Notas de Teste

Pedro H A Konzen

14 de março de 2023

Licença

Prefácio

Prefácio de teste!

Sumário

Capítulo 1

Limites

1.1 Noção de limites

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto x_0, exceto talvez em x_0. Quando o valor de $f(x)$ é **arbitrariamente próximo** de um número L para x **suficientemente próximo** de x_0, escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{1.1}$$

e dizemos que o **limite da função f é L quando x tende a x_0**. Veja a Figura 1.1.

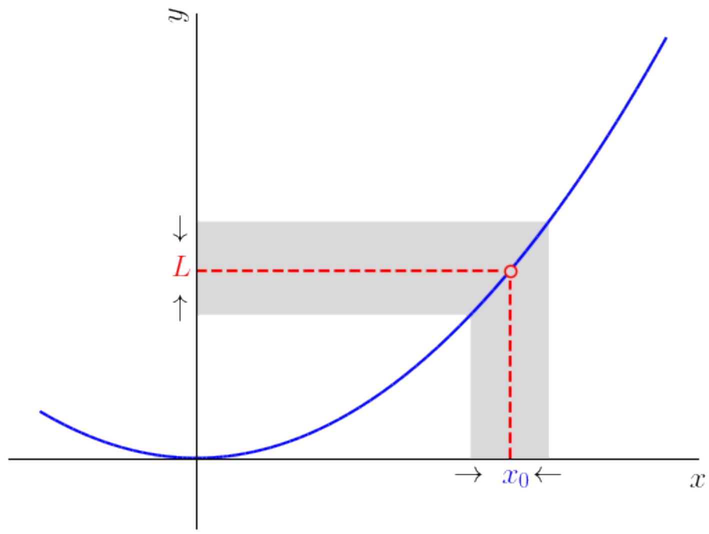


Figura 1.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

Exemplo 1.1.1. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}. \tag{1.2}$$

Na Figura 1.2, temos um esboço do gráfico desta função.

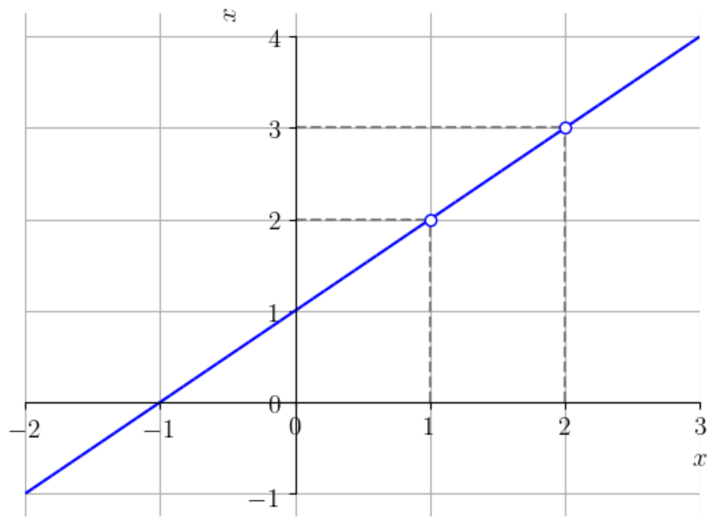


Figura 1.2: Esboço do gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 1.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$\to 0 \leftarrow$	$0{,}0001$	$0{,}001$	$0{,}01$
$f(x)$	$0{,}99$	$0{,}999$	$0{,}9999$	$\to 1 \leftarrow$	$1{,}0001$	$1{,}001$	$1{,}01$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol('x')
...: f = Lambda(x, (x**2-1)*(x-2)/ \
...:              ((x-1)*(x-2)))
...: limit(f(x), x, 0)
Out: 1
```

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

x	$0{,}9$	$0{,}99$	$0{,}999$	$\to 1 \leftarrow$	$1{,}0001$	$1{,}001$	$1{,}01$
$f(x)$	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$\to 2 \leftarrow$	$2{,}0001$	$2{,}001$	$2{,}01$

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

1.1.1 Limites da função constante e da função identidade

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \to x_0} k = k, \tag{1.3}$$

seja qual for a constante k. Veja a Figura 1.3.

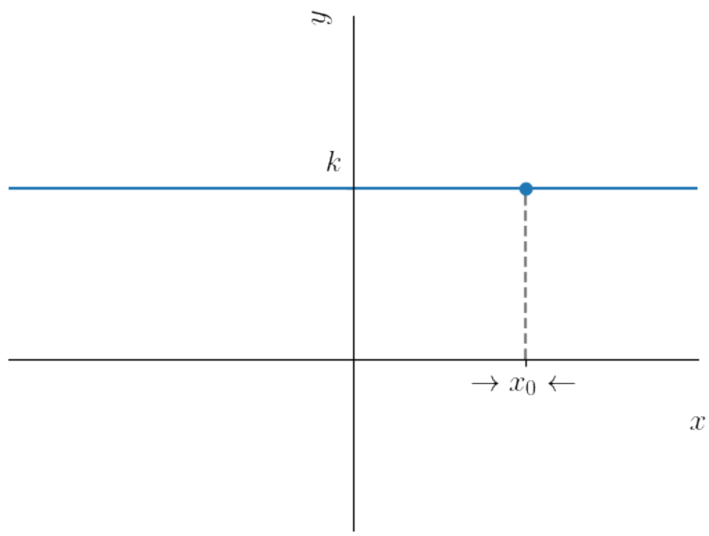


Figura 1.3: Esboço do gráfico de uma função constante $f(x) = k$.

Exemplo 1.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \to -1} 1 = 1$ No Python, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol("x")
...: limit(1, x, -1)
...:
Out: 1
```

b) $\lim_{x \to 2} -3 = -3$

c) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sqrt{2}-e\right)=\sqrt{2}-e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0, \tag{1.4}$$

seja qual for o ponto x_0. Vejamos a Figura 1.4.

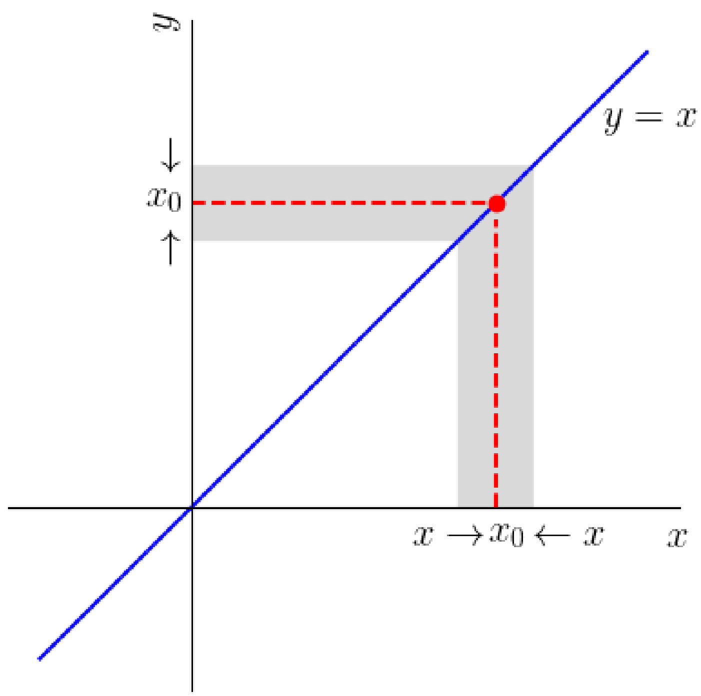


Figura 1.4: Noção de limite para a função identidade $f(x) = x$.

Exemplo 1.1.3. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to -1} x = -1$ Com o Python, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol("x")
...: limit(x, x, -1)
...:
Out: -1
```

b) $\lim_{x\to 2} x = 2$

c) $\lim_{x\to \pi} x = \pi$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.1.1. Estime o valor do limite

$$\lim_{x\to 1} e^x. \tag{1.5}$$

Solução. Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto x_0, computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

x	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,460	2,691	2,716	$\to 2{,}72 \leftarrow$	2,719	2,721	2,746

Com isso, inferimos que

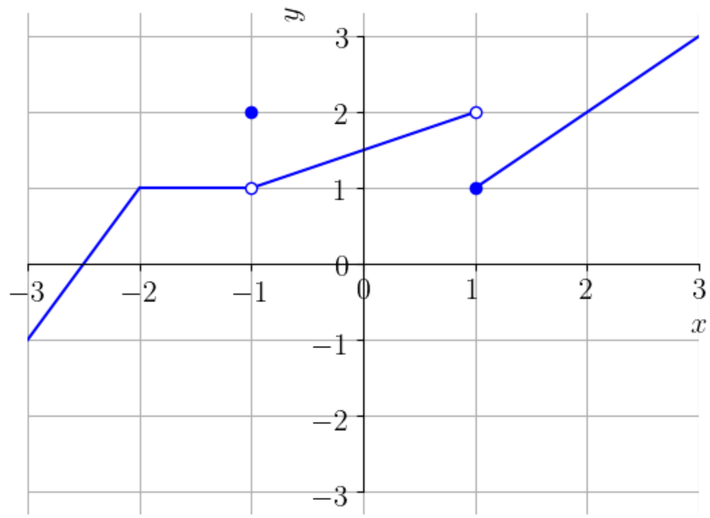
$$\lim_{x\to 1} e^x \approx 2{,}72. \tag{1.6}$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x\to 1} e^x = e \approx 2{,}718281828459045\ldots$.

Verifique usando Python+SymPy!

◊

ER 1.1.2. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de -2 e a direita de -2 (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de x a esquerda de -2 (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos x suficientemente próximo de -2. Concluímos que

$$\lim_{x\to -2} = 1. \tag{1.7}$$

b) $\lim_{x\to -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de x suficientemente próximos de -1. Logo,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1. \tag{1.8}$$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Aqui, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda $(x < 1)$, vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita $(x > 1)$, temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos x suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois L dependerá de x estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluímos que este limite não existe, e escrevemos

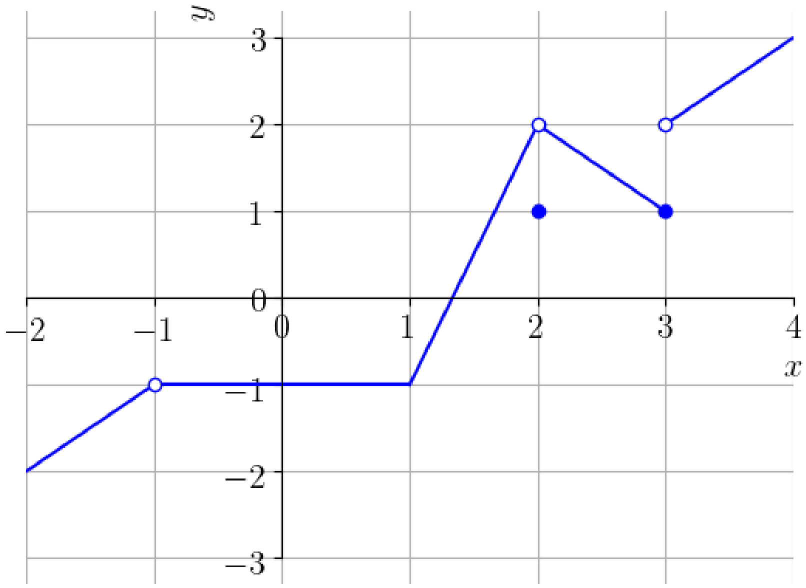
$$\nexists \lim_{x\to 1} f(x). \tag{1.9}$$

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.1.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço



de gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3} f(x)$

Exercício 1.1.2. Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício 1.1.1), forneça

1. $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} f(x)$

2. $\lim_{x \to 0} f(x)$

3. $\lim_{x \to \frac{3}{4}} f(x)$

Exercício 1.1.3. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2} 2$

b) $\lim_{x\to -2} 2$

c) $\lim_{x\to 2} -3$

d) $\lim_{x\to e} \pi$

Exercício 1.1.4. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} x$

b) $\lim_{x\to -2} x$

c) $\lim_{x\to -3} x$

d) $\lim_{x\to e} x$

Exercício 1.1.5. Com base na noção de limites, calcule:

a) $\lim_{x\to 1} |x|$

b) $\lim_{x\to -1} |x|$

c) $\lim_{x\to 10^{-10}} |x|$

1.2 Regras para o cálculo de limites

1.2.1 Regras de cálculo

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \tag{1.10}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \tag{1.11}$$

com x_0, L_1, L_2 números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1.12}$$

$$= k \cdot L_1, \tag{1.13}$$

para qualquer número real k.

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{1.14}$$
$$= L_1 \pm L_2 \tag{1.15}$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{1.16}$$
$$= L_1 \cdot L_2 \tag{1.17}$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \tag{1.18}$$
$$= \frac{L_1}{L_2}, \qquad L_2 \neq 0 \tag{1.19}$$

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^s = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^s \tag{1.20}$$
$$= L_1^s, \qquad L_1^s \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

Exemplo 1.2.1. Consideremos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to -1} 2x$

$$\lim_{x\to -1} 2x = 2 \lim_{x\to -1} x \tag{1.22}$$
$$= 2 \cdot (-1) = -2 \tag{1.23}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(2*x,x,-1)
```

b) $\lim_{x\to 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 1 = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1 \tag{1.24}$$

$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 1 \tag{1.25}$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \tag{1.26}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(x**2-1,x,2)
```

c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1 - x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - x^2} \tag{1.27}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - \left(\lim_{x\to 0} x\right)^2} \tag{1.28}$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \tag{1.29}$$

$$= 1. \tag{1.30}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(sqrt(1-x**2),x,0)
```

d) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x\to 0} \left[(x^2-1)\cdot(x-2)\right]}{\lim_{x\to 0} \left[(x-1)\cdot(x-2)\right]} \tag{1.31}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(x^2-1)\cdot\lim_{x\to 0}(x-2)}{\lim_{x\to 0}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0}(x-2)} \tag{1.32}$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \tag{1.33}$$

Proposição 1.2.1. (Limites de polinômios) Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1.34}$$

então

$$\lim_{x\to b} p(x) = p(b) \tag{1.35}$$

$$= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1.36}$$

para qualquer dado número real b.

Demonstração. Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação.

$$\lim_{x\to b} p(x) = \lim_{x\to b} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1.37}$$

$$= \lim_{x\to b} a_n x^n + \lim_{x\to b} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to b} a_0 \tag{1.38}$$

$$= a_n \left(\lim_{x\to b} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to b} x\right)^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1.39}$$

$$= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \tag{1.40}$$

□

Exemplo 1.2.2.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \tag{1.41}$$

$$= 4 + \sqrt{2}. \tag{1.42}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

Proposição 1.2.2. (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ uma função racional e b um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{1.43}$$

Demonstração. Segue da regra do **limite do quociente** e da Proposição 1.2.1.

$$\lim_{x \to b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to b} p(x)}{\lim_{x \to b} q(x)} \tag{1.44}$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{1.45}$$

□

Exemplo 1.2.3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(0^2-1)(0-2)}{(0-1)(0-2)} \tag{1.46}$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \tag{1.47}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

1.2.2 Indeterminação $0/0$

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Quando $\lim_{x \to a} f(a) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(a) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.48}$$

é uma **indeterminação do tipo** $0/0$. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x - a)$.

Exemplo 1.2.4.

$$\begin{align}
\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1} \tag{1.49}\\
&= \frac{2^2-1}{2-1} = 3. \tag{1.50}
\end{align}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar o limite acima com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

Exemplo 1.2.5. No caso do limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x-2} \tag{1.51}$$

temos que o denominador $p(x) = x^3-3x^2-x+3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2+x-2$. Assim sendo, $(x-1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo, calculamos

$$\begin{align}
\frac{p(x)}{x-1} &= \frac{x^3-3x^2-x+3}{x-1} \tag{1.52}\\
&= x^2-2x-3 \tag{1.53}
\end{align}$$

e

$$\begin{align}
\frac{q(x)}{x-1} &= \frac{x^2+x-2}{x-1} \tag{1.54}\\
&= x+2. \tag{1.55}
\end{align}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar estas divisões com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x-1)(x^2-2x-3) \tag{1.56}$$

e

$$q(x) = (x-1)(x+2). \tag{1.57}$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x+2)} && (1.58)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x-3}{x+2} = -\frac{4}{3}. && (1.59)
\end{aligned}$$

Use Python+SymPy para computar este limite!

Exemplo 1.2.6. No caso de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \tag{1.60}$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$ envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} && (1.61)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} && (1.62)\\
&- \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)} && (1.63)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}. && (1.64)
\end{aligned}$$

Verifique computando com o Python+SymPy.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.2.1. Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-x^2}{\sqrt{x^2+3}}. \tag{1.65}$$

Solução. Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x\to-1} \frac{x-x^2}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\lim\limits_{x\to-1} x-x^2}{\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{x^2+3}} \tag{1.66}$$

$$= \frac{-1-(-1)^2}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-1} x^2+3}} \tag{1.67}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \tag{1.68}$$

$$= -1. \tag{1.69}$$

◊

ER 1.2.2. Assumindo que o $\lim_{x\to2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1, \tag{1.70}$$

forneça o valor de L.

Solução. Das propriedades de limites, temos

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1 \tag{1.71}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to2} f(x)-2}{\lim\limits_{x\to2} x+2} = 1 \tag{1.72}$$

$$\frac{\lim_{x\to2} f(x) - \lim_{x\to2} 2}{2+2} = 1 \tag{1.73}$$

$$\frac{L-2}{4} = 1 \tag{1.74}$$

$$L-2 = 4 \tag{1.75}$$

$$L = 6. \tag{1.76}$$

◊

ER 1.2.3. Calcule

$$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}}. \tag{1.77}$$

Solução. Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x\to -1} 2 - \sqrt{x^2+3} = 0. \tag{1.78}$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x\to -1} x + 1 = 0, \tag{1.79}$$

concluímos se tratar de uma indeterminação 0/0. Por racionalização, obtemos

$$\begin{align}
\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}} \tag{1.80}\\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \tag{1.81}\\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \tag{1.82}\\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \tag{1.83}\\
&= \lim_{x\to -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \tag{1.84}\\
&= \frac{4}{2} = 2. \tag{1.85}
\end{align}$$

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.2.1. Sabendo que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2, \tag{1.86}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to -2} 2 \cdot f(x)$.

b) $\lim_{x\to -2} \pi \cdot f(x)$.

c) $\lim_{x\to -2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x)$.

Exercício 1.2.2. Considerando que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = -2 \tag{1.87}$$

e

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \frac{1}{2}, \tag{1.88}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x\to 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x\to 3} f(x) - 2g(x)$

Exercício 1.2.3. Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \tag{1.89}$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -2, \tag{1.90}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x) \cdot (\frac{1}{2} \cdot f(x))$

Exercício 1.2.4. Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2 \tag{1.91}$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -3, \tag{1.92}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

Exercício 1.2.5. Considerando que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 \tag{1.93}$$

e

$$\lim_{x\to -1} g(x) = 4, \tag{1.94}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim_{x\to -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

Exercício 1.2.6. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -2} -3x$

b) $\lim_{x\to -2} x^2 - 3x$

c) $\lim_{x\to -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

Exercício 1.2.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

Exercício 1.2.8. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{2x+2}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

Exercício 1.2.9. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x-6}. \tag{1.95}$$

Exercício 1.2.10. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x\to 1} f(x) = L \tag{1.96}$$

$$\lim_{x\to -1} g(x) = M \tag{1.97}$$

então

$$\lim_{x\to 1} f(x) + g(x) = L + M. \tag{1.98}$$

Justifique sua resposta.

1.3 Limites laterais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja dada uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (a, x_0). O **limite lateral à esquerda** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{1.99}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \tag{1.100}$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L, para todo $x < x_0$ suficientemente próximo de x_0. Veja a Figura 1.5.

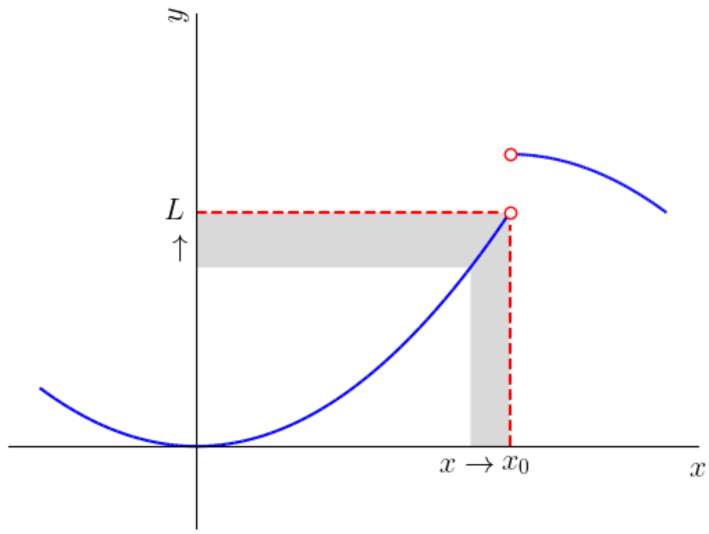


Figura 1.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (x_0, b), o **limite lateral à direita** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \tag{1.101}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, \tag{1.102}$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de L, para todo $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0. Veja a Figura 1.6.

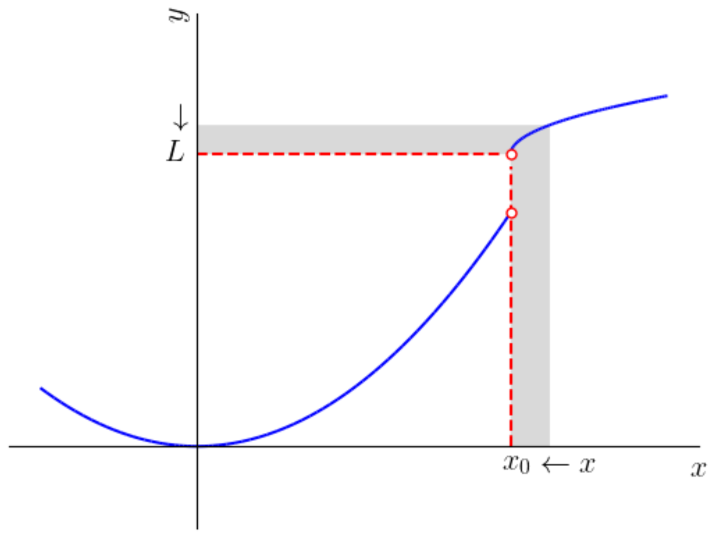


Figura 1.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

Observação 1.3.1. Por inferência direta, temos

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} k = k \tag{1.103}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} x = x_0, \tag{1.104}$$

onde x_0 e k são quaisquer dados números reais.

Exercício 1.3.1. Vamos calcular

$$\lim_{x\to 0^-} |x|. \tag{1.105}$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \tag{1.106}$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x \tag{1.107}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} x = 0. \tag{1.108}$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0. \tag{1.109}$$

Verifique!

Com o Python+SymPy, podemos computar os limites acima com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

Teorema 1.3.1. *Existe o limite de uma dada função f no ponto $x = x_0$ e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \tag{1.110}$$

se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto $x = x_0$.

Exercício 1.3.2. No exemplo anterior (Exemplo 1.3.1), vimos que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^+} |x| = 0. \tag{1.111}$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 1.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0. \tag{1.112}$$

Exercício 1.3.3. Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}. \tag{1.113}$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} \tag{1.114}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -1 = -1. \tag{1.115}$$

Agora, calculando o limite lateral à direta, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \tag{1.116}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1. \tag{1.117}$$

Como os **limites laterais** à esquerda e à direita **são diferentes**, concluímos que **não existe o limite** de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.

Com o Python+SymPy, por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(abs(x)/x,x,0)
```

fornece o valor 1 como saída.

Observação 1.3.2. As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = L_1 \tag{1.118}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^\pm} g(x) = L_2, \tag{1.119}$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = kL_1, \tag{1.120}$$

  para qualquer número real k.

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) \tag{1.121}$$

$$= L_1 + L_2 \tag{1.122}$$

- regra do produto:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) \tag{1.123}$$

$$= L_1\cdot L_2 \tag{1.124}$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x\to x_0^\pm} g(x)} \tag{1.125}$$

$$= \frac{L_1}{L_2}, \tag{1.126}$$

  desde que $L_2 \neq 0$.

- regra da potenciação:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\right)^s \tag{1.127}$$

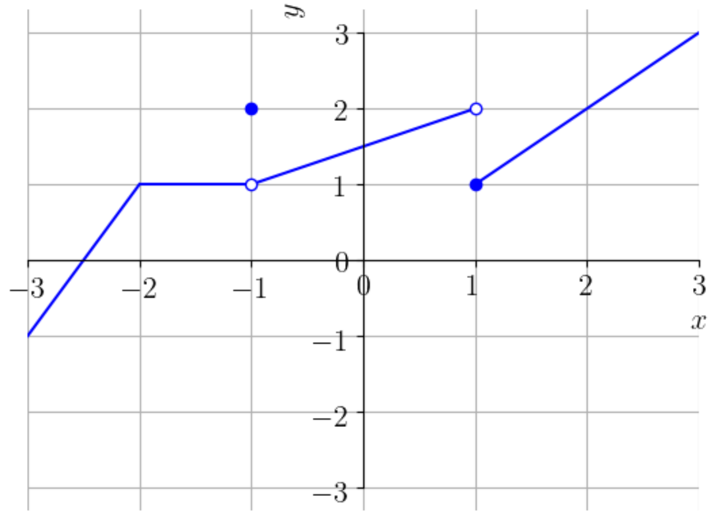
$$= L_1^s, \tag{1.128}$$

  se, adicionalmente, L_1^s é um número real.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.3.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to1^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to1^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de -2, podemos observar que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1. Concluímos que

$$\lim_{x\to-2^-} = 1. \tag{1.129}$$

b) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$

e suficientemente próximos de -1. Logo,

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 1. \tag{1.130}$$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2. \tag{1.131}$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando x tende a 1 pela esquerda.

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1. \tag{1.132}$$

Aqui, $f(x) \to f(1) = 1$ quando $x \to 1^+$.

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1. \tag{1.133}$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x\to 1} f(x). \tag{1.134}$$

◊

ER 1.3.2. Calcule $\lim_{x\to -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \tag{1.135}$$

Solução. A função f tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x\to -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1)^2 - 1 \tag{1.136}$$
$$= (-1+1)^2 - 1 = -1, \tag{1.137}$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x \tag{1.138}$$
$$= -1. \tag{1.139}$$

Como ambos os limites laterais são iguais a -1, concluímos que

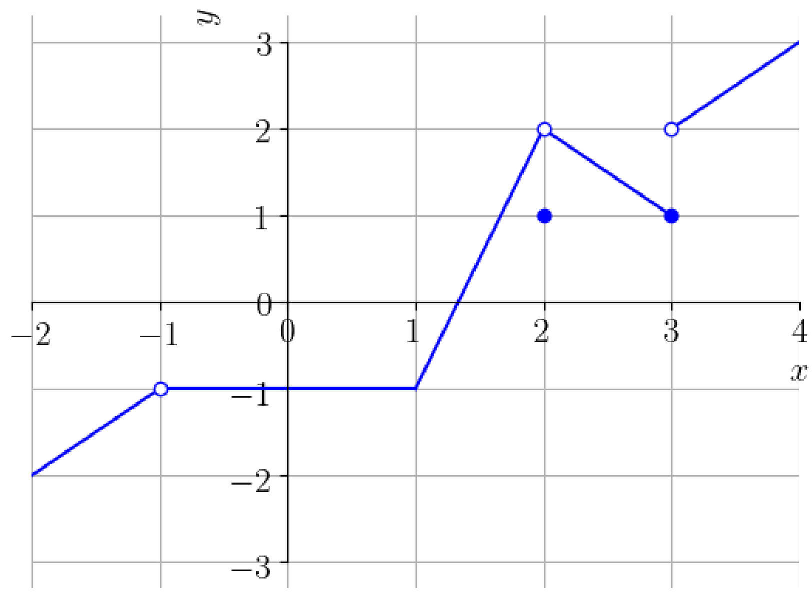
$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1. \tag{1.140}$$

$\lozenge$

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.3.4. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Exercício 1.3.5. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \tag{1.141}$$

calcule

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 1.3.6. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x \leq 1, \\ 2x+1 & , x > 1, \end{cases} \tag{1.142}$$

calcule

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 1.3.7. Calcule

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2|x|}. \tag{1.143}$$

Exercício 1.3.8. Calcule

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2}. \tag{1.144}$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

Exercício 1.3.9. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Se existem

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = L \tag{1.145}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = M \tag{1.146}$$

então

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) + g(x) = L + M. \tag{1.147}$$

Justifique sua resposta.

1.4 Limites no infinito

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$. Dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente pequenos**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L. \tag{1.148}$$

Veja a Figura 1.7.

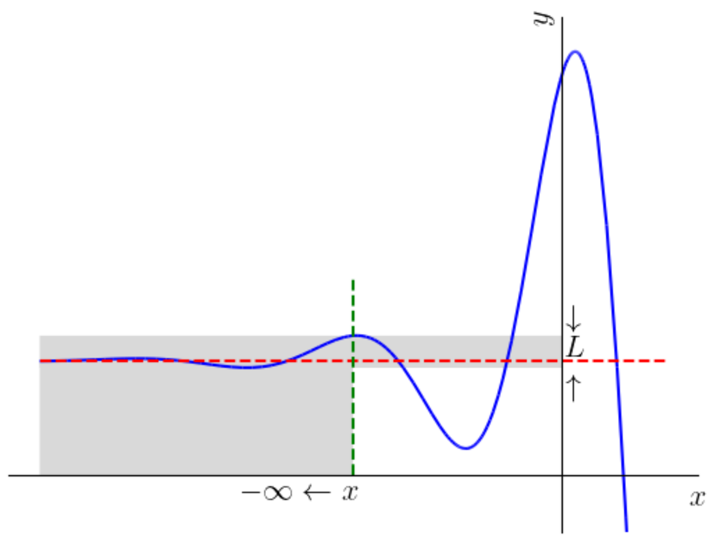


Figura 1.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende ∞, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de L para todos os valores de x **suficientemente grandes**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L. \tag{1.149}$$

Veja a Figura 1.8.

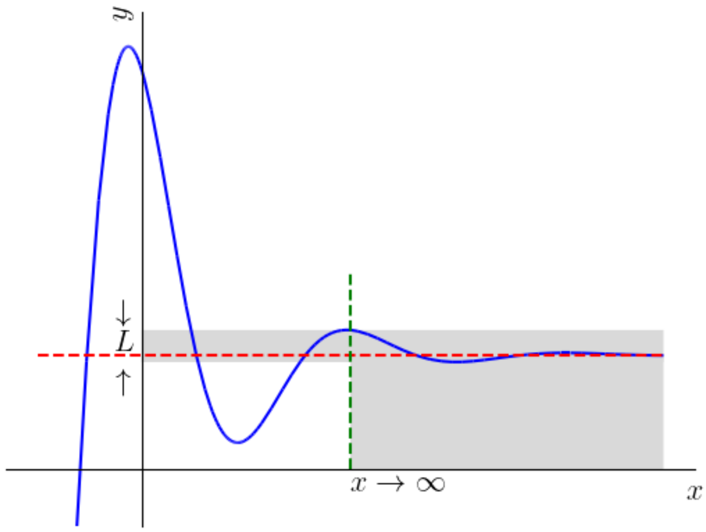


Figura 1.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to \infty$.

Exemplo 1.4.1. Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \to -\infty$ e $x \to \infty$. A Figura 1.9 é um esboço do gráfico desta função.

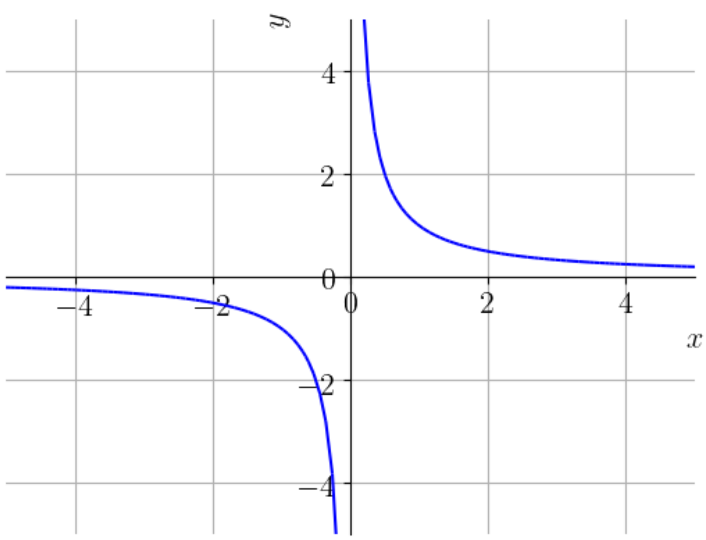


Figura 1.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de x, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1.150}$$

Também, quanto maiores os valores de x, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1.151}$$

Podemos computar estes limites com o Python+SymPy, usando os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/x,x,-oo)
limit(1/x,x,oo)
```

Observação 1.4.1. (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que L, M e k são números reais e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \tag{1.152}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M. \tag{1.153}$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x\to\pm\infty} kf(x) = kL \tag{1.154}$$

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \tag{1.155}$$

- Regra do produto

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = LM \tag{1.156}$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{1.157}$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \tag{1.158}$$

Exemplo 1.4.2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1 \tag{1.159}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1 \tag{1.160}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \tag{1.161}$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \tag{1.162}$$

Exemplo 1.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \tag{1.163}$$

Observamos que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. A alternativa é multiplicar e dividir por $1/x^3$ (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \tag{1.164}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \tag{1.165}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3}} \tag{1.166}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} \tag{1.167}$$

Então, aplicando as regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\begin{align}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} \tag{1.168}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-3} \tag{1.169}\\
&= -\frac{1}{3}. \tag{1.170}
\end{align}$$

Proposição 1.4.1. *Dados dois polinômios*

$$\begin{align}
p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1.171}\\
q(x) &= b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \tag{1.172}
\end{align}$$

temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}. \tag{1.173}$$

Demonstração. Consulte o Exercício 1.4.8. □

Exemplo 1.4.4. Retornando ao Exemplo 1.4.3, temos

$$\begin{align}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} \tag{1.174}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-3x^3} \tag{1.175}\\
&= -\frac{1}{3}. \tag{1.176}
\end{align}$$

A ideia utilizada no Exemplo 1.4.3, também pode ser útil em limites no infinito envolvendo funções raiz.

Exemplo 1.4.5. Vamos calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}. \tag{1.177}$$

A ideia é multiplicar em cima e em baixo por $1/\sqrt{x^2}$. Seguimos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \tag{1.178}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2}}} \tag{1.179}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{|x|}} \tag{1.180}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{x}} \tag{1.181}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}} \tag{1.182}$$

$$= \frac{1}{1} = 1 \tag{1.183}$$

1.4.1 Assíntotas horizontais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A reta $y = L$ é dita assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \tag{1.184}$$

ou

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L. \tag{1.185}$$

Exemplo 1.4.6. No Exemplo 1.4.3, vimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} = -\frac{1}{3}. \tag{1.186}$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2-3x^3}. \tag{1.187}$$

Consulte a Figura 1.10.

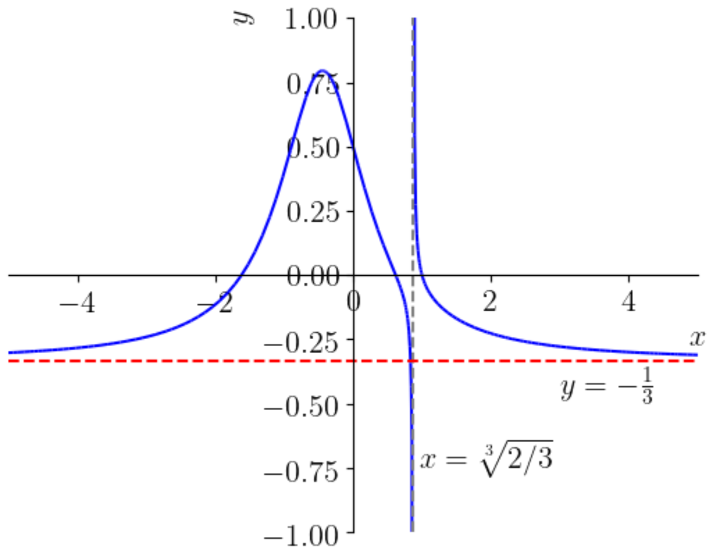


Figura 1.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-3x^3} \tag{1.188}$$

$$= -\frac{1}{3}. \tag{1.189}$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

Exemplo 1.4.7. (Função exponencial natural)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{1.190}$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 1.11.

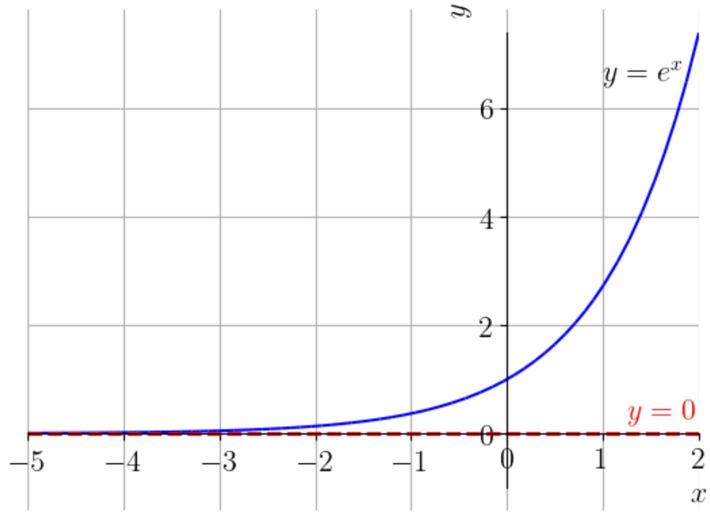


Figura 1.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

Exemplo 1.4.8. (Função logística) Na ecologia, a função logística [1]

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}e^{-rt}\right)} \tag{1.191}$$

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo $P(t)$ o número de indivíduos da população no tempo t. O parâmetro P_0 é o número de indívíduos na população no tempo inicial $t = 0$, $r > 0$ é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e K é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\cancelto{0}{e^{-rt}}\right)} = K \tag{1.192}$$

Ou seja, $P(t) = K$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $P = P(t)$ e é o limite de saturação do crecimento populacional. Na Figura 1.12, temos o esboço do gráfico da função logística para $t \geq 0$.

[1] Consulte mais em Wikipédia.

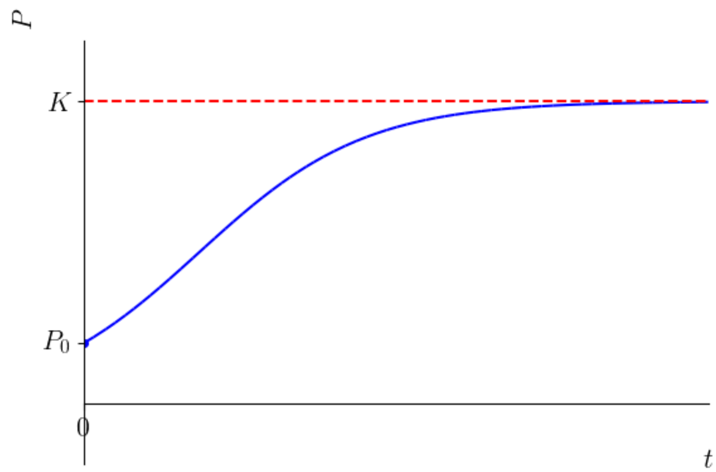


Figura 1.12: Esboço do gráfico da função logistica.

1.4.2 Limite no infinito de função periódica

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função f é periódica quando existe um número T tal que

$$f(x) = f(x + T), \tag{1.193}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de f. As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas[2].

O limite no infinito de funções periódicas não existe[3]. De fato, se f não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro k. Desta forma, não existe número L que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de x suficientemente grandes (ou pequenos).

Exemplo 1.4.9. Não existe

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x), \tag{1.194}$$

[2]Consulte mais nas Notas de Aula - Pré-Cálculo - Funções Trigonométricas

[3]À exceção de funções constantes.

pois os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 1.13.

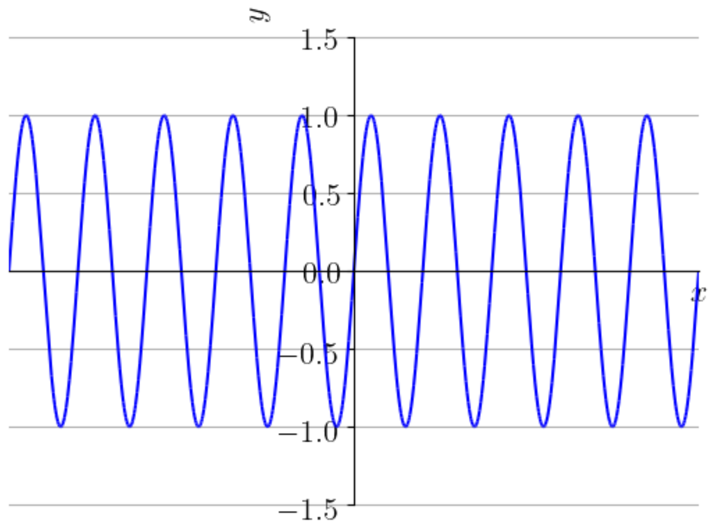


Figura 1.13: Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Com o Python+SymPy, ao computarmos $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ com o comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(sin(x),x,oo)
```

obtemos como saída o intervalo $[-1, 1]$, indicando que o limite não existe, pois $\operatorname{sen} x$ oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

Exercícios resolvidos

ER 1.4.1. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1. \tag{1.195}$$

Solução. Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x\to 1} 1 \tag{1.196}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) + 1, \quad (1.197)$$

observando que $\lim_{x\to\infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \to \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \to \infty$ quando $x \to \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \to \infty$ quando $x \to \infty$, i.e.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (1.198)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (1.199)$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/(x-1)+1,x,oo)
```

◇

ER 1.4.2. Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (1.200)$$

Solução. Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L. \quad (1.201)$$

Começamos com $x \to -\infty$, temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (1.202)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (1.203)$$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Agora, vamos ver a tendência da função para $x \to \infty$, temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \tag{1.204}$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \tag{1.205}$$

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função f.

Os seguintes comandos do Python+SymPy permitem plotar o esboço do gráfico da função f (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
L = limit(f(x),x,oo)
p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],\
    line_color="blue",show=False)
q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

$\Diamond$

ER 1.4.3. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}. \tag{1.206}$$

Solução. Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 1.4.7, vimos que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{1.207}$$

logo

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} g(-x) \tag{1.208}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0. \tag{1.209}$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 1.14.

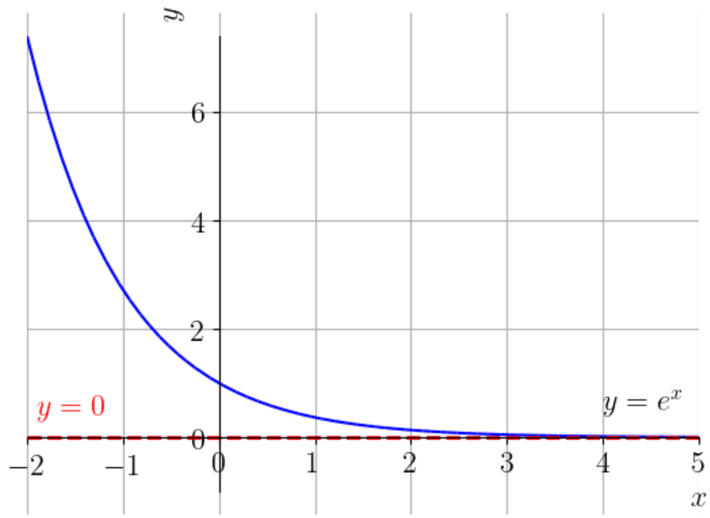


Figura 1.14: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(exp(-x),x,oo)
```

$\lozenge$

Exercícios

Exercício 1.4.1. Calcule

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{10}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -10x^{-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\frac{10}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-\sqrt{2}}$

e) $\lim_{x\to-\infty} 2 - (x+1)^{-1}$

Exercício 1.4.2. Calcule

a) $\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{2}}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$

c) $\lim_{x\to\infty} x^{-s}, \quad s > 0$

Exercício 1.4.3. Calcule

a) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $\lim_{x\to\infty} 2\cdot 3^x + \sqrt{2}$

Exercício 1.4.4. Calcule

a) $\lim_{x\to-\infty} e^x + 1$

b) $\lim_{x\to\infty} 3 + e^{-x}$

c) $\lim_{x\to\infty} 2e^{-x} - 1$

d) $\lim_{x\to-\infty} e - e^x$

Exercício 1.4.5. Calcule

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$

Exercício 1.4.6. Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \cos x. \tag{1.210}$$

Exercício 1.4.7. Calcule:

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+e^{-x}}$.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1$.

Exercício 1.4.8. Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$, mostre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \tag{1.211}$$

1.5 Limites infinitos

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando x tende a um número x_0, se $f(x)$ é arbitrariamente grande para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0, mas $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \tag{1.212}$$

A Figura 1.15, é uma ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

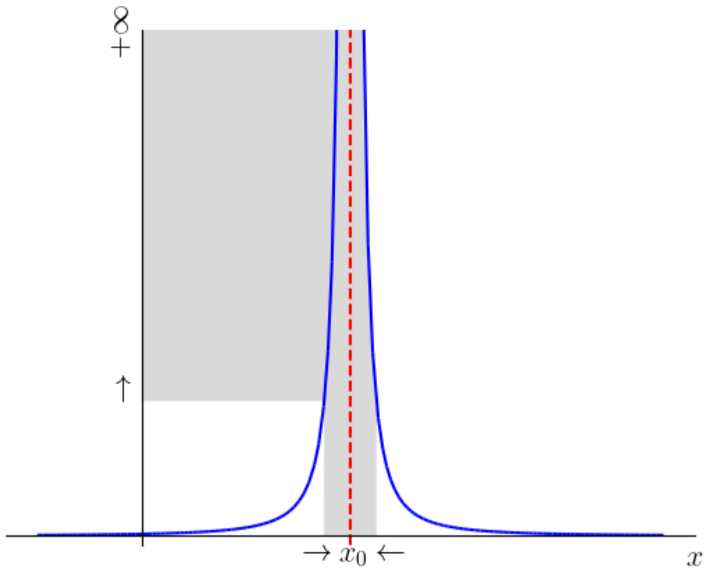


Figura 1.15: Ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

Exemplo 1.5.1. Vejamos o caso de

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}. \tag{1.213}$$

Ao tomarmos x próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	$\to 0 \leftarrow$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	$\to \infty \leftarrow$	10^6	10^4	10^2

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.16.

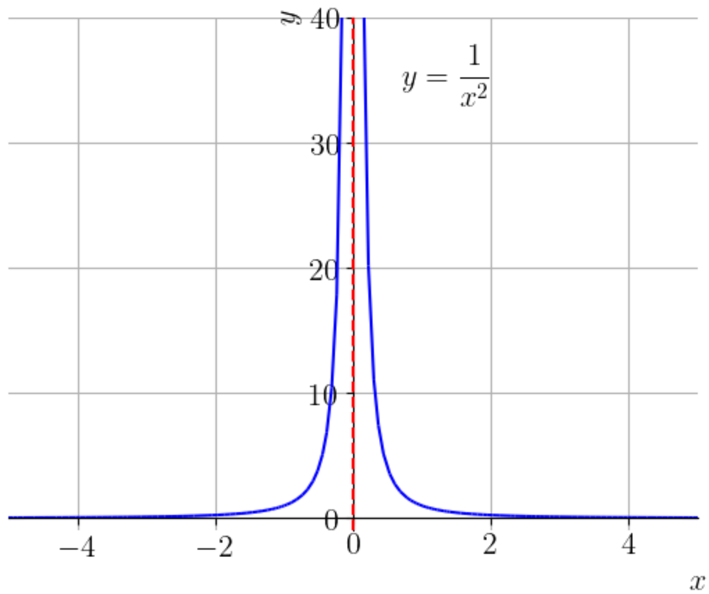


Figura 1.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer x suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \tag{1.214}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \tag{1.215}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty. \tag{1.216}$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x > x_0$.

Exemplo 1.5.2.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \tag{1.217}$$

De fato, conforme tomamos valores de x próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.17.

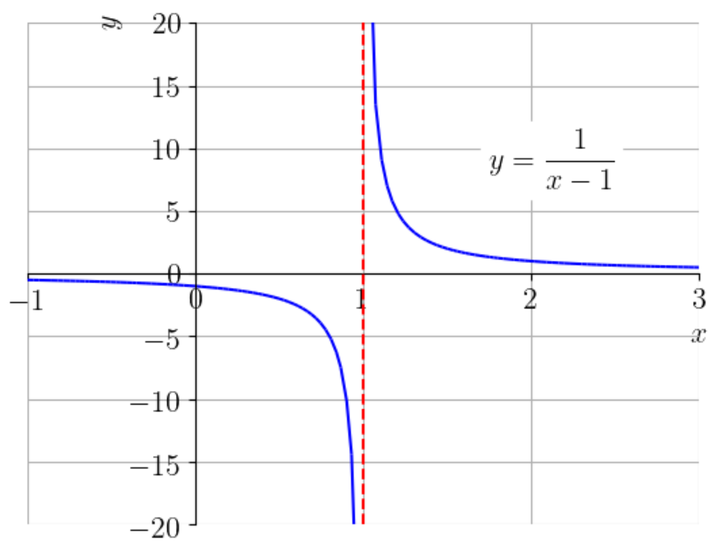


Figura 1.17: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/(x-1),x,0,'+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando x tende a x_0, quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de x suficientemente próximos de x_0, com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty. \tag{1.218}$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \to -\infty$ quando $x \to x_0^{\pm}$.

Exemplo 1.5.3. Observe que

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \tag{1.219}$$

e que não podemos concluir que este limite é ∞ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \tag{1.220}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \tag{1.221}$$

Exemplo 1.5.4.

$$\lim_{x \to -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \tag{1.222}$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo x. Veja a Figura 1.18.

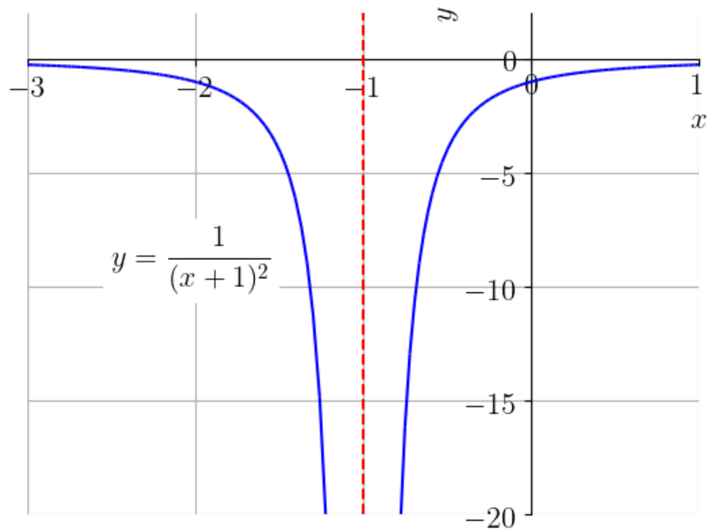


Figura 1.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(-1/(x+1)**2,x,-1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

1.5.1 Assíntotas verticais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \tag{1.223}$$

ou

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty. \tag{1.224}$$

Exemplo 1.5.5. O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \tag{1.225}$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 1.19.

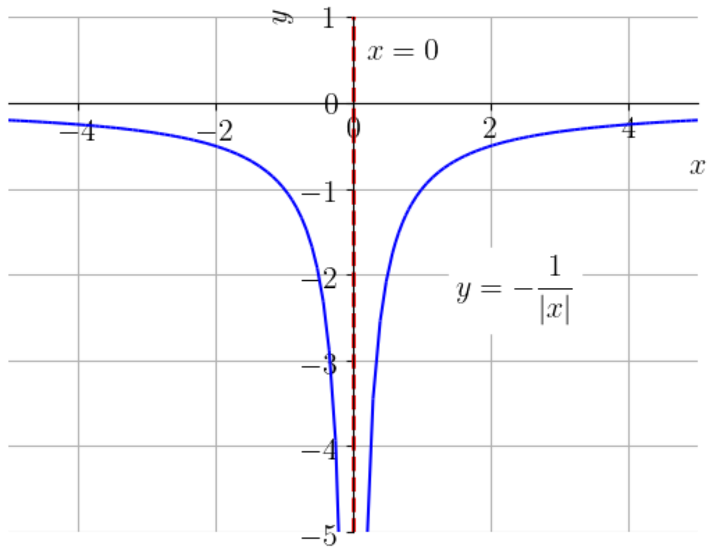


Figura 1.19: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

Exemplo 1.5.6. A função $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ não está definida para valores de x tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1.226}$$

$$x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1 \tag{1.227}$$

Nestes pontos o gráfico de f pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\overset{\to -3}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}}{\underset{\to 0^-}{x^2 - 1}} = +\infty, \tag{1.228}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\overset{\to -3}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}}{\underset{\to 0^+}{x^2 - 1}} = -\infty, \tag{1.229}$$

e, também, temos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3+2x^2-4x-8}^{\to -9}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}} = -\infty, \tag{1.230}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^3+2x^2-4x-8}^{\to -9}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}} = +\infty. \tag{1.231}$$

Com isso, temos que as retas $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f. Veja a Figura 1.20 para o esboço do gráfico desta função.

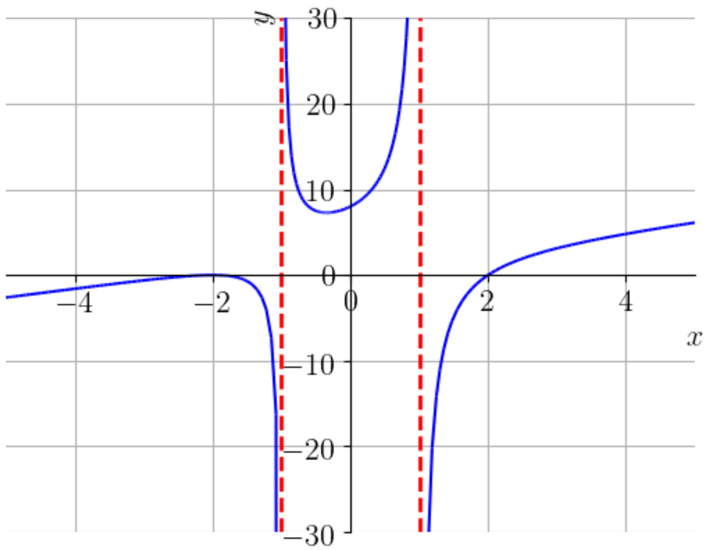


Figura 1.20: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}$.

Exemplo 1.5.7. (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y=\ln x$ é tal que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \tag{1.232}$$

i.e., $x=0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y=\ln x$ ser a função inversa de $y=e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y=0$[4]. A Figura 1.21 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

[4] Veja o Exemplo 1.4.7.

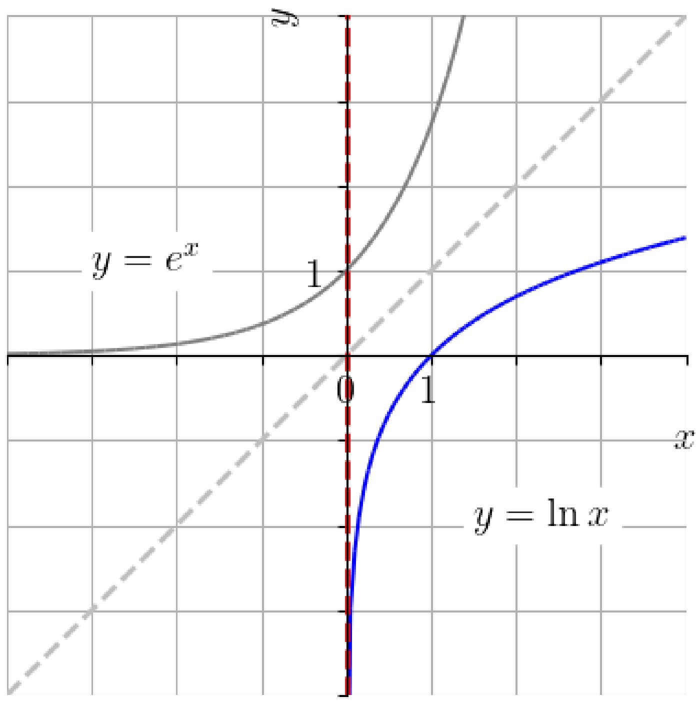


Figura 1.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

Exemplo 1.5.8. As funções trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ têm assíntotas verticais $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para k inteiro. Já, as funções trigonométricas $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cossec} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para k inteiro. Consulte mais em Funções Trigonométricas nas Notas de Aula de Pré-Cálculo.

1.5.2 Assíntotas oblíquas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assintota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

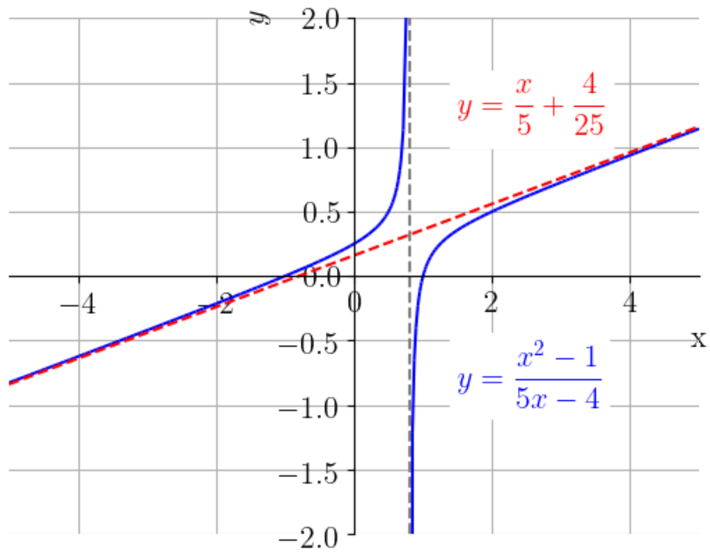


Figura 1.22: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-1}{5x-4}$.

Exemplo 1.5.9. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2-1}{5x-4}. \tag{1.233}$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x-4}}_{\text{resto}}. \tag{1.234}$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \to \pm\infty$, i.e. $f(x) \to \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \to \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 1.22.

Observação 1.5.1. Analogamente à assintotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

1.5.3 Limites infinitos no infinito

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \tag{1.235}$$

quando os valores da função f são arbitrariamente grandes para todos os valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \tag{1.236}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \tag{1.237}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty. \tag{1.238}$$

Exemplo 1.5.10. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

Exemplo 1.5.11.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \tag{1.239}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \overset{0^+}{\cancel{\frac{10}{x}}} + \overset{0^+}{\cancel{\frac{300}{x^3}}}}{\overset{0^+}{\cancel{\frac{1}{x^3}}}} = \infty. \tag{1.240}$$

Proposição 1.5.1. *Dado um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, *temos*

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm} a_n x^n. \tag{1.241}$$

Exemplo 1.5.12. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.5.11, temos

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x\to\infty} x^3 \tag{1.242}$$

$$= \infty. \tag{1.243}$$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.5.1. Calcule

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \tag{1.244}$$

Solução. Temos

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancelto{-1}{x-2}}{\cancelto{0^+}{1-x}} = -\infty. \tag{1.245}$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \to 0^+$ quando $x \to 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x - 1$, temos

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y+1-2}{y} \tag{1.246}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y-1}{y} \tag{1.247}$$

$$= -\infty. \tag{1.248}$$

Podemos usar o seguinte comandoPython+SymPy para computar este limite:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x-2)/(1-x),x,1,'-')
```

◊

ER 1.5.2. Calcule

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1|. \tag{1.249}$$

Solução. Começamos observando que

$$\ln|x-1| = \begin{cases} \ln(1-x) & , x < 1, \\ \ln(x-1) & , x > 1. \end{cases} \tag{1.250}$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty\text{[5]}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty\text{[6]}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty. \tag{1.251}$$

Podemos usar os seguintes comandos Python+SymPy para computar os limites laterais:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(log(abs(x-1)),x,1,'-')
limit(log(abs(x-1)),x,1,'+')
```

◊

ER 1.5.3. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}. \tag{1.252}$$

Solução. Tratando-se de uma função racional, temos[7]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \tag{1.253}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \tag{1.254}$$

$$= \infty. \tag{1.255}$$

[7] Veja a Observação 1.4.1. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 1.20.

$\Diamond$

ER 1.5.4. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2}. \tag{1.256}$$

Solução. Observamos que $1 - x^2 \to -\infty$ quando $x \to \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x^2$, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0. \tag{1.257}$$

$\Diamond$

ER 1.5.5. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \tag{1.258}$$

Solução. Podemos verificar que trata-se de uma indeterminação do tipo ∞/∞. Neste caso, podemos calcular o limite pela multiplicação (em cima e em baixo) pelo inverso do fator dominante no radical, i.e. $1/\sqrt{x^2}$. Ou seja, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \tag{1.259}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \tag{1.260}$$

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \to \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{|x|}} \tag{1.261}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2\frac{x}{x}} \tag{1.262}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \tag{1.263}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1} \tag{1.264}$$

$$= \frac{1}{2}. \tag{1.265}$$

$\Diamond$

Exercícios

Exercício 1.5.1. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} -x^{-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} x^{-n},\quad n>0$ ímpar

Exercício 1.5.2. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^{-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} -x^{-6}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} x^{-n},\quad n>0$ ímpar

Exercício 1.5.3. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-2}{1+x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-2}{(x+1)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

Exercício 1.5.4. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \tag{1.266}$$

Exercício 1.5.5. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}. \tag{1.267}$$

Exercício 1.5.6. Calcule

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2 - 1}. \tag{1.268}$$

Exercício 1.5.7. Calcule

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \tag{1.269}$$

Exercício 1.5.8. Mostre que $y = x^2$ é assíntota ao gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}. \tag{1.270}$$

Exercício 1.5.9. (Aplicação) Na física química, a Equação de Arrhenius[8] fornece a taxa de reação k (entre espécies químicas) em função da temperatura T [K]

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}, \tag{1.271}$$

onde $A > 0$ é o fator constante pré-exponencial, $E_a > 0$ é a energia de ativação e $R > 0$ é a constante universal dos gases. Para temperatura constante, a equação acima define a função $k = k(E_a)$. Qual é a tendência da taxa de reação k quando $T \to 0^+$.

[8]Svante August Arrhenius, 1859-1927, químico sueco. Fonte: Wikipédia.

Exercício 1.5.10. (Aplicação.) A função logística tem aplicações em várias áreas do conhecimento como, por exemplo, na inteligência artificial e na modelagem de crescimento populacional[9]. Ela tem a forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{1.272}$$

Encontre a(s) assíntota(s) horizontal(ais) dessa função logística.

Exercício 1.5.11. (Aplicação.) O fenômeno de desintegração espontânea do núcleo de um átomo com a emissão de algumas radiações é chamado de radioatividade[10]. A lei fundamental do decaimento radiativo estabelece que a taxa de decaimento é proporcional ao número de átomos que ainda não decaíram. Isto nos fornece a equação da lei básica da radioatividade

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.273}$$

onde, $N = N(t)$ é o número de átomos no tempo t, $N_0 \geq 0$ é o número de átomos presentes no tempo inicial $t = 0$ e $\lambda > 0$ é a constante de decaimento. Qual a tendência de N quando $t \to \infty$.

1.6 Continuidade

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

1.6.1 Definição de função contínua

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Dizemos que uma **função** f é **contínua** em um ponto x_0, quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1.274}$$

e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.275}$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direta**. Quando a **função** f não é contínua em um dado ponto x_0, dizemos que f é **descontínua** neste ponto.

[9]Consulte mais em Wikipédia: Função Logística.
[10]Fonte: Wikipédia.

Exemplo 1.6.1. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \tag{1.276}$$

Na Figura 1.23, temos um esboço do gráfico de f.

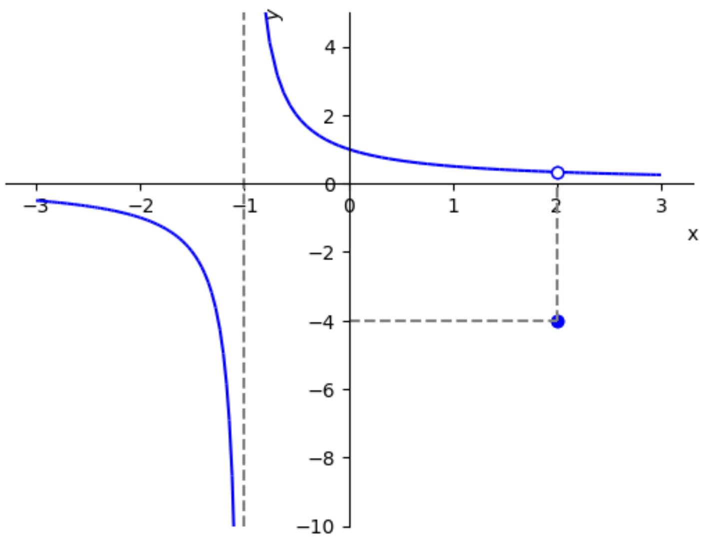


Figura 1.23: Esboço do gráfico da função f definida no Exemplo 1.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} \tag{1.277}$$

$$= \frac{-4}{-1\cdot(-4)} = -1 = f(-2). \tag{1.278}$$

Com isso, concluímos que f é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} \tag{1.279}$$

$$= \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \tag{1.280}$$

logo, f(-1) não está definido e, portanto, f é descontínua neste ponto. Observemos que f tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} \tag{1.281}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \tag{1.282}$$

Portanto, concluímos que f é descontínua em $x = 2$.

Uma função f é dita ser **contínua em um intervalo** (a, b), quando f é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

Exemplo 1.6.2. (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \tag{1.283}$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.24.

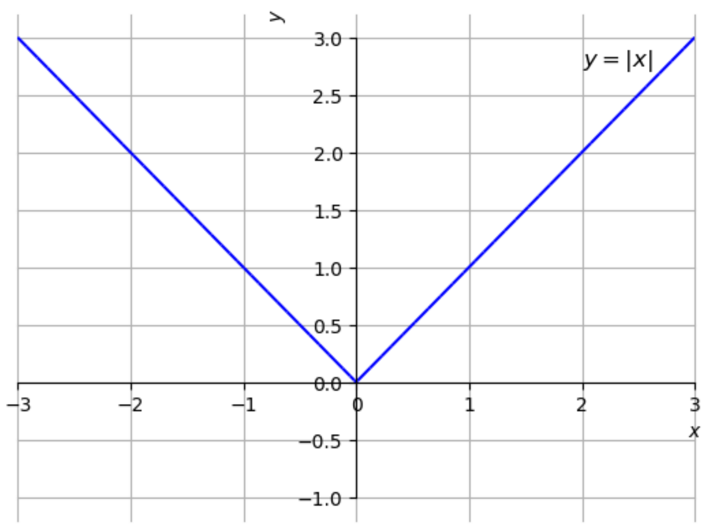


Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x) = |x|$.

Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de x. Também, para $x \in (0,\infty)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de x. Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0, \tag{1.284}$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0. \tag{1.285}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|. \tag{1.286}$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

1.6.2 Propriedades de funções contínuas

Se f e g são funções contínuas em $x = c_0$ e k um número real, então também são contínuas em $x = x_0$ as funções:

a) $k \cdot f$

b) $f \pm g$

c) $f \cdot g$

d) f/g, se $g(x_0) \neq 0$

e) f^k, se existe $f^k(x_0)$.

Exemplo 1.6.3. Temos que $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ são exemplos de funções contínuas em toda parte. Segue das propriedades acima que:

a) $f_a(x) = 2x$ é contínua em toda parte.

b) $f_b(x) = x + |x|$ é contínua em toda parte.

c) $f_c(x) = 2x|x|$ é contínua em toda parte.

d) $f_d(x) = \frac{|x|}{x}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) $f_e(x) = x^2$ é contínua em toda parte.

Exemplo 1.6.4. Polinômios são contínuos em toda parte. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0), \tag{1.287}$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \tag{1.288}$$

Exemplo 1.6.5. Funções racionais $r(x) = p(x)/q(x)$ são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \tag{1.289}$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \tag{1.290}$$

pois f não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \tag{1.291}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \tag{1.292}$$

$$= \frac{x_0 - 1}{x_0^2 - 1} = f(x_0). \tag{1.293}$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0 - 1}{0^2 - 1} = 1 = f(0). \tag{1.294}$$

Ou seja, f é contínua nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

Observação 1.6.1. São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Se f é contínua no ponto x_0 e g é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0.

Exemplo 1.6.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \tag{1.295}$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1,\infty)$.

b) $y = \left| \frac{x - 1}{x^2 - 1} \right|$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \tag{1.296}$$

Exemplo 1.6.7. Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 4} \cdot e^{\operatorname{sen} x} = \sqrt{\lim_{x \to 0} x + 4} \cdot e^{\operatorname{sen} \lim_{x \to 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \tag{1.297}$$

Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que qualquer dada função f contínua em um intervalo $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Consulte a Figura 1.25.

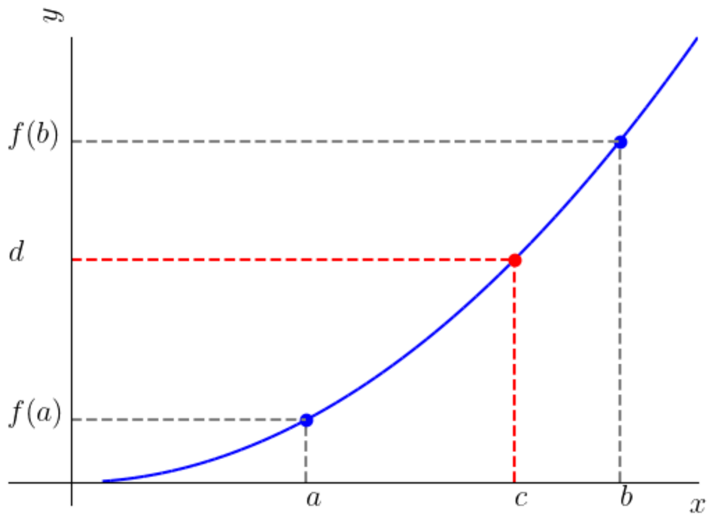


Figura 1.25: Ilustração sobre o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 1.6.1. (Teorema do valor intermediário) Seja f função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

Exemplo 1.6.8. Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, f é contínua no intervalo [0,2] e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 1.26.

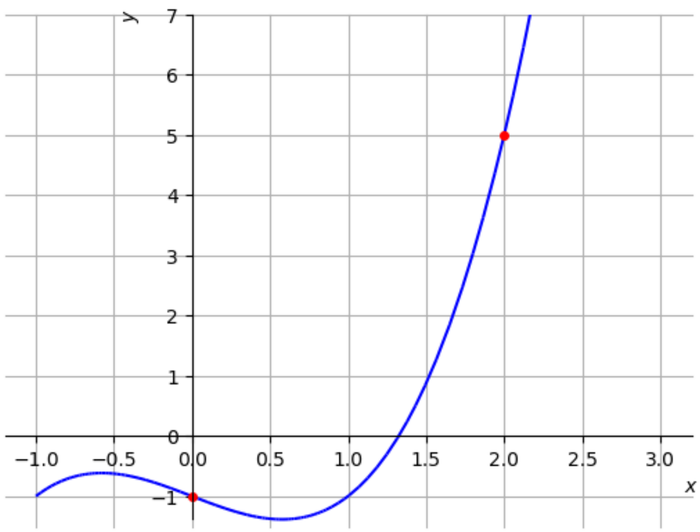


Figura 1.26: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \tag{1.298}$$

Solução. Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \tag{1.299}$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a -1 e, portanto, contínua.

Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \tag{1.300}$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua.

Concluímos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

$\Diamond$

ER 1.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{1.301}$$

Solução. A função f pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. g é contínua para todo $x > 0$;

b) a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função h tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \tag{1.302}$$

Fazendo o estudo de sinal

vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Em resumo, h é contínua em $(0, \infty)$ e g é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. f é contínua em $(1, \infty)$.

$\Diamond$

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \tag{1.303}$$

Exercício 1.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \tag{1.304}$$

Exercício 1.6.3. Calcule

a) $\lim\limits_{x \to -1} e^{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \ln|x^2 - 1|$

Exercício 1.6.4. Calcule

$$\lim_{x \to \pi} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos x}{2}\right). \tag{1.305}$$

Exercício 1.6.5. Calcule o valor de c de forma que a seguinte função seja contínua em $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & , x \neq 1 \\ c & , x = 1 \end{cases} \tag{1.306}$$

Exercício 1.6.6. (Aplicação.) O fenômeno de desintegração espontânea do núcleo de um átomo com a emissão de algumas radiações é chamado de radioatividade[11]. A lei fundamental do decaimento radiativo estabelece que

[11]Fonte: Wikipédia.

a taxa de decaimento é proporcional ao número de átomos que ainda não decaíram. Isto nos fornece a equação da lei básica da radioatividade

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.307}$$

onde, $N = N(t)$ é o número de átomos no tempo t, $N_0 \geq 0$ é o número de átomos presentes no tempo inicial $t = 0$ e $\lambda > 0$ é a constante de decaimento. Qual a tendência de $N = N(t)$ quando a taxa de decaimento $\lambda \to 0^+$.

1.7 Limites e desigualdades

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo x em um certo intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{1.308}$$

Observe que a tomada do **limite não preserva a desigualdade estrita**.

Exemplo 1.7.1. As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0. \tag{1.309}$$

Observação 1.7.1. A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^-} g(x). \tag{1.310}$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

1.7.1 Limites de funções limitadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se $f(x) \leq L$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em x_0, então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq L. \tag{1.311}$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 1.7.2. Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \operatorname{sen} x. \tag{1.312}$$

Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \leq \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0, \tag{1.313}$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \geq \lim_{x \to \infty} -e^{-x} = 0. \tag{1.314}$$

Logo, temos

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \operatorname{sen} x = 0. \tag{1.315}$$

1.7.2 Teorema do confronto

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Teorema 1.7.1. (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$ (consulte a Figura 1.27), e

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L, \tag{1.316}$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{1.317}$$

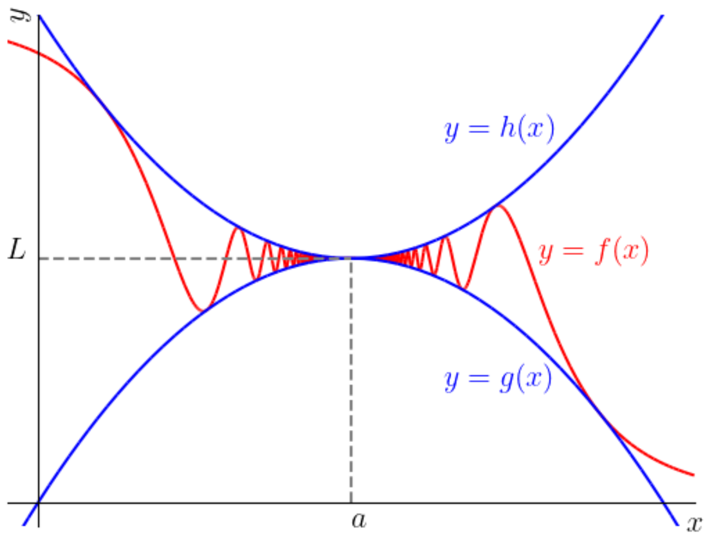


Figura 1.27: Ilustração sobre o Teorema 1.7.1.

Demonstração. Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) \tag{1.318}$$

donde

$$L \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq L. \tag{1.319}$$

□

Exemplo 1.7.3. Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1. \tag{1.320}$$

Observação 1.7.2. O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

Exemplo 1.7.4.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{1.321}$$

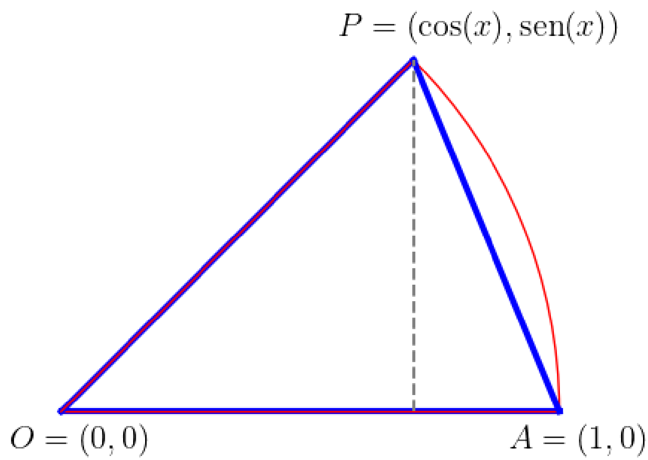


Figura 1.28: Ilustração referente ao Exemplo 1.7.4.

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0{,}0)$, $A = (1{,}0)$ e $P = (\cos x, \mathrm{sen}\, x)$ (consulte a Figura 1.28), observamos que

$$\text{Área do triâng.}OAP < \text{Área do setor}OAP, \tag{1.322}$$

i.e.

$$\frac{\mathrm{sen}\, x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}\, x < x, \tag{1.323}$$

para todo $0 < x < \pi/2$.

É certo que $\mathrm{sen}\, x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\mathrm{sen}\, x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{1.324}$$

Lembrando que $\mathrm{sen}\, x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\mathrm{sen}\, x = \mathrm{sen} -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{1.325}$$

Logo, de (1.324) e (1.325), temos

$$-|x| \leq \mathrm{sen}\, x \leq |x|. \tag{1.326}$$

Por fim, como

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0, \tag{1.327}$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{1.328}$$

Observação 1.7.3. Do exemplo anterior (Exemplo 1.7.4), podemos mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{1.329}$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{1.330}$$

temos

$$\cos x = 1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{1.331}$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left[1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right] \tag{1.332}$$

$$= 1 + 2\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^2. \tag{1.333}$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \to 0$ quando $x \to 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sen} y = 0. \tag{1.334}$$

Então, retornando a equação (1.333), concluímos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{1.335}$$

1.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.336}$$

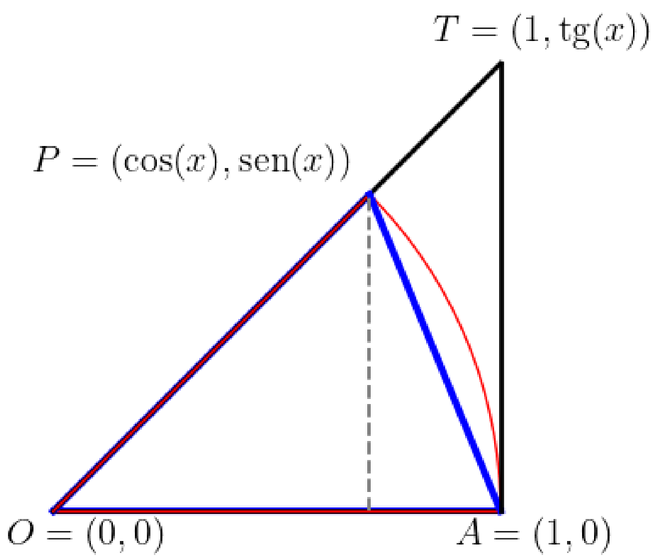


Figura 1.29: Ilustração para o cálculo de $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0,0)$, $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A = (1,0)$ e $T = (1, \operatorname{tg} x)$ (consulte Figura 1.29), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor} OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \tag{1.337}$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \tag{1.338}$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\operatorname{sen} x$[12], obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{1.339}$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \tag{1.340}$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x\to 0^+} 1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1. \tag{1.341}$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.342}$$

Agora, usando o fato de que $\operatorname{sen} x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \tag{1.343}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.344}$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

Exemplo 1.7.5. Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{1.345}$$

Veja o Exercício 1.7.4.

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 1.7.1. Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x). \tag{1.346}$$

[12] $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

Solução. Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \overset{\nearrow 0}{\cancel{x^3}} \leq \lim_{x\to 0^+} f(x) \leq \lim_{x\to 0^+} \overset{\nearrow 0}{\cancel{\sqrt{x}}}. \tag{1.347}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0. \tag{1.348}$$

◊

Em construção ...

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.7.1. Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x\to 0} u(x)$.

Exercício 1.7.2. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x. \tag{1.349}$$

Exercício 1.7.3. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \tag{1.350}$$

Exercício 1.7.4. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \tag{1.351}$$

Exercício 1.7.5. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \tag{1.352}$$

1.8 Exercícios finais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 1.8.1. Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{1.353}$$

Exercício 1.8.2. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

Resposta dos Exercícios

Exercício 1.1.1. a) -1; b) -1; c) 2; d) $\nexists$

Exercício 1.1.2. a) $-\frac{3}{2}$; b) -1; c) -1

Exercício 1.1.3. a) 2; b) 2; c) -3; d) π

Exercício 1.1.4. a) 2; b) -2; c) -3; d) e

Exercício 1.1.5. a) 1; b) 1; c) 10^{-10}

Exercício 1.2.1. a) 4; b) 2π; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

Exercício 1.2.2. a) $-3/2$; b) $5/2$; c) -3

Exercício 1.2.3. a) -6; b) -3;

Exercício 1.2.4. a) $2/3$; b) $3/4$;

Exercício 1.2.5. a) 2; b) -1; c) 1

Exercício 1.2.6. a) 6; b) 10; c) 12

Exercício 1.2.7. a) $1/2$; b) $-1/3$;

Exercício 1.2.8. a) 2; b) -1; c) -3;

Exercício 1.2.9. $-1/4$

Exercício 1.2.10. Falso. Construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

Exercício 1.3.4. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) $\nexists$

Exercício 1.3.5. a) 2; b) 2; c) 2

Exercício 1.3.6. a) 2; b) 3; c) $\nexists$

Exercício 1.3.7. $-\frac{1}{2}$

Exercício 1.3.8. 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é $[-1, 1]$.

Exercício 1.3.9. Falso. Dica: construa um contraexemplo para mostrar que a afirmação não é verdadeira.

Exercício 1.4.1. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 2;

Exercício 1.4.2. a) 0; b) 0; c) 0

Exercício 1.4.3. a) 0; b) 1; c) $\sqrt{2}$;

Exercício 1.4.4. a) 1; b) 3; c) -1; d) e

Exercício 1.4.5. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$

Exercício 1.4.6. não existe.

Exercício 1.4.7. a) 1; b) -3

Exercício 1.4.8. Dica: use as regras para o cálculo de limites.

Exercício 1.5.1. a) ∞; b) ∞; c) ∞; d) $\pm\infty$

Exercício 1.5.2. a) ∞; b) ∞; c) $-\infty$; d) ∞

Exercício 1.5.3. a) ∞; b) ∞; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) ∞

Exercício 1.5.4. $x = 2$; $x = -2$

Exercício 1.5.5. $x = 1$

Exercício 1.5.6. ∞

Exercício 1.5.7. $-\infty$

Exercício 1.5.8. Dica: Observe que $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ e analise o limite de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$.

Exercício 1.5.9. $k \to 0$ quando $T \to 0^+$

Exercício 1.5.10. $y = 0$ e $y = 1$

Exercício 1.5.11. $N(t) \to 0$ quando $t \to \infty$

Exercício 1.6.1. $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

Exercício 1.6.2. $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

Exercício 1.6.3. a) 1; b) 0

Exercício 1.6.4. 0

Exercício 1.6.5. $c = \frac{1}{2}$

Exercício 1.6.6. $N(t) \to N_0$ quando $\lambda \to 0^+$

Exercício 1.7.1. 1

Exercício 1.7.2. 0

Exercício 1.7.3. $\frac{1}{2}$

Exercício 1.7.4. 0

Exercício 1.7.5. 0

Exercício 1.8.1. ∞

Exercício 1.8.2. a) ∞; b) 0

Referências Bibliográficas

[1] H. Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.

[2] J. Stewart. *Cálculo*. Thomson Learning, 2006.

[3] G. Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

[4] G. S. S. Ávila. *Introdução à análise matemática*. Edgard Blücher Ltda., 2. edition, 1993.