Vetores

Pedro H A Konzen

18 de setembro de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores no espaço euclidiano. Como ferramentas computacionais de apoio, exploramos o Geogebra e códigos Python.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Vetores

Neste capítulo, introduzimos os conceitos fundamentais relacionados às definições de vetor e operações básicas envolvendo vetores.

1.1 Segmentos orientados

1.1.1 Segmento

▶ Vídeo disponível!

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** e denotado por AB. A reta r é chamada de reta suporte.

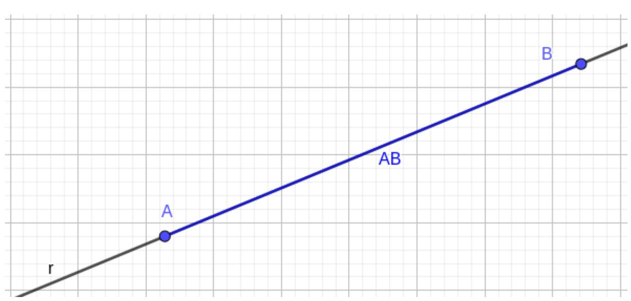


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB.

Norma e direção

Associado a um segmento AB, temos sua **norma** a qual é denotada por $|AB|$ e é definida como a distância entre seus pontos extremos A e B. Ou seja, a norma do segmento AB é a medida de seu comprimento ou tamanho.
A **direção** de um segmento AB é a direção de sua reta suporte, i.e. a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B. Logo, dois segmentos AB e CD têm a mesma direção, quando suas retas suportes são paralelas ou coincidentes (ou seja, elas têm a mesma direção).

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

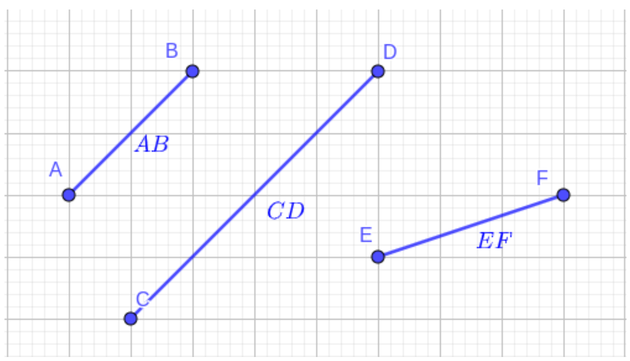


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Segmento nulo

Se A e B são pontos coincidentes, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Observamos que a representação geométrica de um segmento nulo é um ponto, tendo em vista que seus pontos extremos são coincidentes. Como existem infinitas retas de diferentes direções que passam por um único ponto, temos que segmentos nulos não têm direção definida.

1.1.2 Segmento orientado

▶ Vídeo disponível!

Observamos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA. Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** (ou **ponto de partida**) e o outro como sua **extremidade** (ou **ponto de chegada**). Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**.

Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B, sendo A o ponto de partida (origem) e B o ponto de chegada (extremidade). Veja a Figura 1.3.

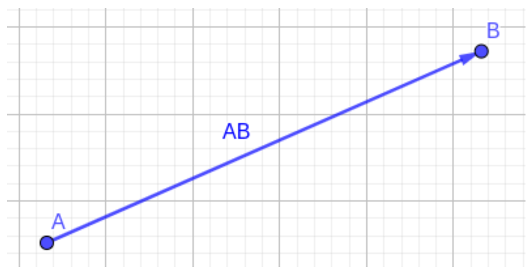


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB.

Norma e direção

As noções de norma e de direção para segmentos estendem-se diretamente a segmentos orientados. Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD são paralelas ou coincidentes. A norma de um segmento orientado AB é a norma do segmento AB, denotada por $|AB|$. O segmento orientado nulo AA tem norma $|AA| = 0$ e não tem direção definida.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

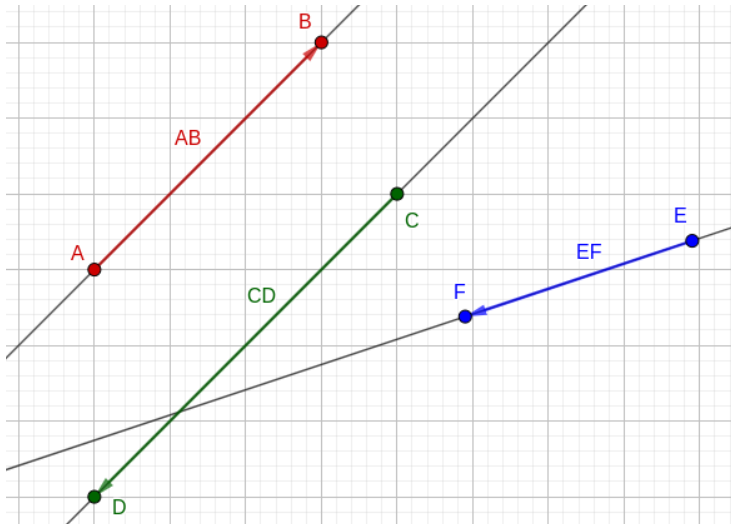


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

Comparação do sentido

▶ Vídeo disponível!

Segmentos orientados AB e CD de mesma direção podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos. No caso de suas retas suportes não serem coincidentes, os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção, quando os segmentos AC e BD não se interceptam. E, caso estas se intercetam, os segmentos orientados AB e CD têm sentidos opostos.

Exemplo 1.1.3. Na Figura 1.5, temos que os segmentos AB e CD têm o mesmo sentido. De fato, observamos que eles têm a mesma direção e que os segmentos AC e BD têm interseção vazia.

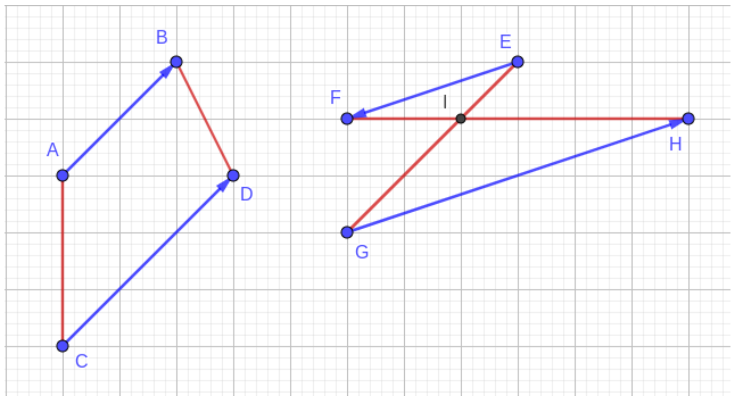


Figura 1.5: Segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido. Segmentos orientados EF e GH de sentidos opostos.

Na mesma Figura 1.5, vemos que os segmentos orientados EF e GH têm sentidos opostos, pois têm a mesma direção e os segmentos EG e FH se interceptam (no ponto I).

Observação 1.1.1. A propriedade de segmentos orientados terem o mesmo sentido é transitiva. Ou seja, se AB e CD têm o mesmo sentido e CD e EF têm o mesmo sentido, então AB e EF têm o mesmo sentido.

Com base na Observação 1.1.1, analisamos o sentido de dois segmentos orientados e colineares escolhendo um deles e construíndo um segmento orientado de mesmo sentido e não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais com respeito ao introduzido.

Equipolência

▶ Vídeo disponível!

Um segmento orientado não nulo AB é **equipolente** a um segmento orientado CD, quando AB tem a **mesma norma**, a **mesma direção** e o **mesmo sentido** de CD. Segmentos nulos também são considerados equipolentes entre si. Quando AB é equipolente a CD, escrevemos $AB \sim CD$.

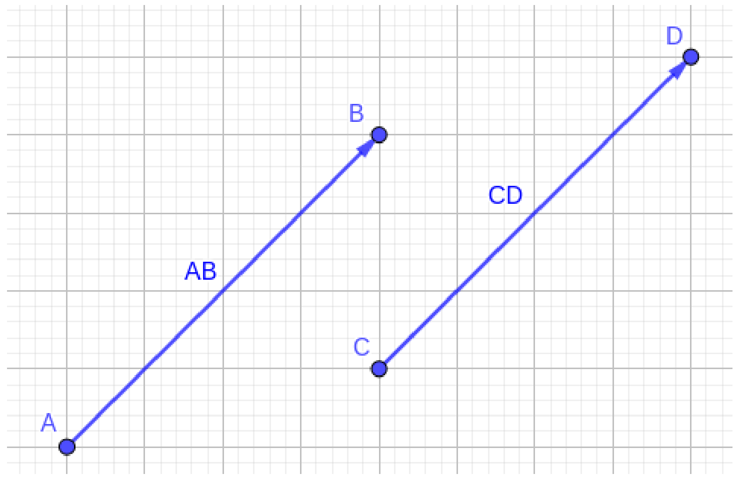


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

A relação de equipolência é uma **relação de equivalência**. De fato, temos:

- **relação reflexiva**: $AB \sim AB$;
- **relação simétrica**: $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$;
- **relação transitiva**: $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$.

Com isso, dado um segmento AB, definimos a **classe de equipolência** de AB como o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB. O segmento AB é um **representante** desta classe.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

Solução. Começamos mostrando a implicação. Por hipótese, temos que AB e CD são equipolentes. A tese é clara no caso de AB e CD serem coincidentes. Vejamos, então, o caso em que AB e CD não são coincidentes. Desta forma, $ABCD$ determina um paralelogramo de diagonais AD e BC. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios, temos demonstrado a implicação.

Agora, mostramos a recíproca. Por hipótese, temos que os pontos médios de AD e BC são coincidentes. Novamente, se AD e BD são coincidentes a conclusão é direta. Consideremos o caso em que AD e BD não são coincidentes. Daí, segue que AB e CD têm o mesmo tamanho e mesma direção. Seja M o ponto médio de AD e BC e π o plano determinado pelos segmentos AB e CD. Notando que M, B e D estão no mesmo semiplano de π determinado pela reta AC, concluímos que AB e CD são equipolentes.

$\Diamond$

ER 1.1.2. Mostre que $AB \sim CD$, então $BA \sim DC$.

Solução. AB e BA têm o mesmo tamanho e direção. CD e DC têm o mesmo tamanho e direção. Como $AB \sim CD$, temos que BA e DC têm o mesmo tamanho e direção. Por fim, observa-se que BA e DC têm ambos o mesmo sentido oposto de AB e DC.

$\Diamond$

Exercícios

E 1.1.1. Faça o esboço de dois segmentos AB e CD com $|AB| \neq |CD|$ e cujas retas determinadas por eles sejam coincidentes.

E 1.1.2. Faça o esboço de dois segmentos orientados $AB \not\sim CD$ e de mesmo sentido.

E 1.1.3. Faça o esboço de dois segmentos orientados colineares, de tamanhos iguais e sentidos opostos.

E 1.1.4. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: é quadrado todo trapézio retângulo $ABCD$ com segmentos orientados AD e BC equipolentes. Justifique sua afirmação.

E 1.1.5. Mostre que $AB \sim CD$, então $AC \sim BD$.

E 1.1.6. Mostre que se $AC \sim CB$, então C é ponto médio do segmento AB.

1.2 Vetor

▶ Vídeo disponível!

Dado um segmento orientado AB, define-se o vetor $\overrightarrow{AB}$ (lê-se vetor AB), a classe de equipolência de AB. Um segmento orientado da classe é um representante (geométrica) do vetor. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

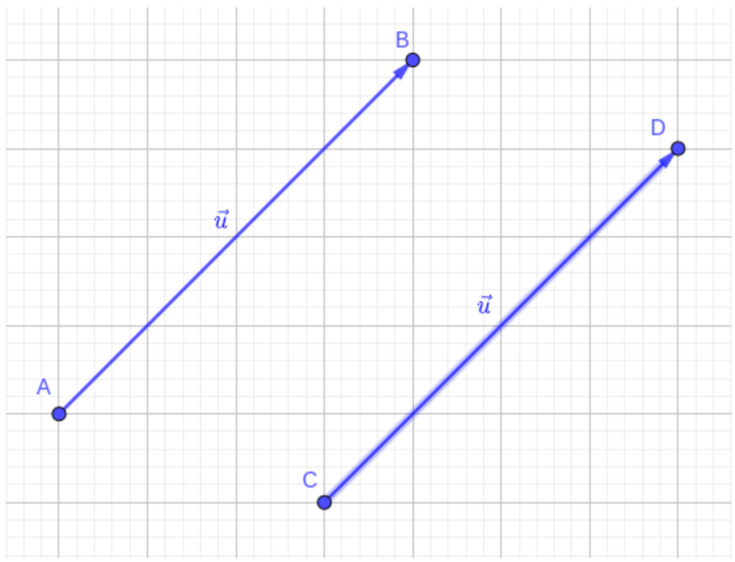


Figura 1.7: Esboço de duas representações de dado vetor $\vec{u}$.

O **vetor nulo** é aquele que tem como representante um segmento orientado nulo. É denotado por $\vec{0}$ e geometricamente representado por um ponto.
A **norma** (ou módulo) de um vetor $\vec{u}$ é denotada(o) por $|\vec{u}|$ e é definido como a norma de qualquer uma de suas representações. Mais precisamente, se o segmento orientado AB é uma representação de $\vec{v}$, i.e. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| := |AB| \tag{1.1}$$

Observação 1.2.1. $|\vec{v}| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.
Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Lembrando que $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$, i.e. a distância entre os pontos A e B, segue que se $\vec{v} = \vec{0}$, então AB é um segmento orientado nulo e,

portanto, $0 = |AB| = |\vec{v}|$. Reciprocamente, se $|\vec{v}| = 0$, então $|AB| = 0$ e, portanto, AB é um segmento orientado nulo, i.e. A e B são pontos sobrepostos (coincidentes) e $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc.

Exemplo 1.2.1. Vejamos a Figura 1.8. Temos os vetores paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, equanto que os vetores $\vec{s}$ e $\vec{t}$ são ortogonais (ou perpendiculares).

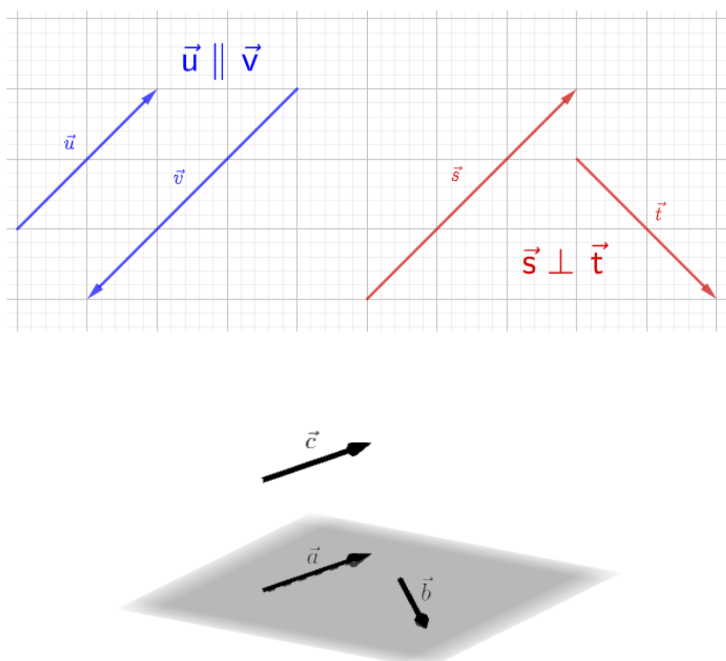


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

Também da Figura 1.8, temos que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares. Embora, na figura $\vec{c}$ está representado fora do plano determinado pelas representações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos tomar uma outra representação de $\vec{c}$ coplanar a estas representações.

1.2.1 Adição de vetores

▶ Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sejam, ainda, uma representação $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ e uma representação $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$. Então, define-se o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ como o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$. Veja a Figura 1.9.

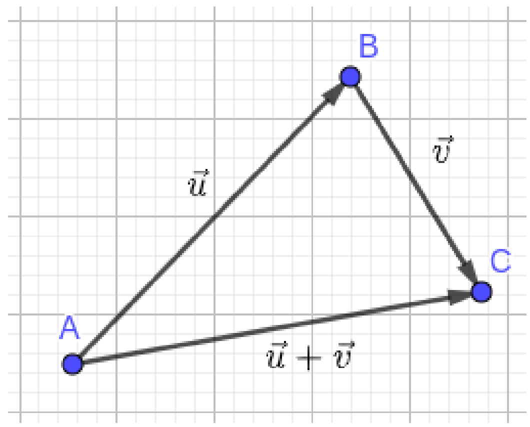


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

Observação 1.2.2. Vejamos as seguintes propriedades:

a) Elemento neutro na adição:

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \tag{1.2}$$

De fato, seja $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. Observamos que podemos representar $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$. Logo, temos $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

b) Associatividade na adição:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}). \tag{1.3}$$

De fato, sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$. Então, segue

$$\begin{align}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD} \tag{1.4}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \tag{1.5}\\ &= \overrightarrow{AD}, \tag{1.6}\end{align}$$

bem como,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \tag{1.7}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \tag{1.8}$$
$$= \overrightarrow{AD}. \tag{1.9}$$

c) Comutatividade da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \tag{1.10}$$

Esta propriedade pode ser demonstrada usando a regra do paralelogramo que veremos mais adiante. Veja, também, o Exercício Resolvido 1.2.2.

1.2.2 Vetor oposto

▶ Vídeo disponível!

Um **vetor** $\vec{v}$ é dito ser **oposto** a um dado vetor $\vec{u}$, quando quaisquer representações de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a $\vec{u}$. Veja a Figura 1.10.

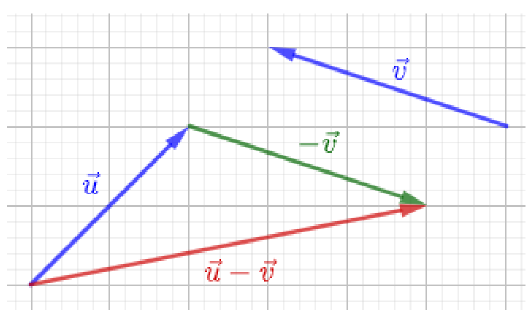


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

Observação 1.2.3. $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$.
De fato, seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Então, $|\vec{v}| = |AB| = |BA| = |-\vec{v}|$.

Observação 1.2.4. (Existência do oposto)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \tag{1.11}$$

De fato, seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Então, $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Segue que

$$\begin{align}
\vec{u} + (-\vec{u}) &= \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) \tag{1.12}\\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \tag{1.13}\\
&= \overrightarrow{AA} \tag{1.14}\\
&= \vec{0}. \tag{1.15}
\end{align}$$

1.2.3 Subtração de vetores

▶ Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é denotada por $\vec{u}-\vec{v}$ e é definida pela adição de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

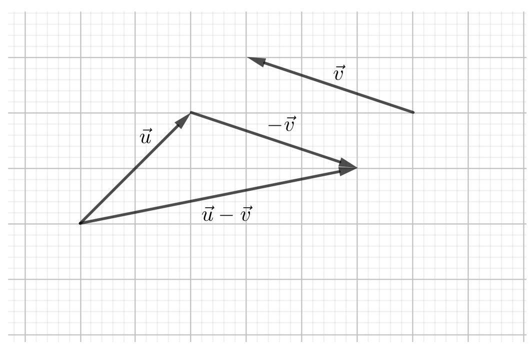


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

Observação 1.2.5. (Regra do paralelogramo)

▶ Vídeo disponível!

Sejam vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Seja, ainda, C o vértice oposto ao A no paralelogramo determinado pelos lados formados pelos segmentos AB e AD. Então, temos $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$. Veja a Figura 1.12.

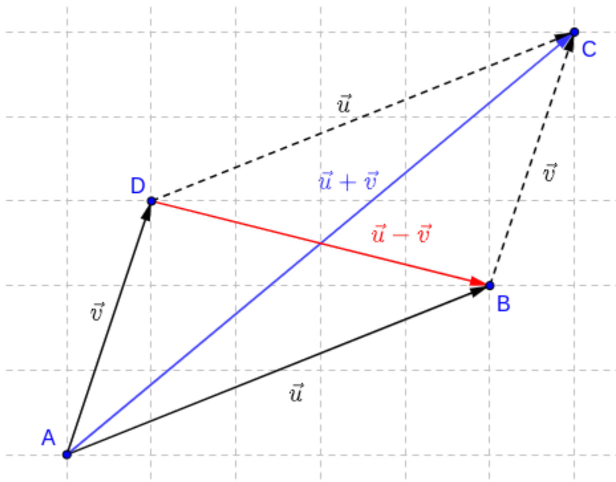


Figura 1.12: Regra do paralelogramo para a presentação geométrica da soma e da diferença de vetores.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

▶ Vídeo disponível!

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor $\vec{u}$ é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$ com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.6. Notamos que:

- Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.

- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

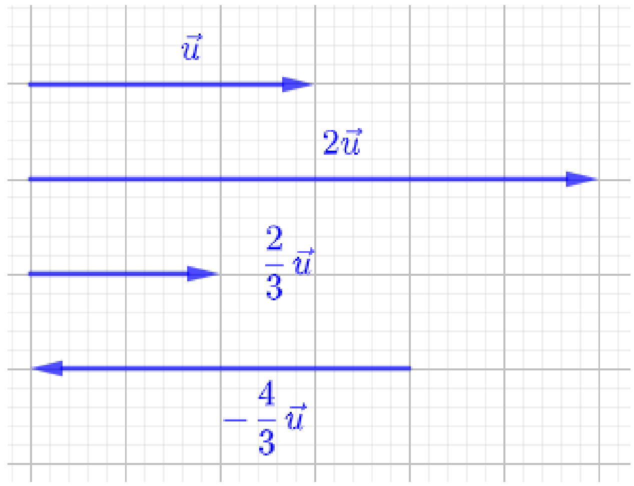


Figura 1.13: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

Observação 1.2.7. As seguintes propriedades são válidas:

a) Associatividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \tag{1.16}$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que $\alpha\,(\beta\vec{u})$ e $(\alpha\beta)\vec{u}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido. Por fim, temos

$$\begin{align}
|\alpha\,(\beta\vec{u})\,| &= |\alpha||\beta\vec{u}| \tag{1.17}\\
&= |\alpha|\,(|\beta||\vec{u}|) \tag{1.18}\\
&= (|\alpha||\beta|)\,|\vec{u}| \tag{1.19}\\
&= |\alpha\beta||\vec{u}| \tag{1.20}\\
&= |(\alpha\beta)\vec{u}|. \tag{1.21}
\end{align}$$

b) Distributividade:

$$\begin{align}
(\alpha+\beta)\vec{u} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \tag{1.22}\\
\alpha\,(\vec{u}+\vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \tag{1.23}
\end{align}$$

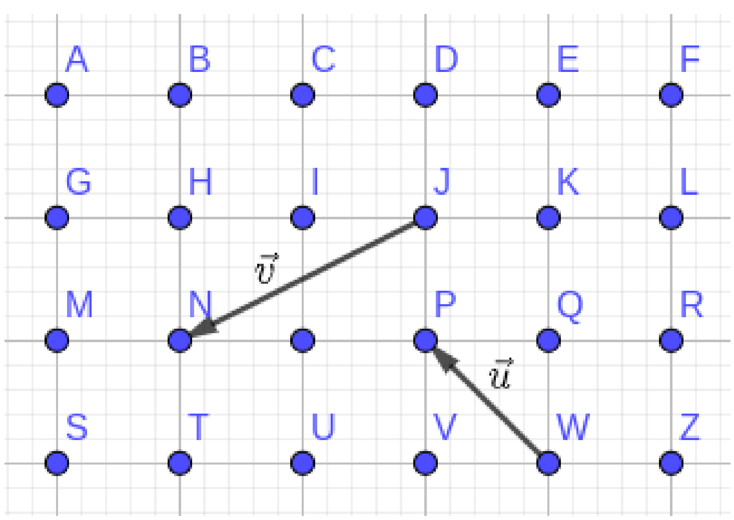
1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \tag{1.24}$$
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \tag{1.25}$$
- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Com base na figura abaixo, forneça o vetor $\overrightarrow{HC}$ como resultado de operações básicas envolvendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Solução. Vamos construir dois vetores auxiliares $\overrightarrow{HB}$ e $\overrightarrow{HI}$ a partir de operações envolvendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Notamos que $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HB}$. Começamos buscando formar o vetor $\overrightarrow{HI}$. Para tanto, observamos que $\vec{u} = \overrightarrow{NG}$ e, portanto, $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{JG}$. Com isso, obtemos que

$$\overrightarrow{HI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{JG} \tag{1.26}$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}). \tag{1.27}$$

Agora, vamos formar o vetor $\overrightarrow{HB}$. Isso pode ser feito da seguinte forma

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{WQ} \tag{1.28}$$

$$= \vec{u} + \overrightarrow{PQ} \tag{1.29}$$

$$= \vec{u} + \overrightarrow{HI} \tag{1.30}$$

$$= \vec{u} - \frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}) \tag{1.31}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}. \tag{1.32}$$

Por tudo isso, concluímos que

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HB} \tag{1.33}$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{v} + \vec{u}) \tag{1.34}$$

$$+ \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \tag{1.35}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}. \tag{1.36}$$

◊

ER 1.2.2. Mostre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Solução. Seja $ABCD$ o paralelogramo com $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Logo, pela regra do paralelogramo temos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \tag{1.37}$$

$$= \overrightarrow{AC} \tag{1.38}$$

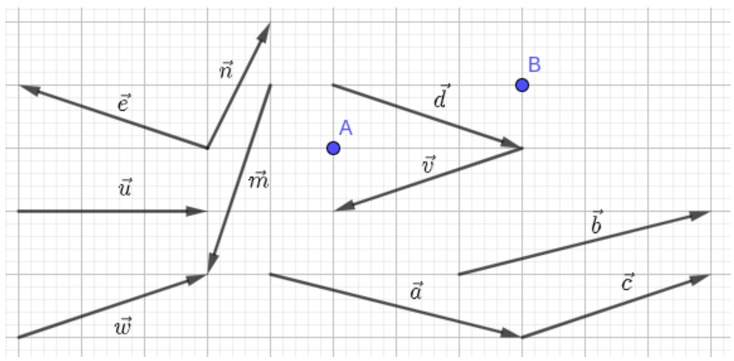
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \tag{1.39}$$

$$= \vec{v} + \vec{u}. \tag{1.40}$$

◊

Exercícios

E 1.2.1. Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são iguais ao vetor $\overrightarrow{AB}$.



E 1.2.2. Sejam A, B e C pontos dois a dois distintos. Se $\vec{b}$ é um vetor nulo, então $\vec{b}$ é igual a:

a) $\vec{0}$

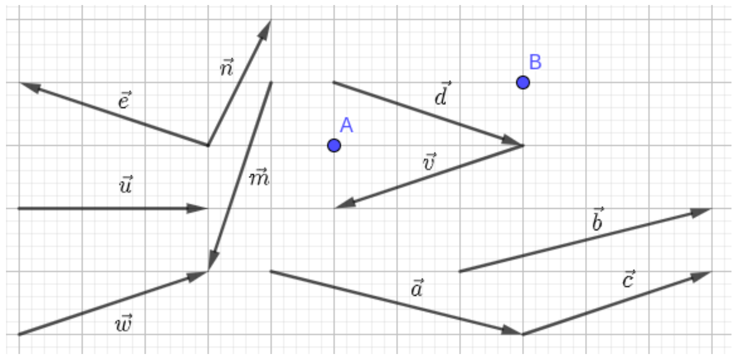
b) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{CC}$

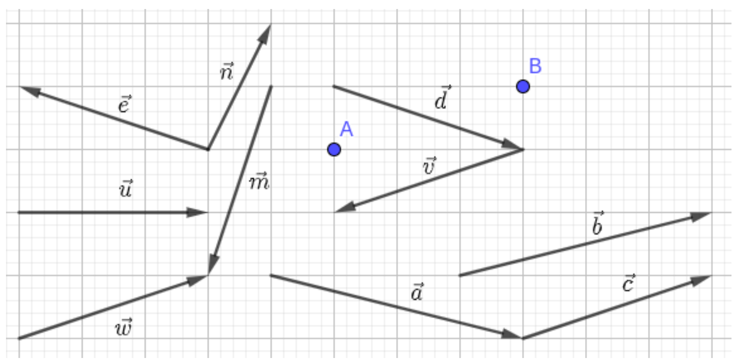
d) $\overrightarrow{CA}$

e) $\overrightarrow{BB}$

E 1.2.3. Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são paralelos entre si.



E 1.2.4. Com base na figura abaixo, qual(is) dos vetores indicados são ortogonais (perpendiculares) entre si.



E 1.2.5. Com base na figura abaixo, qual(is) dos seguintes são representações do vetor $\vec{v} + \vec{u}$?

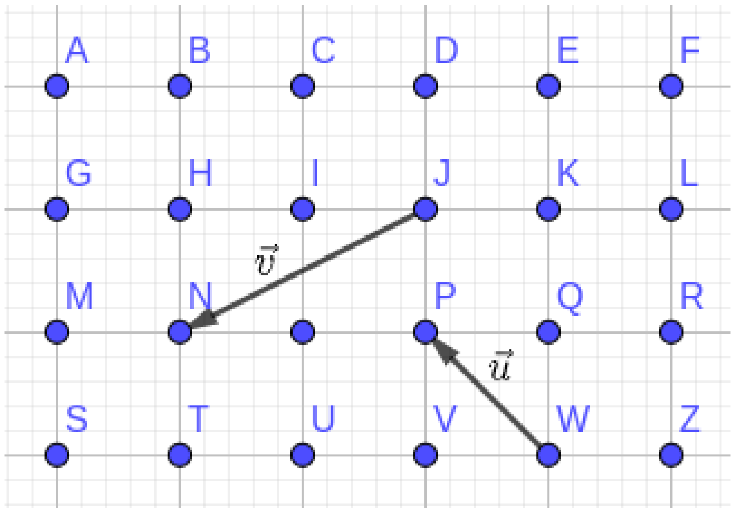
a) $\overrightarrow{JG}$

b) $\overrightarrow{QN}$

c) $\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{JV}$

e) $\overrightarrow{NN}$



E 1.2.6. Com base na figura abaixo, qual(is) dos seguintes são representações do vetor $\vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$?

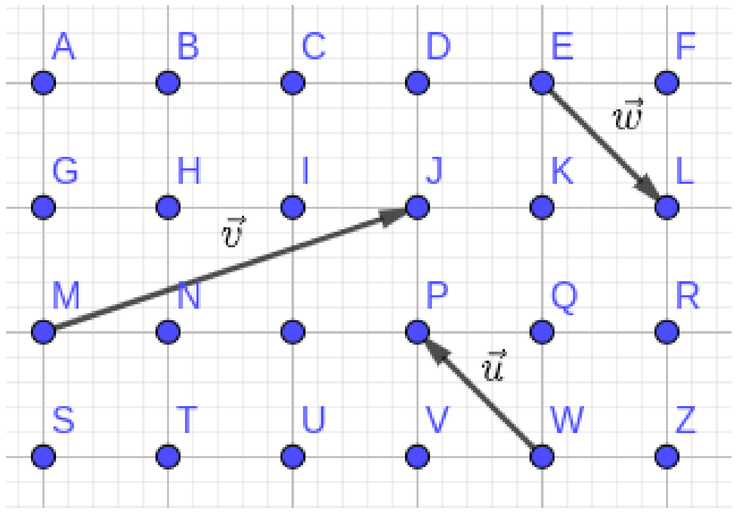
a) $\overrightarrow{0}$

b) $\overrightarrow{SP}$

c) $\overrightarrow{FP}$

d) $\overrightarrow{v}$

e) $\overrightarrow{AD}$



E 1.2.7. Com base na figura abaixo, escreva os seguintes vetores como resultado de operações envolvendo $\vec{u}$ ou $\vec{v}$.

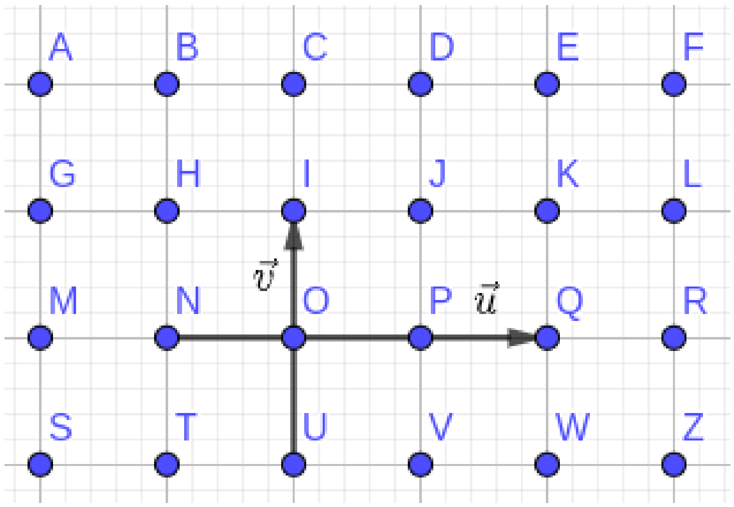
a) $\overrightarrow{QK}$

b) $\overrightarrow{KI}$

c) $\overrightarrow{TO}$

d) $\overrightarrow{PE}$

e) $\overrightarrow{FT}$



E 1.2.8. Seja dado um vetor $\vec{u} \neq 0$. Calcule a norma do vetor $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$[1].

E 1.2.9. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

1. $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$
2. $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

[1] $\vec{u}/|\vec{u}|$ é chamado de vetor $\vec{u}$ normalizado, ou a normalização do vetor $\vec{u}$.

Capítulo 2

Bases e coordenadas

2.1 Combinação linear

▶ Vídeo disponível!

Dados vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\dots$, $\vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, $\dots$, c_n, com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n \tag{2.1}$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\dots$, $\vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que $\vec{u}$ é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\dots$, $\vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor $\vec{u}$.

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Então, temos:

a) $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{v} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

b) $\vec{u_2} = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{z}$.

c) $\vec{u_3} = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$.

d) $\vec{u_4} = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor $\vec{z}$.

Observação 2.1.1. (Interpretação geométrica)

a) Uma combinação linear não nula envolvendo um único vetor $\vec{u}$ é um vetor paralelo a $\vec{u}$. De fato, seja

$$\vec{v} = c\vec{u}, \quad c \neq 0, \tag{2.2}$$

i.e. $\vec{v}$ é combinação linear não nula de $\vec{u}$. Então, $\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$.

b) Uma combinação linear não nula envolvendo dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é coplanar a estes vetores. De fato, seja

$$\vec{w} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}, \quad c_1 \cdot c_2 \neq 0, \tag{2.3}$$

e π o plano determinado pelas representações de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Logo, seguindo a regra do paralelogramo, vemos que $\vec{w}$ tem uma representação no plano determinado pelos segmentos AB e AC.

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Com base na figura abaixo, escreva o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$.

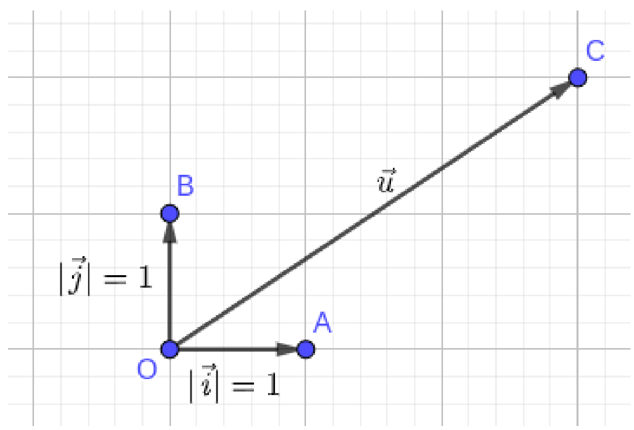


Figura 2.1: ER 2.1.1.

Solução. Para escrevermos o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, devemos determinar números c_1 e c_2 tais que

$$\vec{u} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}. \tag{2.4}$$

Com base na Figura 2.1, podemos tomar $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$, i.e. temos

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}. \tag{2.5}$$

◊

ER 2.1.2. Sabendo que $\vec{u} = 2\vec{v}$, forneça três maneiras de escrever o vetor nulo $\vec{0}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução.

a)

$$\vec{u} = 2\vec{v} \tag{2.6}$$
$$\vec{0} = 2\vec{v} - \vec{u} \tag{2.7}$$

b)

$$\vec{u} = 2\vec{v} \tag{2.8}$$
$$\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0} \tag{2.9}$$
$$\vec{0} = \vec{u} - 2\vec{v} \tag{2.10}$$

c)

$$\vec{u} = 2\vec{v} \tag{2.11}$$
$$\frac{1}{2}\vec{u} = \vec{v} \tag{2.12}$$
$$\vec{0} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} \tag{2.13}$$

◊

Exercícios

E 2.1.1. Com base na figura abaixo, escreva $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$.

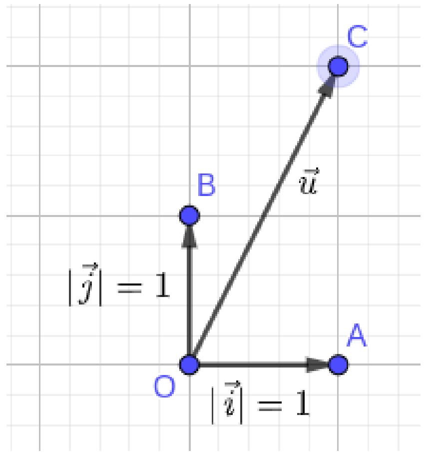


Figura 2.2: E 2.1.1.

E 2.1.2. Com base na figura abaixo, escreva $\vec{u} =$ como combinação linear dos vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$.

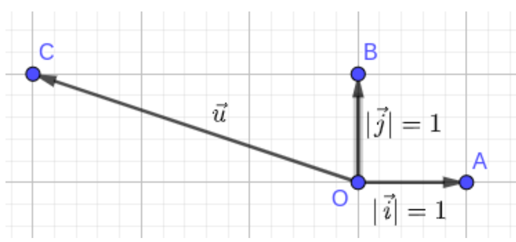


Figura 2.3: E 2.1.2.

E 2.1.3. Com base na figura abaixo, escreva $\vec{u} =$ como combinação linear dos vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$.

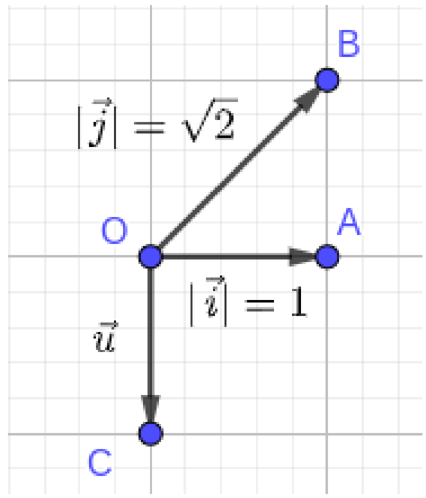


Figura 2.4: E 2.1.3.

E 2.1.4. Sabendo que $\vec{u} = 3\vec{w} + \vec{v}$, escreva $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

E 2.1.5. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de mesma direção e $\vec{w}$ um vetor não paralelo a $\vec{u}$, todos não nulos. Pode-se escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

E 2.1.6. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ambos não nulos e de mesma direção. Pode-se afirmar que $\vec{u}$ gera $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

E 2.1.7. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coplanares com direções diferentes e $\vec{w}$ um vetor não coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, todos não nulos. É possível gerar $\vec{w}$ com $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

E 2.1.8. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, coplanares e com direções distintas. Se $\vec{w}$ é um vetor também coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram $\vec{w}$? Justifique sua resposta.

2.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.2.1. No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

a) $\vec{u_1}$ é linearmente dependente (l.d.) dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

b) $\vec{u_2}$ é l.d. a $\vec{u}$ e $\vec{z}$.

c) $\vec{u_3}$ depende linearmente dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

d) Os vetores $\vec{u_4}$ e $\vec{z}$ são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

2.2.1 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguinte condições é satisfeita:

a) um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta\vec{u}; \tag{2.14}$$

b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção;

c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

De fato, a afirmação a) é a definição de dependência linear. A b) é consequência imediata da a), bem como a c) é equivalente a b). Por fim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos, então um é múltiplo por escalar do outro. Ou seja, c) implica a).

Observação 2.2.1. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor $\vec{u}$. De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \tag{2.15}$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor $\vec{u}$.

Observação 2.2.2. Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{2.16}$$

De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}, \tag{2.17}$$

i.e. o vetor $\vec{u}$ é combinação linear do vetor $\vec{v}$ e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u} \tag{2.18}$$

e, então, teríamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \tag{2.19}$$

Afirmamos que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d., então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Por fim, observamos que se $\alpha,\beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de $\vec{w}$. Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π. Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A, B e C pertencem a π, assim como o segmento AC. Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Reciprocamente, **se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..** De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}$ pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.20}$$

Neste caso, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.21}$$

E, então, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Agora, suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e dois a dois concorrentes (i.e. todos com direções distintas). Sejam, então

$\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π. Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC, respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B. Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B. Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, i.e. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

Observação 2.2.3. Três vetores dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2.22}$$

De fato, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \tag{2.23}$$

e teríamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$. Se dois ou três destes forem l.d.entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

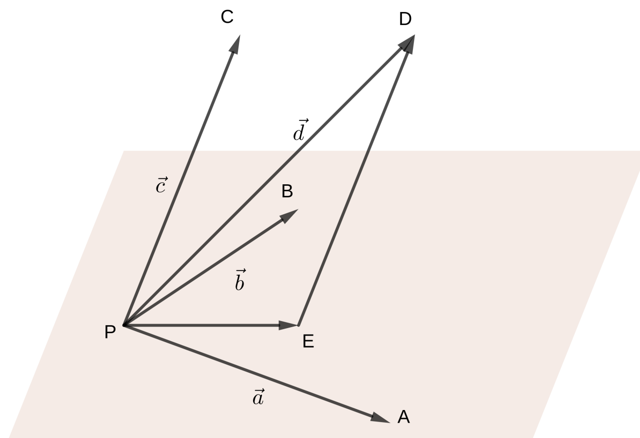


Figura 2.5: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a $\overrightarrow{PC}$ que passa pelo ponto D. Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π. Vejamos a Figura 2.5. Observamos que o vetor $\overrightarrow{PE}$ é coplanar aos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ e, portanto, exitem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB}. \tag{2.24}$$

Além disso, como $\overrightarrow{ED}$ tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma\overrightarrow{PC} \tag{2.25}$$

para algum número real γ. Por fim, observamos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED}\\ &= \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}\\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.\end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}, \tag{2.26}$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}, \tag{2.27}$$

então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.d.?

Solução. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{2.28}$$

Observemos que

$$\begin{align}
\vec{0} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \tag{2.29}\\
&= \alpha(2\vec{u} - 3\vec{v}) + \beta(\vec{u} + 2\vec{v}) \tag{2.30}\\
&= (2\alpha + \beta)\vec{u} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{v} \tag{2.31}
\end{align}$$

implica

$$\begin{align}
2\alpha + \beta &= 0 \tag{2.32}\\
-3\alpha + 2\beta &= 0 \tag{2.33}
\end{align}$$

Resolvendo este sistema, vemos que $\alpha = \beta = 0$. Logo, concluímos que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i..

◊

ER 2.2.2. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores. Verifique a seguinte afirmação de que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Justifique sua resposta.

Solução. A afirmação é verdadeira. De fato, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então existe um escalar α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}. \tag{2.34}$$

Segue que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.35}$$

Isto é, $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Então, por definição, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

◊

ER 2.2.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Mostre que A, B e C são colineares se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d..

Solução. Primeiramente, vamos verificar a implicação. Se A, B e C são colineares, então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Logo, são l.d. os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Agora, verificamos a recíproca. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são l.d., então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Como eles são concorrentes, segue que A, B e C são colineares.

◊

Exercícios

E 2.2.1. Sendo $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, mostre que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são l.d. para qualquer ponto P.

E 2.2.2. Sejam dados três vetores quaisquer $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Mostre que os vetores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$ são l.d..

E 2.2.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Mostre que A, B, C e D são coplanares se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

E 2.2.4. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}, \tag{2.36}$$

$$\vec{b} = 2\vec{v} - 4\vec{u}, \tag{2.37}$$

então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i.? Justifique sua resposta.

E 2.2.5. Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.d. $\Rightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.d..

b) $\vec{u}$, $\vec{0}$, $\vec{w}$ são l.d..

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.i. $\Rightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.i..

d) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.d. $\Rightarrow$ $-\vec{u}$, $2\vec{v}$, $-3\vec{w}$ l.d..

2.3 Bases e coordenadas

▶ Vídeo disponível!

Seja V o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Seção 2.2, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., então qualquer vetor $\vec{u} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais α, β e γ tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.38}$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de V é uma sequência de três vetores l.i. de V.

Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma dada base de V. Então, dado qualquer $\vec{v} \in V$, existe um único terno de números reais α, β e γ tais que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.39}$$

De fato, a existência de α, β e γ segue imediatamente do fato de que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e, portanto, $\vec{v}$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de α, β e γ, tomamos α', β' e γ' tais que

$$\vec{v} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}. \tag{2.40}$$

Subtraindo (2.40) de (2.39), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}. \tag{2.41}$$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., segue que[1]

$$\alpha - \alpha' = 0,\ \beta - \beta' = 0,\ \gamma - \gamma' = 0, \tag{2.42}$$

i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

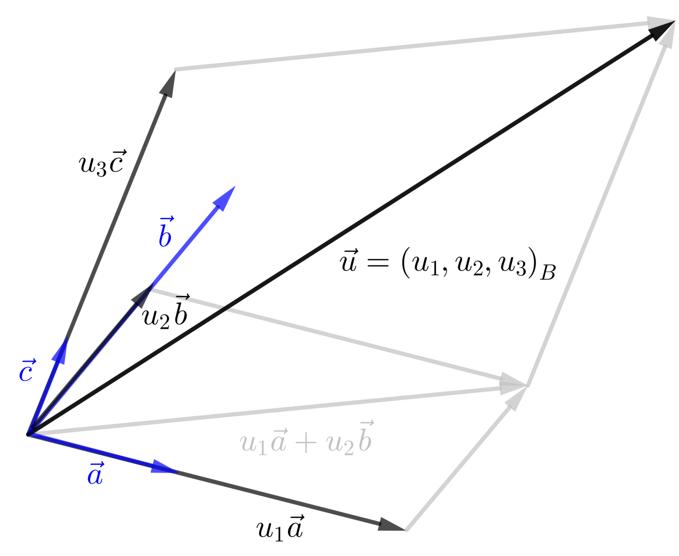


Figura 2.6: Representação de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ em uma dada base $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

[1]Lembre-se da Observação 2.2.3.

Com isso, fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, cada vetor $\vec{u}$ é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.43}$$

onde u_1, u_2 e u_3 são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do $\vec{u}$ na base B. Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \tag{2.44}$$

para expressar o vetor $\vec{u}$ nas suas coordenadas na base B. Vejamos a Figura 2.6.

Exemplo 2.3.1. Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)_B$ é o vetor $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

2.3.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operação são definidas a partir das coordenadas de vetores.
Sejam $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.45}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \tag{2.46}$$

Então, a **adição** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \tag{2.47}$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \tag{2.48}$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \tag{2.49}$$

Exemplo 2.3.2. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1,3, -8)_B. \tag{2.50}$$

Podemos usar o `SymPy` para manipularmos vetores em coordenadas. Para computarmos a soma neste exemplo, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u+v
```

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor $\vec{u}$ é

$$-\vec{u} = -(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.51}$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \tag{2.52}$$

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \tag{2.53}$$

Exemplo 2.3.3. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B\,. \tag{2.54}$$

Usando o `Sympy`, podemos computar o oposto do vetor $\vec{v}$ com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
v = Matrix([2,-1,-3])
-v
```

Lembrando que **subtração** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$, segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \tag{2.55}$$

Exemplo 2.3.4. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5, 2)_B. \tag{2.56}$$

Usando o `Sympy`, podemos computar $\vec{u} - \vec{v}$ com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u-v
```

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número** α pelo **vetor** $\vec{u}$. Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.57}$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \tag{2.58}$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \tag{2.59}$$

Exemplo 2.3.5. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \tag{2.60}$$

Usando o `Sympy`, temos:

```
from sympy import *
v = Matrix([2,-1,-3])
-1/3*v
```

2.3.2 Dependência linear

Dois vetores

Na Subseção 2.2.1, discutimos que dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}, \tag{2.61}$$

sem perda de generalidade[2].

Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, temos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Com isso, a equação (2.61) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \tag{2.62}$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1,\ u_2 = \alpha v_2,\ u_3 = \alpha v_3. \tag{2.63}$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

[2]Formalmente, pode ocorrer $\vec{v} = \beta\vec{u}$.

Exemplo 2.3.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.d., pois

$$2 = 2 \cdot 1,\ -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),\ -3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right). \tag{2.64}$$

b) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.i., pois $u_1 = 1 \cdot v_1$, enquanto $u_2 = 2v_2$.

Três vetores

Na Subseção 2.2.1, discutimos que três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2.65}$$

Seja, então, $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V. Então, temos que a equação

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \tag{2.66}$$

é equivalente a

$$\alpha(u_1,u_2,u_3)_B + \beta(v_1,v_2,v_3)_B + \gamma(w_1,w_2,w_3)_B = (0,0,0)_B. \tag{2.67}$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \tag{2.68}$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é não nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.69}$$

Exemplo 2.3.7. Fixada uma base B de V, sejam os vetores $\vec{u} = (2,1,-3)_B$, $\vec{v} = (1,-1,2)_B$ e $\vec{w} = (-2,1,1)_B$. Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.70}$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \tag{2.71}$$

Logo, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma sequência de vetores l.i..

2.3.3 Bases ortonormais

Uma **base** $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Observação 2.3.1. (Teorema de Pitágoras) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Proposição 2.3.1. *Seja $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)_B$. Então, $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.*

Demonstração. Temos $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}|^2$. Seja π um plano determinado por dadas representações de $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortogonais, temos que $\vec{k}$ é ortogonal ao plano π. Além disso, o vetor $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ também admite uma representação em π, logo $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{k}$. Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.3.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \tag{2.72}$$

Analogamente, como $\vec{i} \perp \vec{j}$, do Teorema de Pitágoras segue

$$\begin{align} |\vec{u}|^2 &= |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 \tag{2.73}\\ &= |u_1|^2|\vec{i}| + |u_2|^2|\vec{j}| + |u_3||\vec{k}|^2 \tag{2.74}\\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \tag{2.75}\end{align}$$

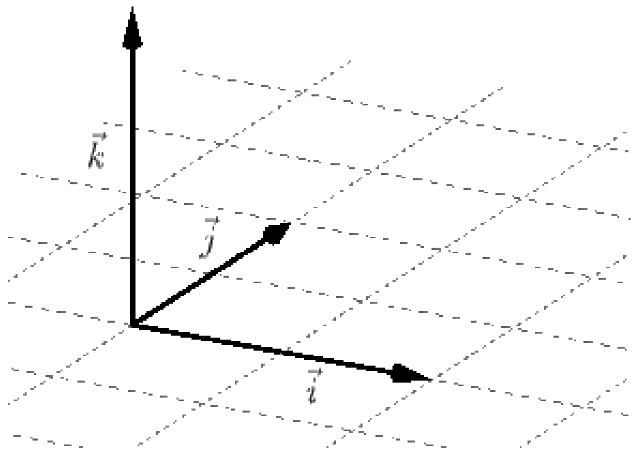
Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado. □

Exemplo 2.3.8. Se $\vec{u} = (-1,2,-\sqrt{2})_B$ e B é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \tag{2.76}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.3.1. Considere a base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ conforme a figura abaixo. Faça uma representação do vetor $\vec{u} = \left(2,\frac{1}{2},1\right)_B$.

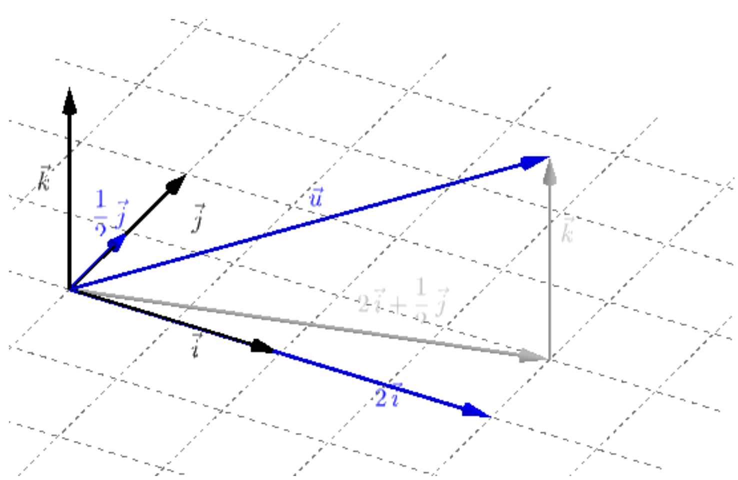


Solução. Primeiramente, observamos que

$$\vec{u} = (2{,}1{,}1)_B \tag{2.77}$$

$$= 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}. \tag{2.78}$$

Assim sendo, podemos construir uma representação de $\vec{u}$ como dada na figura abaixo. Primeiramente, podemos representar os vetores $2\vec{i}$ e $\frac{1}{2}\vec{j}$ (azul). Então, representamos o vetor $2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ (cinza). Por fim, temos a representação de $\vec{u}$ (azul).



◊

ER 2.3.2. Fixada uma base qualquer B e dados $\vec{u} = (1,-1,2)_B$ e $\vec{v} = (-2,1,-1)_B$, encontre o vetor $\vec{x}$ que satisfaça

$$\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{v} - (\vec{x} + \vec{u})\,. \tag{2.79}$$

ER 2.3.3. Primeiramente, podemos manipular a equação de forma a isolarmos $\vec{x}$ como segue

$$\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{v} - (\vec{x} + \vec{u}) \tag{2.80}$$

$$2\vec{x} = -\vec{u} + \vec{v} - \vec{x} - \vec{u} \tag{2.81}$$

$$3\vec{x} = \vec{v} - 2\vec{u} \tag{2.82}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} \tag{2.83}$$

Agora, sabendo que $\vec{u} = (1,-1,2)_B$ e $\vec{v} = (-2,1,-1)_B$, temos

$$\vec{x} = \frac{1}{3}(-2,1,-1)_B - \frac{2}{3}(1,-1,2)_B \tag{2.84}$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)_B - \left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)_B \tag{2.85}$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3},\frac{1}{3}+\frac{2}{3},-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right) \tag{2.86}$$

$$\vec{x} = \left(-\frac{4}{3},1,-\frac{5}{3}\right)_B. \tag{2.87}$$

ER 2.3.4. Fixada uma base B qualquer, verifique se os vetores $\vec{u} = (1,-1,2)_B$, $\vec{v} = (-2,1,-1)_B$ e $\vec{w} = (-4,3,-5)$ formam uma base para o espaço V.

Solução. Uma base para o espaço tridimensional V é uma sequência de três vetores l.i.. Logo, para resolver a questão, basta verificar se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é l.i.. Com base na Subseção 2.3.2, basta calcularmos o determinante da matriz cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores da sequência, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \tag{2.88}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \tag{2.89}$$

$$= -5 - 4 - 12 - (-8 - 3 - 10) \tag{2.90}$$

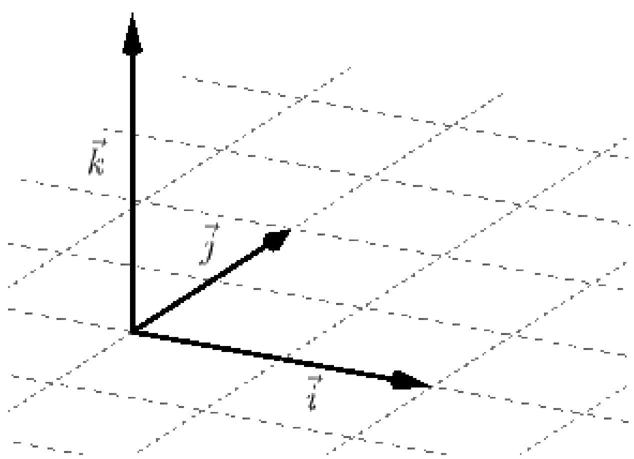
$$= -21 + 21 = 0. \tag{2.91}$$

Como este determinando é nulo, concluímos que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é l.d. e, portanto, não forma uma base para V.

$\Diamond$

Exercícios

E 2.3.1. Considere a base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ conforme a figura abaixo. Faça uma representação do vetor $\vec{u} = \left(1,-1,\frac{1}{2}\right)_B$.



E 2.3.2. Fixada uma base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e sabendo que $\vec{v} = (2,0,-3)_B$, escreva $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

E 2.3.3. Fixada uma base B qualquer e $\vec{a} = (0,-1,1)_B$, $\vec{b} = (2,0,-1)_B$ e $\vec{c} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},1\right)_B$, calcule:

a) $6\vec{c}$

b) $-\vec{b}$

c) $\vec{c}-\vec{b}$

d) $2\vec{c}-(\vec{a}-\vec{b})$

E 2.3.4. Faxada uma base B qualquer, verifique se os seguintes conjuntos de vetores são l.i. ou l.d..

a) $\vec{i} = (1,0,0)_B$, $\vec{j} = (0,1,0)_B$

b) $\vec{a} = (1,2,0)_B$, $\vec{b} = (-2,-4,1)_B$

c) $\vec{a} = (1,2,0)_B$, $\vec{c} = (-2,-4,0)_B$

d) $\vec{i} = (1,0,0)_B$, $\vec{k} = (0,0,1)_B$

e) $\vec{j} = (0,1,0)_B$, $\vec{k} = (0,0,1)_B$

f) $\vec{a} = (1,2,-1)_B$, $\vec{d} = (\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})_B$

E 2.3.5. Faxada uma base B qualquer, verifique se os seguintes conjuntos de vetores são l.i. ou l.d..

a) $\vec{i} = (1,0,0)_B$, $\vec{j} = (0,1,0)_B$, $\vec{k} = (0,0,1)_B$

b) $\vec{a} = (0,-1,1)_B$, $\vec{b} = (2,0,-1)$, $\vec{c} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{3},1)_B$

c) $\vec{u} = (0,-1,1)_B$, $\vec{v} = (2,0,-1)$, $\vec{w} = (2,-1,0)_B$

E 2.3.6. Seja $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uma base ortogonal, i.e. $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que $C = (\vec{a}/|\vec{a}|,\vec{b}/|\vec{b}|,\vec{c}/|\vec{c}|)$ é uma base ortonormal.

2.4 Mudança de base

Sejam $B = (\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ e $C = (\vec{r},\vec{s},\vec{t})$ bases do espaço V. Conhecendo as coordenadas de um vetor na base C, queremos determinar suas coordenadas na base B. Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C \tag{2.92}$$
$$= z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \tag{2.93}$$

Agora, tendo $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$ e $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$, então

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3)_C &= z_1(r_1, r_2, r_3)_B && (2.94)\\
&+ z_2(s_1, s_2, s_3)_B && (2.95)\\
&+ z_3(t_1, t_2, t_3)_B && (2.96)\\
&= \underbrace{(r_1 z_1 + s_1 z_2 + t_1 z_3)}_{z_1'}\vec{u} && (2.97)\\
&+ \underbrace{(r_2 z_1 + s_2 z_2 + t_2 z_3)}_{z_2'}\vec{v} && (2.98)\\
&+ \underbrace{(r_3 z_1 + s_3 z_2 + t_3 z_3)}_{z_3'}\vec{w} && (2.99)
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \tag{2.100}$$

onde $\vec{z} = (z_1', z_2', z_3')_B$.
A matriz M_{CB} é chamada de matriz de mudança de base de C para B. Como os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{t}$ são l.i., temos que a matriz de mudança de base M_{BC} tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Portanto, multiplicando por M_{BC}^{-1} pela esquerda em (2.100), temos

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}^{-1}}_{M_{BC}} \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix}, \tag{2.101}$$

ou seja

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \tag{2.102}$$

Exemplo 2.4.1. Sejam dadas as bases $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, com $\vec{u} = (1,2,0)_B$, $\vec{v} = (2,0,-1)_B$ e $\vec{w} = (-1,-3,1)_B$. Seja, ainda, o vetor $\vec{z} = (1,-2,1)_B$. Vamos encontrar as coordenadas de $\vec{z}$ na base C.
Há duas formas de proceder.
Método 1.

A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$(1,-2,1)_B = (x,y,z)_C. \tag{2.103}$$

Esta é equivalente a

$$\begin{align}
\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} &= x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \tag{2.104}\\
&= x(1,2,0)_B \tag{2.105}\\
&+ y(2,0,-1)_B \tag{2.106}\\
&+ z(-1,-3,1)_B \tag{2.107}\\
&= x(\vec{a} + 2\vec{b}) \tag{2.108}\\
&+ y(2\vec{a} - \vec{c}) \tag{2.109}\\
&+ z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \tag{2.110}\\
&= (x + 2y - z)\vec{a} \tag{2.111}\\
&+ (2x - 3z)\vec{b} \tag{2.112}\\
&+ (-y + z)\vec{c} \tag{2.113}
\end{align}$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3z = -2 \\ -y + z = 1 \end{cases} \tag{2.114}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = 7/5$, $y = 3/5$ e $z = 8/5$, i.e.

$$\vec{z} = \left(\frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)_C. \tag{2.115}$$

Método 2.

Outra maneira de se obter as coordenadas de $\vec{z}$ na base C é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base C para a base B é

$$\begin{align}
M_{CB} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \tag{2.116}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.117}
\end{align}$$

Entretanto, neste exemplo, queremos fazer a mudança de B para C. Portanto, calculamos a matriz de mudança de base M_{BC}. Segue:

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} \tag{2.118}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.119}$$

$$M_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

Com esta matriz e denotando $\vec{z} = (x,y,z)_C$, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}}_{M_{BC}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} \tag{2.122}$$

Logo, temos

$$\vec{z} = \left(\frac{7}{5},\frac{3}{5},\frac{8}{5}\right)_C. \tag{2.123}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.4.1. Sejam B e C bases dadas do espaço V. Sabendo que a matriz de mudança de base de B para C é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.124}$$

calcule a matriz de mudança de base de C para B.

Solução. Sejam $M_{BC} = M$ a matriz de mudança de base de B para C e

M_{CB} a matriz de mudança de base de C para B. Temos

$$M_{CB} = M_{BC}^{-1} \tag{2.125}$$

$$M_{CB} = M^{-1} \tag{2.126}$$

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.127}$$

$$M_{CB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{2.128}$$

◊

ER 2.4.2. Fixadas as mesmas bases do ER 2.4.1, determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base C, sabendo que $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$.

Solução. Denotando $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$, temos

$$\vec{u}_C = M_{BC}\vec{u}_B \tag{2.129}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2.131}$$

◊

ER 2.4.3. Considere dadas as bases A, B e C. Sejam, também, M_{AB} a matriz de mudança de base de A para B e M_{BC} a matriz de mudança de base de B para C. Determine a matriz de mudança de base de A para C em função das matrizes M_{AB} e M_{BC}.

Solução. Para um vetor $\vec{u}$ qualquer, temos

$$\vec{u}_B = M_{AB}\vec{u}_A \tag{2.132}$$

$$\vec{u}_C = M_{BC}\vec{u}_B \tag{2.133}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \vec{u}_C &= M_{BC}\left(M_{AB}\vec{u}_A\right) && (2.134)\\ &= \left(M_{BC}M_{AB}\right)\vec{u}_A. && (2.135) \end{aligned}$$

Concluímos que $M_{AC} = M_{BC}M_{AB}$.

◊

Exercícios

E 2.4.1. Sejam A e B bases dadas de V (espaço tridimensional). Sabendo que $\vec{v} = (-2,0,1)_A$ e que a matriz de mudança de base

$$M_{AB} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1, \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad (2.136)$$

determine $\vec{v}_B$, i.e. as coordenadas de $\vec{v}$ na base B.

E 2.4.2. Sejam A e B bases dadas de V (espaço tridimensional). Sabendo que $\vec{v} = (-2,0,1)_B$ e que a matriz de mudança de base

$$M_{AB} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1, \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad (2.137)$$

determine $\vec{v}_A$, i.e. as coordenadas de $\vec{v}$ na base A.

E 2.4.3. Sejam $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ bases de V com

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (0,1,1)_B && (2.138)\\ \vec{v} &= (1,0,1)_B && (2.139)\\ \vec{w} &= (2,1,-1)_B && (2.140) \end{aligned}$$

Forneça a matriz de mudança de base M_{CB}.

E 2.4.4. Sejam $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ bases de V com

$$\vec{a} = (0,1,1)_C \quad (2.141)$$
$$\vec{b} = (1,0,1)_C \quad (2.142)$$
$$\vec{c} = (2,1,-1)_C \quad (2.143)$$

Forneça a matriz de mudança de base M_{CB}.

E 2.4.5. Sejam $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ bases de V com

$$\vec{u} = (0,1,1)_B \quad (2.144)$$
$$\vec{v} = (1,0,1)_B \quad (2.145)$$
$$\vec{w} = (2,1,-1)_B \quad (2.146)$$

Sabendo que $\vec{d} = (0,-1,2)_C$, forneça $\vec{d}_B$, i.e. as coordenadas do vetor $\vec{d}$ na base B.

E 2.4.6. Sejam $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ bases de V com

$$\vec{u} = (0,1,1)_B \quad (2.147)$$
$$\vec{v} = (1,0,1)_B \quad (2.148)$$
$$\vec{w} = (2,1,-1)_B \quad (2.149)$$

Sabendo que $\vec{d} = (1,-2,1)_B$, forneça $\vec{d}_C$, i.e. as coordenadas do vetor $\vec{d}$ na base C.

E 2.4.7. Considere dadas as bases A, B e C do espaço tridimensional V. Sejam, também, M_{AB} a matriz de mudança de base de A para B e M_{CB} a matriz de mudança de base de C para B. Determine a matriz de mudança de base de A para C em função das matrizes M_{AB} e M_{CB}.

Capítulo 3

Produto escalar

3.1 Produto escalar

Ao longo desta seção, assumiremos $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal no espaço[1]. Por simplicidade de notação, vamos denotar as coordenas de um vetor $\vec{u}$ na base B por

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \tag{3.1}$$

i.e. $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$.
O **produto escalar** dos vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{3.2}$$

Exemplo 3.1.1. Se $\vec{u} = (2, -1,3)$ e $\vec{v} = (-3, -4,2)$, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 4. \tag{3.3}$$

3.1.1 Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e qualquer número real α, temos:

- **Comutatividade:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{3.4}$$

[1] $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ é l.i., $|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$ e dois a dois ortogonais. Veja Subseção 2.3.3.

Dem.:

$$\begin{align}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) \tag{3.5}\\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3.6}\\
&= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \tag{3.7}\\
&= \vec{v}\cdot\vec{u}. \tag{3.8}
\end{align}$$

- **Associatividade com a multiplicação por escalar:**

$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) \tag{3.9}$$

Dem.:

$$\begin{align}
(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} &= (\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) \tag{3.10}\\
&= (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 \tag{3.11}\\
&= \alpha(u_1v_1) + \alpha(u_2v_2) + \alpha(u_3v_3) \tag{3.12}\\
&= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) \tag{3.13}\\
&= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) \tag{3.14}\\
&= (u_1,u_2,u_3)\cdot(\alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3) \tag{3.15}\\
&= \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}). \tag{3.16}
\end{align}$$

- **Distributividade com a adição:**

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \tag{3.17}$$

Dem.:

$$\begin{align}
\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= (u_1,u_2,u_3)\cdot((v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)) \tag{3.18}\\
&= (u_1,u_2,u_3)\cdot[(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3)] \tag{3.19}\\
&= u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) + u_2(v_2+w_2) \tag{3.20}\\
&= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \tag{3.21}\\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \tag{3.22}\\
&= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}. \tag{3.23}
\end{align}$$

- **Sinal:**

$$\begin{align}
\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0, \quad \text{e} \tag{3.24}\\
\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \tag{3.25}
\end{align}$$

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0. \tag{3.26}$$

Além disso, observamos que a soma de números não negativos é nula se, e somente se, os números forem zeros.

- **Norma:**

$$|u|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \tag{3.27}$$

Dem.: Como fixamos uma base ortonormal B, a Proposição 2.3.1 nos garante que

$$|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}. \tag{3.28}$$

Exemplo 3.1.2. Sejam $\vec{u} = (-1{,}2{,}1)$, $\vec{v} = (2,-1{,}3)$ e $\vec{w} = (1{,}0,-1)$. Vejamos se as propriedades se verificam para estes vetores.

- Comutatividade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -1 \tag{3.29}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 \checkmark \tag{3.30}$$

- Associatividade com a multiplicação por escalar:

$$(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2{,}4{,}2) \cdot (2,-1{,}3) = -4 - 4 + 6 = -2 \tag{3.31}$$

$$2(\vec{u}\vec{v}) = 2(-2 - 2 + 3) = -2 \checkmark \tag{3.32}$$

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = (-1{,}2{,}1) \cdot (4,-2{,}6) = -2 \checkmark \tag{3.33}$$

- Distributividade com a adição:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-1{,}2{,}1) \cdot (3,-1{,}2) = -3 - 2 + 2 = -3 \tag{3.34}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2 - 2 + 3) + (-1 + 0 - 1) = -3 \checkmark \tag{3.35}$$

- Sinal:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = 1 + 0 + 1 = 2 \geq 0 \checkmark \tag{3.36}$$

- Norma:

$$|u|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6 \tag{3.37}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 \checkmark \tag{3.38}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Sejam

$$\vec{u} = (-1{,}0{,}1) \tag{3.39}$$
$$\vec{v} = (0{,}2{,}1) \tag{3.40}$$
$$\vec{w} = (2,-1,-1) \tag{3.41}$$

calcule $\vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - 2\vec{u}\cdot\vec{w}$.

Solução. Vamos começar calculando o último termo.

$$\vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - 2\vec{u}\cdot\vec{w} \tag{3.42}$$
$$= \vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - 2(-1{,}0{,}1)\cdot(2,-1,-1) \tag{3.43}$$

Calculamos $2(-1{,}0{,}1) = (-2{,}0{,}2)$, logo, temos

$$\vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - (-2{,}0{,}2)\cdot(2,-1,-1) \tag{3.44}$$
$$= \vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - (-2\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 2\cdot(-1)) \tag{3.45}$$
$$= \vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - (-4-2) \tag{3.46}$$

Agora, para o primeiro termo, podemos usar a propriedade distributiva, como segue

$$2\vec{w}\cdot\vec{u} - \vec{w}\cdot\vec{w} + 6 \tag{3.47}$$
$$= 2(2,-1,-1)\cdot(-1{,}0{,}1) - |\vec{w}|^2 + 6 \tag{3.48}$$
$$= 2(-2+0-1) - (2^2 + (-1)^2 + (-1)^2) + 6 \tag{3.49}$$
$$= -6 - 6 + 6 \tag{3.50}$$
$$= -6 \tag{3.51}$$

Com isso, concluímos que $\vec{w}\cdot(2\vec{u}-\vec{w}) - 2\vec{u}\cdot\vec{w} = -6$.

◊

ER 3.1.2. Sendo $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal, mostre que o produto interno entre vetores distintos de B é igual a zero. Ainda, o produto interno de um vetor de B por ele mesmo é igual a 1.

Solução. Calculamos o produto interno entre vetores diferentes:

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{j} &= (1{,}0{,}0)\cdot(0{,}1{,}0) && (3.52)\\
&= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 && (3.53)\\
&= 0 \checkmark && (3.54)\\
&= \vec{j}\cdot\vec{i} && (3.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{k} &= (1{,}0{,}0)\cdot(0{,}0{,}1) && (3.56)\\
&= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 && (3.57)\\
&= 0 \checkmark && (3.58)\\
&= \vec{k}\cdot\vec{i} && (3.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{j}\cdot\vec{k} &= (1{,}0{,}0)\cdot(0{,}0{,}1) && (3.60)\\
&= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 && (3.61)\\
&= 0 \checkmark && (3.62)\\
&= \vec{k}\cdot\vec{j} && (3.63)
\end{aligned}$$

Por fim, verificamos os casos do produto interno de um vetor por ele mesmo:

$$\begin{aligned}
\vec{i}\cdot\vec{i} &= 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \checkmark && (3.64)\\
\vec{j}\cdot\vec{j} &= 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 \checkmark && (3.65)\\
\vec{k}\cdot\vec{k} &= 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \checkmark && (3.66)
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Exercícios

E 3.1.1. Sendo $\vec{u} = (2,-1{,}1)$ e $\vec{v} = (1,-3{,}2)$, calcule:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $\vec{v}\cdot\vec{u}$

c) $2\vec{u}\cdot\vec{v}$

d) $\vec{u} \cdot (2\vec{v})$

E 3.1.2. Sendo $\vec{u} = (2, -1, 1)$, calcule:

a) $\vec{u} \cdot \vec{i}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{j}$

c) $2\vec{u} \cdot \vec{k}$

E 3.1.3. Sendo $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -3, 2)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, calcule:

a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} + \vec{v})$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

E 3.1.4. Sendo $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -3, 2)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, calcule:

a) $|\vec{u}|$

b) $|\vec{u} + \vec{v}|$

c) $|\vec{u} \cdot \vec{w}|$

E 3.1.5. Sendo $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -3, 2)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, encontre o vetor $\vec{x}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = -1 \tag{3.67}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 2 \tag{3.68}$$
$$\vec{w} \cdot \vec{x} = -4 \tag{3.69}$$
$$\tag{3.70}$$

E 3.1.6. Sendo $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -3, 2)$, encontre o vetor $\vec{x}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.71}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.72}$$

E 3.1.7. Sendo $\vec{u} = (2, -1,1)$, $\vec{v} = (1, -3,2)$ e $\vec{w} = (-2, -1, -3)$, encontre o vetor $\vec{x}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.73}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.74}$$
$$\vec{w} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.75}$$
$$\tag{3.76}$$

3.2 Ângulo entre dois vetores

O **ângulo formado entre dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, é definido como o menor ângulo determinado entre quaisquer representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

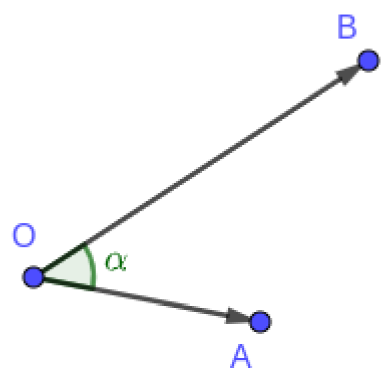


Figura 3.1: Ângulo entre dois vetores.

Proposição 3.2.1. *Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \tag{3.77}$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Demonstração. Tomamos as representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Observamos que $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Então, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\triangle OAB$, obtemos

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \alpha, \tag{3.78}$$

ou, equivalentemente,

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \tag{3.79}$$
$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \tag{3.80}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \tag{3.81}$$
$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \tag{3.82}$$

donde

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha. \tag{3.83}$$

□

Exemplo 3.2.1. Vamos determinar ângulo entre os vetores $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Da Proposição 3.2.1, temos

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|u|\cdot|v|} \tag{3.84}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2}} \tag{3.85}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.86}$$

Portanto, temos $\alpha = \pi/6$.

Observação 3.2.1. O **ângulo** entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

- **agudo** se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$;
- **obtuso** se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.

De fato, de (3.77), temos que o sinal de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ é igual ao sinal de $\cos\alpha$ (o cosseno do ângulo entre os vetores). Também, por definição, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Logo, se $\cos\alpha > 0$, então $0 < \alpha < \pi/2$ (ângulo agudo) e, se $\cos\alpha < 0$, então $\pi/2 < \alpha < \pi$ (ângulo obtuso).

Observação 3.2.2. (Vetores ortogonais) Se $\vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}$, então:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

De fato, seja α o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\alpha = \pi/2$ e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \tag{3.87}$$
$$= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.88}$$
$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 \tag{3.89}$$
$$= 0. \tag{3.90}$$

Reciprocamente, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \tag{3.91}$$
$$= \frac{0}{|\vec{u}||\vec{v}|} \tag{3.92}$$
$$= 0. \tag{3.93}$$

Lembrando que $0 \leq \alpha \leq \pi$, segue que $\alpha = \pi/2$, i.e. $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemplo 3.2.2. Os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$ e $\vec{u} = (0,1,1)$ são ortogonais. De fato, temos

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \tag{3.94}$$
$$= 0. \tag{3.95}$$

3.2.1 Desigualdade triangular

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \tag{3.96}$$

esta é conhecida como a **desigualdade triangular**. Para demonstrá-la, começamos observando que

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \tag{3.97}$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \tag{3.98}$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \tag{3.99}$$

Agora, vamos estimar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Pela Proposição 3.2.1, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \tag{3.100}$$

onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mas, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}||\cos\alpha|. \tag{3.101}$$

Daí, como $|\cos\alpha| \leq 1$, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|, \tag{3.102}$$

a qual é chamada de **desigualdade de Cauchy-Schwarz**[2].

3.2.2 Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Sejam $\vec{u} = (x, -1{,}2)$ e $\vec{v} = (2{,}x, -3)$. Determine x tal que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}. \tag{3.103}$$

Solução. Da definição do produto escalar, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3.104}$$

$$\frac{1}{2} = 2x - x - 6 \tag{3.105}$$

$$x - 6 = \frac{1}{2} \tag{3.106}$$

$$x = \frac{1}{2} + 6 \tag{3.107}$$

$$x = \frac{13}{2}. \tag{3.108}$$

◊

ER 3.2.2. Determine x tal que $\vec{u} = (-1{,}0{,}x)$ seja ortogonal a $\vec{v} = (1{,}2, -1)$.

Solução. Para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ devemos ter

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.109}$$

$$-1 + 0 - x = 0 \tag{3.110}$$

$$x = -1. \tag{3.111}$$

◊

[2] Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857, matemático francês. Fonte: Wikipeida. Hermann Schwarz, 1843-1921, matemático alemão. Fonte: Wikipedia.

Exercícios

E 3.2.1. Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1{,}0{,}1)$ e $\vec{v} = (0{,}0{,}2)$.

E 3.2.2. Seja $\vec{v} = (1{,}2, -1)$. Determine a norma do vetor $\vec{u}$ de mesma direção de $\vec{v}$ e tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

E 3.2.3. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido? Justifique sua resposta.

E 3.2.4. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores tais que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos opostos? Justifique sua resposta.

E 3.2.5. Encontre o vetor x ortogonal a $\vec{u} = (1, -2{,}0)$ e $\vec{v} = (2, -1{,}1)$ tal que $\vec{x} \cdot (0, -1{,}2) = 1$.

3.3 Projeção ortogonal

Sejam dados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. Seja, ainda, P a interseção da reta perpendicular a OB que passa pelo ponto A. Observemos a Figura 3.2. Com isso, definimos a **projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$** por $\overrightarrow{OP}$. Denotamos

$$\overrightarrow{OP} = \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}. \tag{3.112}$$

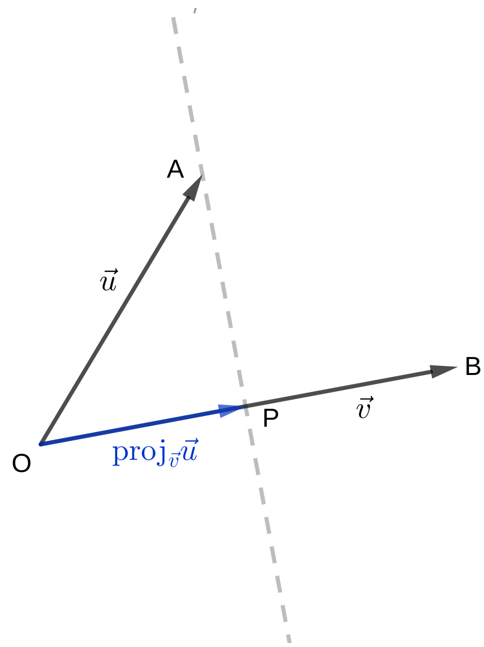


Figura 3.2: Ilustração da definição da projeção ortogonal.

Da definição, temos que[3]

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \beta \cdot \vec{v} \tag{3.113}$$

para algum número real β. Além disso, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \tag{3.114}$$

Portanto

$$\beta\vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \tag{3.115}$$

Tomando o produto escalar com $\vec{v}$ em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\beta\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} + \overrightarrow{AP}\cdot\vec{v} \tag{3.116}$$
$$= \vec{u}\cdot\vec{v}, \tag{3.117}$$

pois $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$. Daí, lembrando que $\vec{v}\cdot\vec{v} = |v|^2$, temos

$$\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{3.118}$$

[3] $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ é um vetor múltiplo por escalar de $\vec{v}$.

e concluímos que

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \tag{3.119}$$

Exemplo 3.3.1. Sejam $\vec{u} = (-1,1,-1)$ e $\vec{v} = (2,1,-2)$. Usando a equação (3.119), obtemos

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(-1,1,-1) \cdot (2,1,-2)}{|(2,1,-2)|^2}(2,1,-2) \tag{3.120}$$

$$= \frac{-2+1+2}{4+1+4}(2,1,-2) \tag{3.121}$$

$$= \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{9}\right). \tag{3.122}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.3.1. Determine x tal que a projeção de $\vec{u} = (1,x,x)$ em $\vec{v} = (1,1,0)$ tenha o dobro da norma de $\vec{v}$.

Solução. De (3.119), a projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$ é

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}, \tag{3.123}$$

$$|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right| |\vec{v}| \tag{3.124}$$

$$|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right| \tag{3.125}$$

$$|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{|1+x|}{|\vec{v}|} \tag{3.126}$$

Queremos que

$$|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = 2|\vec{v}|. \tag{3.127}$$

Segue que

$$\frac{|1+x|}{|\vec{v}|} = 2|\vec{v}| \tag{3.128}$$

$$|1+x| = 2|\vec{v}|^2 \tag{3.129}$$

$$|1+x| = 2 \cdot 2 \tag{3.130}$$

$$1+x = -4 \quad \text{ou} \quad 1+x = 4 \tag{3.131}$$

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = 3. \tag{3.132}$$

◇

ER 3.3.2. Verifique que se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{0}$. Justifique sua resposta.

Solução. Temos que

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \tag{3.133}$$

Tendo em vista que $\vec{u} \perp \vec{v}$, temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} &= 0 \cdot \vec{v} &(3.134)\\ &= \vec{0}. &(3.135) \end{aligned}$$

◇

Exercícios

E 3.3.1. Sejam $\vec{u} = (-1,1,2)$ e $\vec{v} = (1,-2,0)$. Calcule $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.

E 3.3.2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários e seja $\alpha = \pi/6$ o ângulo entre eles. Calcule a norma da projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$.

E 3.3.3. Determine x tal que $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (1/6, -1/3, 1/6)$, sendo $\vec{u} = (x,1,2)$ e $\vec{v} = (1,-2,1)$.

E 3.3.4. Verifique se a $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados. Justifique sua resposta.

E 3.3.5. Determine as coordenadas de todos os vetores $\vec{u}$ tais que $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{v}$, sendo que $\vec{v} = (1,0,0)$.

Capítulo 4

Produto vetorial

De agora em diante, vamos trabalhar com um base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dita com orientação positiva, i.e. os vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ estão dispostos em sentido anti-horário, veja Figura 4.1.

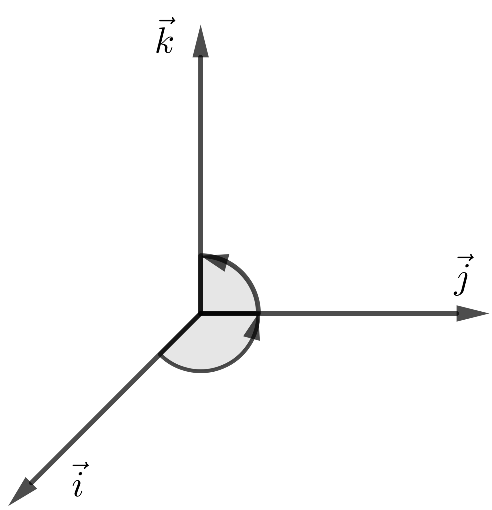


Figura 4.1: Base ortonormal positiva.

4.1 Definição

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos o produto vetorial de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, como o vetor:

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., então
  - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$, onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e
  - $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ formam uma base positiva.

4.1.1 Interpretação geométrica

Sejam dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.i.. Estes vetores determinam um paralelogramo, veja Figura 4.2 (esquerda). Seja, então, h a altura deste paralelogramo tendo $\vec{u}$ como sua base. Logo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento da base com sua altura, neste caso

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha \tag{4.1}$$
$$= |\vec{u} \wedge \vec{v}| \tag{4.2}$$

Ou seja, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tem norma igual à área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Ainda, por definição, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Isto nos dá a direção de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. O sentido é, então, determinado pela definição de que $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva. Veja a Figura 4.2 (direita).

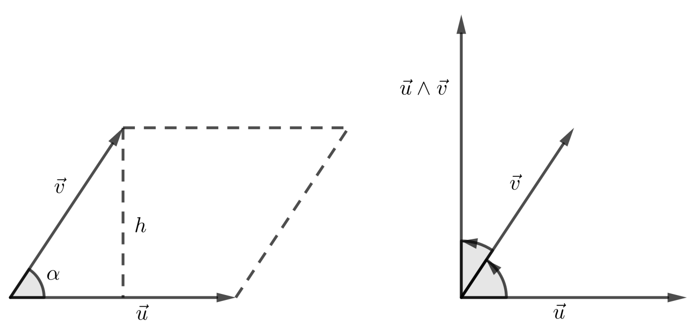


Figura 4.2: Interpretação do produto vetorial.

4.1.2 Produto vetorial via coordenadas

Dados $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ em uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{4.3}$$

Observação 4.1.1. Uma regra mnemônica, é

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Exemplo 4.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2,1)$ e $\vec{v} = (0,2, -1)$, temos

$$\begin{align} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.5} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \tag{4.6} \\ &= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \tag{4.7} \\ &= (0,1,2). \tag{4.8} \end{align}$$

Exercícios resolvidos

ER 4.1.1. Calcule $\vec{x}$ tal que $(0,2, -1) \wedge \vec{x} = (-3, -1, -2)$.

Solução. Denotando $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$, temos

$$\begin{gather} (0,2, -1) \wedge \vec{x} = (-3, -1, -2) \tag{4.9} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (-3, -1, -2) \tag{4.10} \\ (x_2 + 2x_3)\vec{i} - x_1\vec{j} - 2x_1\vec{k} = \tag{4.11} \\ -3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \tag{4.12} \end{gather}$$

Segue que

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -x_1 &= -1 \\ -2x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = 1$, $x_2 = -3 - 2x_3$ e x_3 é arbitrário. Concluímos que $\vec{x} = (1, -3 - 2x_3, x_3)$ com $x_3 \in \mathbb{R}$.

$\Diamond$

ER 4.1.2. Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

Solução. Tomando representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam um paralelogramo $OABC$, onde C é tal que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB}$[1]. Da definição do produto vetorial, temos que

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha, \tag{4.13}$$

o que é igual a área do paralelogramo $OABC$, onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo, a área do paralelogramo é

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |(8,4,0)| \tag{4.15}$$

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = 4\sqrt{5} \tag{4.16}$$

$\Diamond$

Exercícios

E 4.1.1. Sejam $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, -1)$. Calcule:

a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) $\vec{v} \wedge \vec{u}$.

[1] Veja a regra do paralelogramo na Observação 1.2.5.

c) $\vec{v} \wedge (2\vec{u})$.

E 4.1.2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2, -1,0)$. Forneça $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Justifique sua resposta.

E 4.1.3. Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{u}$.

E 4.1.4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $(2\vec{u}) \wedge \vec{v} = (2, -1,0)$. Forneça $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Justifique sua resposta.

E 4.1.5. Calcule $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (2, -2,3) = (11,8,2)$.

E 4.1.6. Seja $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Calcule:

a) $\vec{i} \wedge \vec{j}$

b) $\vec{j} \wedge \vec{k}$

c) $\vec{k} \wedge \vec{i}$

4.2 Propriedades do produto vetorial

Nesta seção, discutiremos sobre algumas propriedades do produto vetorial. Para tanto, sejam dados os vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$ e o número real γ.

Da definição do produto vetorial, temos $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$, logo

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \tag{4.17}$$

e

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0. \tag{4.18}$$

Exemplo 4.2.1. Sejam $\vec{u} = (1, -1,2)$, $\vec{v} = (2, -1, -2)$. Temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \tag{4.19}$$

$$= (4,6,1) \tag{4.20}$$

Segue, que

$$\begin{align}\vec{u}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) &= (1,-1,2)\cdot(4,6,1) \tag{4.21}\\ &= 4-6+2 \tag{4.22}\\ &= 0. \tag{4.23}\end{align}$$

Em relação à multiplicação por escalar, temos

$$\begin{align}\gamma(\vec{u}\wedge\vec{v}) &= (\gamma\vec{u})\wedge\vec{v} \tag{4.24}\\ &= \vec{u}\wedge(\gamma\vec{v}). \tag{4.25}\end{align}$$

De fato,

$$\begin{align}(\gamma\vec{u})\wedge\vec{v} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \gamma u_1 & \gamma u_2 & \gamma u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} \tag{4.26}\\ &= \gamma\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = \gamma(\vec{u}\wedge\vec{v}) \tag{4.27}\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3\end{vmatrix} = \vec{u}\wedge(\gamma\vec{v}) \tag{4.28}\end{align}$$

Exemplo 4.2.2. Sejam $\vec{u}=(1,-1,2)$ e $\vec{v}=(2,-1,-2)$. Temos

$$\begin{align}2(\vec{u}\wedge\vec{v}) &= 2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix} \tag{4.29}\\ &= 2(4,6,1) \tag{4.30}\\ &= (8,12,2) \tag{4.31}\end{align}$$

$$\begin{align}(2\vec{u})\wedge\vec{v} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 4\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix} \tag{4.32}\\ &= (8,12,2) \tag{4.33}\end{align}$$

$$\vec{u} \wedge (2\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \tag{4.34}$$
$$= (8,12,2) \tag{4.35}$$

Também, vale a propriedade distributiva com a operação de soma, i.e.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \tag{4.36}$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) \tag{4.37}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & u_3 + w_3 \end{vmatrix} \tag{4.38}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.39}$$
$$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \tag{4.40}$$

Exemplo 4.2.3. Sejam $\vec{u} = (1, -1{,}2)$, $\vec{v} = (2, -1, -2)$ e $\vec{w} = (0, -1, -1)$. Temos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) \tag{4.41}$$
$$= \vec{u} \wedge [(2, -1, -2) + (0, -1, -1)] = (1, -1{,}2) \wedge (2, -2, -3) \tag{4.42}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \tag{4.43}$$
$$= (7,7,0) \tag{4.44}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) \tag{4.45}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \tag{4.46}$$
$$= (4,6,1) + (3,1,-1) \tag{4.47}$$
$$= (7,7,0) \tag{4.48}$$

Observamos que o produto vetorial não é comutativo, entretanto

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{4.49}$$

De fato, temos

$$\begin{align}
&\vec{u} \wedge \vec{v} \tag{4.50}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.51}\\
&= -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \tag{4.52}\\
&= -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{4.53}
\end{align}$$

Exemplo 4.2.4. Sejam $\vec{u} = (1, -1,2)$ e $\vec{v} = (2, -1, -2)$. Temos

$$\begin{align}
&\vec{u} \wedge \vec{v} \tag{4.54}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \tag{4.55}\\
&= (4,6,1) \tag{4.56}
\end{align}$$

$$\begin{align}
&\vec{v} \wedge \vec{u} \tag{4.57}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \tag{4.58}\\
&= (-4, -6, -1) \tag{4.59}
\end{align}$$

Também, o produto vetorial não é associativo sendo $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, em geral, é diferente de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Com efeito, temos

$$\begin{align}
(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} &= \vec{0}, \tag{4.60}\\
\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) &= \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \tag{4.61}
\end{align}$$

Por outro lado, suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. e seja π um plano determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a π. Como $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e a $\vec{w}$, temos que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ também pertence a π. Logo, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ são l.d. e existem α e β tais que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}. \tag{4.62}$$

Vamos determinar α e β. Para tanto, consideremos uma base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j} \in \pi$. Nesta base, temos

$$\vec{u} = (u_1,0,0) \tag{4.63}$$
$$\vec{v} = (v_1,v_2,0) \tag{4.64}$$
$$\vec{w} = (w_1,w_2,w_3). \tag{4.65}$$

Também, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.66}$$
$$= (0,0,u_1v_2) \tag{4.67}$$

e

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & u_1v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.68}$$
$$= (-u_1v_2w_2,u_1v_2w_1,0). \tag{4.69}$$

Daí, temos

$$\underbrace{(-u_1v_2w_2,u_1v_2w_1,0)}_{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}} = \underbrace{\alpha(u_1,0,0) + \beta(v_1,v_2,0)}_{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}}, \tag{4.70}$$

donde

$$\alpha u_1 + \beta v_1 = -u_1v_2w_2, \tag{4.71}$$
$$\beta v_2 = u_1w_1v_2. \tag{4.72}$$

Resolvendo para α e β, obtemos

$$\alpha = -v_1w_1 - v_2w_2 = -\vec{v} \cdot \vec{w} \tag{4.73}$$
$$\beta = \vec{u}\vec{w}. \tag{4.74}$$

Portanto, temos

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}. \tag{4.75}$$

Usando as identidades acima, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} && (4.76) \\ &= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} && (4.77) \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} && (4.78) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \tag{4.79}$$

Exercícios resolvidos

ER 4.2.1. Sejam $\vec{u} = (-3, -2, -1)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ e $\vec{w} = (-1,0,1)$. Calcule

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}. \tag{4.80}$$

Solução. Seguindo a identidade (4.76), segue

$$\begin{aligned} &(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} && (4.81) \\ &= -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} && (4.82) \\ &= -(0 + 0 + 2)\vec{u} + (3 + 0 - 1)\vec{v} && (4.83) \\ &= -2(-3, -2, -1) + 2(0,1,2) && (4.84) \\ &= (6,4,2) + (0,2,4) && (4.85) \\ &= (6,6,6) && (4.86) \end{aligned}$$

◊

ER 4.2.2. Sejam $\vec{u} = (2,x,1)$, $\vec{v} = (-2,3,1)$ e $\vec{w} = (-3, -1,1)$. Calcule x tal que

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{w}) = -16. \tag{4.87}$$

Solução. Por cálculo direto, temos

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{w}) = -16 \tag{4.88}$$

$$\vec{v}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & x & 1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix} = -16 \tag{4.89}$$

$$(-2,3,1)\cdot(x+1,-5,3x-2) = -16 \tag{4.90}$$

$$x - 19 = -16 \tag{4.91}$$

$$x = 3. \tag{4.92}$$

◊

Exercícios

E 4.2.1. Sejam $\vec{u} = (2,-3,1)$ e $\vec{v} = (3,-2,1)$. Calcule $\vec{u}\dot{(}\vec{v}\wedge\vec{u})$. Se $\vec{w}$ é um vetor qualquer, forneça o valor de $\vec{u}\dot{(}\vec{w}\wedge\vec{u})$. Justifique sua resposta.

E 4.2.2. Sabendo que $\vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,1)$, calcule $\vec{u}\wedge(2\vec{v})$.

E 4.2.3. Sabendo que $\vec{u}\wedge\vec{v} = (1,1,1)$ e $\vec{u}\wedge\vec{w} = (-1,-1,-1)$, calcule $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$.

E 4.2.4. Sendo $\vec{a} = (3,-1,2)$, $\vec{b} = (2,-1,-1)$, calcule $(\vec{a}\cdot\vec{k})(\vec{i}\wedge\vec{b})$.

E 4.2.5. Calcule $\vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$, sendo $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,-1,1)$ e $\vec{w} = (1,0,-1)$.

Capítulo 5

Produto misto

Ao longo deste capítulo, assumiremos trabalhar com uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5.1 Definição

O **produto misto** de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nesta ordem, é definido por

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}. \tag{5.1}$$

Em coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &:= \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} && (5.2)\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{w} && (5.3)\\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} \right. && (5.4)\\
&+ \left. \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1,w_2,w_3) && (5.5)\\
&= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 && (5.6)\\
&= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && (5.7)\\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} && (5.8)
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (1,0,2)$ e $\vec{w} = (1,-1,1)$, temos

$$
\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} && (5.9)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. && (5.10)
\end{aligned}
$$

5.1.1 Propriedades

Valem as seguintes propriedades:

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$

c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

d) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$

e) $[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

f) $[\vec{u} + \vec{u}',\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.4. Falsa.

E 1.1.5. Dica: $ABCD$ determina um paralelogramo.

E 1.2.1. $\vec{w}, \vec{c}$

E 1.2.2. a), c), e)

E 1.2.3. $\vec{d} \parallel \vec{e}$; $\vec{c} \parallel \vec{v} \parallel \vec{w}$

E 1.2.4. $\vec{e} \perp \vec{n}$; $\vec{d} \perp \vec{n}$; $\vec{a} \perp \vec{m}$

E 1.2.5. a), b)

E 1.2.6. b), d)

E 1.2.7. a) $\frac{1}{2}\vec{v}$; b) $-\frac{2}{3}\vec{u}$; c) $\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$; d) $\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$; e) $-\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$

E 1.2.8. $|\vec{v}| = 1$.

E 1.2.9. a) verdadeira; b) verdadeira.

E 2.1.1. $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

E 2.1.2. $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$

E 2.1.3. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$

E 2.1.4. $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$

E 2.1.5. Não.

E 2.1.6. Sim.

E 2.1.7. Não.

E 2.1.8. Sim.

E 2.2.1. Dica: os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são l.d..

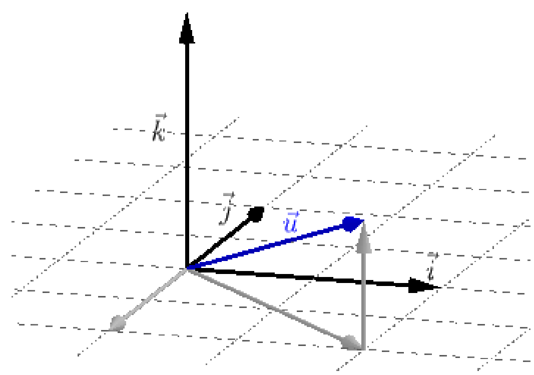
E 2.2.2. Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

E 2.2.3. Três vetores são l.d. se, e somente se, eles são coplanares.

E 2.2.4. Não.

E 2.2.5. a) falsa; b) verdadeira; c) falsa; d) verdadeira.

E 2.3.1.



E 2.3.2. $\vec{v} = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$

E 2.3.3. a) $6\vec{c} = (3, -2,6)_B$; b) $-\vec{b} = (-2,0,1)_B$; c) $\vec{c} - \vec{b} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3},2)_B$; d) $2\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b}) = (3,\frac{1}{3},0)_B$

E 2.3.4. a) l.i.; b) l.i.; c) l.d.; d) l.i.; e) l.i.; f) l.d.

E 2.3.5. a) l.i.; b) l.i.; c) l.d.

E 2.3.6. Segue imediatamente do fato de que $|\vec{u}/|u|| = 1$ para qualquer vetor $\vec{u} \neq 0$.

E 2.4.1. $\vec{v} = (-3, -1{,}2)_B$

E 2.4.2. $\vec{v} = (0{,}1{,}2)_A$

E 2.4.3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

E 2.4.4. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

E 2.4.5. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

E 2.4.6. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

E 2.4.7. $M_{AC} = M_{CB}^{-1} M_{AB}$

E 3.1.1. a) 7; b) 7; c) 14; d) 14

E 3.1.2. a) 2; b) −1; c) 2

E 3.1.3. a) 1; b) 0;

E 3.1.4. a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{34}$; c) 6;

E 3.1.5. $x = (-23/16, 5/16, 35/16)$

E 3.1.6. $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right), x_3 \in \mathbb{R}$

E 3.1.7. $x = \vec{0}$

E 3.2.1. $\pi/4$

E 3.2.2. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E 3.2.3. Sim.

E 3.2.4. Não necessariamente.

E 3.2.5. $\vec{x} = (-2/7, -1/7, 3/7)$

E 3.3.1. $(-3/5, 6/5, 0)$

E 3.3.2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E 3.3.3. 1

E 3.3.4. Falso

E 3.3.5. $(1, u_2, u_3)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

E 4.1.1. a) $(5,3,-1)$; b) $(-5,-3,1)$; c) $(-10,-6,2)$

E 4.1.2. $(-2,1,0)$

E 4.1.3. 0

E 4.1.4. $(-4,2,0)$

E 4.1.5. $\left(-\frac{2}{3}x_3 + \frac{8}{3}, \frac{2}{3}x_3 - \frac{11}{3}, x_3\right), x_3 \in \mathbb{R}$

E 4.1.6. a) $\vec{k}$; b) $\vec{i}$; c) $\vec{j}$

E 4.2.1. $\vec{u}\dot{}(\vec{v} \wedge \vec{u}) = 0$; $\vec{u}\dot{}(\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0$

E 4.2.2. $(2,2,2)$

E 4.2.3. $(0,0,0)$

E 4.2.4. $(0,2,-2)$

E 4.2.5. $(-1,0,-1)$

Referências Bibliográficas

[1] I. Camargo and P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial.* Pearson, 3. edition, 2005.

[2] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica.* Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo