

# Cálculo I

Pedro H A Konzen

13 de dezembro de 2022

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Sumário

|  |          |
|--|----------|
| Capa   | i        |
| Licença  | ii       |
| Prefácio   | iii      |
| Sumário  | vii      |
| <b>1 Limites</b>   | <b>1</b> |
| 1.1 Noção de limites                                     | 1        |
| 1.1.1 Limites da função constante e da função identidade | 4        |
| 1.2 Regras para o cálculo de limites                     | 10       |
| 1.2.1 Regras de cálculo                                  | 10       |
| 1.2.2 Indeterminação $0/0$                               | 14       |
| 1.3 Limites laterais                                     | 21       |
| 1.4 Limite no infinito                                   | 32       |
| 1.4.1 Assíntotas horizontais                             | 36       |
| 1.4.2 Limite no infinito de função periódica             | 38       |
| 1.5 Limites infinitos                                    | 43       |
| 1.5.1 Assíntotas verticais                               | 48       |
| 1.5.2 Assíntotas oblíquas                                | 51       |
| 1.5.3 Limites infinitos no infinito                      | 53       |
| 1.6 Continuidade   | 58       |
| 1.6.1 Definição de função contínua                       | 58       |
| 1.6.2 Propriedades de funções contínuas                  | 61       |
| 1.7 Limites e desigualdades                              | 66       |
| 1.7.1 Limites de funções limitadas                       | 67       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 1.7.2    | Teorema do confronto                                 | 67         |
| 1.7.3    | Limites envolvendo $(\sin x)/x$                      | 70         |
| 1.8      | Exercícios finais                                    | 74         |
| <b>2</b> | <b>Derivadas</b>                                     | <b>75</b>  |
| 2.1      | Derivada no ponto                                    | 75         |
| 2.1.1    | Reta secante e reta tangente                         | 75         |
| 2.1.2    | Taxa de variação                                     | 79         |
| 2.1.3    | Derivada em um ponto                                 | 81         |
| 2.2      | Função derivada                                      | 85         |
| 2.2.1    | Continuidade de uma função derivável                 | 90         |
| 2.2.2    | Derivadas de ordens mais altas                       | 91         |
| 2.3      | Derivada de Funções Constante, Identidade e Potência | 96         |
| 2.3.1    | Derivada de Função Constante                         | 96         |
| 2.3.2    | Derivada de Função Identidade                        | 97         |
| 2.3.3    | Derivada de Função Potência                          | 98         |
| 2.3.4    | Lista de derivadas                                   | 100        |
| 2.4      | Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas      | 102        |
| 2.4.1    | Número de Euler                                      | 103        |
| 2.4.2    | Derivada de Funções Exponenciais                     | 104        |
| 2.4.3    | Derivada de Funções Logarítmicas                     | 106        |
| 2.4.4    | Lista de derivadas                                   | 107        |
| 2.5      | Regras Básicas de Derivação                          | 109        |
| 2.5.1    | Regras da multiplicação por constante e da soma      | 110        |
| 2.5.2    | Regras do produto e do quociente                     | 112        |
| 2.5.3    | Lista de derivadas                                   | 115        |
| 2.6      | Derivadas de funções trigonométricas                 | 119        |
| 2.6.1    | Lista de derivadas                                   | 123        |
| 2.7      | Regra da cadeia                                      | 126        |
| 2.7.1    | Lista de derivadas                                   | 129        |
| 2.8      | Diferenciabilidade da função inversa                 | 134        |
| 2.8.1    | Derivadas de funções trigonométricas inversas        | 136        |
| 2.8.2    | Lista de derivadas                                   | 138        |
| 2.9      | Derivação implícita                                  | 142        |
| <b>3</b> | <b>Aplicações da derivada</b>                        | <b>149</b> |
| 3.1      | Regra de L'Hôpital                                   | 149        |
| 3.2      | Extremos de funções                                  | 154        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.3      | Teorema do valor médio                          | 163        |
| 3.3.1    | Teorema de Rolle                                | 163        |
| 3.3.2    | Teorema do valor médio                          | 167        |
| 3.4      | Teste da primeira derivada                      | 172        |
| 3.5      | Concavidade e o Teste da segunda derivada       | 177        |
| 3.5.1    | Teste da segunda derivada                       | 179        |
| <b>4</b> | <b>Integração</b>                               | <b>184</b> |
| 4.1      | Noção de integral                               | 184        |
| 4.1.1    | Soma de Riemann                                 | 184        |
| 4.1.2    | Integral  | 186        |
| 4.2      | Propriedades de integração                      | 190        |
| 4.2.1    | Teorema do valor médio                          | 191        |
| 4.2.2    | Teorema fundamental do cálculo, parte I         | 192        |
| 4.2.3    | Integral indefinida                             | 194        |
| 4.2.4    | Teorema fundamental do cálculo, parte II        | 196        |
| 4.3      | Regras básicas de integração                    | 201        |
| 4.3.1    | Integral de função potência                     | 201        |
| 4.3.2    | Regras da multiplicação por constante e da soma | 202        |
| 4.3.3    | Integral de $1/x$                               | 204        |
| 4.3.4    | Integral da função exponencial natural          | 204        |
| 4.3.5    | Integrais de funções trigonométricas            | 205        |
| 4.3.6    | Tabela de integrais                             | 206        |
| 4.3.7    | Exercícios                                      | 207        |
| 4.4      | Integração por substituição                     | 208        |
| 4.4.1    | Integral de função exponencial                  | 210        |
| 4.4.2    | Integral de funções trigonométricas             | 211        |
| 4.4.3    | Integrais definidas                             | 215        |
| 4.4.4    | Tabela de integrais                             | 216        |
| 4.5      | Integração por partes                           | 222        |
| 4.5.1    | A integral do logaritmo natural                 | 224        |
| 4.5.2    | Integral definida                               | 226        |
| 4.5.3    | Tabela de integrais                             | 227        |
| 4.6      | Integração por substituição trigonométrica      | 231        |
| 4.7      | Integração por frações parciais                 | 237        |
| 4.7.1    | Raízes reais distintas                          | 238        |
| 4.7.2    | Raízes reais múltiplas                          | 240        |
| 4.7.3    | Raízes complexas                                | 241        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.8      | Integrais Impróprias . . . . .                     | 244        |
| 4.8.1    | Limites de integração infinitos . . . . .          | 245        |
| 4.8.2    | Integrandos com descontinuidade infinita . . . . . | 247        |
| <b>5</b> | <b>Aplicações da integral</b>                      | <b>251</b> |
| 5.1      | Cálculo de áreas . . . . .                         | 251        |
| 5.1.1    | Áreas entre curvas . . . . .                       | 254        |
| 5.2      | Volumes por fatiamento e rotação . . . . .         | 260        |
| 5.3      | Problema de valor inicial . . . . .                | 261        |
|          | <b>Respostas dos Exercícios</b>                    | <b>262</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                  | <b>274</b> |

# Capítulo 1

## Limites

### 1.1 Noção de limites

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto  $x_0$ , exceto talvez em  $x_0$ . Quando o valor de  $f(x)$  é **arbitrariamente próximo** de um número  $L$  para  $x$  **suficientemente próximo** de  $x_0$ , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (1.1)$$

e dizemos que o **limite da função  $f$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$** . Veja a Figura 1.1.



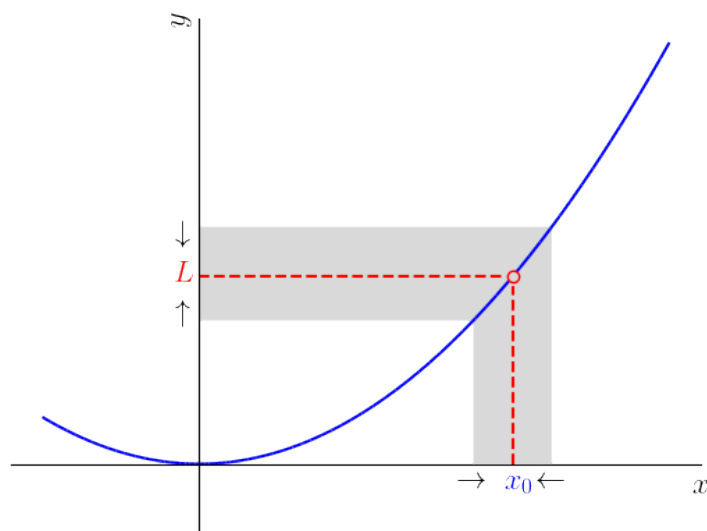


Figura 1.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

**Exemplo 1.1.1.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (1.2)$$

Na Figura 1.2, temos um esboço do gráfico desta função.



Figura 1.2: Esboço do gráfico da função  $f(x)$  dada no Exemplo 1.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

|        |       |        |         |                            |        |       |      |
|--------|-------|--------|---------|----------------------------|--------|-------|------|
| $x$    | -0,01 | -0,001 | -0,0001 | $\rightarrow 0 \leftarrow$ | 0,0001 | 0,001 | 0,01 |
| $f(x)$ | 0,99  | 0,999  | 0,9999  | $\rightarrow 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol('x')
3      ...: f = Lambda(x, (x**2-1)*(x-2)/ \
4      ...:                ((x-1)*(x-2)))
5      ...: limit(f(x), x, 0)
6      Out: 1

```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , embora  $f(1)$  não esteja definido.

|        |     |      |       |                            |        |       |      |
|--------|-----|------|-------|----------------------------|--------|-------|------|
| $x$    | 0,9 | 0,99 | 0,999 | $\rightarrow 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |
| $f(x)$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | $\rightarrow 2 \leftarrow$ | 2,0001 | 2,001 | 2,01 |

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , embora  $f(2)$  também não esteja definido. Verifique!

### 1.1.1 Limites da função constante e da função identidade

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (1.3)$$

seja qual for a constante  $k$ . Veja a Figura 1.3.

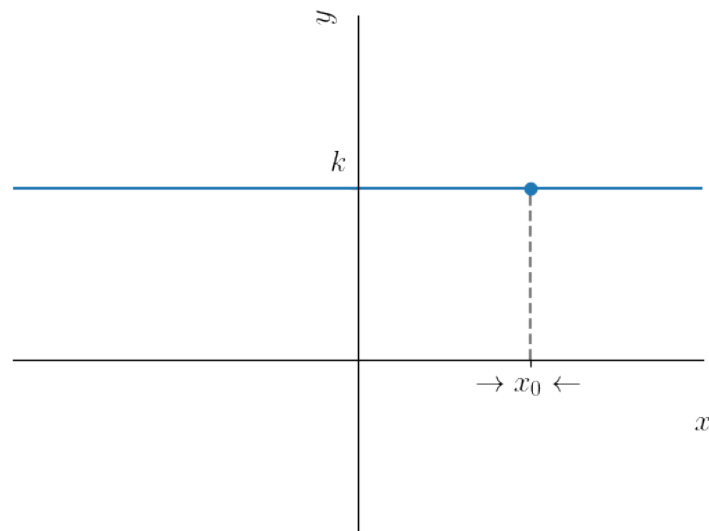


Figura 1.3: Esboço do gráfico de uma função constante  $f(x) = k$ .

**Exemplo 1.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$  No [Python](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol("x")
3      ...: limit(1, x, -1)
4      ...:
5      Out: 1
```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sqrt{2} - e) = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (1.4)$$

seja qual for o ponto  $x_0$ . Vejamos a Figura 1.4.

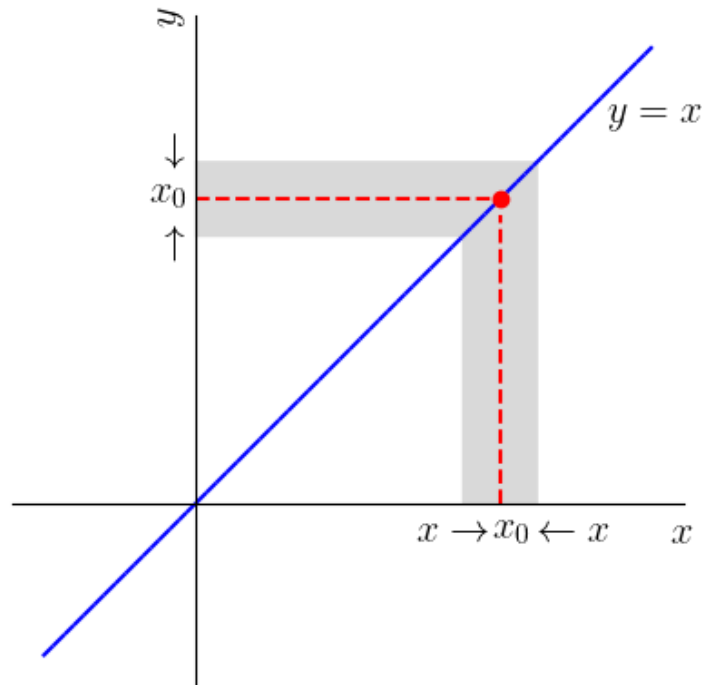


Figura 1.4: Noção de limite para a função identidade  $f(x) = x$ .

**Exemplo 1.1.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$  Com o [Python](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol("x")
3      ...: limit(x, x, -1)
4      ...:
5      Out: -1
```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

**Exercícios resolvidos**

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.1.1.** Estime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x. \quad (1.5)$$

**Solução.** Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto  $x_0$ , computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

|        |       |       |       |                               |        |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------------------------------|--------|-------|-------|
| $x$    | 0,9   | 0,99  | 0,999 | $\rightarrow 1 \leftarrow$    | 1,0001 | 1,001 | 1,01  |
| $f(x)$ | 2,460 | 2,691 | 2,716 | $\rightarrow 2,72 \leftarrow$ | 2,719  | 2,721 | 2,746 |

Com isso, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x \approx 2,72. \quad (1.6)$$

Mais adiante, veremos que  $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \approx 2,718281828459045....$ Verifique usando [Python](#)+[SymPy](#)!

◇

**ER 1.1.2.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Solução.**

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de  $-2$  e a direita de  $-2$  (i.e.  $x > -2$ ), podemos observar que  $f(x) = 1$ . Para tais valores de  $x$  a esquerda de  $-2$  (i.e.  $x < -2$ ), vemos que os valores de  $f(x)$  tornam-se próximos de  $1$ . Isto é, temos que os valores de  $f(x)$  podemos ser tomados arbitrariamente próximos de  $L = 1$ , se tomarmos  $x$  suficientemente próximo de  $-2$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1. \quad (1.7)$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Mesmo sendo  $f(-1) = 2$ , observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de  $1$ , se escolhemos valores de  $x$  sufi-

cientemente próximos de  $-1$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1. \quad (1.8)$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Aqui, para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0 = 1$  e a esquerda ( $x < 1$ ), vemos que os valores de  $f(x)$  são próximos de  $L = 2$ . Entretanto, para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0 = 1$  e a direita ( $x > 1$ ), temos que os valores de  $f(x)$  são próximos de  $L = 1$ . Ou seja, não é possível escolher um valor  $L$  tal que  $f(x)$  esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos  $x$  suficientemente próximo de  $x_0 = 1$ , pois  $L$  dependerá de  $x$  estar a esquerda ou a direita de do ponto  $x_0 = 1$ . Concluimos que este limite não existe, e escrevemos

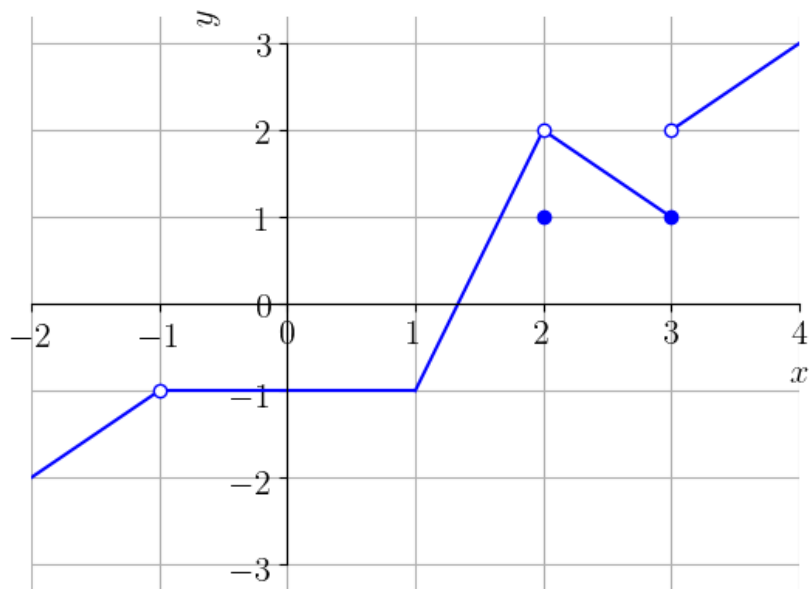
$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (1.9)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.1.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço



de gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**Exercício 1.1.2.** Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício 1.1.1), forneça

- 1.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$
- 2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

**Exercício 1.1.3.** Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 2$



- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} 2$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3$
- d)  $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

**Exercício 1.1.4.** Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} x$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -3} x$
- d)  $\lim_{x \rightarrow e} x$

**Exercício 1.1.5.** Com base na noção de limites, calcule:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} |x|$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} |x|$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 10^{-10}} |x|$

## 1.2 Regras para o cálculo de limites

### 1.2.1 Regras de cálculo

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad (1.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \quad (1.11)$$

com  $x_0, L_1, L_2$  números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (1.12)$$

$$= k \cdot L_1, \quad (1.13)$$

para qualquer número real  $k$ .

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.14)$$

$$= L_1 \pm L_2 \quad (1.15)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.16)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (1.17)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (1.18)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0 \quad (1.19)$$

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^s \quad (1.20)$$

$$= L_1^s, \quad L_1^s \in \mathbb{R} \quad (1.21)$$

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

**Exemplo 1.2.1.** Consideremos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (1.22)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (1.23)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(2*x,x,-1)

```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (1.24)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 1 \quad (1.25)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (1.26)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(x**2-1,x,2)

```

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2} \quad (1.27)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2} \quad (1.28)$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \quad (1.29)$$

$$= 1. \quad (1.30)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(sqrt(1-x**2),x,0)

```

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 - 1) \cdot (x - 2)]}{\lim_{x \rightarrow 0} [(x - 1) \cdot (x - 2)]} \quad (1.31)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)} \quad (1.32)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (1.33)$$

**Proposição 1.2.1.** (Limites de polinômios) Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (1.34)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) \quad (1.35)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0, \quad (1.36)$$

para qualquer dado número real  $b$ .

*Demonstração.* Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação.

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (1.37)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (1.38)$$

$$= a_n \left( \lim_{x \rightarrow b} x \right)^n + a_{n-1} \left( \lim_{x \rightarrow b} x \right)^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (1.39)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \quad (1.40)$$

□

**Exemplo 1.2.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \quad (1.41)$$

$$= 4 + \sqrt{2}. \quad (1.42)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

**Proposição 1.2.2.** (Limite de funções racionais) Sejam  $r(x) = p(x)/q(x)$  uma função racional e  $b$  um número real tal que  $q(b) \neq 0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (1.43)$$

*Demonstração.* Segue da regra do **limite do quociente** e da Proposição 1.2.1.

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (1.44)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (1.45)$$

□

**Exemplo 1.2.3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} \quad (1.46)$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \quad (1.47)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os comandos.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
```

## 1.2.2 Indeterminação 0/0

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1.48)$$

é uma **indeterminação do tipo 0/0**. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum  $(x - a)$ .

**Exemplo 1.2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)\cancel{(x - 2)}}{(x - 1)\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (1.49)$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3. \quad (1.50)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar o limite acima com os seguintes comandos.

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

**Exemplo 1.2.5.** No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (1.51)$$

temos que o denominador  $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  se anula em  $x = 1$ , assim como o denominador  $q(x) = x^2 + x - 2$ . Assim sendo,  $(x - 1)$  é um fator comum entre  $p(x)$  e  $q(x)$ . Para explicitá-lo, calculamos

$$\frac{p(x)}{x - 1} = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x - 1} \quad (1.52)$$

$$= x^2 - 2x - 3 \quad (1.53)$$

e

$$\frac{q(x)}{x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad (1.54)$$

$$= x + 2. \quad (1.55)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar estas divisões com os seguintes comandos.

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
4      simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad (1.56)$$

e

$$q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (1.57)$$

Com isso, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (1.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (1.59)$$

Use [Python+SymPy](#) para computar este limite!

**Exemplo 1.2.6.** No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (1.60)$$

temos uma indeterminação do tipo  $0/0$  envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (1.61)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (1.62)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (1.63)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (1.64)$$

Verifique computando com o [Python+SymPy](#).

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 1.2.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \quad (1.65)$$

**Solução.** Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - x^2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}} \quad (1.66)$$

$$= \frac{-1 - (-1)^2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3}} \quad (1.67)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \quad (1.68)$$

$$= -1. \quad (1.69)$$

◇

**ER 1.2.2.** Assumindo que o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$  e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (1.70)$$

forneça o valor de  $L$ .

**Solução.** Das propriedades de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1 \quad (1.71)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 2} = 1 \quad (1.72)$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{2 + 2} = 1 \quad (1.73)$$

$$\frac{L - 2}{4} = 1 \quad (1.74)$$

$$L - 2 = 4 \quad (1.75)$$

$$L = 6. \quad (1.76)$$

◇

**ER 1.2.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}. \quad (1.77)$$



**Solução.** Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - \sqrt{x^2 + 3} = 0. \quad (1.78)$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0, \quad (1.79)$$

concluimos se tratar de uma indeterminação  $0/0$ . Por racionalização, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{2 + \sqrt{x^2 + 3}} \quad (1.80)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{4 - (x^2 + 3)} \quad (1.81)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{1 - x^2} \quad (1.82)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{(1 + x)(1 - x)} \quad (1.83)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 3}}{1 - x} \quad (1.84)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (1.85)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.2.1.** Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad (1.86)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} 2 \cdot f(x).$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \pi \cdot f(x).$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x).$

**Exercício 1.2.2.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \quad (1.87)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{2}, \quad (1.88)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2g(x)$

**Exercício 1.2.3.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad (1.89)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2, \quad (1.90)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$

**Exercício 1.2.4.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \quad (1.91)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \quad (1.92)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

**Exercício 1.2.5.** Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad (1.93)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4, \quad (1.94)$$

calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{g(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

**Exercício 1.2.6.** Calcule os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} -3x$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

**Exercício 1.2.7.** Calcule os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

**Exercício 1.2.8.** Calcule os limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x + 2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

**Exercício 1.2.9.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x - 2}}{x - 6}. \quad (1.95)$$

**Exercício 1.2.10.** Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L \quad (1.96)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = M \quad (1.97)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + g(x) = L + M. \quad (1.98)$$

Justifique sua resposta.

## 1.3 Limites laterais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Seja dada uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(a, x_0)$ . O **limite lateral à esquerda** de  $f$  no ponto  $x_0$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (1.99)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x < x_0$ . Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (1.100)$$

quando  $f(x)$  é arbitrariamente próximo de  $L$ , para todo  $x < x_0$  suficientemente próximo de  $x_0$ . Veja a Figura 1.5.

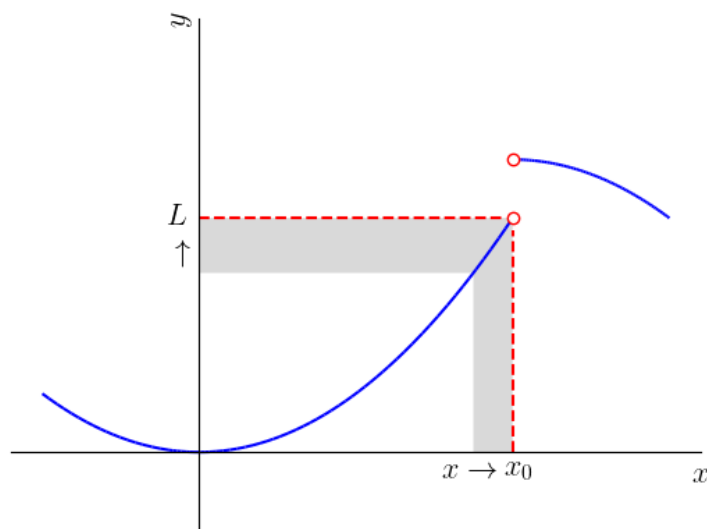


Figura 1.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(x_0, b)$ , o **limite lateral à direita** de  $f$  no ponto  $x_0$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (1.101)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x > x_0$ . Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad (1.102)$$

quando  $f(x)$  é arbitrariamente próximo de  $L$ , para todo  $x > x_0$  suficientemente próximo de  $x_0$ . Veja a Figura 1.6.

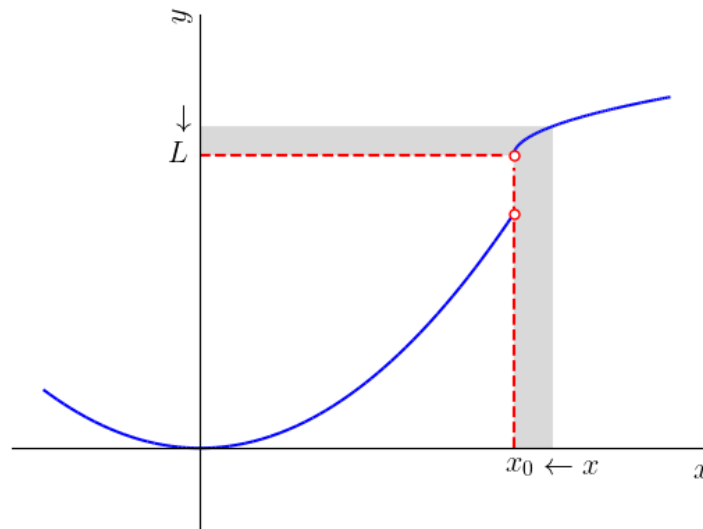


Figura 1.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

**Observação 1.3.1.** Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k = k \quad (1.103)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} x = x_0, \quad (1.104)$$

onde  $x_0$  e  $k$  são quaisquer dados números reais.

**Exercício 1.3.1.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (1.105)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (1.106)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de  $x = 0$ , trabalhamos com  $x < 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x \quad (1.107)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (1.108)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (1.109)$$

Verifique!

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos.

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(abs(x), x, 0, '-')
4      limit(abs(x), x, 0, '+')
```

**Teorema 1.3.1.** *Existe o limite de uma dada função  $f$  no ponto  $x = x_0$  e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (1.110)$$

*se, e somente se, existem e são iguais a  $L$  os limites laterais à esquerda e à direita de  $f$  no ponto  $x = x_0$ .*

**Exercício 1.3.2.** No exemplo anterior (Exemplo 1.3.1), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (1.111)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 1.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (1.112)$$

**Exercício 1.3.3.** Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (1.113)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (1.114)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (1.115)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (1.116)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (1.117)$$

Como os **limites laterais** à esquerda e à direita **são diferentes**, concluímos que **não existe o limite** de  $|x|/x$  no ponto  $x = 0$ .

Com o [Python+SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(abs(x)/x, x, 0)
```

fornece o valor 1 como saída.

**Observação 1.3.2.** As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad (1.118)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_2, \quad (1.119)$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = kL_1, \quad (1.120)$$

para qualquer número real  $k$ .

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (1.121)$$

$$= L_1 \pm L_2 \quad (1.122)$$



- regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) \quad (1.123)$$

$$= L_1 \cdot L_2 \quad (1.124)$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)} \quad (1.125)$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \quad (1.126)$$

desde que  $L_2 \neq 0$ .

- regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (f(x))^s = \left( \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \right)^s \quad (1.127)$$

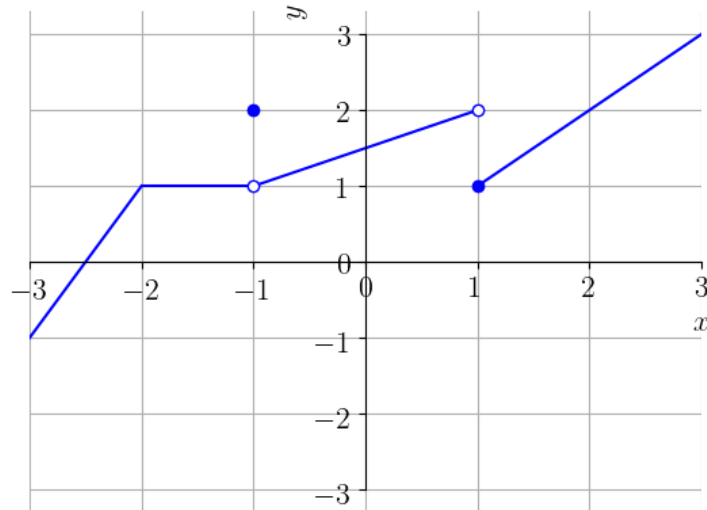
$$= L_1^s, \quad (1.128)$$

se, adicionalmente,  $L_1^s$  é um número real.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 1.3.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Solução.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Para valores  $x < -2$  e suficientemente próximos de  $-2$ , podemos observar que  $f(x)$  fica arbitrariamente próximo de  $1$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1. \quad (1.129)$$

- b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Mesmo sendo  $f(-1) = 2$ , observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de  $1$ , se escolhemos valores de  $x > -1$

e suficientemente próximos de  $-1$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad (1.130)$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de  $x < 1$  e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2. \quad (1.131)$$

Notamos também que, neste caso,  $f(x)$  não tende para  $f(1) = 1$  quando  $x$  tende a 1 pela esquerda.

d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de  $x > 1$  e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (1.132)$$

Aqui,  $f(x) \rightarrow f(1) = 1$  quando  $x \rightarrow 1^+$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (1.133)$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (1.134)$$

◇

**ER 1.3.2.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \quad (1.135)$$

**Solução.** A função  $f$  tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de  $x_0 = -1$ . Portanto, para calcularmos  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1)^2 - 1 \quad (1.136)$$

$$= (-1 + 1)^2 - 1 = -1, \quad (1.137)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \quad (1.138)$$

$$= -1. \quad (1.139)$$

Como ambos os limites laterais são iguais a  $-1$ , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \quad (1.140)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 1.3.4.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**Exercício 1.3.5.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \quad (1.141)$$

calcule

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**Exercício 1.3.6.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x + 1 & , x > 1, \end{cases} \quad (1.142)$$

calcule

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**Exercício 1.3.7.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2|x|}. \quad (1.143)$$

**Exercício 1.3.8.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2}. \quad (1.144)$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

**Exercício 1.3.9.** Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L \quad (1.145)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = M \quad (1.146)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + g(x) = L + M. \quad (1.147)$$

Justifique sua resposta.

## 1.4 Limite no infinito

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função  $f(x)$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $x \rightarrow \infty$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , se os valores de  $f(x)$  são **arbitrariamente próximos** de  $L$  para todos os valores de  $x$  **suficientemente pequenos**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (1.148)$$

Veja a Figura 1.7.

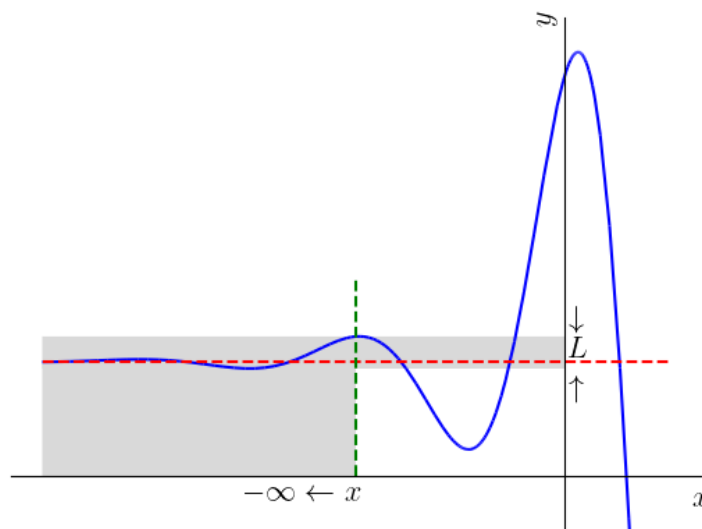


Figura 1.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando  $x \rightarrow -\infty$ .

Analogamente, dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende  $\infty$ , se os valores de  $f(x)$  são **arbitrariamente próximos** de  $L$  para todos os valores de  $x$  **suficientemente grandes**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (1.149)$$

Veja a Figura 1.8.

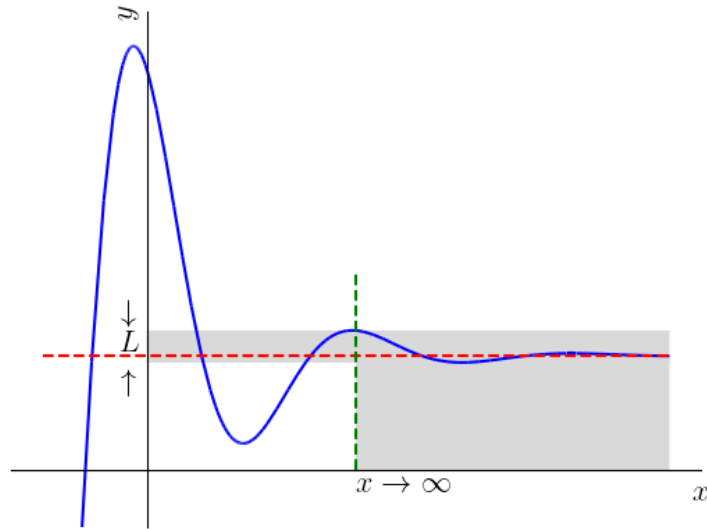


Figura 1.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando  $x \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 1.4.1.** Vamos inferir os limites de  $f(x) = 1/x$  para  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow \infty$ . A Figura 1.9 é um esboço do gráfico desta função.

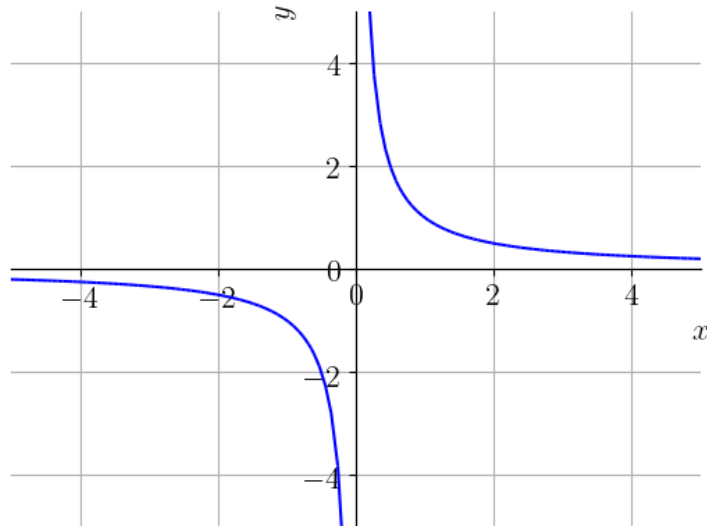


Figura 1.9: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/x$ .



Observamos que quanto menores os valores de  $x$ , mais próximos de 0 são os valores de  $f(x) = 1/x$ . Daí, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (1.150)$$

Também, quanto maiores os valores de  $x$ , mais próximos de 0 são os valores de  $f(x) = 1/x$ . Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (1.151)$$

Podemos computar estes limites com o [Python+SymPy](#), usando os seguintes comandos:

```
1  from sympy import *
2  x = Symbol("x")
3  limit(1/x,x,-oo)
4  limit(1/x,x,oo)
```

**Observação 1.4.1.** (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que  $L$ ,  $M$  e  $k$  são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad (1.152)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (1.153)$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (1.154)$$

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (1.155)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (1.156)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (1.157)$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (1.158)$$

**Exemplo 1.4.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (1.159)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (1.160)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (1.161)$$

**Exemplo 1.4.3.** Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (1.162)$$

Observamos que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador.

**Observação 1.4.2.** Dados dois polinômios  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ , temos<sup>1</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (1.163)$$

**Exemplo 1.4.4.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.4.3), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \quad (1.164)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (1.165)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (1.166)$$

---

<sup>1</sup>Demonstração é feita no Exercício 1.5.6.

### 1.4.1 Assíntotas horizontais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

A reta  $y = L$  é dita assíntota horizontal ao gráfico da função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (1.167)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (1.168)$$

**Exemplo 1.4.5.** No Exemplo 1.4.3, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (1.169)$$

Logo, temos que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (1.170)$$

Consulte a Figura 1.10.

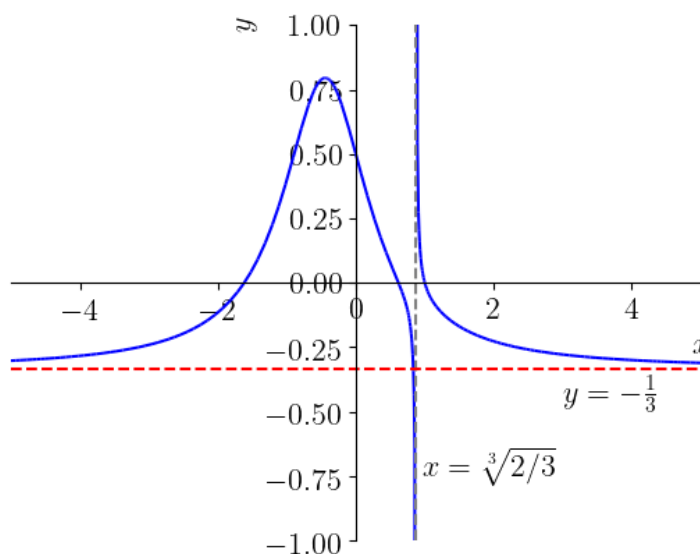


Figura 1.10: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$ .

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} \quad (1.171)$$

$$= -\frac{1}{3}. \quad (1.172)$$

O que reforça que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal desta função.

**Exemplo 1.4.6.** (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (1.173)$$

donde temos que  $y = 0$  é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 1.11.

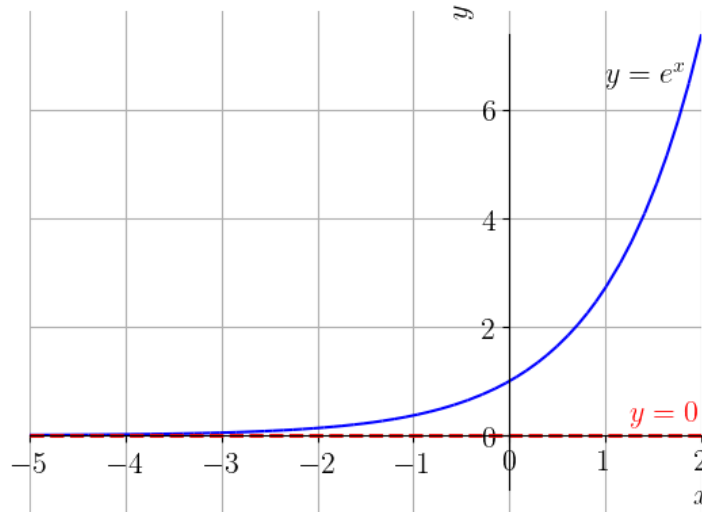


Figura 1.11: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^x$ .

**Exemplo 1.4.7.** (Função logística) Na ecologia, a função logística <sup>2</sup>

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt} \right)} \quad (1.174)$$

<sup>2</sup>Consulte mais em [Wikipédia](#).

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo  $P(t)$  o número de indivíduos da população no tempo  $t$ . O parâmetro  $P_0$  é o número de indivíduos na população no tempo inicial  $t = 0$ ,  $r > 0$  é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e  $K$  é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left( \frac{K - P_0}{P_0} e^{-rt} \right)} = K \quad (1.175)$$

Ou seja,  $P(t) = K$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $P = P(t)$  e é o limite de saturação do crescimento populacional. Na Figura 1.12, temos o esboço do gráfico da função logística para  $t \geq 0$ .

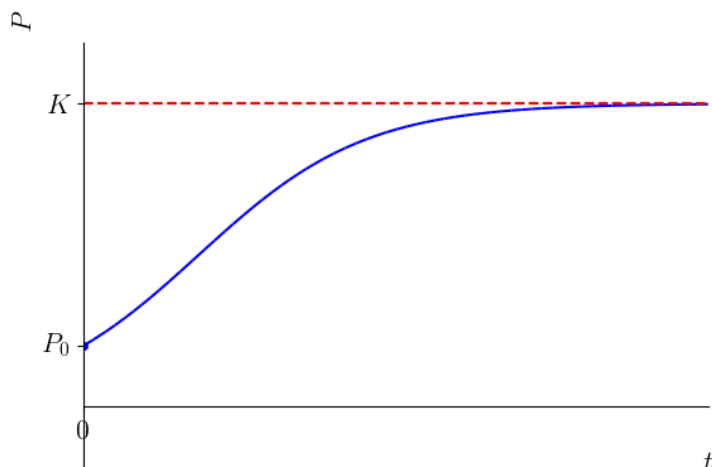


Figura 1.12: Esboço do gráfico da função logística.

### 1.4.2 Limite no infinito de função periódica

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Uma função  $f$  é periódica quando existe um número  $T$  tal que

$$f(x) = f(x + T), \quad (1.176)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  no domínio de  $f$ . As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas<sup>3</sup>.

O limite no infinito de funções periódicas não existe<sup>4</sup>. De fato, se  $f$  não é constante, então existem números  $x_1 \neq x_2$  tal que  $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ . Como a função é periódica,  $f(x_1 + kT) = y_1$  e  $f(x_2 + kT) = y_2$  para todo número inteiro  $k$ . Desta forma, não existe número  $L$  que possamos tomar  $f(x)$  arbitrariamente próxima, para todos os valores de  $x$  suficientemente grandes (ou pequenos).

**Exemplo 1.4.8.** Não existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x), \quad (1.177)$$

pois os valores de  $\sin x$  oscilam periodicamente no intervalo  $[-1, 1]$ . Veja a Figura 1.13.

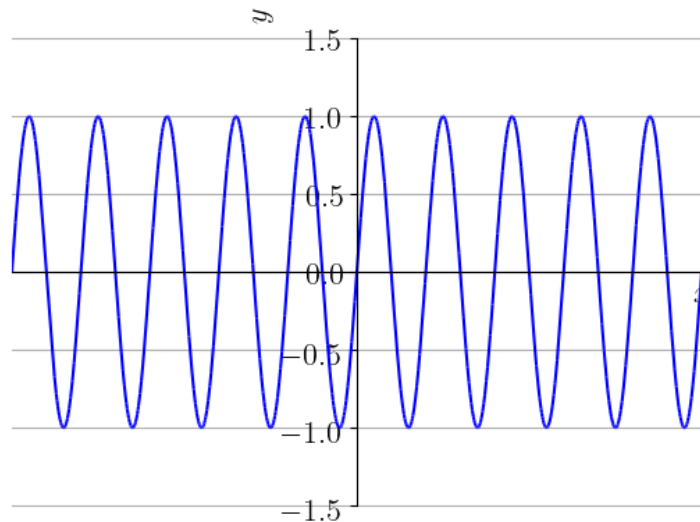


Figura 1.13: Esboço do gráfico de  $f(x) = \sin x$ .

Com o [Python+SymPy](#), ao computarmos  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  com o comando:

<sup>3</sup>Consulte mais nas [Notas de Aula - Pré-Cálculo - Funções Trigonômicas](#)

<sup>4</sup>À exceção de funções constantes.

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(sin(x), x, oo)

```

obtemos como saída o intervalo  $[-1, 1]$ , indicando que o limite não existe, pois  $\sin x$  oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.4.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1. \quad (1.178)$$

**Solução.** Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \quad (1.179)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-1} \right) + 1, \quad (1.180)$$

observando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-1)$  existe. De fato, o gráfico de  $g(x) = 1/(x-1)$  é uma translação de uma unidade à esquerda da função  $f(x) = 1/x$ . Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para  $x \rightarrow \infty$ . Portanto, como  $f(x) = 1/x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , temos que  $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (1.181)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (1.182)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol("x")
3      limit(1/(x-1)+1, x, oo)

```

◇

**ER 1.4.2.** Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (1.183)$$

**Solução.** Uma reta  $y = L$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (1.184)$$

Começamos com  $x \rightarrow -\infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (1.185)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (1.186)$$

Logo,  $y = 2$  é assíntota horizontal ao gráfico de  $f(x)$ .

Agora, vamos ver a tendência da função para  $x \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (1.187)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (1.188)$$

Portanto, concluímos que  $y = 2$  é a única assíntota horizontal ao gráfico da função  $f$ .

Os seguintes comandos do [Python+SymPy](#) permitem plotar o esboço do gráfico da função  $f$  (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
4 L = limit(f(x),x,oo)
5 p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],\
6         line_color="blue",show=False)
7 q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
8 p.extend(q)
9 p.show()
```

◇



**ER 1.4.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}. \quad (1.189)$$

**Solução.** Observamos que o gráfico de  $f(x) = e^{-x}$  é uma reflexão em torno do eixo  $y$  do gráfico da função  $g(x) = e^x$ . No Exemplo 1.4.6, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (1.190)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(-x) \quad (1.191)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0. \quad (1.192)$$

Veja o esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-x}$  na Figura 1.14.

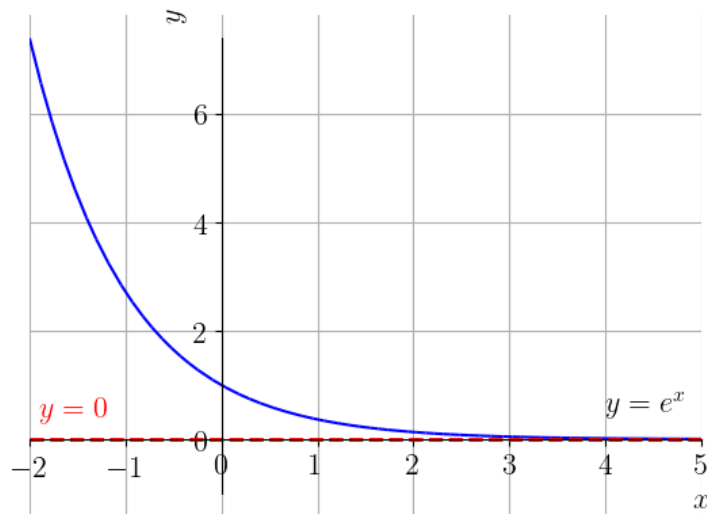


Figura 1.14: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-x}$ .

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(exp(-x), x, oo)
```

◇

## Exercícios

**Exercício 1.4.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \quad (1.193)$$

**Exercício 1.4.2.** Calcule

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + e^{-x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} - 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e - e^x$

**Exercício 1.4.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (1.194)$$

**Exercício 1.4.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x. \quad (1.195)$$

**Exercício 1.4.5.** Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + e^{-x}}.$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1.$

## 1.5 Limites infinitos

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é infinito quando  $x$  tende a um número  $x_0$ , se  $f(x)$  é arbitrariamente grande para todos os valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , mas  $x \neq x_0$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (1.196)$$

A Figura 1.15, é uma ilustração de  $f(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

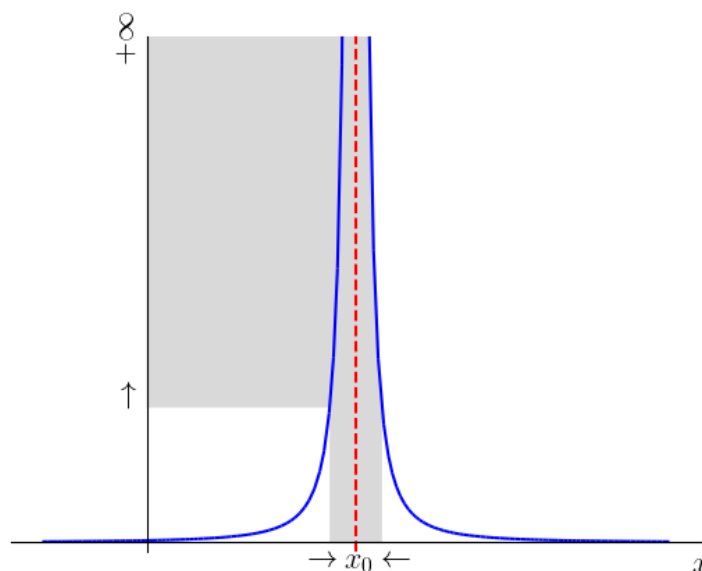


Figura 1.15: Ilustração de  $f(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Exemplo 1.5.1.** Vejamos o caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (1.197)$$

Ao tomarmos  $x$  próximo de  $x_0 = 0$ , obtemos os seguintes valores de  $f(x)$ :

|        |            |            |            |                                 |           |           |           |
|--------|------------|------------|------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | $-10^{-1}$ | $-10^{-2}$ | $-10^{-3}$ | $\rightarrow 0 \leftarrow$      | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-1}$ |
| $f(x)$ | $10^2$     | $10^4$     | $10^6$     | $\rightarrow \infty \leftarrow$ | $10^6$    | $10^4$    | $10^2$    |

Veja o esboço do gráfico de  $f(x)$  na Figura 1.16.

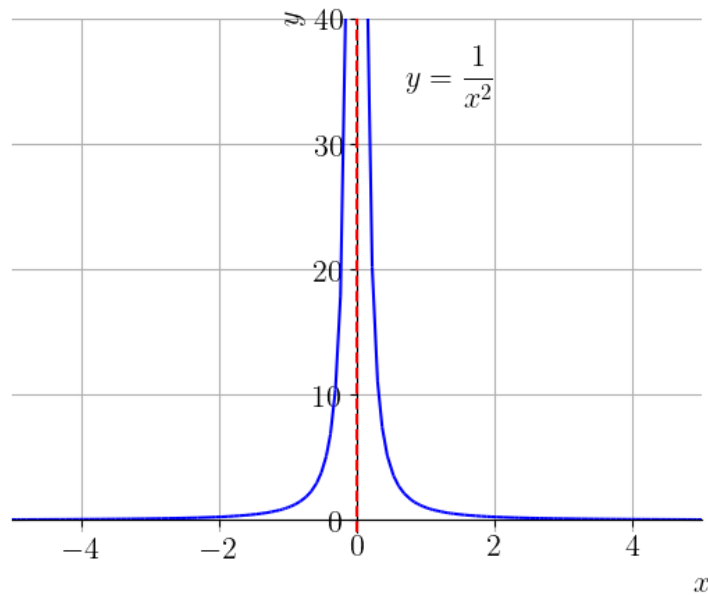


Figura 1.16: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/x^2$ .

Podemos concluir que os valores de  $f(x)$  podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer  $x$  suficientemente próximo de 0, com  $x \neq 0$ . I.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (1.198)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad (1.199)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty. \quad (1.200)$$

No primeiro caso, os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente grandes conforme os valores de  $x \rightarrow x_0$  e  $x < x_0$ . No segundo caso, os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente grandes conforme os valores de  $x \rightarrow x_0$  e  $x > x_0$ .

**Exemplo 1.5.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \quad (1.201)$$

De fato, conforme tomamos valores de  $x$  próximos de 1, com  $x > 1$ , os valores de  $f(x) = 1/(x-1)$  tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de  $f(x)$  na Figura 1.17.

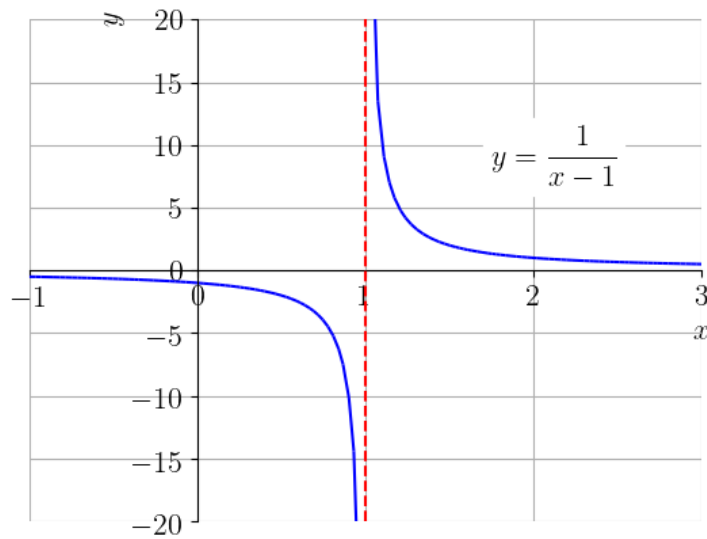


Figura 1.17: Esboço do gráfico de  $f(x) = 1/(x-1)$ .

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(1/(x-1), x, 0, '+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é menos infinito quando  $x$  tende a  $x_0$ , quando  $f(x)$  torna-se arbitrariamente pequeno para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $x_0$ , com  $x \neq x_0$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty. \quad (1.202)$$

De forma similar, definimos os limites laterais  $f(x) \rightarrow -\infty$  quando  $x \rightarrow x_0^\pm$ .

**Exemplo 1.5.3.** Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (1.203)$$

e que não podemos concluir que este limite é  $\infty$  ou  $-\infty$ . Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (1.204)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (1.205)$$

**Exemplo 1.5.4.**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \quad (1.206)$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função  $f(x) = 1/(x+1)^2$ . Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de  $y = 1/x^2$ , seguida de uma reflexão em torno de eixo  $x$ . Veja a Figura 1.18.

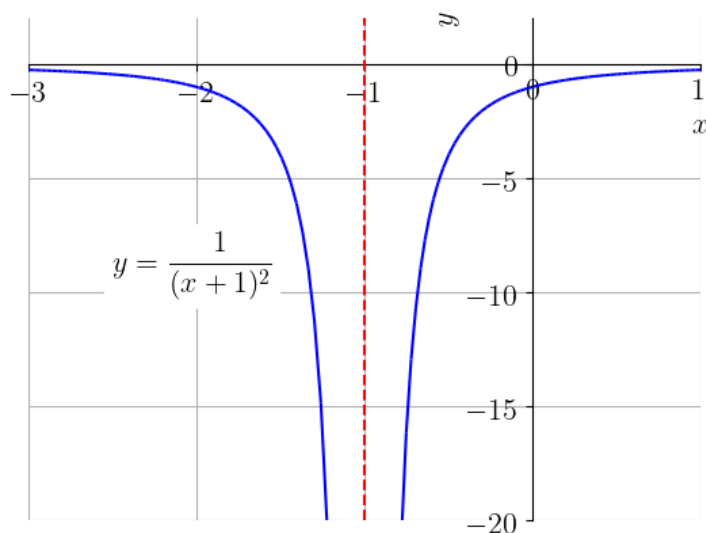


Figura 1.18: Esboço do gráfico de  $f(x) = -1/(x+1)^2$ .

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(-1/(x+1)**2, x, -1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

### 1.5.1 Assíntotas verticais

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Uma reta  $x = x_0$  é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad (1.207)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad (1.208)$$

**Exemplo 1.5.5.** O gráfico da função  $f(x) = -1/|x|$  tem uma assíntota vertical em  $x = 0$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (1.209)$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 1.19.

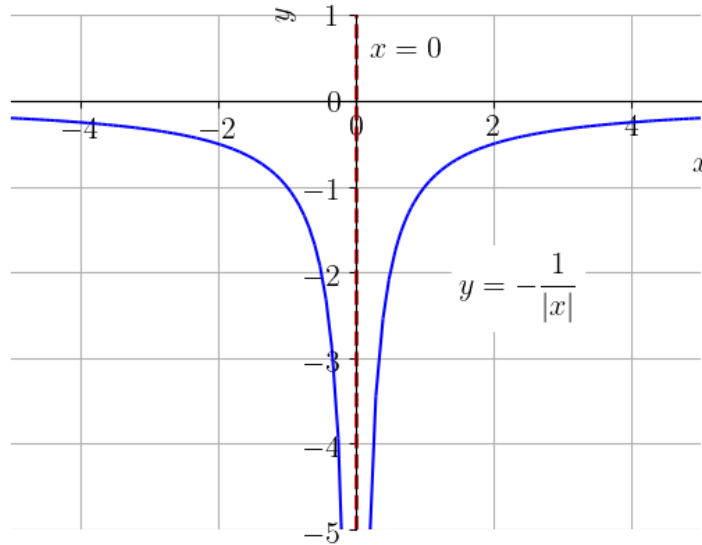


Figura 1.19: Esboço do gráfico de  $f(x) = -1/|x|$ .

**Exemplo 1.5.6.** A função  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$  não está definida para valores de  $x$  tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \quad (1.210)$$

$$x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1 \quad (1.211)$$

Nestes pontos o gráfico de  $f$  pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty, \quad (1.212)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (1.213)$$



e, também, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (1.214)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty. \quad (1.215)$$

Com isso, temos que as retas  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas verticais ao gráfico da função  $f$ . Veja a Figura 1.20 para o esboço do gráfico desta função.

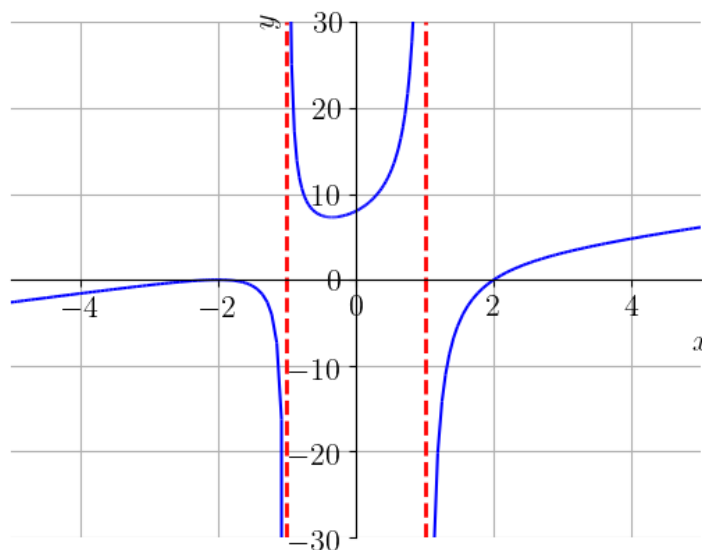


Figura 1.20: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ .

**Exemplo 1.5.7.** (Função logarítmica) A função logarítmica natural  $y = \ln x$  é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (1.216)$$

i.e.,  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $\ln x$ . Isto decorre do fato de  $y = \ln x$  ser a função inversa de  $y = e^x$  e, esta, ter uma assíntota horizontal  $y = 0$ <sup>5</sup>. A Figura 1.21 é um esboço do gráfico da função  $\ln x$ .

<sup>5</sup>Veja o Exemplo 1.4.6.

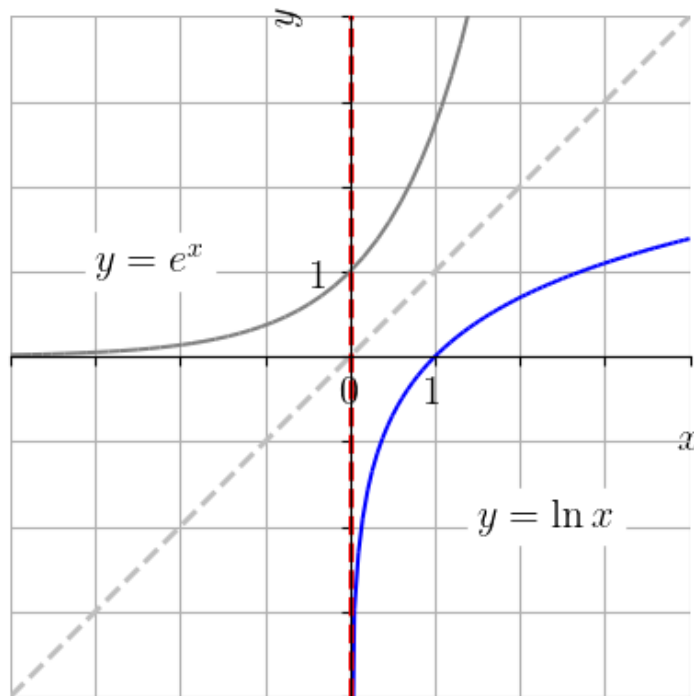


Figura 1.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

**Exemplo 1.5.8.** As funções trigonométricas  $y = \operatorname{tg} x$  e  $y = \sec x$  têm assíntotas verticais  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  para  $k$  inteiro. Já, as funções trigonométricas  $y = \operatorname{cotg} x$  e  $y = \operatorname{cosec} x$  têm assíntotas verticais  $x = k\pi$  para  $k$  inteiro. Consulte mais em [Funções Trigonométricas](#) nas [Notas de Aula de Pré-Cálculo](#).

## 1.5.2 Assíntotas oblíquas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assíntota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

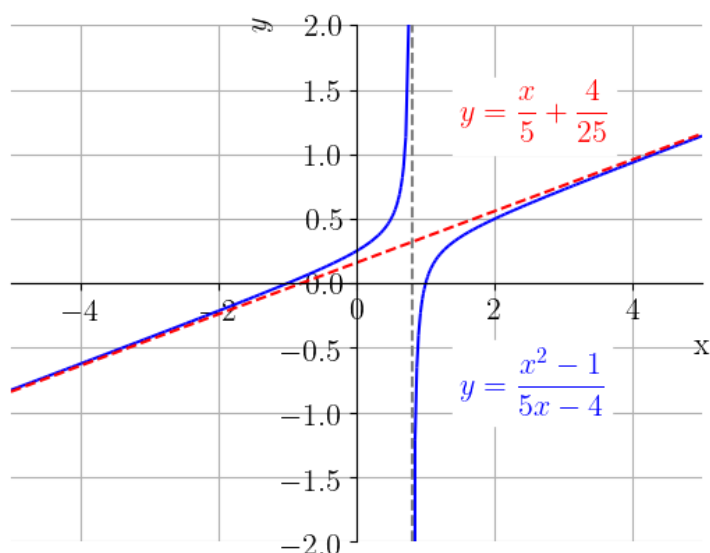


Figura 1.22: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$ .

**Exemplo 1.5.9.** Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (1.217)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (1.218)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , i.e.  $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Com isso, concluímos que  $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f(x)$ . Veja a Figura 1.22.

**Observação 1.5.1.** Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

### 1.5.3 Limites infinitos no infinito

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad (1.219)$$

quando os valores da função  $f$  são arbitrariamente grandes para todos os valores de  $x$  suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad (1.220)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad (1.221)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (1.222)$$

**Exemplo 1.5.10.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$

**Exemplo 1.5.11.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (1.223)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{10}{x} + \frac{300}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \infty. \quad (1.224)$$

**Proposição 1.5.1.** Dado um polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n. \quad (1.225)$$

**Exemplo 1.5.12.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.5.11, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \quad (1.226)$$

$$= \infty. \quad (1.227)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.5.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \quad (1.228)$$

**Solução.** Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \frac{0^-}{0^+} = -\infty. \quad (1.229)$$

Outra forma de calcular este limite é observar que  $y = 1 - x \rightarrow 0^+$  quando  $x \rightarrow 1^-$ . Assim, fazendo a mudança de variável  $y = 1 - x$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-2}{y} \quad (1.230)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y-1}{y} \quad (1.231)$$

$$= -\infty. \quad (1.232)$$

Podemos usar o seguinte comando [Python](#)+[SymPy](#) para computar este limite:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit((x-2)/(1-x), x, 1, '-')

```

◇

**ER 1.5.2.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x-1|. \quad (1.233)$$

**Solução.** Começamos observando que

$$\ln |x - 1| = \begin{cases} \ln(1 - x) & , x < 1, \\ \ln(x - 1) & , x > 1. \end{cases} \quad (1.234)$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln |x - 1| &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1 - x) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^6. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |x - 1| &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^7. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1| = -\infty. \quad (1.235)$$

Podemos usar os seguintes comandos [Python+SymPy](#) para computar os limites laterais:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol("x")
3 limit(log(abs(x-1)), x, 1, '-')
4 limit(log(abs(x-1)), x, 1, '+')
```

◇

**ER 1.5.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}. \quad (1.236)$$

**Solução.** Tratando-se de uma função racional, temos<sup>8</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \quad (1.237)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \quad (1.238)$$

$$= \infty. \quad (1.239)$$

---

<sup>8</sup>Veja a Observação 1.4.2. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 1.20.

◇

**ER 1.5.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2}. \quad (1.240)$$

**Solução.** Observamos que  $1 - x^2 \rightarrow -\infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Desta forma, fazendo a mudança de variáveis  $y = 1 - x^2$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0. \quad (1.241)$$

◇

**ER 1.5.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (1.242)$$

**Solução.** Podemos verificar que trata-se de uma indeterminação do tipo  $\infty/\infty$ . Neste caso, podemos calcular o limite pela multiplicação (em cima e em baixo) pelo inverso do fator dominante no radical, i.e.  $1/\sqrt{x^2}$ . Ou seja, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (1.243)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \quad (1.244)$$

Lembramos que  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Como  $x \rightarrow \infty$ , temos  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{|x|}} \quad (1.245)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2 \frac{x}{x}} \quad (1.246)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (1.247)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1} \quad (1.248)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (1.249)$$

◇

**Exercícios**

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 1.5.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}. \quad (1.250)$$

**Exercício 1.5.2.** Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (1.251)$$

**Exercício 1.5.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 - 1}. \quad (1.252)$$

**Exercício 1.5.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \quad (1.253)$$

**Exercício 1.5.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2x} \quad (1.254)$$

**Exercício 1.5.6.** Dados dois polinômios  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$ , mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (1.255)$$

**Exercício 1.5.7.** Mostre que  $y = x^2$  é assíntota ao gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}. \quad (1.256)$$



## 1.6 Continuidade

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

### 1.6.1 Definição de função contínua

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Dizemos que uma **função**  $f$  é **contínua** em um ponto  $x_0$ , quando  $f(x_0)$  está definida, existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (1.257)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1.258)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direta**. Quando a **função**  $f$  não é contínua em um dado ponto  $x_0$ , dizemos que  $f$  é **descontínua** neste ponto.

**Exemplo 1.6.1.** Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (1.259)$$

Na Figura [1.23](#), temos um esboço do gráfico de  $f$ .

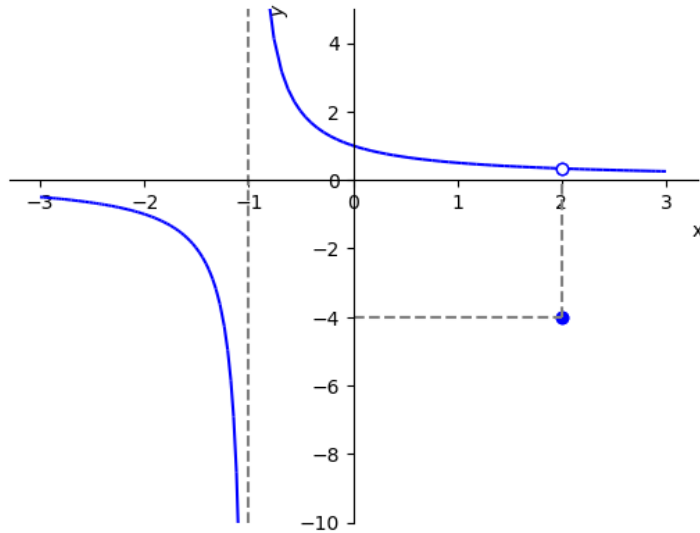


Figura 1.23: Esboço do gráfico da função  $f$  definida no Exemplo 1.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

- a)  $x = -2$ . Neste ponto, temos  $f(-2) = -1$  e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (1.260)$$

Com isso, concluímos que  $f$  é contínua no ponto  $x = -2$ .

- b)  $x = -1$ . Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \quad (1.261)$$

logo,  $f(-1)$  não está definido e, portanto,  $f$  é descontínua neste ponto. Observemos que  $f$  tem uma assíntota vertical em  $x = -1$ , verifique!

- c)  $x = 2$ . Neste ponto, temos  $f(2) = -4$  e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (1.262)$$

Portanto, concluímos que  $f$  é descontínua em  $x = 2$ .

Uma função  $f$  é dita ser **contínua em um intervalo**  $(a, b)$ , quando  $f$  é contínua em todos os pontos  $x_0 \in (a, b)$ . Para intervalos,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $[a, b]$ , empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em  $(-\infty, \infty)$ , dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

**Exemplo 1.6.2.** (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (1.263)$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.24.

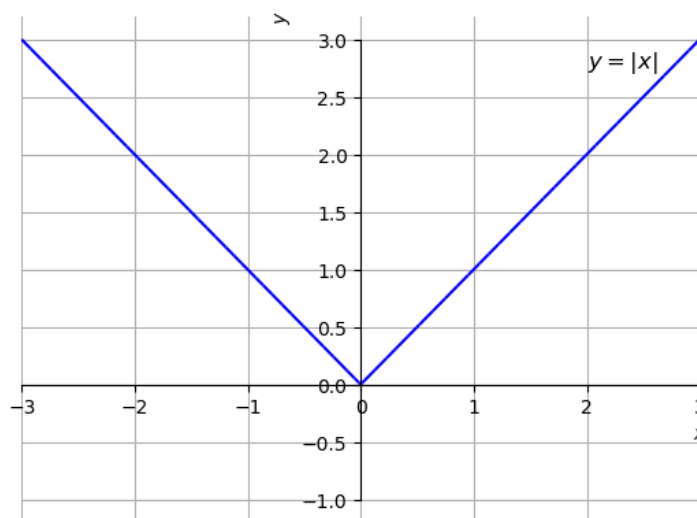


Figura 1.24: Esboço do gráfico de  $f(x) = |x|$ .

Observamos que para  $x \in (-\infty, 0)$  temos  $|x| = -x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Também, para  $x \in (0, \infty)$  temos  $|x| = x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Agora, em  $x = 0$ , temos  $|0| = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (1.264)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (1.265)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|. \quad (1.266)$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

### 1.6.2 Propriedades de funções contínuas

Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $x = c_0$  e  $k$  um número real, então também são contínuas em  $x = x_0$  as funções:

- a)  $k \cdot f$
- b)  $f \pm g$
- c)  $f \cdot g$
- d)  $f/g$ , se  $g(x_0) \neq 0$
- e)  $f^k$ , se existe  $f^k(x_0)$ .

**Exemplo 1.6.3.** Temos que  $f(x) = x$  e  $g(x) = |x|$  são exemplos de funções contínuas em toda parte. Segue das propriedades acima que:

- a)  $f_a(x) = 2x$  é contínua em toda parte.
- b)  $f_b(x) = x + |x|$  é contínua em toda parte.
- c)  $f_c(x) = 2x|x|$  é contínua em toda parte.
- d)  $f_d(x) = \frac{|x|}{x}$  é contínua para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- e)  $f_e(x) = x^2$  é contínua em toda parte.

**Exemplo 1.6.4. Polinômios são contínuos em toda parte.** Isto é, se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad (1.267)$$

para qualquer  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \quad (1.268)$$

**Exemplo 1.6.5. Funções racionais**  $r(x) = p(x)/q(x)$  **são contínuas em todos os pontos de seus domínios.** Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad (1.269)$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad (1.270)$$

pois  $f$  não está definida nestes pontos. Agora, para  $x_0 \neq 1$  e  $x_0 \neq -1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (1.271)$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \quad (1.272)$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \quad (1.273)$$

Ou seja,  $f$  é contínua nos intervalos  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ , que coincide com seu domínio.

**Observação 1.6.1.** São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Se  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  e  $g$  é contínua no ponto  $f(x_0)$ , então  $g \circ f$  é contínua no ponto  $x_0$ .

**Exemplo 1.6.6.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $y = \sqrt{x^2-1}$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (1.274)$$

Isto é, esta função é contínua em  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

b)  $y = \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (1.275)$$

**Exemplo 1.6.7.** Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} \cdot e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x+4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \quad (1.276)$$

**Teorema do Valor Intermediário**

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que qualquer dada função  $f$  contínua em um intervalo  $[a, b]$ , assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Consulte a Figura 1.25.

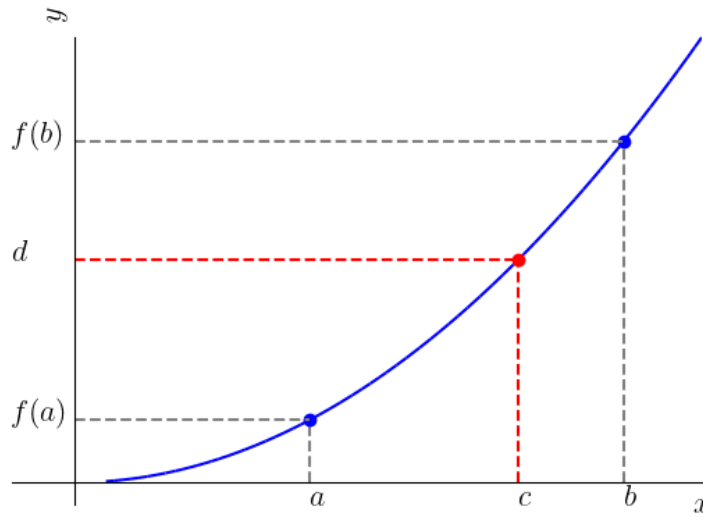


Figura 1.25: Ilustração sobre o Teorema do Valor Intermediário.

**Teorema 1.6.1.** (Teorema do valor intermediário) Seja  $f$  função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $d$  é um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ .

**Exemplo 1.6.8.** Podemos afirmar que  $f(x) = x^3 - x - 1$  tem (pelo menos) um zero no intervalo  $(0, 2)$ . De fato,  $f$  é contínua no intervalo  $[0, 2]$  e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(2) = 5 > 0$ . Observemos que  $y = 0$  está entre  $f(0)$  e  $f(2)$ . Veja a Figura 1.26.

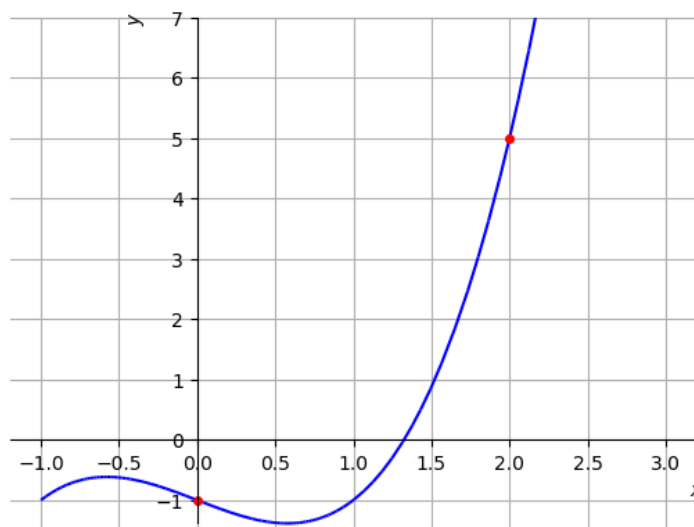


Figura 1.26: Esboço do gráfico da função  $f(x) = x^3 - x - 1$ .

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (1.277)$$

**Solução.** Observamos que a função é descontínua em  $x = 0$ , pois não está definida neste ponto. Agora, para  $x < 0$ , temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \quad (1.278)$$

Ou seja, para  $x < 0$  a função é constante igual a  $-1$  e, portanto, contínua.

Para  $x > 0$ , temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad (1.279)$$

I.e., para  $x > 0$  a função é constante igual a  $1$  e, portanto, contínua.

Concluimos que  $f(x)$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Faça o esboço do gráfico desta função!

◇

**ER 1.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right). \quad (1.280)$$

**Solução.** A função  $f$  pode ser vista como a composição da função logaritmo natural  $g(x) = \ln x$  com a função racional  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Observamos que:

- a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e.  $g$  é contínua para todo  $x > 0$ ;
- b) a função racional  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$  é contínua para todo  $x \neq 1$ .

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função  $f(x) = g(h(x))$  é contínua nos pontos de continuidade da função  $h$  tais que  $h(x) > 0$ , i.e. para  $x \neq 1$  e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \quad (1.281)$$

Fazendo o estudo de sinal



vemos que  $h(x) > 0$  em  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

Em resumo,  $h$  é contínua em  $(0, \infty)$  e  $g$  é contínua e positiva em  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . A função  $f = (h \circ g)$  é contínua na interseção destes conjuntos, i.e.  $f$  é contínua em  $(1, \infty)$ .

◇



## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 1.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \quad (1.282)$$

**Exercício 1.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \quad (1.283)$$

**Exercício 1.6.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \ln \left( \frac{\sin \frac{x}{2} - \cos x}{2} \right). \quad (1.284)$$

## 1.7 Limites e desigualdades

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$  em um certo intervalo aberto contendo  $x_0$ , exceto possivelmente em  $x = x_0$ , e existem os limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.285)$$

Observe que a tomada do **limite não preserva a desigualdade estrita**.

**Exemplo 1.7.1.** As funções  $f(x) = x^2/3$  e  $g(x) = x^2/2$  são tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \neq 0$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (1.286)$$

**Observação 1.7.1.** A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x < x_0$  e existem os limites laterais à esquerda de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x). \quad (1.287)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

### 1.7.1 Limites de funções limitadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se  $f(x) \leq L$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $x_0$ , exceto possivelmente em  $x_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq L. \quad (1.288)$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

**Exemplo 1.7.2.** Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x. \quad (1.289)$$

Como  $|\sin x| \leq 1$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad (1.290)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} = 0. \quad (1.291)$$

Logo, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x = 0. \quad (1.292)$$

### 1.7.2 Teorema do confronto

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Teorema 1.7.1.** (Teorema do confronto) Se  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$  (consulte a Figura 1.27), e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (1.293)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (1.294)$$

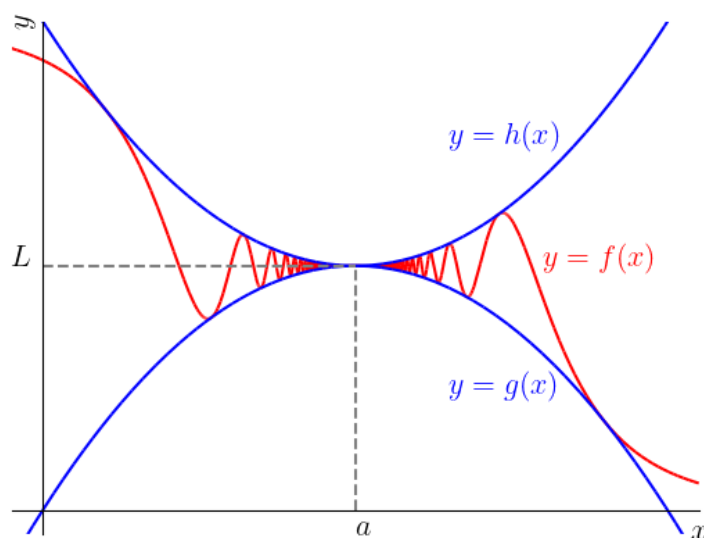


Figura 1.27: Ilustração sobre o Teorema 1.7.1.

*Demonstração.* Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (1.295)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (1.296)$$

□

**Exemplo 1.7.3.** Toda função  $f(x)$  tal que  $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$ , para todo  $x \neq 0$ , tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (1.297)$$

**Observação 1.7.2.** O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

**Exemplo 1.7.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (1.298)$$

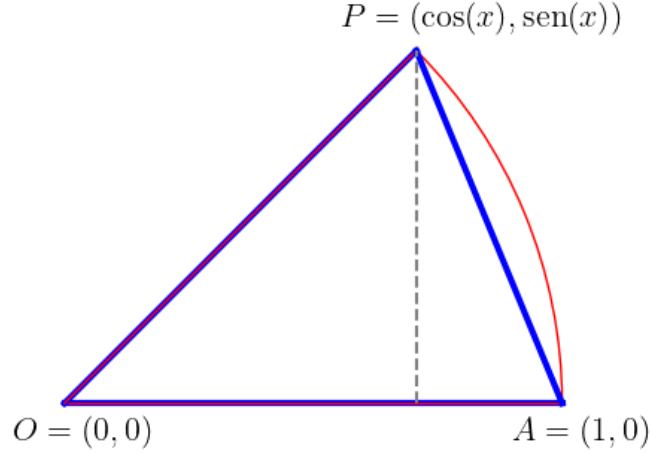


Figura 1.28: Ilustração referente ao Exemplo 1.7.4.

De fato, começamos assumindo  $0 < x < \pi/2$ . Tomando  $O = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $P = (\cos x, \sin x)$  (consulte a Figura 1.28), observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (1.299)$$

i.e.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x < x, \quad (1.300)$$

para todo  $0 < x < \pi/2$ .

É certo que  $\sin x < -x$  para  $-\pi/2 < x < 0$ . Com isso e o resultado acima, temos

$$\sin x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (1.301)$$

Lembrando que  $\sin x$  é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\sin x = \sin -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (1.302)$$

Logo, de (1.301) e (1.302), temos

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|. \quad (1.303)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (1.304)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0. \quad (1.305)$$

**Observação 1.7.3.** Do exemplo anterior (Exemplo 1.7.4), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (1.306)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (1.307)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.308)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right] \quad (1.309)$$

$$= 1 + 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2. \quad (1.310)$$

Agora, fazemos a mudança de variável  $y = x/2$ . Neste caso, temos  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} y = 0. \quad (1.311)$$

Então, retornando a equação (1.310), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (1.312)$$

### 1.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (1.313)$$

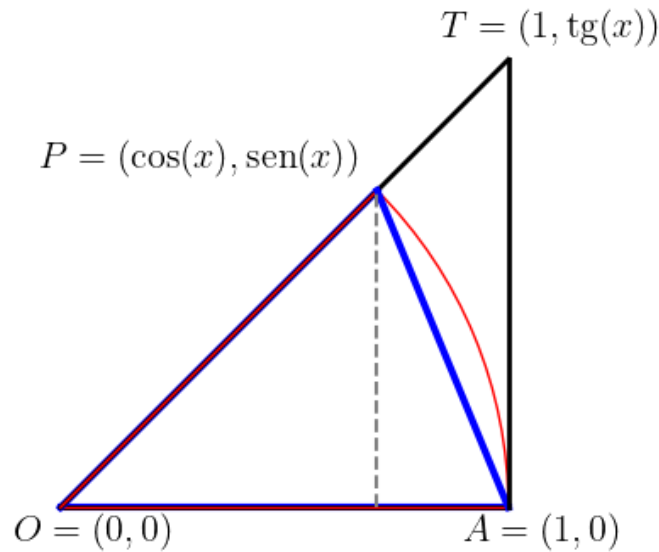


Figura 1.29: Ilustração para o cálculo de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos  $0 < x < \pi/2$ . Sendo os pontos  $O = (0,0)$ ,  $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ ,  $A = (1,0)$  e  $T = (1, \operatorname{tg} x)$  (consulte Figura 1.29), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (1.314)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad (1.315)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por  $\sin x$ <sup>9</sup>, obtemos

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (1.316)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (1.317)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (1.318)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.319)$$

Agora, usando o fato de que  $\sin x/x$  é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (1.320)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.321)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

**Exemplo 1.7.5.** Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (1.322)$$

Veja o Exercício 1.7.4.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.7.1.** Sabendo que  $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  para  $0 < x < 1$ , calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (1.323)$$

---

<sup>9</sup> $\sin x > 0$  para todo  $0 < x < \pi/2$ .

**Solução.** Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\nearrow 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}^{\nearrow 0}. \quad (1.324)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad (1.325)$$

◇

Em construção ...

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 1.7.1.** Supondo que  $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$  para todo  $x \neq 0$ , determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ .

**Exercício 1.7.2.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x. \quad (1.326)$$

**Exercício 1.7.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \quad (1.327)$$

**Exercício 1.7.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (1.328)$$

**Exercício 1.7.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (1.329)$$



## 1.8 Exercícios finais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 1.8.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right). \quad (1.330)$$

**Exercício 1.8.2.** Calcule os seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right)^x$

## Capítulo 2

# Derivadas

### 2.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos estudar a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, estudamos as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

#### 2.1.1 Reta secante e reta tangente

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função  $f$  pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ ,  $x_0 \neq x_1$ , como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.1)$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ . Veja a Figura 2.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (2.2)$$

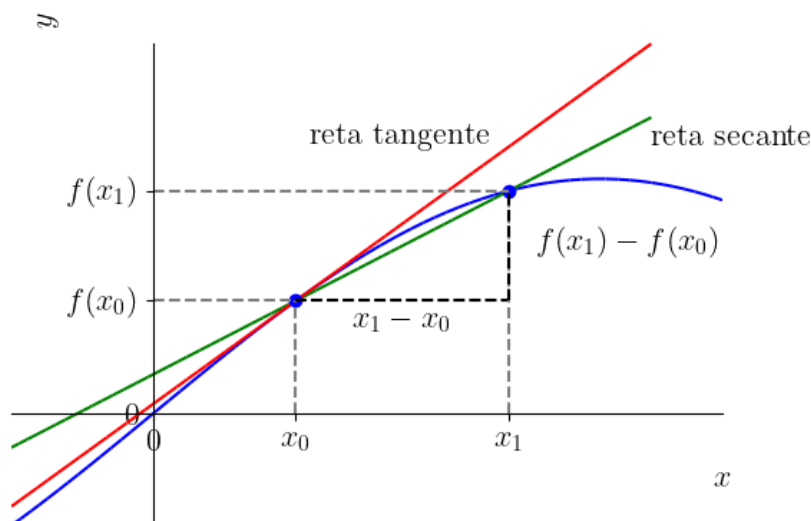


Figura 2.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelha) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função  $f$  em  $x = x_0$  é a reta que passa pelo ponto  $(x_0, f(x_0))$  e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (2.3)$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.4)$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ , quando  $x_1 \rightarrow x_0$ . Veja a Figura 2.1.

**Observação 2.1.1.** Fazendo a mudança de variável  $h = x_1 - x_0$ , temos que (2.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.5)$$

De fato, da mudança de variável, temos que  $x_1 = x_0 + h$  e quando  $x_1 \rightarrow x_0$ , temos que  $h = x_1 - x_0 \rightarrow 0$ . Ou seja,

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.7)$$

**Exemplo 2.1.1.** Seja  $f(x) = x^2$  e  $x_0 = 1$ . O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.8)$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad (2.9)$$

$$= \frac{4 - 1}{1} = 3. \quad (2.10)$$

Logo, a reta secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x - x_0) + f(x_0) \quad (2.11)$$

$$y = 3(x - 1) + f(1) \quad (2.12)$$

$$y = 3x - 2. \quad (2.13)$$

Na Figura 2.2, temos os esboços dos gráficos da função e da reta secante (verde).

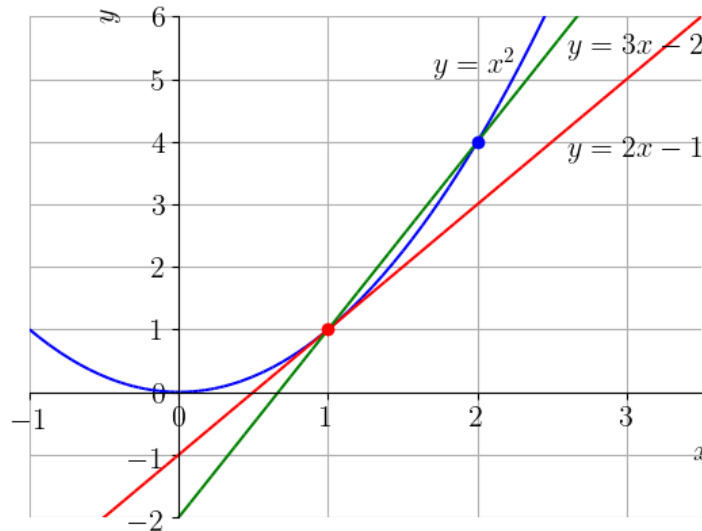


Figura 2.2: Esboços dos gráficos de  $f(x) = x^2$  (azul), da reta secante pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  (verde) e da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0 = 1$  (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0$  é

$$m_{tg} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \quad (2.15)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \quad (2.16)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{1} = 2. \quad (2.17)$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  no ponto  $x_0 = 1$  tem coeficiente angular  $m_{tg} = 2$  e equação

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (2.18)$$

Na Figura 2.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o [Python+SymPy](#), podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x,y = symbols('x,y')
3      ...: x0 = 1
4      ...: x1 = 2
5      ...: f = lambda x: x**2
6      ...: msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
7      ...: Eq(y, msec*(x-x0)+f(x0))
8      Out: Eq(y, 3.0*x - 2.0)

```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x,y = symbols('x,y')
3      ...: h = Symbol('h')
4      ...: x0 = 1
5      ...: f = lambda x: x**2
6      ...: mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)
7      ...: Eq(y, mtg*(x-x0)+f(x0))
8      ...:
9      Out: Eq(y, 2*x - 1)

```

### 2.1.2 Taxa de variação

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A **taxa de variação média** de uma função  $f$  quando  $x$  varia de  $x_0$  a  $x_1$  é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (2.19)$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de  $f$  no ponto  $x_0$ , a qual é definida como

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.20)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.21)$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

**Exemplo 2.1.2.** Seja  $s = s(t)$  a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo  $t_0$  ao tempo  $t_1$  é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (2.22)$$

Por exemplo, se  $s(t) = 15t^2 + t$  (km), então a velocidade média do objeto entre  $t_0 = 1\text{h}$  e  $t_1 = 3\text{h}$  é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2.23)$$

$$= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \quad (2.24)$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \quad (2.25)$$

$$= 61 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (2.26)$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo  $t_0 = 1$  é

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \quad (2.27)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(t_0 + h)^2 + (t_0 + h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \quad (2.28)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \quad (2.29)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \quad (2.30)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 30t_0 + 15h + 1 \quad (2.31)$$

$$= 30t_0 + 1 = 31 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (2.32)$$

**Exemplo 2.1.3.** Seja  $c(x) = \sqrt{x}$  (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O **custo médio da produção** de  $x_0 = 4$  a  $x_1 = 9$  é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.33)$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} \quad (2.34)$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} \quad (2.35)$$

$$= \frac{3 - 2}{5} \quad (2.36)$$

$$= 0,2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (2.37)$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa está produzindo  $x_0 = 4$  milhões de unidades é

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0=4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (2.38)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \quad (2.39)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \quad (2.40)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \quad (2.42)$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 0,25 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (2.43)$$

**Observação 2.1.2.** Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

### 2.1.3 Derivada em um ponto

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A **derivada** de uma função  $f$  **em um ponto**  $x = x_0$  é denotada por  $f'(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$  e é definida por

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.44)$$

**Exemplo 2.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $f(x) = k$ ,  $k$  constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0. \quad (2.46)$$

b)  $f(x) = x$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.47)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \quad (2.48)$$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ .

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \quad (2.49)$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \quad (2.50)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

**Exemplo 2.1.5.** Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por  $r(x) = x^2$  (milhões de reais), onde  $x$  é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando  $x = x_0 = 1$  é

$$r'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \quad (2.52)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad (2.53)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \quad (2.54)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.1.1.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto  $x_0 = 4$ . Faça, então, os esboços dos gráficos de  $f$  e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $x_0 = 4$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.55)$$

A derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  é

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.56)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \quad (2.57)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \quad (2.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \quad (2.60)$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + \sqrt{4} \quad (2.61)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \quad (2.62)$$

Veja a Figura 2.3 para os esboços dos gráfico de  $f$  e da reta tangente.

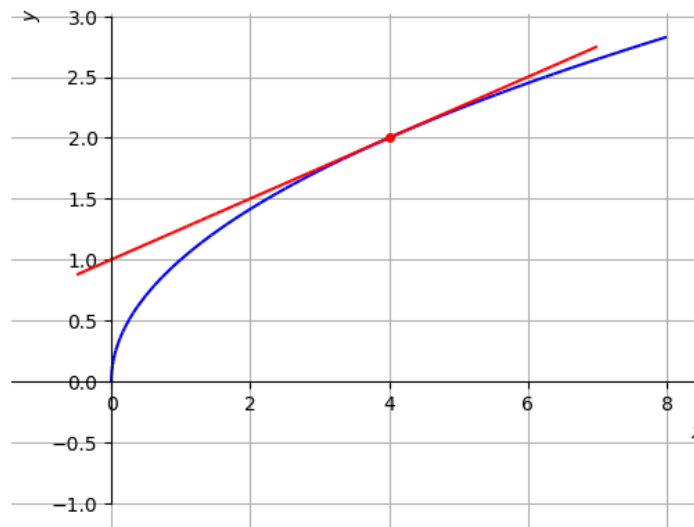


Figura 2.3: Esboços do gráfico da função  $f$  e da reta tangente no ponto  $x_0 = 4$ .

◇

**ER 2.1.2.** Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \quad (2.63)$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \quad (2.64)$$

onde  $x$  é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando  $x = 1$  mi.

**Solução.** O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \quad (2.65)$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto  $x_0 = 1$  é

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0 + h) - l(x_0)}{h} \quad (2.66)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - c(x_0 + h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \quad (2.67)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0) - (c(x_0 + h) - c(x_0))}{h} \quad (2.68)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h} \quad (2.69)$$

$$= r'(x_0) - c'(x_0) \quad (2.70)$$

$$= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (2.71)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (2.72)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.1.1.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = 2, f'(-1)$ ;
- b)  $g(x) = 10^6, g'(10^8)$ ;
- c)  $h(x) = \ln 2e, h'(-\pi)$ ;

**Exercício 2.1.2.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = 2 + x, f'(-1)$ ;
- b)  $g(x) = 10^6 - 2x, g'(-3)$ ;
- c)  $h(x) = \ln(2e) + ex, h'(10^6)$ ;

**Exercício 2.1.3.** Calcule as derivadas conforme indicado:

- a)  $f(x) = x, f'(-1)$ ;

b)  $g(x) = -2x$ ,  $g'(-3)$ ;

c)  $h(x) = ex$ ,  $h'(10^6)$ ;

**Exercício 2.1.4.** Determine a reta secante ao gráfico de  $f(x) = 5 - x^2$  pelos pontos  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$ . Então, determine a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0 = 1$ . Por fim, faça os esboços dos gráficos de  $f$ , da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**Exercício 2.1.5.** Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo  $c(x) = 2\sqrt{x}$  e rendimento  $r(x) = \frac{1}{100}x^3$ , dados em milhões de reais com  $x$  em milhares de unidades. Calcule:

- a) o custo marginal quando  $x = 1$ ;
- b) o rendimento marginal quando  $x = 1$ ;
- c) o lucro marginal quando  $x = 1$ .

## 2.2 Função derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A **derivada** de uma função  $f$  em relação à variável  $x$  é a função  $f' = \frac{df}{dx}$  cujo valor em  $x$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2.73)$$

quando este limite existe. Dizemos que  $f$  é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto  $x$  de seu domínio, quando o limite dado em (2.73) existe. Se isso ocorre para todo número real  $x$ , dizemos que  $f$  é derivável em toda parte.

**Exemplo 2.2.1.** A derivada de  $f(x) = x^2$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.74)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (2.75)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \quad (2.76)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \quad (2.77)$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte. A Figura 2.4.

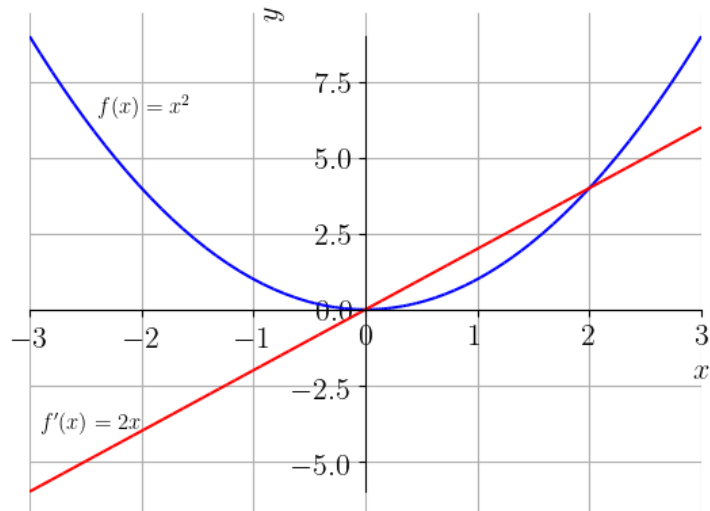


Figura 2.4: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = x^2$  e de sua derivada  $f'(x) = 2x$ .

Com o [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
1 from sympy import *
2 x,h = symbols('x,h')
3 f = lambda x: x**2
4 limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)
```

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
1 diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
1 diff(x**2)
```

para computar a derivada de  $x^2$  em relação a  $x$ .

**Observação 2.2.1.** A derivada à direita (à esquerda) de uma função  $f$  em um ponto  $x$  é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{df}{dx^{\pm}} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.78)$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

**Exemplo 2.2.2.** Vamos calcular a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para  $x = 0$ , só faz sentido calcular a derivada lateral à direita:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \quad (2.79)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \quad (2.80)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cancel{\sqrt{h}} \nearrow 0^+} = +\infty. \quad (2.81)$$

Ou seja,  $f(x) = \sqrt{x}$  não é derivável em  $x = 0$ . Agora, para  $x > 0$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (2.82)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (2.83)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (2.85)$$

Na Figura 2.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

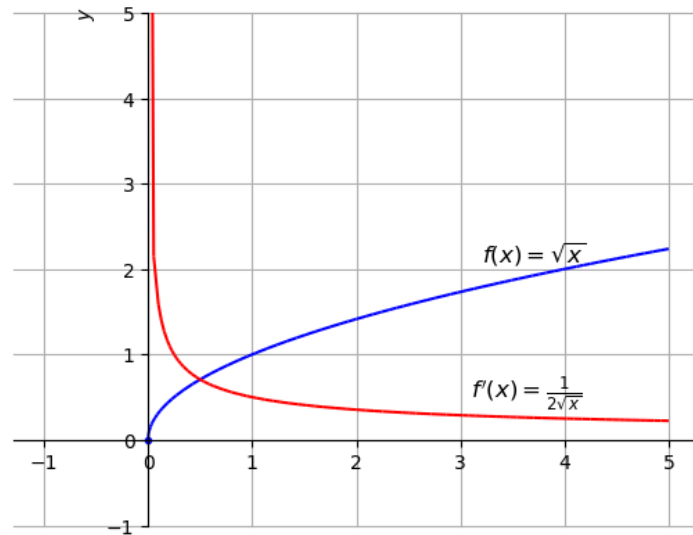


Figura 2.5: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = \sqrt{x}$  e de sua derivada.

No [SymPy](#), a computação de  $f'_+(0)$  pode ser feita com os comandos<sup>1</sup>:

```
1 from sympy import *
2 h = Symbol('h')
3 limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$  (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
1 diff(sqrt(x),x)
```

**Exemplo 2.2.3.** A função valor absoluto é derivável para todo  $x \neq 0$  e não é derivável em  $x = 0$ . De fato, para  $x < 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (2.86)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \quad (2.87)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (2.88)$$

<sup>1</sup>Por padrão no [SymPy](#), o limite é tomado à direita.

Analogamente, para  $x > 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (2.89)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (2.90)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (2.91)$$

Agora, para  $x = 0$ , devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad (2.92)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (2.93)$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que  $y = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ . Na figura 2.6, temos os esboços dos gráficos de  $f(x) = |x|$  e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (2.94)$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por  $\text{sign}(x)$ . Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

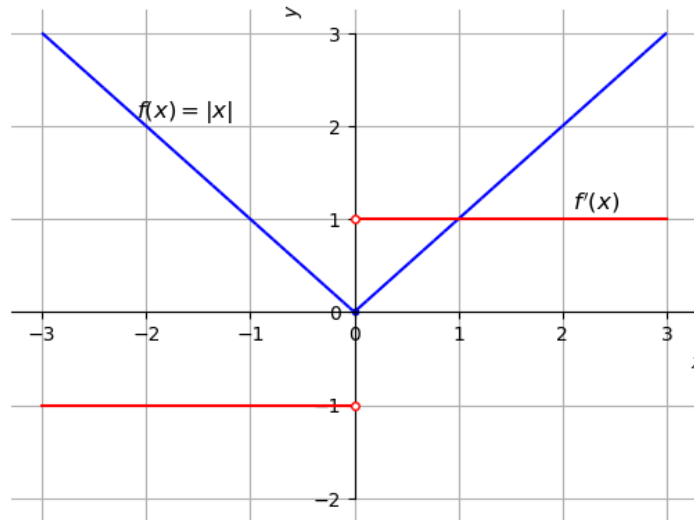


Figura 2.6: Esboços dos gráficos da função  $f(x) = |x|$  e de sua derivada.



No [SymPy](#), podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x', real=True)
3      ...: diff(abs(x))
4      Out: sign(x)
```

### 2.2.1 Continuidade de uma função derivável

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função  $y = f(x)$  **derivável** em  $x = x_0$  é **contínua** neste ponto. De fato, lembramos que  $f$  é contínua em  $x = x_0$  quando  $x_0$  é um ponto de seu domínio e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.95)$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad (2.96)$$

ou, ainda,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0. \quad (2.97)$$

Vamos mostrar que este é o caso quando  $f$  é derivável em  $x = x_0$ . Neste caso, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} \quad (2.98)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \cdot h \quad (2.99)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot h \quad (2.100)$$

$$= 0. \quad (2.101)$$

Ou seja, de fato, se  $f$  é derivável em  $x = x_0$ , então  $f$  é contínua em  $x = x_0$ .

**Observação 2.2.2.** A recíproca não é verdadeira, uma função  $f$  ser contínua em um ponto  $x = x_0$  não garante que ela seja derivável em  $x = x_0$ . No Exemplo 2.2.3, vimos que a função valor absoluto  $f(x) = |x|$  não derivável em  $x = 0$ , enquanto esta função é contínua (veja, também, o Exemplo 1.6.2).

### 2.2.2 Derivadas de ordens mais altas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A derivada de uma função  $y = f(x)$  em relação a  $x$  é a função  $y = f'(x)$ . Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de  $f$ , denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right). \quad (2.102)$$

**Exemplo 2.2.4.** Seja  $f(x) = x^3$ . Então, a primeira derivada de  $f$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.103)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad (2.104)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \quad (2.105)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + \cancel{3xh}^0 + \cancel{h^2}^0 = 3x^2. \quad (2.106)$$

De posse da primeira derivada  $f'(x) = 3x^2$ , podemos calcular a segunda derivada de  $f$ , como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (2.107)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (2.108)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \quad (2.109)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} \quad (2.110)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + \cancel{h}^0 = 6x, \quad (2.111)$$

i.e.  $f''(x) = 6x$ .

No [SymPy](#), podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: diff(x**3,x,2)
4      Out: 6*x

```

Generalizando, quando existe, a  $n$ -ésima derivada de uma função  $y = f(x)$ ,  $n \geq 1$ , é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{d^n}{dx^n} f(x) := \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right], \quad (2.112)$$

com  $f^{(3)} \equiv f'''$ ,  $f^{(2)} \equiv f''$ ,  $f^{(1)} \equiv f'$  e  $f^{(0)} \equiv f$ .

**Exemplo 2.2.5.** A terceira derivada de  $f(x) = x^3$  em relação a  $x$  é  $f'''(x) = [f''(x)]'$ . No exemplo anterior (Exemplo 2.2.4), calculamos  $f''(x) = 6x$ . Logo,

$$f'''(x) = [6x]' \quad (2.113)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} \quad (2.114)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 6 = 6. \quad (2.115)$$

A quarta derivada de  $f(x) = x^3$  em relação a  $x$  é  $f^{(4)}(x) \equiv 0$ , bem como  $f^{(5)}(x) \equiv 0$ . Verifique!

No [SymPy](#), podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: diff(x**3,x,3)
4      Out: 6

```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 2.2.1.** Calcule a derivada da função  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  em relação a  $x$ .

**Solução.** Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.116)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} \quad (2.117)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \quad (2.118)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \quad (2.119)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \quad (2.120)$$

◇

**ER 2.2.2.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função  $f(x) = |x - 1|$ .

**Solução.** O gráfico da função  $f(x) = |x - 1|$  tem um bico no ponto  $x = 1$  (verifique!). Para valores de  $x < 1$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.121)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{<0} - \overbrace{|x-1|}^{<0}}{h} \quad (2.122)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x - h + 1 + x - 1}{h} \quad (2.123)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \quad (2.124)$$

Para valores de  $x > 1$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.125)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{>0} - \overbrace{|x-1|}^{>0}}{h} \quad (2.126)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - 1 - x + 1}{h} \quad (2.127)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (2.128)$$

Ou seja, temos que  $f(x) = |x - 1|$  é diferenciável para  $x \neq 1$ . Agora, para  $x = 1$ , temos

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (2.129)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{|h|}^{<0} - |1-1|}{h} \quad (2.130)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (2.131)$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (2.132)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{|h|}^{>0} - |1-1|}{h} \quad (2.133)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (2.134)$$

$$(2.135)$$

Como  $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ , temos que  $\nexists f'(1)$ . Concluimos que  $f(x) = |x - 1|$  é diferenciável nos pontos  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

◇

**ER 2.2.3.** Calcule a segunda derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = x - x^2. \quad (2.136)$$

**Solução.** Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.137)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} \quad (2.138)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} \quad (2.139)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 1 - 2x - \overset{0}{h} = 1 - 2x. \quad (2.140)$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$f''(x) = [f'(x)]' \quad (2.141)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (2.142)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2(x + h) - (1 - 2x)}{h} \quad (2.143)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2 = -2. \quad (2.144)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 2.2.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2$

b)  $g(x) = -3$

c)  $h(x) = \sqrt{e}$

**Exercício 2.2.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2x$

b)  $g(x) = -3x$

c)  $h(x) = \sqrt{e}x$

**Exercício 2.2.3.** Calcule a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \quad (2.145)$$

**Exercício 2.2.4.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

**Exercício 2.2.5.** Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \quad (2.146)$$

calcule:

- a)  $f'(x)$
- b)  $f''(x)$
- c)  $f'''(x)$
- d)  $f^{(4)}$
- e)  $f^{(1001)}(x)$

## 2.3 Derivada de Funções Constante, Identidade e Potência

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Nesta seção, vamos estudar as derivadas de função constante, de função identidade e de função potência.

### 2.3.1 Derivada de Função Constante

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada de função constante  $f(x) \equiv k$ , com  $k$  constante, é

$$(k)' = 0 \quad (2.147)$$

De fato, da definição de derivada temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.148)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \quad (2.149)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (2.150)$$

**Exemplo 2.3.1.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $(2)' = 0$
- b)  $(-3)' = 0$
- c)  $(\pi)' = 0$

d)  $(a)' = 0$  para qualquer  $a \in \mathbb{R}$

Com [Python+SymPy](#), podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      In : diff(2)
3      Out: 0
4
5      In : diff(-3)
6      Out: 0
7
8      In : diff(pi)
9      Out: 0
10
11     In : x = Symbol('x')
12     In : a = Symbol('a', const=True)
13     In : diff(a, x)
14     Out: 0

```

### 2.3.2 Derivada de Função Identidade

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A derivada da função identidade  $f(x) = x$  é

$$(x)' = 1 \quad (2.151)$$

De fato, da definição de derivada temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.152)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (2.153)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (2.154)$$

$$(2.155)$$

**Exemplo 2.3.2.** Usando [Python+sympy](#), podemos computar a derivada da função identidade com as seguintes instruções:



```

1      In : from sympy import *
2      In : x = Symbol('x')
3      In : diff(x)
4      Out: 1

```

### 2.3.3 Derivada de Função Potência

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada da função potência  $f(x) = x^n$ ,  $n$  número inteiro positivo, é

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.156)$$

De fato, da definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.157)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (2.158)$$

Usando binômio de Newton<sup>2</sup>, temos

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k, \quad (2.159)$$

onde os coeficientes binomiais são

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.160)$$

Assim, segue que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (2.161)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \quad (2.162)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (2.163)$$

**Exemplo 2.3.3.** Estudemos os seguintes casos:

<sup>2</sup>Isaac Newton, 1643 - 1727, matemático inglês. Fonte: [Wikipédia](#).

- a)  $(x^2)' = 2x^{1-1} = 2x$   
 b)  $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$   
 c)  $(x^{2001})' = 2001x^{2000}$   
 d)  $(x^m)' = mx^{m-1}$  para qualquer  $m$  inteiro positivo.

Com [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      In : x = Symbol('x')
3      In : diff(x**2)
4      Out: 2*x
5
6      In : diff(x**5)
7      Out: 5*x**4
8
9      In : diff(x**2001)
10     Out: 2001*x**2000
11
12     In : m = Symbol('m', integer=True, positive=True)
13     In : simplify(diff(x**m, x))
14     Out: m*x**(m - 1)

```

**Observação 2.3.1.** Ao longo das notas de Cálculo, vamos estudar que a fórmula de derivação

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad (2.164)$$

vale para qualquer  $r$  número real não nulo, considerando-se o domínio natural das funções potência. Assim sendo, vamos assumir passar a aplicá-la para qualquer função potência a partir de agora.

**Exemplo 2.3.4.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $(x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$   
 b)  $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$   
 c)  $(x^e)' = ex^{e-1}$

Com [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      In : x = Symbol('x')
3      In : diff(x**(-1))
4      Out: -1/x**2
5
6      In : diff(x**(S(1)/2))
7      Out: 1/(2*sqrt(x))
8
9      In : diff(x**E)
10     Out: E*x**E/x

```

### 2.3.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \quad (2.165)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.166)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.167)$$

### Exercícios Resolvidos

**ER 2.3.1.** Calcule o ângulo de declividade da reta tangente ao gráfico de cada uma das seguintes funções em qualquer ponto fixado  $x = x_0$ .

a) Função constante  $f(x) \equiv k$

b) Função identidade  $f(x) = x$

**Solução.** O ângulo  $\theta$  de declividade da reta tangente ao gráfico de uma dada função  $f$  em um ponto  $x = x_0$  é

$$\theta = \arctg(f'(x_0)). \quad (2.168)$$

a) Função constante  $f(x) \equiv k$

Nesse caso,  $f'(x) = 0$  para todo  $x$ , logo

$$\begin{aligned} \theta &= \arctg(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Função identidade  $f(x) = x$

Nesse caso,  $f'(x) = 1$  para todo  $x$ , logo

$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arctg}(1) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

◇

**ER 2.3.2.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = x^2$  no ponto  $x = 1$ .

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $f$  em um ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (2.169)$$

Nesse caso,

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad (2.170)$$

Temos  $f(1) = (1)^2 = 1$ . Agora, pela derivada de função potência, temos

$$f'(x) = (x^2)' = 2x \quad (2.171)$$

Logo,

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (2.172)$$

Concluimos que equação da reta tangente é

$$y = 2(x - 1) + 1 \quad (2.173)$$

$$y = 2x - 1 \quad (2.174)$$

◇

## Exercícios

**Exercício 2.3.1.** Calcule as seguintes derivadas:

a)  $(7)'$

b)  $(-1, 7)'$

c)  $(\sqrt{2})'$

d)  $(\sec(\pi))'$

**Exercício 2.3.2.** Calcule as seguintes derivadas:

a)  $(x)'$

b)  $(x^3)'$

c)  $(\sqrt{x})'$

d)  $\left(\frac{1}{x}\right)'$

e)  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$

f)  $(x^\pi)'$

**Exercício 2.3.3.** Calcule as seguintes derivadas de ordem mais alta:

a)  $(2)''$

b)  $(2^{1001})'''$

c)  $[(-3)^4]^{(4)}$

**Exercício 2.3.4.** Calcule o coeficiente angular da reta tangente  $y = mx + b$  ao gráfico da função  $f(x) = x^3$  no ponto  $x = 0$ . Faça o esboço do gráfico desta função.

**Exercício 2.3.5.** Calcule o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico da função  $f(x) = x^2$  nos pontos  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 1$ . Faça, em um mesmo esboço, os gráficos de  $f$  e das retas tangentes calculadas.

## 2.4 Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Nesta seção vamos estudar a derivada de funções exponenciais e logarítmicas. Começamos com a definição no número de Euler<sup>3</sup> por limites.

### 2.4.1 Número de Euler

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O número de Euler  $e \approx 2,7183\dots$  pode ser definido pelo seguinte limite

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (2.175)$$

**Exemplo 2.4.1.** Consideremos os seguintes limites.

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{2}{h}}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{2}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right]^2 \quad (2.176)$$

$$= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right]^2 \quad (2.177)$$

$$= e^2 \quad (2.178)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: h = Symbol('h')
3      ...: limit((1+h)**(2/h), h, 0)
4      Out: exp(2)
```

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h)^{\frac{1}{h}}$

Para calcular este limite, podemos fazer a seguinte **mudança de variável**

$$u = 2h \quad (2.179)$$

donde, temos que  $u \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Então, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{2}{u}} \quad (2.180)$$

---

<sup>3</sup>Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

$$= e^2 \quad (2.181)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar este limite com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: h = Symbol('h')
3      ...: limit((1+2*h)**(1/h), h, 0)
4      Out: exp(2)
```

## 2.4.2 Derivada de Funções Exponenciais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vamos calcular a derivada da função exponencial

$$f(x) = a^x \quad (2.182)$$

com  $a > 0$ . Partindo da definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.183)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (2.184)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \quad (2.185)$$

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad (2.186)$$

Agora, fazemos a seguinte **mudança de variável**

$$u = a^h - 1 \quad (2.187)$$

donde,  $u \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$  e

$$h = \log_a(1 + u). \quad (2.188)$$

Com isso, voltando a (2.186) segue que

$$(a^x)' = a^x \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1 + u)} \quad (2.189)$$

$$= a^x \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \log_a(1+u)} \quad (2.190)$$

$$= a^x \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a \cancel{(1+u)}^{\frac{1}{u}} \rightarrow e} \quad (2.191)$$

$$= a^x \frac{1}{\log_a e} \quad (2.192)$$

Lembrando que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (2.193)$$

concluimos que

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (2.194)$$

No caso particular da **função exponencial natural**, temos

$$(e^x)' = e^x \ln e \quad (2.195)$$

ou seja,

$$(e^x)' = e^x \quad (2.196)$$

**Exemplo 2.4.2.** Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(2^x)' = 2^x \ln 2 \quad (2.197)$$

b)

$$\left[ \left( \frac{3}{2} \right)^x \right]' = \left( \frac{3}{2} \right)^x \ln \frac{3}{2} \quad (2.198)$$

c)

$$\left( e^{\frac{1}{2}x} \right)' = \left[ (\sqrt{e})^x \right]' \quad (2.199)$$

$$= (\sqrt{e})^x \ln \sqrt{e} \quad (2.200)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \quad (2.201)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar essas derivadas como segue:



```

1      In : from sympy import *
2      In : x = Symbol('x')
3      In : diff(2**x)
4      Out: 2**x*log(2)
5
6      In : diff((S(3)/2)**x)
7      Out: (3/2)**x*log(3/2)
8
9      In : diff(exp(x/2))
10     Out: exp(x/2)/2

```

### 2.4.3 Derivada de Funções Logarítmicas

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vamos calcular a derivada da função logarítmica

$$f(x) = \log_a x \quad (2.202)$$

com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Partimos da definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.203)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \quad (2.204)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \quad (2.205)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \quad (2.206)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (2.207)$$

Tendo em vista que<sup>4</sup>

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \quad (2.208)$$

obtemos

$$(\log_a x)' = \log_a e^{\frac{1}{x}} \quad (2.209)$$

---

<sup>4</sup>Consulte o Exercício [2.4.5](#)

$$= \frac{1}{x} \log_a e \quad (2.210)$$

$$= \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} \quad (2.211)$$

e concluímos que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (2.212)$$

Observamos que no caso particular da função logaritmo natural, segue que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (2.213)$$

**Exemplo 2.4.3.** Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2} \quad (2.214)$$

b)

$$\left(\log_{\frac{3}{2}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{3}{2}} \quad (2.215)$$

c)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (2.216)$$

#### 2.4.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \quad (2.217)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.218)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.219)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (2.220)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2.221)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (2.222)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (2.223)$$

## Exercícios Resolvidos

**ER 2.4.1.** Mostre que

$$e = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \quad (2.224)$$

**Solução.** Tendo em mente a definição dada na Equação 2.175, fazemos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{1}{h} \quad (2.225)$$

donde,  $u \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow \infty$ . Logo, temos

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} \quad (2.226)$$

$$= e. \quad (2.227)$$

◇

**ER 2.4.2.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = \ln x$  no ponto  $x = 1$ .

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $y = f(x)$  no ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.228)$$

Neste exercício, temos  $x_0 = 1$  e  $f(x) = \ln x$ . Então, calculamos

$$f'(x) = (\ln x)' \quad (2.229)$$

$$= \frac{1}{x} \quad (2.230)$$

No ponto  $x_0 = 1$ , temos  $f'(x_0) = 1/x_0 = 1$ . Logo, a equação da reta tangente é

$$y = 1 \cdot (x - 1) + f(1) \quad y = x - 1 + 0 \quad (2.231)$$

$$y = x - 1 \quad (2.232)$$

◇

## Exercícios

**Exercício 2.4.1.** Calcule:

a)  $(3^x)'$

b)  $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]'$

**Exercício 2.4.2.** Calcule:

a)  $\left(\frac{2^x}{5^x}\right)'$

b)  $(e^{2x})'$

**Exercício 2.4.3.** Calcule:

1.  $(\log_3 x)'$

2.  $(\log_{\frac{2}{5}} x)'$

3.  $(\ln x)'$

**Exercício 2.4.4.** Mostre que

$$e^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \quad (2.233)$$

**Exercício 2.4.5.** Mostre que

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \quad (2.234)$$

## 2.5 Regas Básicas de Derivação

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

### 2.5.1 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam  $k$  um número real,  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ .

De fato, pela definição da derivada temos

$$(k \cdot u)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \quad (2.235)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \left( \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \quad (2.236)$$

$$= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - \cancel{u(x)}}{h} \xrightarrow{u'} \quad (2.237)$$

$$= k \cdot u'. \quad (2.238)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

```
1 from sympy import *
2 k = Symbol('k', real=True)
3 u = Function('u', real=True)
4 diff(k*u(x), x)
```

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .

De fato, temos

$$(u + v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x+h) - (u + v)(x)}{h} \quad (2.239)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} \quad (2.240)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - \cancel{u(x)}}{h} \xrightarrow{u'} \right] \quad (2.241)$$

$$+ \left[ \frac{v(x+h) - \cancel{v(x)}}{h} \xrightarrow{v'} \right] \quad (2.242)$$

$$= u'(x) + v'(x). \quad (2.243)$$

Também, como  $(-v)' = (-1 \cdot v)' = -1 \cdot v' = -v'$ , temos

$$(u - v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \quad (2.244)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
1      from sympy import *
2      u = Function('u', real=True)
3      v = Function('v', real=True)
4      diff(u(x)+v(x), x)
```

**Exemplo 2.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $f(x) = 2x$ .

Para calcularmos  $f'$ , podemos identificar  $f = k \cdot u$ , com  $k = 2$  e  $u(x) = x$ . Então, usando a regra da multiplicação por constante  $(ku)' = ku'$ , temos

$$f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2 \cdot 1 = 2. \quad (2.245)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      diff(2*x, x)
```

b)  $f(x) = 2x + 3$ .

Observamos que  $f = u + v$ , com  $u(x) = 2x$  e  $v(x) \equiv 3$ . Então, da regra da soma  $(u + v)' = u' + v'$ , temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \quad (2.246)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x')
3      diff(2*x+3, x)
```

c)  $f(x) = e^x - x^2$ .

Observamos que  $f = u - v$ , com  $u(x) = e^x$  e  $v(x) = x^2$ . Usando a regra da subtração  $(u - v)' = u' - v'$  temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \quad (2.247)$$

No [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o comando:

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x')
3      diff(exp(x)-x**2,x)
```

## 2.5.2 Regras do produto e do quociente

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam  $y = u(x)$  e  $y = v(x)$  funções deriváveis. Então:

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ .

De fato, da definição da derivada temos

$$(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \quad (2.248)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (2.249)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \right. \quad (2.250)$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (2.251)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \quad (2.252)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \quad (2.253)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (2.254)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```

1      u = Function('u', real=True)
2      v = Function('v', real=True)
3      diff(u(x)*v(x), x)

```

•  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , no caso de  $v(x) \neq 0$ .

De fato, da definição de derivada temos

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \quad (2.255)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \quad (2.256)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (2.257)$$

$$- \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \left] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (2.258)$$

$$= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \right] \quad (2.259)$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \left] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (2.260)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad (2.261)$$

No [SymPy](#), podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      u = Function('u', real=True)
4      v = Function('v', real=True)
5      simplify(diff(u(x)/v(x), x))

```

**Exemplo 2.5.2.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função  $f(x) = x^2(x-1)$  de duas formas.



1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$f'(x) = [x^2(x-1)]' \quad (2.262)$$

$$= (x^3 - x^2)' \quad (2.263)$$

$$= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \quad (2.264)$$

$$= 3x^2 - 2x, \quad (x^n)' = nx^{n-1}. \quad (2.265)$$

2. Utilizando a regra do produto.

Observamos que  $f = u \cdot v$ , com  $u(x) = x^2$  e  $v(x) = x - 1$ . Então, da regra do produto  $(uv)' = u'v + uv'$ , com  $u'(x) = 2x$  e  $v'(x) = 1$ , temos

$$f'(x) = [\overbrace{x^2}^u \overbrace{(x-1)}^v]' \quad (2.266)$$

$$= \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{u' \cdot v} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{u \cdot v'} \quad (2.267)$$

$$= 2x^2 - 2x + x^2 \quad (2.268)$$

$$= 3x^2 - 2x. \quad (2.269)$$

**Exemplo 2.5.3.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = 1/x^2$  para  $x \neq 0$ . Observamos que  $f = (u/v)$  com  $u(x) \equiv 1$  e  $v(x) = x^2$ . Tendo em vista que  $u'(x) \equiv 0$  e  $v'(x) = 2x$ , temos da regra do quociente que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \quad (2.270)$$

$$= \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}, \quad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \quad (2.271)$$

$$= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \quad (2.272)$$

$$= -2x^{-3}. \quad (2.273)$$

**Observação 2.5.1.** Com abuso de linguagem, temos

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (2.274)$$

com  $n$  inteiro. No caso de  $n = 1$ , temos  $(x)' \equiv 1$ . No caso de  $n \leq 0$ , devemos ter  $x \neq 0$ <sup>5</sup>. Mais ainda, a regra também vale para  $n = 1/2$ , veja o Exemplo 2.2.2.

**Exemplo 2.5.4.** Voltando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.3), temos

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \quad (2.275)$$

**Exemplo 2.5.5.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = xe^x$ . Usando a regra do produto  $(uv)' = u'v + uv'$  com  $u(x) = x$  e  $v(x) = e^x$ , temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \quad (2.276)$$

$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u' \cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u \cdot v'} \quad (2.277)$$

$$= (x + 1)e^x. \quad (2.278)$$

### 2.5.3 Lista de derivadas

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (2.279)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (2.280)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (2.281)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (2.282)$$

$$(k)' = 0 \quad (2.283)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.284)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.285)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (2.286)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2.287)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (2.288)$$

<sup>5</sup>Devido a indeterminação de  $0^0$  e a inexistência de  $0^n$  com  $n$  negativo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (2.289)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.5.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \quad (2.290)$$

**Solução.**

$$f'(x) = \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2\right]}'^{(u-v)'} \quad (2.291)$$

$$= \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3)\right]}'^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \quad (2.292)$$

$$= (x^2 + x)'(1 + x^3) + (x^2 + x)(1 + x^3)' - 2(x^2)' \quad (2.293)$$

$$= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 - 4x \quad (2.294)$$

$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \quad (2.295)$$

$$= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \quad (2.296)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2*x**2,x)
4 simplify(d)
```

◇

**ER 2.5.2.** Calcule

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right). \quad (2.297)$$

**Solução.** Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right) = \frac{(x^2 + x)'(1 - x^3) - (x^2 + x)(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2} \quad (2.298)$$

$$= \frac{(2x+1)(1-x^3) + (x^2+x)3x^2}{1-2x^3+x^6} \quad (2.299)$$

$$= \frac{2x-2x^4+1-x^3+3x^4+3x^3}{1-2x^3+x^6} \quad (2.300)$$

$$= \frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^6-2x^3+1} \quad (2.301)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 d = diff((x**2+x)/(1-x**3), x)
4 simplify(d)
```

◇

**ER 2.5.3.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = xe^{-x}$  no ponto  $x = 1$ .

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $f$  no ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.302)$$

No caso, temos  $f(x) = xe^{-x}$  e  $x_0 = 1$ . Calculamos

$$f'(x) = [xe^{-x}]' = \left[ \frac{x}{e^x} \right] \quad (2.303)$$

$$= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \quad (2.304)$$

$$= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \quad (2.305)$$

$$= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \quad (2.306)$$

$$= (1-x)e^xe^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \quad (2.307)$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \quad (2.308)$$

$$y = 0 \cdot (x - 1) + e^{-1} \quad (2.309)$$

$$y = \frac{1}{e}. \quad (2.310)$$

Na Figura 2.7, temos os esboços dos gráfico da função  $f$  e sua reta tangente no ponto  $x = 1$ .

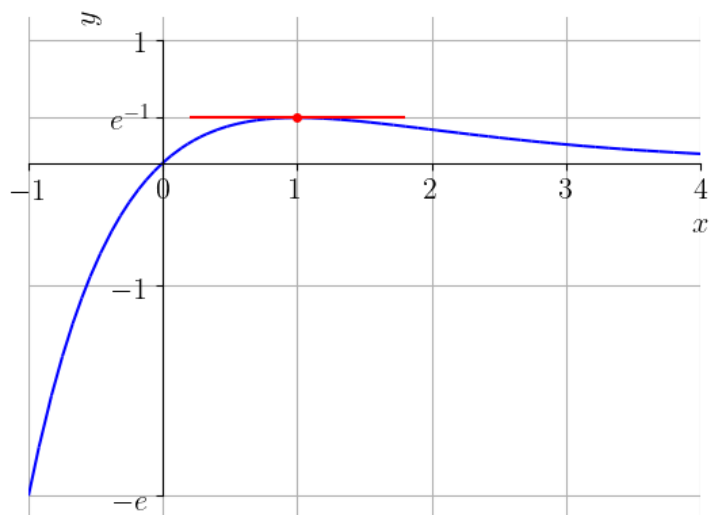


Figura 2.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = xe^{-x}$  no ponto  $x = 1$ .

Com o [SymPy](#), podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos:

```
1  from sympy import *
2  x = Symbol('x')
3  f = x*exp(-x)
4  x0 = 1
5  f1 = diff(f,x)
6  # y =
7  f1.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.5.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = 2 - 5x^3$

b)  $g(x) = (2x - 1)(2 - 4x^2)$

c)  $h(x) = \frac{2 - 4x^2}{2x - 1}$

**Exercício 2.5.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = xe^x$

b)  $g(x) = xe^{2x}$

c)  $g(x) = xe^{-2x}$

**Exercício 2.5.3.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \ln x^2$

b)  $g(x) = x \ln x^2$

c)  $g(x) = x \ln x^2 e^x$

**Exercício 2.5.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x = 1$ .

## 2.6 Derivadas de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\operatorname{sen}' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \quad (2.311)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(h) + \cos(x) \operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen} x}{h} \quad (2.312)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad (2.313)$$

$$= \operatorname{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \quad (2.314)$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que<sup>6</sup>

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0. \quad (2.315)$$

Logo, temos

$$\mathbf{\operatorname{sen}' x = \cos x.} \quad (2.316)$$

De forma similar, temos

$$\cos' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad (2.317)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(h) - \cos x}{h} \quad (2.318)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \operatorname{sen}(x) \frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad (2.319)$$

$$= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \operatorname{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \quad (2.320)$$

Ou seja,

$$\mathbf{\cos' x = -\operatorname{sen} x.} \quad (2.321)$$

**Exemplo 2.6.1.** A derivada de  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$  é

$$f'(x) = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)' \quad (2.322)$$

$$= (\operatorname{sen}^2 x)' + (\cos^2 x)' \quad (2.323)$$

$$= (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x)' + (\cos x \cdot \cos x)' \quad (2.324)$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen} x \quad (2.325)$$

$$= 0, \quad (2.326)$$

conforme esperado.

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)
```

---

<sup>6</sup>Veja a Seção 1.7.3.

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$

Dem.:

$$\operatorname{tg}' x = \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' \quad (2.327)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \quad (2.328)$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (2.329)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \left( \frac{1}{\cos x} \right)^2 \quad (2.330)$$

$$= \sec^2 x. \quad (2.331)$$

- $\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x$

Dem.:

$$\operatorname{cotg}' x = \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' \quad (2.332)$$

$$= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (2.333)$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (2.334)$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = - \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^2 \quad (2.335)$$

$$= \operatorname{cossec}^2 x. \quad (2.336)$$

- $\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$

Dem.:

$$\sec' x = \left( \frac{1}{\cos x} \right)' \quad (2.337)$$

$$= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} \quad (2.338)$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad (2.339)$$



$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \quad (2.340)$$

$$= \operatorname{tg} x \sec x. \quad (2.341)$$

$$\bullet \operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cotg x$$

Dem.:

$$\operatorname{cosec}' x = \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)' \quad (2.342)$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (2.343)$$

$$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad (2.344)$$

$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (2.345)$$

$$= -\cotg x \operatorname{cosec} x. \quad (2.346)$$

**Observação 2.6.1.** Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

**Exemplo 2.6.2.** A derivada em relação a  $x$  de

$$f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \quad (2.347)$$

pode ser calculada como segue

$$f'(x) = \left( \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \right)' \quad (2.348)$$

$$= \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec' x}{\sec^2 x} \quad (2.349)$$

$$= \frac{(1 + \sec^2 x) \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} \quad (2.350)$$

$$= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\sec x}. \quad (2.351)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff((x+tan(x))/sec(x), x)
```

### 2.6.1 Lista de derivadas

$$(ku)' = ku' \quad (2.352)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (2.353)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (2.354)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (2.355)$$

$$(k)' = 0 \quad (2.356)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.357)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.358)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (2.359)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2.360)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (2.361)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (2.362)$$

$$\text{sen}' x = \cos x \quad (2.363)$$

$$\cos' x = -\text{sen } x \quad (2.364)$$

$$\text{tg}' x = \sec^2 x \quad (2.365)$$

$$\cotg' x = -\text{cossec}^2 x \quad (2.366)$$

$$\sec' x = \sec x \text{tg } x \quad (2.367)$$

$$\text{cossec}' x = -\text{cossec } x \cotg x \quad (2.368)$$

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 2.6.1.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $y = \text{sen } x$  no ponto  $x = 0$ . Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $y = f(x)$  no ponto  $x = x_0$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2.369)$$

No caso deste exercício, temos  $f(x) = \sin x$  e  $x_0 = 0$ . Assim sendo, calculamos a derivada em relação a  $x$  de  $f(x)$ , i.e.

$$f'(x) = \sin' x = \cos x. \quad (2.370)$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad (2.371)$$

$$y = \cos(0)(x - 0) + \sin(0) \quad (2.372)$$

$$y = x. \quad (2.373)$$

Na Figura 2.8, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

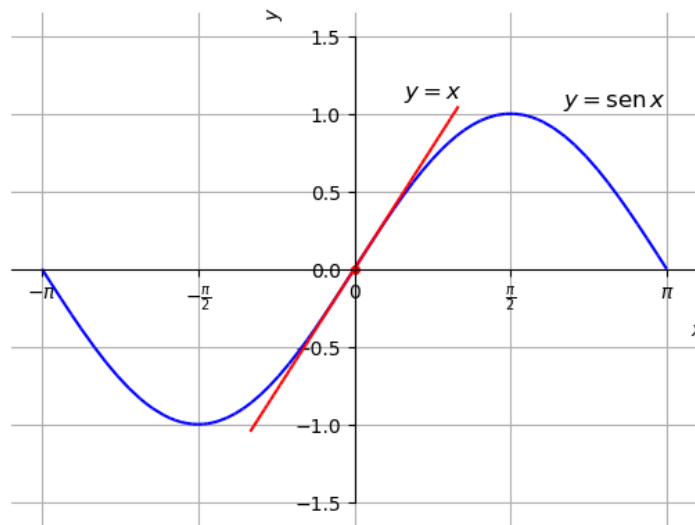


Figura 2.8: Esboço dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto  $x = 0$ .

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 f = sin(x)
4 x0 = 0
5
```

```

6      # reta tangente
7      rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
8      print("Reta tangente: y = %s" % rt)
9
10     # graficos
11     plot(f,rt,(x,-pi,pi))

```

◇

**ER 2.6.2.** Resolva a equação

$$\sec'(x) = 0, \quad (2.374)$$

para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Solução.** Temos

$$0 = \sec'(x) \quad (2.375)$$

$$= \sec(x) \operatorname{tg}(x) \quad (2.376)$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad (2.377)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \quad (2.378)$$

donde segue que

$$\operatorname{sen}(x) = 0. \quad (2.379)$$

Por fim, observamos que para  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , a função seno se anula somente em  $x = \pi$ , a qual é a solução da equação.

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.6.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

a)  $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$

b)  $g(x) = \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)$

$$c) \ h(x) = \frac{2 \operatorname{tg}(x)}{\sec(x)}$$

**Exercício 2.6.2.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $y = \cos x$  no ponto  $x = 0$ . Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**Exercício 2.6.3.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

$$a) \ f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$$

$$b) \ g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$$

$$c) \ g(x) = \sec(x) - \operatorname{cossec}(x)$$

## 2.7 Regra da cadeia

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam  $f$  e  $g$ , com  $g$  derivável em  $x$  e  $f$  derivável em  $g(x)$ , então  $(f \circ g)$  é derivável em  $x$ , sendo

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad (2.380)$$

chamada de regra da cadeia.

**Exemplo 2.7.1.** A derivada em relação a  $x$  de  $h(x) = (x + 1)^2$  pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

A função  $h$  é a composição da função  $f(x) = x^2$  com a função  $g(x) = x + 1$ , i.e.  $h(x) = f(g(x))$ . Temos  $f'(x) = 2x$  e  $g'(x) = 1$ . Então, segue pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \quad (2.381)$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (2.382)$$

$$= 2(x + 1) \cdot 1 \quad (2.383)$$

$$= 2x + 2. \quad (2.384)$$

b) por cálculo direto.

Observando que  $h(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ , temos

$$h'(x) = (x^2 + 2x + 1)' \quad (2.385)$$

$$= (x^2)' + (2x)' + (1)' \quad (2.386)$$

$$= 2x + 2. \quad (2.387)$$

Com o [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff((x+1)**2, x)
4 2*x + 2
```

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}, \quad (2.388)$$

onde  $u$  é uma função derivável em  $x$  e  $f$  é derivável em  $u(x)$ .

**Observação 2.7.1.** (Derivada de função potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad (2.389)$$

para qualquer  $n$  inteiro<sup>7</sup>. Agora, se  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$  é um número real, temos

$$y = x^r \quad (2.390)$$

$$\ln y = \ln x^r = r \ln x. \quad (2.391)$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação e observando que  $y = y(x)$ , obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} r \ln x \quad (2.392)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \quad (2.393)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y \quad (2.394)$$

---

<sup>7</sup>Mais precisamente, para  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ .

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}. \quad (2.395)$$

Ou seja, a regra da potência

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \quad (2.396)$$

vale para todo  $r$  real, com  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$ .

**Exemplo 2.7.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \quad (2.397)$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad (2.398)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (2.399)$$

b)

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}. \quad (2.400)$$

**Observação 2.7.2.** A regra da cadeia aplicada a derivada de função potência é

$$\frac{d}{dx}u^r = ru^{r-1}\frac{du}{dx}. \quad (2.401)$$

**Exemplo 2.7.3.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (2.402)$$

Vamos usar (2.401), com

$$u = x^2 + 1 \quad (2.403)$$

e  $r = 1/2$ . Segue que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx} \quad (2.404)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \quad (2.405)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (2.406)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sqrt(x**2+1), x)
4 x/sqrt(x**2 + 1)
```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' \quad (2.407)$$

$$= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (2.408)$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que  $h$  é derivável em  $x$  com  $g$  derivável em  $h(x)$  e  $f$  derivável em  $f(g(h(x)))$ .

**Exemplo 2.7.4.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  de  $f(x) = \text{sen}(\cos(x^2))$ . Pela regra da cadeia, temos

$$[\text{sen}(\cos(x^2))]' = \cos(\cos(x^2)) \cdot [\cos(x^2)]' \quad (2.409)$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\text{sen}(x^2) \cdot (x^2)'] \quad (2.410)$$

$$= -\cos(\cos(x^2)) \cdot \text{sen}(x^2) \cdot 2x. \quad (2.411)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(sin(cos(x**2)))
4 -2*x*sin(x**2)*cos(cos(x**2))
```

### 2.7.1 Lista de derivadas

$$(ku)' = ku' \quad (2.412)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (2.413)$$



$$(uv)' = u'v + uv' \quad (2.414)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (2.415)$$

$$(k)' = 0 \quad (2.416)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.417)$$

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad (2.418)$$

$$\frac{da^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad (2.419)$$

$$\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx} \quad (2.420)$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (2.421)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos(u) \frac{du}{dx} \quad (2.422)$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.423)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \quad (2.424)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cosec}^2(u) \frac{du}{dx} \quad (2.425)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.426)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.427)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 2.7.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  de

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}. \quad (2.428)$$

**Solução.** Da regra da cadeia aplicada à função exponencial, temos

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}. \quad (2.429)$$

Então, com  $u = \sqrt{x+1}$ , segue

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x+1}} \quad (2.430)$$

$$= e^{\sqrt{x+1}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x+1}). \quad (2.431)$$

Agora, aplicamos a regra da cadeia para a função raiz quadrada, i.e.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}, \quad (2.432)$$

com  $u = x + 1$ . Segue, então

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} (x+1)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx} (x+1) \quad (2.433)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \quad (2.434)$$

Portanto, concluímos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}. \quad (2.435)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(exp(sqrt(x+1)), x)
4 exp(sqrt(x + 1))/(2*sqrt(x + 1))
```

◇

**ER 2.7.2.** Mostre que a [função logística](#)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (2.436)$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} f(x) = f(x)(1 - f(x)). \quad (2.437)$$

**Solução.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função logística, i.e.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \quad (2.438)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ \left( 1 + e^{-x} \right)^{-1} \right] \quad (2.439)$$

$$= -1 \cdot \left( 1 + e^{-x} \right)^{-2} \cdot \underbrace{\left( 1 + e^{-x} \right)'}_{=-e^{-x}} \quad (2.440)$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left( 1 + e^{-x} \right)^2}. \quad (2.441)$$

Por outro lado, temos

$$f(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) \quad (2.442)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left( \frac{1 + e^{-x} - 1}{1 + e^{-x}} \right) \quad (2.443)$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left( 1 + e^{-x} \right)^2}. \quad (2.444)$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)(1 - f(x)). \quad (2.445)$$

◇

**ER 2.7.3.** Assuma que o custo de produção de uma unidade empresarial seja modelada pela função

$$c(x) = \sqrt{x - 1} + e^{x-7}, \quad (2.446)$$

onde  $c$  é o custo em função da produção  $x$ . Determine o custo marginal quando  $x = 3$ .

**Solução.** O custo marginal é a função derivada do custo em relação à produção. Calculando, temos

$$c'(x) = \left( \sqrt{x - 1} + e^{x-7} \right) \quad (2.447)$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt{x-1}\right)'}_{(u^n)'=nu^{n-1}u'} + \underbrace{\left(e^{x-7}\right)'}_{(e^u)'=e^u u'} \quad (2.448)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + e^{x-7}. \quad (2.449)$$

Logo, o custo marginal quando  $x = 3$  é

$$c'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3-1}} + e^{3-7} = \sqrt{2} + e^{-4}. \quad (2.450)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 2.7.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = (2x - 3)^9$

b)  $g(x) = \frac{1}{(2x - 3)^{51}}$

c)  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

**Exercício 2.7.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = 2^{3x-1}$

b)  $g(x) = e^{-x^2}$

**Exercício 2.7.3.** Calcule as seguintes derivadas

a)  $\left[\ln(x^2 - 1)\right]'$

b)  $\frac{d}{dx} [\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1)]$

**Exercício 2.7.4.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções

a)  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$

- b)  $g(x) = \cos(\sqrt{x})$
- c)  $h(x) = \operatorname{tg}(2x)$
- d)  $u(x) = \operatorname{cotg}(3 - x)$
- e)  $v(x) = \sec\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- f)  $z(x) = \operatorname{cossec}(5x + x^2)$

**Exercício 2.7.5.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \quad (2.451)$$

no ponto  $x = 3$ .

## 2.8 Diferenciabilidade da função inversa

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja  $f$  uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto  $I$ . Então, pode-se mostrar que sua inversa  $f^{-1}$  é diferenciável em qualquer ponto da imagem da  $f$  no qual  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (2.452)$$

**Exemplo 2.8.1.** Seja  $f(x) = (2x - 1)^2$  para  $x > 1/2$ . Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = (2x - 1)^2 \quad (2.453)$$

$$\sqrt{y} = 2x - 1 \quad (2.454)$$

$$x = \frac{\sqrt{y} + 1}{2} \quad (2.455)$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1). \quad (2.456)$$

Calculando a derivada de  $f^{-1}$  diretamente, temos

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{x} + 1)' \quad (2.457)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (2.458)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad (2.459)$$

Agora, usando (2.452) e observando que  $f'(x) = 8x - 4$ , obtemos

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (2.460)$$

$$= \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{x} + 1) - 4}, \quad (2.461)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad (2.462)$$

como esperado.

**Observação 2.8.1.** (Derivada da função logarítmica)

- Tomando  $f(x) = e^x$  temos  $f^{-1}(x) = \ln x$  e, daí por (2.452)

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (2.463)$$

- Tomando  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos  $f^{-1}(x) = \log_a x$  e, por (2.452),

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (2.464)$$

**Exemplo 2.8.2.** Vamos calcular a derivada em relação a  $x$  da função

$$f(x) = \ln \frac{1}{x}. \quad (2.465)$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada da função logarítmica, temos

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \quad (2.466)$$

Portanto, temos

$$f'(x) = \left( \ln \frac{1}{x} \right)' \quad (2.467)$$

$$= \frac{1}{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) \quad (2.468)$$

$$= -\frac{1}{x}. \quad (2.469)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(log(1/x), x)
4 -1/x
```

### 2.8.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja  $f(x) = \sin x$  restrita a  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ . Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \arcsin x. \quad (2.470)$$

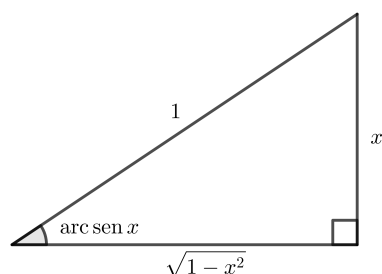


Figura 2.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (2.452) com  $f(x) = \sin x$  e  $f'(x) = \arcsin x$ , donde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}. \quad (2.471)$$

Como  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$  (veja Figura 2.9), concluímos

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (2.472)$$

**Exemplo 2.8.3.** A regra da cadeia aplicada à derivada da função arco seno é

$$\frac{d}{dx} \arcsen u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}. \quad (2.473)$$

Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \arcsen x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}. \quad (2.474)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(asin(x**2), x)
4 2*x/sqrt(-x**4 + 1)
```

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (2.475)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad (2.476)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (2.477)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2.478)$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \quad (2.479)$$

**Exemplo 2.8.4.** A regra da cadeia aplicada a função arco tangente é

$$\frac{d}{dx} \arctg u = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}. \quad (2.480)$$



Por exemplo, temos

$$\frac{d}{dx} \arctan \sqrt{x} = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} \sqrt{x} \quad (2.481)$$

$$= \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}. \quad (2.482)$$

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 diff(atan(sqrt(x)))
4 1/(2*sqrt(x)*(x + 1))
```

## 2.8.2 Lista de derivadas

[[Vídeo](#)] | [[Áudio](#)] | [[Contatar](#)]

$$(ku)' = ku' \quad (2.483)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (2.484)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (2.485)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (2.486)$$

$$(k)' = 0 \quad (2.487)$$

$$(x)' = 1 \quad (2.488)$$

$$\frac{d}{dx} u^r = ru^{r-1} \frac{du}{dx} \quad (2.489)$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad (2.490)$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \quad (2.491)$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} \quad (2.492)$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (2.493)$$

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos(u) \frac{du}{dx} \quad (2.494)$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.495)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} u = \sec^2(u) \frac{du}{dx} \quad (2.496)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cosec}^2(u) \frac{du}{dx} \quad (2.497)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.498)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \frac{du}{dx} \quad (2.499)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (2.500)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (2.501)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad (2.502)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad (2.503)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad (2.504)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad (2.505)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 2.8.1.** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x = 1$ . Faça, então, um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x_0 = 1$  é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (2.506)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1). \quad (2.507)$$

Observando que

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (2.508)$$

temos que a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1 \quad (2.509)$$

$$y = x - 1. \quad (2.510)$$

Na Figura 2.10, temos um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

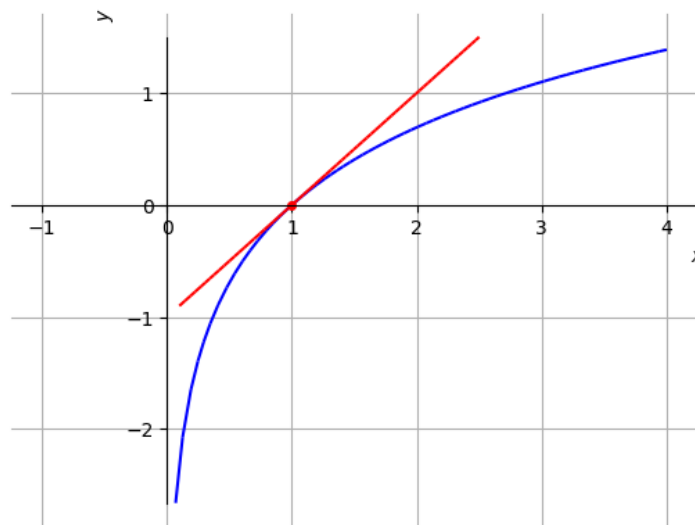


Figura 2.10: Esboço dos gráficos da função logarítmica natural e da reta tangente no ponto  $x = 1$ .

No [SymPy](#), temos:

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 rt = diff(log(x)).subs(x,1)*(x-1)+log(1)
4 print("y = %s" % rt)
5 y = x - 1
```

◇

**ER 2.8.2.** Resolva a equação

$$\frac{d}{dx} \arctan x = 1. \quad (2.511)$$

**Solução.** Lembrando que

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad (2.512)$$

temos

$$\frac{d}{dx} \arctan x = 1 \quad (2.513)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 \quad (2.514)$$

$$1+x^2 = 1 \quad (2.515)$$

$$x^2 = 0 \quad (2.516)$$

$$x = 0. \quad (2.517)$$

◇

**ER 2.8.3.** Calcule

$$\frac{d}{dx} x^x. \quad (2.518)$$

**Solução.** Observamos que

$$y = x^x \quad (2.519)$$

$$\ln y = \ln x^x \quad (2.520)$$

$$\ln y = x \ln x. \quad (2.521)$$

Agora, derivando em relação a  $x$  ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln x) \quad (2.522)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x \quad (2.523)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) \quad (2.524)$$

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x(1 + \ln x). \quad (2.525)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 2.8.1.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \log_2 x^2$

b)  $g(x) = \ln(xe^x)$

**Exercício 2.8.2.** Calcule a derivada em relação a  $x$  das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b)  $g(x) = (1 + 2x)^e$

**Exercício 2.8.3.** Calcule

$$\frac{d}{dx}(1+x)^x. \quad (2.526)$$

**Exercício 2.8.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = \arctg x$  no ponto  $x = 0$ .

## 2.9 Derivação implícita

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja  $y = y(x)$  definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \quad (2.527)$$

A derivada  $dy/dx$  pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}g(y(x)) = \frac{d0}{dx} \quad (2.528)$$

$$g'(y(x))\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.529)$$

**Exemplo 2.9.1.** Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.530)$$

Aqui, vamos calcular  $dy/dx$  de duas maneiras diferentes.

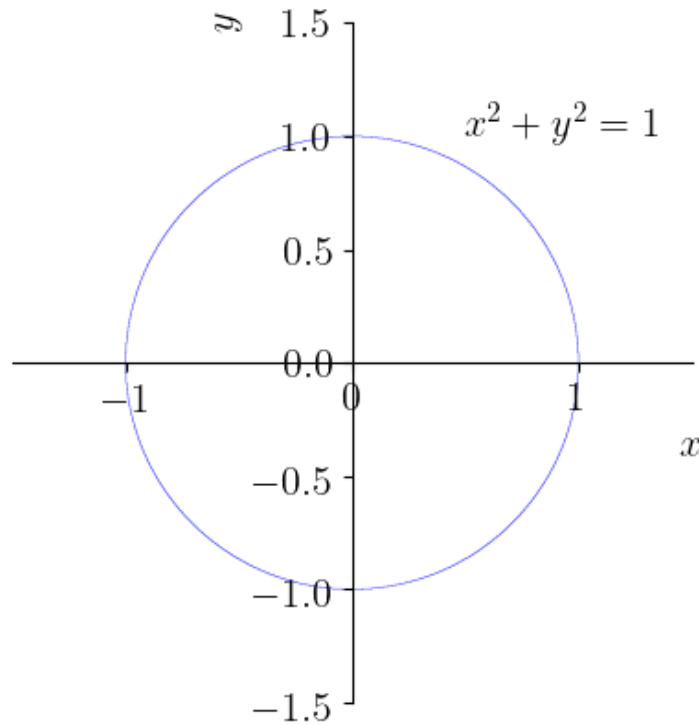


Figura 2.11: Esboço do gráfico da circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$ .

a) Por derivação direta. Isolando  $y$  em (2.530), temos

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad (2.531)$$

o que está bem definido para  $-1 \leq x \leq 1$ . Calculando a derivada, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\pm\sqrt{1-x^2}) \quad (2.532)$$

$$= \pm \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (2.533)$$

$$= \mp \frac{x}{y} \quad (2.534)$$

Ou seja, para  $y < 0$ , temos  $y' = x/y$  e, para  $y > 0$ , temos  $y' = -x/y$ . Logo, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (2.535)$$

b) Por derivação implícita. Derivamos ambos os lados da (2.530) em relação a  $x$

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d1}{dx} \quad (2.536)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2(x)) = 0 \quad (2.537)$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.538)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.539)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (2.540)$$

**Observação 2.9.1** (Derivadas de potências racionais de  $x$ ). Vamos mostrar que

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}, \quad (2.541)$$

para qualquer **número racional**  $r \neq 0$ . Denotando  $r = m/n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos

$$y = x^{m/n} \quad (2.542)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2.543)$$

$$y^n = x^m \quad (2.544)$$

Da derivação de função potência com expoente inteiro, temos

$$\frac{d}{dx} y^n = \frac{d}{dx} x^m \quad (2.545)$$

$$n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = m x^{m-1} \quad (2.546)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1} y^{1-n} \quad (2.547)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1} \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-n} \quad (2.548)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1} x^{\frac{m}{n}(1-n)} \quad (2.549)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1+\frac{m}{n}(1-n)} \quad (2.550)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}. \quad (2.551)$$

Logo, segue o resultados que queríamos demonstrar.

**Exemplo 2.9.2.** Vamos calcular  $\frac{d^2y}{dx^2}$  para

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.552)$$

Primeiramente, precisamos calcular  $dy/dx$ . Isso foi feito no Exemplo 2.9.1, onde obtivemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (2.553)$$

Antes de derivarmos novamente, vamos reescrever essa última expressão da seguinte forma

$$y \frac{dy}{dx} = -x \quad (2.554)$$

Derivando

$$\frac{d}{dx} \left[ y \frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} [-x] \quad (2.555)$$

$$1 \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = -1 \quad (2.556)$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = -1 \quad (2.557)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2}{y^2} - 1. \quad (2.558)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.9.1.** Calcule  $dy/dx$  para a lemniscata de Bernoulli<sup>8</sup>

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \quad (2.559)$$

---

<sup>8</sup>Jacob Bernoulli, 1655 - 1705, matemático suíço. Fonte: [Wikipédia](#).



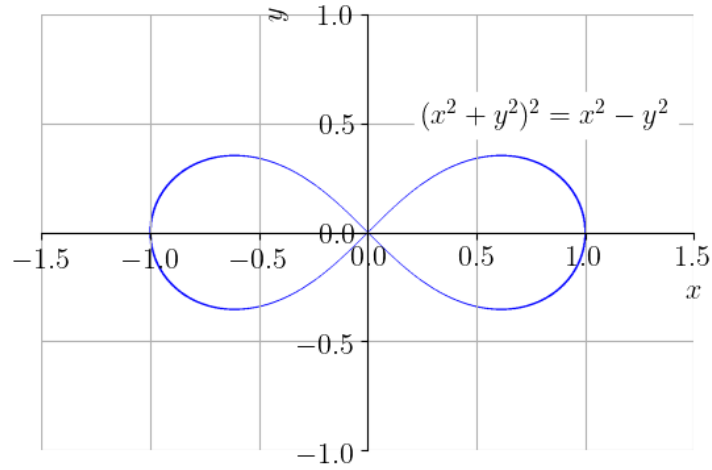


Figura 2.12: Esboço da lemniscata de Bernoulli  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ .

**Solução.**

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx} [x^2 - y^2] \quad (2.560)$$

$$2(x^2 + y^2) \left( 2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 2x - 2y \frac{dy}{dx} \quad (2.561)$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$2(y + 2x^2y + 2y^2) \frac{dy}{dx} = 2x - 4xy^2 - 4x^3 \quad (2.562)$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2x^3 - 2xy^2}{y + 2x^2y + 2y^3} \quad (2.563)$$

◇

**ER 2.9.2.** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2.564)$$

no ponto  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função  $y = y(x)$  no ponto  $(x_0, y(x_0))$  é dada por

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \quad (2.565)$$

onde, nesse caso,  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (2.566)$$

Calculamos  $dy/dx$  como segue

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d1}{dx} \quad (2.567)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2(x)) = 0 \quad (2.568)$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.569)$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.570)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (2.571)$$

Com isso, temos

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)} \quad (2.572)$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2.573)$$

$$= -1. \quad (2.574)$$

Concluimos que a equação da reta tangente é

$$y = -1 \cdot \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.575)$$

$$y = -x + \sqrt{2}. \quad (2.576)$$

◇

## Exercícios

**Exercício 2.9.1.** Calcule  $dy/dx$  para:

a)  $x + 2xy - x^3 = 3$

b)  $x^2 + y^2 = xy$

**Exercício 2.9.2.** Calcule  $d^2y/dx^2$  para

$$x^2 + y^2 = xy \quad (2.577)$$

**Exercício 2.9.3.** Encontre o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de

$$y^2 = x - 1 \quad (2.578)$$

nos pontos  $(2, -1)$  e  $(2, 1)$ .

**Exercício 2.9.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência de centro  $C = (1,1)$  e raio  $r = 1$  que passa pela origem  $O = (0,0)$ .

**Exercício 2.9.5.** Seja  $c$  a circunferência de raio  $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.579)$$

Mostra que a reta tangente ao gráfico de  $c$  em qualquer ponto arbitrário  $P = (x_0, y_0) \in c$  é perpendicular a reta  $\overline{OP}$ , i.e. a reta que passa pela origem  $O = (0,0)$  e pelo ponto  $P$ .

## Capítulo 3

# Aplicações da derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Observação 3.0.1.** Nos códigos [SymPy](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x', real=True)
```

### 3.1 Regra de L'Hôpital

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A regra de L'Hôpital é uma técnica para o cálculo de limites de indeterminações. Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis em um intervalo aberto contendo  $x = a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (3.1)$$

Se, ainda,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  existe ou for  $\pm\infty$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.2)$$

Esta é a versão da regra de L'Hôpital para indeterminações do tipo  $0/0$ . Sem grandes modificações, é diretamente estendida para os casos  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 3.1.1.** Vamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}. \quad (3.3)$$

a) Pela regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x^2-1)'} \quad (3.4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

b) Por eliminação do fator comum.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \quad (3.7)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

No [SymPy<sup>1</sup>](#), temos

```
>>> limit((x-1)/(x**2-1),x,1)
1/2
```

**Exemplo 3.1.2.** O limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} \quad (3.10)$$

é uma indeterminação 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{2x} - \cancel{4} \rightarrow 0}{\cancel{3x^2} - \cancel{6x} \rightarrow 0} \quad (3.11)$$

que também é uma indeterminação do tipo 0/0. Agora, aplicando a regra de L'Hôpital novamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{3x^2-6x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{6x-6} = \frac{1}{3}. \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>Veja a Observação 3.0.1.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{1}{3}. \quad (3.13)$$

No [SymPy](#)<sup>2</sup>, temos

```
>>> limit((x**2-4*x+4)/(x**3-3*x**2+3), x, 2)
1/3
```

**Observação 3.1.1.** A regra de L'Hôpital também pode ser usada para indeterminações do tipo  $\infty/\infty$ .

**Exemplo 3.1.3.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}, \quad (3.14)$$

que é uma indeterminação do tipo  $\infty/\infty$ . Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty. \quad (3.15)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.1.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}. \quad (3.16)$$

**Solução.** Observamos tratar-se de uma indeterminação do tipo  $0/0$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2}. \quad (3.17)$$

*(Diagrama de uma tabela de sinais para a expressão e^x - 1/x^2. Para x < 0, e^x < 1, então e^x - 1 < 0. Como x^2 > 0, a fração é negativa. Há setas indicando o sinal negativo no numerador e positivo no denominador.)*

Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{2x} = -\infty. \quad (3.18)$$

*(Diagrama de uma tabela de sinais para a expressão e^x/(2x). Para x < 0, e^x > 0 e 2x < 0, então a fração é negativa. Há setas indicando o sinal positivo no numerador e negativo no denominador.)*

---

<sup>2</sup>Veja a Observação 3.0.1.

◇

**ER 3.1.2.** (Indeterminação do tipo  $0 \cdot \infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x}. \quad (3.19)$$

**Solução.** Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{51}}{e^x} \quad (3.20)$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital sucessivamente, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{51} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{51}}{e^x} \quad (3.21)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot x^{50}}{e^x} \quad (3.22)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51 \cdot 50 \cdot x^{49}}{e^x} \quad (3.23)$$

$$\vdots \quad (3.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{51!}{e^x} = 0. \quad (3.25)$$

◇

**ER 3.1.3.** (Indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad (3.26)$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). \quad (3.27)$$

Neste caso, calculando a subtração, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 + x}{x e^x - x}, \quad (3.28)$$

a qual é uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{e^x - 1 \rightarrow 0}{e^x - 1 - x}}{\underset{(x+1)e^x - 1 \rightarrow 0}{(x+1)e^x - 1}} \quad (3.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{(x+2)e^x} \quad (3.30)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

◇

**ER 3.1.4.** (Indeterminação do tipo  $1^\infty$ )

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}. \quad (3.32)$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo  $1^\infty$ . Em tais casos, a seguinte estratégia pode ser útil. Nos pontos de continuidade da função logaritmo natural, temos

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( (1+x)^{1/x} \right) \quad (3.33)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{\ln(1+x) \rightarrow 0}{\ln(1+x)}}{\underset{x \rightarrow 0}{x}} \quad (3.34)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1. \quad (3.35)$$

Ou seja,

$$\ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e. \quad (3.36)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.1.1.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+3x+2}. \quad (3.37)$$



**Exercício 3.1.2.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-51} e^x. \quad (3.38)$$

**Exercício 3.1.3.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right). \quad (3.39)$$

**Exercício 3.1.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{2x}}. \quad (3.40)$$

## 3.2 Extremos de funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja  $f$  uma função com domínio  $D$ . Dizemos que  $f$  tem o valor **máximo global**<sup>3</sup>  $f(a)$  no ponto  $x = a$  quando

$$f(x) \leq f(a), \quad (3.41)$$

para todo  $x \in D$ . Analogamente, dizemos que  $f$  tem o valor **mínimo global**<sup>4</sup>  $f(b)$  no ponto  $x = b$  quando

$$f(x) \geq f(b), \quad (3.42)$$

para todo  $x \in D$ . Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos globais** (ou extremos absolutos).

**Exemplo 3.2.1.** A função  $f(x) = x^2$  tem valor mínimo global no ponto  $x = 0$  e não assume valor máximo global. A função  $g(x) = -x^2$  tem valor máximo global no ponto  $x = 0$  e não assume valor mínimo global. A função  $h(x) = x^3$  não assume valores mínimo e máximo globais. Veja a Figura 3.1.

<sup>3</sup>Também chamado de máximo absoluto.

<sup>4</sup>Também chamado de mínimo absoluto.

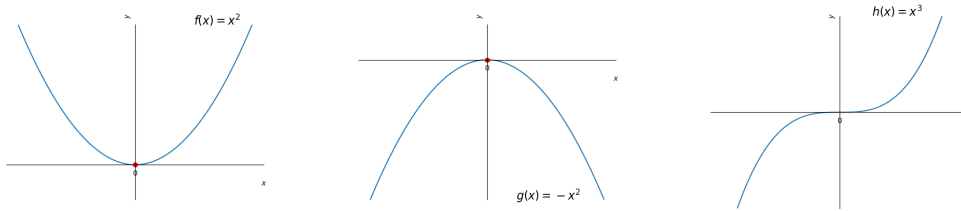


Figura 3.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 3.2.1.

**Teorema 3.2.1.** (Teorema do valor extremo) Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  assume tanto um valor máximo como um valor mínimo global em  $[a, b]$ .

**Exemplo 3.2.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$  é contínua no intervalo fechado  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ . Assume valor mínimo global 1 no ponto  $x = 1$ . Ainda, assume valor máximo global igual a 2 no ponto  $x = 0$ . Veja Figura 3.2.

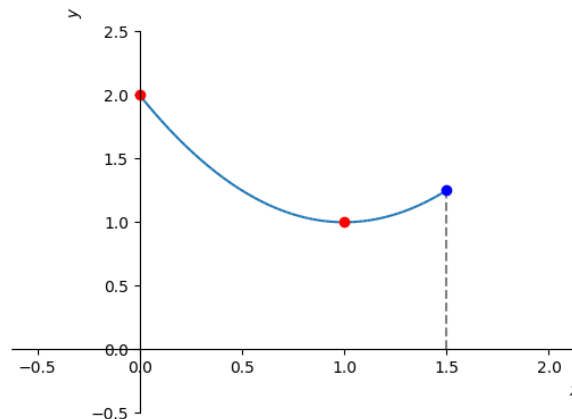


Figura 3.2: Esboço do gráfico de  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$  no intervalo  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ . Veja o Exemplo 3.2.2 a).

- b) A função  $g(x) = \ln x$  é contínua no intervalo  $(0, e]$ . Neste intervalo, assume valor máximo global no ponto  $x = e$ , mas não assume valor mínimo global. Veja Figura 3.3.

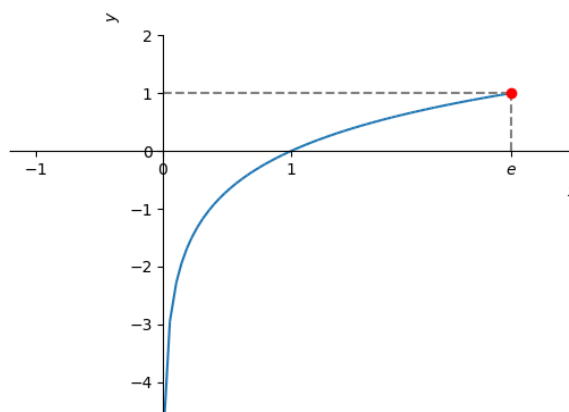


Figura 3.3: Esboço do gráfico de  $g(x) = \ln x$  no intervalo  $(0, e]$ . Veja o Exemplo 3.2.2 b).

- c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \quad (3.43)$$

definida no intervalo  $[0, 1]$  é descontínua no ponto  $x = 1$ . Neste intervalo, assume valor mínimo global no ponto  $x = 0$ , mas não assume valor máximo global. Veja a Figura 3.4.

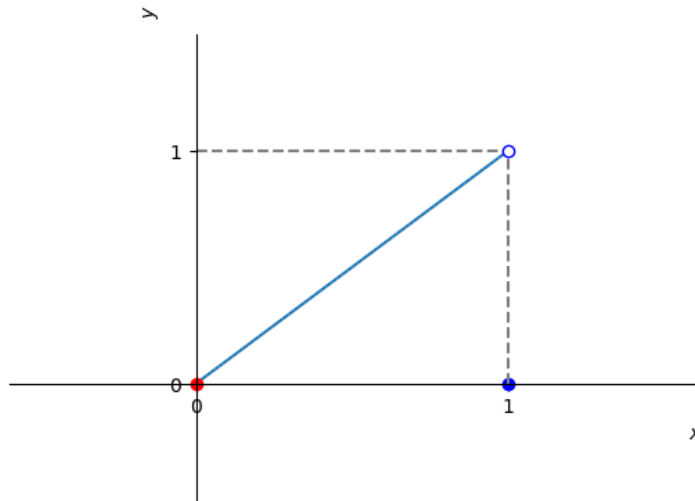


Figura 3.4: Esboço do gráfico de  $h(x)$  no intervalo  $[0,1]$ . Veja o Exemplo 3.2.2 c).

Uma função  $f$  tem um valor **máximo local** em um ponto interior  $x = a$  de seu domínio, se  $f(x) < f(a)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto em torno de  $a$ , excluindo-se  $x = a$ . Analogamente,  $f$  tem um valor **mínimo local** em um ponto interior  $x = b$  de seu domínio, se  $f(x) > f(b)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto em torno de  $b$ , excluindo-se  $x = b$ . Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos). Um tal ponto é chamado de **ponto de máximo local** ou de **mínimo local**, conforme o caso.

**Exemplo 3.2.3.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ |x| & , -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \quad (3.44)$$

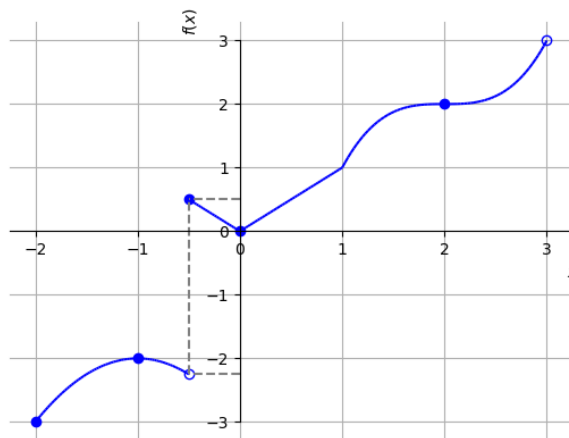


Figura 3.5: Esboço do gráfico de  $f(x)$  discutida no Exemplo 3.2.3.

Na Figura 3.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que  $f$  tem valores máximos locais nos pontos  $x = -1$  e  $x = -1/2$ . No ponto  $x = 0$  tem um valor mínimo local. Observamos que  $x = -2$ ,  $x = 2$  e  $x = 3$  não são pontos de extremos locais desta função. No ponto  $x = -2$ ,  $f$  tem seu valor mínimo global. Ainda,  $f$  não tem valor máximo global.

**Teorema 3.2.2.** (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se  $f$  possui um valor extremo local em um ponto  $x = a$  e  $f$  é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \quad (3.45)$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função  $f$  pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde  $f' = 0$ ,
2. pontos interiores de seu domínio onde  $f'$  não existe, ou
3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função  $f$  onde  $f' = 0$  ou  $f'$  não existe, é chamado de **ponto crítico** da função.

**Observação 3.2.1.** Uma função tem valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

**Exemplo 3.2.4.** Consideramos a função  $f(x)$  discutida no Exemplo 3.2.3. No ponto  $x = -1$ ,  $f'(-1) = 0$  e  $f$  tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto  $x = 2$ , também temos  $f'(2) = 0$ , mas  $f$  não tem valor extremo neste ponto.

No ponto  $x = 0$ ,  $f'(0)$  não existe e  $f$  tem valor mínimo local neste ponto. No ponto,  $x = -1/2$ ,  $f'(1/2)$  não existe e  $f$  tem valor máximo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que  $f$  tem valor mínimo global no ponto  $x = -2$ , mas não tem extremo global no ponto  $x = 3$ .

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.2.1.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$  no intervalo  $[-2, 1]$ .

**Solução.** Os valores extremos de um função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como  $f(x) = (x+1)^2 - 1$  é diferenciável no intervalo  $(-2, 1)$ , seus pontos críticos são pontos tais que  $f' = 0$ . Para identificá-los, calculamos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x + 1) = 0 \quad (3.46)$$

$$\Rightarrow x = -1. \quad (3.47)$$

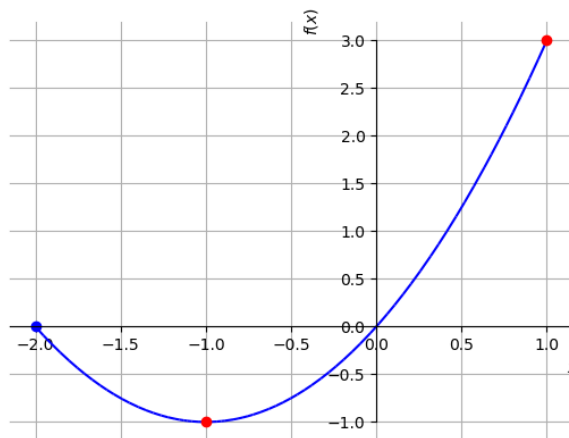


Figura 3.6: Esboço do gráfico da função  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$  discutida no Exercício Resolvido 3.2.1.

Desta forma,  $f$  pode ter valores extremos nos pontos  $x = -2$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ . Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 3.6) e a seguinte tabela:

| $x$    | -2 | -1 | 1 |
|--------|----|----|---|
| $f(x)$ | 0  | -1 | 3 |

Daí, podemos concluir que  $f$  tem o valor mínimo global (e local) de  $f(-1) = -1$  no ponto  $x = -1$  e tem valor máximo global de  $f(1) = 3$  no ponto  $x = 1$ .

Podemos usar o [SymPy](#) para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos<sup>5</sup>:

```
>>> f = (x+1)**2-1, f
>>> f = (x+1)**2-1; f
(x + 1)**2 - 1
>>> f1 = diff(f,x); f1
2*x + 2
>>> xc = solve(f1,x); xc
```

<sup>5</sup>Veja a Observação 3.0.1.

```
[ -1]
>>> f.subs(x,-2); f.subs(x,-1); f.subs(x,1)
>>> plot(f,(x,-2,1))
```

◇

**ER 3.2.2.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = x^3$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável no intervalo  $(-1, 1)$ , temos que seus pontos críticos são tais que  $f'(x) = 0$ . Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (3.48)$$

é o único ponto crítico de  $f$ . Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura 3.7) vemos que  $f$  não tem valor extremo local neste ponto. Assim, seus pontos extremos só podem ocorrer nos extremos do domínio  $[-1, 1]$ . Concluimos que  $f(-1) = -1$  é o valor mínimo global de  $f$  e  $f(1) = 1$  é seu valor máximo global.

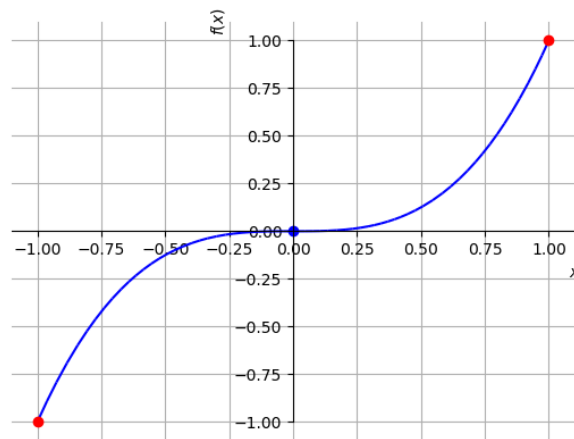


Figura 3.7: Esboço do gráfico da função  $f(x) = x^3$  discutida no Exercício Resolvido 3.2.2.

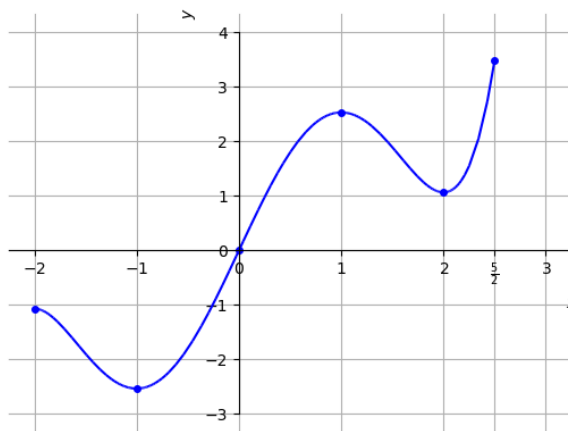
◇



## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.2.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de gráfico:



Determine e classifique os pontos extremos desta função.

**Exercício 3.2.2.** Dada a função  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  restrita ao intervalo  $[-1, 2]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.3.** Dada a função  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  restrita ao intervalo  $[0, 3]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.4.** Dada a função  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  restrita ao intervalo  $[0, \infty)$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.5.** Dada a função  $f(x) = x^{1/3}$  restrita ao intervalo  $[-1, 1]$ , determine:

- a) seu(s) ponto(s) crítico(s).
- b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.
- c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

### 3.3 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

#### 3.3.1 Teorema de Rolle

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O Teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

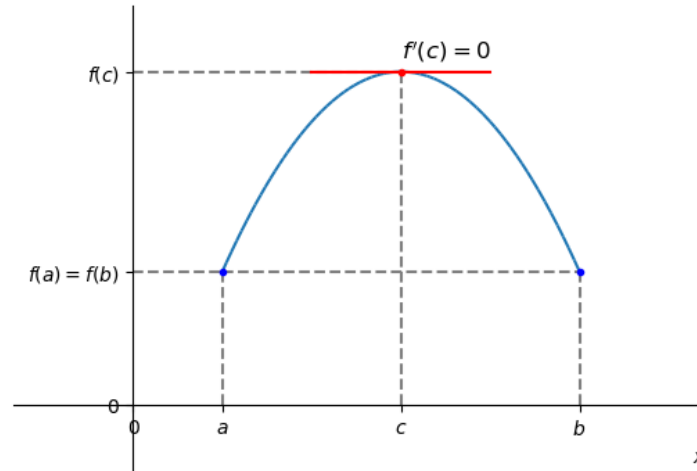


Figura 3.8: Ilustração do Teorema de Rolle.

**Teorema 3.3.1.** (Teorema de Rolle) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se

$$f(a) = f(b), \quad (3.49)$$

então existe pelo menos um **ponto crítico**  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = 0. \quad (3.50)$$

**Exemplo 3.3.1.** O polinômio  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$  tem pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(0,1)$  e no intervalo  $(1,3)$ . De fato, temos  $p(0) = p(1) = 1$  e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto  $c \in (0, 1)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Analogamente, como também  $p(1) = p(3) = 1$ , segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(1,3)$ . Veja o esboço do gráfico de  $p$  na Figura 3.9.

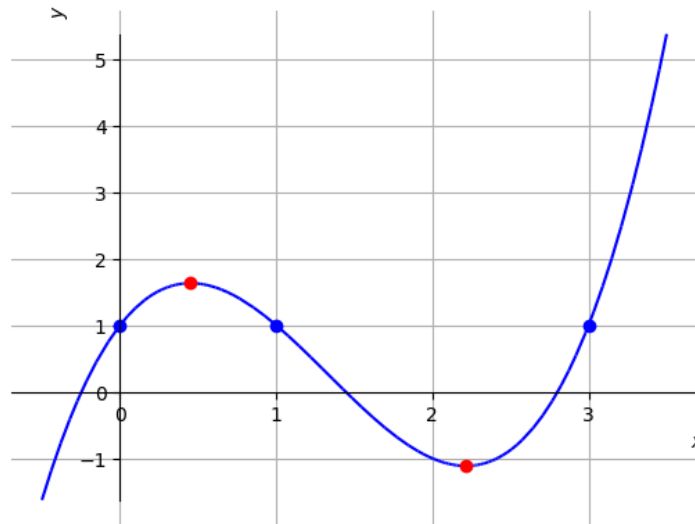


Figura 3.9: Esboço do gráfico de  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ .

De fato, como todo polinômio é derivável em toda parte, podemos calcular os pontos críticos como segue.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{6} \quad (3.52)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,45 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,22. \quad (3.53)$$

Podemos usar os seguintes comandos<sup>6</sup> para computar os pontos críticos de  $p$  e plotar seu gráfico:

```
>>> p = x**3 - 4*x**2 + 3*x + 1
>>> pc = solve(p.diff()); pc
[-sqrt(7)/3 + 4/3, sqrt(7)/3 + 4/3]
>>> plot(p, (x, -0.5, 3.5))
```

**Exemplo 3.3.2.** Vejamos os seguintes casos em que o Teorema de Rolle não se aplica:

<sup>6</sup>Veja a Observação 3.0.1.

a) A função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases} \quad (3.54)$$

é tal que  $f(0) = f(1) = 0$ , entretanto sua derivada  $f'(x) = 1$  no intervalo  $(0, 1)$ . Ou seja, a condição da  $f$  ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle. Veja a Figura 3.10 para o esboço do gráfico desta função.

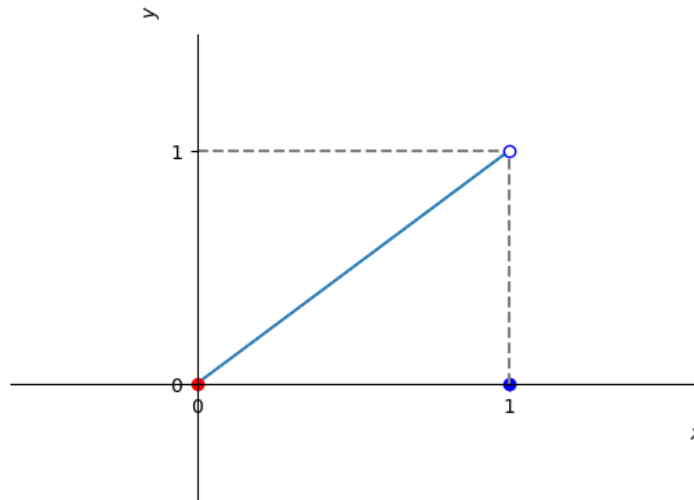


Figura 3.10: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 3.3.2 a).

b) Não existe ponto tal que a derivada da  $g(x) = -|x - 1| + 1$  seja nula. Entretanto, notemos que  $g(0) = g(2) = 0$  e  $g$  contínua no intervalo fechado  $[0, 2]$ . O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois  $g$  não é derivável no intervalo  $(0, 2)$ , mais especificamente, no ponto  $x = 1$ . Veja a Figura 3.11.

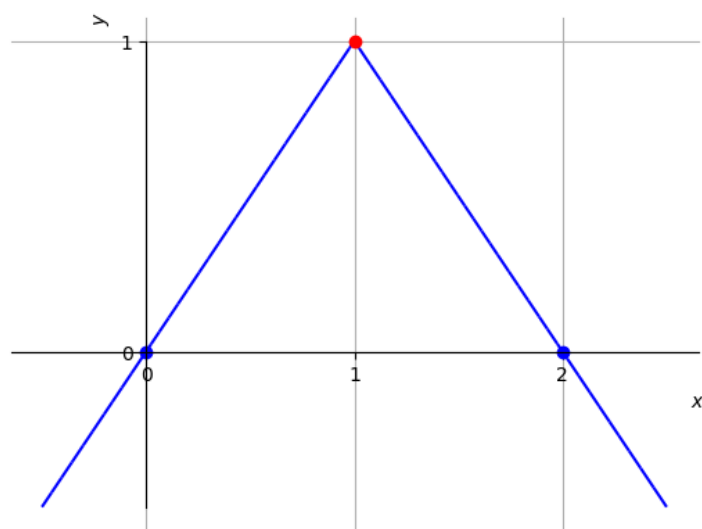


Figura 3.11: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 3.3.2 b).

### 3.3.2 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

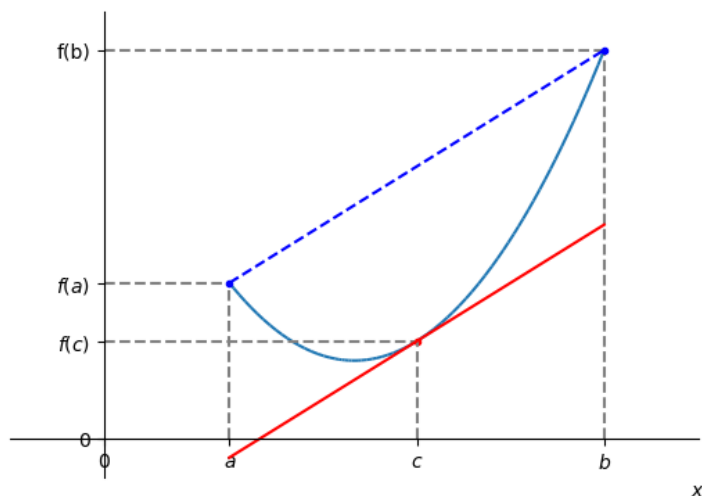


Figura 3.12: Ilustração do Teorema do valor médio.

**Teorema 3.3.2.** (Teorema do valor médio) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então, existe pelo menos um ponto  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (3.55)$$

**Observação 3.3.1.** Em um contexto de aplicação, o Teorema do valor médio relaciona a taxa de variação média da função em um intervalo  $[a, b]$  com a taxa de variação instantânea da função em um ponto interior deste intervalo.

**Exemplo 3.3.3.** A função  $f(x) = x^2$  é contínua no intervalo  $[0, 2]$  e diferenciável no intervalo  $(0, 2)$ . Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto  $c \in (0, 2)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \quad (3.56)$$

De fato,  $f'(x) = 2x$  e, portanto, tomando  $c = 1$ , temos  $f'(c) = 2$ .

**Corolário 3.3.1.** (Funções com derivadas nulas são constantes) Se  $f'(x) = 0$  para todos os pontos em um intervalo  $(a, b)$ , então  $f$  é constante neste intervalo.

*Demonstração.* De fato, sejam  $x_1, x_2 \in (a, b)$  e, sem perda de generalidade,  $x_1 < x_2$ . Então, temos  $f$  é contínua no intervalo  $[x_1, x_2]$  e diferenciável em  $(x_1, x_2)$ . Segue do teorema do valor médio que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (3.57)$$

Como  $f'(c) = 0$ , temos  $f(x_2) = f(x_1)$ . Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo  $(a, b)$ , logo é constante neste intervalo.  $\square$

**Corolário 3.3.2.** (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se  $f'(x) = g'(x)$  para todos os pontos em um intervalo aberto  $(a, b)$ , então  $f(x) = g(x) + C$ ,  $C$  constante, para todo  $x \in (a, b)$ .

*Demonstração.* Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  $\square$

**Corolário 3.3.3.** (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que  $f$  seja contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

- Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .
- Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .

**Exemplo 3.3.4.** Vamos estudar a monotonicidade da função polinomial  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ . Na Figura 3.13, temos o esboço de seu gráfico.



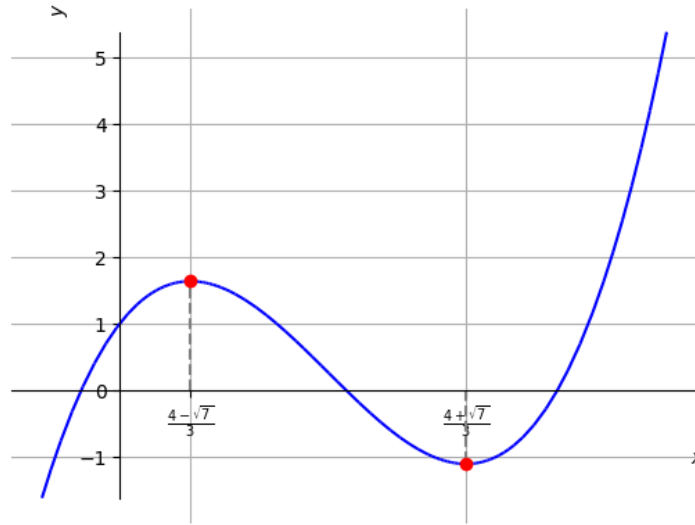
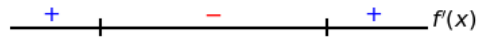


Figura 3.13: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ .

Podemos usar o Corolário 3.3.3 para estudarmos a monotonicidade (i.e. intervalos de crescimento ou decrescimento). Isto é, fazemos o estudo de sinal da derivada de  $f$ . Calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3. \quad (3.58)$$

Logo, temos



Ou seja,  $f'(x) < 0$  no conjunto  $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$  e  $f'(x) > 0$  no conjunto  $\left(\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)$ . Concluimos que  $f$  é **crescente** nos intervalos  $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right]$  e  $\left[\frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ , enquanto que  $f$  é **decrescente** no intervalo  $\left[\frac{4 - \sqrt{7}}{3}, \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right]$ .

**Exemplo 3.3.5.** A função exponencial  $f(x) = e^x$  é crescente em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = e^x > 0, \quad (3.59)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.3.1.** Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

**Solução.** Seja  $s = s(t)$  a função distância percorrida pelo carro e  $t$  o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, existe tempo  $t_1 \in (0, 1,5)$  tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1,5) - s(0)}{1,5 - 0} = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ km/h}. \quad (3.60)$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

◇

**ER 3.3.2.** Estude a monotonicidade da função gaussiana  $f(x) = e^{-x^2}$ .

**Solução.** Para estudarmos a monotonicidade de uma função, podemos fazer o estudo de sinal de sua derivada. Neste caso, temos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}. \quad (3.61)$$

Assim, vemos que

|   |   |         |
|---|---|---------|
| + | - | $-2x$   |
| + | + | $e^x$   |
| + | - | $f'(x)$ |
|   | 0 |         |

Concluimos que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, 0)$  e decrescente no intervalo  $(0, \infty)$ .

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.3.1.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

**Exercício 3.3.2.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

**Exercício 3.3.3.** Estude a monotonicidade de  $f(x) = \ln x$ .

**Exercício 3.3.4.** Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

## 3.4 Teste da primeira derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Seção 3.2, vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 3.3.3 nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja  $c$  um ponto crítico de uma função contínua  $f$  e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto  $(a, b)$  contendo  $c$ , exceto possivelmente no ponto  $c$ . Movendo-se no sentido positivo em  $x$ :

- se  $f'(x)$  muda de negativa para positiva em  $c$ , então  $f$  possui um mínimo local em  $c$ ;
- se  $f'(x)$  muda de positiva para negativa em  $c$ , então  $f$  possui um máximo local em  $c$ ;
- se  $f'$  não muda de sinal em  $c$ , então  $c$  não é um extremo local de  $f$ .

Veja a Figura 3.14.

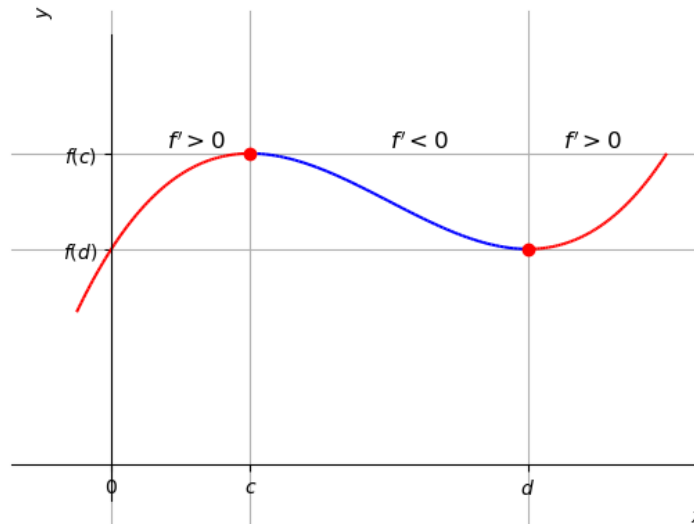


Figura 3.14: Ilustração do teste da primeira derivada com  $c$  ponto de máximo local e  $d$  ponto de mínimo local.

**Exemplo 3.4.1.** Consideremos a função  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$ . Como  $f$  é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \quad (3.62)$$

Temos  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ . Segue, que os pontos críticos são

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad (3.63)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \quad (3.64)$$

Com isso, temos

| Intervalo | $x < 1$   | $1 < x < 3$ | $3 < x$   |
|-----------|-----------|-------------|-----------|
| $f'$      | +         | -           | +         |
| $f$       | crescente | decrescente | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que  $x_1 = 1$  é ponto de máximo local e que  $x_2 = 3$  é ponto de mínimo local.

Podemos usar o [SymPy](#) para computarmos a derivada de  $f$  com o comando<sup>7</sup>

```
f1 = diff(x**3/3-2*x**2+3*x+3)
```

Então, podemos resolver  $f'(x) = 0$  com o comando

```
solve(f1)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da  $f'$  com os comandos

```
reduce_inequalities(f1<0)
```

```
reduce_inequalities(f1>0)
```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.4.1.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \quad (3.65)$$

**Solução.** Como o domínio da  $f$  é  $(-\infty, \infty)$  e  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \quad (3.66)$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (3.67)$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (3.68)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3 \pm 1}{2}. \quad (3.69)$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \quad (3.70)$$

Portanto, os pontos críticos são  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$ . Fazendo o estudo de sinal da  $f'$ , temos

---

<sup>7</sup>Veja a Observação 3.0.1.

|                | $x < 0$    | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ | $2 < x$   |
|----------------|------------|-------------|-------------|-----------|
| $4x$           | -          | +           | +           | +         |
| $x^2 - 3x + 2$ | +          | +           | -           | +         |
| $f'(x)$        | -          | +           | -           | +         |
| $f$            | decrecente | crescente   | decrecente  | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluimos que  $x_1 = 0$  é ponto de mínimo local,  $x_2 = -2$  é ponto de máximo local e  $x_3 = -1$  é ponto de mínimo local.

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>8</sup> para resolvermos este exercício:

```
# f'
fl = Lambda(x, diff(x**4 - 4*x**3 + 4*x**2,x))
# f'(x) = 0
solve(fl(x))
# fl(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# fl(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
```

◇

**ER 3.4.2.** Encontre o valor máximo global de  $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seu máximo ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (3.71)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (3.72)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (3.73)$$

Fazendo o estudo de sinal da derivada, obtemos

|      | $x < 0$   | $0 < x$    |
|------|-----------|------------|
| $f'$ | +         | -          |
| $f$  | crescente | decrecente |

<sup>8</sup>Veja a Observação 3.0.1.

Portanto, do teste da primeira derivada, podemos concluir que  $x = 2$  é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é  $f(2) = e^{-2}$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty, \quad (3.74)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{-x} = 0. \quad (3.75)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de  $f$  é  $f(2) = e^{-2}$ .

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>9</sup> para resolvermos este exercício:

```
# f(x)
f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
# f'(x)
fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
# pontos críticos
xc = solve(fl(x))
# f'(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# f'(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
# lim f(x), x->-oo
limit(f(x),x,-oo)
# lim f(x), x->oo
limit(f(x),x,oo)
# f(2)
f(xc[0])
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.4.1.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

---

<sup>9</sup>Veja a Observação 3.0.1.

**Exercício 3.4.2.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

**Exercício 3.4.3.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$ .

### 3.5 Concavidade e o Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O gráfico de uma função diferenciável  $f$  é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'$  é crescente em  $I$ ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'$  é decrescente em  $I$ .

Assumindo que  $f$  é duas vezes diferenciável, temos que a monotonicidade de  $f'$  está relacionada ao sinal de  $f''$  (a segunda derivada de  $f$ ). Logo, o gráfico de  $f$  é

- a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'' > 0$  em  $I$ ;
- b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto  $I$ , se  $f'' < 0$  em  $I$ .

**Exemplo 3.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) o gráfico de  $f(x) = x^2$  é uma parábola côncava para cima em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = 2x, \quad (3.76)$$

uma função crescente em toda parte. Também, temos

$$f''(x) = 2 > 0, \quad (3.77)$$

em toda parte.

- b) o gráfico de  $g(x) = -x^2$  é uma parábola côncava para baixo em toda parte. De fato, temos

$$g'(x) = -2x, \quad (3.78)$$



uma função decrescente em toda parte. Também, temos

$$g''(x) = -2 < 0, \quad (3.79)$$

em toda parte.

- c) o gráfico da função  $h(x) = x^3$  é côncavo para baixo em  $(-\infty, 0)$  e côncavo para cima em  $(0, \infty)$ . De fato, temos

$$h'(x) = x^2, \quad (3.80)$$

que é uma função decrescente em  $(-\infty, 0]$  e crescente em  $[0, \infty)$ . Também, temos

$$h''(x) = 2x \quad (3.81)$$

que assume valores negativos em  $(-\infty, 0)$  e valores positivos em  $(0, \infty)$ .

Um ponto em que o gráfico de uma função  $f$  muda de concavidade é chamado de **ponto de inflexão**. Em tais pontos temos

$$f'' = 0 \quad \text{ou} \quad \nexists f''. \quad (3.82)$$

**Exemplo 3.5.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O gráfico da função  $f(x) = x^3$  tem  $x = 0$  como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$f'(x) = 3x^2 \quad (3.83)$$

que é diferenciável em toda parte com

$$f''(x) = 6x. \quad (3.84)$$

Logo, os pontos de inflexão ocorrem quando

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (3.86)$$

- b) O gráfico da função  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  tem  $x = 0$  como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0. \quad (3.87)$$

Segue que

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad x \neq 0, \quad (3.88)$$

donde  $g'' > 0$  em  $(-\infty, 0)$  e  $g'' < 0$  em  $(0, \infty)$ . Isto é, o gráfico de  $g$  muda de concavidade em  $x = 0$ ,  $\nexists g''(0)$ , sendo  $g$  côncava para cima em  $(-\infty, 0)$  e côncava para baixo em  $(0, \infty)$ .

### 3.5.1 Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja  $x = x_0$  um ponto crítico de uma dada função  $f$  duas vezes diferenciável e  $f''$  contínua em um intervalo aberto contendo  $x = x_0$ . Temos

- a) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , então  $x = x_0$  é um ponto de mínimo local de  $f$ ;
- b) se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , então  $x = x_0$  é um ponto de máximo local de  $f$ .

**Exemplo 3.5.3.** A função  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$  tem pontos críticos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (3.89)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad (3.90)$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2. \quad (3.91)$$

A segunda derivada de  $f$  é

$$f''(x) = 12x - 18. \quad (3.92)$$

Logo, como  $f''(x_1) = f''(1) = -6 < 0$ , temos que  $x_1 = 1$  é ponto de máximo local de  $f$ . E, como  $f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$ , temos que  $x_2 = 2$  é ponto de mínimo local de  $f$ .

**Observação 3.5.1.** Se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) = 0$ , então  $x = x_0$  pode ser ponto extremo local de  $f$  ou não. Ou seja, o teste é inconclusivo.

**Exemplo 3.5.4.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = x^3$  tem ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \quad (3.93)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (3.94)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (3.95)$$

Neste caso,  $x = 0$  não é ponto de extremo local e temos  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 0$ .

b) A função  $f(x) = x^4$  tem um ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \quad (3.96)$$

$$\Rightarrow x = 0. \quad (3.97)$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0. \quad (3.98)$$

Neste caso,  $x = 0$  é ponto de mínimo local e temos  $f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 0$ .

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.5.1.** Encontre o valor máximo global de  $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seu valor máximo (se existir) ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - x)e^{-x} = 0 \quad (3.99)$$

$$\Rightarrow 2 - x = 0 \quad (3.100)$$

$$\Rightarrow x = 2. \quad (3.101)$$

Agora, usando o teste da segunda derivada, temos

$$f''(x) = (x - 3)e^{-x} \Rightarrow f''(2) = -e^{-2} < 0. \quad (3.102)$$

Logo,  $x = 2$  é ponto de máximo local. O valor da função neste ponto é  $f(2) = e^{-2}$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty, \quad (3.103)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{-x} = 0. \quad (3.104)$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de  $f$  é  $f(2) = e^{-2}$ .

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy](#)<sup>10</sup> para resolvermos este exercício:

```
>>> f = (x-1)*exp(-x)
>>> f1 = diff(f,x)
>>> f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
>>> f1 = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(f1(x))
[2]
>>> f11 = Lambda(x, diff(f(x),x,2))
>>> f11(2)
-2
-e
>>> f(2), f1(2), f11(2)
-2      -2
e , 0, -e
>>> limit(f(x),x,oo)
0
>>> limit(f(x),x,-oo)
-oo
```

◇

**ER 3.5.2.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad (3.105)$$

restrita ao intervalo de  $[-1, 3]$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável em  $(-1, 3)$ , temos que seus extremos locais ocorrem nos seguintes pontos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \quad (3.106)$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (3.107)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2. \quad (3.108)$$

Calculando a segunda derivada de  $f$ , temos

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8. \quad (3.109)$$

---

<sup>10</sup>Veja a Observação 3.0.1.

Do teste da segunda derivada, temos

$$f''(x_1) = f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ pto. mín. local} \quad (3.110)$$

$$f''(x_2) = f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ pto. máx. local} \quad (3.111)$$

$$f''(x_3) = f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ pto. mín. local} \quad (3.112)$$

Agora, vejamos os valores de  $f$  em cada ponto de interesse.

| $x$    | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|--------|------|-----|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | $9$  | $0$ | $1$ | $0$ | $9$ |

Então, podemos concluir que  $x = -1$  e  $x = 3$  são pontos de máximo global (o valor máximo global é  $f(-1) = f(3) = 9$ ),  $x = 1$  é ponto de máximo local,  $x = 0$  e  $x = 2$  são pontos de mínimo global (o valor mínimo global é  $f(0) = f(2) = 0$ ).

Podemos usar os seguintes comandos do [SymPy<sup>11</sup>](#) para resolvermos este exercício:

```
>>> f = Lambda(x, x**4 - 4*x**3 + 4*x**2)
>>> fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(fl(x))
[0, 1, 2]
>>> fl1 = Lambda(x, diff(fl(x),x))
>>> fl1(0), fl1(1), fl1(2)
(8, -4, 8)
>>> f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)
(9, 0, 1, 0, 9)
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.5.1.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^2 - 2x$ .

<sup>11</sup>Veja a Observação 3.0.1.

**Exercício 3.5.2.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ .

**Exercício 3.5.3.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)$ .

**Exercício 3.5.4.** Seja  $f(x) = -x^4$ . Mostre que  $x = 0$  é ponto de máximo local de  $f$  e que  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

## Capítulo 4

# Integração

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

**Observação 4.0.1.** Nos códigos [Python](#) apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_session()
```

### 4.1 Noção de integral

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

#### 4.1.1 Soma de Riemann

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Seja  $f$  uma função contínua definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Seja, também,  $P$  a seguinte **partição** de  $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}, \quad (4.1)$$

onde  $n + 1$  é o número de pontos na partição. Definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.2)$$

o tamanho de cada subintervalo  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  da partição, com  $i = 1, 2, \dots, n$ . A **norma da partição** é definida por

$$\|P\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i, \quad (4.3)$$

i.e. o tamanho do maior subintervalo da partição. Com isso, chama-se de uma **soma de Riemann** toda a expressão da forma

$$S_n := \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (4.4)$$

onde  $x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$  (arbitrariamente escolhido).

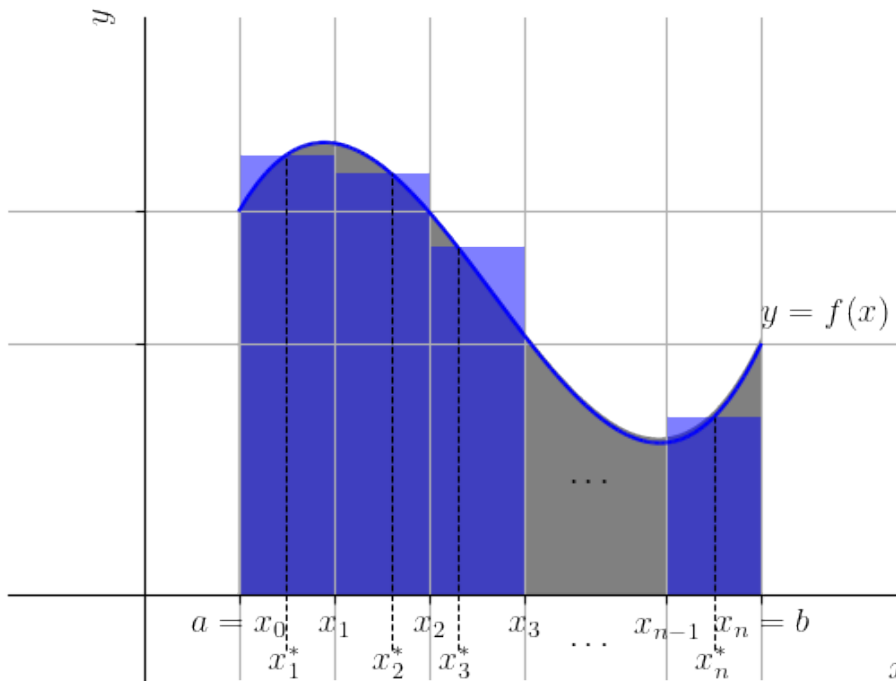


Figura 4.1: Ilustração da soma de Riemann.

**Observação 4.1.1.** (Aproximação da área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa, uma soma de Riemann é uma aproximação da área sob seu gráfico e o eixo das abscissas<sup>1</sup>. Veja a Figura 4.1.

<sup>1</sup>Veja o Exercício 4.1.4 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.



### 4.1.2 Integral

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A integral (definida) de  $a$  até  $b$  de uma dada função  $f$  em relação a  $x$  é denotada e definida por

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (4.5)$$

De forma genérica, a integral definida de  $a$  até  $b$  é o limite das somas de Riemann quando a norma das partições  $P$  do intervalo  $[a, b]$  tendem a zero. Quando o limite existe, dizemos que  $f$  é **integrável** no intervalo  $[a, b]$ .

**Observação 4.1.2.** Na notação de integral definida acima, chamamos  $a$  de **limite inferior** e  $b$  de **limite superior de integração**,  $f$  é chamada de **integrando** e  $x$  de **variável de integração**.

**Observação 4.1.3.** Funções contínuas são funções integráveis.

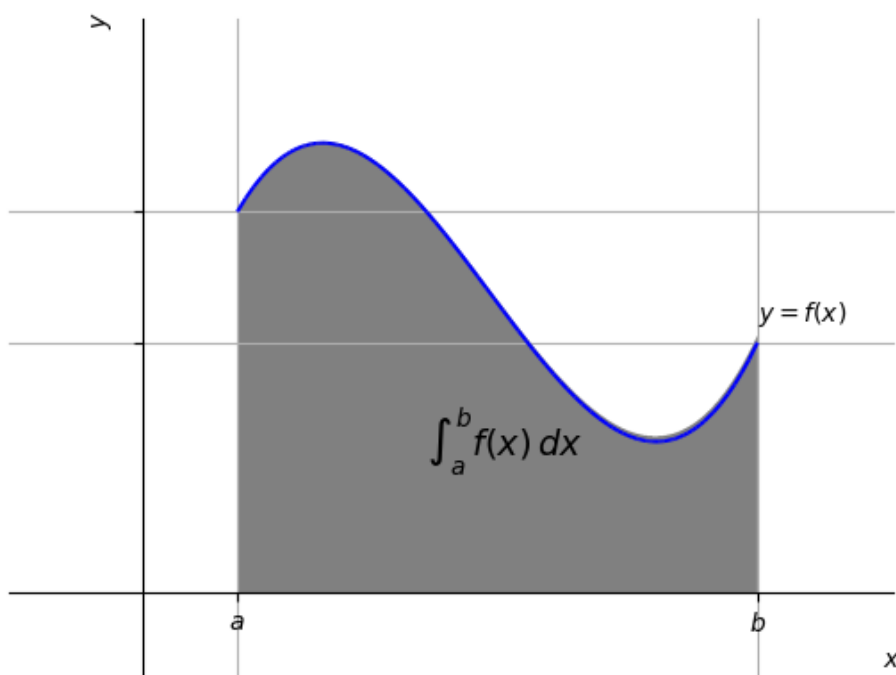


Figura 4.2: A integral definida como a área sob o gráfico.

**Observação 4.1.4.** (Área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (4.6)$$

é a área sob o gráfico de  $f^2$ . Veja a Figura 4.2.

**Exemplo 4.1.1.** Vamos calcular

$$\int_0^1 1 dx. \quad (4.7)$$

Aqui, o integrando é a função constante  $f(x) \equiv 1$  e o **intervalo de integração** é  $[a, b]$ . Da Observação 4.1.4, temos que esta integral é a área sob o gráfico de  $f$  no intervalo  $[0, 1]$ . Esta área é um retângulo de altura 1 e comprimento 1. Logo,

$$\int_0^1 1 dx = 1 \cdot 1 = 1. \quad (4.8)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar esta integral com os seguintes comandos

```
1      ...: from sympy import *
2      ...: x = Symbol('x')
3      ...: integrate(1, (x,0,1))
4      Out: 1
```

## Exercícios resolvidos

**ER 4.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \quad (4.9)$$

**Solução.** Esta integral corresponde à área sob o gráfico da função  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  restrita ao intervalo  $[-1, 1]$ . Observando que

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 1, \quad (4.11)$$

---

<sup>2</sup>Veja o Exercício 4.1.5 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

vemos que esta é a área do semicírculo de raio 1. Logo,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.12)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar esta integral com os seguintes comandos

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = Symbol('x')
3      ...: integrate(sqrt(1-x**2), (x, -1, 1))
4      Out: pi/2
```

◇

**ER 4.1.2.** Determine a função  $F(x)$  tal que

$$F(x) = \int_0^x t dt, \quad (4.13)$$

para todo  $x \geq 0$ . Então, mostre que  $F'(x) = x$ .

**Solução.** A integral definida

$$\int_0^x t dt \quad (4.14)$$

é a área sob o gráfico de  $f(t) = t$  restrita no intervalo  $[0, x]$ . Isto é, a área do triângulo retângulo de base  $x$  e altura  $x$ . Logo,

$$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}. \quad (4.15)$$

Ou seja, temos  $F(x) = x^2/2$  e, portanto,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x. \quad (4.16)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos fazer essas computações com os seguintes comandos

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x, t = symbols('x,t')
3      ...: F = integrate(t, (t, 0, x))
```

```

4      ...: print("F(x) = ", F)
5      ...:
6      F(x) = x**2/2
7      In : diff(F,x)
8      Out: x

```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 4.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^2 2 \, dx. \quad (4.17)$$

**Exercício 4.1.2.** Calcule

$$\int_{-3}^{-1} 1 - x \, dx. \quad (4.18)$$

**Exercício 4.1.3.** Determine  $F(x)$  tal que

$$F(x) = \int_0^x t + 1 \, dt. \quad (4.19)$$

para  $x \geq 0$ . Então, calcule  $F'(x)$ .

**Exercício 4.1.4.** Faça uma interpretação geométrica da soma de Riemann aplicada a uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

**Exercício 4.1.5.** Faça uma interpretação geométrica de

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (4.20)$$

quando  $f$  é uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

**Exercício 4.1.6.** Calcule

$$\int_{-1}^2 -1 \, dx. \quad (4.21)$$

**Exercício 4.1.7.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x \, dx. \quad (4.22)$$

## 4.2 Propriedades de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 4.1, vimos que a integral definida de uma dada função  $f$  em um intervalo  $[a, b]$  está associada à área (líquida) entre seu gráfico e as retas  $y = 0$ ,  $x = a$  e  $x = b$ . Veja a Figura 4.2.

Com base nesta noção geométrica, podemos inferir as seguintes propriedades de integração para funções integráveis  $f$  e  $g$ :

- a)  $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- b)  $\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$
- c)  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$
- d)  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$
- e)  $\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \cdot (b - a)$

**Exemplo 4.2.1.** Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis tais que

$$\int_{-1}^4 f(x) \, dx = 2, \quad (4.23)$$

$$\int_4^5 f(x) \, dx = 3, \quad (4.24)$$

$$\int_{-1}^4 g(x) \, dx = -1. \quad (4.25)$$

Então, vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int_4^{-1} g(x) dx = - \int_{-1}^4 g(x) dx = -(-1) = 1. \quad (4.26)$$

b)

$$\int_{-1}^{-1} 4f(x) dx = 0. \quad (4.27)$$

c)

$$\int_{-1}^4 -2g(x) dx = -2 \int_{-1}^4 g(x) dx = 2. \quad (4.28)$$

d)

$$\int_{-1}^4 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_{-1}^4 f(x) dx - \int_{-1}^4 2g(x) dx \quad (4.29)$$

$$= 2 - 2 \int_{-1}^4 g(x) dx \quad (4.30)$$

$$= 2 + 2 = 4. \quad (4.31)$$

e)

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \quad (4.32)$$

$$= 2 + 3 = 5. \quad (4.33)$$

**Exemplo 4.2.2.** Lembrando que  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , temos da propriedade e) acima que

$$2\pi \min_{x \in [-\pi, \pi]} \{\sin(x)\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx \leq 2\pi \max_{x \in [pi, \pi]} \{\sin(x)\} \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow -2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx \leq 2\pi. \quad (4.35)$$

### 4.2.1 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na noção de integral, define-se a média de uma função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (4.36)$$

no caso de  $f$  ser integrável neste intervalo.

**Teorema 4.2.1.** (Teorema do valor médio para integrais) Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.37)$$

*Demonstração.* Vejamos uma ideia da demonstração. Da propriedade de integração e) acima, temos

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}. \quad (4.38)$$

Agora, pelo Teorema do valor intermediário (Teorema 1.6.1), temos  $f$  assume todos os valores entre seus valores mínimo e máximo. Logo, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.39)$$

□

**Exemplo 4.2.3.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ ,  $a \neq b$ , e

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \quad (4.40)$$

então  $f$  possui pelo menos um zero neste intervalo. De fato, do Teorema do valor médio para integrais, temos que existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0. \quad (4.41)$$

## 4.2.2 Teorema fundamental do cálculo, parte I

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja  $f$  uma função integrável e  $F$  a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (4.42)$$

para algum número real  $a$  dado.

**Teorema 4.2.2.** (Teorema fundamental do cálculo, parte I) Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$  a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (4.43)$$

sendo

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (4.44)$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. Da definição de derivada, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (4.45)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx \right] \quad (4.46)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (4.47)$$

Agora, do Teorema do valor médio para integrais (Teorema 4.2.1), temos que existe  $c_h \in [x, x+h]$  tal que

$$f(c_h) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(x) dx \quad (4.48)$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx. \quad (4.49)$$

Notemos que  $c_h \rightarrow x$  quando  $h \rightarrow 0$  e, portanto, temos

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \quad (4.50)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \quad (4.51)$$

$$= f(x). \quad (4.52)$$

□



**Exemplo 4.2.4.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} \int_1^x t^2 dt = x^2. \quad (4.53)$$

b)

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t) dt = \sin(x) \quad (4.54)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar os resultados acima com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x, t = symbols('x,t')
3      ...: # a)
4      ...: diff(integrate(t**2, (t,1,x)))
5      ...:
6      Out: x**2
7
8      In : diff(integrate(sin(t), (t,0,x)))
9      Out: sin(x)

```

### 4.2.3 Integral indefinida

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema [4.2.2](#)), mostra que a derivada da integral de uma função  $f$  (contínua) é uma função  $F$  tal que

$$F'(x) = f(x). \quad (4.55)$$

Dizemos que  $F$  é uma **primitiva** da função  $f$ .

Observamos que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então  $G(x) = F(x) + C$  também é primitiva de  $f$  para qualquer constante  $C$ , i.e.

$$G'(x) = (F(x) + C)' \quad (4.56)$$

$$= F'(x) + (C)' \quad (4.57)$$

$$= f(x) + 0 \quad (4.58)$$

$$= f(x). \quad (4.59)$$

Mais ainda, do Corolário 3.3.2 do Teorema do valor médio para derivadas, temos que quaisquer duas primitivas de uma mesma função diferem-se apenas uma constante.

Com isso, definimos a **integral indefinida** de  $f$  em relação a  $x$  por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (4.60)$$

onde  $F$  é qualquer primitiva de  $f$  e  $C$  uma constante indeterminada.

**Exemplo 4.2.5.** Vejamos os seguintes casos:

- a)  $\int dx = x + C$
- b)  $\int 2x dx = x^2 + C$
- c)  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- d)  $\int e^x dx = e^x + C$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar as integrais indefinidas acima com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      In : x = symbols('x')
3      ...: # a)
4      ...: integrate(1, x)
5      ...:
6      Out: x
7      # b)
8      In : integrate(2*x, x)
9      ...:
10     Out: x**2
11     # c)
12     In : integrate(cos(x), x)
13     ...:
14     Out: sin(x)
15     # d)
16     In : integrate(exp(x), x)
17     Out: exp(x)
```

### 4.2.4 Teorema fundamental do cálculo, parte II

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Teorema 4.2.3.** (Teorema fundamental do cálculo, parte II) Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é qualquer primitiva de  $f$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4.61)$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema 4.2.2), nos garante a existência de

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (4.62)$$

Seja, então,  $F$  uma primitiva qualquer de  $f$ . Logo,

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] \quad (4.63)$$

$$= G(b) - G(a) \quad (4.64)$$

$$= \int_a^b f(t) dx - \int_a^a f(t) dt \quad (4.65)$$

$$= \int_a^b f(t) dx. \quad (4.66)$$

□

**Exemplo 4.2.6.** Vejamos os seguintes casos:

$$\text{a) } \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{b) } \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar as integrais indefinidas acima com os seguintes comandos:

```
1 In : from sympy import *
2 ...: x = symbols('x')
```

```

3      ...: # a)
4      ...: integrate(1, (x,0,1))
5      Out: 1
6      ..: # b)
7      In : integrate(x, (x,0,1))
8      Out: 1/2
9      ...: c)
10     In : integrate(cos(x), (x,-pi/2,pi/2))
11     Out: 2

```

**Observação 4.2.1.** Do Teorema fundamental do cálculo, parte II, temos

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (4.67)$$

De fato, se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4.68)$$

$$= -[F(a) - F(b)] \quad (4.69)$$

$$= - \int_b^a f(x) dx. \quad (4.70)$$

**Exemplo 4.2.7.** Temos que

$$\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1. \quad (4.71)$$

Agora,

$$\int_1^0 dx = x|_1^0 = 0 - 1 = -1. \quad (4.72)$$

Conforme esperado, temos

$$\int_0^1 dx = - \int_1^0 dx. \quad (4.73)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 4.2.1.** Calcule

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} dx. \quad (4.74)$$

**Solução.** Primeiramente, notemos que

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad (4.75)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C. \quad (4.76)$$

Então, usando as propriedades de integração, temos

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x} \, dx = \int_1^{\sqrt{e}} x \, dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \, dx \quad (4.77)$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} - [\ln x]_1^{\sqrt{e}} \quad (4.78)$$

$$= \left[ \frac{(\sqrt{e})^2}{2} - \frac{1}{2} \right] - [\ln \sqrt{e} - \ln 1] \quad (4.79)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(e) - 0 \quad (4.80)$$

$$= \frac{e}{2} - 1. \quad (4.81)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar essa integral definida com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: integrate((x - 1/x), (x,1,sqrt(E)))
4      Out: -1 + E/2
```

◇

**ER 4.2.2.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = \sin(x)$  e as retas  $y = 0$ ,  $x = -\pi/2$  e  $x = \pi/2$ .

**Solução.** Lembrando que a integral definida está associada a área sob o gráfico do integrando, temos que a área desejada pode ser calculada por

$$A = - \int_{-\pi/2}^0 \sin(x) \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx, \quad (4.82)$$

pois  $\sin(x) < 0$  para  $x \in (-\pi/2, 0)$  e  $\sin(x) > 0$  para  $x \in (0, \pi/2)$ . Também, observamos que

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C. \quad (4.83)$$

Logo, do Teorema fundamental do cálculo segue que

$$A = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen}(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) dx \quad (4.84)$$

$$= -[-\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (4.85)$$

$$= -[-1 - 0] + [-0 - (-1)] = 2. \quad (4.86)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar essa integral definida com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: A = -integrate(sin(x), (x,-pi/2,0))
4      ...: A += integrate(sin(x), (x,0,pi/2))
5      ...: A
6      Out: 2
```

◇

**ER 4.2.3.** Encontre a função  $y = y(x)$  tal que

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad (4.87)$$

e  $y(0) = 1$ .

**Solução.** Integrando ambos os lados da equação diferencial em relação a  $x$ , temos

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int x dx \quad (4.88)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad (4.89)$$

$$(4.90)$$

Agora, da condição  $y(0) = 1$ , segue

$$y(0) = 1 \quad (4.91)$$

$$\frac{0^2}{2} + C = 1 \quad (4.92)$$

$$C = 1. \quad (4.93)$$

Concluimos que  $y = x^2/2 + 1$ . Com o [Python+SymPy](#), podemos resolver esta computar essa integral definida com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: y = Function('y')
3      ...: x = symbols('x')
4      ...: dsolve(Eq(diff(y(x),x), x), y(x), ics={y(0):1})
5      Out: Eq(y(x), x**2/2 + 1)

```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 4.2.1.** Sejam  $f$  e  $g$  tais que

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = -2, \quad \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (4.94)$$

$$\int_{-2}^0 g(x) dx = 1. \quad (4.95)$$

Calcule

a)  $\int_{-1}^{-1} f(x) - 51 \cdot g(x) dx$

b)  $\int_{-2}^0 2g(x) - \frac{1}{2}f(x) dx$

c)  $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$

**Exercício 4.2.2.** Calcule

a)  $\int_{-1}^2 2 dx$

b)  $\int_{-3}^{-1} 1 - x dx$

c)  $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

**Exercício 4.2.3.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^2 - 1$  e as retas  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Exercício 4.2.4.** Encontre a função  $y = y(x)$  tal que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \quad (4.96)$$

e  $y(\pi) = 1$ .

## 4.3 Regras básicas de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 4.2, definimos a integral indefinida por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (4.97)$$

onde  $F$  é uma **primitiva** de  $f$ , i.e.  $F' = f$ , e  $C$  é uma **constante indeterminada**. Na sequência, vamos discutir sobre as regras básicas para o cálculo de integrais.

### 4.3.1 Integral de função potência

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na derivada de função potência, podemos afirmar que

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1. \quad (4.98)$$

De fato, temos

$$\left( \frac{x^{r+1}}{r+1} \right)' = (r+1) \cdot \frac{x^r}{r+1} = x^r, \quad (4.99)$$

para  $r \neq -1$ .

**Exemplo 4.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$



$$\text{b) } \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

**Exemplo 4.3.2.** Vamos calcular

$$\int_{-1}^1 x^2 dx. \quad (4.100)$$

Da regra da potência, temos

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad (4.101)$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 \quad (4.102)$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \quad (4.103)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad (4.104)$$

### 4.3.2 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Das regras de multiplicação por constante e da soma para derivadas, podemos concluir que

$$\bullet \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k \neq 0 \text{ constante.}$$

De fato, seja  $F$  uma primitiva de  $f$ . Temos  $(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$ , i.e.  $k \cdot F$  é primitiva de  $k \cdot f$ .

$$\bullet \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

De fato, sejam  $F$  uma primitiva de  $f$  e  $G$  uma primitiva de  $g$ . Temos  $(F + G)' = F' + G' = f + g$ , i.e.  $F + G$  é primitiva de  $f + g$ .

**Observação 4.3.1.** Como  $(x)' = 1$ , temos que a **integral de função constante**  $f(x) \equiv k$  é

$$\int k dx = k \int 1 \cdot dx = k \cdot x + C. \quad (4.105)$$

**Exemplo 4.3.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int 2x \, dx = 2 \int x \, dx \quad (4.106)$$

$$= 2 \left( \frac{x^2}{2} + C \right) \quad (4.107)$$

$$= x^2 + C \quad (4.108)$$

3

b)

$$\int (2x^2 - 3x + 1) \, dx = \int 2x^2 \, dx - \int 3x \, dx + \int 1 \, dx \quad (4.109)$$

$$= 2 \int x^2 \, dx - 3 \int x \, dx + x + C \quad (4.110)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad (4.111)$$

**Exemplo 4.3.4.** Vamos calcular

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx. \quad (4.112)$$

Temos

$$\int x^2 + 1 \, dx = \int x^2 \, dx + \int 1 \, dx \quad (4.113)$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C. \quad (4.114)$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 x^2 + 1 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 \quad (4.115)$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \left( \frac{0^3}{3} + 0 \right) \quad (4.116)$$

$$= \frac{4}{3}. \quad (4.117)$$

---

<sup>3</sup>Como  $C$  é uma constante indeterminada,  $2 \cdot C$  também é uma constante indeterminada.

### 4.3.3 Integral de $1/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Seção ??, a função logaritmo natural  $y = \ln x$  foi definida como a inversa da função exponencial natural  $y = e^x$ . Pode-se mostrar que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0. \quad (4.118)$$

Isto está de acordo com o fato de que da parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad (4.119)$$

Agora, da Regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d(-x)}{dx} \quad (4.120)$$

$$= \frac{1}{x}. \quad (4.121)$$

Com isso, podemos concluir que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C. \quad (4.122)$$

**Exemplo 4.3.5.** Vamos calcular

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx. \quad (4.123)$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e \quad (4.124)$$

$$= \ln(e) - \ln(1) \quad (4.125)$$

$$= 1. \quad (4.126)$$

### 4.3.4 Integral da função exponencial natural

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Da derivada da função exponencial natural, temos

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (4.127)$$

**Exemplo 4.3.6.**

$$\int e^{2+x} dx = \int e^2 e^x dx \quad (4.128)$$

$$= e^2 \int e^x dx \quad (4.129)$$

$$= e^2 e^x + C \quad (4.130)$$

$$= e^{2+x} + C \quad (4.131)$$

### 4.3.5 Integrais de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Com base na derivada de funções trigonométricas, temos

- $$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (4.132)$$

- $$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (4.133)$$

**Exemplo 4.3.7.** Vamos calcular

$$\int_0^\pi \cos(x) - \text{sen}(x) dx. \quad (4.134)$$

Temos

$$\int \cos(x) - \text{sen}(x) dx = \int \cos(x) dx - \int \text{sen}(x) dx \quad (4.135)$$

$$= \text{sen}(x) + \cos(x) + C. \quad (4.136)$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^\pi \cos(x) - \text{sen}(x) dx = \text{sen}(x) + \cos(x)|_0^\pi \quad (4.137)$$

$$= \text{sen}(\pi) + \cos(\pi) - [\text{sen}(0) + \cos(0)] \quad (4.138)$$

$$= -1 - 1 = -2. \quad (4.139)$$

### 4.3.6 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (4.140)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (4.141)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (4.142)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (4.143)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (4.144)$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (4.145)$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (4.146)$$

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 4.3.1.** Calcule a área total entre as curvas  $y = x^2 - 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Solução.** Tendo em vista que  $x^2 - 1 \leq 0$  para  $x \in [0, 1]$  e  $x^2 - 1 \geq 0$  para  $x \in [1, 2]$ , temos que a área  $A$  pedida é igual a

$$A = -\int_0^1 x^2 - 1 dx + \int_1^2 x^2 - 1 dx. \quad (4.147)$$

Agora, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 - 1 dx = \int x^2 dx - \int dx \quad (4.148)$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + C. \quad (4.149)$$

Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 \quad (4.150)$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - 1\right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right] \quad (4.151)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 2. \quad (4.152)$$

Podemos usar o [SymPy](#) para calcular a área, com os seguintes comandos<sup>4</sup>:

```
>>> -integrate(x**2-1,(x,0,1))+integrate(x**2-1,(x,1,2))
2
```

◇

**ER 4.3.2.** Calcule

$$\int \frac{1}{2x} dx. \quad (4.153)$$

**Solução.** Das regras básicas de integração, temos

$$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \quad (4.154)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx \quad (4.155)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x) + C \quad (4.156)$$

$$= \ln \sqrt{x} + C. \quad (4.157)$$

No [SymPy](#), temos<sup>5</sup>:

```
>>> integrate(1/(2*x),x)
log(x)/2
```

◇

### 4.3.7 Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 4.3.1.** Calcule

a)  $\int dx$

---

<sup>4</sup>Veja a Observação 4.0.1.

<sup>5</sup>Veja a Observação 4.0.1.

b)  $\int x^{-2} dx$

c)  $\int \sqrt{x} dx$

d)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

**Exercício 4.3.2.** Calcule

a)  $\int 1 + x^{-2} dx$

b)  $\int x - \frac{1}{x} dx$

**Exercício 4.3.3.** Calcule

a)  $2 \cos(x) dx$

b)  $1 - \sin(x) dx$

**Exercício 4.3.4.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x^3 dx. \quad (4.158)$$

**Exercício 4.3.5.** Calcule a área total entre as curvas  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ .

## 4.4 Integração por substituição

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Seja  $u = u(x)$ . A regra de integração por substituição é

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (4.159)$$

De fato, se

$$\int f(u) du = F(u) + C, \quad (4.160)$$

então, da regra da cadeira (Seção 2.7), temos

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) \quad (4.161)$$

$$= f(u(x))u'(x), \quad (4.162)$$

i.e.  $F(u(x))$  é primitiva de  $f(u(x))u'(x)$ .

**Exemplo 4.4.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\int 2(2x+1)^2 dx$ .

Tomamos  $f(u) = u^2$  com  $u(x) = 2x+1$ , donde  $u'(x) = 2$ . Logo

$$\int 2(2x+1)^2 dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (4.163)$$

$$= \int f(u) du \quad (4.164)$$

$$= \int u^2 du \quad (4.165)$$

$$= \frac{u^3}{3} + C \quad (4.166)$$

$$= \frac{(2x+1)^3}{3} + C. \quad (4.167)$$

b)  $\int \pi \sin(\pi x) dx$ .

Tomando  $f(u) = \sin(u)$ ,  $u = \pi x$ , temos  $u'(x) = \pi$ . Logo

$$\int \pi \sin(\pi x) dx = \int f(u(x))u'(x) dx \quad (4.168)$$

$$= \int f(u) du \quad (4.169)$$

$$= \int \sin(u) du \quad (4.170)$$

$$= -\cos(u) + C \quad (4.171)$$

$$= -\cos(\pi x) + C. \quad (4.172)$$

**Exemplo 4.4.2.** Consideremos

$$\int (2x+1)^2 dx. \quad (4.173)$$



Substituindo

$$u = 2x + 1 \quad (4.174)$$

temos

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}. \quad (4.175)$$

Portanto,

$$\int (2x + 1)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2} \quad (4.176)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du \quad (4.177)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad (4.178)$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \quad (4.179)$$

$$= \frac{1}{6} (2x + 1)^3 + C. \quad (4.180)$$

#### 4.4.1 Integral de função exponencial

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Subseção 4.3.4, vimos que

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (4.181)$$

Agora, com a regra da substituição, temos

$$\int a^x dx = \int e^{\ln a^x} dx \quad (4.182)$$

$$= \int e^{x \ln a} dx, \quad (4.183)$$

com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Tomando

$$u = x \ln a \Rightarrow du = \ln(a) dx. \quad (4.184)$$

Segue que

$$\int a^x dx = \int e^u \frac{du}{\ln a} \quad (4.185)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int e^u du \quad (4.186)$$

$$= \frac{e^u}{\ln a} + C \quad (4.187)$$

$$= \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C \quad (4.188)$$

$$= \frac{e^{\ln a^x}}{\ln a} + C \quad (4.189)$$

$$= \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (4.190)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (4.191)$$

**Exemplo 4.4.3.** Vamos calcular

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx. \quad (4.192)$$

Por substituição, tomamos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad (4.193)$$

segue

$$\int x \cdot 2^{x^2} dx = \int \cdot 2^u \frac{du}{2} \quad (4.194)$$

$$= \frac{1}{2} \int \cdot 2^u du \quad (4.195)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^u}{\ln 2} + C \quad (4.196)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C \quad (4.197)$$

#### 4.4.2 Integral de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Na Seção 4.3.5, vimos que

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad \text{e} \quad (4.198)$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C. \quad (4.199)$$

**Exemplo 4.4.4.** Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx. \quad (4.200)$$

Usando a identidade trigonométrica ??, temos

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \quad (4.201)$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx. \quad (4.202)$$

Agora, tomando  $u = 2x$ , temos  $du = 2 dx$ , donde

$$\int \cos(2x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{2} \quad (4.203)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(u) + C \quad (4.204)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + C. \quad (4.205)$$

Retornando a 4.202, obtemos

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C. \quad (4.206)$$

Agora, com o método da substituição podemos calcular

$$\int \operatorname{tg}(x) dx. \quad (4.207)$$

Observamos que

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx. \quad (4.208)$$

Escolhendo

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx. \quad (4.209)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = - \int \frac{1}{u} du \quad (4.210)$$

$$= -\ln|u| + C \quad (4.211)$$

$$= -\ln |\cos(x)| + C \quad (4.212)$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| + C \quad (4.213)$$

$$= \ln |\sec(x)| + C. \quad (4.214)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = \ln |\sec(x)| + C. \quad (4.215)$$

**Exemplo 4.4.5.** Vamos calcular

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) \, dx. \quad (4.216)$$

Usando a regra de substituição, escolhemos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, du. \quad (4.217)$$

Fazendo a substituição e calculando, obtemos

$$\int x \operatorname{tg}(x^2) \, dx = \int \operatorname{tg}(u) \frac{du}{2} \quad (4.218)$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}(u) \, du \quad (4.219)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(u)| + C \quad (4.220)$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec(x^2)| + C. \quad (4.221)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função tangente, obtemos<sup>6</sup>

$$\int \operatorname{cotg}(x) \, dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C. \quad (4.222)$$

Agora, vamos calcular

$$\int \sec(x) \, dx. \quad (4.223)$$

Observamos que

$$\int \sec(x) \, dx = \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} \, dx \quad (4.224)$$

---

<sup>6</sup>Veja o Exercício 4.4.10.

$$= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx. \quad (4.225)$$

Então, fazendo a substituição

$$u = \sec(x) + \operatorname{tg}(x) \Rightarrow du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x), \quad (4.226)$$

temos

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \operatorname{tg}(x)}{\sec(x) + \operatorname{tg}(x)} dx \quad (4.227)$$

$$= \int \frac{1}{u} du \quad (4.228)$$

$$= \ln |u| + C \quad (4.229)$$

$$= \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (4.230)$$

Ou seja, obtemos

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C. \quad (4.231)$$

**Exemplo 4.4.6.** Vamos calcular

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du. \quad (4.232)$$

Fazendo a substituição

$$v = \frac{u}{2} \Rightarrow dv = \frac{du}{2}, \quad (4.233)$$

segue

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right) du = \int \sec(v) \cdot 2 dv \quad (4.234)$$

$$= 2 \int \sec(v) dv \quad (4.235)$$

$$= 2 \ln |\sec(v) + \operatorname{tg}(v)| + C \quad (4.236)$$

$$= 2 \ln \left| \sec\left(\frac{u}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) \right| + C. \quad (4.237)$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função secante, obtemos<sup>7</sup>

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C. \quad (4.238)$$

---

<sup>7</sup>Veja o Exercício 4.4.12.

### 4.4.3 Integrais definidas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A regra de substituição para integrais definidas é

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (4.239)$$

**Exemplo 4.4.7.** Vamos calcular

$$\int_0^1 e^{-2x} dx. \quad (4.240)$$

Por substituição, escolhemos

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx. \quad (4.241)$$

Logo,

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} e^u \frac{du}{-2} \quad (4.242)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{-2} e^u du \quad (4.243)$$

$$= -\frac{1}{2} [e^u]_0^{-2} \quad (4.244)$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-2} - e^0) \quad (4.245)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}. \quad (4.246)$$

Alternativamente, podemos calcular a integral indefinida primeiramente e, então, usar o Teorema Fundamental do Cálculo com a primitiva obtida. Ou seja, temos

$$\int e^{-2x} dx = \int e^u \frac{du}{-2} \quad (4.247)$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^u du \quad (4.248)$$

$$= -\frac{1}{2} e^u + C \quad (4.249)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + C. \quad (4.250)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^{-2x} dx = \left[ -\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \quad (4.251)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^0 \quad (4.252)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}, \quad (4.253)$$

como esperado.

No [SymPy](#), temos<sup>8</sup>:

```
>>> integrate(exp(-2*x),(x,0,1))
      -2
      e
      1
- ---- + ----
      2      2
```

#### 4.4.4 Tabela de integrais

[[Vídeo](#)] | [[Áudio](#)] | [[Contatar](#)]

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (4.254)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (4.255)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (4.256)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (4.257)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (4.258)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (4.259)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad (4.260)$$

---

<sup>8</sup>Veja a Observação [4.0.1](#).

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C \quad (4.261)$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (4.262)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (4.263)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (4.264)$$

$$\int \operatorname{cosec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (4.265)$$

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 4.4.1.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (4.266)$$

**Solução.** Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (4.267)$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \quad (4.268)$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \quad (4.269)$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{u^2} du \quad (4.270)$$

$$= 7 \int u^{-2} du \quad (4.271)$$

$$= 7 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \quad (4.272)$$

$$= -\frac{7}{u} \quad (4.273)$$

$$= \frac{7}{1-x}. \quad (4.274)$$



◇

**ER 4.4.2.** Calcule

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx. \quad (4.275)$$

**Solução.** Fazendo a substituição

$$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx, \quad (4.276)$$

temos

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{u} du \quad (4.277)$$

$$= \ln |u| + C \quad (4.278)$$

$$= \ln |e^x - 1| + C. \quad (4.279)$$

No [SymPy](#), temos<sup>9</sup>:

```
>>> integrate(exp(x)/(exp(x)-1),x)
      x
log(e  - 1)
```

◇

**ER 4.4.3.** Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (4.280)$$

**Solução.** Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- **Solução 1:** aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (4.281)$$

Escolhendo,  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x dx$ . Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (4.282)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du \quad (4.283)$$

---

<sup>9</sup>Veja a Observação 4.0.1.

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{u=1}^0 \quad (4.284)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \Big|_{u=1}^0 \quad (4.285)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (4.286)$$

- **Solução 2:** calculando uma primitiva em função de  $x$ . Para obtermos uma primitiva em função de  $x$ , calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (4.287)$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x dx$  e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (4.288)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du \quad (4.289)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (4.290)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \quad (4.291)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \quad (4.292)$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (4.293)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>10</sup>:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2),(x,0,1))
```

◇

---

<sup>10</sup>Veja a Observação 4.0.1.

**ER 4.4.4.** Calcule a área total entre as curvas  $y = (1 - x)^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Solução.** A função  $f(x) = (1 - x)^3$  é positiva em  $(0, 1)$  e negativa em  $(1, 2)$ . Logo, a área é igual a

$$A = \int_0^1 (1 - x)^3 dx - \int_1^2 (1 - x)^3 dx. \quad (4.294)$$

Agora, calculamos

$$\int (1 - x)^3 dx. \quad (4.295)$$

Para tanto, fazemos a substituição

$$u = 1 - x \Rightarrow du = -dx. \quad (4.296)$$

Logo,

$$\int (1 - x)^3 dx = - \int u^3 du \quad (4.297)$$

$$= -\frac{u^4}{4} + C \quad (4.298)$$

$$= -\frac{(1 - x)^4}{4} + C. \quad (4.299)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$A = \left[ -\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 - \left[ -\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_1^2 \quad (4.300)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (4.301)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (4.302)$$

No [SymPy](#), temos<sup>11</sup>:

```
>>> integrate((1-x)**3,(x,0,1))-integrate((1-x)**3,(x,1,2))
1/2
```

◇

---

<sup>11</sup>Veja a Observação [4.0.1](#).

**Exercícios**[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)**Exercício 4.4.1.** Calcule

a)  $\int \sin(2x) dx$

b)  $\int \sqrt{x-1} dx$

c)  $\int \sin(x) \cos(x) dx$

**Exercício 4.4.2.** Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (4.303)$$

**Exercício 4.4.3.** Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx. \quad (4.304)$$

**Exercício 4.4.4.** Calcule

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x} dx. \quad (4.305)$$

**Exercício 4.4.5.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (4.306)$$

**Exercício 4.4.6.** Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx. \quad (4.307)$$

**Exercício 4.4.7.** Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx. \quad (4.308)$$

**Exercício 4.4.8.** Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) e^{\operatorname{tg}(x)} dx. \quad (4.309)$$

**Exercício 4.4.9.** Calcule

$$\int \sec^2(x) \operatorname{tg}(x) dx \quad (4.310)$$

**Exercício 4.4.10.** Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \cotg(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C. \quad (4.311)$$

**Exercício 4.4.11.** Calcule

$$\int \cos^2(x) dx. \quad (4.312)$$

**Exercício 4.4.12.** Use o método da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \cotg(x)| + C. \quad (4.313)$$

**Exercício 4.4.13.** Calcule

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx \quad (4.314)$$

Dica: Complete o quadrado no denominador e então faça a substituição adequada.

## 4.5 Integração por partes

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções diferenciáveis, então da regra do produto para derivadas temos

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \quad (4.315)$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{du}{dx} v dx + \int u \frac{dv}{dx} dx, \quad (4.316)$$

donde

$$uv = \int v du + \int u dv. \quad (4.317)$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (4.318)$$

**Exemplo 4.5.1.** Vamos calcular

$$\int x e^x dx. \quad (4.319)$$

Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \quad (4.320)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x. \quad (4.321)$$

Observa-se que no cálculo de  $v$ , desprezamos a constante indeterminada. Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (4.322)$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad (4.323)$$

$$= x e^x - e^x + C. \quad (4.324)$$

No [SymPy<sup>12</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),x)
      x
(x-1)e
```

---

<sup>12</sup>Veja a Observação 4.0.1.

### 4.5.1 A integral do logaritmo natural

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Vamos calcular

$$\int \ln x \, dx. \quad (4.325)$$

Usando integração por partes, tomamos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (4.326)$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \quad (4.327)$$

Segue que

$$\int \ln x \, dx = \int u \, dv \quad (4.328)$$

$$= uv - \int v \, du \quad (4.329)$$

$$= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \quad (4.330)$$

$$= x \ln(x) - \int dx \quad (4.331)$$

$$= x \ln(x) - x + C. \quad (4.332)$$

Ou seja, concluímos que

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (4.333)$$

**Exemplo 4.5.2.** Vamos calcular

$$\int \ln(2x) \, dx. \quad (4.334)$$

Da equação [4.333](#), temos

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C. \quad (4.335)$$

Usando a regra da substituição (veja Seção [4.4](#)), escolhemos

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx. \quad (4.336)$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \ln(2x) dx = \int \ln(u) \frac{du}{2} \quad (4.337)$$

$$= \frac{1}{2} \int \ln(u) du \quad (4.338)$$

$$= \frac{u \ln(u)}{2} - \frac{u}{2} + C \quad (4.339)$$

$$= x \ln(2x) - x + C. \quad (4.340)$$

No [SymPy<sup>13</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(log(2*x),x)
x*log(2*x) - x
```

**Exemplo 4.5.3.** Vamos calcular

$$\int \sin(x) e^x dx. \quad (4.341)$$

Para integrar por partes, podemos escolher

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx \quad (4.342)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (4.343)$$

Então, segue

$$\int \sin(x) e^x dx = \sin(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx. \quad (4.344)$$

Agora, aplicamos integração por partes a esta última integral. Tomamos as seguintes novas escolhas

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x) dx \quad (4.345)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \quad (4.346)$$

Segue que

$$\int \cos(x) e^x dx = \cos(x) e^x + \int \sin(x) e^x dx. \quad (4.347)$$

---

<sup>13</sup>Veja a Observação 4.0.1.



Substituindo este resultado na equação (4.344), obtemos

$$\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx. \quad (4.348)$$

Somando este primeiro termo em ambos os lados desta equação, obtemos

$$2 \int \sin(x)e^x dx = (\sin(x) - \cos(x))e^x. \quad (4.349)$$

Daí, concluímos que

$$\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}e^x + C. \quad (4.350)$$

No [SymPy<sup>14</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(sin(x)*exp(x),x)
      x      x
e  · sin(x)  e  · cos(x)
-----  -  -----
      2      2
```

## 4.5.2 Integral definida

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções diferenciáveis em  $x$ . Segue que  $du = u'(x) dx$  e  $dv = v'(x) dx$ . Segue que a fórmula de integração por partes para integrais definidas é

$$\int_{x=a}^b u dv = uv|_{x=a}^b - \int_{x=a}^b v du. \quad (4.351)$$

**Exemplo 4.5.4.** Vamos calcular

$$\int_0^2 xe^{-x} dx. \quad (4.352)$$

Para aplicar integração por partes, escolhemos

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad (4.353)$$

---

<sup>14</sup>Veja a Observação 4.0.1.

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad (4.354)$$

Segue da fórmula de integração por partes para integrais definidas que

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \quad (4.355)$$

$$= -2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_0^2 \quad (4.356)$$

$$= -3e^{-2} + 1. \quad (4.357)$$

No [SymPy<sup>15</sup>](#), temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),(x,0,2))
      -2
- 3e  + 1
```

### 4.5.3 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (4.358)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (4.359)$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \quad (4.360)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (4.361)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (4.362)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (4.363)$$

$$\int \ln x dx = x \ln(x) - x + C \quad (4.364)$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C \quad (4.365)$$

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C \quad (4.366)$$

---

<sup>15</sup>Veja a Observação 4.0.1.

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln |\sec(x)| + C \quad (4.367)$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| + C \quad (4.368)$$

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \quad (4.369)$$

$$\int \operatorname{cossec}(x) dx = -\ln |\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \quad (4.370)$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 4.5.1.** Calcule

$$\int x \ln x dx. \quad (4.371)$$

**Solução.** Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (4.372)$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (4.373)$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}. \quad (4.374)$$

Segue que

$$\int x \ln x dx = \int u dv \quad (4.375)$$

$$= uv - \int v du \quad (4.376)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \quad (4.377)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \quad (4.378)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad (4.379)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (4.380)$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>16</sup>:

```
>>> integrate(x*log(x),x)
      2      2
x  · log(x)  x
-----
      2      4
```

◇

**ER 4.5.2.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x e^x dx. \quad (4.381)$$

**Solução.** Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (4.382)$$

Para tanto, escolhemos  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^x$ , donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^x dx = e^x + C. \quad (4.383)$$

Escolhendo  $C = 0$  e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \int_{-1}^1 f(x)g'(x) dx \quad (4.384)$$

$$= f(x)g(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x)f'(x) dx \quad (4.385)$$

$$= x e^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \quad (4.386)$$

$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1 \quad (4.387)$$

$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \quad (4.388)$$

$$= 2e^{-1}. \quad (4.389)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do [SymPy](#)<sup>17</sup>:

---

<sup>16</sup>Veja a Observação 4.0.1.

<sup>17</sup>Veja a Observação 4.0.1.

```
>>> integrate(x*exp(x),(x,-1,1))  
-1  
2·e
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 4.5.1.** Calcule

a)  $\int x \operatorname{sen}(x) dx$

b)  $\int x \cos(x) dx$

c)  $\int x^2 \ln(x) dx$

**Exercício 4.5.2.** Calcule

$$\int \log_2(x) dx. \quad (4.390)$$

**Exercício 4.5.3.** Calcule

a)  $\int x^2 e^x dx$

b)  $\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx$

**Exercício 4.5.4.** Calcule

$$\int \cos(x) e^x dx. \quad (4.391)$$

**Exercício 4.5.5.** Calcule

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(x) dx$

b)  $\int_{-\pi}^0 x \cos(x) dx$

c)  $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

**Exercício 4.5.6.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx. \quad (4.392)$$

**Exercício 4.5.7.** Calcule

$$\int \sec^3(x) dx \quad (4.393)$$

## 4.6 Integração por substituição trigonométrica

Em muitos casos, integrais em  $x$  envolvendo

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{x^2 + a^2}, \sqrt{x^2 - a^2}, \quad (4.394)$$

com  $a > 0$ , podem ser calculadas por meio de substituições envolvendo funções trigonométricas.

### Integrais envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$

No caso de integrais em  $x$  envolvendo

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad (4.395)$$

com  $a > 0$ , podemos fazer a substituição trigonométrica

$$x = a \sin \theta \quad (4.396)$$

com  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Com isso<sup>18</sup>,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \quad (4.397)$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \quad (4.398)$$

$$= a |\cos \theta| \quad (4.399)$$

$$= |a| \cos \theta \quad (4.400)$$

uma vez que  $\cos \theta \geq 0$  para todo  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Com isso, eliminamos o termo radical, passando a uma integral envolvendo a função trigonométrica.

<sup>18</sup>Lembremos da identidade trigonométrica fundamental  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ .

**Exemplo 4.6.1.** Vamos calcular

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.401)$$

a) Por substituição trigonométrica. Fazemos a substituição trigonométrica

$$x = \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.402)$$

$$\Rightarrow \quad (4.403)$$

$$dx = \cos(\theta) d\theta \quad (4.404)$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}} \cos(\theta) d\theta \quad (4.405)$$

$$= \int \frac{\cos(\theta)}{|\cos(\theta)|} d\theta \quad (4.406)$$

$$= \int d\theta \quad (4.407)$$

$$= \theta + C \quad (4.408)$$

$$= \arcsin(x) + C \quad (4.409)$$

b) Por integração direta. No estudo de derivadas de funções trigonométricas inversas, vemos que

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.410)$$

Logo, pela definição de integral indeterminada, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C \quad (4.411)$$

como esperado.

Com [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar esta integral como os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: integrate(1/sqrt(1-x**2), x)
4      Out: asin(x)
```

**Integrais envolvendo  $\sqrt{a^2 + x^2}$** 

No caso de integrais em  $x$  envolvendo

$$\sqrt{a^2 + x^2} \quad (4.412)$$

com  $a > 0$ , podemos fazer a substituição trigonométrica

$$x = a \operatorname{tg}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.413)$$

Com isso<sup>19</sup>,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)} \quad (4.414)$$

$$= \sqrt{a^2 \sec^2(\theta)} \quad (4.415)$$

$$= |a| |\sec(\theta)| \quad (4.416)$$

$$= |a| \sec(\theta), \quad (4.417)$$

observando que  $\sec(\theta) \geq 0$  para  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

**Exemplo 4.6.2.** Calcule

$$\int \sqrt{4 + x^2} dx \quad (4.418)$$

Fazemos a substituição trigonométrica

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.419)$$

$$\Rightarrow dx = 2 \sec^2(\theta) d\theta \quad (4.420)$$

Substituindo na integral, temos

$$\int \sqrt{4 + x^2} dx = \int \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2(\theta)} 2 \sec^2(\theta) d\theta \quad (4.421)$$

$$= \int 4 \sec^3(\theta) d\theta \quad (4.422)$$

Para calcular esta última integral, podemos usar integração por partes<sup>20</sup>, donde obtemos

$$\int \sqrt{4 + x^2} dx = 2 \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) + 2 \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + C \quad (4.423)$$

$$= x \sec \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \quad (4.424)$$

$$+ 2 \ln \left| \sec \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \frac{x}{2} \right| + C \quad (4.425)$$

<sup>19</sup>Lembremos a identidade trigonométrica  $1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$ .

<sup>20</sup>Consulte o Exercício 4.5.7.



**Integrais envolvendo  $\sqrt{x^2 - a^2}$** 

No caso de integrais em  $x$  envolvendo

$$\sqrt{x^2 + a^2} \quad (4.426)$$

com  $a > 0$ , podemos fazer a substituição trigonométrica

$$x = a \sec(\theta), \quad (4.427)$$

assumindo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , no caso de  $x \geq a$ , e  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ , quando  $x \leq -a$ .

**Exemplo 4.6.3.** Vamos calcular

$$\int \sqrt{x^2 - 4} \, dx \quad (4.428)$$

para  $x \geq 2$ . Fazemos a substituição trigonométrica

$$x = 2 \sec(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.429)$$

$$dx = 2 \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) \quad (4.430)$$

Substituindo na integral, temos<sup>21</sup>

$$\int \sqrt{x^2 - 4} \, dx = \int \sqrt{4 \sec^2(\theta) - 4} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) \, d\theta \quad (4.431)$$

$$= 4 \int \sec(\theta) \operatorname{tg}^2(\theta) \, d\theta \quad (4.432)$$

$$= 4 \int \sec^3(\theta) \, d\theta - 4 \int \sec(\theta) \, d\theta \quad (4.433)$$

$$= 2 \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) + 2 \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| \quad (4.434)$$

$$- 4 \ln |\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| \quad (4.435)$$

$$= x \operatorname{tg} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \quad (4.436)$$

$$- 2 \ln \left| \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right| + C \quad (4.437)$$

**Exercícios resolvidos**

**ER 4.6.1.** Calcule

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} \, dx \quad (4.438)$$

<sup>21</sup>Vamos usar a identidade trigonométrica  $\sec^2(x) - 1 = \operatorname{tg}^2(x)$ .

**Solução.** Fazemos a substituição trigonométrica

$$x = 5 \operatorname{sen}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.439)$$

$$dx = 5 \cos(\theta) d\theta \quad (4.440)$$

Substituindo na integral, temos

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} = \int_{x=\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \frac{5 \cos(\theta)}{25 \operatorname{sen}^2(\theta) \sqrt{25 - \operatorname{sen}^2(\theta)}} d\theta \quad (4.441)$$

Observamos que

$$\theta = \operatorname{arc sen} \left( \frac{x}{5} \right) \quad (4.442)$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc sen} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6} \quad (4.443)$$

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc sen} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \quad (4.444)$$

Segue que

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \cos(\theta)}{25 \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot 5 \cos(\theta)} d\theta \quad (4.445)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2(\theta) d\theta \quad (4.446)$$

$$= -\frac{1}{25} \cotg^2(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \quad (4.447)$$

$$= -\frac{1}{25} \cotg \left( \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{25} \cotg \left( \frac{\pi}{6} \right) \quad (4.448)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{25} - \frac{1}{25} \quad (4.449)$$

◇

**ER 4.6.2.** Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx \quad (4.450)$$

para  $x \leq -2$ .

**Solução.** Fazemos a substituição trigonométrica

$$x = 2 \sec(\theta), \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad dx = 2 \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta \quad (4.451)$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4 - 4 \sec^2(\theta)}}{2 \sec(\theta)} 2 \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta \quad (4.452)$$

$$= \int 2 |\operatorname{tg}(\theta)| \operatorname{tg}(\theta) d\theta \quad (4.453)$$

$$= -2 \int \operatorname{tg}^2(\theta) d\theta \quad (4.454)$$

$$= -2 \int (\sec^2(\theta) - 1) d\theta \quad (4.455)$$

$$= -2 \operatorname{tg}(\theta) + 2\theta + C \quad (4.456)$$

Como  $x = 2 \sec(\theta)$ , temos  $\theta = \arccos(x/2)$  e

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \quad (4.457)$$

Concluimos que

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx = 2 \arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{x^2 - 4} + C \quad (4.458)$$

◇

## Exercícios

**Exercício 4.6.1.** Calcule

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (4.459)$$

- a) Pelo método de substituição.
- b) Pelo método de substituição trigonométrica.

**Exercício 4.6.2.** Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx \quad (4.460)$$

**Exercício 4.6.3.** Calcule

$$\int \sqrt{25 + x^2} dx \quad (4.461)$$

**Exercício 4.6.4.** Calcule

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx \quad (4.462)$$

**Exercício 4.6.5.** Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx \quad (4.463)$$

para  $x \geq 3$ .

## 4.7 Integração por frações parciais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O método de integração por frações parciais aplica-se a integrais de funções racionais

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad (4.464)$$

onde,  $p$  e  $q$  são funções polinomiais. A ideia é usar a chamada **decomposição por fatores parciais**: toda função racional própria<sup>22</sup>  $p/q$  pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad (4.465)$$

onde  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são chamadas de **frações parciais** e têm a forma

$$\frac{A}{(ax + b)^m} \quad (4.466)$$

ou

$$\frac{Ax + b}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (4.467)$$

sendo seus denominadores os fatores de  $q$ .

---

<sup>22</sup>Uma função racional  $p/q$  é própria, quando o grau de  $p$  é menor que o grau do denominador.

### 4.7.1 Raízes reais distintas

Quando o polinômio denominador tem todas suas raízes reais e distintas, a decomposição por frações parciais tem a forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n} \quad (4.468)$$

onde,  $n$  é o grau do denominador.

**Exemplo 4.7.1.** Vamos calcular

$$\int \frac{2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} dx. \quad (4.469)$$

Para fazermos a decomposição por frações parciais, começamos calculando as raízes do denominador.

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (4.470)$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \quad (4.471)$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4 \cdot \frac{3}{2}}}{2} \quad (4.472)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad (4.473)$$

Com isso, decompomos o denominador como segue

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1) \left( x - \frac{3}{2} \right) \quad (4.474)$$

$$= (x - 1)(2x - 3) \quad (4.475)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar a fatoração do polinômio acima como segue:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: factor(2*x**2 - 5*x + 3)
4      Out: (x - 1)*(2*x - 3)
```

Uma vez fatorado o denominador, a decomposição por frações parciais consistem em calcular os parâmetros  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{2x-4}{2x^2-5x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-3} \quad (4.476)$$

$$= \frac{A(2x-3) + B(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \quad (4.477)$$

$$= \frac{(2A+B)x + (-3A-B)}{(x-1)(2x-3)} \quad (4.478)$$

Então, por comparação direta, obtemos o seguinte sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$2A + B = 2 - 3A - B = -4 \quad (4.479)$$

Resolvendo-o, encontramos  $A = 2$  e  $B = -2$ .

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar a solução deste sistema como segue:

```
1 In : from sympy import *
2     ...: A,B = symbols('A,B')
3     ...: solve([Eq(2*A + B, 2),
4     ...:      Eq(-3*A - B, -4)])
5 Out: {A: 2, B: -2}
```

Em fim, obtemos a decomposição por frações parciais

$$\frac{2x-4}{2x^2-5x+3} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{2x-3}. \quad (4.480)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar a decomposição por frações parciais diretamente com o método `apart`. Neste caso aqui, temos:

```
1 In : from sympy import *
2     ...: x = symbols('x')
3     ...: apart((2*x-4)/(2*x**2 - 5*x + 3))
4 Out: -2/(2*x - 3) + 2/(x - 1)
```

Uma vez, calculada a decomposição, temos que a integral que queremos calcular pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int \frac{2x-4}{2x^2-5x+3} dx = \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2}{2x-3} dx \quad (4.481)$$

As integrais do lado esquerdo podem ser computadas pelo método da substituição, obtendo-se

$$\int \frac{2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} dx = 2 \ln |x - 1| - \ln |2x - 3| + C \quad (4.482)$$

### 4.7.2 Raízes reais múltiplas

No caso em que o denominador com raízes reais múltiplas, a decomposição por frações parciais tem a forma

$$\frac{p(x)}{(ax + b)^m} = \frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax + b)^m}. \quad (4.483)$$

**Exemplo 4.7.2.** Vamos calcular

$$\int \frac{2 - x}{x^2 - 2x + 1} dx \quad (4.484)$$

O denominador tem raiz real dupla  $x_{1,2} = 1$ , podendo ser fatorado como segue

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad (4.485)$$

Então, a decomposição do integrando por frações parciais tem a forma

$$\frac{2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} \quad (4.486)$$

$$= \frac{A_1(x - 1) + A_2}{(x - 1)^2} \quad (4.487)$$

$$= \frac{A_1x + (-A_1 + A_2)}{(x - 1)^2} \quad (4.488)$$

Por comparação direta, encontramos o seguinte sistema de equações lineares

$$A_1 = -1 - A_1 + A_2 = 2 \quad (4.489)$$

Donde, obtemos os parâmetros  $A_1 = -1$  e  $A_2 = 1$ . Com isso, a integral pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int \frac{2 - x}{x^2 - 2x + 1} dx = - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \quad (4.490)$$

Estas últimas podem ser calculadas pelo método de substituição, donde concluímos que

$$\int \frac{2-x}{x^2-2x+1} dx = -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \quad (4.491)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar esta integral diretamente com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: integrate((2-x)/(x**2 - 2*x + 1))
4      Out: -log(x - 1) - 1/(x - 1)
```

### 4.7.3 Raízes complexas

Quando o polinômio denominador tem raízes complexas, a decomposição por frações parciais tem a forma

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m} \quad (4.492)$$

**Exemplo 4.7.3.** Vamos calcular

$$\int \frac{1}{x^3-3x^2+4x-2} dx \quad (4.493)$$

As raízes do denominador são  $x_1 = 1$  e  $x_{2,3} = 1 \pm i$ . Desta forma, fazemos a decomposição por frações parciais do integrando como segue

$$\frac{1}{x^3-3x^2+4x-2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2-2x+2} \quad (4.494)$$

$$= \frac{A_1(x^2-2x+2) + (A_2x+B_2)(x-1)}{x^3-3x^2+4x-2} \quad (4.495)$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x^2 + (-2A_1-A_2+B_2)x + (2A_1-B_2)}{x^3-3x^2+4x-2} \quad (4.496)$$

Por comparação direta, temos

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (4.497)$$



$$-2A_1 - A_2 + B_2 = 0 \quad (4.498)$$

$$2A_1 - B_2 = 1 \quad (4.499)$$

donde  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -1$  e  $B_2 = 1$ . Com isso, calculamos a integral como segue

$$\int \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{-x+1}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (4.500)$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| + C \quad (4.501)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 4.7.1.** Calcule

$$\int \frac{x+1}{2x^3 + 2x^2 - 2x - 2} dx \quad (4.502)$$

**Solução.** Vamos calcular fazendo a decomposição por frações parciais. Começamos observando que  $x = 1$  é raiz do denominador, donde calculamos a fatoração

$$2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 2(x-1)(x+1)^2. \quad (4.503)$$

Com isso, vemos que o denominador tem raízes  $x_1 = 1$  e  $x_{2,3} = -1$ . Então, a decomposição por frações parciais do integrando tem a forma

$$\frac{x+1}{2x^3 + 2x^2 - 2x - 2} = \frac{A_1}{2x-2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} \quad (4.504)$$

$$= \frac{A_1(2x+2)^2 + A_2(2x-2)(x+1) + A_3(2x-2)}{(2x-2)(x+1)^2} \quad (4.505)$$

$$= \frac{A_1(4x^2 + 8x + 4) + A_2(2x^2 - 2) + A_3(2x - 2)}{(2x-2)(x+1)^2} \quad (4.506)$$

Por comparação direta, temos

$$4A_1 + 2A_2 = 0 \quad (4.507)$$

$$8A_1 + 2A_3 = 1 \quad (4.508)$$

$$4A_1 - 2A_2 - 2A_3 = 1 \quad (4.509)$$

Resolvendo, obtemos  $A_1 = 1/8$ ,  $A_2 = -1/4$  e  $A_3 = 0$ . Por fim, calculamos a integral como segue

$$\int \frac{x+1}{2x^3+2x^2-2x-2} dx = \int \frac{\frac{1}{8}}{2x-2} dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} dx \quad (4.510)$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C \quad (4.511)$$

◇

**ER 4.7.2.** Calcule a área entre as curvas  $y = 5/(x(x^2+4))$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ .

**Solução.** A área pode ser calculada pela integral definida

$$\int_1^2 \frac{5}{x(x^2+4)} dx. \quad (4.512)$$

Vamos calculá-la pelo método da decomposição por frações parciais

$$\frac{5}{x(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+4} \quad (4.513)$$

$$= \frac{A_1(x^2+4) + (A_2x+B_2)x}{x(x^2+4)} \quad (4.514)$$

Por comparação direta, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (4.515)$$

$$B_2 = 0 \quad (4.516)$$

$$4A_1 = 5 \quad (4.517)$$

Donde, temos os parâmetros  $A_1 = \frac{5}{4}$ ,  $A_2 = -\frac{5}{4}$  e  $B_2 = 0$ . Com isso, calculamos a integral como segue

$$\int_1^2 \frac{5}{x(x^2+4)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{5}{4}}{x} dx + \int_1^2 \frac{-\frac{5}{4}x}{x^2+4} dx \quad (4.518)$$

$$= \frac{5}{4} [\ln|x|]_1^2 - \frac{5}{4} [\ln|x^2+4|]_1^2 \quad (4.519)$$

$$= \frac{5}{4} \ln(2) - \frac{5}{4} \ln(8) + \frac{5}{4} \ln(4) \quad (4.520)$$

$$= \frac{5}{4} \ln(2) \quad (4.521)$$

◇

## Exercícios

**Exercício 4.7.1.** Calcule

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad (4.522)$$

**Exercício 4.7.2.** Calcule

$$\int \frac{x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 2x} dx \quad (4.523)$$

**Exercício 4.7.3.** Calcule

$$\int \frac{2x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \quad (4.524)$$

**Exercício 4.7.4.** Calcule

$$\int \frac{x + 2}{x^3 + x} dx \quad (4.525)$$

**Exercício 4.7.5.** Calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{2x^3 + 7x^2 - 7x + 2} dx \quad (4.526)$$

## 4.8 Integrais Impróprias

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad (4.527)$$

é chamada de integral imprópria quando  $a, b \rightarrow \pm\infty$  ou  $f$  tem uma descontinuidade infinita no intervalo  $[a, b]$ . Quando a integral existe, dizemos que ela é convergente.

**Exemplo 4.8.1.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  É uma integral imprópria, pois o intervalo de integração  $[-2, \infty)$  é infinito.
- b)  $\int_{-\infty}^1 e^x dx$  É uma integral imprópria, pois o intervalo de integração  $(-\infty, 1]$  é infinito.
- c)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x+1} dx$  É uma integral imprópria, pois o integrando  $1/(x+1)$  tem uma assíntota vertical no extremo esquerdo do intervalo de integração.
- d)  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2-1} dx$  Não é uma integral imprópria, pois o integrando é contínuo por partes no intervalo  $[0, 2]$ .
- e)  $\int_{-2}^2 \frac{x-1}{x^2-1} dx$  É uma integral imprópria, pois o integrando tem uma descontinuidade infinita em  $x = -1$ .

### 4.8.1 Limites de integração infinitos

No caso de integrais impróprias da forma

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad (4.528)$$

calculamos

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.529)$$

**Exemplo 4.8.2.** Vamos calcular

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (4.530)$$

Temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \quad (4.531)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b \quad (4.532)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\overset{0}{\cancel{\frac{1}{b}}} + \frac{1}{1} \right] \quad (4.533)$$

$$= 1 \quad (4.534)$$

Analogamente, calculamos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.535)$$

**Exemplo 4.8.3.** Vamos calcular

$$\int_{-\infty}^2 e^x dx. \quad (4.536)$$

Temos

$$\int_{-\infty}^2 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 e^x dx \quad (4.537)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^2 \quad (4.538)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^2 - \cancel{e^a}^0 \quad (4.539)$$

$$= e^2 \quad (4.540)$$

No caso de integrais impróprias da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (4.541)$$

escolhemos um  $c$  qualquer e calculamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (4.542)$$

Dizemos que a integral é divergente no caso de ao menos uma das integrais à direita ser divergente.

**Exemplo 4.8.4.** Vamos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dx}{1+4x^2} \quad (4.543)$$

Escolhendo  $c = 0$ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dx}{1+4x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{2dx}{1+4x^2} + \int_0^{\infty} \frac{2dx}{1+4x^2} \quad (4.544)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{2dx}{1+4x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{2dx}{1+4x^2} \quad (4.545)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arc\,tg}(2x)]_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} [\operatorname{arc\,tg}(2x)]_0^b \quad (4.546)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arc\,tg}(0) - \operatorname{arc\,tg}(a)]_a^0 = \frac{\pi}{4} \quad (4.547)$$

$$+ \lim_{b \rightarrow \infty} [\operatorname{arc\,tg}(b) - \operatorname{arc\,tg}(0)]_0^b \quad (4.548)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (4.549)$$

### 4.8.2 Integrandos com descontinuidade infinita

No caso de integrais impróprias em que o integrando tem descontinuidade infinita no limite de integração inferior, calculamos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (4.550)$$

Se a descontinuidade for no limite superior, então calculamos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx. \quad (4.551)$$

**Exemplo 4.8.5.** Vamos calcular

$$\int_1^2 \frac{2x-2}{(x-1)^2} dx \quad (4.552)$$

Temos

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (4.553)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_{x=c}^2 \frac{du}{u^2} \quad (4.554)$$

onde, usamos a substituição  $u = x - 1$  e  $du = dx$ . Segue que,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} [-u^{-1}]_{x=c}^2 \quad (4.555)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^+} \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_c^2 \quad (4.556)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^+} \left[ -1 + \frac{1}{c-1} \right]_{c-1}^{0+} \quad (4.557)$$

$$= \infty \quad (4.558)$$

No caso do integrando ter descontinuidade infinita em um ponto interno do limite de integração, calculamos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (4.559)$$

onde,  $x = c$  é o ponto de descontinuidade de  $f$ .

**Exemplo 4.8.6.** Vamos calcular

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-2} \quad (4.560)$$

Fazemos

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^3 \frac{dx}{x-2} \quad (4.561)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_0^c \frac{dx}{x-2} + \lim_{c \rightarrow 2^+} \int_c^3 \frac{dx}{x-2} \quad (4.562)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 2^-} [\ln |x-2|]_0^c + \lim_{c \rightarrow 2^+} [\ln |x-2|]_c^3 \quad (4.563)$$

$$= \lim_{c \rightarrow 2^-} [\ln |c-2| + \ln | -2|]_0^c + \lim_{c \rightarrow 2^+} [\ln |1| - \ln |c-2|]_c^3 \quad (4.564)$$

$$= -\infty + \infty \quad (4.565)$$

no que concluímos que a integral é divergente.

## Exercícios resolvidos

**ER 4.8.1.** Para quais valores de  $p$  a integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \quad (4.566)$$

é convergente.

**Solução.** Por definição

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} \quad (4.567)$$

Para  $p = 1$ , temos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \quad (4.568)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^b \quad (4.569)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \ln |b| - \ln |1| \right] \quad (4.570)$$

$$= \infty \quad (4.571)$$

Ou seja, para  $p = 1$  a integral é divergente. Agora, para  $p \neq 1$ , temos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} \quad (4.572)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b \quad (4.573)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] \quad (4.574)$$

Para  $p < 1$ , temos que  $b^{1-p} \rightarrow \infty$  quando  $b \rightarrow \infty$ . Agora, para  $p > 1$ , temos que  $b^{1-p} \rightarrow 0$  quando  $b \rightarrow \infty$ . Logo, concluímos que a integral é convergente para  $p > 1$  e

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1. \quad (4.575)$$

◇

**ER 4.8.2.** Calcule

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (4.576)$$

**Solução.** Notamos que, além do limite de integração infinito, o integrando tem uma descontinuidade infinita em  $x = 1$ . Logo, calculamos

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x-1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (4.577)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^b \frac{dx}{(x-1)^2} \right] \quad (4.578)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \lim_{a \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{1-x} \right]_a^b \right] \quad (4.579)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a} \right) \quad (4.580)$$

$$= +\infty \quad (4.581)$$





## Exercícios

**Exercício 4.8.1.** Calcule

a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

b)  $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^3}$

**Exercício 4.8.2.** Calcule

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx$

**Exercício 4.8.3.** Calcule

1.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

2.  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x - 2}$

**Exercício 4.8.4.** Calcule

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2} \quad (4.582)$$

**Exercício 4.8.5.** Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \quad (4.583)$$

# Capítulo 5

## Aplicações da integral

### 5.1 Cálculo de áreas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  está associada a área entre o gráfico da função  $f$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[a, b]$  (consulte Figura 5.1). Ocorre que se  $f$  for não negativa, então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Se  $f$  for negativa, então  $\int_a^b f(x) dx < 0$ . Por isso, dizemos que  $\int_a^b f(x) dx$  é a **área líquida** (ou com sinal) entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

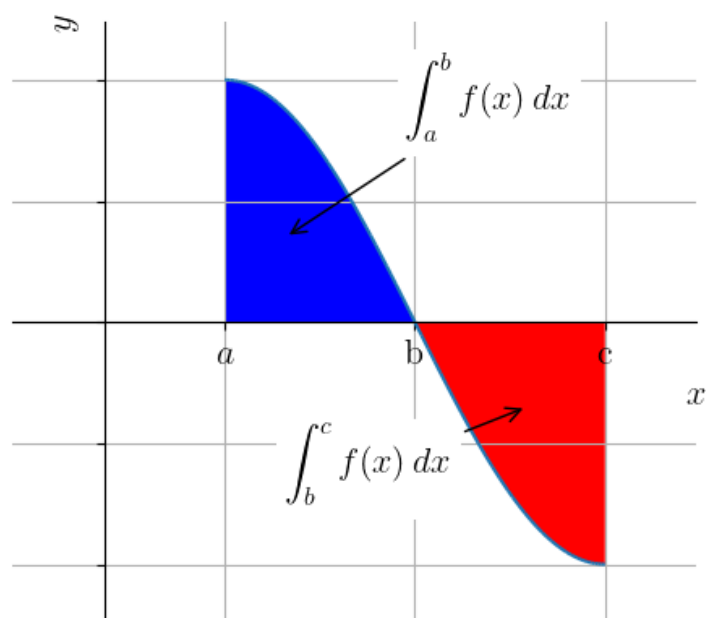


Figura 5.1: Integral definida e a área com sinal.

**Exemplo 5.1.1.** Vamos calcular a área total entre o gráfico de  $f(x) = (x - 1)^3$  e o eixo das abscissas, restrito ao intervalo  $[0, 2]$ .

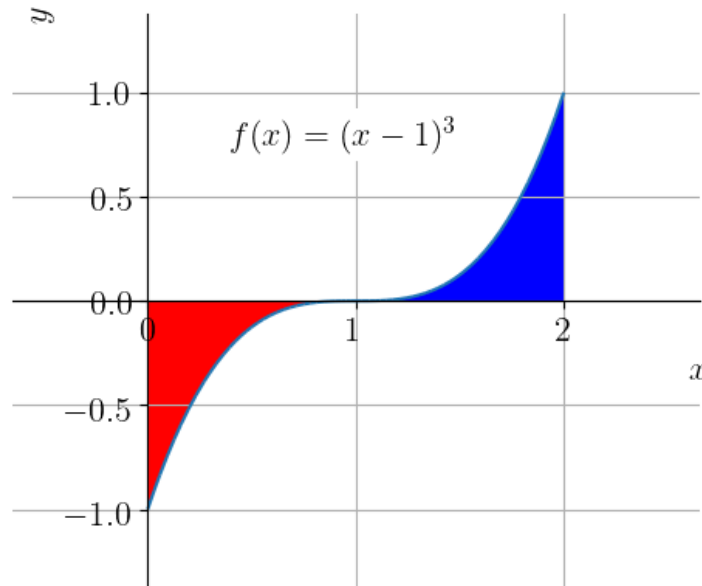


Figura 5.2: Área total entre o gráfico de  $f(x) = (x-1)^3$  e o eixo das abscissas para  $x \in [0, 2]$ .

Começamos fazendo o estudo de sinal de  $f$  no intervalo. Como  $x - 1 \leq 0$  para  $x \leq 1$  e,  $x - 1 \geq 0$  para  $x \geq 1$ , temos que  $f(x) < 0$  em  $[0, 1]$  e  $f(x) > 0$  em  $[1, 2]$ . Logo, a área total é dada por

$$A = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx. \quad (5.1)$$

Agora, usando a substituição  $u = x - 1$ , temos  $du = dx$  e segue que

$$\int f(x) dx = \int (x-1)^3 dx \quad (5.2)$$

$$= \int u^3 du \quad (5.3)$$

$$= \frac{u^4}{4} + C \quad (5.4)$$

$$= \frac{(x-1)^4}{4} + C. \quad (5.5)$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad (5.6)$$

$$= - \left[ \frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 + \left[ \frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^2 \quad (5.7)$$

$$= - \left[ \frac{(1-1)^4}{4} - \frac{(0-1)^4}{4} \right] + \left[ \frac{(2-1)^4}{4} - \frac{(1-1)^4}{4} \right] \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (5.9)$$

Com [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar a área com os seguintes comandos:

```
1      In : from sympy import *
2          ...: x = symbols('x')
3          ...: f = (x-1)**3
4          ...: A = integrate(f, (x,0,1))
5          ...: B = integrate(f, (x,1,2))
6          ...: -A+B
7      Out: 1/2
```

### 5.1.1 Áreas entre curvas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Observamos que se  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (5.10)$$

corresponde à área entre as curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  restritas ao intervalo  $[a, b]$ . Ou seja, fazendo  $h(x) = f(x) - g(x)$ , temos que

$$\int_a^b h(x) dx \quad (5.11)$$

é a área entre essas curvas restritas ao intervalo  $[a, b]$ . Ainda, se  $f(x) \leq g(x)$ , entre a área entre elas é dada por

$$- \int_a^b h(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \quad (5.12)$$

**Exemplo 5.1.2.** Vamos calcular a área entre as curvas  $y = (x-1)^3$ ,  $y = x-1$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

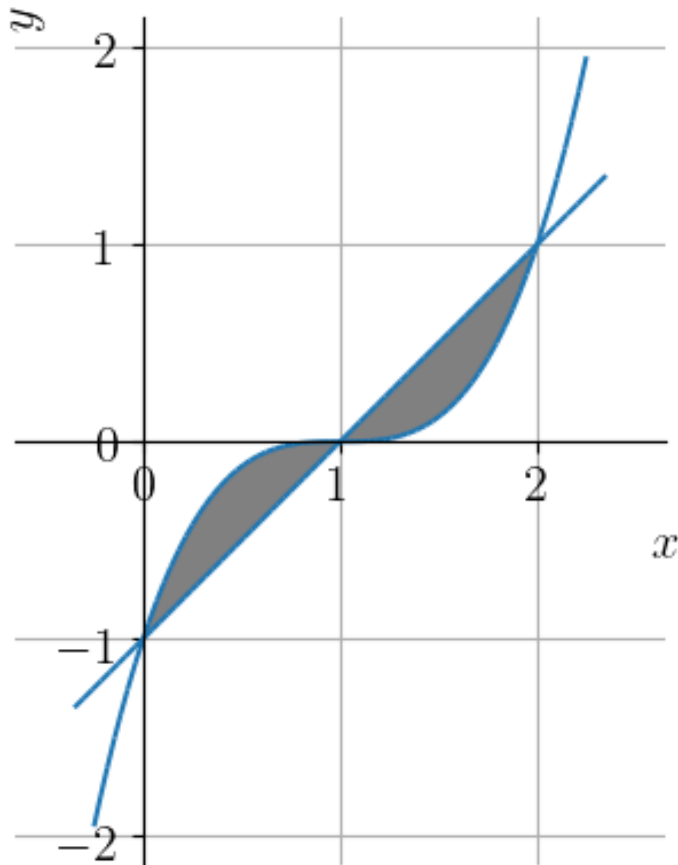


Figura 5.3: Área entre as curvas  $y = (x-1)^3$ ,  $y = x-1$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

Começamos definindo  $h(x) = (x-1)^3 - (x-1)$ . A fim de fazermos o estudo de sinal de  $h$ , identificamos seus zeros.

$$h(x) = (x-1)^3 - (x-1) \quad (5.13)$$

$$= (x-1) \left[ (x-1)^2 - 1 \right] \quad (5.14)$$

$$= (x-1)(x^2 - 2x) \quad (5.15)$$

$$= (x-1) \cdot x \cdot (x-2). \quad (5.16)$$

Ou seja,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$  são as raízes de  $h$ . Daí, segue seu estudo de sinal:

|           | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ |
|-----------|-------------|-------------|
| $(x - 1)$ | -           | +           |
| $x$       | +           | +           |
| $(x - 2)$ | -           | -           |
| $h(x)$    | +           | -           |

Assim, temos que a área desejada pode ser calculada como

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx. \quad (5.17)$$

Agora, calculamos a integral de  $h$ , i.e.

$$\int h(x) dx = \int (x - 1)^3 - (x - 1) dx \quad (5.18)$$

$$= \int (x - 1)^3 dx - \int x dx + \int dx \quad (5.19)$$

$$= \frac{(x - 1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C. \quad (5.20)$$

Por fim, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = \int_0^1 h(x) dx - \int_1^2 h(x) dx \quad (5.21)$$

$$= \left[ \frac{(x - 1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \left[ \frac{(x - 1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \quad (5.22)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (5.24)$$

Com o [Python](#)+[SymPy](#), podemos computar a área com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: f = (x-1)**3 - (x-1)
4      ...: integrate(abs(f), (x,0,2))
5      Out: 1/2

```

Calculando áreas em função de  $y$ 

**Exemplo 5.1.3.** Calcule a área determinada pelas curvas  $x = y^2$  e  $y = 2 - x$ .

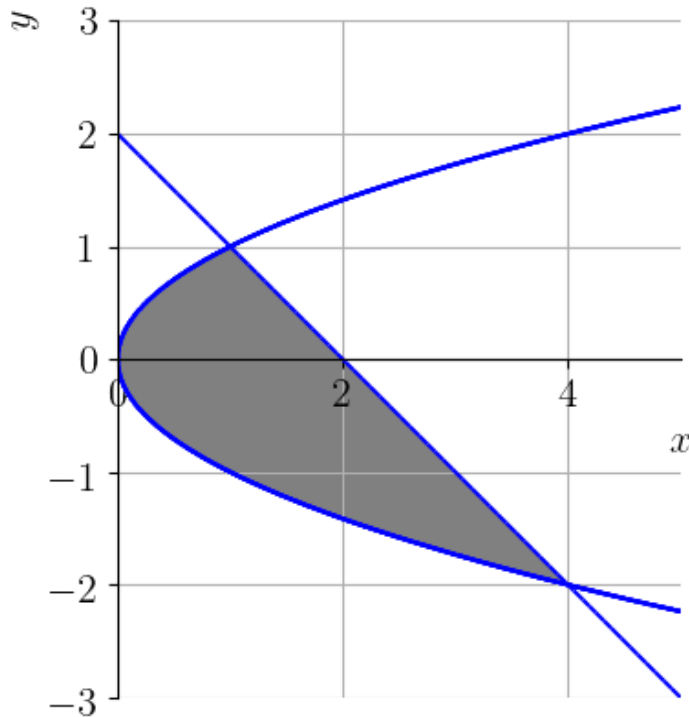


Figura 5.4: Área determinada pelas curvas  $x = y^2$  e  $y = 2 - x$ .

Uma das formas mais práticas de calcular esta área é integrando em relação a  $y$ . Para isso, precisamos que as curvas sejam descritas por funções de  $x$  em  $y$ . A parábola  $x = y^2$  já está escrita como tal, e a reta  $y = 2 - x$  é equivalente a  $x = 2 - y$ . Com isso, temos que a área determinada por estas curvas tem medida

$$\int_{-2}^1 [(2 - y) - (y^2)] dy = \int_{-2}^1 2 - y - y^2 dy \quad (5.25)$$

$$= 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^1 \quad (5.26)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} \quad (5.27)$$



$$= \frac{9}{2} \quad (5.28)$$

Com o [Python+SymPy](#), podemos computar a área com os seguintes comandos:

```

1      In : from sympy import *
2      ...: y = symbols('y')
3      ...: f = 2 - y - y**2
4      ...: integrate(f, (y, -2, 1))
5      Out: 9/2

```

## Exercícios resolvidos

**ER 5.1.1.** Cálculo a área entre a reta  $y = 1$  e o gráfico de  $f(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ .

**Solução.** Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado  $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$  descontada a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  restrita ao intervalo  $[0,1]$ . Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2 dx \quad (5.29)$$

$$= 1 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad (5.30)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (5.31)$$

◇

**ER 5.1.2.** Calcule a área entre as curvas  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ .

**Solução.** O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ . Como  $f(x) \geq g(x)$  neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) dx \quad (5.32)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx \quad (5.33)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \quad (5.34)$$

$$= \frac{1}{6}. \quad (5.35)$$

◇

**ER 5.1.3.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3 - x$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Solução.** Para calcularmos a área entre o gráfico de  $f(x)$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1, 1]$ , fazemos:

1. O estudo de sinal de  $f$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

(a) Cálculo das raízes de  $f$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad (5.36)$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \quad (5.38)$$

(b) Os sinais de  $f(x)$ .

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (5.39)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (5.40)$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

(a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^3 - x dx \quad (5.41)$$

$$= \int x^3 dx - \int x dx \quad (5.42)$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \quad (5.43)$$

(b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (5.44)$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \quad (5.45)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (5.46)$$

Com [Python+SymPy](#), podemos fazer o estudo de sinal de  $f$  com os seguintes comandos

```

1      In : from sympy import *
2      ...: x = symbols('x')
3      ...: f = lambda x: x**3 - x
4      ...: reduce_inequalities(f(x)>=0)
5      Out: ((-1 <= x) & (x <= 0)) | ((1 <= x) & (x < oo))

```

E, então, computamos a área com

```

1      In : A = integrate(f(x), (x, -1, 0))
2      ...: B = integrate(f(x), (x, 0, 1))
3      ...: A - B
4      Out: 1/2

```

◇

## Exercícios

**Exercício 5.1.1.** Calcule a área entre o gráfico de  $y = x^2 - 1$  e o eixo das abscissas, restrita ao intervalo  $[-1, 1]$ .

**Exercício 5.1.2.** Calcule a área entre o gráfico de  $y = x^2 - 1$  e o eixo das abscissas, restrita ao intervalo  $[-1, 2]$ .

**Exercício 5.1.3.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3$  e a reta  $y = 1$  restritas ao intervalo  $[-1, 1]$ .

**Exercício 5.1.4.** Calcule a área entre as curvas  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

**Exercício 5.1.5.** Calcule a área determinada pelas curvas  $x = y^2$  e  $y = x - 2$ .

## 5.2 Volumes por fatiamento e rotação

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

### Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

## 5.3 Problema de valor inicial

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

### Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**Exercício 1.1.1.** a)  $-1$ ; b)  $-1$ ; c)  $2$ ; d)  $\#$

**Exercício 1.1.2.** a)  $-\frac{3}{2}$ ; b)  $-1$ ; c)  $-1$

**Exercício 1.1.3.** a)  $2$ ; b)  $2$ ; c)  $-3$ ; d)  $\pi$

**Exercício 1.1.4.** a)  $2$ ; b)  $-2$ ; c)  $-3$ ; d)  $e$

**Exercício 1.1.5.** a)  $1$ ; b)  $1$ ; c)  $10^{-10}$

**Exercício 1.2.1.** a)  $4$ ; b)  $2\pi$ ; c)  $-2e^{\sqrt{2}}$

**Exercício 1.2.2.** a)  $-3/2$ ; b)  $5/2$ ; c)  $-3$

**Exercício 1.2.3.** a)  $-6$ ; b)  $-3$ ;

**Exercício 1.2.4.** a)  $2/3$ ; b)  $3/4$ ;

**Exercício 1.2.5.** a)  $2$ ; b)  $-1$ ; c)  $1$

**Exercício 1.2.6.** a)  $6$ ; b)  $10$ ; c)  $12$

**Exercício 1.2.7.** a)  $1/2$ ; b)  $-1/3$ ;

**Exercício 1.2.8.** a)  $2$ ; b)  $-1$ ; c)  $-3$ ;

**Exercício 1.2.9.**  $-1/4$

**Exercício 1.2.10.** Falso. Construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

**Exercício 1.3.4.** a)  $2$ ; b)  $2$ ; c)  $2$ ; d)  $2$ ; e)  $1$ ; f)  $\nexists$

**Exercício 1.3.5.** a)  $2$ ; b)  $2$ ; c)  $2$

**Exercício 1.3.6.** a)  $2$ ; b)  $3$ ; c)  $\nexists$

**Exercício 1.3.7.**  $-\frac{1}{2}$

**Exercício 1.3.8.**  $0$ ; Não está definido, pois o domínio de  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  é  $[-1, 1]$ .

**Exercício 1.3.9.** Falso. Dica: construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

**Exercício 1.4.1.**  $2$

**Exercício 1.4.2.** a)  $1$ ; b)  $3$ ; c)  $-1$ ; d)  $e$

**Exercício 1.4.3.**  $-1/2$

**Exercício 1.4.4.** não existe.

**Exercício 1.4.5.** a)  $1$ ; b)  $-3$

**Exercício 1.5.1.**  $\infty$

**Exercício 1.5.2.**  $x = 2$ ;  $x = -2$

**Exercício 1.5.3.**  $\infty$

**Exercício 1.5.4.**  $-\infty$

**Exercício 1.5.5.**  $-\frac{1}{2}$

**Exercício 1.5.6.** Dica: use as regras para o cálculo de limites.

**Exercício 1.5.7.** Dica: Observe que  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$  e analise o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercício 1.6.1.**  $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

**Exercício 1.6.2.**  $(1, 2) \cup (3, \infty)$ .

**Exercício 1.6.3.** 0

**Exercício 1.7.1.** 1

**Exercício 1.7.2.** 0

**Exercício 1.7.3.**  $\frac{1}{2}$

**Exercício 1.7.4.** 0

**Exercício 1.7.5.** 0

**Exercício 1.8.1.**  $\infty$

**Exercício 1.8.2.** a)  $\infty$ ; b) 0

**Exercício 2.1.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.1.2.** a)  $-1$ ; b)  $-2$ ; c)  $e$

**Exercício 2.1.3.** a)  $-1$ ; b)  $-2$ ; c)  $e$

**Exercício 2.1.4.** reta secante:  $y = -3x + 7$ ; reta tangente:  $y = -2x + 6$ ;  
dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

**Exercício 2.1.5.** a)  $1000 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ ; b)  $30 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ ; c)  $-970 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$ .

**Exercício 2.2.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.2.2.** a) 2; b)  $-3$ ; c)  $\sqrt{e}$

**Exercício 2.2.3.**  $f'(x) = 2x - 2$

**Exercício 2.2.4.**  $(1, \infty)$

**Exercício 2.2.5.** a)  $2x - 3x^2$ ; b)  $2 - 6x$ ; c)  $-6$ ; d) 0; e) 0

**Exercício 2.3.1.** a) 0; b) 0; c) 0; d) 0

**Exercício 2.3.2.** a) 1; b)  $3x^2$ ; c)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; d)  $-\frac{1}{x^2}$ ; e)  $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ ; f)  $\pi x^{\pi-1}$

**Exercício 2.3.3.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.3.4.** 0

**Exercício 2.3.5.**  $(0, -1)$



**Exercício 2.4.1.** a)  $3^x \ln 3$ ; b)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$

**Exercício 2.4.2.** a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$ ; b)  $2e^{2x}$

**Exercício 2.4.3.** a)  $\frac{1}{x \ln 3}$  b)  $\frac{1}{x \ln \frac{2}{5}}$ ; c)  $\frac{1}{x}$

**Exercício 2.4.4.** Dica! Consulte o Exemplo ??

**Exercício 2.4.5.** Dica! Consulte o Exercício [2.4.4](#)

**Exercício 2.5.1.** a)  $f'(x) = -15x^2$ ; b)  $g'(x) = -24x^2 + 8x + 4$ ; c)  $h'(x) = \frac{4(2x^2 - 2x(2x - 1) - 1)}{(2x - 1)^2}$

**Exercício 2.5.2.** a)  $f'(x) = (1 + x)e^x$ ; b)  $g'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$ ; c)  $h'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$

**Exercício 2.5.3.** a)  $f'(x) = 2/x$ ; b)  $g'(x) = \ln x^2 + 2$ ; c)  $h'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

**Exercício 2.5.4.**  $y = x - 1$

**Exercício 2.6.1.** a)  $f'(x) = \sin(2x) + \cos(x)$ ; b)  $g'(x) = \sin(x) \cdot (2 - 3 \sin^2(x))$ ; c)  $h'(x) = 2 \cos(x)$

**Exercício 2.6.2.**  $y = 1$ . Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

**Exercício 2.6.3.** a)  $f'(x) = \sec^2(x) + \operatorname{cosec}^2(x)$ ; b)  $g'(x) = \sec(x) \operatorname{tg}(x) + \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotg}(x)$ ; c)  $h'(x) = \frac{1}{2} \sec^2(x)$

**Exercício 2.7.1.** a)  $f'(x) = 18(2x - 3)^8$ ; b)  $g'(x) = -\frac{102}{(2x - 3)^{52}}$ ; c)  $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**Exercício 2.7.2.** a)  $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-1} \ln 2$ ; b)  $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ .

**Exercício 2.7.3.** a)  $\frac{2x}{x^2 - 1}$ ; b)  $\frac{2x}{(x^2 - 1) \ln 2}$

**Exercício 2.7.4.** a)  $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ ; b)  $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ ; c)  $h'(x) = 2 \sec^2(2x)$ ; d)  $u'(x) = \operatorname{cosec}^2(3 - x)$ ; e)  $v'(x) = -\frac{2}{x^2} \sec\left(\frac{1}{x^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ; f)  $z'(x) = -(5 + 2x) \operatorname{cosec}(5x + x^2) \cotg(5x + x^2)$

**Exercício 2.7.5.**  $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{4}$

**Exercício 2.8.1.** a)  $f'(x) = \frac{2}{x \ln 2}$ ; b)  $g'(x) = \frac{1+x}{x}$

**Exercício 2.8.2.** a)  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ; b)  $g'(x) = 2e(1 + 2x)^{e-1}$

**Exercício 2.8.3.**  $x(1 + x)^{x-1} + (1 + x)^x \ln(1 + x)$

**Exercício 2.8.4.**  $y = x$

**Exercício 2.9.1.** a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - 1}{2x}$  b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y}{x}$

**Exercício 2.9.2.**  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x + y - 2}{x^2}$

**Exercício 2.9.3.**  $(0, 0)$

**Exercício 2.9.4.**  $y = -x$

**Exercício 3.1.1.** 1

**Exercício 3.1.2.**  $\infty$

**Exercício 3.1.3.**  $\infty$

**Exercício 3.1.4.**  $e$

**Exercício 3.2.1.**  $x = -1$  ponto de mínimo global;  $x = 1$  ponto de máximo local;  $x = 2$  ponto de mínimo local;  $x = \frac{5}{2}$  ponto de máximo global.

**Exercício 3.2.2.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = -1$  ponto de máximo global;  $x = 1$  ponto de mínimo local e global; c)  $f(-1) = 6$  valor máximo global;  $f(1) = 2$  valor mínimo local e global;

**Exercício 3.2.3.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = 1$  ponto de máximo local e global;  $x = 3$  ponto de mínimo global; c)  $f(1) = 2$  valor máximo local e global;  $f(3) = -2$  valor mínimo global;

**Exercício 3.2.4.** a)  $x = 1$ ; b)  $x = 0$  ponto de mínimo global; c)  $f(0) = 0$  valor mínimo global;

**Exercício 3.2.5.** a)  $x = 0$ ; b)  $x = -1$  ponto de mínimo global;  $x = 1$  ponto de máximo global; c)  $f(-1) = -1$  valor mínimo global;  $f(1) = 1$  valor máximo global;

**Exercício 3.3.1.** Decrescente:  $(-\infty, 1]$ ; Crescente:  $[1, \infty)$

**Exercício 3.3.2.** Decrescente:  $[-1, 1]$ ; Crescente:  $(-\infty, -1]$ ;  $[1, \infty)$

**Exercício 3.3.3.** Crescente:  $(0, \infty)$

**Exercício 3.4.1.**  $x = 1$  ponto de mínimo global

**Exercício 3.4.2.**  $x_1 = -1$  ponto de máximo local;  $x_2 = 1$  ponto de mínimo local;

**Exercício 3.4.3.**  $x_1 = 0$  ponto de máximo local;  $x_2 = 2/5$  ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.1.**  $x = 1$  ponto de mínimo global

**Exercício 3.5.2.**  $x_1 = -1$  ponto de máximo local;  $x_2 = 1$  ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.3.**  $x_1 = 0$  ponto de máximo local;  $x_2 = 2/5$  ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.4.**  $f'(x) = -4x^3$ ,  $f'(0) = 0$ . Pelo teste da 1. derivada, temos que  $x = 0$  é ponto de máximo local.  $f''(x) = -12x^2$ ,  $f''(0) = 0$ .

**Exercício 4.1.1.** 6

**Exercício 4.1.2.** 6

**Exercício 4.1.3.**  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ ;  $F'(x) = x + 1$ .

**Exercício 4.1.4.** Dica: a soma de Riemann é uma aproximação da área líquida sob o gráfico da função.

**Exercício 4.1.5.** Dica:  $\int_a^b f(x) dx$  é a área líquida sob o gráfico da função.

**Exercício 4.1.6.**  $-3$

**Exercício 4.1.7.**  $0$

**Exercício 4.2.1.** a)  $0$ ; b)  $3$ ; c)  $-5/2$

**Exercício 4.2.2.** a)  $6$ ; b)  $6$ ; c)  $2$

**Exercício 4.2.3.**  $4/3$

**Exercício 4.2.4.**  $y = \sin(x) + 1$

**Exercício 4.3.1.** a)  $x + C$ ; b)  $-\frac{1}{x} + C$ ; c)  $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ ; d)  $2x^{1/2} + C$

**Exercício 4.3.2.** a)  $x - \frac{1}{x} + C$ ; b)  $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$

**Exercício 4.3.3.** a)  $2\sin(x) + C$ ; b)  $x + \cos(x) + C$

**Exercício 4.3.4.**  $0$

**Exercício 4.3.5.**  $1/2$

**Exercício 4.4.1.** a)  $\frac{-\cos(2x)}{2} + C$ ; b)  $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$ ; c)  $\frac{\sin^2(x)}{2} + C$

**Exercício 4.4.2.**  $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

**Exercício 4.4.3.**  $1/2$

**Exercício 4.4.4.**  $\frac{3\ln^2(x)}{2} + C$

**Exercício 4.4.5.**  $\frac{7}{2}$

**Exercício 4.4.6.** 4

**Exercício 4.4.7.**  $\frac{1}{2}$

**Exercício 4.4.8.**  $e - 1$

**Exercício 4.4.9.**  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + C$

**Exercício 4.4.11.**  $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{2} + C$

**Exercício 4.4.12.** Dica: Multiplique o numerador e o denominador por  $\cotg(X) + \operatorname{cossec}(x)$ .

**Exercício 4.4.13.**  $\frac{1}{2} \ln |(x-2)^2 + 4| + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x-2}{2} \right) + C$

**Exercício 4.5.1.** a)  $\operatorname{sen}(x) - x \cos(x) + C$ ; b)  $\cos(x) + x \operatorname{sen}(x) + C$ ;  
c)  $\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

**Exercício 4.5.2.**  $\frac{x \ln(x)}{\log_2(x)} - \frac{x}{\log_2(x)} + C$

**Exercício 4.5.3.** a)  $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$ ; b)  $-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C$

**Exercício 4.5.4.**  $\frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{2} e^x + C$

**Exercício 4.5.5.** a) 1; b) 2; c)  $\frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9}$

**Exercício 4.5.6.**  $-\frac{5}{e} + e$

**Exercício 4.5.7.**  $\frac{\sec(x) \operatorname{tg}(x)}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C$

**Exercício 4.6.1.** a)  $u = \frac{1}{2}x$ ; b)  $x = \operatorname{sen}(x)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \operatorname{arc sen}(x/2) + C$

**Exercício 4.6.2.**  $-\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$

**Exercício 4.6.3.**  $x \sec \left( \operatorname{arc tg} \left( \frac{x}{5} \right) \right) + 5 \ln \left| \sec \left( \operatorname{arc tg} \left( \frac{x}{5} \right) \right) + \frac{x}{5} \right| + C$

**Exercício 4.6.4.**  $(\sqrt{3} - 1)/4$

**Exercício 4.6.5.**  $\sqrt{x^2 - 9} - 2 \operatorname{arc sen} \left( \frac{x}{3} \right) + C$

**Exercício 4.7.1.**  $\frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$

**Exercício 4.7.2.**  $\ln |x| + \frac{2}{3} \ln |x - 2| - \frac{5}{3} \ln |x - \frac{1}{2}| + C$

**Exercício 4.7.3.**  $\frac{5}{4} \ln |x - 1| - \frac{5}{4} \ln |x + 1| + \frac{1}{2x-2} + C$

**Exercício 4.7.4.**  $2 \ln |x| - \ln |x^2 + 1| + \operatorname{arctg}(x) + C$

**Exercício 4.7.5.**  $-\frac{4}{3} \ln(2) + \ln |3|$

**Exercício 4.8.1.** a)  $\frac{1}{2}$ ; b) 2

**Exercício 4.8.2.** a)  $\infty$ ; b)  $-\frac{\pi}{2}$

**Exercício 4.8.3.** a)  $\infty$ ; b)  $-\infty$

**Exercício 4.8.4.**  $\infty$

**Exercício 4.8.5.** divergente

**Exercício 5.1.1.**  $4/3$

**Exercício 5.1.2.**  $8/3$

**Exercício 5.1.3.** 2

**Exercício 5.1.4.** 1

**Exercício 5.1.5.**  $9/2$



# Referências Bibliográficas

- [1] H. Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.
- [2] J. Stewart. *Cálculo*. Thomson Learning, 2006.
- [3] G. Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.