

Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

7 de outubro de 2020

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica no espaço euclidiano tridimensional. Mais especificamente, discute-se sobre sistemas de coordenadas, estudo de retas, planos e cônicas.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
1 Sistema de coordenadas	1
1.1 Sistema de coordenadas no espaço	1
2 Estudo de retas	8
2.1 Sistema de coordenadas no espaço	8
2.2 Equações da reta	11
2.2.1 Equação vetorial de uma reta	11
2.2.2 Equações paramétricas de uma reta	13
2.2.3 Equações da reta na forma simétrica	14
2.2.4 Exercícios resolvidos	15
3 Estudo de planos	19
3.1 Equações do plano	19
3.1.1 Equação vetorial do plano	19
3.1.2 Equações paramétricas do plano	20
3.1.3 Equação geral do plano	22
3.1.4 Exercícios resolvidos	22
4 Cônicas	24
4.1 Elipse	24
4.1.1 Equação reduzida da elipse	26

4.2	Hipérbole	27
4.2.1	Equação reduzida da hipérbole	28
4.3	Parábola	30
4.3.1	Equação reduzida de uma parábola	31
Respostas dos Exercícios		32
Referências Bibliográficas		33

Capítulo 1

Sistema de coordenadas

A geometria analítica é uma área interdisciplinar da matemática que faz o estudo de objetos da geometria através de estruturas algébricas (equações e inequações algébricas). Para tanto, o primeiro passo é a construção (definição) de um sistema de coordenadas, no qual os objetos geométricos serão referenciados.

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

► [Vídeo disponível!](#)

Um sistema de coordenadas no espaço (euclidiano) é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x, y, z) . Veja a figura abaixo.

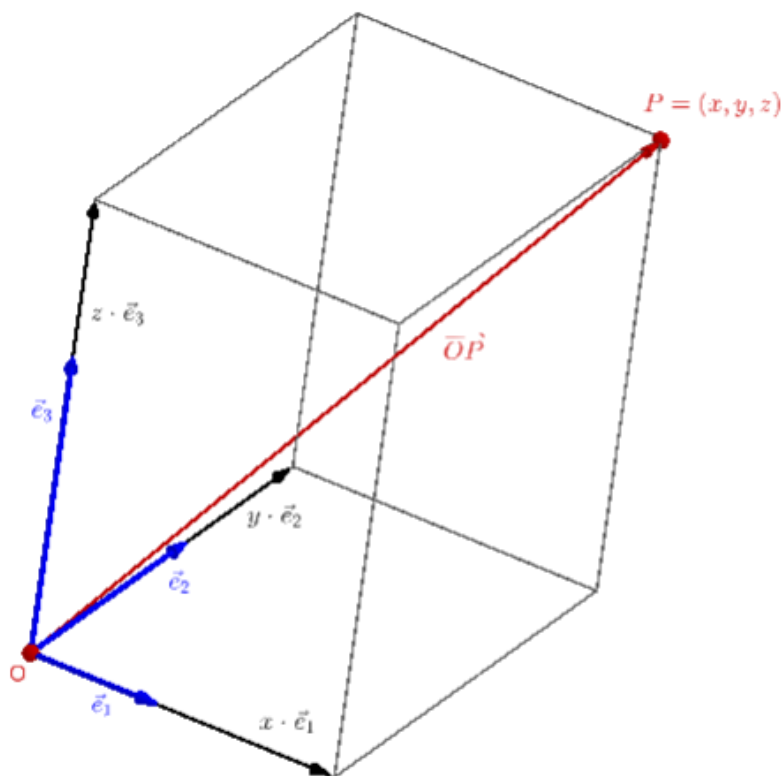


Figura 1.1: Ilustração de um sistema de coordenadas no espaço.

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenadas) e tem coordenadas $O = (0,0,0)$. Dado um ponto $P = (x,y,z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contêm O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

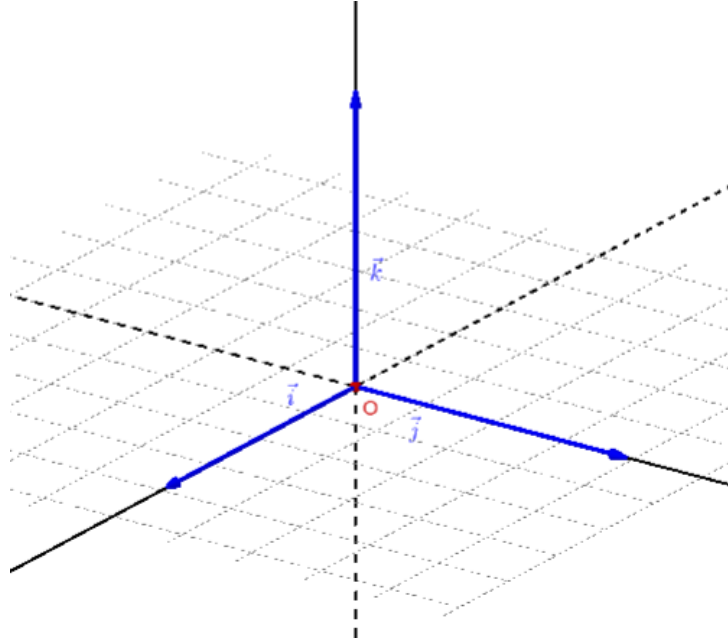


Figura 1.2: Ilustração de um sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com um **sistema de coordenadas ortonormal**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 2.1.

Observação 1.1.1. (Relação entre pontos e vetores)(► [Vídeo disponível!](#))
Seja dado um vetor \overrightarrow{AB} . Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, temos que as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (1.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (1.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (1.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (1.4)$$

Em uma linguagem menos formal, podemos dizer que as coordenadas de \overrightarrow{AB} é a resultante das coordenadas do ponto final menos as coordenadas do ponto de partida. Veja a figura abaixo.



Figura 1.3: Relação entre as coordenadas dos pontos de partida e de chegada de um vetor.

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o vetor \overrightarrow{AB} tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (1.5)$$

Observação 1.1.2. (Ponto médio de um segmento)(► [Vídeo disponível!](#)) Dados os pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M, y_M, z_M)$ do segmento AB . Veja a figura abaixo.

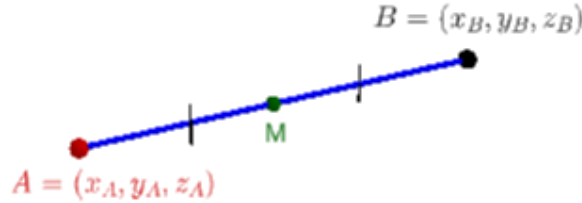


Figura 1.4: Coordenadas do ponto médio de um segmento.

Do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, temos

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (1.6)$$

Logo, segue que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad (1.7)$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \quad (1.8)$$

$$z_M - z_A = z_B - z_M \quad (1.9)$$

ou, equivalentemente,

$$2x_M = x_A + x_B \quad (1.10)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (1.11)$$

$$2z_M = z_A + z_B \quad (1.12)$$

Portanto, concluímos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (1.13)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (1.14)$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \quad (1.15)$$

Logo, temos

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) \quad (1.16)$$

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) \quad (1.17)$$

$$= (1, 0, 1). \quad (1.18)$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e $C = (x, 2, 2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x .

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de \overrightarrow{AC} são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (1.19)$$

e as coordenadas de \overrightarrow{BC} são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (1.20)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (1.25)$$

◇

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e M o ponto médio do intervalo AB . Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (1.26)$$

Agora, denotando $P = (x_P, y_P, z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left(0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left(1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (1.28)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (1.29)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (1.30)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (1.31)$$

Logo, $P = (-1/2, 1, 3/4)$.

◇

Exercícios

E 1.1.1. Sejam dados os pontos $A = (1, -1, 2)$ e $B = (0, 1, -2)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

E 1.1.2. Sejam dados os pontos $E = (-1, 2, 0)$ e $F = (2, -1, 1)$. Calcule o ponto médio do segmento EF .

E 1.1.3. Sejam dados os pontos $A = (-1, 1, -1)$ e $M = (0, 1, 3)$. Determine o ponto B tal que M seja o ponto médio do segmento AB .

E 1.1.4. Sejam dados os pontos $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (x, 2, 1)$. Determine x tal que ABC forme um triângulo retângulo com hipotenusa BC .

E 1.1.5. Determine a distância entre os pontos $C = (2, -1, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$.

Capítulo 2

Estudo de retas

Neste capítulo, vamos estudar retas no espaço (euclidiano) tridimensional. Vamos começar fixando um sistema de coordenadas, no qual iremos desenvolver equações para retas.

2.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x, y, z) .

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenados) e tem coordenadas $(0, 0, 0)$. Dado um ponto $P = (x, y, z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

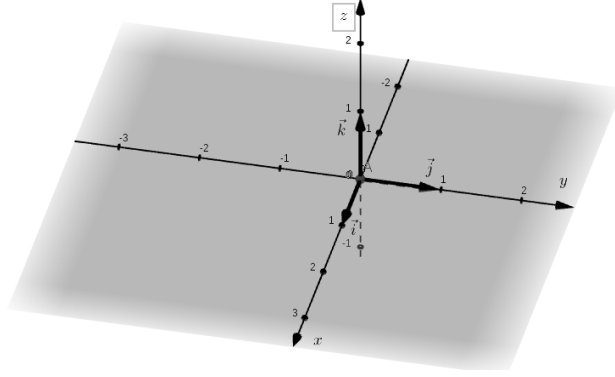


Figura 2.1: Sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com **sistemas de coordenadas ortogonais**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 2.1.

Observação 2.1.1. (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor \overrightarrow{AB} . Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, temos que as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (2.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (2.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (2.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (2.4)$$

Exemplo 2.1.1. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o vetor \overrightarrow{AB} tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (2.5)$$

Observação 2.1.2. (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M, y_M, z_M)$ do segmento AB , do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Portanto

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (2.6)$$

donde

$$2x_M = x_A + x_B \quad (2.7)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (2.8)$$

$$2z_M = z_A + z_B. \quad (2.9)$$

Logo, temos $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Exemplo 2.1.2. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (1, 0, 1). \quad (2.10)$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e $C = (x, 2, 2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x .

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de \overrightarrow{AC} são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (2.11)$$

e as coordenadas de \overrightarrow{BC} são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (2.12)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (2.17)$$

◇

ER 2.1.2. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e M o ponto médio do intervalo AB . Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Agora, denotando $P = (x_P, y_P, z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left(0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left(1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (2.20)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (2.21)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (2.22)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (2.23)$$

Logo, $P = (-1/2, 1, 3/4)$.

◇

Exercícios

Em construção ...

2.2 Equações da reta

2.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, \vec{v} um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura 2.2). Assim sendo, P é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.24)$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r .

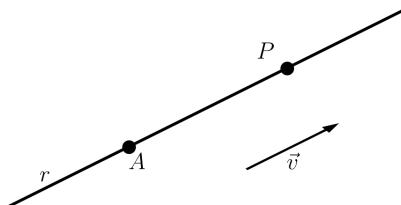


Figura 2.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor \vec{v} escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 2.2.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2, 1, 3)$ (veja a Figura 2.3). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3, 2, 5) \quad (2.25)$$

é um vetor diretor de r . Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.26)$$

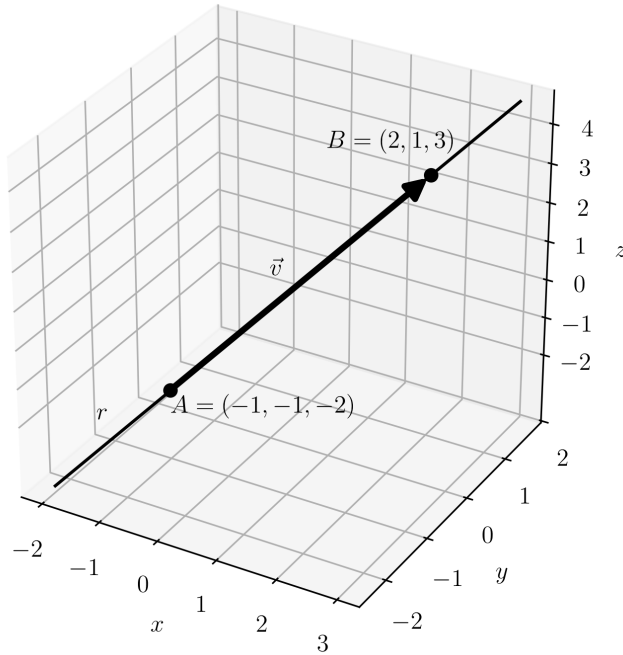


Figura 2.3: Esboço da reta discutida no Exemplo 2.2.1.

2.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Assim, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.27)$$

Equivalentemente,

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(v_1, v_2, v_3). \quad (2.28)$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \quad (2.29)$$

$$y - y_A = \lambda v_2, \quad (2.30)$$

$$z - z_A = \lambda v_3, \quad (2.31)$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \quad (2.32)$$

$$y = y_A + \lambda v_2, \quad (2.33)$$

$$z = z_A + \lambda v_3, \quad (2.34)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r .

Exemplo 2.2.2. A reta r discutida no Exemplo 2.2.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (2.35)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (2.36)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (2.37)$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x, y, z) = (-1, -1, -2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x, y, z) = (-1 + 3, -1 + 2, -2 + 5) = (2, 1, 3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B .

Com o Sympy, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código¹:

```
var('lbda', real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda, -1+2*lbda, -2+5*lbda, (lbda, -1, 2))
```

2.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1 \lambda, \quad (2.38)$$

$$y = y_A + v_2 \lambda, \quad (2.39)$$

$$z = z_A + v_3 \lambda. \quad (2.40)$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \quad (2.41)$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

¹Veja a Observação ??.

Exemplo 2.2.3. No Exemplo 2.2.2, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (2.42)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (2.43)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (2.44)$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}. \quad (2.45)$$

2.2.4 Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3, 2, 5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = (x, 0, 1/2)$ seja um ponto de r .

Solução. $P = (x, 0, 1/2)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (2.46)$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2) \right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (2.47)$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x + 1, 1, \frac{5}{2} \right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (2.48)$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x + 1 = \lambda 3 \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{2} \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

◇

ER 2.2.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x = 1 - \lambda, \quad (2.52)$$

$$y = \lambda, \quad (2.53)$$

$$z = -3. \quad (2.54)$$

Determine uma equação vetorial de r .

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes de λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r , temos que $A = (1, 0, -3) \in r$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}, \quad (2.55)$$

com $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

◇

ER 2.2.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A = (2, -3, 1)$ e $B = (-1, 1, 0)$, determine o valor de t tal que

$$x = 2 + t\lambda, \quad (2.56)$$

$$y = -2 + 4\lambda, \quad (2.57)$$

$$z = 1 - \lambda, \quad (2.58)$$

sejam equação paramétricas de r .

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r , é necessário que $\vec{v} = (t, 4, -1)$ seja um vetor diretor de r . Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(t, 4, -1) = \beta(-1 - 2, 1 - (-3), 0 - 1) = \beta(-3, 4, -1). \quad (2.59)$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \Rightarrow t = -3. \quad (2.60)$$



ER 2.2.4. Seja r uma reta, cujas equações na forma simétrica são

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \quad (2.61)$$

Determine equações paramétricas desta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \quad (2.62)$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \quad (2.63)$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \quad (2.64)$$

Daí, isolando x , y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \quad (2.65)$$

$$y = 2 + 3\lambda, \quad (2.66)$$

$$z = 1 - 2\lambda. \quad (2.67)$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1, 2, 1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1, 5, -1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 2.4.

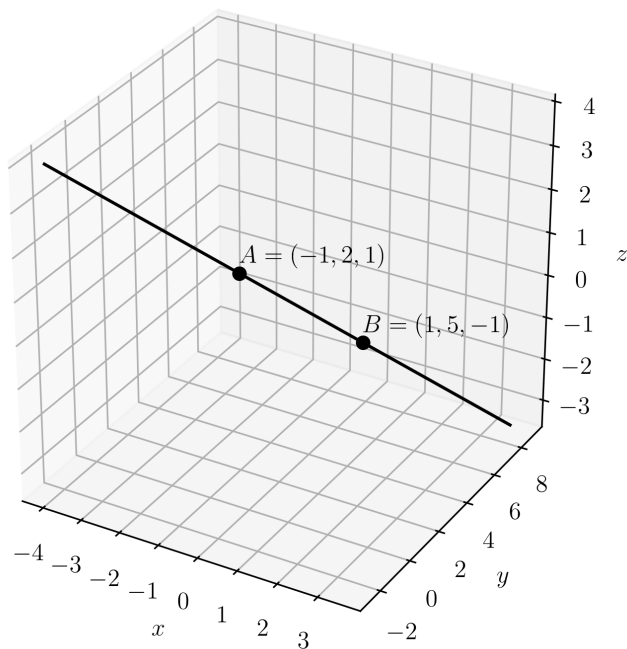


Figura 2.4: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido [2.2.4](#).

◇

Capítulo 3

Estudo de planos

Observação 3.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos Python têm o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

3.1 Equações do plano

Um plano π fica unicamente determinado por um ponto $A \in \pi$ e dois vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$ ¹.

3.1.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano π determinado pelo ponto A e os vetores \vec{u} e \vec{v} . Então, um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, \overrightarrow{AP} é coplanar a \vec{u} e \vec{v} , i.e. \overrightarrow{AP} , \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes. Ou seja,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

esta última é chamada de **equação vetorial do plano**.

Exemplo 3.1.1. Consideremos o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e pelos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (Veja a Figura 3.1. Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.2)$$

¹No sentido que \vec{u} e \vec{v} têm representantes no plano π .

para $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

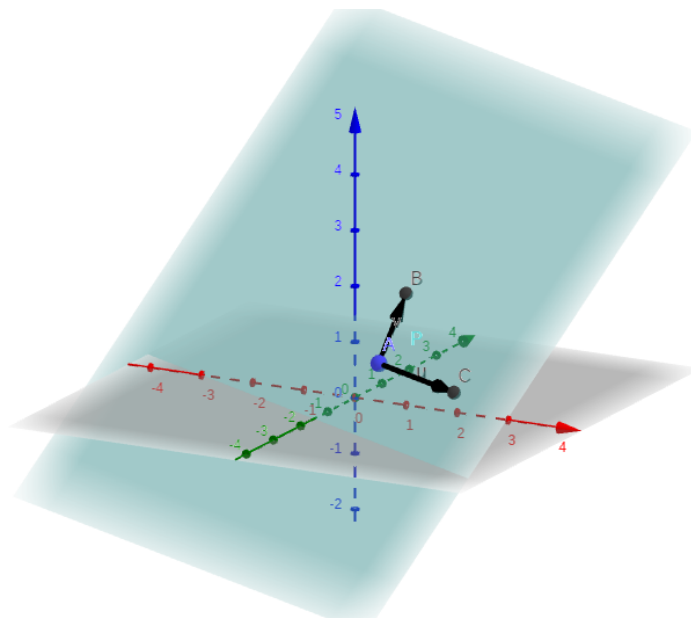


Figura 3.1: Esboço do plano π discutido no Exemplo 3.1.1.

Tomando, por exemplo, $\lambda = -1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \quad (3.3)$$

$$= -(2, -1, 0) + (0, 1, 1) \quad (3.4)$$

$$= (-2, 2, 1). \quad (3.5)$$

Observando que as coordenadas do ponto P são iguais as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} , temos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \quad (3.6)$$

$$= (1, -1, 1) + (-2, 2, 1) \quad (3.7)$$

$$= (-1, 1, 2). \quad (3.8)$$

Ou seja, $P = (-1, 1, 2) \in \pi$.

3.1.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano π com $A = (x_A, y_A, z_A) \in \pi$ e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \pi$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \pi$ linearmente independentes. Então, todo o ponto $P =$

(x, y, z) do plano π satisfaz

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.9)$$

para dados parâmetros $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad (3.10)$$

$$= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). \quad (3.11)$$

Portanto, temos

$$x - x_A = \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (3.12)$$

$$y - y_A = \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (3.13)$$

$$z - z_A = \lambda u_3 + \beta v_3. \quad (3.14)$$

Ou, equivalentemente,

$$x = x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (3.15)$$

$$y = y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (3.16)$$

$$z = z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \quad (3.17)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 3.1.2. No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Do que vimos acima, temos que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad (3.18)$$

$$y = -1 - \lambda + \beta, \quad (3.19)$$

$$z = 1 + \beta, \quad (3.20)$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o Sympy. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                           (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                           xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

3.1.3 Equação geral do plano

Seja π o plano determinado pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e pelos vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Sabemos que $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, \vec{AP} , \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto $[\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Logo,

$$0 = [\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (3.21)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

$$= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \quad (3.23)$$

$$- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \quad (3.24)$$

$$+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \quad (3.25)$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (3.26)$$

com a, b, c, d não todos nulos ou, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Esta última é chamada **equação geral do plano**.

Exemplo 3.1.3. No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos $P = (x, y, z)$ e calculamos

$$0 = [\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (3.27)$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

$$= -x - 2y + 2z - 3. \quad (3.29)$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \quad (3.30)$$

3.1.4 Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Seja π um plano tal que $A = (2, 0, -1) \in \pi$, $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \pi$. Determine uma equação vetorial para π .

Solução. Para obtermos uma equação vetorial do plano π , precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em π . Do enunciado, temos o ponto $A = (2, 0, -1) \in \pi$ e o vetor \vec{u} . Portanto, precisamos encontrar um vetor $\vec{v} \in \pi$ tal que \vec{u} e \vec{v} sejam l.i.. Por sorte, temos $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e, portanto $\overrightarrow{AP} \in \pi$. Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \quad (3.31)$$

$$= (-2, 1, 0), \quad (3.32)$$

pois \vec{v} e \vec{u} são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano π é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (3.33)$$

$$= \lambda(1, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0), \quad (3.34)$$

com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

◇

ER 3.1.2. Seja π o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \quad (3.35)$$

$$y = \beta, \quad (3.36)$$

$$z = 1 - \lambda + \beta. \quad (3.37)$$

Determine o valor de z_P de forma que $P = (-1, 2, z_P) \in \pi$.

Solução. Para que $P = (-1, 2, z_P)$ pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \quad (3.38)$$

$$2 = \beta, \quad (3.39)$$

$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \quad (3.40)$$

Das duas primeiras equações, obtemos $\lambda = 0$ e $\beta = 2$. Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \quad (3.41)$$

◇

Em construção ...

Capítulo 4

Cônicas

4.1 Elipse

Sejam F_1, F_2 pontos sobre um plano π , c a distância entre c_1 e c_2 e $a > c$. Chama-se **elipse** de **focos** F_1 e F_2 ao conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (4.1)$$

Veja a Figura [4.1](#).

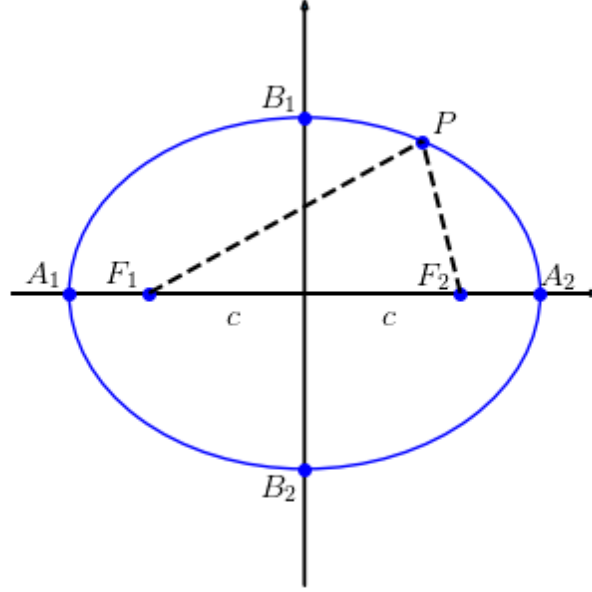


Figura 4.1: Ilustração de uma elipse de focos F_1 e F_2 .

Dada uma tal elipse, identificamos $2c = |F_1F_2|$ como a **distância focal**. Os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento A_1A_2 é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \quad (4.2)$$

O ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado de **centro** da elipse. Sejam B_1 e B_2 os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento A_1A_2 . Assim sendo, o segmento B_1B_2 é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \quad (4.3)$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4.4)$$

Notemos que $0 \leq e < 1$. Para $e = 0$, temos $c = 0$ e, portanto $F_1 = F_2$. Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em F_1 (ou F_2) e diâmetro $2a$. No que e tende a 1, a elipse tende ao segmento A_1A_2 .

Por fim, notemos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, $|OF_2| = c$, $|F_2B_1| = a$ e $|OB_1| = b$. Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (4.5)$$

4.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c \geq 0$, os focos de uma dada elipse (veja a Figura 4.1). Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (4.6)$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad (4.7)$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (4.8)$$

temos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad (4.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (4.10)$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2. \quad (4.11)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (4.12)$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \quad (4.13)$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \quad (4.14)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (4.15)$$

Como $a > c$, dividimos por $a^2 - c^2$ e depois por a^2 para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (4.16)$$

Por fim, da equação (4.5), temos $a^2 - c^2 = b^2$, o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.17)$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

4.2 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos sobre um plano π e. Sejam, também, c tal que $|F_1F_2| = 2c$ e $a < c$. O lugar geométrico dos pontos P tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \quad (4.18)$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura 4.2.

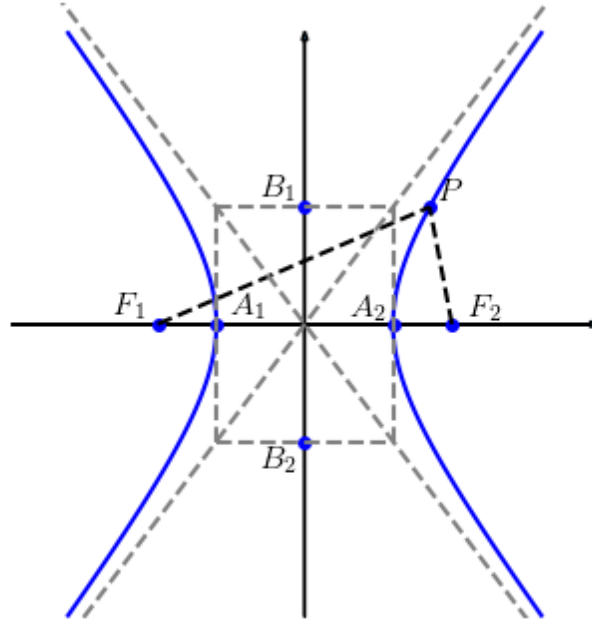


Figura 4.2: Ilustração de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da hipérbole e $2c = |F_1F_2|$ é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos A_1 e A_2 , sendo que o segmento A_1A_2 é chamado de **eixo real** (ou transversal) da hipérbole. O comprimento deste eixo é $|A_1A_2| = 2a$.

Sejam B_1 e B_2 pontos c distantes de A_1 e A_2 e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento B_1B_2 é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando $2b = |B_1B_2|$, temos do triângulo retângulo B_1OA_1 que

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (4.19)$$

4.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da

hipérbole. Desta forma, temos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Então, $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \quad (4.20)$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (4.22)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad (4.23)$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \quad (4.24)$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (4.25)$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (4.26)$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (4.27)$$

Lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (4.28)$$

Dividindo por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.29)$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Em construção ...

4.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta d e um ponto F não pertencente a d . Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos P do plano que são equidistantes de F e de d , i.e.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (4.30)$$

Veja a Figura 4.3.

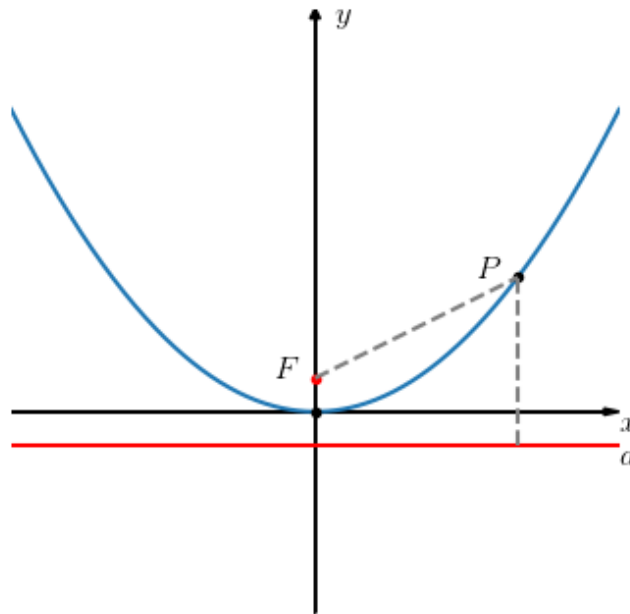


Figura 4.3: Ilustração de uma parábola.

O ponto F é chamado de **foco** da parábola. A reta d é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a d e que passa pelo ponto F é chamada de **eixo** da parábola. O ponto V de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

4.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja p tal que

$$F = (0, p/2). \quad (4.31)$$

Logo, a diretriz tem equação $y = -p/2$. Da definição de parábola, $P = (x, y)$ pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (4.32)$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \quad (4.33)$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \quad (4.34)$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \quad (4.35)$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

Observação 4.3.1. Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco $F = (p/2, 0)$, tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \quad (4.36)$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. $\vec{v} = (1, -2, 4)$

E 1.1.2. $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

E 1.1.3. $B = (1, 1, 7)$

E 1.1.4. $x = -5$

E 1.1.5. $|CD| = \sqrt{6}$

Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.