

Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

20 de março de 2019

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
1 Vetores	1
1.1 Segmentos orientados	1
1.1.1 Exercícios	5
1.2 Vetores	5
1.2.1 Adição de vetores	6
1.2.2 Vetor oposto	7
1.2.3 Subtração de vetores	7
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar	7
1.2.5 Propriedades das operações com vetores	8
2 Bases e coordenadas	11
2.1 Dependência linear	11
2.1.1 Combinação linear	11
2.1.2 Dependência linear	11
2.1.3 Observações	12
Respostas dos Exercícios	16
Referências Bibliográficas	17
Índice Remissivo	18

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r . O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB .

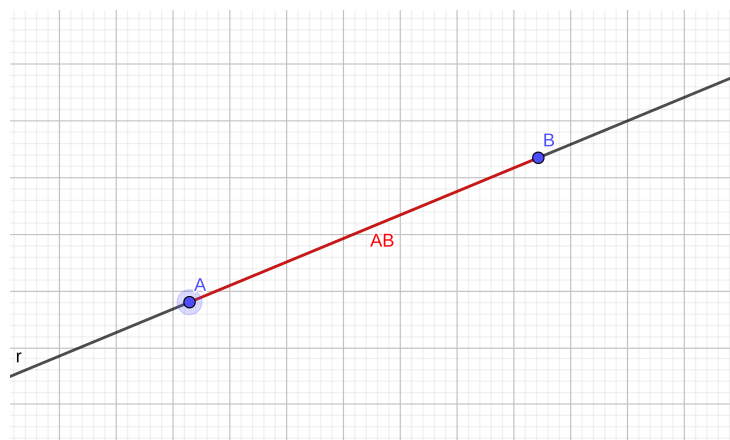


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB .

Associado a um segmento AB , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B . A distância entre os pontos A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.

A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B .

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

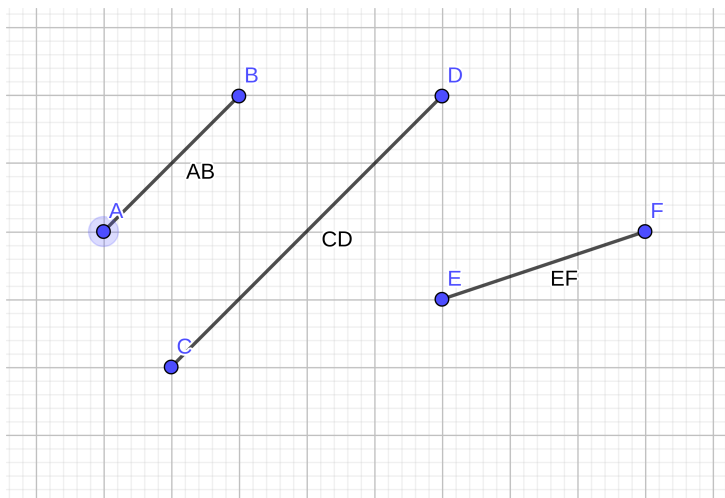


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B , sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

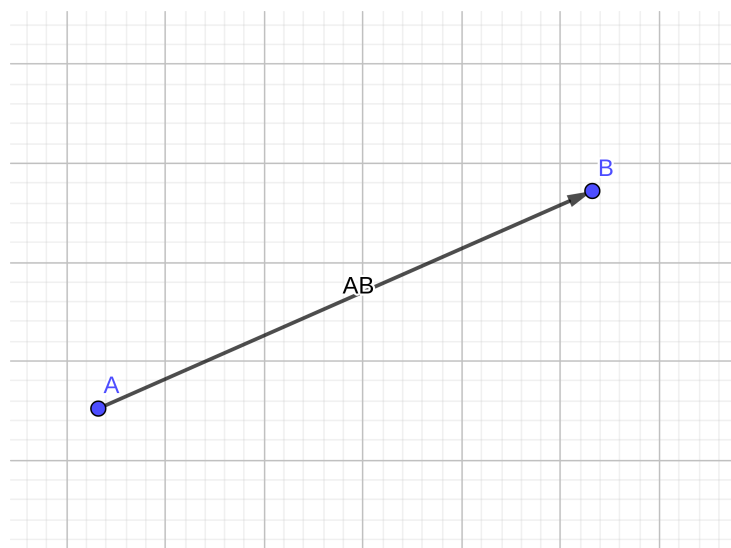


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB .

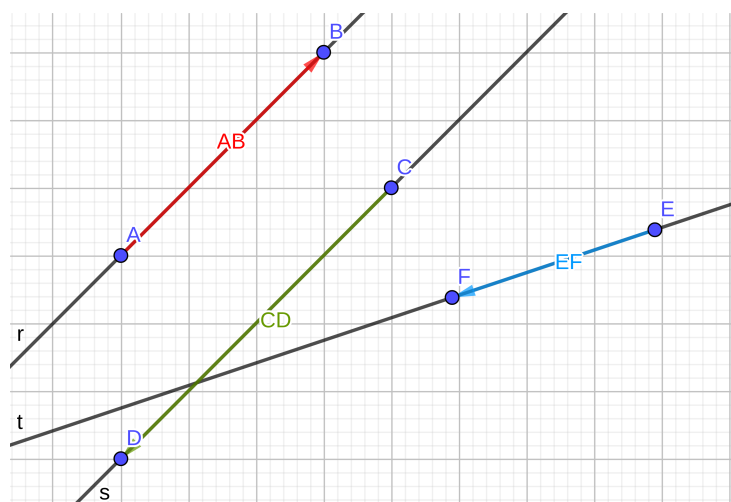


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

??). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

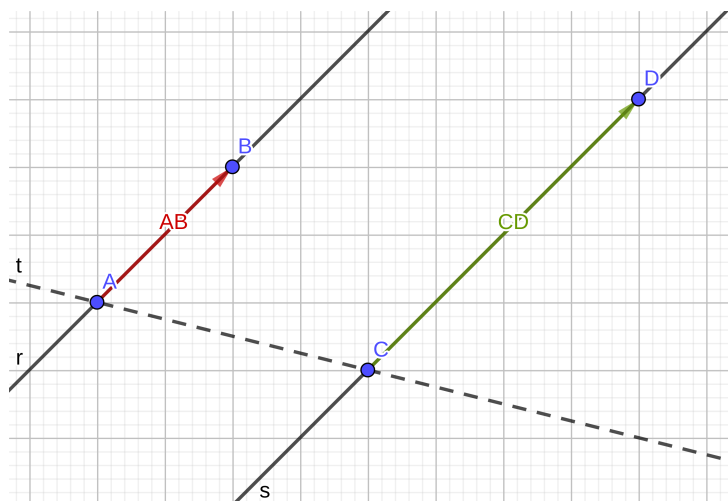


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

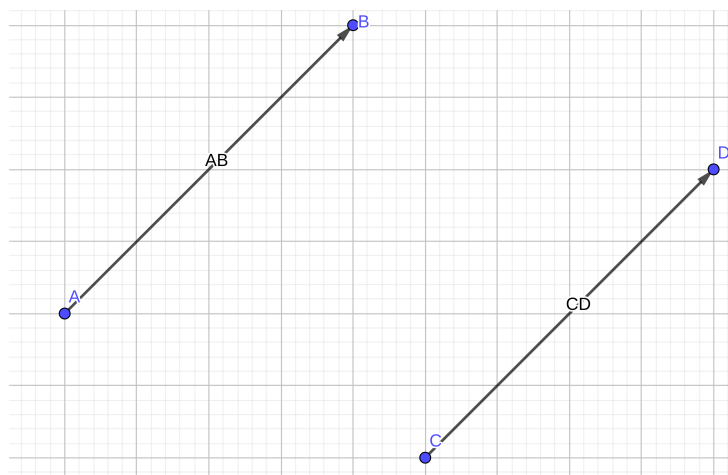


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

1.1.1 Exercícios

E 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB , chama-se **vetor** AB e denota-se \overrightarrow{AB} , qualquer segmento orientado equipolente a AB . Cada segmento orientado equipolente a AB é um representado de \overrightarrow{AB} . A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor \overrightarrow{AB} .

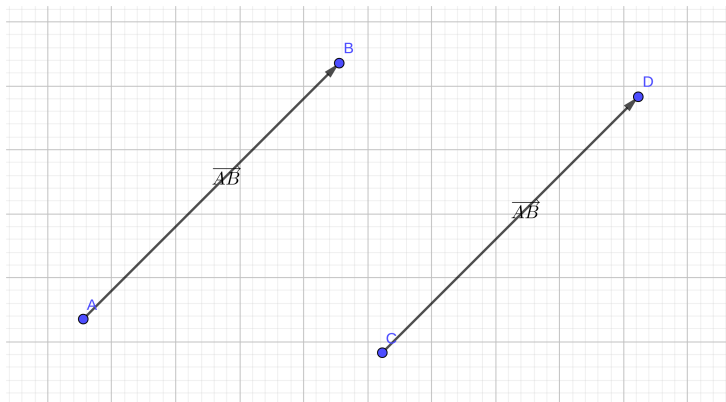


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor \overrightarrow{AB} é o valor de seu comprimento e é denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

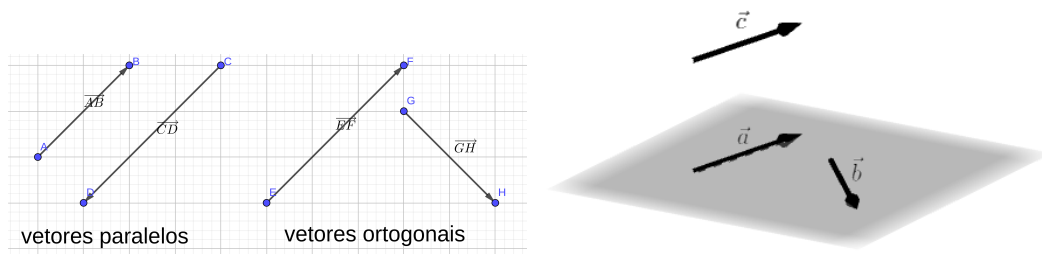


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . Sejam, ainda, uma representação \overrightarrow{AB} qualquer de u e a representação \overrightarrow{BC} do vetor \vec{v} . Então, define-se o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o vetor dado por \overrightarrow{AC} . Veja a Figura 1.9.

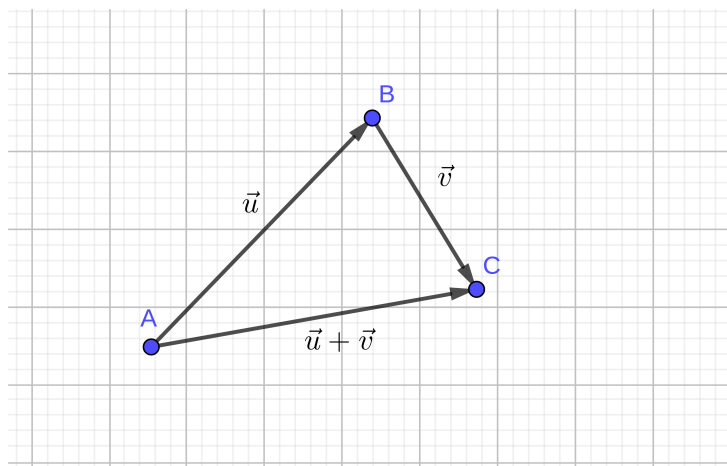


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor** \vec{v} é dito ser **oposto** a um dado vetor \vec{u} , quando quaisquer representações de \vec{u} e \vec{v} são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a \vec{u} . Veja a Figura 1.10.

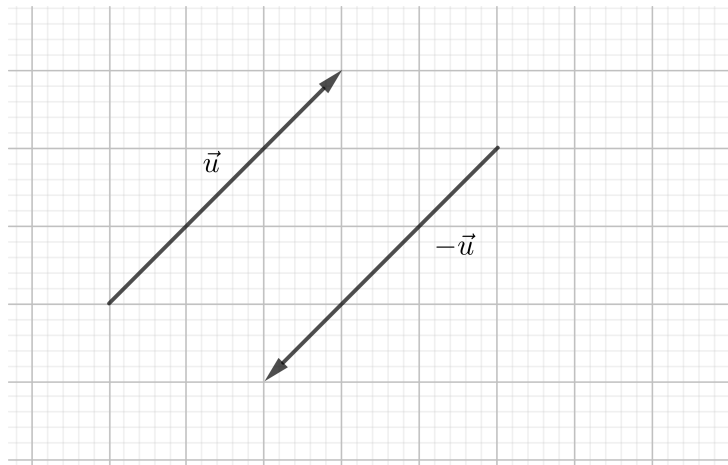


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . A subtração de \vec{u} com \vec{v} é denotada por $\vec{u} - \vec{v}$ e é definida pela adição de \vec{u} com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor \vec{u} é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de \vec{u} com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.1. • Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.

- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

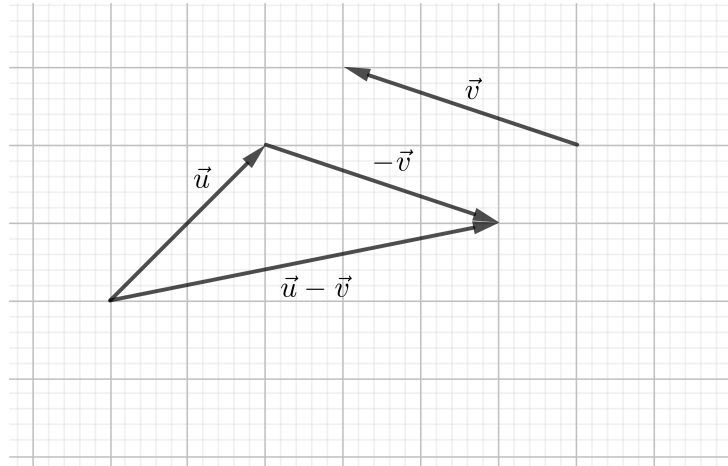


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de \vec{u} com \vec{v} , i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

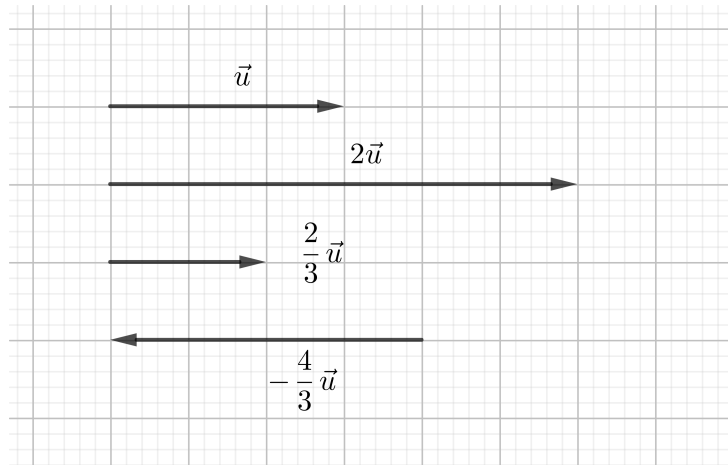


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

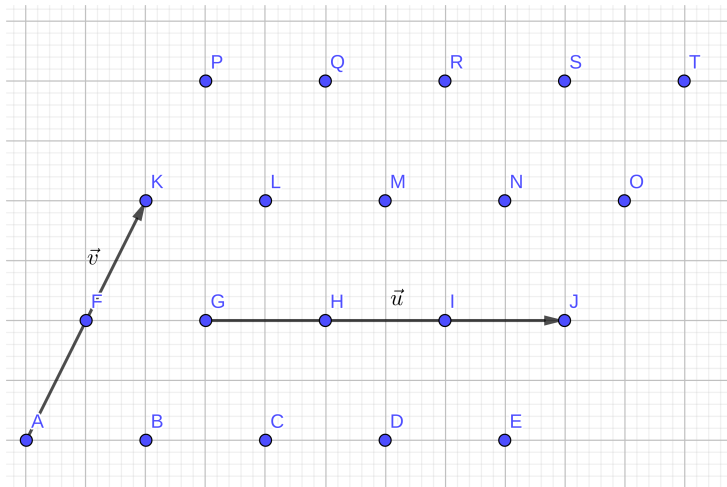
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad (1.1)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.2)$$

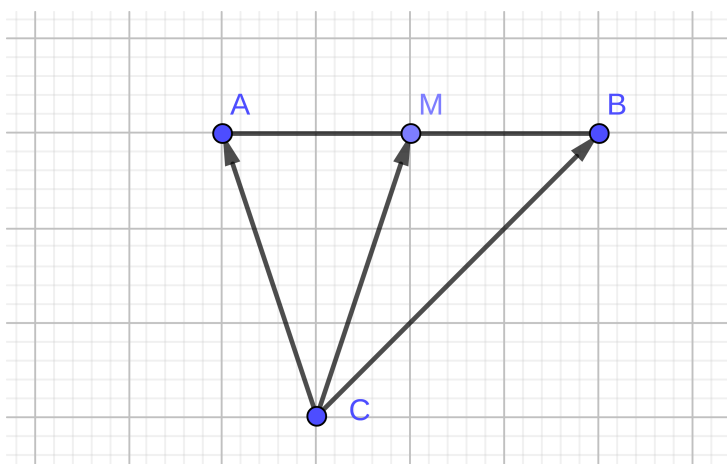
- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios

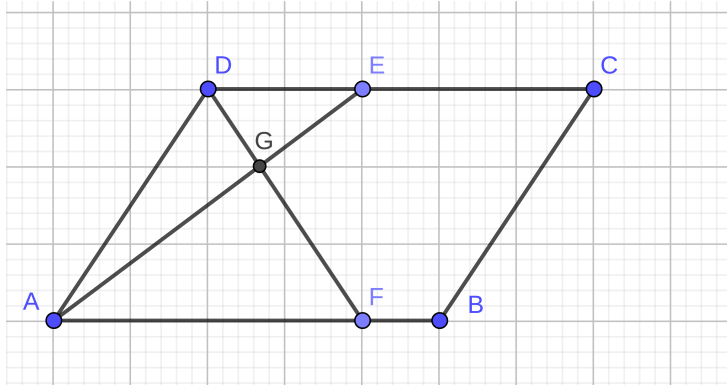
E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u} = \overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores \overrightarrow{RS} , \overrightarrow{NI} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{NQ} , \overrightarrow{AT} e \overrightarrow{PE} em função de \vec{u} e \vec{v} .



E 1.2.2. Sejam \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CM} e \overrightarrow{CB} os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



E 1.2.3. Sejam A , B , C , D , E e G os pontos dados na figura abaixo. Escreva o vetor \vec{DG} em função dos vetores \vec{AB} e \vec{AD} .



Capítulo 2

Bases e coordenadas

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, \dots, c_n , com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n \quad (2.1)$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que \vec{u} é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor \vec{u} .

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores \vec{v}, \vec{w} e \vec{z} . Então, temos:

- $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .
- $\vec{u}_2 = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .
- $\vec{u}_3 = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{u}, \vec{w} e \vec{z} .
- $\vec{u}_4 = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor \vec{z} .

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (abreviação, l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo ??), temos:

- \vec{u}_1 e \vec{u}_2 dependem linearmente dos vetores \vec{u} e \vec{z} .
- \vec{u}_3 depende linearmente dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{z} .
- Os vetores \vec{u}_4 e \vec{z} são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (abreviação, l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

- um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta \vec{u}; \quad (2.2)$$

- \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção;
- \vec{u} e \vec{v} são paralelos.

Observação 2.1.1. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor \vec{u} . De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \quad (2.3)$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor \vec{u} .

Observação 2.1.2. Dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.4)$$

De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}, \quad (2.5)$$

i.e. o vetor \vec{u} é combinação linear do vetor \vec{v} e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{u} \quad (2.6)$$

e, então, teríamos \vec{u} e \vec{v} l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \quad (2.7)$$

Afirmamos que se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d., então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores \vec{v} e \vec{w} . Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Por fim, observemos que se $\alpha, \beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de \vec{v} e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de \vec{w} . Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π . Sejam \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A , B e C pertencem a π , assim como o segmento AC . Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

Reciprocamente, se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então \vec{u} pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{w}

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.8)$$

Neste caso, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.9)$$

E, então, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Agora, suponhamos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π . Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC , respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B . Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B . Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{BE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{BD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que \vec{v} é combinação linear de \vec{u} e \vec{w} , i.e. \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..

Observação 2.1.3. Três vetores dados \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \quad (2.10)$$

De fator, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \quad (2.11)$$

e teríamos \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} . Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores \vec{a} , \vec{b} e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

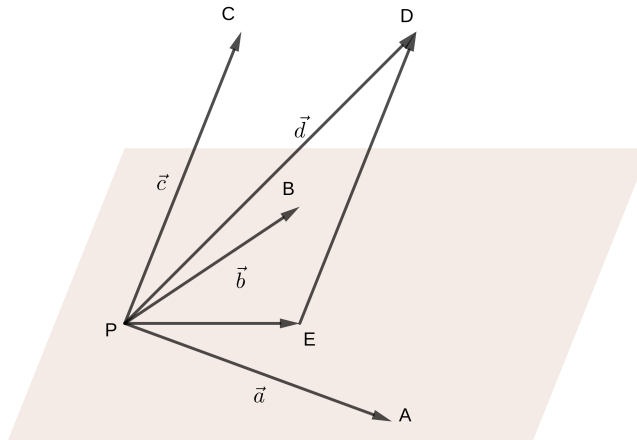


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a \overrightarrow{PC} que passa pelo ponto D . Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π . Vejamos a Figura ???. Observamos

que o vetor \overrightarrow{PE} é coplanar aos vetores \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} e, portanto, existem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}. \quad (2.12)$$

Além disso, como \overrightarrow{ED} tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma \overrightarrow{PC} \quad (2.13)$$

para algum número real γ . Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \end{aligned}$$

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo

- ângulo
 - entre vetores, [5](#)
- combinação linear, [11](#)
- comprimento, [1](#)
- distância, [1](#)
- equipolentes, [4](#)
- extremidade, [2](#)
- linearmente
 - dependente, [11](#)
 - independentes, [12](#)
- módulo, [5](#)
- mesmo sentido, [3](#)
- norma, [5](#)
- origem, [2](#)
- segmento, [1](#)
- segmento nulo, [2](#)
- segmento orientado, [2](#)
- vetor
 - oposto, [7](#)
- vetores
 - coplanares, [5](#)
 - não coplanares, [5](#)
 - ortogonais, [5](#)
 - paralelos, [5](#)