-\pi/2 < x < 0$ . Com isso e o resultado acima, temos

$$\sin x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.241)$$

Lembrando que  $\sin x$  é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\sin x = \sin -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.242)$$

Logo, de (??) e (??), temos

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|. \quad (2.243)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (2.244)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.245)$$

**Observação 2.7.3.** Do exemplo anterior (Exemplo ??), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.246)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade (??)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (2.247)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (2.248)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right] \quad (2.249)$$

$$= 1 + 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \right)^2. \quad (2.250)$$

Agora, fazemos a mudança de variável  $y = x/2$ . Neste caso, temos  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0. \quad (2.251)$$

Então, retornando a equação (??), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.252)$$

### 2.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.253)$$

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos  $0 < x < \pi/2$ . Sendo os pontos  $O = (0,0)$ ,  $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ ,  $A = (1,0)$  e  $T = (1, \operatorname{tg} x)$ , observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (2.254)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad (2.255)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por  $\operatorname{sen} x$ <sup>17</sup>, obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2.256)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \quad (2.257)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (2.258)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.259)$$

Agora, usando o fato de que  $\operatorname{sen} x/x$  é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \quad (2.260)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.261)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

<sup>17</sup> $\operatorname{sen} x > 0$  para todo  $0 < x < \pi/2$ .

**Exemplo 2.7.3.** Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (2.262)$$

Veja o Exercício ??.

## Exercícios resolvidos

**ER 2.7.1.** Sabendo que  $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  para  $0 < x < 1$ , calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (2.263)$$

**Solução.** Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \overset{0}{\nearrow} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \overset{0}{\nearrow}. \quad (2.264)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad (2.265)$$

◇

Em construção ...

## Exercícios

**E 2.7.3.** Supondo que  $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$  para todo  $x \neq 0$ , determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ .

**E 2.7.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x. \quad (2.266)$$

**E 2.7.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{6x}. \quad (2.267)$$

**E 2.7.6.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (2.268)$$

**E 2.7.7.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (2.269)$$

## 2.8 Exercícios finais

**E 2.8.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.270)$$

**E 2.8.2.** Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right)^x$



# Capítulo 3

## Derivadas

**Observação 3.0.1.** (Códigos [Python](#)) Nos códigos [Python](#) inseridos ao longo deste capítulo, estaremos assumindo o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x', real=True)
```

### 3.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos discutir sobre a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, discutimos sobre as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

#### 3.1.1 Reta secante e reta tangente

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função  $f$  pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ ,  $x_0 \neq x_1$ , como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.1)$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ . Veja a Figura ???. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

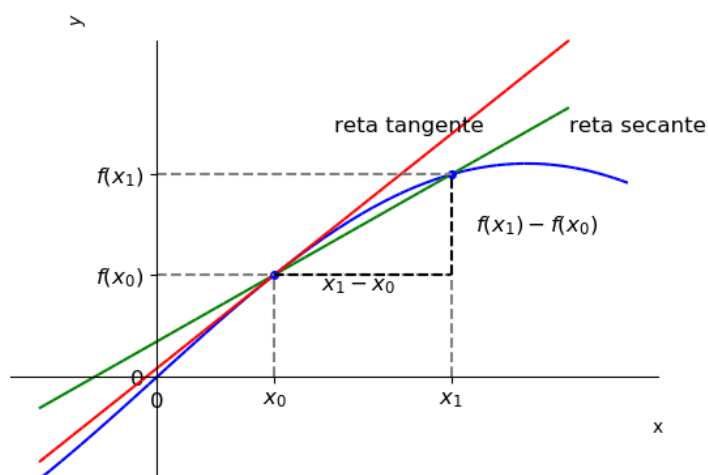


Figura 3.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelha) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função  $f$  em  $x = x_0$  é a reta que passa pelo ponto  $(x_0, f(x_0))$  e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.3)$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.4)$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ , quando  $x_1 \rightarrow x_0$ . Veja a Figura ??.

**Observação 3.1.1.** Fazendo  $h = x_1 - x_0$ , temos que (??) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.5)$$

**Exemplo 3.1.1.** Seja  $f(x) = x^2$  e  $x_0 = 1$ . O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.6)$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad (3.7)$$

$$= 4 - 1 = 3. \quad (3.8)$$

Logo, a reta secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.9)$$

$$y = 3(x - 1) + f(1) \quad (3.10)$$

$$y = 3x - 2. \quad (3.11)$$

Na Figura ??, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

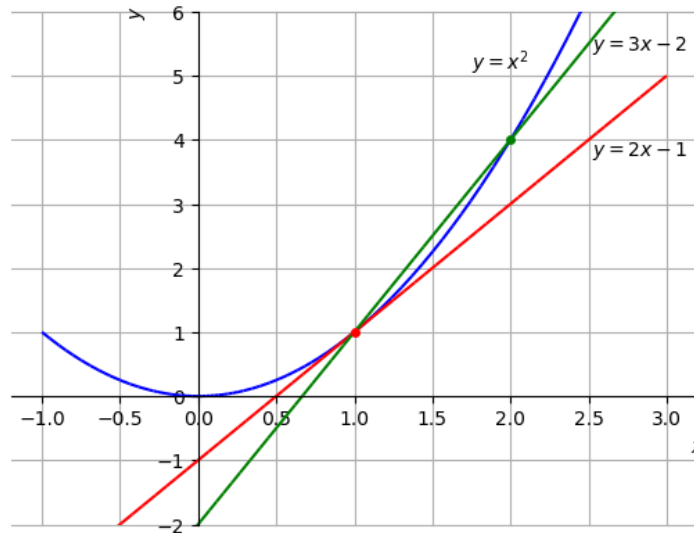


Figura 3.2: Esboços dos gráficos de  $f(x) = x^2$  (azul), da reta secante pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  (verde) e da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0 = 1$  (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0$

é

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.12)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} \quad (3.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \quad (3.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{1} = 2. \quad (3.15)$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  no ponto  $x_0 = 1$  tem coeficiente angular  $m_{\text{tg}} = 2$  e equação

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (3.16)$$

Na Figura ??, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o [SymPy](#), podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos<sup>1</sup>:

```
x0 = 1
x1 = 2
f = lambda x: x**2
msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
msec*(x-x0)+f(x0)
```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos<sup>2</sup>:

```
h = var("h", real=True)
x0 = 1
f = lambda x: x**2
mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)
mtg*(x-x0)+f(x0)
```

---

<sup>1</sup>Veja a Observação ??.

<sup>2</sup>Veja a Observação ??.

### 3.1.2 Taxa de variação

A **taxa de variação média** de uma função  $f$  quando  $x$  varia de  $x_0$  a  $x_1$  é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.17)$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de  $f$  no ponto  $x_0$ , a qual é definida como

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.18)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.19)$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

**Exemplo 3.1.2.** Seja  $s = s(t)$  a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo  $t_0$  ao tempo  $t_1$  é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (3.20)$$

Por exemplo, se  $s(t) = 15t^2 + t$  (km), então a velocidade média do objeto entre  $t_0 = 1$ h e  $t_1 = 3$ h é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.21)$$

$$= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \quad (3.22)$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \quad (3.23)$$

$$= 61 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.24)$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo  $t_0 = 1$

é

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \quad (3.25)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(t_0 + h)^2 + (t_0 + h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \quad (3.26)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \quad (3.27)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \quad (3.28)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 30t_0 + 15h + 1 \quad (3.29)$$

$$= 30t_0 + 1 = 31 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.30)$$

**Exemplo 3.1.3.** Seja  $c(x) = \sqrt{x}$  (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O **custo médio da produção** de  $x_0 = 4$  a  $x_1 = 9$  é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.31)$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} \quad (3.32)$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} \quad (3.33)$$

$$= \frac{3 - 2}{5} \quad (3.34)$$

$$= 0,2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.35)$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a

empresa está produzindo  $x_0 = 4$  milhões de unidades é

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0=4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (3.36)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.37)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \quad (3.38)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 0,25 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.41)$$

**Observação 3.1.2.** Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

### 3.1.3 Derivada em um ponto

A **derivada** de uma função  $f$  **em um ponto**  $x = x_0$  é denotada por  $f'(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$  e é definida por

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.42)$$

**Exemplo 3.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $f(x) = k$ ,  $k$  constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (3.43)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0. \quad (3.44)$$

b)  $f(x) = x$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \quad (3.46)$$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ .

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \quad (3.47)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \quad (3.48)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.49)$$

**Exemplo 3.1.5.** Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por  $r(x) = x^2$  (milhões de reais), onde  $x$  é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando  $x = x_0 = 1$  é

$$r'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \quad (3.50)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad (3.51)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \quad (3.52)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 3.1.1.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto  $x_0 = 4$ . Faça, então, os esboços dos gráficos de  $f$  e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $x_0 = 4$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.53)$$



A derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  é

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.54)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \quad (3.55)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \quad (3.56)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \quad (3.57)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \quad (3.58)$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + \sqrt{4} \quad (3.59)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \quad (3.60)$$

Veja a Figura ?? para os esboços dos gráfico de  $f$  e da reta tangente.

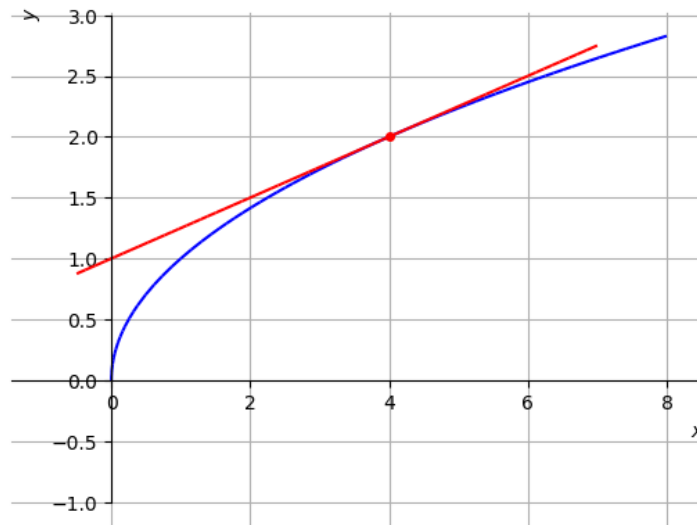


Figura 3.3: Esboços do gráfico da função  $f$  e da reta tangente no ponto  $x_0 = 4$ .

◇

**ER 3.1.2.** Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \quad (3.61)$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \quad (3.62)$$

onde  $x$  é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando  $x = 1$  mi.

**Solução.** O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \quad (3.63)$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto  $x_0 = 1$  é

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0 + h) - l(x_0)}{h} \quad (3.64)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - c(x_0 + h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \quad (3.65)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0) - (c(x_0 + h) - c(x_0))}{h} \quad (3.66)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h} \quad (3.67)$$

$$= r'(x_0) - c'(x_0) \quad (3.68)$$

$$= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (3.69)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.70)$$

◇

## Exercícios

**E 3.1.1.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = 2, f'(-1)$ ;
- b)  $g(x) = 10^6, g'(10^8)$ ;
- c)  $h(x) = \ln 2e, h'(-\pi)$ ;

**E 3.1.2.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = 2 + x$ ,  $f'(-1)$ ;
- b)  $g(x) = 10^6 - 2x$ ,  $g'(-3)$ ;
- c)  $h(x) = \ln(2e) + ex$ ,  $h'(10^6)$ ;

**E 3.1.3.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = x$ ,  $f'(-1)$ ;
- b)  $g(x) = -2x$ ,  $g'(-3)$ ;
- c)  $h(x) = ex$ ,  $h'(10^6)$ ;

**E 3.1.4.** Determine a reta secante ao gráfico de  $f(x) = 5 - x^2$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$ . Então, determine a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0 = 1$ . Por fim, faça os esboços dos gráficos de  $f$ , da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**E 3.1.5.** Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo  $c(x) = 2\sqrt{x}$  e rendimento  $r(x) = \frac{1}{100}x^3$ , dados em milhões de reais com  $x$  em milhares de unidades. Calcule:

- a) o custo marginal quando  $x = 1$ ;
- b) o rendimento marginal quando  $x = 1$ ;
- c) o lucro marginal quando  $x = 1$ .

## 3.2 Função derivada

A **derivada** de uma função  $f$  em relação à variável  $x$  é a função  $f' = \frac{df}{dx}$  cujo valor em  $x$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.71)$$

quando este limite existe. Dizemos que  $f$  é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto  $x$  de seu domínio, quando o limite dado em (3.71) existe. Se isso ocorre para todo número real  $x$ , dizemos que  $f$  é derivável em toda parte.

**Exemplo 3.2.1.** A derivada de  $f(x) = x^2$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.72)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (3.73)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \quad (3.74)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \quad (3.75)$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte. A Figura ??.

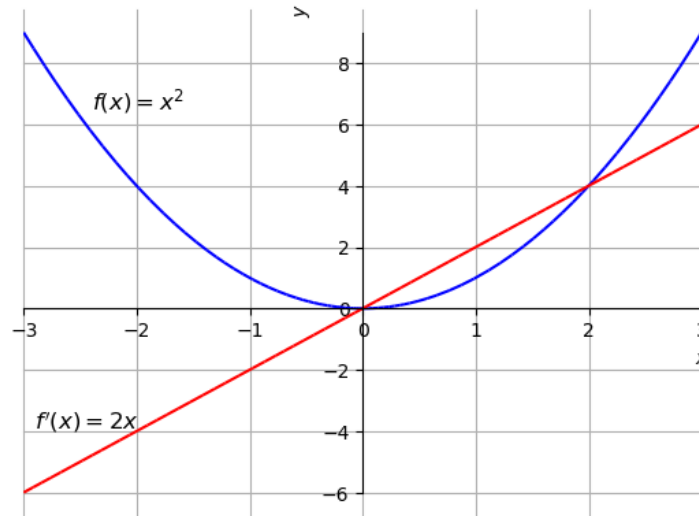


Figura 3.4: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = x^2$  e de sua derivada  $f'(x) = 2x$ .

Com o [SymPy](#)<sup>3</sup>, podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
h = symbols('h', real=True)
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h, h, 0)
```

<sup>3</sup>Veja a Observação ??.

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
diff(x**2)
```

para computar a derivada de  $x^2$  em relação a  $x$ .

**Observação 3.2.1.** A derivada à direita (à esquerda) de uma função  $f$  em um ponto  $x$  é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{df}{dx^{\pm}} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.76)$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

**Exemplo 3.2.2.** Vamos calcular a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para  $x = 0$ , só faz sentido calcular a derivada lateral à direita:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \quad (3.77)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \quad (3.78)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{0^+} +\infty. \quad (3.79)$$

Ou seja,  $f(x) = \sqrt{x}$  não é derivável em  $x = 0$ . Agora, para  $x > 0$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (3.80)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (3.81)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (3.82)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.83)$$

Na Figura ??, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

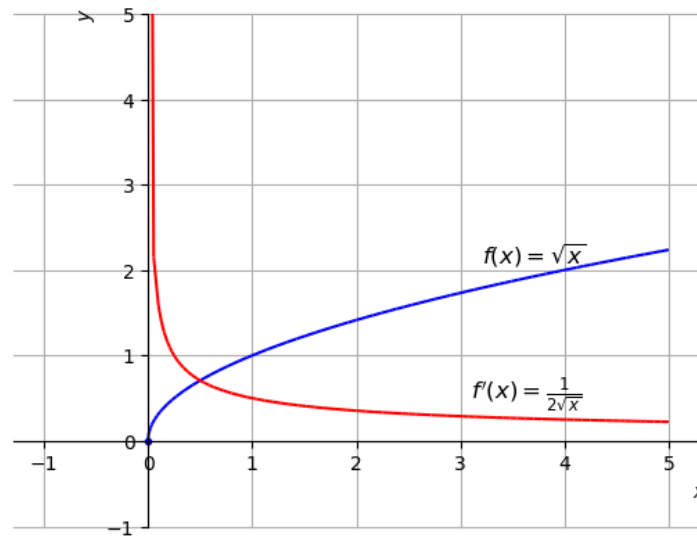


Figura 3.5: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = \sqrt{x}$  e de sua derivada.

No [SymPy](#)<sup>4</sup>, a computação de  $f'_+(0)$  pode ser feita com os comandos<sup>5</sup>:

```
var('h', real=True)
limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$  (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
diff(sqrt(x),x)
```

**Exemplo 3.2.3.** A função valor absoluto é derivável para todo  $x \neq 0$  e não é derivável em  $x = 0$ . De fato, para  $x < 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.84)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \quad (3.85)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.86)$$

<sup>4</sup>Veja a Observação ??.

<sup>5</sup>Por padrão no [SymPy](#), o limite é tomado à direita.

Analogamente, para  $x > 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.87)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.88)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.89)$$

Agora, para  $x = 0$ , devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad (3.90)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.91)$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que  $y = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ . Na figura ??, temos os esboços dos gráficos de  $f(x) = |x|$  e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (3.92)$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por  $\text{sign}(x)$ . Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

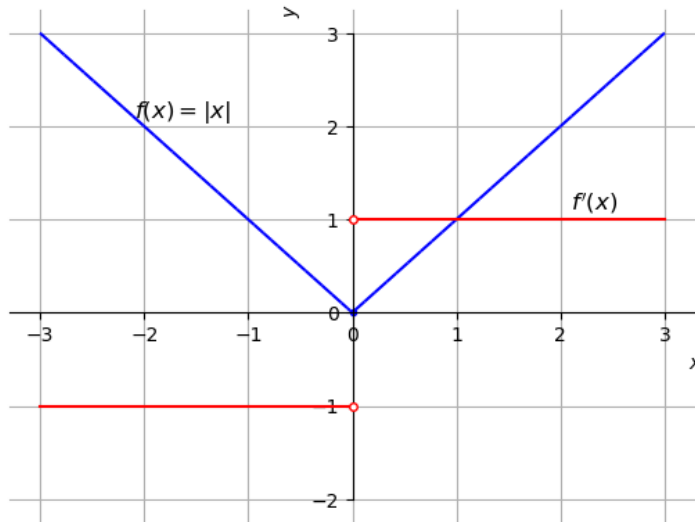


Figura 3.6: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = |x|$  e de sua derivada.

No [SymPy](#)<sup>6</sup>, podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
diff(abs(x))
```

### 3.2.1 Continuidade de uma função derivável

Uma função  $y = f(x)$  **derivável** em  $x = x_0$  é **contínua** neste ponto. De fato, lembramos que  $f$  é contínua em  $x = x_0$  quando  $x_0$  é um ponto de seu domínio e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.93)$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad (3.94)$$

ou, ainda,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0. \quad (3.95)$$

Vamos mostrar que este é o caso quando  $f$  é derivável em  $x = x_0$ . Neste caso, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} \quad (3.96)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \cdot h \quad (3.97)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot h \quad (3.98)$$

$$= 0. \quad (3.99)$$

Ou seja, de fato, se  $f$  é derivável em  $x = x_0$ , então  $f$  é contínua em  $x = x_0$ .

**Observação 3.2.2.** A recíproca não é verdadeira, uma função  $f$  ser contínua em um ponto  $x = x_0$  não garante que ela seja derivável em  $x = x_0$ . No Exemplo ??, vimos que a função valor absoluto  $f(x) = |x|$  não derivável em  $x = 0$ , enquanto esta função é contínua (veja, também, o Exemplo ??).

---

<sup>6</sup>Veja a Observação ??.



### 3.2.2 Derivadas de ordens mais altas

A derivada de uma função  $y = f(x)$  em relação a  $x$  é a função  $y = f'(x)$ . Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de  $f$ , denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right). \quad (3.100)$$

**Exemplo 3.2.4.** Seja  $f(x) = x^3$ . Então, a primeira derivada de  $f$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.101)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad (3.102)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \quad (3.103)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + \cancel{3xh}^0 + \cancel{h^2}^0 = 3x^2. \quad (3.104)$$

De posse da primeira derivada  $f'(x) = 3x^2$ , podemos calcular a segunda derivada de  $f$ , como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (3.105)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (3.106)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \quad (3.107)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} \quad (3.108)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + \cancel{h}^0 = 6x, \quad (3.109)$$

i.e.  $f''(x) = 6x$ .

No [SymPy](#)<sup>7</sup>, podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

---

<sup>7</sup>Veja a Observação ??.

```
diff(x**3,x,2)
```

Generalizando, quando existe, a  $n$ -ésima derivada de uma função  $y = f(x)$ ,  $n \geq 1$ , é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{d^n}{dx^n} f(x) := \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right], \quad (3.110)$$

com  $f^{(3)} \equiv f'''$ ,  $f^{(2)} \equiv f''$ ,  $f^{(1)} \equiv f'$  e  $f^{(0)} \equiv f$ .

**Exemplo 3.2.5.** A terceira derivada de  $f(x) = x^3$  em relação a  $x$  é  $f'''(x) = [f''(x)]'$ . No exemplo anterior (Exemplo ??), calculamos  $f''(x) = 6x$ . Logo,

$$f'''(x) = [6x]' \quad (3.111)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} \quad (3.112)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6 = 6. \quad (3.113)$$

A quarta derivada de  $f(x) = x^3$  em relação a  $x$  é  $f^{(4)}(x) \equiv 0$ , bem como  $f^{(5)}(x) \equiv 0$ . Verifique!

No [SymPy](#)<sup>8</sup>, podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

```
diff(x**3,x,3)
```

## Exercícios resolvidos

**ER 3.2.1.** Calcule a derivada da função  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  em relação a  $x$ .

---

<sup>8</sup>Veja a Observação ??.

**Solução.** Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.114)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} \quad (3.115)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \quad (3.116)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \quad (3.117)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \quad (3.118)$$

◇

**ER 3.2.2.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função  $f(x) = |x - 1|$ .

**Solução.** O gráfico da função  $f(x) = |x - 1|$  tem um bico no ponto  $x = 1$  (verifique!). Para valores de  $x < 1$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.119)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{<0} - \overbrace{|x-1|}^{<0}}{h} \quad (3.120)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x - h + 1 + x - 1}{h} \quad (3.121)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.122)$$

Para valores de  $x > 1$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.123)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{>0} - \overbrace{|x-1|}^{>0}}{h} \quad (3.124)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - 1 - x + 1}{h} \quad (3.125)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.126)$$

Ou seja, temos que  $f(x) = |x - 1|$  é diferenciável para  $x \neq 1$ . Agora, para  $x = 1$ , temos

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.127)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{|h|}^{<0} - |1-1|}{h} \quad (3.128)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (3.129)$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.130)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{|h|}^{>0} - |1-1|}{h} \quad (3.131)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (3.132)$$

$$(3.133)$$

Como  $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ , temos que  $\nexists f'(1)$ . Concluimos que  $f(x) = |x - 1|$  é diferenciável nos pontos  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

◇

**ER 3.2.3.** Calcule a segunda derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = x - x^2. \quad (3.134)$$

**Solução.** Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.135)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} \quad (3.136)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} \quad (3.137)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 1 - 2x - \overset{0}{h} = 1 - 2x. \quad (3.138)$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (3.139)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (3.140)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2(x+h) - (1 - 2x)}{h} \quad (3.141)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2 = -2. \quad (3.142)$$

◇

## Exercícios

**E 3.2.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2$

b)  $g(x) = -3$

c)  $h(x) = \sqrt{e}$

**E 3.2.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2x$

b)  $g(x) = -3x$

c)  $h(x) = \sqrt{e}x$

**E 3.2.3.** Calcule a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \quad (3.143)$$

**E 3.2.4.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

**E 3.2.5.** Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \quad (3.144)$$

calcule:

a)  $f'(x)$

b)  $f''(x)$

c)  $f'''(x)$

d)  $f^{(4)}$

e)  $f^{(1001)}(x)$

### 3.3 Regras básicas de derivação

Nesta seção, vamos discutir sobre algumas regras fundamentais para o cálculo da derivada de funções. Começaremos pelas derivadas de função constante, de função potência e de função exponencial. Em seguida, passamos a derivadas da soma, multiplicação e quociente de funções.

#### 3.3.1 Derivadas de função constante e função potência

Vejamos as derivadas da função constante e da função potência.

- $(k)' = 0$ , onde  $k$  é uma constante.

De fato, para  $f(x) \equiv k$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.145)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \quad (3.146)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (3.147)$$

- $(x)' = 1$ .

De fato, para a função identidade  $f(x) = x$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.148)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.149)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.150)$$

$$(3.151)$$

- $(x^n)' = nx^{n-1}$ , para  $n > 1$  inteiro positivo.

De fato, para  $f(x) = x^n$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.152)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (3.153)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (3.154)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \quad (3.155)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (3.156)$$

No [SymPy](#)<sup>9</sup>, podemos usar os seguintes comandos para obtermos as regras de derivação acima:

```
# (k)' = 0
var('k', real=True, constant=True)
diff(k,x)

# (x)' = 1
diff(x,x)

# (x^n)' = nx^(n-1)
var('n', integer=True, positive=True)
diff(x**n,x)
```

---

<sup>9</sup>Veja a Observação ??.

**Exemplo 3.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $(-1)' = 0$ .
- b)  $(\sqrt{2})' = 0$ .
- c)  $(x^3)' = 3x^2$ .
- d)  $(x^{11})' = 11x^{10}$ .

### 3.3.2 Derivada de função exponencial

Vejamos o cálculo da derivada de função exponencial.

- $(a^x)' = a^x \ln a$ , para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

De fato, tomando  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.157)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (3.158)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \quad (3.159)$$

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad (3.160)$$

Pode-se mostrar que<sup>10</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \quad (3.161)$$

Desta forma, temos

$$f'(x) = a^x \ln a = (a^x)'. \quad (3.162)$$

- $(e^x)' = e^x$ .

De fato,  $(a^x)' = a^x \ln a$ , para  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Tomando  $a = e$ , temos

$$(e^x)' = e^x \underbrace{\ln e}_{=1} = e^x. \quad (3.163)$$

---

<sup>10</sup>Pode-se mostrar isso a partir da definição integral da função logaritmo.



No [SymPy<sup>11</sup>](#), podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
var('a', real=True)
# (a^x)'
diff(a**x,x)
# (e^x)'
diff(E**x,x)
```

**Exemplo 3.3.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $(2^x)' = 2^x \ln 2$ .

b)  $(e^x)' = e^x$ .

No [SymPy<sup>12</sup>](#), podemos usar os seguintes comandos para computarmos as derivadas acima:

```
# a)
diff(2**x,x)
# b)
diff(E**x,x)
```

### 3.3.3 Regras da multiplicação por constante e da soma

Sejam  $k$  um número real,  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ .

De fato, pela definição da derivada temos

$$(k \cdot u)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \quad (3.164)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \left( \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \quad (3.165)$$

$$= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \xrightarrow{u'} \quad (3.166)$$

$$= k \cdot u'. \quad (3.167)$$

---

<sup>11</sup>Veja a Observação ??.

<sup>12</sup>Veja a Observação ??.

No [SymPy](#)<sup>13</sup>, podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

```
var('k', real=True)
u = Function('u', real=True)(x)
diff(k*u, x)
```

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .

De fato, temos

$$(u + v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} \quad (3.168)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) + v(x + h) - [u(x) + v(x)]}{h} \quad (3.169)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \right] \xrightarrow{u'} \quad (3.170)$$

$$+ \left[ \frac{v(x + h) - v(x)}{h} \right] \xrightarrow{v'} \quad (3.171)$$

$$= u'(x) + v'(x). \quad (3.172)$$

Também, como  $(-v)' = (-1 \cdot v)' = -1 \cdot v' = -v'$ , temos

$$(u - v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \quad (3.173)$$

No [SymPy](#)<sup>14</sup>, podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u+v, x)
```

**Exemplo 3.3.3.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $f(x) = 2x$ .

<sup>13</sup>Veja a Observação ??.

<sup>14</sup>Veja a Observação ??.

Para calcularmos  $f'$ , podemos identificar  $f = k \cdot u$ , com  $k = 2$  e  $u(x) = x$ . Então, usando a regra da multiplicação por constante  $(ku)' = ku'$ , temos

$$f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2 \cdot 1 = 2. \quad (3.174)$$

No [SymPy<sup>15</sup>](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(2*x,x)
```

b)  $f(x) = 2x + 3$ .

Observamos que  $f = u + v$ , com  $u(x) = 2x$  e  $v(x) \equiv 3$ . Então, da regra da soma  $(u + v)' = u' + v'$ , temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \quad (3.175)$$

No [SymPy<sup>16</sup>](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(2*x+3,x)
```

c)  $f(x) = e^x - x^2$ .

Observamos que  $f = u - v$ , com  $u(x) = e^x$  e  $v(x) = x^2$ . Usando a regra da subtração  $(u - v)' = u' - v'$  temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \quad (3.176)$$

No [SymPy<sup>17</sup>](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
diff(exp(x)-x**2,x)
```

### 3.3.4 Regras do produto e do quociente

Sejam  $y = u(x)$  e  $y = v(x)$  funções deriváveis. Então:

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

---

<sup>15</sup>Veja a Observação ??.

<sup>16</sup>Veja a Observação ??.

<sup>17</sup>Veja a Observação ??.

De fato, da definição da derivada temos

$$(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \quad (3.177)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (3.178)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \right. \quad (3.179)$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (3.180)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \quad (3.181)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \quad (3.182)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.183)$$

No [SymPy<sup>18</sup>](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u*v, x)
```

$$\bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ no caso de } v(x) \neq 0.$$

---

<sup>18</sup>Veja a Observação ??.

De fato, da definição de derivada temos

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \quad (3.184)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \quad (3.185)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \right. \quad (3.186)$$

$$\left. - \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.187)$$

$$= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \right. \quad (3.188)$$

$$\left. - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.189)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad (3.190)$$

No [SymPy<sup>19</sup>](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
simplify(diff(u/v, x))
```

**Exemplo 3.3.4.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função  $f(x) = x^2(x-1)$  de duas formas.

---

<sup>19</sup>Veja a Observação ??.

1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$f'(x) = [x^2(x-1)]' \quad (3.191)$$

$$= (x^3 - x^2)' \quad (3.192)$$

$$= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \quad (3.193)$$

$$= 3x^2 - 2x, \quad (x^n)' = nx^{n-1}. \quad (3.194)$$

2. Utilizando a regra do produto.

Observamos que  $f = u \cdot v$ , com  $u(x) = x^2$  e  $v(x) = x - 1$ . Então, da regra do produto  $(uv)' = u'v + uv'$ , com  $u'(x) = 2x$  e  $v'(x) = 1$ , temos

$$f'(x) = [\overbrace{x^2}^u \overbrace{(x-1)}^v]' \quad (3.195)$$

$$= \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{u' \cdot v} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{u \cdot v'} \quad (3.196)$$

$$= 2x^2 - 2x + x^2 \quad (3.197)$$

$$= 3x^2 - 2x. \quad (3.198)$$

**Exemplo 3.3.5.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = 1/x^2$  para  $x \neq 0$ . Observamos que  $f = (u/v)$  com  $u(x) \equiv 1$  e  $v(x) = x^2$ . Tendo em vista que  $u'(x) \equiv 0$  e  $v'(x) = 2x$ , temos da regra do quociente que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \quad (3.199)$$

$$= \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}, \quad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \quad (3.200)$$

$$= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \quad (3.201)$$

$$= -2x^{-3}. \quad (3.202)$$

**Observação 3.3.1.** Com abuso de linguagem, temos

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (3.203)$$

com  $n$  inteiro. No caso de  $n = 1$ , temos  $(x)' \equiv 1$ . No caso de  $n \leq 0$ , devemos ter  $x \neq 0$ <sup>20</sup>. Mai ainda, a regra também vale para  $n = 1/2$ , veja o Exemplo ??.

**Exemplo 3.3.6.** Voltando ao exemplo anterior (Exemplo ??), temos

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \quad (3.204)$$

**Exemplo 3.3.7.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = xe^x$ . Usando a regra do produto  $(uv)' = u'v + uv'$  com  $u(x) = x$  e  $v(x) = e^x$ , temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \quad (3.205)$$

$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u' \cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u \cdot v'} \quad (3.206)$$

$$= (x + 1)e^x. \quad (3.207)$$

### 3.3.5 Tabela de derivadas

$$(ku)' = ku' \quad (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (3.208)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3.209)$$

$$(k)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (3.210)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x \quad (3.211)$$

$$(3.212)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 3.3.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \quad (3.213)$$

<sup>20</sup>Devido a indeterminação de  $0^0$  e a inexistência de  $0^n$  com  $n$  negativo

**Solução.**

$$f'(x) = \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2\right]}'^{(u-v)'} \quad (3.214)$$

$$= \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3)\right]}'^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \quad (3.215)$$

$$= (x^2 + x)'(1 + x^3) + (x^2 + x)(1 + x^3)' - 2(x^2)' \quad (3.216)$$

$$= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 - 4x \quad (3.217)$$

$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \quad (3.218)$$

$$= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \quad (3.219)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos<sup>21</sup>:

```
d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2x^2,x)
simplify(d)
```

◇

**ER 3.3.2.** Calcule

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right). \quad (3.220)$$

**Solução.** Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right) = \frac{(x^2 + x)'(1 - x^3) - (x^2 + x)(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2} \quad (3.221)$$

$$= \frac{(2x + 1)(1 - x^3) + (x^2 + x)3x^2}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.222)$$

$$= \frac{2x - 2x^4 + 1 - x^3 + 3x^4 + 3x^3}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.223)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} \quad (3.224)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos<sup>22</sup>:

---

<sup>21</sup>Veja a Observação ??.

<sup>22</sup>Veja a Observação ??.



```
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

◇

**ER 3.3.3.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = xe^{-x}$  no ponto  $x = 1$ .

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $f$  no ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.225)$$

No caso, temos  $f(x) = xe^{-x}$  e  $x_0 = 1$ . Calculamos

$$f'(x) = [xe^{-x}]' = \left[ \frac{x}{e^x} \right] \quad (3.226)$$

$$= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \quad (3.227)$$

$$= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \quad (3.228)$$

$$= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \quad (3.229)$$

$$= (1-x)e^xe^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \quad (3.230)$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad (3.231)$$

$$y = 0 \cdot (x - 1) + e^{-1} \quad (3.232)$$

$$y = \frac{1}{e}. \quad (3.233)$$

Na Figura ??, temos os esboços dos gráfico da função  $f$  e sua reta tangente no ponto  $x = 1$ .

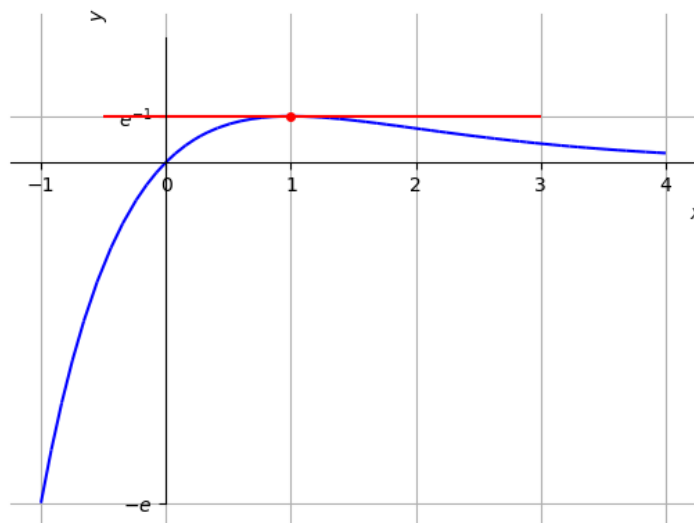


Figura 3.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = xe^{-x}$  no ponto  $x = 1$ .

Com o [SymPy](#), podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos<sup>23</sup>:

```
f = x*exp(-x)
x0 = 1
f1 = diff(f,x)
# y =
f1.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)
```

◇

## Exercícios

**E 3.3.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2 - 5x^3$

b)  $g(x) = (2x - 1)(2 - 4x^2)$

---

<sup>23</sup>Veja a Observação ??.

c)  $h(x) = \frac{2-4x^2}{2x-1}$

**Exemplo 3.3.8.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = xe^x$

b)  $g(x) = xe^{2x}$

c)  $g(x) = xe^{-2x}$

**Exemplo 3.3.9.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \ln x^2$

b)  $g(x) = x \ln x^2$

c)  $g(x) = x \ln x^2 e^x$

**Exemplo 3.3.10.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x = 1$ .

### 3.4 Derivadas de funções trigonométricas

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\text{sen}' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \quad (3.234)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(h) + \cos(x) \text{sen}(h) - \text{sen } x}{h} \quad (3.235)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\text{sen } h}{h} \quad (3.236)$$

$$= \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}. \quad (3.237)$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que<sup>24</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0. \quad (3.238)$$

Logo, temos

$$\text{sen}' x = \cos x. \quad (3.239)$$

---

<sup>24</sup>Veja a Seção ??.

De forma similar, temos

$$\cos' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad (3.240)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h) - \cos x}{h} \quad (3.241)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin h}{h} \quad (3.242)$$

$$= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}. \quad (3.243)$$

Ou seja,

$$\cos' x = -\sin x. \quad (3.244)$$

**Exemplo 3.4.1.** A derivada de  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  é

$$f'(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)' \quad (3.245)$$

$$= (\sin^2 x)' + (\cos^2 x)' \quad (3.246)$$

$$= (\sin x \cdot \sin x)' + (\cos x \cdot \cos x)' \quad (3.247)$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x \quad (3.248)$$

$$= 0, \quad (3.249)$$

conforme esperado.

Com o [SymPy](#)<sup>25</sup>, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)
```

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$

---

<sup>25</sup>Veja a Observação ??

Dem.:

$$\operatorname{tg}' x = \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' \quad (3.250)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \quad (3.251)$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (3.252)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \left( \frac{1}{\cos x} \right)^2 \quad (3.253)$$

$$= \sec^2 x. \quad (3.254)$$

- $\cotg' x = -\operatorname{cossec}^2 x$

Dem.:

$$\cotg' x = \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' \quad (3.255)$$

$$= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.256)$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.257)$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = - \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \quad (3.258)$$

$$= -\operatorname{cossec}^2 x. \quad (3.259)$$

- $\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$

Dem.:

$$\sec' x = \left( \frac{1}{\cos x} \right)' \quad (3.260)$$

$$= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} \quad (3.261)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (3.262)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \quad (3.263)$$

$$= \operatorname{tg} x \sec x. \quad (3.264)$$

- $\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cotg x$

Dem.:

$$\operatorname{cosec}' x = \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)' \quad (3.265)$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.266)$$

$$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (3.267)$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (3.268)$$

$$= -\cotg x \operatorname{cosec} x. \quad (3.269)$$

**Observação 3.4.1.** Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

**Exemplo 3.4.2.** A derivada em relação a  $x$  de

$$f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \quad (3.270)$$

pode ser calculada como segue

$$f'(x) = \left( \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \right)' \quad (3.271)$$

$$= \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec' x}{\sec^2 x} \quad (3.272)$$

$$= \frac{(1 + \sec^2 x) \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} \quad (3.273)$$

$$= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\sec x}. \quad (3.274)$$

Com o [SymPy](#)<sup>26</sup>, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
diff((x+tan(x))/sec(x),x)
```

---

<sup>26</sup>Veja a Observação ??

### 3.4.1 Tabela de derivadas

$$(ku)' = ku' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (3.275)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.276)$$

$$(k)' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (3.277)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x \qquad (3.278)$$

$$\text{sen}' x = \cos x \qquad \cos' x = -\text{sen } x \qquad (3.279)$$

$$\text{tg}' x = \sec^2 x \qquad \cotg' x = -\text{cossec}^2 x \qquad (3.280)$$

$$\sec' x = \sec x \text{tg } x \qquad \text{cossec}' x = -\text{cossec } x \cotg x \qquad (3.281)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 3.4.1.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $y = \text{sen } x$  no ponto  $x = 0$ . Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $y = f(x)$  no ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \qquad (3.282)$$

No caso deste exercício, temos  $f(x) = \text{sen } x$  e  $x_0 = 0$ . Assim sendo, calculamos a derivada em relação a  $x$  de  $f(x)$ , i.e.

$$f'(x) = \text{sen}' x = \cos x. \qquad (3.283)$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \qquad (3.284)$$

$$y = \cos(0)(x - 0) + \text{sen}(0) \qquad (3.285)$$

$$y = x. \qquad (3.286)$$

Na Figura ??, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

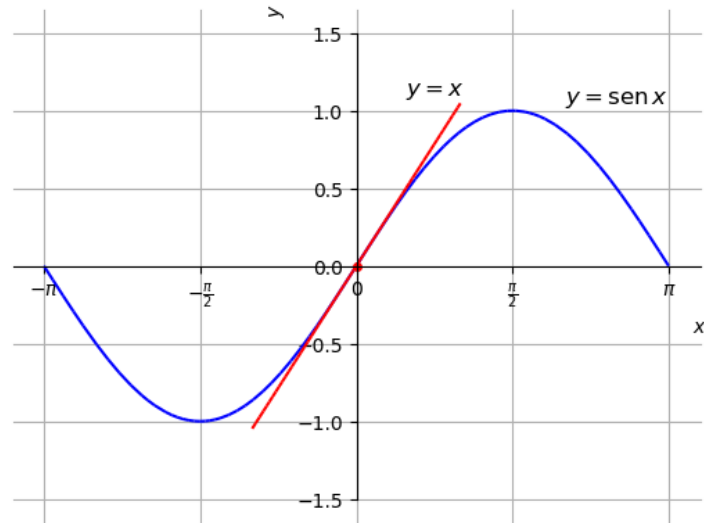


Figura 3.8: Esboços dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto  $x = 0$ .

Com o [SymPy<sup>27</sup>](#), podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

```
f = sin(x)
x0 = 0

# reta tangente
rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
print("Reta tangente: y = %s" % rt)

# graficos
plot(f,rt,(x,-pi,pi))
```

◇

**ER 3.4.2.** Resolva a equação

$$\sec'(x) = 0, \quad (3.287)$$

para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

---

<sup>27</sup>Veja a Observação ??



**Solução.** Temos

$$0 = \sec'(x) \quad (3.288)$$

$$= \sec(x) \operatorname{tg}(x) \quad (3.289)$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad (3.290)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \quad (3.291)$$

donde segue que

$$\operatorname{sen}(x) = 0. \quad (3.292)$$

Por fim, observamos que para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , a função seno se anula somente em  $x = \pi$ , a qual é a solução da equação.

◇

## Exercícios

**E 3.4.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

a)  $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$

b)  $g(x) = \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)$

c)  $h(x) = \frac{2 \operatorname{tg}(x)}{\sec(x)}$

**E 3.4.2.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $y = \cos x$  no ponto  $x = 0$ . Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**E 3.4.3.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

a)  $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$

b)  $g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$

c)  $g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$

## 3.5 Regra da cadeia

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam  $f$  e  $g$ , com  $g$  derivável em  $x$  e  $f$  derivável em  $g(x)$ , então  $(f \circ g)$  é derivável em  $x$ , sendo

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad (3.293)$$

chamada de regra da cadeia.

**Exemplo 3.5.1.** A derivada em relação a  $x$  de  $h(x) = (x + 1)^2$  pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

A função  $h$  é a composição da função  $f(x) = x^2$  com a função  $g(x) = x + 1$ , i.e.  $h(x) = f(g(x))$ . Temos  $f'(x) = 2x$  e  $g'(x) = 1$ . Então, segue pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \quad (3.294)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (3.295)$$

$$= 2(x + 1) \cdot 1 \quad (3.296)$$

$$= 2x + 2. \quad (3.297)$$

b) por cálculo direto.

Observando que  $h(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ , temos

$$h'(x) = (x^2 + 2x + 1)' \quad (3.298)$$

$$= (x^2)' + (2x)' + (1)' \quad (3.299)$$

$$= 2x + 2. \quad (3.300)$$

Com o [SymPy](#)<sup>28</sup>, temos:

```
>>> diff((x+1)**2,x)
2*x + 2
```

---

<sup>28</sup>Veja a Observação ??

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}, \quad (3.301)$$

onde  $u$  é uma função derivável em  $x$  e  $f$  é derivável em  $u(x)$ .

**Exemplo 3.5.2.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ . Temos que  $g(x) = f(u(x))$ , com  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $u(x) = x^2 + 1$ . Observando que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad u'(x) = 2x, \quad (3.302)$$

segue pela regra da cadeia que

$$g'(x) = \frac{d}{dx}f(u) \quad (3.303)$$

$$= f'(u)\frac{du}{dx} \quad (3.304)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \quad (3.305)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (3.306)$$

No [SymPy](#)<sup>29</sup>, temos:

```
>>> diff(sqrt(x**2+1),x)
x/sqrt(x**2 + 1)
```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (3.307)$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que  $h$  é derivável em  $x$  com  $g$  derivável em  $h(x)$  e  $f$  derivável em  $f(g(h(x)))$ .

**Exemplo 3.5.3.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = \text{sen}(\cos(x^2))$ . Pela regra da cadeia, temos

$$[\text{sen}(\cos(x^2))] = \cos(\cos(x^2)) \cdot [\cos(x^2)]' \quad (3.308)$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\text{sen}(x^2) \cdot (x^2)'] \quad (3.309)$$

$$= -\cos(\cos(x^2)) \cdot \text{sen}(x^2) \cdot 2x. \quad (3.310)$$

---

<sup>29</sup>Veja a Observação ??

No [SymPy](#)<sup>30</sup>, temos:

```
>>> diff(sin(cos(x**2)))
-2*x*sin(x**2)*cos(cos(x**2))
```

### 3.5.1 Tabela de derivadas

$$(ku)' = ku' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (3.311)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.312)$$

$$(k)' = 0 \qquad \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \qquad (3.313)$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx} \qquad (3.314)$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \cos u = -\sin(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.315)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cosec}^2(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.316)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.317)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 3.5.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}. \qquad (3.318)$$

**Solução.** Da regra da cadeia aplicada à função exponencial, temos

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}. \qquad (3.319)$$

Então, com  $u = \sqrt{x+1}$ , segue

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x+1}} \qquad (3.320)$$

$$= e^{\sqrt{x+1}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x+1}). \qquad (3.321)$$

---

<sup>30</sup>Veja a Observação ??

Agora, aplicamos a regra da cadeia para a função raiz quadrada, i.e.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}, \quad (3.322)$$

com  $u = x + 1$ . Segue, então

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx}(x+1) \quad (3.323)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \quad (3.324)$$

Portanto, concluímos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}. \quad (3.325)$$

No [SymPy](#)<sup>31</sup>, temos:

```
>>> diff(exp(sqrt(x+1)),x)
exp(sqrt(x + 1))/(2*sqrt(x + 1))
```

◇

**ER 3.5.2.** Mostre que a [função logística](#)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (3.326)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1 - f(x)). \quad (3.327)$$

**Solução.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função logística,

---

<sup>31</sup>Veja a Observação ??

i.e.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \quad (3.328)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ (1+e^{-x})^{-1} \right] \quad (3.329)$$

$$= -1 \cdot (1+e^{-x})^{-2} \cdot \underbrace{(1+e^{-x})'}_{=-e^{-x}} \quad (3.330)$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \quad (3.331)$$

Por outro lado, temos

$$f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{1+e^{-x}} \right) \quad (3.332)$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \left( \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} \right) \quad (3.333)$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}. \quad (3.334)$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1-f(x)). \quad (3.335)$$

◇

**ER 3.5.3.** Assuma que o custo de produção de uma unidade empresarial seja modelada pela função

$$c(x) = \sqrt{x-1} + e^{x-7}, \quad (3.336)$$

onde  $c$  é o custo em função da produção  $x$ . Determine o custo marginal quando  $x = 3$ .

**Solução.** O custo marginal é a função derivada do custo em relação à produção. Calculando, temos

$$c'(x) = (\sqrt{x-1} + e^{x-7}) \quad (3.337)$$

$$= \underbrace{(\sqrt{x-1})'}_{(u^n)'=nu^{n-1}u'} + \underbrace{(e^{x-7})'}_{(e^u)'=e^uu'} \quad (3.338)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + e^{x-7}. \quad (3.339)$$

Logo, o custo marginal quando  $x = 3$  é

$$c'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3-1}} + e^{3-7} = \sqrt{2} + e^{-4}. \quad (3.340)$$

◇

### Exercícios

**Exemplo 3.5.4.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = (2x - 3)^9$

b)  $g(x) = \frac{1}{(2x - 3)^{51}}$

**Exemplo 3.5.5.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = 2^{3x-1}$

b)  $g(x) = e^{-x^2}$

**Exemplo 3.5.6.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$

b)  $g(x) = \cos(\sqrt{x})$

c)  $h(x) = \text{tg}(2x)$

d)  $u(x) = \text{cotg}(3 - x)$

e)  $v(x) = \sec\left(\frac{1}{x^2}\right)$

f)  $z(x) = \text{cossec}\left(5x + x^2\right)$

**E 3.5.1.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \quad (3.341)$$

no ponto  $x = 3$ .

## 3.6 Diferenciabilidade da função inversa

Seja  $f$  uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto  $I$ . Então, pode-se mostrar que sua inversa  $f^{-1}$  é diferenciável em qualquer ponto da imagem da  $f$  no qual  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3.342)$$

**Exemplo 3.6.1.** Seja  $f(x) = (2x - 1)^2$  para  $x > 1/2$ . Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = (2x - 1)^2 \quad (3.343)$$

$$\sqrt{y} = 2x - 1 \quad (3.344)$$

$$x = \frac{\sqrt{y} + 1}{2} \quad (3.345)$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1). \quad (3.346)$$

Calculando a derivada de  $f^{-1}$  diretamente, temos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1)' \quad (3.347)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (3.348)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad (3.349)$$

Agora, usando (??) e observando que  $f'(x) = 8x - 4$ , obtemos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (3.350)$$

$$= \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1) - 4}, \quad (3.351)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad (3.352)$$

como esperado.



**Observação 3.6.1.** (Derivada da função logarítmica)

- Tomando  $f(x) = e^x$  temos  $f^{-1}(x) = \ln x$  e, daí por (??)

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (3.353)$$

- Tomando  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos  $f^{-1}(x) = \log_a x$  e, por (??),

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3.354)$$

**Exemplo 3.6.2.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = \ln \frac{1}{x}. \quad (3.355)$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada da função logarítmica, temos

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \quad (3.356)$$

Portanto, temos

$$f'(x) = \left( \ln \frac{1}{x} \right)' \quad (3.357)$$

$$= \frac{1}{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) \quad (3.358)$$

$$= -\frac{1}{x}. \quad (3.359)$$

No [SymPy](#)<sup>32</sup>, temos:

```
>>> diff(log(1/x),x)
-1/x
```

**Observação 3.6.2.** (Derivada de função potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad (3.360)$$

---

<sup>32</sup>Veja a Observação ??

para qualquer  $n$  inteiro<sup>33</sup>. Agora, se  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$  é um número real, temos

$$y = x^r \quad (3.361)$$

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x. \quad (3.362)$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação e observando que  $y = y(x)$ , obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} r \ln x \quad (3.363)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \quad (3.364)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y \quad (3.365)$$

$$\frac{dy}{dx} = r x^{r-1}. \quad (3.366)$$

Ou seja, a regra da potência

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}, \quad (3.367)$$

vale para todo  $r$  real, com  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$ .

**Exemplo 3.6.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' \quad (3.368)$$

$$= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \quad (3.369)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.370)$$

b)

$$\left( x^{\sqrt{2}} \right)' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}. \quad (3.371)$$

---

<sup>33</sup>Mais precisamente, para  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ .

**Exemplo 3.6.4.** A regra da cadeia aplicada a derivada da função potência é

$$\frac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\frac{du}{dx}. \quad (3.372)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(x^2 - 1)} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \quad (3.373)$$

$$= \frac{2}{3}x \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}-1} \quad (3.374)$$

$$= \frac{2}{3}x \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \quad (3.375)$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}. \quad (3.376)$$

### 3.6.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

Seja  $f(x) = \sin x$  restrita a  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ . Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \arcsin x. \quad (3.377)$$

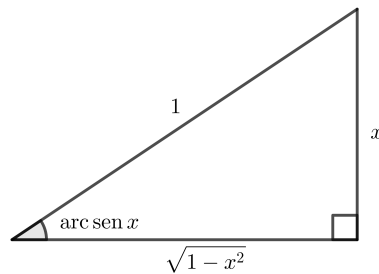


Figura 3.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (??) com  $f(x) = \sin x$  e  $f'(x) = \arcsin x$ , donde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}. \quad (3.378)$$

Como  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$  (veja Figura ??), concluímos

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.379)$$

**Exemplo 3.6.5.** A regra da cadeia aplicada à derivada da função arco seno é

$$\frac{d}{dx} \arcsen u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}. \quad (3.380)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \arcsen x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}. \quad (3.381)$$

No [SymPy<sup>34</sup>](#), temos:

```
>>> diff(asin(x**2),x)
2*x/sqrt(-x**4 + 1)
```

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.382)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (3.383)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \quad (3.384)$$

**Exemplo 3.6.6.** A regra da cadeia aplicada a função arco tangente é

$$\frac{d}{dx} \arctg u = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}. \quad (3.385)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \arctg \sqrt{x} = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} \sqrt{x} \quad (3.386)$$

$$= \frac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}}. \quad (3.387)$$

---

<sup>34</sup>Veja a Observação ??

No [SymPy](#)<sup>35</sup>, temos:

```
>>> diff(atan(sqrt(x)))
1/(2*sqrt(x)*(x + 1))
```

### 3.6.2 Tabela de derivadas

$$(ku)' = ku' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (3.388)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.389)$$

$$(k)' = 0 \qquad \frac{d}{dx} u^r = r u^{r-1} \frac{du}{dx} \qquad (3.390)$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \qquad (3.391)$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \qquad (3.392)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.393)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cosec}^2(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.394)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \qquad (3.395)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc cos} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \qquad (3.396)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc tg} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc cotg} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \qquad (3.397)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc sec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arc cosec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \qquad (3.398)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 3.6.1.** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x = 1$ . Faça, então, um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

---

<sup>35</sup>Veja a Observação ??

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x_0 = 1$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.399)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1). \quad (3.400)$$

Observando que

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (3.401)$$

temos que a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1 \quad (3.402)$$

$$y = x - 1. \quad (3.403)$$

Na Figura ??, temos um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

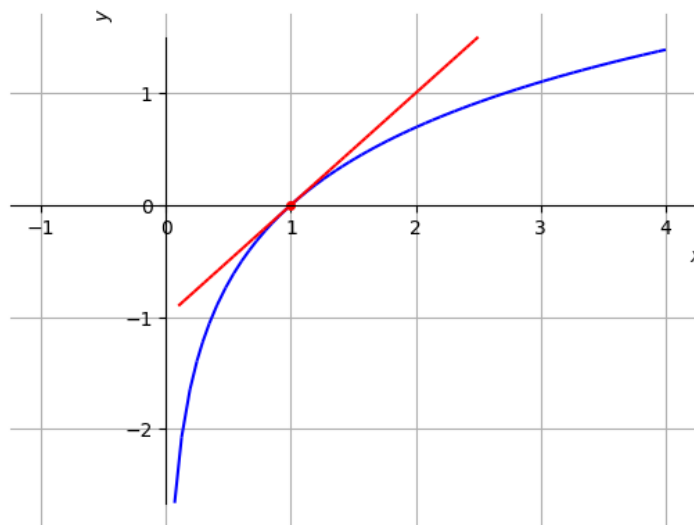


Figura 3.10: Esboço dos gráficos da função logarítmica natural e da reta tangente no ponto  $x = 1$ .

No [SymPy](#)<sup>36</sup>, temos:

---

<sup>36</sup>Veja a Observação ??

```
>>> rt = diff(log(x)).subs(x,1)*(x-1)+log(1)
>>> print("y = %s" % rt)
y = x - 1
```

◇

**ER 3.6.2.** Resolva a equação

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = 1. \quad (3.404)$$

**Solução.** Lembrando que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad (3.405)$$

temos

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = 1 \quad (3.406)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad (3.407)$$

$$1+x^2 = 1 \quad (3.408)$$

$$x^2 = 0 \quad (3.409)$$

$$x = 0. \quad (3.410)$$

◇

**ER 3.6.3.** Calcule

$$\frac{d}{dx} x^x. \quad (3.411)$$

**Solução.** Observamos que

$$y = x^x \quad (3.412)$$

$$\ln y = \ln x^x \quad (3.413)$$

$$\ln y = x \ln x. \quad (3.414)$$

Agora, derivando em relação a  $x$  ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln x) \quad (3.415)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x \quad (3.416)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) \quad (3.417)$$

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x(1 + \ln x). \quad (3.418)$$

◇

## Exercícios

**E 3.6.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \log_2 x^2$

b)  $g(x) = \ln(xe^x)$

**E 3.6.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b)  $g(x) = (1 + 2x)^e$

**E 3.6.3.** Calcule

$$\frac{d}{dx} (1 + x)^x. \quad (3.419)$$

**E 3.6.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \arctg x$  no ponto  $x = 0$ .

## 3.7 Derivação implícita

Seja  $y = y(x)$  definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \quad (3.420)$$



A derivada  $dy/dx$  pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}g(y(x)) = \frac{d0}{dx} \quad (3.421)$$

$$g'(y(x))\frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.422)$$

**Exemplo 3.7.1.** Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.423)$$

Para calcularmos  $dy/dx$ , fazemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d0}{dx} \quad (3.424)$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (3.425)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.426)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.427)$$

## Exercícios resolvidos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

## Capítulo 4

# Aplicações da derivada

**Observação 4.0.1.** Nos códigos [SymPy](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x', real=True)
```

### 4.1 Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital é uma técnica para o cálculo de limites de indeterminações. Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis em um intervalo aberto contendo  $x = a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (4.1)$$

Se, ainda,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  existe ou for  $\pm\infty$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.2)$$

Esta é a versão da regra de L'Hôpital para indeterminações do tipo  $0/0$ . Sem grandes modificações, é diretamente estendida para os casos  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 4.1.1.** Vamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}. \quad (4.3)$$

a) Pela regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)'}{(x^2-1)'} \quad (4.4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

b) Por eliminação do fator comum.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \quad (4.7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

No [SymPy](#)<sup>1</sup>, temos

```
>>> limit((x-1)/(x**2-1), x, 1)
1/2
```

**Exemplo 4.1.2.** O limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} \quad (4.10)$$

é uma indeterminação 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{0}{\cancel{2x-4}}}{\overset{0}{\cancel{3x^2-6x}}} \quad (4.11)$$

que também é uma indeterminação do tipo 0/0. Agora, aplicando a regra de L'Hôpital novamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{3x^2-6x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{6x-6} = \frac{1}{3}. \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup>Veja a Observação ??.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{1}{3}. \quad (4.13)$$

No [SymPy](#)<sup>2</sup>, temos

```
>>> limit((x**2-4*x+4)/(x**3-3*x**2+4),x,2)
1/3
```

**Observação 4.1.1.** A regra de L'Hôpital também pode ser usada para indeterminações do tipo  $\infty/\infty$ .

**Exemplo 4.1.3.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}, \quad (4.14)$$

que é uma indeterminação do tipo  $\infty/\infty$ . Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty. \quad (4.15)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 4.1.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}. \quad (4.16)$$

**Solução.** Observamos tratar-se de uma indeterminação do tipo  $0/0$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}. \quad (4.17)$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{2x} = -\infty. \quad (4.18)$$

◇

---

<sup>2</sup>Veja a Observação ??.

**ER 4.1.2.** (Indeterminação do tipo  $0 \cdot \infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x}. \quad (4.19)$$

**Solução.** Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{51}}{e^x} \quad (4.20)$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital sucessivamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{51}}{e^x} \quad (4.21)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot x^{50}}{e^x} \quad (4.22)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot 50 \cdot x^{49}}{e^x} \quad (4.23)$$

$$\vdots \quad (4.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51!}{e^x} = 0. \quad (4.25)$$

◇

**ER 4.1.3.** (Indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad (4.26)$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad (4.27)$$

Neste caso, calculando a subtração, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + x}{xe^x - x}, \quad (4.28)$$

a qual é uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{e^x - 1}^0}{(x+1)\cancel{e^x - 1}^0} \quad (4.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{(x+2)e^x} \quad (4.30)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}. \quad (4.31)$$

◇

**ER 4.1.4.** (Indeterminação do tipo  $1^\infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}. \quad (4.32)$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo  $1^\infty$ . Em tais casos, a seguinte estratégia pode ser útil. Nos pontos de continuidade da função logaritmo natural, temos

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( (1+x)^{1/x} \right) \quad (4.33)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)^0}{x^0} \quad (4.34)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x+1}{1}} = 1. \quad (4.35)$$

Ou seja,

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e. \quad (4.36)$$

◇

## Exercícios

**E 4.1.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+3x+2}. \quad (4.37)$$

**E 4.1.2.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-51} e^x. \quad (4.38)$$

**E 4.1.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right). \quad (4.39)$$

**E 4.1.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{2x}}. \quad (4.40)$$

## 4.2 Extremos de funções

Seja  $f$  uma função com domínio  $D$ . Dizemos que  $f$  tem o valor **máximo global**<sup>3</sup>  $f(a)$  no ponto  $x = a$  quando

$$f(x) \leq f(a), \quad (4.41)$$

para todo  $x \in D$ . Analogamente, dizemos que  $f$  tem o valor **mínimo global**<sup>4</sup>  $f(b)$  no ponto  $x = b$  quando

$$f(x) \geq f(b), \quad (4.42)$$

para todo  $x \in D$ . Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos globais** (ou extremos absolutos).

**Exemplo 4.2.1.** A função  $f(x) = x^2$  tem valor mínimo global no ponto  $x = 0$  e não assume valor máximo global. A função  $g(x) = -x^2$  tem valor máximo global no ponto  $x = 0$  e não assume valor mínimo global. A função  $h(x) = x^3$  não assume valores mínimo e máximo globais. Veja a Figura ??.

---

<sup>3</sup>Também chamado de máximo absoluto.

<sup>4</sup>Também chamado de mínimo absoluto.

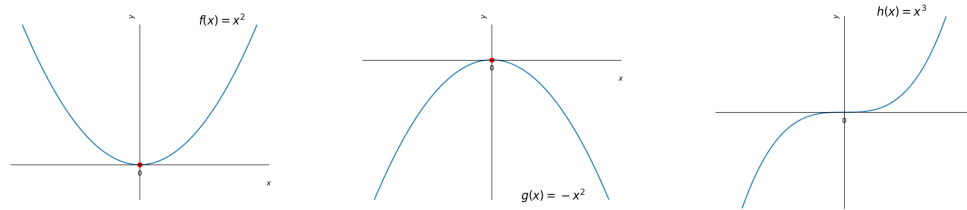


Figura 4.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo ??.

**Teorema 4.2.1.** (Teorema do valor extremo) Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  assume tanto um valor máximo como um valor mínimo global em  $[a, b]$ .

**Exemplo 4.2.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$  é contínua no intervalo fechado  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ . Assume valor mínimo global 1 no ponto  $x = 1$ . Ainda, assume valor máximo global igual a 2 no ponto  $x = 0$ . Veja Figura ??.

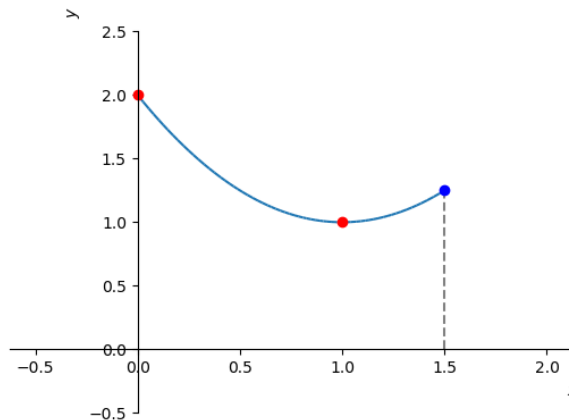


Figura 4.2: Esboço do gráfico de  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$  no intervalo  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ . Veja o Exemplo ?? a).



- b) A função  $g(x) = \ln x$  é contínua no intervalo  $(0, e]$ . Neste intervalo, assume valor máximo global no ponto  $x = e$ , mas não assume valor mínimo global. Veja Figura ??.

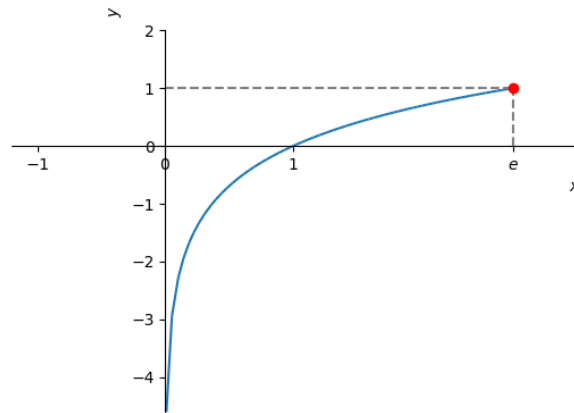


Figura 4.3: Esboço do gráfico de  $g(x) = \ln x$  no intervalo  $(0, e]$ . Veja o Exemplo ?? b).

- c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \quad (4.43)$$

definida no intervalo  $[0, 1]$  é descontínua no ponto  $x = 1$ . Neste intervalo, assume valor mínimo global no ponto  $x = 0$ , mas não assume valor máximo global. Veja a Figura ??.

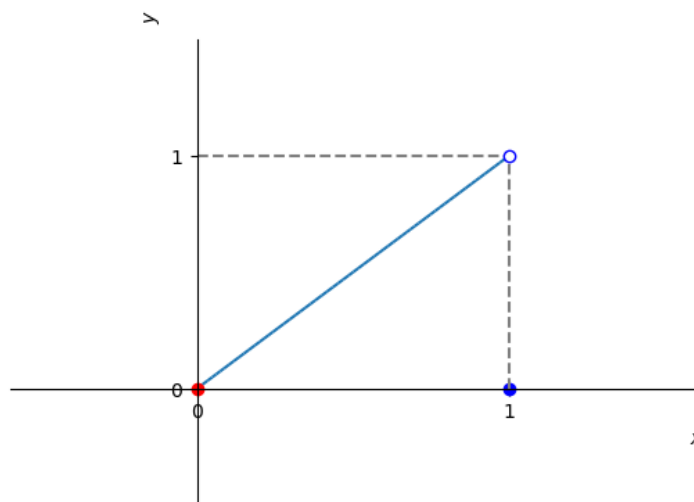


Figura 4.4: Esboço do gráfico de  $h(x)$  no intervalo  $[0,1]$ . Veja o Exemplo ?? c).

Uma função  $f$  tem um valor **máximo local** em um ponto interior  $x = a$  de seu domínio, se  $f(x) < f(a)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto em torno de  $a$ , excluindo-se  $x = a$ . Analogamente,  $f$  tem um valor **mínimo local** em um ponto interior  $x = b$  de seu domínio, se  $f(x) > f(b)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto em torno de  $b$ , excluindo-se  $x = b$ . Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos). Um tal ponto é chamado de **ponto de máximo local** ou de **mínimo local**, conforme o caso.

**Exemplo 4.2.3.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ |x| & , -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \quad (4.44)$$

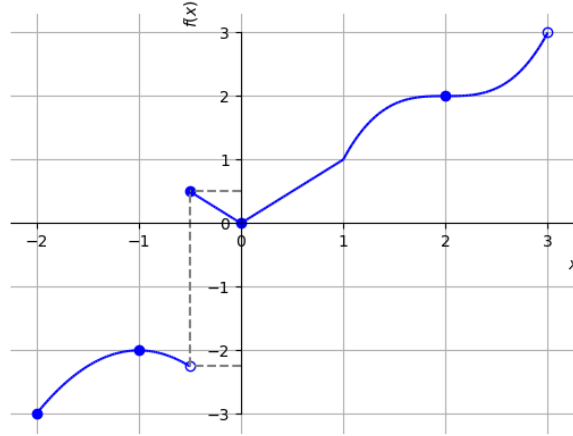


Figura 4.5: Esboço do gráfico de  $f(x)$  discutida no Exemplo ??.

Na Figura ?? temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que  $f$  tem valores máximos locais nos pontos  $x = -1$  e  $x = -1/2$ . No ponto  $x = 0$  tem um valor mínimo local. Observamos que  $x = -2$ ,  $x = 2$  e  $x = 3$  não são pontos de extremos locais desta função. No ponto  $x = -2$ ,  $f$  tem seu valor mínimo global. Ainda,  $f$  não tem valor máximo global.

**Teorema 4.2.2.** (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se  $f$  possui um valor extremo local em um ponto  $x = a$  e  $f$  é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \quad (4.45)$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função  $f$  pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde  $f' = 0$ ,
2. pontos interiores de seu domínio onde  $f'$  não existe, ou
3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função  $f$  onde  $f' = 0$  ou  $f'$  não existe, é chamado de **ponto crítico** da função.

**Observação 4.2.1.** Uma função tem valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

**Exemplo 4.2.4.** Consideramos a função  $f(x)$  discutida no Exemplo ???. No ponto  $x = -1$ ,  $f'(-1) = 0$  e  $f$  tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto  $x = 2$ , também temos  $f'(2) = 0$ , mas  $f$  não tem valor extremo neste ponto.

No ponto  $x = 0$ ,  $f'(0)$  não existe e  $f$  tem valor mínimo local neste ponto. No ponto,  $x = -1/2$ ,  $f'(1/2)$  não existe e  $f$  tem valor máximo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que  $f$  tem valor mínimo global no ponto  $x = -2$ , mas não tem extremo global no ponto  $x = 3$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 4.2.1.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$  no intervalo  $[-2, 1]$ .

**Solução.** Os valores extremos de uma função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como  $f(x) = (x+1)^2 - 1$  é diferenciável no intervalo  $(-2, 1)$ , seus pontos críticos são pontos tais que  $f' = 0$ . Para identificá-los, calculamos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x + 1) = 0 \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow x = -1. \quad (4.47)$$

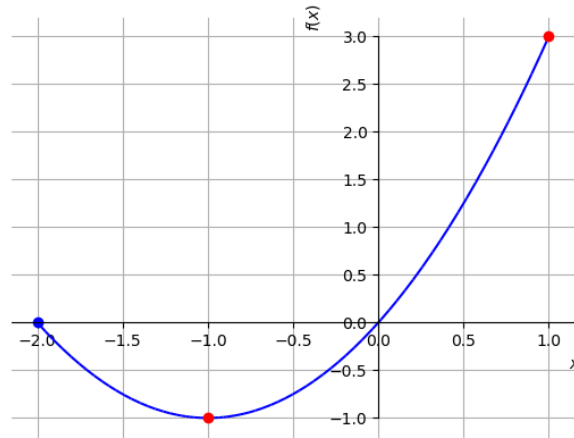


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$  discutida no Exercício Resolvido ??.

Desta forma,  $f$  pode ter valores extremos nos pontos  $x = -2$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ . Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura ??) e a seguinte tabela:

$x$	-2	-1	1
$f(x)$	0	-1	3

Daí, podemos concluir que  $f$  tem o valor mínimo global (e local) de  $f(-1) = -1$  no ponto  $x = -1$  e tem valor máximo global de  $f(1) = 3$  no ponto  $x = 1$ .

Podemos usar o [SymPy](#) para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos<sup>5</sup>:

```
>>> f = (x+1)**2-1, f
>>> f = (x+1)**2-1; f
(x + 1)**2 - 1
>>> f1 = diff(f,x); f1
2*x + 2
>>> xc = solve(f1,x); xc
```

<sup>5</sup>Veja a Observação ??.

```
[-1]
>>> f.subs(x,-2); f.subs(x,-1); f.subs(x,1)
>>> plot(f,(x,-2,1))
```

◇

**ER 4.2.2.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = x^3$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável no intervalo  $(-1, 1)$ , temos que seus pontos críticos são tais que  $f'(x) = 0$ . Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4.48)$$

é o único ponto crítico de  $f$ . Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura ??) vemos que  $f$  não tem valor extremo local neste ponto. Assim, seus pontos extremos só podem ocorrer nos extremos do domínio  $[-1, 1]$ . Concluimos que  $f(-1) = -1$  é o valor mínimo global de  $f$  e  $f(1) = 1$  é seu valor máximo global.

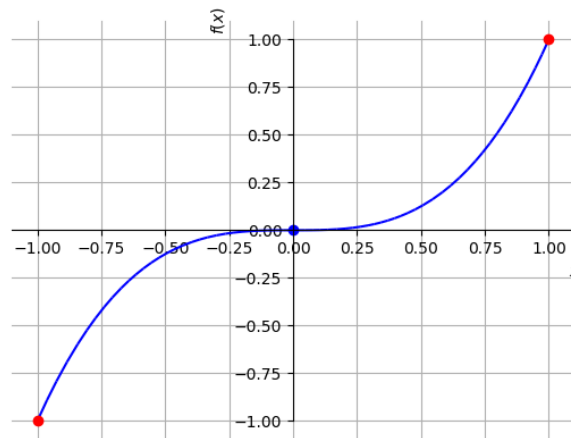
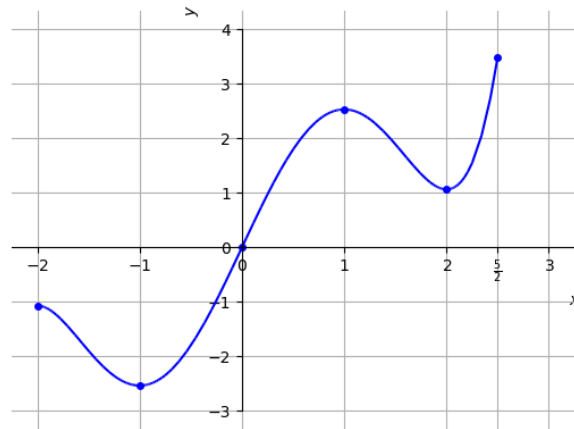


Figura 4.7: Esboço do gráfico da função  $f(x) = x^3$  discutida no Exercício Resolvido ??.

◇

**Exercícios**

**E 4.2.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Determine e classifique os pontos extremos desta função.

**E 4.2.2.** Dada a função  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  restrita ao intervalo  $[-1, 2]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**E 4.2.3.** Dada a função  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  restrita ao intervalo  $[0, 3]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**E 4.2.4.** Dada a função  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  restrita ao intervalo  $[0, \infty)$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**E 4.2.5.** Dada a função  $f(x) = x^{1/3}$  restrita ao intervalo  $[-1, 1]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

## 4.3 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

### 4.3.1 Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.



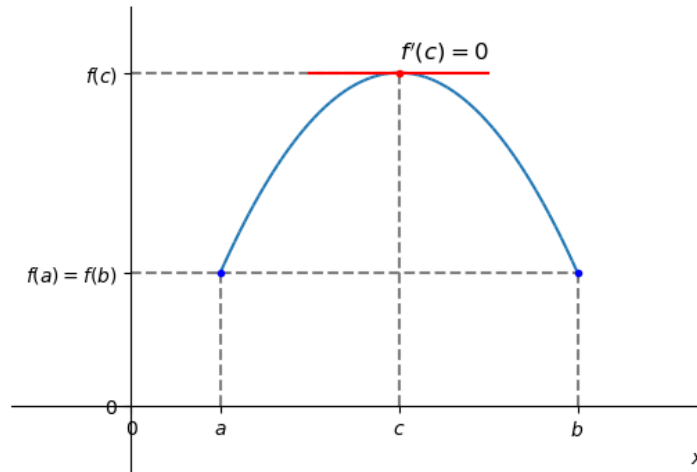


Figura 4.8: Ilustração do Teorema de Rolle.

**Teorema 4.3.1.** (Teorema de Rolle) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se

$$f(a) = f(b), \quad (4.49)$$

então existe pelo menos um **ponto crítico**  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = 0. \quad (4.50)$$

**Exemplo 4.3.1.** O polinômio  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$  tem pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(0, 1)$  e no intervalo  $(1, 3)$ . De fato, temos  $p(0) = p(1) = 1$  e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Analogamente, como também  $p(1) = p(3) = 1$ , segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(1, 3)$ . Veja o esboço do gráfico de  $p$  na Figura ??.

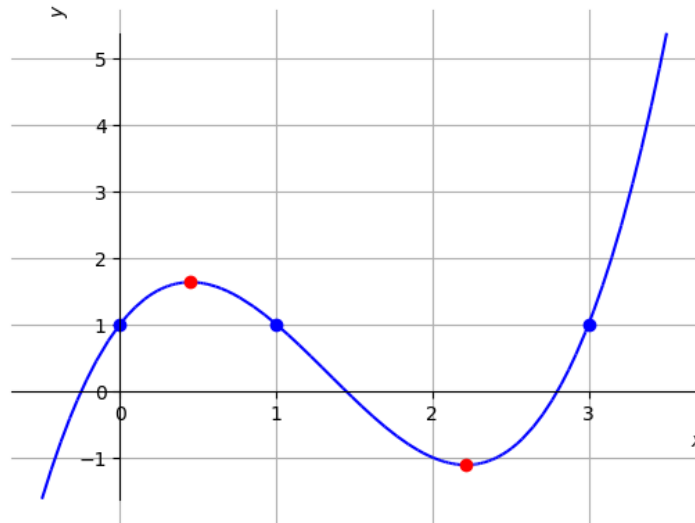


Figura 4.9: Esboço do gráfico de  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ .

De fato, como todo polinômio é derivável em toda parte, podemos calcular os pontos críticos como segue.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{6} \quad (4.52)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,45 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,22. \quad (4.53)$$

Podemos usar os seguintes comandos<sup>6</sup> para computar os pontos críticos de  $p$  e plotar seu gráfico:

```
>>> p = x**3 - 4*x**2 + 3*x + 1
>>> pc = solve(p.diff()); pc
[-sqrt(7)/3 + 4/3, sqrt(7)/3 + 4/3]
>>> plot(p, (x, -0.5, 3.5))
```

**Exemplo 4.3.2.** Vejamos os seguintes casos em que o Teorema de Rolle não se aplica:

---

<sup>6</sup>Veja a Observação ??.

a) A função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases} \quad (4.54)$$

é tal que  $f(0) = f(1) = 0$ , entretanto sua derivada  $f'(x) = 1$  no intervalo  $(0, 1)$ . Ou seja, a condição da  $f$  ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle. Veja a Figura ?? para o esboço do gráfico desta função.

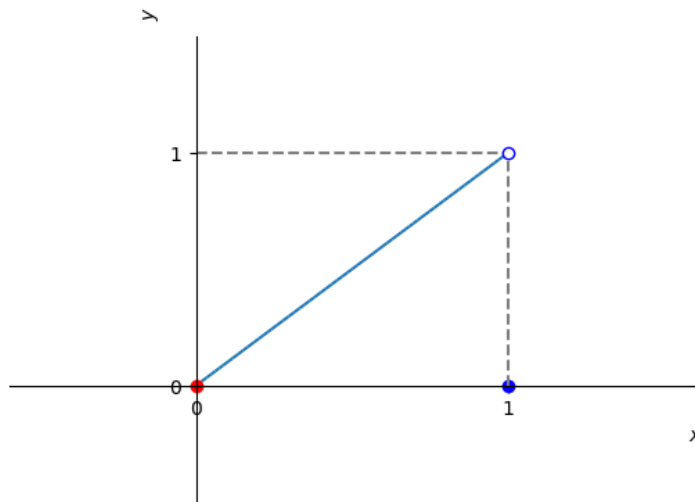


Figura 4.10: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo ?? a).

- b) Não existe ponto tal que a derivada da  $g(x) = -|x - 1| + 1$  seja nula. Entretanto, notemos que  $g(0) = g(2) = 0$  e  $g$  contínua no intervalo fechado  $[0, 2]$ . O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois  $g$  não é derivável no intervalo  $(0, 2)$ , mais especificamente, no ponto  $x = 1$ . Veja a Figura ??.

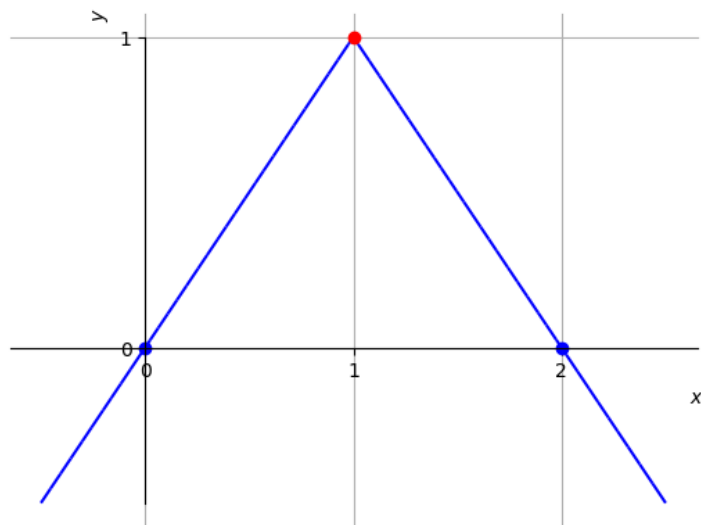


Figura 4.11: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo ?? b).

### 4.3.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

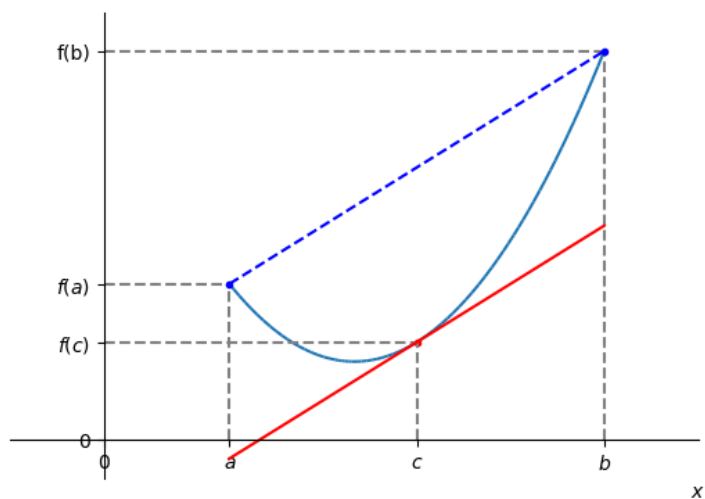


Figura 4.12: Ilustração do Teorema do valor médio.

**Teorema 4.3.2.** (Teorema do valor médio) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então, existe pelo menos um ponto  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.55)$$

**Observação 4.3.1.** Em um contexto de aplicação, o Teorema do valor médio relaciona a taxa de variação média da função em um intervalo  $[a, b]$  com a taxa de variação instantânea da função em um ponto interior deste intervalo.

**Exemplo 4.3.3.** A função  $f(x) = x^2$  é contínua no intervalo  $[0, 2]$  e diferenciável no intervalo  $(0, 2)$ . Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto  $c \in (0, 2)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \quad (4.56)$$

De fato,  $f'(x) = 2x$  e, portanto, tomando  $c = 1$ , temos  $f'(c) = 2$ .

**Corolário 4.3.1.** (Funções com derivadas nulas são constantes) Se  $f'(x) = 0$  para todos os pontos em um intervalo  $(a, b)$ , então  $f$  é constante neste intervalo.

*Demonstração.* De fato, sejam  $x_1, x_2 \in (a, b)$  e, sem perda de generalidade,  $x_1 < x_2$ . Então, temos  $f$  é contínua no intervalo  $[x_1, x_2]$  e diferenciável em  $(x_1, x_2)$ . Segue do teorema do valor médio que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (4.57)$$

Como  $f'(c) = 0$ , temos  $f(x_2) = f(x_1)$ . Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo  $(a, b)$ , logo é constante neste intervalo.  $\square$

**Corolário 4.3.2.** (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se  $f'(x) = g'(x)$  para todos os pontos em um intervalo aberto  $(a, b)$ , então  $f(x) = g(x) + C$ ,  $C$  constante, para todo  $x \in (a, b)$ .

*Demonstração.* Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  $\square$

**Corolário 4.3.3.** (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que  $f$  seja contínua em  $[a,b]$  e derivável em  $(a,b)$ .

- Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a,b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a,b]$ .
- Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a,b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a,b]$ .

**Exemplo 4.3.4.** Vamos estudar a monotonicidade da função polinomial  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ . Na Figura ??, temos o esboço de seu gráfico.

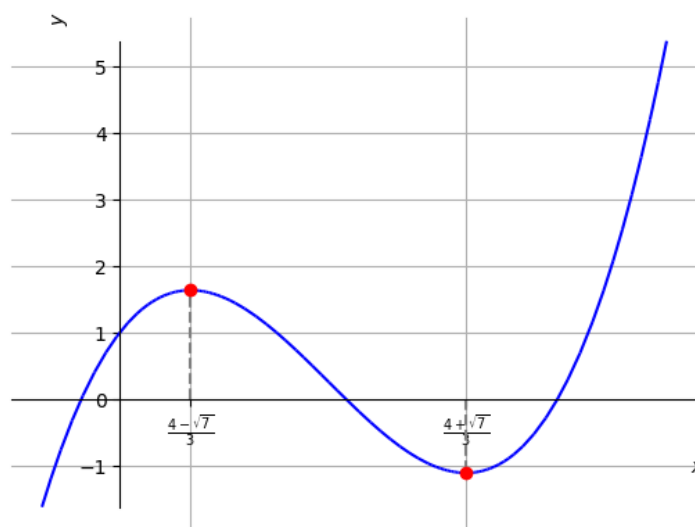
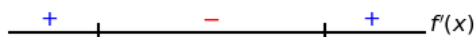


Figura 4.13: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ .

Podemos usar o Corolário ?? para estudarmos a monotonicidade (i.e. intervalos de crescimento ou decrescimento). Isto é, fazemos o estudo de sinal da derivada de  $f$ . Calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3. \quad (4.58)$$

Logo, temos



Ou seja,  $f'(x) < 0$  no conjunto  $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$  e  $f'(x) < 0$  no conjunto  $\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)$ . Concluimos que  $f$  é **crescente** nos intervalos  $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right]$  e  $\left[\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ , enquanto que  $f$  é **decrescente** no intervalo  $\left[\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right]$ .

**Exemplo 4.3.5.** A função exponencial  $f(x) = e^x$  é crescente em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = e^x > 0, \quad (4.59)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exercícios resolvidos

**ER 4.3.1.** Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

**Solução.** Seja  $s = s(t)$  a função distância percorrida pelo carro e  $t$  o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, existe tempo  $t_1 \in (0, 1,5)$  tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1,5) - s(0)}{1,5 - 0} = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ km/h}. \quad (4.60)$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

◇

**ER 4.3.2.** Estude a monotonicidade da função gaussiana  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Solução.** Para estudarmos a monotonicidade de uma função, podemos fazer o estudo de sinal de sua derivada. Neste caso, temos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}. \quad (4.61)$$

Assim, vemos que

+	-	$-2x$
+	+	$e^x$
+	-	$f'(x)$
	0	

Concluimos que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, 0)$  e decrescente no intervalo  $(0, \infty)$ .

◇

## Exercícios

**E 4.3.1.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

**E 4.3.2.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

**E 4.3.3.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = \ln x$ .

**E 4.3.4.** Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

## 4.4 Teste da primeira derivada

Na Seção ??, vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário ?? nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja  $c$  um ponto crítico de uma função contínua  $f$  e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto  $(a, b)$  contendo  $c$ , exceto possivelmente no ponto  $c$ . Movendo-se no sentido positivo em  $x$ :

- se  $f'(x)$  muda de negativa para positiva em  $c$ , então  $f$  possui um mínimo local em  $c$ ;
- se  $f'(x)$  muda de positiva para negativa em  $c$ , então  $f$  possui um máximo local em  $c$ ;



- se  $f'$  não muda de sinal em  $c$ , então  $c$  não é um extremo local de  $f$ .

Veja a Figura ??.

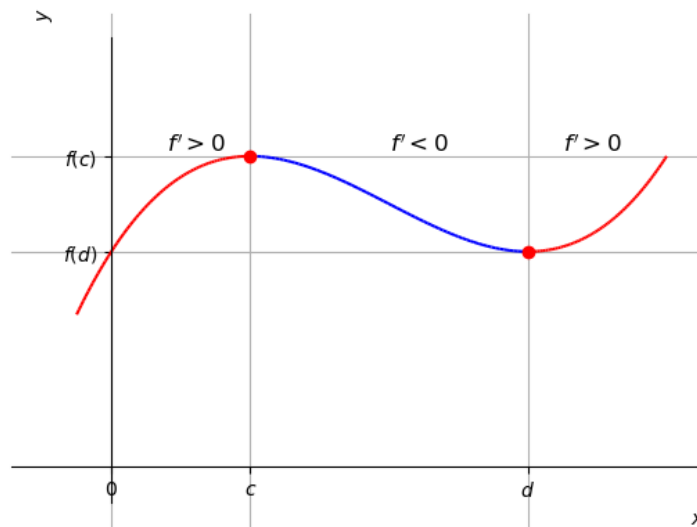


Figura 4.14: Ilustração do teste da primeira derivada com  $c$  ponto de máximo local e  $d$  ponto de mínimo local.

**Exemplo 4.4.1.** Consideremos a função  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$ . Como  $f$  é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.62)$$

Temos  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ . Segue, que os pontos críticos são

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad (4.63)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \quad (4.64)$$

Com isso, temos

Intervalo	$x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x$
$f'$	+	-	+
$f$	crescente	decrescente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que  $x_1 = 1$  é ponto de máximo local e que  $x_2 = 3$  é ponto de mínimo local.

Podemos usar o [SymPy](#) para computarmos a derivada de  $f$  com o comando<sup>7</sup>

```
f1 = diff(x**3/3-2*x**2+3*x+3)
```

Então, podemos resolver  $f'(x) = 0$  com o comando

```
solve(f1)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da  $f'$  com os comandos

```
reduce_inequalities(f1<0)
```

```
reduce_inequalities(f1>0)
```

## Exercícios resolvidos

**ER 4.4.1.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \quad (4.65)$$

**Solução.** Como o domínio da  $f$  é  $(-\infty, \infty)$  e  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.66)$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.67)$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.68)$$

$$x_1 = 0, x = \frac{3 \pm 1}{2}. \quad (4.69)$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \quad (4.70)$$

Portanto, os pontos críticos são  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$ . Fazendo o estudo de sinal da  $f'$ , temos

---

<sup>7</sup>Veja a Observação ??.

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$4x$	-	+	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+
$f$	decrecente	crescente	decrecente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que  $x_1 = 0$  é ponto de mínimo local,  $x_2 = -2$  é ponto de máximo local e  $x_3 = -1$  é ponto de mínimo local.

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>8</sup> para resolvermos este exercício:

```
# f'
f1 = Lambda(x, diff(x**4 - 4*x**3 + 4*x**2,x))
# f'(x) = 0
solve(f1(x))
# f1(x) < 0
reduce_inequalities(f1(x)<0)
# f1(x) > 0
reduce_inequalities(f1(x)>0)
```

◇

**ER 4.4.2.** Encontre o valor máximo global de  $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seu máximo ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (4.71)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (4.72)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (4.73)$$

Fazendo o estudo de sinal da derivada, obtemos

	$x < 0$	$0 < x$
$f'$	+	-
$f$	crescente	decrecente

---

<sup>8</sup>Veja a Observação ??.

Portanto, do teste da primeira derivada, podemos concluir que  $x = 2$  é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é  $f(2) = e^{-2}$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty, \quad (4.74)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{-x} = 0. \quad (4.75)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de  $f$  é  $f(2) = e^{-2}$ .

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>9</sup> para resolvermos este exercício:

```
# f(x)
f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
# f'(x)
fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
# pontos críticos
xc = solve(fl(x))
# f'(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# f'(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
# lim f(x), x->-oo
limit(f(x),x,-oo)
# lim f(x), x->oo
limit(f(x),x,oo)
# f(2)
f(xc[0])
```

◇

## Exercícios

**E 4.4.1.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

**E 4.4.2.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

---

<sup>9</sup>Veja a Observação ??.

**E 4.4.3.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$ .

## 4.5 Concavidade e o Teste da segunda derivada

O gráfico de uma função diferenciável  $f$  é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'$  é crescente em  $I$ ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'$  é decrescente em  $I$ .

Assumindo que  $f$  é duas vezes diferenciável, temos que a monotonicidade de  $f'$  está relacionada ao sinal de  $f''$  (a segunda derivada de  $f$ ). Logo, o gráfico de  $f$  é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'' > 0$  em  $I$ ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'' < 0$  em  $I$ .

**Exemplo 4.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) o gráfico de  $f(x) = x^2$  é uma parábola côncava para cima em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = 2x, \quad (4.76)$$

uma função crescente em toda parte. Também, temos

$$f''(x) = 2 > 0, \quad (4.77)$$

em toda parte.

- b) o gráfico de  $g(x) = -x^2$  é uma parábola côncava para baixo em toda parte. De fato, temos

$$g'(x) = -2x, \quad (4.78)$$

uma função decrescente em toda parte. Também, temos

$$g''(x) = -2 < 0, \quad (4.79)$$

em toda parte.

- c) o gráfico da função  $h(x) = x^3$  é côncavo para baixo em  $(-\infty, 0)$  e côncavo para cima em  $(0, \infty)$ . De fato, temos

$$h'(x) = x^2, \quad (4.80)$$

que é uma função decrescente em  $(-\infty, 0]$  e crescente em  $[0, \infty)$ . Também, temos

$$h''(x) = 2x \quad (4.81)$$

que assume valores negativos em  $(-\infty, 0)$  e valores positivos em  $(0, \infty)$ .

Um ponto em que o gráfico de uma função  $f$  muda de concavidade é chamado de **ponto de inflexão**. Em tais pontos temos

$$f'' = 0 \quad \text{ou} \quad \nexists f''. \quad (4.82)$$

**Exemplo 4.5.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O gráfico da função  $f(x) = x^3$  tem  $x = 0$  como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$f'(x) = 3x^2 \quad (4.83)$$

que é diferenciável em toda parte com

$$f''(x) = 6x. \quad (4.84)$$

Logo, os pontos de inflexão ocorrem quando

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \quad (4.85)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.86)$$

- b) O gráfico da função  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  tem  $x = 0$  como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0. \quad (4.87)$$

Segue que

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad x \neq 0, \quad (4.88)$$

donde  $g'' > 0$  em  $(-\infty, 0)$  e  $g'' < 0$  em  $(0, \infty)$ . Isto é, o gráfico de  $g$  muda de concavidade em  $x = 0$ ,  $\nexists g''(0)$ , sendo  $g$  côncava para cima em  $(-\infty, 0)$  e côncava para baixo em  $(0, \infty)$ .

### 4.5.1 Teste da segunda derivada

Seja  $x = x_0$  um ponto crítico de uma dada função  $f$  duas vezes diferenciável e  $f''$  contínua em um intervalo aberto contendo  $x = x_0$ . Temos

- a) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , então  $x = x_0$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;
- b) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , então  $x = x_0$  é um ponto de máximo local de  $f$ .

**Exemplo 4.5.3.** A função  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$  tem pontos críticos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.89)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad (4.90)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2. \quad (4.91)$$

A segunda derivada de  $f$  é

$$f''(x) = 12x - 18. \quad (4.92)$$

Logo, como  $f''(x_1) = f''(1) = -6 < 0$ , temos que  $x_1 = 1$  é ponto de máximo local de  $f$ . E, como  $f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$ , temos que  $x_2 = 2$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

**Observação 4.5.1.** Se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) = 0$ , então  $x = x_0$  pode ser ponto extremo local de  $f$  ou não. Ou seja, o teste é inconclusivo.

**Exemplo 4.5.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = x^3$  tem ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.94)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (4.95)$$

Neste caso,  $x = 0$  não é ponto de extremo local e temos  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 0$ .

b) A função  $f(x) = x^4$  tem um ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \quad (4.96)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (4.97)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (4.98)$$

Neste caso,  $x = 0$  é ponto de mínimo local e temos  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 0$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 4.5.1.** Encontre o valor máximo global de  $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seu valor máximo (se existir) ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (4.99)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (4.100)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (4.101)$$

Agora, usando o teste da segunda derivada, temos

$$f''(x) = (x - 3)e^{-x} \Rightarrow f''(2) = -e^{-2} < 0. \quad (4.102)$$

Logo,  $x = 2$  é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é  $f(2) = e^{-2}$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty, \quad (4.103)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{-x} = 0. \quad (4.104)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de  $f$  é  $f(2) = e^{-2}$ .

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>10</sup> para resolvermos este exercício:

---

<sup>10</sup>Veja a Observação ??.



```

>>> f = (x-1)*exp(-x)
>>> f1 = diff(f,x)
>>> f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
>>> f1 = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(f1(x))
[2]
>>> f11 = Lambda(x, diff(f(x),x,2))
>>> f11(2)
    -2
-e
>>> f(2), f1(2), f11(2)
    -2    -2
e  , 0, -e
>>> limit(f(x),x,oo)
0
>>> limit(f(x),x,-oo)
-oo

```

◇

**ER 4.5.2.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad (4.105)$$

restrita ao intervalo de  $[-1, 3]$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em  $(-1, 3)$ , temos que seus extremos locais ocorrem nos seguintes pontos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \quad (4.106)$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.107)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2. \quad (4.108)$$

Calculando a segunda derivada de  $f$ , temos

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8. \quad (4.109)$$

Do teste da segunda derivada, temos

$$f''(x_1) = f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ pto. mín. local} \quad (4.110)$$

$$f''(x_2) = f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ pto. máx. local} \quad (4.111)$$

$$f''(x_3) = f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ pto. mín. local} \quad (4.112)$$

Agora, vejamos os valores de  $f$  em cada ponto de interesse.

$x$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$
$f(x)$	$9$	$0$	$1$	$0$	$9$

Então, podemos concluir que  $x = -1$  e  $x = 3$  são pontos de máximo global (o valor máximo global é  $f(-1) = f(3) = 9$ ),  $x = 1$  é ponto de máximo local,  $x = 0$  e  $x = 2$  são pontos de mínimo global (o valor mínimo global é  $f(0) = f(2) = 0$ ).

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>11</sup> para resolvermos este exercício:

```
>>> f = Lambda(x, x**4 - 4*x**3 + 4*x**2)
>>> fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(fl(x))
[0, 1, 2]
>>> fl1 = Lambda(x, diff(fl(x),x))
>>> fl1(0), fl1(1), fl1(2)
(8, -4, 8)
>>> f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)
(9, 0, 1, 0, 9)
```

◇

## Exercícios

**E 4.5.1.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

**E 4.5.2.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

**E 4.5.3.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$ .

---

<sup>11</sup>Veja a Observação ??.

**E 4.5.4.** Seja  $f(x) = -x^4$ . Mostre que  $x = 0$  é ponto de máximo local de  $f$  e que  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

## Capítulo 5

# Integração

**Observação 5.0.1.** Nos códigos [Python](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_session()
```

### 5.1 Noção de integral

#### 5.1.1 Soma de Riemann

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Seja, também,  $P$  a seguinte **partição** de  $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}, \quad (5.1)$$

onde  $n + 1$  é o número de pontos na partição. Definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (5.2)$$

o tamanho de cada subintervalo  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  da partição, com  $i = 1, 2, \dots, n$ . A **norma da partição** é definida por

$$\|P\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i, \quad (5.3)$$

i.e. o tamanho do maior subintervalo da partição. Com isso, chama-se de uma **soma de Riemann** toda a expressão da forma

$$S_n := \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (5.4)$$

onde  $x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$  (arbitrariamente escolhido).

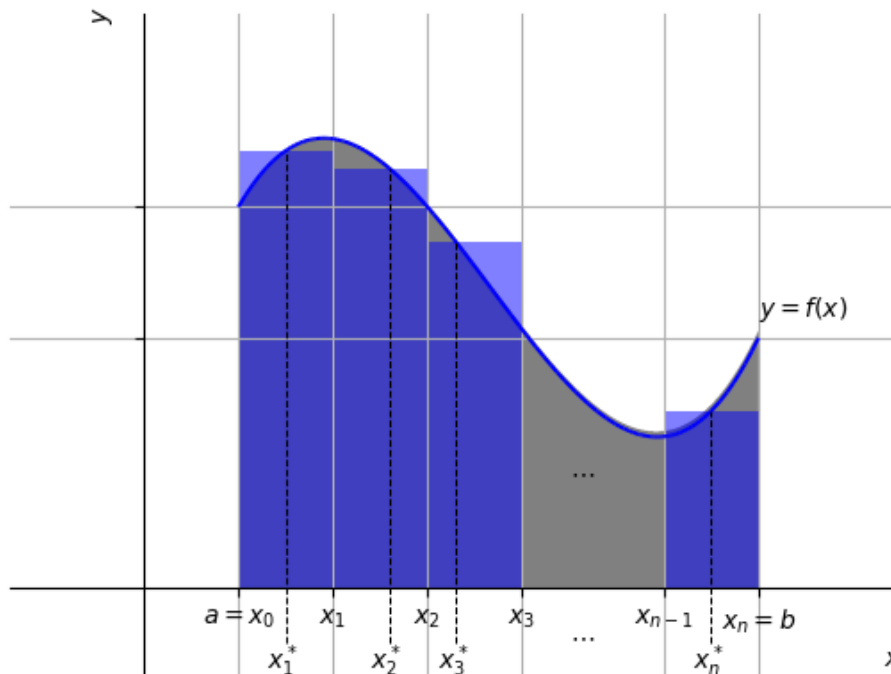


Figura 5.1: Ilustração da soma de Riemann.

**Observação 5.1.1.** (Aproximação da área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa, uma soma de Riemann é uma aproximação da área sob seu gráfico e o eixo das abscissas<sup>1</sup>. Veja a Figura ??.

<sup>1</sup>Veja o Exercício ?? para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

### 5.1.2 Integral

A integral (definida) de  $a$  até  $b$  de uma dada função  $f$  em relação a  $x$  é denotada e definida por

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (5.5)$$

De forma genérica, a integral definida de  $a$  até  $b$  é o limite das somas de Riemann quando a norma das partições  $P$  do intervalo  $[a, b]$  tendem a zero. Quando o limite existe, dizemos que  $f$  é **integrável** no intervalo  $[a, b]$ .

**Observação 5.1.2.** Na notação de integral definida acima, chamamos  $a$  de **limite inferior** e  $b$  de **limite superior de integração**,  $f$  é chamada de **integrando** e  $x$  de **variável de integração**.

**Observação 5.1.3.** Funções contínuas são funções integráveis.

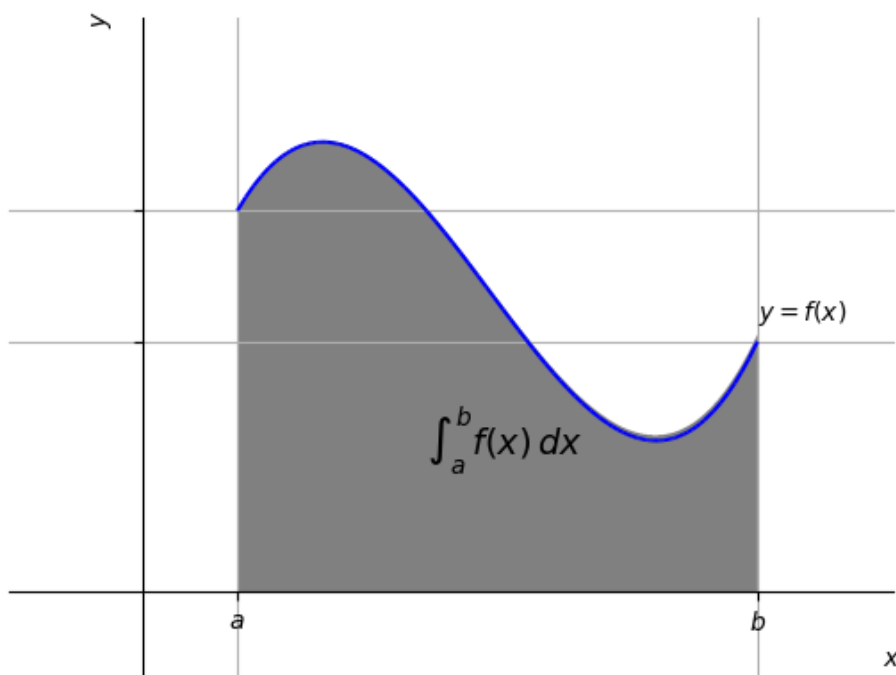


Figura 5.2: A integral definida como a área sob o gráfico.

**Observação 5.1.4.** (Área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.6)$$

é a área sob o gráfico de  $f^2$ . Veja a Figura ??.

**Exemplo 5.1.1.** Vamos calcular

$$\int_0^1 1 dx. \quad (5.7)$$

Aqui, o integrando é a função constante  $f(x) \equiv 1$  e o **intervalo de integração** é  $[a, b]$ . Da Observação ??, temos que esta integral é a área sob o gráfico de  $f$  no intervalo  $[0, 1]$ . Esta área é um retângulo de altura 1 e comprimento 1. Logo,

$$\int_0^1 1 dx = 1 \cdot 1 = 1. \quad (5.8)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 5.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.9)$$

**Solução.** Esta integral corresponde à área sob o gráfico da função  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  restrita ao intervalo  $[-1, 1]$ . Observando que

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 1, \quad (5.11)$$

vemos que esta é a área do semicírculo de raio 1. Logo,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (5.12)$$

◇

**ER 5.1.2.** Determine a função  $F(x)$  tal que

$$F(x) = \int_0^x t dt, \quad (5.13)$$

para todo  $x \geq 0$ . Então, mostre que  $F'(x) = x$ .

---

<sup>2</sup>Veja o Exercício ?? para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

**Exercícios****E 5.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^2 2 \, dx. \quad (5.17)$$

**E 5.1.2.** Calcule

$$\int_{-3}^{-1} 1 - x \, dx. \quad (5.18)$$

**E 5.1.3.** Determine  $F(x)$  tal que

$$F(x) = \int_0^x t + 1 \, dt. \quad (5.19)$$

para  $x \geq 0$ . Então, calcule  $F'(x)$ .**E 5.1.4.** Faça uma interpretação geométrica da soma de Riemann aplicada a uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.**E 5.1.5.** Faça uma interpretação geométrica de

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (5.20)$$

quando  $f$  é uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.**E 5.1.6.** Calcule

$$\int_{-1}^2 -1 \, dx. \quad (5.21)$$

**E 5.1.7.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x \, dx. \quad (5.22)$$



## 5.2 Propriedades de integração

Na Seção ??, vimos que a integral definida de uma dada função  $f$  em um intervalo  $[a, b]$  está associada à área (líquida) entre seu gráfico e as retas  $y = 0$ ,  $x = a$  e  $x = b$ . Veja a Figura ??.

Com base nesta noção geométrica, podemos inferir as seguintes propriedades de integração para funções integráveis  $f$  e  $g$ :

- a)  $\int_a^a f(x) dx = 0$
- b)  $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$
- c)  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- d)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- e)  $\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a)$

**Exemplo 5.2.1.** Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis tais que

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = 2, \quad (5.23)$$

$$\int_4^5 f(x) dx = 3, \quad (5.24)$$

$$\int_{-1}^4 g(x) dx = -1. \quad (5.25)$$

Então, vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int_4^{-1} g(x) dx = - \int_{-1}^4 g(x) dx = -(-1) = 1. \quad (5.26)$$

b)

$$\int_{-1}^{-1} 4f(x) dx = 0. \quad (5.27)$$

c)

$$\int_{-1}^4 -2g(x) dx = -2 \int_{-1}^4 g(x) dx = 2. \quad (5.28)$$

d)

$$\int_{-1}^4 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_{-1}^4 f(x) dx - \int_{-1}^4 2g(x) dx \quad (5.29)$$

$$= 2 - 2 \int_{-1}^4 g(x) dx \quad (5.30)$$

$$= 2 + 2 = 4. \quad (5.31)$$

e)

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \quad (5.32)$$

$$= 2 + 3 = 5. \quad (5.33)$$

**Exemplo 5.2.2.** Lembrando que  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , temos da propriedade e) acima que

$$2\pi \min_{x \in [-\pi, \pi]} \{\sin(x)\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx \leq 2\pi \max_{x \in [\pi, 2\pi]} \{\sin(x)\} \quad (5.34)$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx \leq 2\pi. \quad (5.35)$$

### 5.2.1 Teorema do valor médio

Com base na noção de integral, define-se a média de uma função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (5.36)$$

no caso de  $f$  ser integrável neste intervalo.

**Teorema 5.2.1.** (Teorema do valor médio para integrais) Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.37)$$

*Demonstração.* Vejamos uma ideia da demonstração. Da propriedade de integração e) acima, temos

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}. \quad (5.38)$$

Agora, pelo Teorema do valor intermediário (Teorema ??), temos  $f$  assume todos os valores entre seus valores mínimo e máximo. Logo, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.39)$$

□

**Exemplo 5.2.3.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ ,  $a \neq b$ , e

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \quad (5.40)$$

então  $f$  possui pelo menos um zero neste intervalo. De fato, do Teorema do valor médio para integrais, temos que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0. \quad (5.41)$$

### 5.2.2 Teorema fundamental do cálculo, parte I

Seja  $f$  uma função integrável e  $F$  a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (5.42)$$

para algum número real  $a$  dado.

**Teorema 5.2.2.** (Teorema fundamental do cálculo, parte I) Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.43)$$

sendo

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (5.44)$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. Da definição de derivada, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (5.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \right] \quad (5.46)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (5.47)$$

Agora, do Teorema do valor médio para integrais (Teorema ??), temos que existe  $c_h \in [x, x+h]$  tal que

$$f(c_h) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(x) dx = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (5.48)$$

Notemos que  $c_h \rightarrow x$  quando  $h \rightarrow 0$  e, portanto, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \quad (5.49)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \quad (5.50)$$

$$= f(x). \quad (5.51)$$

□

**Exemplo 5.2.4.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} \int_1^x t^2 dt = x^2. \quad (5.52)$$

b)

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t) dt = \sin(x) \quad (5.53)$$

### 5.2.3 Integral indefinida

A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema ??), mostra que a derivada da integral de uma função  $f$  (contínua) é uma função  $F$  tal que

$$F'(x) = f(x). \quad (5.54)$$

Dizemos que  $F$  é uma **primitiva** da função  $f$ .

Observamos que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então  $G(x) = F(x) + C$  também é primitiva de  $f$  para qualquer constante  $C$ , i.e.

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x). \quad (5.55)$$

Mais ainda, do Corolário ?? do Teorema do valor médio para derivadas, temos que quaisquer duas primitivas de uma mesma função diferem-se apenas uma constante.

Com isso, definimos **integral indefinida** de  $f$  em relação a  $x$  por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.56)$$

onde  $F$  é qualquer primitiva de  $f$  e  $C$  uma constante indeterminada.

**Exemplo 5.2.5.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\int dx = x + C$
- b)  $\int 2x dx = x^2 + C$
- c)  $\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$
- d)  $\int e^x dx = e^x + C$

### 5.2.4 Teorema fundamental do cálculo, parte II

**Teorema 5.2.3.** (Teorema fundamental do cálculo, parte II) Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é qualquer primitiva de  $f$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.57)$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema ??), nos garante a existência de

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (5.58)$$

Seja, então,  $F$  uma primitiva qualquer de  $f$ . Logo,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] \quad (5.59)$$

$$= G(b) - G(a) \quad (5.60)$$

$$= \int_a^b f(t) dx - \int_a^a f(t) dt \quad (5.61)$$

$$= \int_a^b f(t) dx. \quad (5.62)$$

□

**Exemplo 5.2.6.** Vejamos os seguintes casos:

1.  $\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1$
2.  $\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$
3.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

**Observação 5.2.1.** Do Teorema fundamental do cálculo, parte II, temos

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (5.63)$$

De fato, se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (5.64)$$

$$= - [F(a) - F(b)] \quad (5.65)$$

$$= - \int_b^a f(x) dx. \quad (5.66)$$

**Exemplo 5.2.7.** Temos que

$$\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1. \quad (5.67)$$

Agora,

$$\int_1^0 dx = x|_1^0 = 0 - 1 = -1. \quad (5.68)$$

Conforme esperado, temos

$$\int_0^1 dx = - \int_1^0 dx. \quad (5.69)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 5.2.1.** Calcule

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} dx. \quad (5.70)$$

**Solução.** Primeiramente, notemos que

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad (5.71)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C. \quad (5.72)$$

Então, usando as propriedades de integração, temos

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} \, dx = \int_1^{\sqrt{e}} x \, dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \, dx \quad (5.73)$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} - [\ln x]_1^{\sqrt{e}} \quad (5.74)$$

$$= \left[ \frac{(\sqrt{e})^2}{2} - \frac{1}{2} \right] - [\ln \sqrt{e} - \ln 1] \quad (5.75)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(e) - 0 \quad (5.76)$$

$$= \frac{e}{2} - 1. \quad (5.77)$$

◇

**ER 5.2.2.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = \sin(x)$  e as retas  $y = 0$ ,  $x = -\pi/2$  e  $x = \pi/2$ .

**Solução.** Lembrando que a integral definida está associada a área sob o gráfico do integrando, temos que a área desejada pode ser calculada por

$$A = - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx, \quad (5.78)$$

pois  $\sin(x) < 0$  para  $x \in (-\pi/2, 0)$  e  $\sin(x) > 0$  para  $x \in (0, \pi/2)$ . Também, observamos que

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C. \quad (5.79)$$

Logo, do Teorema fundamental do cálculo segue que

$$A = - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx \quad (5.80)$$

$$= -[-\cos(x)]_{-\pi/2}^0 + [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \quad (5.81)$$

$$= -[-1 - 0] + [-0 - (-1)] = 2. \quad (5.82)$$

◇

**ER 5.2.3.** Encontre a função  $y = y(x)$  tal que

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad (5.83)$$

e  $y(0) = 1$ .

**Solução.** Integrando ambos os lados da equação diferencial em relação a  $x$ , temos

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C \quad (5.84)$$

Agora, da condição  $y(0) = 1$ , segue

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + C = 1 \quad (5.85)$$

$$\Rightarrow C = 1. \quad (5.86)$$

Concluimos que  $y = x^2/2 + 1$ .

◇

## Exercícios

**E 5.2.1.** Sejam  $f$  e  $g$  tais que

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (5.87)$$

$$\int_{-2}^0 g(x) dx = 1. \quad (5.88)$$

Calcule

a)  $\int_{-1}^{-1} f(x) - 51 \cdot g(x) dx$

b)  $\int_{-2}^0 2g(x) - \frac{1}{2}f(x) dx$

c)  $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$



**E 5.2.2.** Calcule

a)  $\int_{-1}^2 2 \, dx$

b)  $\int_{-3}^{-1} 1 - x \, dx$

c)  $\int_1^e \frac{2}{x} \, dx$

**E 5.2.3.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^2 - 1$  e as retas  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**E 5.2.4.** Encontre a função  $y = y(x)$  tal que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \quad (5.89)$$

e  $y(\pi) = 1$ .

## 5.3 Regras básicas de integração

Na Seção ??, definimos a integral indefinida por

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad (5.90)$$

onde  $F$  é uma **primitiva** de  $f$ , i.e.  $F' = f$ , e  $C$  é uma **constante indeterminada**. Na sequência, vamos discutir sobre as regras básicas para o cálculo de integrais.

### 5.3.1 Integral de função potência

Com base na derivada de função potência, podemos afirmar que

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1. \quad (5.91)$$

De fato, temos

$$\left( \frac{x^{r+1}}{r+1} \right)' = (r+1) \cdot \frac{x^r}{r+1} = x^r, \quad (5.92)$$

para  $r \neq -1$ .

**Exemplo 5.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

$$\text{a) } \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

**Exemplo 5.3.2.** Vamos calcular

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx. \quad (5.93)$$

Da regra da potência, temos

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad (5.94)$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 \quad (5.95)$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \quad (5.96)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (5.97)$$

### 5.3.2 Regras da multiplicação por constante e da soma

Das regras de multiplicação por constante e da soma para derivadas, podemos concluir que

$$\bullet \int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx, \quad k \neq 0 \text{ constante.}$$

De fato, seja  $F$  uma primitiva de  $f$ . Temos  $(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$ , i.e.  $k \cdot F$  é primitiva de  $k \cdot f$ .

$$\bullet \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

De fato, sejam  $F$  uma primitiva de  $f$  e  $G$  uma primitiva de  $g$ . Temos  $(F + G)' = F' + G' = f + g$ , i.e.  $F + G$  é primitiva de  $f + g$ .

**Observação 5.3.1.** Como  $(x)' = 1$ , temos que a **integral de função constante**  $f(x) \equiv k$  é

$$\int k \, dx = k \int 1 \cdot dx = k \cdot x + C. \quad (5.98)$$

**Exemplo 5.3.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int 2x \, dx = 2 \int x \, dx \quad (5.99)$$

$$= 2 \left( \frac{x^2}{2} + C \right) \quad (5.100)$$

$$= x^2 + C \quad (5.101)$$

3

b)

$$\int (2x^2 - 3x + 1) \, dx = \int 2x^2 \, dx - \int 3x \, dx + \int dx \quad (5.102)$$

$$= 2 \int x^2 \, dx - 3 \int x \, dx + x + C \quad (5.103)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad (5.104)$$

**Exemplo 5.3.4.** Vamos calcular

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx. \quad (5.105)$$

Temos

$$\int x^2 + 1 \, dx = \int x^2 \, dx + \int dx \quad (5.106)$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C. \quad (5.107)$$

---

<sup>3</sup>Como  $C$  é uma constante indeterminada,  $2 \cdot C$  também é uma constante indeterminada.

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 \quad (5.108)$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \left( \frac{0^3}{3} + 0 \right) \quad (5.109)$$

$$= \frac{4}{3}. \quad (5.110)$$

### 5.3.3 Integral de $1/x$

Na Seção ??, a função logaritmo natural  $y = \ln x$  foi definida como a inversa da função exponencial natural  $y = e^x$ . Pode-se mostrar que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt, \quad x > 0. \quad (5.111)$$

Isto está de acordo com o fato de que da parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad (5.112)$$

Agora, da Regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d(-x)}{dx} \quad (5.113)$$

$$= \frac{1}{x}. \quad (5.114)$$

Com isso, podemos concluir que

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C. \quad (5.115)$$

**Exemplo 5.3.5.** Vamos calcular

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx. \quad (5.116)$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^e \quad (5.117)$$

$$= \ln(e) - \ln(1) \quad (5.118)$$

$$= 1. \quad (5.119)$$

### 5.3.4 Integral da função exponencial natural

Da derivada da função exponencial natural, temos

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (5.120)$$

**Exemplo 5.3.6.**

$$\int e^{2+x} dx = \int e^2 e^x dx \quad (5.121)$$

$$= e^2 \int e^x dx \quad (5.122)$$

$$= e^2 e^x + C \quad (5.123)$$

$$= e^{2+x} + C \quad (5.124)$$

### 5.3.5 Integrais de funções trigonométricas

Com base na derivada de funções trigonométricas, temos

$$\bullet \quad \int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.125)$$

$$\bullet \quad \int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (5.126)$$

**Exemplo 5.3.7.** Vamos calcular

$$\int_0^\pi \cos(x) - \text{sen}(x) dx. \quad (5.127)$$

Temos

$$\int \cos(x) - \text{sen}(x) dx = \int \cos(x) dx - \int \text{sen}(x) dx \quad (5.128)$$

$$= \text{sen}(x) + \cos(x) + C. \quad (5.129)$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^\pi \cos(x) - \text{sen}(x) dx = \text{sen}(x) + \cos(x)|_0^\pi \quad (5.130)$$

$$= \text{sen}(\pi) + \cos(\pi) - [\text{sen}(0) + \cos(0)] \quad (5.131)$$

$$= -1 - 1 = -2. \quad (5.132)$$

### 5.3.6 Tabela de integrais

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.133)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.134)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.135)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (5.136)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.137)$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.138)$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (5.139)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 5.3.1.** Calcule a área total entre as curvas  $y = x^2 - 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Solução.** Tendo em vista que  $x^2 - 1 \leq 0$  para  $x \in [0, 1]$  e  $x^2 - 1 \geq 0$  para  $x \in [1, 2]$ , temos que a área  $A$  pedida é igual a

$$A = -\int_0^1 x^2 - 1 dx + \int_1^2 x^2 - 1 dx. \quad (5.140)$$

Agora, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 - 1 dx = \int x^2 dx - \int dx \quad (5.141)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + C. \quad (5.142)$$

Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = - \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \quad (5.143)$$

$$= - \left[ \frac{1}{3} - 1 \right] + \left[ \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right] \quad (5.144)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}. \quad (5.145)$$

Podemos usar o [SymPy](#) para calcular a área, com os seguintes comandos<sup>4</sup>:

```
>>> -integrate(x**2-1,(x,0,1))+integrate(x**2-1,(x,1,2))
2
```

◇

**ER 5.3.2.** Calcule

$$\int \frac{1}{2x} dx. \quad (5.146)$$

**Solução.** Das regras básicas de integração, temos

$$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \quad (5.147)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx \quad (5.148)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x) + C \quad (5.149)$$

$$= \ln \sqrt{x} + C. \quad (5.150)$$

No [SymPy](#), temos<sup>5</sup>:

```
>>> integrate(1/(2*x),x)
log(x)/2
```

◇

### 5.3.7 Exercícios

**E 5.3.1.** Calcule

---

<sup>4</sup>Veja a Observação ??.

<sup>5</sup>Veja a Observação ??.

a)  $\int dx$

b)  $\int x^{-2} dx$

c)  $\int \sqrt{x} dx$

d)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

**E 5.3.2.** Calcule

a)  $\int 1 + x^{-2} dx$

b)  $\int x - \frac{1}{x} dx$

**E 5.3.3.** Calcule

a)  $2 \cos(x) dx$

b)  $1 - \sin(x) dx$

**E 5.3.4.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x^3 dx. \quad (5.151)$$

**E 5.3.5.** Calcule a área total entre as curvas  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ .

## 5.4 Integração por substituição

Seja  $u = u(x)$ . A regra de integração por substituição é

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.152)$$

De fato, se

$$\int f(u) du = F(u) + C, \quad (5.153)$$



então, da regra da cadeia (Seção ??), temos

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) \quad (5.154)$$

$$= f(u(x))u'(x), \quad (5.155)$$

i.e.  $F(u(x))$  é primitiva de  $f(u(x))u'(x)$ .

**Exemplo 5.4.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\int 2(2x + 1)^2 dx$ .

Tomamos  $f(u) = u^2$  com  $u(x) = 2x + 1$ , donde  $u'(x) = 2$ . Logo

$$\int 2(2x + 1)^2 dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (5.156)$$

$$= \int f(u) du \quad (5.157)$$

$$= \int u^2 du \quad (5.158)$$

$$= \frac{u^3}{3} + C \quad (5.159)$$

$$= \frac{(2x + 1)^3}{3} + C. \quad (5.160)$$

b)  $\int \pi \operatorname{sen}(\pi x) dx$ .

Tomando  $f(u) = \operatorname{sen}(u)$ ,  $u = \pi x$ , temos  $u'(x) = \pi$ . Logo

$$\int \pi \operatorname{sen}(\pi x) dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (5.161)$$

$$= \int f(u) du \quad (5.162)$$

$$= \int \operatorname{sen}(u) du \quad (5.163)$$

$$= -\cos(u) + C \quad (5.164)$$

$$= -\cos(\pi x) + C. \quad (5.165)$$

**Exemplo 5.4.2.** Consideremos

$$\int (2x + 1)^2 dx. \quad (5.166)$$

Substituindo

$$u = 2x + 1 \quad (5.167)$$

temos

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}. \quad (5.168)$$

Portanto,

$$\int (2x + 1)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2} \quad (5.169)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du \quad (5.170)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad (5.171)$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \quad (5.172)$$

$$= \frac{1}{6} (2x + 1)^3 + C. \quad (5.173)$$

### 5.4.1 Integral de função exponencial

Na Subseção ??, vimos que

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.174)$$

Agora, com a regra da substituição, temos

$$\int a^x dx = \int e^{\ln a^x} dx \quad (5.175)$$

$$= \int e^{x \ln a} dx, \quad (5.176)$$

com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Tomando

$$u = x \ln a \Rightarrow du = \ln(a) dx. \quad (5.177)$$

Segue que

$$\int a^x dx = \int e^u \frac{du}{\ln a} \quad (5.178)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int e^u du \quad (5.179)$$

$$= \frac{e^u}{\ln a} + C \quad (5.180)$$

$$= \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C \quad (5.181)$$

$$= \frac{e^{\ln a^x}}{\ln a} + C \quad (5.182)$$

$$= \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.183)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.184)$$

**Exemplo 5.4.3.** Vamos calcular

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx. \quad (5.185)$$

Por substituição, tomamos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad (5.186)$$

segue

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx = \int \cdot 2^u \frac{du}{2} \quad (5.187)$$

$$= \frac{1}{2} \int \cdot 2^u du \quad (5.188)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^u}{\ln 2} + C \quad (5.189)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C \quad (5.190)$$

### 5.4.2 Integral de funções trigonométricas

Na Seção ??, vimos que

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad \text{e} \quad (5.191)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C. \quad (5.192)$$

**Exemplo 5.4.4.** Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx. \quad (5.193)$$

Usando a identidade trigonométrica ??, temos

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \quad (5.194)$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx. \quad (5.195)$$

Agora, tomando  $u = 2x$ , temos  $du = 2 dx$ , donde

$$\int \cos(2x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{2} \quad (5.196)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(u) + C \quad (5.197)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + C. \quad (5.198)$$

Retornando a ??, obtemos

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C. \quad (5.199)$$

Agora, com o método da substituição podemos calcular

$$\int \operatorname{tg}(x) dx. \quad (5.200)$$

Observamos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx. \quad (5.201)$$

Escolhendo

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx. \quad (5.202)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = - \int \frac{1}{u} du \quad (5.203)$$

$$= -\ln |u| + C \quad (5.204)$$

$$= -\ln |\cos(x)| + C \quad (5.205)$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| + C \quad (5.206)$$

$$= \ln |\sec(x)| + C. \quad (5.207)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C. \quad (5.208)$$

**Exemplo 5.4.5.** Vamos calcular

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) dx. \quad (5.209)$$

Usando a regra de substituição, escolhemos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x du. \quad (5.210)$$

Fazendo a substituição e calculando, obtemos

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) dx = \int \operatorname{tg}(u) \frac{du}{2} \quad (5.211)$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(u) du \quad (5.212)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(u)| + C \quad (5.213)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(x^2)| + C. \quad (5.214)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função tangente, obtemos<sup>6</sup>

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C. \quad (5.215)$$

---

<sup>6</sup>Veja o Exercício ??.

Agora, vamos calcular

$$\int \sec(x) dx. \quad (5.216)$$

Observamos que

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \quad (5.217)$$

$$= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx. \quad (5.218)$$

Então, fazendo a substituição

$$u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \Rightarrow du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x), \quad (5.219)$$

temos

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \quad (5.220)$$

$$= \int \frac{1}{u} du \quad (5.221)$$

$$= \ln |u| + C \quad (5.222)$$

$$= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (5.223)$$

Ou seja, obtemos

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (5.224)$$

**Exemplo 5.4.6.** Vamos calcular

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du. \quad (5.225)$$

Fazendo a substituição

$$v = \frac{u}{2} \Rightarrow dv = \frac{du}{2}, \quad (5.226)$$

segue

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du = \int \sec(v) \cdot 2 dv \quad (5.227)$$

$$= 2 \int \sec(v) dv \quad (5.228)$$

$$= 2 \ln |\sec(v) + \operatorname{tg}(v)| + C \quad (5.229)$$

$$= 2 \ln \left| \sec\left(\frac{u}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) \right| + C. \quad (5.230)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função secante, obtemos<sup>7</sup>

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)| + C. \quad (5.231)$$

### 5.4.3 Integrais definidas

A regra de substituição para integrais definidas é

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.232)$$

**Exemplo 5.4.7.** Vamos calcular

$$\int_0^1 e^{-2x} dx. \quad (5.233)$$

Por substituição, escolhemos

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx. \quad (5.234)$$

Logo,

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} e^u \frac{du}{-2} \quad (5.235)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{-2} e^u du \quad (5.236)$$

$$= -\frac{1}{2} [e^u]_0^{-2} \quad (5.237)$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-2} - e^0) \quad (5.238)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}. \quad (5.239)$$

Alternativamente, podemos calcular a integral indefinida primeiramente e, então, usar o Teorema Fundamental do Cálculo com a primitiva obtida. Ou

---

<sup>7</sup>Veja o Exercício ??.

seja, temos

$$\int e^{-2x} dx = \int e^u \frac{du}{-2} \quad (5.240)$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u du \quad (5.241)$$

$$= -\frac{1}{2} e^u + C \quad (5.242)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} + C. \quad (5.243)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \quad (5.244)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^0 \quad (5.245)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}, \quad (5.246)$$

como esperado.

No [SymPy](#), temos<sup>8</sup>:

```
>>> integrate(exp(-2*x), (x, 0, 1))
      -2
      e
- ---- + --
      2   2
```

---

<sup>8</sup>Veja a Observação ??.



### 5.4.4 Tabela de integrais

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.247)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.248)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.249)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (5.250)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.251)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.252)$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.253)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C \quad (5.254)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (5.255)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (5.256)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (5.257)$$

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (5.258)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 5.4.1.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.259)$$

**Solução.** Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.260)$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \quad (5.261)$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \quad (5.262)$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{u^2} du \quad (5.263)$$

$$= 7 \int u^{-2} du \quad (5.264)$$

$$= 7 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \quad (5.265)$$

$$= -\frac{7}{u} \quad (5.266)$$

$$= \frac{7}{1-x}. \quad (5.267)$$

◇

**ER 5.4.2.** Calcule

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx. \quad (5.268)$$

**Solução.** Fazendo a substituição

$$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx, \quad (5.269)$$

temos

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{u} du \quad (5.270)$$

$$= \ln |u| + C \quad (5.271)$$

$$= \ln |e^x - 1| + C. \quad (5.272)$$

No [SymPy](#), temos<sup>9</sup>:

```
>>> integrate(exp(x)/(exp(x)-1), x)
      x
log(e  - 1)
```

◇

---

<sup>9</sup>Veja a Observação ??.

**ER 5.4.3.** Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.273)$$

**Solução.** Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- **Solução 1:** aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.274)$$

Escolhendo,  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x dx$ . Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.275)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.276)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{u=1}^0 \quad (5.277)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \Big|_{u=1}^0 \quad (5.278)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (5.279)$$

- **Solução 2:** calculando uma primitiva em função de  $x$ . Para obtermos uma primitiva em função de  $x$ , calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.280)$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x dx$  e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.281)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.282)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (5.283)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \quad (5.284)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \quad (5.285)$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (5.286)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>10</sup>:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2), (x,0,1))
```

◇

**ER 5.4.4.** Calcule a área total entre as curvas  $y = (1-x)^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Solução.** A função  $f(x) = (1-x)^3$  é positiva em  $(0, 1)$  e negativa em  $(1, 2)$ . Logo, a área é igual a

$$A = \int_0^1 (1-x)^3 dx - \int_1^2 (1-x)^3 dx. \quad (5.287)$$

Agora, calculamos

$$\int (1-x)^3 dx. \quad (5.288)$$

Para tanto, fazemos a substituição

$$u = 1-x \Rightarrow du = -dx. \quad (5.289)$$

Logo,

$$\int (1-x)^3 dx = -\int u^3 du \quad (5.290)$$

$$= -\frac{u^4}{4} + C \quad (5.291)$$

$$= -\frac{(1-x)^4}{4} + C. \quad (5.292)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$A = \left[ -\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 - \left[ -\frac{(1-x)^4}{4} \right]_1^2 \quad (5.293)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (5.294)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (5.295)$$

---

<sup>10</sup>Veja a Observação ??.

No [SymPy](#), temos<sup>11</sup>:

```
>>> integrate((1-x)**3,(x,0,1))-integrate((1-x)**3,(x,1,2))
1/2
```

◇

## Exercícios

**E 5.4.1.** Calcule

a)  $\int \sin(2x) dx$

b)  $\int \sqrt{x-1} dx$

c)  $\int \sin(x) \cos(x) dx$

**E 5.4.2.** Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (5.296)$$

**E 5.4.3.** Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx. \quad (5.297)$$

**E 5.4.4.** Calcule

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x} dx. \quad (5.298)$$

**E 5.4.5.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.299)$$

**E 5.4.6.** Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx. \quad (5.300)$$

---

<sup>11</sup>Veja a Observação ??.

**E 5.4.7.** Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2 + 1} dx. \quad (5.301)$$

**E 5.4.8.** Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) e^{\operatorname{tg}(x)} dx. \quad (5.302)$$

**Solução.**  $e - 1$

◇

**E 5.4.9.** Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \cotg(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C. \quad (5.303)$$

**E 5.4.10.** Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (5.304)$$

**E 5.4.11.** Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \cotg(x)| + C. \quad (5.305)$$

## 5.5 Integração por partes

Sejam  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções diferenciáveis, então da regra do produto para derivadas temos

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \quad (5.306)$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{du}{dx} v dx + \int u \frac{dv}{dx} dx, \quad (5.307)$$

donde

$$uv = \int v du + \int u dv. \quad (5.308)$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.309)$$

**Exemplo 5.5.1.** Vamos calcular

$$\int x e^x dx. \quad (5.310)$$

Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \quad (5.311)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x. \quad (5.312)$$

Observa-se que no cálculo de  $v$ , desprezamos a constante indeterminada. Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (5.313)$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad (5.314)$$

$$= x e^x - e^x + C. \quad (5.315)$$

No [SymPy<sup>12</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),x)
      x
(x-1)e
```

### 5.5.1 A integral do logaritmo natural

Vamos calcular

$$\int \ln x dx. \quad (5.316)$$

---

<sup>12</sup>Veja a Observação ??.

Usando integração por partes, tomamos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.317)$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \quad (5.318)$$

Segue que

$$\int \ln x \, dx = \int u \, dv \quad (5.319)$$

$$= uv - \int v \, du \quad (5.320)$$

$$= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} \, dx \quad (5.321)$$

$$= x \ln(x) - \int dx \quad (5.322)$$

$$= x \ln(x) - x + C. \quad (5.323)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (5.324)$$

**Exemplo 5.5.2.** Vamos calcular

$$\int \ln(2x) \, dx. \quad (5.325)$$

Da equação ??, temos

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (5.326)$$

Usando a regra da substituição (veja Seção ??), escolhemos

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx. \quad (5.327)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \ln(2x) \, dx = \int \ln(u) \frac{du}{2} \quad (5.328)$$

$$= \frac{1}{2} \int \ln(u) \, du \quad (5.329)$$

$$= \frac{u \ln(u)}{2} - \frac{u}{2} + C \quad (5.330)$$

$$= x \ln(2x) - x + C. \quad (5.331)$$



No [SymPy<sup>13</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(log(2*x),x)
x*log(2*x) - x
```

**Exemplo 5.5.3.** Vamos calcular

$$\int \sin(x)e^x dx. \quad (5.332)$$

Para integrar por partes, podemos escolher

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx \quad (5.333)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (5.334)$$

Então, segue

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx. \quad (5.335)$$

Agora, aplicamos integração por partes a esta última integral. Tomamos as seguintes novas escolhas

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x) dx \quad (5.336)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (5.337)$$

Segue que

$$\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx. \quad (5.338)$$

Substituindo este resultado na equação (??), obtemos

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx. \quad (5.339)$$

Somando este primeiro termo em ambos os lados desta equação, obtemos

$$2 \int \sin(x)e^x dx = (\sin(x) - \cos(x))e^x. \quad (5.340)$$

Daí, concluímos que

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C. \quad (5.341)$$

No [SymPy<sup>14</sup>](#), temos:

---

<sup>13</sup>Veja a Observação ??.

<sup>14</sup>Veja a Observação ??.

```
>>> integrate(sin(x)*exp(x),x)
      x      x
e · sin(x)  e · cos(x)
-----  -  -----
      2      2
```

### 5.5.2 Integral definida

Sejam  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções diferenciáveis em  $x$ . Segue que  $du = u'(x) dx$  e  $dv = v'(x) dx$ . Segue que a fórmula de integração por partes para integrais definidas é

$$\int_{x=a}^b u dv = uv|_{x=a}^b - \int_{x=a}^b v du. \quad (5.342)$$

**Exemplo 5.5.4.** Vamos calcular

$$\int_0^2 xe^{-x} dx. \quad (5.343)$$

Para aplicar integração por partes, escolhemos

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad (5.344)$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad (5.345)$$

Segue da fórmula de integração por partes para integrais definidas que

$$\int_0^2 xe^{-x} dx = -xe^{-x}|_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \quad (5.346)$$

$$= -2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 \quad (5.347)$$

$$= -3e^{-2} + 1. \quad (5.348)$$

No [SymPy<sup>15</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),(x,0,2))
      -2
- 3e  + 1
```

---

<sup>15</sup>Veja a Observação ??.

### 5.5.3 Tabela de integrais

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (5.349)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (5.350)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (5.351)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (5.352)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (5.353)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (5.354)$$

$$\int \ln x dx = x \ln(x) - x + C \quad (5.355)$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (5.356)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C \quad (5.357)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (5.358)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (5.359)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (5.360)$$

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (5.361)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 5.5.1.** Calcule

$$\int x \ln x dx. \quad (5.362)$$

**Solução.** Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.363)$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.364)$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}. \quad (5.365)$$

Segue que

$$\int x \ln x dx = \int u dv \quad (5.366)$$

$$= uv - \int v du \quad (5.367)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \quad (5.368)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \quad (5.369)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad (5.370)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (5.371)$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>16</sup>:

```
>>> integrate(x*log(x),x)
      2      2
x  · log(x)  x
----- - ---
      2      4
```

◇

**ER 5.5.2.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x e^x dx. \quad (5.372)$$

**Solução.** Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (5.373)$$

---

<sup>16</sup>Veja a Observação ??.

Para tanto, escolhamos  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^x$ , donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^x dx = e^x + C. \quad (5.374)$$

Escolhendo  $C = 0$  e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \int_{-1}^1 f(x) g'(x) dx \quad (5.375)$$

$$= f(x)g(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x)f'(x) dx \quad (5.376)$$

$$= x e^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \quad (5.377)$$

$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1 \quad (5.378)$$

$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \quad (5.379)$$

$$= 2e^{-1}. \quad (5.380)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>17</sup>:

```
>>> integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
-1
2·e
```

◇

## Exercícios

**E 5.5.1.** Calcule

a)  $\int x \sin(x) dx$

b)  $\int x \cos(x) dx$

c)  $\int x^2 \ln(x) dx$

**E 5.5.2.** Calcule

$$\int \log_2(x) dx. \quad (5.381)$$

---

<sup>17</sup>Veja a Observação ??.

**E 5.5.3.** Calcule

a)  $\int x^2 e^x dx$

b)  $\int x^2 \sin(x) dx$

**E 5.5.4.** Calcule

$$\int \cos(x) e^x dx. \quad (5.382)$$

**E 5.5.5.** Calcule

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$

b)  $\int_{-\pi}^0 x \cos(x) dx$

c)  $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

**E 5.5.6.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx. \quad (5.383)$$

## 5.6 Integração por frações parciais

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

Em construção ...

### Exercícios

Em construção ...

## 5.7 Integração por substituição trigonométrica

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

Em construção ...

### Exercícios

Em construção ...

## Capítulo 6

# Aplicações da integral

**Observação 6.0.1.** Nos códigos [Python](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
init_session()
```

### 6.1 Cálculo de áreas

A integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  está associada a área entre o gráfico da função  $f$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[a, b]$  (Veja Seção ??). Ocorre que se  $f$  for não negativa, então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Se  $f$  for negativa, então  $\int_a^b f(x) dx < 0$ . Por isso, dizemos que  $\int_a^b f(x) dx$  é a **área líquida** (ou com sinal) entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

**Exemplo 6.1.1.** Vamos calcular a área total entre o gráfico de  $f(x) = (x - 1)^3$  e o eixo das abscissas, restrito ao intervalo  $[0, 2]$ .

Começamos fazendo o estudo de sinal de  $f$  no intervalo. Como  $x - 1 \leq 0$  para  $x \leq 1$  e  $x - 1 \geq 0$  para  $x \geq 1$ , temos que  $f(x) < 0$  em  $[0, 1]$  e  $f(x) > 0$  em  $[1, 2]$ . Logo, a área total é dada por

$$A = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx. \quad (6.1)$$

]



Agora, usando a substituição  $u = x - 1$ , temos  $du = dx$  e segue que

$$\int f(x) dx = \int (x - 1)^3 dx \quad (6.2)$$

$$= \int u^3 du \quad (6.3)$$

$$= \frac{u^4}{4} + C \quad (6.4)$$

$$= \frac{(x - 1)^4}{4} + C. \quad (6.5)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad (6.6)$$

$$= - \left[ \frac{(x - 1)^4}{4} \right]_0^1 + \left[ \frac{(x - 1)^4}{4} \right]_1^2 \quad (6.7)$$

$$= - \left[ \frac{(1 - 1)^4}{4} - \frac{(0 - 1)^4}{4} \right] + \left[ \frac{(2 - 1)^4}{4} - \frac{(1 - 1)^4}{4} \right] \quad (6.8)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (6.9)$$

No [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos<sup>1</sup>:

```
>>> -integrate((x-1)**3,(x,0,1))+integrate((x-1)**3,(x,1,2))
1/2
```

### 6.1.1 Áreas entre curvas

Observamos que se  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (6.10)$$

corresponde à área entre as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  restritas ao intervalo  $[a, b]$ . Ou seja, fazendo  $h(x) = f(x) - g(x)$ , temos que

$$\int_a^b h(x) dx \quad (6.11)$$

---

<sup>1</sup>Veja a Observação ??.

é a área entre essas curvas restritas ao intervalo  $[a, b]$ . Ainda, se  $f(x) \leq g(x)$ , entre a área entre elas é dada por

$$-\int_a^b h(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \quad (6.12)$$

**Exemplo 6.1.2.** Vamos calcular a área entre as curvas  $y = (x-1)^3$ ,  $y = x-1$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

Começamos definindo  $h(x) = (x-1)^3 - (x-1)$ . A fim de fazermos o estudo de sinal de  $h$ , identificamos seus zeros.

$$h(x) = (x-1)^3 - (x-1) \quad (6.13)$$

$$= (x-1) [(x-1)^2 - 1] \quad (6.14)$$

$$= (x-1)(x^2 - 2x) \quad (6.15)$$

$$= (x-1) \cdot x \cdot (x-2). \quad (6.16)$$

Ou seja,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$  são as raízes de  $h$ . Daí, segue seu estudo de sinal:

	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$
$(x-1)$	-	+
$x$	+	+
$(x-2)$	-	-
$h(x)$	+	-

Assim, temos que a área desejada pode ser calculada como

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx. \quad (6.17)$$

Agora, calculamos a integral de  $h$ , i.e.

$$\int h(x) dx = \int (x-1)^3 - (x-1) dx \quad (6.18)$$

$$= \int (x-1)^3 dx - \int x dx + \int dx \quad (6.19)$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C. \quad (6.20)$$

Por fim, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx \quad (6.21)$$

$$= \left[ \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \left[ \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \quad (6.22)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.24)$$

No [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos<sup>2</sup>:

```
>>> f = (x-1)**3-(x-1)
>>> integrate(f,(x,0,1))-integrate(f,(x,1,2))
1/2
```

## Exercícios resolvidos

**ER 6.1.1.** Calcule a área entre a reta  $y = 1$  e o gráfico de  $f(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ .

**Solução.** Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado  $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$  descontada a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  restrita ao intervalo  $[0,1]$ . Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2 dx \quad (6.25)$$

$$= 1 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad (6.26)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6.27)$$

◇

**ER 6.1.2.** Calcule a área entre as curvas  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ .

---

<sup>2</sup>Veja a Observação ??.

**Solução.** O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ . Como  $f(x) \geq g(x)$  neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) dx \quad (6.28)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx \quad (6.29)$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \quad (6.30)$$

$$= \frac{1}{6}. \quad (6.31)$$

◇

**ER 6.1.3.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3 - x$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1,1]$ .

**Solução.** Para calcularmos a área entre o gráfico de  $f(x)$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1,1]$ , fazemos:

1. O estudo de sinal de  $f$  no intervalo  $[-1,1]$ .

(a) Cálculo das raízes de  $f$  no intervalo  $[-1,1]$ .

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (6.33)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \quad (6.34)$$

(b) Os sinais de  $f(x)$ .

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (6.35)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (6.36)$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

(a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^3 - x dx \quad (6.37)$$

$$= \int x^3 dx - \int x dx \quad (6.38)$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \quad (6.39)$$

(b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (6.40)$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \quad (6.41)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.42)$$

Podemos computar a solução deste exercícios usando os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>3</sup>. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

◇

## Exercícios

**E 6.1.1.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3$  e a reta  $y = 1$  restritas ao intervalo  $[-1, 1]$ .

**E 6.1.2.** Calcule a área entre as curvas  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

---

<sup>3</sup>Veja Observação ??.

## **6.2 Volumes por fatiamento e rotação**

Em construção ...

### **Exercícios resolvidos**

Em construção ...

### **Exercícios**

Em construção ...

## **6.3 Problema de valor inicial**

Em construção ...

### **Exercícios resolvidos**

Em construção ...

### **Exercícios**

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; Imagem:  $(-\infty, \infty)$

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; Imagem:  $[1, \infty)$ .

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ; Imagem:  $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ .

**E 1.2.0.**  $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

**E 1.2.0.** não há.

**E 1.3.1.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.3.2.** a) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.3.3.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.4.1.**  $-1, 0, 2$

**E 1.4.2.**  $9/4$

**E 1.5.3.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

**E 1.6.1.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**E 1.6.2.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**E 1.7.1.**  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$ ; domínio:  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ .

**E 1.7.2.** Dica: verifique sua resposta com um pacote de matemática simbólica, por exemplo, com o [SymPy](#).

**E 1.8.1.** decrescente:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ; crescente:  $[-1, 1]$ .

**E 1.8.2.** função ímpar

**E 1.8.3.**  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ ; domínio  $[-1, \infty)$

**E 1.9.1.** Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

**E 1.10.1.** Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar o esboço de seu gráfico. Domínio:  $(2, \infty)$ .

**E 1.10.2.** 0

**E 2.1.1.** a)  $-1$ ; b)  $-1$ ; c)  $2$ ; d)  $\#$

**E 2.1.2.** a)  $-\frac{3}{2}$ ; b)  $-1$ ; c)  $-1$

**E 2.1.3.** a)  $2$ ; b)  $2$ ; c)  $-3$ ; d)  $\pi$



**E 2.1.4.** a) 2; b) -2; c) -3; d)  $e$

**E 2.2.1.** a) 2; b)  $2\pi$ ; c)  $-2e^{\sqrt{2}}$

**E 2.2.2.** a)  $-3/2$ ; b)  $5/2$ ; c)  $-3$

**E 2.2.3.** a)  $-6$ ; b)  $-3$ ;

**E 2.2.4.** a)  $2/3$ ; b)  $1/3$ ;

**E 2.2.5.** a) 2; b)  $-1$ ; c) 1

**E 2.2.6.** a) 6; b) 10; c) 12

**E 2.2.7.** a)  $1/2$ ; b)  $-1/3$ ;

**E 2.2.8.** a)  $\nexists$ ; b) 3;

**E 2.2.9.**  $-1/4$

**E 2.3.4.** a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f)  $\nexists$

**E 2.3.5.** a) 2; b) 2; c) 2

**E 2.3.6.** a) 2; b) 3; c)  $\nexists$

**E 2.3.7.**  $-\frac{1}{2}$

**E 2.3.8.** 0; Não está definido, pois o domínio de  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  é  $[-1, 1]$ .

**E 2.4.1.** 2

**E 2.4.2.** a) 1; b) 3; c)  $-1$ ; d)  $e$

**E 2.4.3.**  $-1/2$

**E 2.4.4.** não existe.

**E 2.4.5.** a) 1; b)  $-3$

**E 2.5.1.**  $\infty$

**E 2.5.2.**  $x = 2$ ;  $x = -2$

**E 2.5.3.**  $\infty$

**E 2.5.4.**  $-\infty$

**E 2.6.1.**  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

**E 2.6.2.**  $(1, 2) \cup (3, \infty)$ .

**E 2.6.3.** 0

**E 2.7.3.** 1

**E 2.7.4.** 0

**E 2.7.5.** 0

**E 2.7.6.** 0

**E 2.7.7.**  $\frac{1}{2}$

**E 2.8.1.**  $\infty$

**E 2.8.2.** a)  $\infty$ ; b) 0

**E 3.1.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**E 3.1.2.** a)  $-1$ ; b)  $-2$ ; c)  $e$

**E 3.1.3.** a)  $-1$ ; b)  $-2$ ; c)  $e$

**E 3.1.4.** reta secante:  $y = -3x + 7$ ; reta tangente:  $y = -2x + 6$ ; dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

**E 3.1.5.** a)  $1000 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ ; b)  $30 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ ; c)  $-970 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ .

**E 3.2.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**E 3.2.2.** a) 2; b)  $-3$ ; c)  $\sqrt{e}$

**E 3.2.3.**  $f'(x) = 2x - 2$

**E 3.2.4.**  $(1, \infty)$

**E 3.2.5.** a)  $2x - 3x^2$ ; b)  $2 - 6x$ ; c)  $-6$ ; d) 0; e) 0

**E 3.3.1.** a)  $f'(x) = -15x^2$ ; b)  $g'(x) = -24x^2 + 8x + 4$ ; c)  $h'(x) = \frac{4}{x^2} - 2x \ln(2x - 1) - \ln(2x - 1)^2$

**E 3.3.1.** a)  $f'(x) = (1+x)e^x$ ; b)  $g'(x) = (1+2x)e^{2x}$ ; c)  $h'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

**E 3.3.1.** a)  $f'(x) = 2/x$ ; b)  $g'(x) = \ln x^2 + 2$ ; c)  $h'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

**E 3.3.1.**  $y = x - 1$

**E 3.4.1.** a)  $f'(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ ; b)  $g'(x) = \sin(x) \cdot (2 - 3\sin^2(x))$ ;  
c)  $h'(x) = 2\cos(x)$

**E 3.4.2.**  $y = 1$ . Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

**E 3.4.3.** a)  $f'(x) = \sec^2(x) + \operatorname{cosec}^2(x)$ ; b)  $g'(x) = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotg}(x)$ ;  
c)  $h'(x) = \frac{1}{2} \sec^2(x)$

**E 3.5.0.** a)  $f'(x) = 18(2x - 3)^8$ ; b)  $g'(x) = -\frac{102}{(2x - 3)^{52}}$ ;

**E 3.5.0.** a)  $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-1} \ln 2$ ; b)  $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ .

**E 3.5.0.** a)  $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ ; b)  $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$ ; c)  $h'(x) = 2\sec^2(2x)$ ; d)  $u'(x) = \operatorname{cosec}^2(3 - x)$ ; e)  $v'(x) = -\frac{2}{x^2} \sec\left(\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ;  
f)  $z'(x) = -(5 + 2x) \operatorname{cosec}(5x + x^2) \operatorname{cotg}(5x + x^2)$

**E 3.5.1.**  $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{4}$

**E 3.6.1.** a)  $f'(x) = \frac{2}{x \ln 2}$ ; b)  $g'(x) = \frac{1+x}{x}$

**E 3.6.2.** a)  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ; b)  $g'(x) = 2e(1 + 2x)^{e-1}$

**E 3.6.3.**  $x(1 + x)^{x-1} + (1 + x)^x \ln(1 + x)$

**E 3.6.4.**  $y = x$

**E 4.1.1.** 1

**E 4.1.2.**  $\infty$

**E 4.1.3.**  $\infty$

**E 4.1.4.**  $e$

**E 4.2.1.**  $x = -1$  ponto de mínimo global;  $x = 1$  ponto de máximo local;  $x = 2$  ponto de mínimo local;  $x = \frac{5}{2}$  ponto de máximo global.

**E 4.2.2.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = -1$  ponto de máximo global;  $x = 1$  ponto de mínimo local e global; c)  $f(-1) = 6$  valor máximo global;  $f(1) = 2$  valor mínimo local e global;

**E 4.2.3.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = 1$  ponto de máximo local e global;  $x = 3$  ponto de mínimo global; c)  $f(1) = 2$  valor máximo local e global;  $f(3) = -2$  valor mínimo global;

**E 4.2.4.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = 0$  ponto de mínimo global; c)  $f(0) = 0$  valor mínimo global;

**E 4.2.5.** a)  $x = 0$ ; b)  $x = -1$  ponto de mínimo global;  $x = 1$  ponto de máximo global; c)  $f(-1) = -1$  valor mínimo global;  $f(1) = 1$  valor máximo global;

**E 4.3.1.** Decrescente:  $(-\infty, 1]$ ; Crescente:  $[1, \infty)$

**E 4.3.2.** Decrescente:  $[-1, 1]$ ; Crescente:  $(-\infty, -1]$ ;  $[1, \infty)$

**E 4.3.3.** Crescente:  $(0, \infty)$

**E 4.4.1.**  $x = 1$  ponto de mínimo global

**E 4.4.2.**  $x_1 = -1$  ponto de máximo local;  $x_2 = 1$  ponto de mínimo local;

**E 4.4.3.**  $x_1 = 0$  ponto de máximo local;  $x_2 = 2/5$  ponto de mínimo local;

**E 4.5.1.**  $x = 1$  ponto de mínimo global

**E 4.5.2.**  $x_1 = -1$  ponto de máximo local;  $x_2 = 1$  ponto de mínimo local;

**E 4.5.3.**  $x_1 = 0$  ponto de máximo local;  $x_2 = 2/5$  ponto de mínimo local;

**E 4.5.4.**  $f'(x) = -4x^3$ ,  $f'(0) = 0$ . Pelo teste da 1. derivada, temos que  $x = 0$  é ponto de máximo local.  $f''(x) = -12x^2$ ,  $f''(0) = 0$ .

**E 5.1.0.** A integral definida

$$\int_0^x t \, dt \quad (5.14)$$

é a área sob o gráfico de  $f(t) = t$  restrita no intervalo  $[0, x]$ . Isto é, a área do triângulo retângulo de base  $x$  e altura  $x$ . Logo,

$$F(x) = \int_0^x t \, dt = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}. \quad (5.15)$$

Ou seja, temos  $F(x) = x^2/2$  e, portanto,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x. \quad (5.16)$$

**E 5.1.1.** 6

**E 5.1.2.** 6

**E 5.1.3.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ ;  $F'(x) = x + 1$ .

**E 5.1.4.** Dica: a soma de Riemann é uma aproximação da área líquida sob o gráfico da função.

**E 5.1.5.** Dica:  $\int_a^b f(x) dx$  é a área líquida sob o gráfico da função.

**E 5.1.6.**  $-3$

**E 5.1.7.**  $0$

**E 5.2.1.** a)  $0$ ; b)  $3$ ; c)  $-5/2$

**E 5.2.2.** a)  $6$ ; b)  $6$ ; c)  $2$

**E 5.2.3.**  $4/3$

**E 5.2.4.**  $y = \sin(x) + 1$

**E 5.3.1.** a)  $x + C$ ; b)  $-\frac{1}{x} + C$ ; c)  $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ ; d)  $2x^{1/2} + C$

**E 5.3.2.** a)  $x - \frac{1}{x} + C$ ; b)  $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$

**E 5.3.3.** a)  $2\sin(x) + C$ ; b)  $x + \cos(x) + C$

**E 5.3.4.**  $0$

**E 5.3.5.**  $1/2$

**E 5.4.1.** a)  $\frac{-\cos(2x)}{2} + C$ ; b)  $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$ ; c)  $\frac{\sin^2(x)}{2} + C$

**E 5.4.2.**  $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

**E 5.4.3.**  $1/2$

$$\text{E 5.4.4. } \frac{3 \ln^2(x)}{2} + C$$

$$\text{E 5.4.5. } \frac{7}{2}$$

$$\text{E 5.4.6. } 4$$

$$\text{E 5.4.7. } \frac{1}{2}$$

$$\text{E 5.4.10. } \frac{x}{2} + \frac{\sin(x) \cos(x)}{2} + C$$

$$\text{E 5.5.1. a) } \sin(x) - x \cos(x) + C; \text{ b) } \cos(x) + x \sin(x) + C; \text{ c) } \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\text{E 5.5.2. } \frac{x \ln(x)}{\log_2(x)} - \frac{x}{\log_2(x)} + C$$

$$\text{E 5.5.3. a) } (x^2 - 2x + 2)e^x + C; \text{ b) } -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C$$

$$\text{E 5.5.4. } \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2} e^x + C$$

$$\text{E 5.5.5. a) } 1; \text{ b) } 2; \text{ c) } \frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$$

$$\text{E 5.5.6. } -\frac{5}{e} + e$$

$$\text{E 6.1.1. } 2$$

$$\text{E 6.1.2. } 1$$