Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

19 de agosto de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python[1] são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

Observação 1.0.1. Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos Python[1] com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

1.1 Equações a diferenças

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f\left(y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n); n\right) = 0, \tag{1.1}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \geq 0$ número natural e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

Exemplo 1.1.1. Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y(n+1) = (1+r)y(n) \tag{1.2}$$

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja $y(0)$ o valor da aplicação inicial, então

$$y(1) = (1+r)y(0) \tag{1.3}$$

é o valor corrigido a taxa r no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y(2) = (1+r)y(1) \tag{1.4}$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y(n+1) = ry(n)\left(1 - \frac{y(n)}{K}\right), \tag{1.5}$$

onde $y(n)$ representa o tamanho da população no período n, r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**[2]

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n), \tag{1.6}$$

onde $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$.

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k-ésima ordem). É dita ser **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n)$, noutro caso é dita ser **não linear**.

Exemplo 1.1.2. No Exemplo 1.1.1, temos

a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.

b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.

c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

[2]Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: Wikipedia.

A solução de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números $(y(n))_{n=0}^{\infty} = (y(0), y(1), \ldots, y(n), \ldots)$ que satisfazem a equação. Em alguns casos é possível escrever a solução como uma forma fechada

$$y(n) = g(n), \tag{1.7}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $g : n \mapsto g(n)$ é a função discreta que representa a solução.

Exemplo 1.1.3. Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y(n+1) = (1+r)y(n), \quad n \geq 0. \tag{1.8}$$

A partir do valor inicial $y(0)$, temos

$$\begin{align}
y(1) &= (1+r)y(0) \tag{1.9}\\
y(2) &= (1+r)y(1) \tag{1.10}\\
&= (1+r)(1+r)y(0) \tag{1.11}\\
&= (1+r)^2 y(0) \tag{1.12}\\
y(3) &= (1+r)y(2) \tag{1.13}\\
&= (1+r)(1+r)^2 y(0) \tag{1.14}\\
&= (1+r)^3 y(0) \tag{1.15}\\
&\vdots \tag{1.16}
\end{align}$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y(n) = (1+r)^n y(0), \tag{1.17}$$

onde o valor inicial $y(0)$ é arbitrário.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Calcule $y(10)$, sendo que

$$y(n+1) = 1{,}05y(n), \quad n \geq 0, y(0) = 1000. \tag{1.18}$$

Solução. Observamos que

$$\begin{align}
y(1) &= 1{,}05y(0) \tag{1.19}\\
y(2) &= 1{,}05y(1) \tag{1.20}\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05y(0) \tag{1.21}\\
&= 1{,}05^2y(0) \tag{1.22}\\
y(3) &= 1{,}05y(2) \tag{1.23}\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05^2y(0) \tag{1.24}\\
&= 1{,}05^3y(0) \tag{1.25}\\
&\vdots \tag{1.26}
\end{align}$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = 1{,}05^n y(0). \tag{1.27}$$

Portanto,

$$\begin{align}
y(10) &= 1{,}05^{10}y(0) \tag{1.28}\\
&= 1{,}05^{10} \cdot 1000 \tag{1.29}\\
&\approx 1628{,}89. \tag{1.30}
\end{align}$$

◊

ER 1.1.2. Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores $y(n)$ no final do n-ésimo ano.

Solução. No final do ano $n+2 \geq 0$, o número de flores é igual a

$$y(n+2) = 2u(n+2) + 3d(n+2), \tag{1.31}$$

onde $u(n+2)$ é o número de flores plantadas a um ano e $d(n+2)$ é o número de flores plantas a pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$u(n+2) = u(n+1) + 2d(n+1) \tag{1.32}$$

e

$$d(n+2) = u(n+1) + d(n+1). \tag{1.33}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
y(n+2) &= 2\left[u(n+1)+2d(n-1)\right]+3\left[u(n+1)+d(n-1)\right] && (1.34)\\
&= 2y(n+1)+u(n+1)+d(n+1) && (1.35)\\
&= 2y(n+1)+\underbrace{u(n)+2d(n)}_{u(n+1)}+\underbrace{u(n)+d(n)}_{d(n+1)} && (1.36)\\
&= 2y(n+1)+2u(n)+3d(n) && (1.37)\\
&= 2y(n)+y(n). && (1.38)
\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y(n+2) = 2y(n+1)+y(n+2). \qquad (1.39)$$

◊

Exercícios

E 1.1.1. Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

1. $y(n+1)-\sqrt{2}y(n) = 1$
2. $ny(n+1) = y(n)\ln(n+1)$
3. $y(n) = y(n+1)+2y(n+2)-1$
4. $y(n+1)-\left[1-y(n)\right]\left[1+y(n)\right] = 0$
5. $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}$

E 1.1.2. Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de $y(0)$ reais e que o cartão não está mais em uso.

E 1.1.3. Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no n-ésimo mês.

Capítulo 2

Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0, \tag{2.1}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

2.1 Equações lineares

Nesta seção, discutimos sobre equações a diferenças de ordem 1 e lineares. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \tag{2.2}$$

onde $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, n_0 número inteiro, $a : n \mapsto a(n)$ e $g : n \mapsto g(n)$ é o termo fonte. A equação é dita ser **homogênea** quando $g \equiv 0$ e, caso contrário, é dita ser **não homogênea**.

2.1.1 Equação homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.3}$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= a(n)y(n) && (2.4)\\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) && (2.5)\\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) && (2.6)\\
&\vdots && (2.7)\\
&= a(n)a(n-1)\cdots a(n_0)y(n_0). && (2.8)
\end{aligned}$$

Ou seja, dado o valor inicial $y(n_0)$, temos a solução[1]

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0), \tag{2.9}$$

assumindo a notação de que $\prod_{i=n+1}^{n} a(i) = 1$.

Exemplo 2.1.1. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

Comparando com (2.3), temos $a(n) = 2$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= 2y(n) && (2.11)\\
&= 2 \cdot 2y(n-1) && (2.12)\\
&= 2^2 y(n-1) && (2.13)\\
&= 2^2 \cdot 2y(n-2) && (2.14)\\
&= 2^3 y(n-2) && (2.15)\\
&\cdots && (2.16)\\
&= 2^{n+1} y(0) && (2.17)
\end{aligned}$$

Equivalentemente, por (2.9), temos

$$\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) && (2.18)\\
&= 2^n y(0). && (2.19)
\end{aligned}$$

[1] A demonstração por ser feita por indução matemática.

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.
No Python[2], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0
```

2.1.2 Equação não homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.20}$$

pode ser obtida por iterações diretas.
Vejamos, para $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} y(n+1) &= a(n)y_n + g(n) \\ &= a(n)\left[a(n-1)y(n-1) + g(n-1)\right] + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)y(n-1) + a(n)g(n-1) + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)\left[a(n-2)y(n-2) + g(n-2)\right] \\ &+ a(n)g(n-1) + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \\ &+ a(n)a(n-1)g(n-2) + a(n)g(n-1) + g(n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com isso, podemos inferir[3] que

$$y(n+1) = \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.21}$$

$$+ \sum_{i=n_0}^{n} \left[\prod_{j=i+1}^{n} a(j)\right] g(i). \tag{2.22}$$

[2] Veja a Observação 1.0.1.
[3] A demonstração por ser feita por indução matemática.

No último termo, consideramos a notação $\sum_{j=i+1}^{i} a(i) = 0$. Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} y(n)= & \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \\ & + \sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(j)\right] g(i). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.24}$$

Comparando com (2.20), temos $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$\begin{aligned} y(n+1) &= 2y(n) - 1 && (2.25)\\ &= 2 \cdot [2y(n-1) - 1] - 1 && (2.26)\\ &= 2^2 y(n-1) - 2 - 1 && (2.27)\\ &= 2^2 \cdot [2y(n-2) - 1] - 2 - 1 && (2.28)\\ &= 2^3 y(n-2) - 2^2 - 2 - 1 && (2.29)\\ &\cdots && (2.30)\\ &= 2^{n+1} y(0) - \sum_{i=0}^{n} 2^i && (2.31) \end{aligned}$$

Este último termo, é a soma dos termos da **progressão geométrica** de razão $q = 2$ (veja Subseção 2.1.3), i.e.

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{2.32}$$

Logo, temos que a solução de (2.20) é

$$\begin{aligned} y(n+1) &= 2^{n+1} y(0) - \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} && (2.33)\\ &= 2^{n+1} y(0) - 2^{n+1} + 1. && (2.34) \end{aligned}$$

Equivalentemente, por (2.23), temos

$$
\begin{align}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.35}\\
&+ \sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(j)\right] g(i) \tag{2.36}\\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \tag{2.37}\\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right](-1) \tag{2.38}\\
&= 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} \tag{2.39}\\
&= 2^n y(0) - 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \tag{2.40}\\
&= 2^n y(0) - 2^n + 1. \tag{2.41}
\end{align}
$$

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.
No Python[4], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)-1)
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0 + 1
```

Observamos que esta solução é equivalente à (2.41), pois

$$
\begin{align}
y(n) &= 2^n y(0) - 2^n + 1 \tag{2.42}\\
&= 2^n\left[y(0) - 1\right] + 1, \tag{2.43}
\end{align}
$$

onde $y(0)$ é um valor inicial arbitrário.

[4]Veja a Observação 1.0.1.

2.1.3 Somas definidas

Seguem algumas somas definidas que podem ser úteis na resolução de equações a diferenças.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.44}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.45}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{2.46}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30} \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1 \tag{2.48}$$

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{(q-1)(n+1)q^{n+1} - q^{n+2} + q}{(q-1)^2} \tag{2.49}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Calcule a solução da equação à diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.50}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.51}$$

Solução. De (2.9), temos

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right] y(0) \tag{2.52}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \tag{2.53}$$

$$= 2^{-n}. \tag{2.54}$$

No Python[5], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

[5] Veja a Observação 1.0.1.

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),1/2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):1})
Out: 0.5**n
```

◇

ER 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + \frac{1}{2}^n, \quad n \geq 0, \tag{2.55}$$

$$y(0) = 0. \tag{2.56}$$

Solução. De (2.23), temos

$$\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i && (2.57)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \cdot 2^{-i} && (2.58)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} \cdot 2^{-2i} && (2.59)\\
&= 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^i && (2.60)\\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} && (2.61)\\
&= 2^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) && (2.62)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{4^n}\right) && (2.63)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - 2^{n-1}2^{-2n}\right) && (2.64)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1} - 2^{-n-1}\right) && (2.65)\\
&= \frac{2}{3}\left(2^{n} - 2^{-n}\right). && (2.66)
\end{aligned}$$

No Python[6], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)+(1/2)**n)
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):0})
Out: -0.666666666666667*0.5**n + 0.666666666666667*2**n
```

◊

[6]Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios

E 2.1.1. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.67}$$

E 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = \frac{1}{3}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.68}$$
$$y(0) = -1. \tag{2.69}$$

E 2.1.3. Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1%. Considerando $y(0) = 100$, qual o valor de $y(n)$ no n-ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução. Então, calcule o valor da dívida no 36º mês.

E 2.1.4. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n) - 3, \quad n \geq 0, \tag{2.70}$$
$$y(0) = 2. \tag{2.71}$$

E 2.1.5. Calcule a solução de

$$y(n+1) = ny(n) + n!, \quad n \geq 0, \tag{2.72}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.73}$$

E 2.1.6. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + 2^n, \quad n \geq 0, \tag{2.74}$$
$$y(0) = 2. \tag{2.75}$$

E 2.1.7. Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1% e com parcelas mensais fixas de \$1. Considerando $y(0) = 100$, qual o valor de $y(n)$ no n-ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução.

E 2.1.8. Calcule a solução de

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq 0, \tag{2.76}$$

onde a e b são constantes com $a \neq 1$.

2.2 Estudo assintótico de equações lineares

Nesta seção, vamos introduzir aspectos básicos sobre o comportamento assintótico de soluções de equações a diferenças de primeira ordem e lineares. Seja

$$y(n+1) = f(y(n),n), \quad n \geq n_0, \tag{2.77}$$

uma equação a diferenças com valor inicial $y(n_0)$. Dizemos que y^* é **ponto de equilíbrio** da equação, quando y^* é tal que

$$f(y^*,n) = y^*, \tag{2.78}$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, ao escolhermos $y(n_0) = y^*$, então a solução de equação a diferenças (2.77) é

$$y(n) = y^*. \tag{2.79}$$

Exemplo 2.2.1. Vamos calcular o(s) ponto(s) de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{4}{3}y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.80}$$

Neste caso, por comparação com (2.77), temos $f(y(n),n) = \frac{4}{3}y(n) - 1$. Para calcularmos o(s) ponto(s) de equilíbrio, resolvemos

$$f(y^*,n) = y^* \tag{2.81}$$

$$\frac{4}{3}y^* - 1 = y^* \tag{2.82}$$

$$\left(\frac{4}{3} - 1\right) y^* = 1 \tag{2.83}$$

$$\frac{1}{3}y^* = 1 \tag{2.84}$$

$$y^* = 3. \tag{2.85}$$

Com isso, concluímos que $y^* = 3$ é o único ponto de equilíbrio de (2.80).
Notamos que, de fato, ao escolhermos $y(0) = 3$, temos

$$y(1) = \frac{4}{3}y(0) - 1 = 3 \tag{2.86}$$
$$y(2) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \tag{2.87}$$
$$y(3) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \tag{2.88}$$
$$\vdots \tag{2.89}$$
$$y(n) = 3. \tag{2.90}$$

Seja a equação a diferenças de primeira ordem, linear e com coeficientes constantes

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \tag{2.91}$$

Se $a = 0$, então todo número real y^* é ponto de equilíbrio de (2.91). Se $a = 1$ e $b = 0$, também. Agora, se $a = 1$ e $b \neq 0$, então (2.91) não tem ponto de equilíbrio. Por fim, se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, então

$$y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.92}$$

é o único ponto de equilíbrio de (2.91). Este é o caso do Exemplo 2.2.1.
Um ponto de equilíbrio é um **atrator global** quando

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = y^*, \tag{2.93}$$

para qualquer valor inicial $y(n_0)$. Neste caso, também dizemos que y^* é um ponto de equilíbrio **assintoticamente globalmente estável**.
Uma equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.94}$$

com $-1 < a < 1$, tem $y^* = 0$ como atrator global. De fato, a solução desta equação a diferenças é

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a\right] y(n_0) \tag{2.95}$$
$$= a^{n-n_0} y(n_0). \tag{2.96}$$

Logo, temos

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty} \cancel{a^{n-n_0}}^{0} y(n_0) \tag{2.97}$$
$$= 0. \tag{2.98}$$

Exemplo 2.2.2. Para a equação a diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.99}$$

temos que y^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável.

Um equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \tag{2.100}$$

com $-1 < a < 1$, tem

$$y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.101}$$

como ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável. De fato, a solução desta equação é

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a\right] y(n_0) \\
&\quad + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a\right] b && (2.102) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} a^{n-1-i} b && (2.103) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-1} b \sum_{i=n_0}^{n-1} a^{-i} && (2.104) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-1} b \sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j-n_0} && (2.105) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j} && (2.106) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \frac{(1 - a^{-(n-n_0)})}{1 - a^{-1}} && (2.107) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \frac{\frac{a^{n-n_0}-1}{a^{n-n_0}}}{\frac{a-1}{a}} && (2.108) \\
&= a^{n-n_0} y(n_0) + b \frac{1 - a^{n-n_0}}{1 - a} && (2.109) \\
&= \left(y(n_0) - \frac{b}{1-a}\right) a^{n-n_0} + \frac{b}{1-a}. && (2.110)
\end{aligned}
$$

Observamos que esta última equação, confirma que

$$
y^* = \frac{b}{1-a} \tag{2.111}
$$

é ponto de equilíbrio de (2.100) e é assintoticamente globalmente estável, pois

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y(n) &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(y(n_0) - \frac{b}{1-a}\right) \cancelto{0}{a^{n-n_0}} + \frac{b}{1-a}\right] && (2.112) \\
&= \frac{b}{1-a}. && (2.113)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.2.3. A equação a diferenças

$$y(n+1) = 4y(n) - 1, \quad n \geq 0, \tag{2.114}$$

tem $y^* = 1/3$ como ponto de equilíbrio, o qual não é um atrator global. De fato, para qualquer escolha de $y(0) \neq y^*$, temos

$$y(n) = \underbrace{\left(y(0) - \frac{1}{3}\right)}_{\neq 0} 4^n + \frac{1}{3}. \tag{2.115}$$

Logo, vemos que $y(n) \to \infty$ quando $n \to \pm\infty$, onde o sinal é igual ao do termo $y(0) - 1/3$.
Observamos as seguintes computações no Python[7]:

```
In : y=1/3
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
...:
...: y
Out: -21.0
```

Ou seja, $y(30) = -21.0$ computando por iterações recorrentes, enquanto que o valor esperado é $y(30) = 1/3$, sendo este um ponto de equilíbrio da equação a diferenças.
O que está ocorrendo nestas computações é um fenômeno conhecido como cancelamento catastrófico em máquina. No computador, o valor inicial $y(0) = 1/3$ é computado com um pequeno erro de arredondamento. Do que vimos acima, se $y(0) \neq 1/3$, então $y(n) \to \pm\infty$ quando $n \to \infty$.
No Python[8], podemos fazer as computações exatas na aritmética dos números racionais. Para tanto, podemos usar o seguinte código:

```
In : from sympy import Rational
...: y=Rational(1,3)
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
...:
...: y
Out: 1/3
```

[7]Veja a Observação 1.0.1.
[8]Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = ny(n), \quad n \geq 0. \tag{2.116}$$

Solução. Temos que y^* é ponto de equilíbrio da equações a diferenças, quando

$$y^* = ny^* \tag{2.117}$$
$$(1-n)y^* = 0 \tag{2.118}$$

para todo $n \geq 0$. Logo, $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio da equação a diferenças.

♢

ER 2.2.2. Verifique se $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável de

$$y(n+1) = \frac{1}{n+1}y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.119}$$

Solução. Primeiramente, confirmamos que $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio, pois

$$\frac{1}{n+1}y^* = 0 = y^*, \quad n \geq 0. \tag{2.120}$$

Por fim, a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}\right] y(0) \tag{2.121}$$
$$= \frac{1}{n!}y(0). \tag{2.122}$$

Daí, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}y(0) = 0 = y^*. \tag{2.123}$$

Logo, concluímos que $y^* = 0$ é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável da equação a diferenças dada.

♢

Exercícios

E 2.2.1. Calcule o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = -y(n) + 1 \tag{2.124}$$

E 2.2.2. O ponto de equilíbrio da equação a diferenças do Exercício 2.2.1 é um atrator global? Justifique sua resposta.

E 2.2.3. Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n) + \frac{1}{2}, \quad n \geq 2, \tag{2.125}$$

e diga se ele é um atrator global. Justifique sua resposta.

E 2.2.4. Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = 2y(n) + 1, \quad n \geq 2, \tag{2.126}$$

e diga se ele é assintoticamente globalmente estável. Justifique sua resposta.

E 2.2.5. Considere um financiamento de valor \$100 com taxa de juros 1% a.m. e amortizações fixas mensais de valor \$$a$. O valor devido $y(n+1)$ no $n+1$-ésimo mês pode ser modelado pela seguinte equações a diferenças

$$y(n+1) = 1{,}01y(n) - a, \quad n \geq 0, \tag{2.127}$$

com valor inicial $y(0) = 100$. Calcule o valor a mínimo a ser amortizado mensalmente de forma que o valor devido permaneça sempre constante.

2.2.1 Alguns aspectos sobre equações não lineares

O estudo de equações a diferenças não lineares é bastante amplo, podendo chegar ao estado da arte. Nesta seção, vamos abordar alguns conceitos fundamentais para a análise de equações de primeira ordem e não lineares, i.e. equações da forma

$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.128}$$

onde f é uma função não linear nas incógnitas $y(n+1)$ ou $y(n)$.

2.2.2 Solução

A variedade de formas que uma equação a diferenças não linear pode ter é enorme e não existem formas fechadas para a solução da grande maioria delas. No entanto, sempre pode-se buscar calcular a solução por iteração direta, i.e.

$$y(n_0) = \text{valor inicial}, \tag{2.129}$$
$$f\left(y(n+1), y(n); n\right) = 0,\ \ n = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots \tag{2.130}$$

Exemplo 2.2.4. Vamos calcular a solução da seguinte equação a diferenças não linear

$$y(n+1) = y^2(n), \quad n \geq 0. \tag{2.131}$$

A partir do valor inicial $y(0)$ e por iterações diretas, temos

$$\begin{aligned}
y(1) &= y^2(0), && (2.132)\\
y(2) &= [y(1)]^2 && (2.133)\\
&= \left[y^2(0)\right]^2 && (2.134)\\
&= y^{2^2}(0), && (2.135)\\
y(3) &= [y(2)]^2 && (2.136)\\
&= \left[y^{2^2}(0)\right]^2 && (2.137)\\
&= y^{2^3}(0) && (2.138)\\
&\vdots && (2.139)
\end{aligned}$$

Disso, podemos inferir que a solução de 2.131 é

$$y(n) = y^{2^n}(0). \tag{2.140}$$

2.2.3 Pontos de equilíbrio

Introduzimos pontos de equilíbrio na Seção 2.2 e, aqui, vamos estudá-los no contexto de equação a diferenças de primeira ordem e não lineares. Um dos primeiros aspectos a serem notados é que equação não lineares podem ter vários pontos de equilíbrio, ter somente um ou não ter.

Exemplo 2.2.5. (Ponto de equilíbrio) Vejamos os seguintes casos:

a) $y(n+1) = y(n)^2 + 1$, $n \geq 0$

Se y^* é ponto de equilíbrio, então

$$y^* = (y^*)^2 + 1 \tag{2.141}$$
$$(y^*)^2 - y^* + 1 = 0, \tag{2.142}$$

a qual não admite solução real. Ou seja, a equação a diferenças deste item não tem ponto de equilíbrio.

b) $y(n+1) = y(n)^2$, $n \geq 0$

$$y^* = (y^*)^2 \tag{2.143}$$
$$(y^*)^2 - y^* = 0 \tag{2.144}$$
$$y^*(y^* - 1) = 0, \tag{2.145}$$

Neste caso, a equação a diferenças tem dois pontos de equilíbrio, a saber, $y_1^* = 0$ e $y_2^* = 1$.

c) $[y(n+1) - 1] \cdot [y(n) - 1] = 0$, $n \geq 0$

$$(y^* - 1) \cdot (y^* - 1) = 0 \tag{2.146}$$
$$(y^* - 1)^2 = 0 \tag{2.147}$$
$$y^* = 1 \tag{2.148}$$

Concluímos que esta equação tem $y^* = 1$ como seu único ponto de equilíbrio.

d) $y(n+1) = y(n)\cos(y(n))$, $n \geq 0$

$$y^* = y^* \cos(y^*) \tag{2.149}$$
$$[\cos(y^*) - 1]\, y^* = 0 \tag{2.150}$$
$$\cos(y^*) = 1 \tag{2.151}$$

Disso, temos que $y^* = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são pontos de equilíbrio da equação a diferenças dada.

Equações a diferenças não lineares podem ter pontos de equilíbrio eventuais. Mais especificamente, uma equação a diferenças

$$f(y(n+1),y(n);n) = 0, \quad n \geq n_0, \tag{2.152}$$

tem y^* como **ponto de equilíbrio eventual** quando existe $n_1 > n_0$ tal que

$$y(n) = y^*, \quad n \geq n_1. \tag{2.153}$$

Exemplo 2.2.6. (Ponto de equilíbrio eventual) A equação a diferenças

$$y(n+1) = |2y(n) - 2|, \quad n \geq 0, \tag{2.154}$$
$$y(0) = 1, \tag{2.155}$$

tem $y^* = 2$ como ponto de equilíbrio eventual. De fato, por iterações diretas temos

$$y(1) = |2y(0) - 2| \tag{2.156}$$
$$= |2 \cdot 1 - 2| = 0 \tag{2.157}$$
$$y(2) = |2y(1) - 2| \tag{2.158}$$
$$= |2 \cdot 0 - 2| = 2 \tag{2.159}$$
$$y(3) = |2y(2) - 2| \tag{2.160}$$
$$= |2 \cdot 2 - 2| = 2 \tag{2.161}$$
$$\vdots \tag{2.162}$$
$$y(n) = 2, \quad n \geq 2. \tag{2.163}$$

Um ponto de equilíbrio y^* de (2.152) é dito ser **estável** quando, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|y(0) - y^*| < \delta \Rightarrow |y(n) - y^*| < \epsilon, \tag{2.164}$$

para todo $n > 0$. Em outras palavras, para todo n, a solução $y(n)$ está arbitráriamente próxima de y^* para toda escolha de valor inicial $y(0) \neq y^*$ suficientemente próximo de y^*. Quando este não é o caso, y^* é dito ser ponto de equilíbrio **instável**.

Exemplo 2.2.7. Vamos estudar os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = \left(y^2(n) - 1\right)^2 + 1, \quad n \geq 0. \tag{2.165}$$

Vamos calcular os pontos de equilíbrio.

$$y^* = \left[(y^*)^2 - 1\right]^2 + 1 \tag{2.166}$$

$$y^* = (y^*)^2 - 2y^* + 2 \tag{2.167}$$

$$(y^*)^2 - 3y^* + 2 = 0 \tag{2.168}$$

$$y_1^* = 1, \quad y_2^* = 2 \tag{2.169}$$

Tomamos o ponto de equilíbrio $y^* = 1$. Seja $\epsilon > 0$ e escolhemos $0 < \delta < 1$ tal que $\delta < \epsilon$. Então, para qualquer valor inicial

$$y(0) = 1 \pm \delta \tag{2.170}$$

temos

$$y(1) = (y(0) - 1)^2 + 1 \tag{2.171}$$

$$= \delta^2 + 1 < 1 + \epsilon \tag{2.172}$$

Em construção ...

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

E 1.1.2. $y(n+1) = 3y(n)$.

E 1.1.3. Sequência de Fibonacci

E 2.1.1. $y(n) = 3^n y(0)$

E 2.1.2. $y(n) = -\frac{1}{3^n}$

E 2.1.3. $y(n+1) = 1{,}01 \cdot y(n)$, $y(0) = 100$; $y(n) = 100 \cdot 1{,}01^n$; $y(36) \approx 143{,}08$

E 2.1.4. $y(n) = \frac{1}{2}(3^n + 3)$

E 2.1.5. $y(n) = n!$

E 2.1.6. $y(n) = 2^n \left(\frac{n}{2} + 2\right)$

E 2.1.7. $y(n+1) = 1{,}01 \cdot y(n) - 1$, $y(0) = 100$; $y(n) = 100$;

E 2.1.8. $y(n) = \left(y(0) - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$

E 2.2.1. 1/2

E 2.2.2. não

E 2.2.3. $y^* = 1$; atrator global

E 2.2.4. $y^* = -1$; não é assintoticamente globalmente estável

E 2.2.5. $a = 1$

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, 3. edition, 2005.