

# Pré-Cálculo

Pedro H A Konzen

26 de junho de 2022

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de matemática fundamental, pré-requisitos importante para uma disciplina de cálculo diferencial e integral. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i	
Licença	ii	
Prefácio	iii	
Sumário	v	
<b>1</b>	<b>Números reais</b>	<b>1</b>
1.1	Conjuntos numéricos . . . . .	1
1.1.1	Definição de conjunto . . . . .	1
1.1.2	Operações entre conjuntos . . . . .	5
1.2	Conjunto dos números racionais . . . . .	10
1.2.1	Números naturais . . . . .	10
1.2.2	Números inteiros . . . . .	13
1.2.3	Números racionais . . . . .	16
1.3	Conjunto dos números reais . . . . .	22
1.3.1	Existência de números irracionais . . . . .	22
1.3.2	Fecho dos números racionais . . . . .	24
1.3.3	Reta real . . . . .	26
1.3.4	Infinito . . . . .	27
1.3.5	Intervalos de números reais . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Equações e inequações</b>	<b>36</b>
2.1	Equações . . . . .	36
2.1.1	Solução de uma equação . . . . .	37
2.1.2	Equações lineares . . . . .	39
2.1.3	Equação quadrática . . . . .	41

2.1.4	Equações exponenciais . . . . .	43
2.2	Inequações . . . . .	47
2.2.1	Inequações de primeiro grau . . . . .	47
2.2.2	Produtos ou quocientes . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Funções</b>	<b>53</b>
3.1	Definição e Gráfico de Funções . . . . .	53
3.1.1	Definição . . . . .	53
3.1.2	Domínio e Imagem . . . . .	56
3.1.3	Gráfico . . . . .	58
3.1.4	Categorias de Funções . . . . .	61
3.2	Função Afim . . . . .	64
3.3	Função Potência . . . . .	71
3.4	Função Polinomial . . . . .	77
3.4.1	Função Quadrática . . . . .	78
3.5	Função Racional . . . . .	82
3.6	Funções Trigonométricas . . . . .	86
3.6.1	Seno e Cosseno . . . . .	86
3.6.2	Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante . . . . .	90
3.6.3	Identidades Trigonométricas . . . . .	93
3.7	Operações com Funções . . . . .	96
3.7.1	Soma , Diferença , Produto e Quociente . . . . .	96
3.7.2	Função Composta . . . . .	97
3.7.3	Translação, Contração, Dilatação e Reflexão de Gráficos . . . . .	97
3.7.4	Translação . . . . .	97
3.7.5	Dilatação e Contração . . . . .	100
3.7.6	Reflexão . . . . .	103
3.8	Propriedades de Funções . . . . .	107
3.8.1	Funções Crescentes ou Decrescentes . . . . .	107
3.8.2	Funções Pares ou Ímpares . . . . .	108
3.8.3	Funções Injetoras . . . . .	108
3.9	Funções exponenciais . . . . .	111
3.10	Funções logarítmicas . . . . .	115
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>120</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>125</b>

# Capítulo 1

## Números reais

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

### 1.1 Conjuntos numéricos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

#### 1.1.1 Definição de conjunto

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Um **conjunto**  $A$  é uma coleção de elementos ou objetos. Quando  $x$  é um **elemento** do conjunto  $A$ , denotamos

$$x \in A, \quad (1.1)$$

lê-se **x pertence ao conjunto A**. Já, a notação

$$x \notin A \quad (1.2)$$

é usada para denotar que  $x$  **não pertence ao A**.

Usualmente, um conjunto é descrito usando a notação

$$A = \{x : \text{condição para } x\}, \quad (1.3)$$

lê-se  $A$  é o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x$  satisfaz a condição.

**Exemplo 1.1.1.** O conjunto  $A$  formado por números positivos pode ser denotado por

$$A = \{x : x > 0\}. \quad (1.4)$$

Ainda, observamos que  $2 \in A$ ,  $\sqrt{2} \in A$ , mas  $-1 \notin A$ . Você saberia escolher mais elementos que pertençam ou que não pertençam a  $A$ ?

No [Python](#), podemos definir este conjunto com

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x')
3 A = ConditionSet(x, x>0)
```

o que nos fornece

```
1 In : 2 in A
2 Out: True
3 In : sqrt(2) in A
4 Out: True
5 In : -1 in A
6 Out: False
```

### Conjunto finito

**Conjunto finito** é todo aquele que contém um número finito de elementos. Tais conjuntos podem ser descritos de forma simplificada como segue

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad (1.5)$$

neste caso, temos um conjunto com  $n$  elementos. Analogamente, um conjunto que contenha infinitos elementos é chamado de **conjunto infinito**.

**Observação 1.1.1.**

$$A = \{-1, 3, 2\} \quad (1.6)$$

é o conjunto que contém apenas os números  $-1$ ,  $3$  e  $2$ .

No [Python](#), podemos definir tal conjunto com o seguinte código

```
1 from sympy import *
2 A = FiniteSet(-1, 3, 2)
```

Com este, obtemos

```
1      In : -1 in A
2      Out: True
3      In : sqrt(2) in A
4      Out: False
```

### Conjunto vazio

O conjunto que não contém elemento algum é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por  $\emptyset$  ou por  $\{\}$ .

**Exemplo 1.1.2.** O conjunto  $A$  de todos os números negativos e positivos é vazio, i.e.

$$A = \{x : x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset \quad (1.7)$$

No [Python](#), podemos definir o conjunto vazio com

```
1      >>> from sympy import *
2      >>> A = EmptySet
```

### Igualdade de conjuntos

Dois **conjuntos**  $A$  e  $B$  são **iguais**, quando todos os elementos  $A$  pertencem a  $B$  e vice-versa. Em notação matemática, escrevemos  $A = B$  quando

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B, \quad (1.8)$$

lê-se  $x \in A$  se, e somente se,  $x \in B$ .

**Exemplo 1.1.3.** a) São iguais os conjuntos

$$A = \{-1, 3, 2\} \quad (1.9)$$

$$B = \{3, 2, -1\}, \quad (1.10)$$

i.e.  $A = B$ .

No [Python](#), temos

```
1      from sympy import *
2      A = FiniteSet(-1, 3, 2)
3      B = FiniteSet(3, 2, -1)
```

Com este, obtemos



```

1      In : A == B
2      Out: True

```

b) São diferentes os conjuntos

$$C = \{-3, -2, -1, 0\} \quad (1.11)$$

$$D = \{-3, -1, 0, 2\}, \quad (1.12)$$

i.e.  $C \neq D$ .

No [Python](#), temos

```

1      from sympy import *
2      C = FiniteSet(-3, -2, -1, 0)
3      D = FiniteSet(-33, -1, 0, 2)

```

Com este, obtemos

```

1      In : C != D
2      Out: True

```

### Subconjuntos

Dizemos que  $A$  é subconjunto de  $B$ , quando todos os elementos de  $A$  pertencem a  $B$ . Neste caso, denotamos

$$A \subset B. \quad (1.13)$$

Mais precisamente,  $A \subset B$  quando

$$x \in A \Rightarrow x \in B, \quad (1.14)$$

lê-se  $x \in A$  implica  $x \in B$ . O mesmo pode ser denotado por  $B \supset A$ .

**Exemplo 1.1.4.** Sejam os seguintes conjuntos

$$A = \{-1, 3, 2\} \quad (1.15)$$

$$B = \{2, 3\}. \quad (1.16)$$

Temos que  $B$  é subconjunto de  $A$ , i.e.  $A \subset B$ .

No [Python](#), temos

```
1      from sympy import *
2      A = FiniteSet(-1, 3, 2)
3      B = FiniteSet(2, 3)
```

Com este, obtemos

```
1      In : B.is_subset(A)
2      Out: True
```

### 1.1.2 Operações entre conjuntos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

#### União de conjuntos

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos dados. A união do conjunto  $A$  com o conjunto  $B$  é o conjunto  $A \cup B$  que contém todos os elementos de  $A$  e todos os elementos de  $B$ . Mais precisamente, temos

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}, \quad (1.17)$$

lê-se o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x \in A$  ou  $x \in B$ .

**Exemplo 1.1.5.** Se

$$A = \{-1, 3, 2\} \quad (1.18)$$

$$B = \{-2, 0\}, \quad (1.19)$$

então

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}. \quad (1.20)$$

No [Python](#), temos

```
1      from sympy import *
2      A = FiniteSet(-1, 3, 2)
3      B = FiniteSet(-2, 0)

1      In : Union(A, B)
2      Out: FiniteSet(-2, -1, 0, 2, 3)
```

### Interseção de conjuntos

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos dados. A interseção do conjunto  $A$  com o conjunto  $B$  é o conjunto  $A \cap B$  que contém os elementos que pertencem simultaneamente a ambos os conjuntos  $A$  e  $B$ . Mais precisamente, temos

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}, \quad (1.21)$$

lê-se o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x \in A$  e  $x \in B$ .

**Exemplo 1.1.6.** Se

$$A = \{-1, 3, 2\} B = \{3, 0\}, \quad (1.22)$$

então

$$A \cap B = \{3\}. \quad (1.23)$$

No [Python](#), temos

```
1      from sympy import *
2      A = FiniteSet(-1, 3, 2)
3      B = FiniteSet(3, 0)

1      In : Intersection(A, B)
2      Out: FiniteSet(3)
```

### Diferença entre conjuntos

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos dados. A diferença (ou complemento relativo) do conjunto  $A$  com o conjunto  $B$  é o conjunto  $A \setminus B$  que contém os elementos que pertencem ao  $A$  e não pertencem ao conjunto  $B$ . Mais precisamente, temos

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}, \quad (1.24)$$

lê-se o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x \in A$  e  $x \notin B$ .

**Exemplo 1.1.7.** Se

$$C = \{-3, -2, -1, 0\} \quad (1.25)$$

$$D = \{-3, -1, 0, 2, 4\}, \quad (1.26)$$

então

$$C \setminus D = \{-2\}. \quad (1.27)$$

No [Python](#), temos

```

1      from sympy import *
2      C = FiniteSet(-3,-2,-1,0)
3      D = FiniteSet(-3,-1,0,2,4)

1      In : C - D
2      Out: FiniteSet(-2)

```

### Produto cartesiano

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O produto cartesiano de  $A$  com  $B$  é o conjunto  $A \times B$ , cujos elementos são os **pares ordenados**  $(x, y)$  com  $x \in A$  e  $y \in B$ . Mais precisamente, temos

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}, \quad (1.28)$$

lê-se o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $x \in A$  e  $x \in B$ .

**Observação 1.1.2.** Um par ordenado  $(x, y)$  é um conjunto formado por  $x$  e  $y$ , no qual a posição dos elementos importa. Por exemplo, temos

$$(3, -1) \neq (-1, 3), \quad (1.29)$$

enquanto que

$$\{3, -1\} = \{-1, 3\}. \quad (1.30)$$

No [Python](#), escrevemos

```

1      from sympy import *
2      A = (3, -1)
3      B = (-1, 3)

```

então

```

1      In : A = (3, -1)
2      In : B = (-1, 3)
3      In : A == B
4      Out: False

```

**Exemplo 1.1.8.** Se

$$A = \{-3, -2, -1\} \quad (1.31)$$

$$B = \{0, 1\}, \quad (1.32)$$

então

$$A \times B = \{(-3,0), (-2,0), (-1,0), (-3,1), (-2,1), (-1,1)\}. \quad (1.33)$$

No [Python](#), temos

```
1      from sympy import *
2      A = FiniteSet(-3,-2,-1)
3      B = FiniteSet(0, 1)
4      C = ProductSet(A, B)
```

então

```
1      In : (-3, 1) in C
2      Out: True
```

Ainda, podemos imprimir todos os pares ordenados de  $C$  com o seguinte código

```
1      for i,p in enumerate(C):
2          print(p)
```

Verifique!

## Exercícios

**Exercício 1.1.1.** Considere o seguinte conjunto

$$D = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.34)$$

Em cada item, diga se é verdadeira ou falsa a afirmação. Justifique cada resposta.

- a)  $-1 \in D$
- b)  $1 \notin D$
- c)  $-5 \notin D$
- d)  $\sqrt{100} \notin D$
- e)  $D$  é um conjunto finito

**Exercício 1.1.2.** Sejam os seguintes conjuntos

$$C = \{-4, 2, -1, 0, 3\} \quad (1.35)$$

$$D = \{5, -3, 2, -4\} \quad (1.36)$$

Determine os seguintes conjuntos:

a)  $C \cup D$

b)  $C \cap D$

c)  $C - D$

d)  $D - C$

e)  $C \cup \emptyset$

f)  $D \cap \emptyset$

**Exercício 1.1.3.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a)  $A \subset A \cup B$

b)  $A \cap B \supset A$

c)  $A \cup B \supset B$

d)  $A \cap B \subset A$

e)  $A \cup B \subset B$

f)  $(A \cup B) \cap A = \emptyset$

**Exercício 1.1.4.** Sejam os seguintes conjuntos

$$C = \{-4, 2\} \quad (1.37)$$

$$D = \{5, -3, 2, -4\}. \quad (1.38)$$

Determine o conjunto  $C \times D$ .

**Exercício 1.1.5.** Justificando sua resposta, diga se é verdadeira a seguinte afirmação. Se  $x \in A$  e  $y \in B$ , então  $(y, x) \in A \times B$ .

## 1.2 Conjunto dos números racionais

Nesta seção, vamos estudar alguns aspectos fundamentais sobre o conjunto dos números racionais.

### 1.2.1 Números naturais

Os números naturais são os números de contagem

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad (1.39)$$

onde as reticências denotam a sequência dos números.

O conjunto dos números naturais pode ser construído dos [axiomas de Peano](#)<sup>1</sup>

- a) todo número natural  $m$  tem um sucessor  $m + 1$ ;
- b) números que têm o mesmo sucessor são iguais;
- c) 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro;
- d) Se um subconjunto  $A$  de números naturais contém o 0 e contém o sucessor de cada um de seus elementos, então  $A = \mathbb{N}$ <sup>2</sup>.

**Observação 1.2.1.** No [Python](#), o conjunto dos números naturais é definido por `S.Naturals0`. Por exemplo,

```
1      In : from sympy import *
2      In : 10 in S.Naturals0
3      Out: True
4      In : -1 in S.Naturals0
5      Out: False
```

### Operações de adição e multiplicação

Nos números naturais  $m, n \in \mathbb{N}$  estão bem definidas as operações usuais de:

---

<sup>1</sup>Giuseppe Peano, 1858 - 1932, matemático italiano. Fonte: [Giuseppe Peano](#)

<sup>2</sup>Axioma do Princípio da Indução.

a) **adição**

$$m + n = m + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} \quad (1.40)$$

b) **multiplicação**

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}} \quad (1.41)$$

**Exemplo 1.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $2 + 1 = 3$

b)  $1 + 2 = 3$

c)  $10 + 5 = 15$

d)  $3 \cdot 2 = 6$

e)  $2 \cdot 3 = 6$

No [Python](#),  $+$  é o operador de adição e  $*$  é o operador de multiplicação. Nos casos acima, temos

```
1      In : 2 + 1
2      Out: 3
3      In : 1 + 2
4      Out: 3
5      In : 10 + 5
6      Out: 15
7      In : 3 * 2
8      Out: 6
9      In : 2 * 3
10     Out: 6
```

**Observação 1.2.2.** No [Python](#), podemos definir uma variável simbólica no conjunto dos números naturais como, por exemplo

```
1      from sympy import *
2      m = Symbol('m', natural0=True)
```

### Propriedades das operações

Sendo  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos ainda as seguintes propriedades fundamentais:



- 0 é o elemento neutro da adição

$$m + 0 = m. \quad (1.42)$$

- comutatividade da adição

$$m + n = n + m \quad (1.43)$$

- associatividade da adição

$$m + (n + p) = (m + n) + p \quad (1.44)$$

- 1 é o elemento neutro da multiplicação

$$m \cdot 1 = m. \quad (1.45)$$

- comutatividade da multiplicação

$$m \cdot n = n \cdot m \quad (1.46)$$

- associatividade da multiplicação

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p \quad (1.47)$$

**Observação 1.2.3.** No [Python](#), podemos checar as propriedades acima. Por exemplo,

```
1 from sympy import *
2 m, n, p = symbols('m, n, p', natural=True)
```

com o que obtemos

```
1 In : m + (n + p) == (m + n) + p
2 Out: True
```

**Exemplo 1.2.2.** Verificamos as propriedades acima para casos específicos.

- a) Elemento neutro da adição

$$5 + 0 = 5 \quad (1.48)$$

b) Comutatividade da adição

$$2 + 3 = 3 + 2 \quad (1.49)$$

c) Associatividade da adição

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9 \quad (1.50)$$

$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9 \quad (1.51)$$

d) Elemento neutro da multiplicação

$$3 \cdot 1 = 3 \quad (1.52)$$

e) Comutatividade da multiplicação

$$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 = 10 \quad (1.53)$$

f) Associatividade da multiplicação

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24 \quad (1.54)$$

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \quad (1.55)$$

### 1.2.2 Números inteiros

O conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.56)$$

Os números com sinal negativo “−” são definidos como sendo opostos aos respectivos números naturais. Mais precisamente, o **oposto de um número**  $m$  é denotado por  $-m$  e é tal que

$$m + (-m) = 0. \quad (1.57)$$

Os números inteiros podem ser representados geometricamente como pontos sobre uma reta. No centro, coloca-se o zero, à direita colocam-se os números positivos em ordem e igualmente espaçados. À esquerda do zero, colocam-se os números negativos, opostos aos respectivos números positivos. Consulte a Figura 1.1.



Figura 1.1: Representação geométrica dos números inteiros.

**Exemplo 1.2.3.** Consideramos os seguintes casos:

a)  $-1$  é o oposto de  $1$ :

$$1 + (-1) = 0 \quad (1.58)$$

b)  $2$  é o oposto de  $-2$ :

$$-2 + 2 = 0 \quad (1.59)$$

Os números inteiros contêm os números naturais, i.e.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}. \quad (1.60)$$

Ainda, as operações de **adição** e **multiplicação** podem ser imediatamente estendidas para os números inteiros, assim como suas **propriedades de elemento neutro, comutatividade** e **associatividade**.

### Operação de Subtração

Com a definição de oposto, podemos definir a **operação de subtração** de dois números inteiros da seguinte forma

$$m - n = m + (-n) \quad (1.61)$$

$$= -n + m, \quad (1.62)$$

sendo a operação de adição definida usualmente.

**Exemplo 1.2.4.**

$$2 - 3 = 2 + (-3) \quad (1.63)$$

$$= -3 + 2 = -1 \quad (1.64)$$

No [Python](#), esta operação pode ser feita de forma usual

```

1      In : 2 - 3
2      Out: -1

```

**Observação 1.2.4.** No [SymPy](#), o conjunto dos números inteiros é definido por `S.Integers` e uma variável simbólica inteira pode ser definida com

```

1      from sympy import *
2      m = Symbols('m', integer=True)

```

### Valor absoluto

Dada um número  $p \in \mathbb{Z}$ , definimos o seu **valor absoluto**<sup>3</sup> pelo número inteiro

$$|p| = \begin{cases} p & , p \geq 0, \\ -p & , p < 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

**Exemplo 1.2.5.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $|3| = 3$
- b)  $|-2| = -(-2) = 2$
- c)  $|0| = 0$

Com o [SymPy](#), podemos computar estes casos como segue:

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> Abs(-3)
3      3
4      >>> Abs(3)
5      3
6      >>> Abs(0)
7      0

```

Para qualquer  $p \in \mathbb{Z}$ , a operação de tomar o valor absoluto de um número tem as seguintes propriedades:

- a)  $|p| \geq 0$
- b)  $|p| = 0 \Leftrightarrow p = 0$
- c)  $|p| = |-p|$

---

<sup>3</sup>Também, chamado de **módulo** ou **norma**.

$$\text{d)} \quad |p| < q \Leftrightarrow -q < p < q$$

$$\text{e)} \quad |p| > q \Leftrightarrow -p < -q \text{ ou } p > q$$

### 1.2.3 Números racionais

O conjunto dos números racionais é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}, \quad (1.66)$$

sendo  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . O **quociente**  $p/q$  é definido como sendo o resultado da operação de **divisão** de  $p$  por  $q$ . Mais precisamente,

$$\frac{p}{q} = x \Leftrightarrow p = x \cdot q. \quad (1.67)$$

**Observação 1.2.5.** Não está definida a **divisão por zero**! Note que não existe  $x$  tal que

$$\frac{p}{0} = x \Leftrightarrow p = 0 \cdot x. \quad (1.68)$$

Mesmo,  $0/0$  não está bem definido. Neste caso, temos uma **indeterminação matemática**, de fato não existe um único número  $x$  tal que

$$\frac{0}{0} = x \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot x. \quad (1.69)$$

A operação de **adição** fica assim definida

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad (1.70)$$

**Exemplo 1.2.6.**

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} \quad (1.71)$$

$$= \frac{8 + 15}{20} \quad (1.72)$$

$$= \frac{23}{20} \quad (1.73)$$

No [Python](#), as operações são realizadas no conjunto dos números reais<sup>45</sup>, por padrão. Por exemplo,

```
1      In : 2/3
2      Out: 1.5
```

Com o [SymPy](#), podemos restringir a aritmética aos números racionais, com

```
1      In : from sympy import S
2      In : S(2)/3
3      Out: 2/3
```

No caso do exemplo acima, temos

```
1      In : S(2)/5 + S(3)/4
2      Out: 23/20
```

A operação de **multiplicação** fica definida por

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad (1.74)$$

**Exemplo 1.2.7.**

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 2} \quad (1.75)$$

$$= \frac{3}{5} \quad (1.76)$$

No [Python](#), temos

```
1      In : from sympy import S
2      In : S(2)/5 * S(3)/2
3      Out: 3/5
```

**Observação 1.2.6.**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad (1.77)$$

Isso segue do fato de que se  $m \in \mathbb{Z}$ , então

$$m = \frac{m}{1}. \quad (1.78)$$

---

<sup>45</sup>Introduziremos os números reais na sequência.

<sup>5</sup>Mais precisamente, as operações são realizadas em ponto flutuante. Para mais informações, consulte [aritmética de máquina](#).

Os números racionais também herdam as **propriedades** de **elemento neutro**, **comutatividade** e **associatividade** nas operações de adição e multiplicação.

### Operação de Potenciação

Outra operação fundamental é a operação de **potenciação**. A potenciação de um número racional  $p/q \neq 0$  por um número natural  $n$  é definida por

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \dots \cdot \frac{p}{q}}_{n \text{ vezes}}, \quad (1.79)$$

sendo  $(p/q)^0 = 1$ . Ainda, definimos o **inverso de um número** racional  $p/q$  por

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}. \quad (1.80)$$

Mais precisamente, o inverso de um número  $x \neq 0$  é denotado por  $x^{-1}$  e é tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1. \quad (1.81)$$

Com a escolha acima, vemos que  $(p/q)^{-1} = q/p$ , pois

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} \quad (1.82)$$

$$= \frac{q \cdot p}{q \cdot p} \quad (1.83)$$

$$= \frac{q}{q} \cdot \frac{p}{p} \quad (1.84)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1. \quad (1.85)$$

**Exemplo 1.2.8.** Verifiquemos os seguintes casos:

a)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \quad (1.86)$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} \quad (1.87)$$

$$= \frac{27}{8} \quad (1.88)$$

b)

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad (1.89)$$

$$= 4 \cdot 2 \quad (1.90)$$

$$= 8 \quad (1.91)$$

c)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \quad (1.92)$$

No [Python](#), o operador de potenciação é `**`. Os casos acima podem ser computados como segue

```

1      In : from sympy import S
2      In : (S(3)/2)**3
3      Out: 27/8
4      In : 2**3
5      Out: 8
6      In : (S(3)/2)**-1
7      Out: 2/3

```

**Observação 1.2.7.** Enquanto que para  $x \neq 0$  temos  $x^0 = 1$ ,  $0^0$  não está bem definida! Trata-se de uma **indeterminação**, conceito normalmente introduzido em um curso de Cálculo. Por outro lado, há situações em que se adota-se a convenção de que  $0^0 = 1$ . Este é o caso da linguagem [Python](#) e várias outras. Em [Python](#), temos

```

1      >>> 0**0
2      1

```

Sendo  $a, b \in \mathbb{Q}$  e  $n, m \in \mathbb{N}$ , temos as seguintes **propriedades** fundamentais da operação de potenciação<sup>6</sup>:

- $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
- $a^{-m} = (a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$
- $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$

---

<sup>6</sup>Estas propriedades são válidas desde que as operações estejam bem definidas. Por exemplo, a segunda propriedade elencada somente é válida no caso de  $a \neq 0$ .



- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

**Observação 1.2.8.** As seguintes potenciações não estão bem definidas:

- $\nexists 0^{-1}$

$$0^{-1} = \frac{1}{\nexists} \quad (1.93)$$

O símbolo  $\exists$  lê-se existe e o  $\nexists$  lê-se não existe.

- $\nexists 0^0$

$$0^0 = 0^{1-1} \quad (1.94)$$

$$= 0^1 \cdot 0^{-1} \quad (1.95)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{\nexists} \quad (1.96)$$

Sobre este último caso, lembre-se da Observação 1.2.7.

**Observação 1.2.9.** No [SymPy](#), o conjunto dos números racionais é definido por `S.Rationals` e uma variável simbólica racional pode ser definida com

```
1 from sympy import *
2 a = Symbols('a', rational=True)
```

**Observação 1.2.10.** A representatividade de números racionais não é única. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \dots \quad (1.97)$$

Isto nos motiva a introduzir o conceito de **razão irredutível**. Dizemos que  $p/q$  é uma razão irredutível, quando  $p$  e  $q$  não têm divisor comum<sup>7</sup>. Por exemplo,  $2/3$  é uma razão irredutível, enquanto  $4/6$  não é, pois 4 e 6 têm 2 como divisor comum.

<sup>7</sup>Um número  $m \in \mathbb{N}^*$  é divisor de  $n \in \mathbb{Z}$ , quando  $m/n \in \mathbb{Z}$ .

## Exercícios

**Exercício 1.2.1.** Sejam  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ . Argumente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a)  $m = 0 + m$
- b)  $m + (n + p) = (n + p) + m$
- c)  $m + n + p = (n + m) + p$
- d)  $(m + n) + (q + p) = (m + p) + (q + n)$
- e)  $1 \cdot m \neq m \cdot 1$
- f)  $(m \cdot n) \cdot p = (n \cdot p) \cdot m$

**Exercício 1.2.2.** Sejam  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ . Argumente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a)  $n - p = p - n$
- b)  $(m - n) + p = (m + p) - n$
- c)  $-(-m) = m$

**Exercício 1.2.3.** O **mínimo múltiplo comum** dos números de dois números inteiros  $c, d$  é denotado por  $\text{mmc}(c, d)$  e é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de  $c$  e  $d$ . Sendo, ainda,  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $c, d \neq 0$ , Mostre que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{mmc}(c, d)}{c} + b \cdot \frac{\text{mmc}(c, d)}{d}}{\text{mmc}(c, d)}. \quad (1.98)$$

Qual a vantagem em usar o mmc para calcular a soma de frações? No [SymPy](#), pode-se utilizar o método `sympy.ilcm`. Verifique!

**Exercício 1.2.4.** Sejam  $p, q \in \mathbb{Q}$ ,  $q \neq 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Argumente sobre a veracidade das seguintes afirmações.

- a)  $q^{m-n} = \frac{q^m}{q^n}$
- b)  $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q}$

$$c) \quad q^{-m \cdot n} = \frac{q^n}{q^m}$$

**Exercício 1.2.5.**  $1 + 1 = 1$ ? Encontre o erro nos seguintes cálculos:

$$a = b \quad (1.99)$$

$$a^2 = ab \quad (1.100)$$

$$a^b - b^2 = ab - b^2 \quad (1.101)$$

$$(a + b)(a - b) = b(a - b) \quad (1.102)$$

$$a + b = b \quad (1.103)$$

Escolhendo, por exemplo,  $a = 1$  e  $b = 1$ , esta última fornece  $1 + 1 = 1$ !

**Exercício 1.2.6.** Seja  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Mostre as seguintes propriedades:

$$a) \quad |p| \geq 0$$

$$b) \quad |p| = |-p|$$

$$c) \quad |p| < q \Leftrightarrow -q < p < q$$

$$d) \quad |p| > q \Leftrightarrow -p < -q \text{ ou } p > q$$

## 1.3 Conjunto dos números reais

### 1.3.1 Existência de números irracionais

Para introduzirmos os números reais, vamos fazer a tentativa de estender a operação de potenciação para potências racionais. Mais especificamente, vamos tentar determinar  $\sqrt{2}$ , a qual é definida por

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}. \quad (1.104)$$

Assumindo válidas as propriedades de potenciação vista para números racionais, teríamos

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} \quad (1.105)$$

$$= 2^1 = 2. \quad (1.106)$$

Será que  $2^{\frac{1}{2}}$  é um número racional? Se fosse, então existiria uma **razão irredutível**<sup>8</sup>  $p/q$  tal que  $2^{\frac{1}{2}} = p/q$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ , com

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad (1.107)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad (1.108)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p^2 = 2 \cdot q^2. \quad (1.109)$$

Logo,  $p^2$  é um número par<sup>9</sup> e, portanto,  $p$  é um número par<sup>10</sup>. Ou seja, existiria  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = 2m$ . Mas, então

$$(2 \cdot m)^2 = 2 \cdot q^2 \quad (1.110)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4 \cdot m^2 = 2 \cdot q^2 \quad (1.111)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2 \cdot m^2 = q^2. \quad (1.112)$$

Com isso,  $q^2$  seria par e, portanto,  $q$  deveria ser par. Isso é uma contradição, por  $p/q$  é uma razão irredutível. Logo, concluímos que

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \quad (1.113)$$

Assim sendo, dizemos que  $\sqrt{2}$  é um **número irracional**. Ou seja, não é racional! :D

**Observação 1.3.1.** Uma aplicação em geometria. Observamos que  $\sqrt{2}$  é o comprimento do lado do quadrado de área 1. Ou ainda,  $\sqrt{2}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos com comprimento igual a 1!

<sup>8</sup>Sobre razão irredutível, consulte a Observação 1.2.10.

<sup>9</sup>Número múltiplo inteiro de 2.

<sup>10</sup>O quadrado de um número ímpar é um número ímpar. Número ímpar é um número inteiro não divisível por 2.

### 1.3.2 Fecho dos números racionais

Mas então, como podemos calcular o número  $\sqrt{2}$ ? Bem, podemos aproximá-lo usando o [método babilônico](#). Observamos que  $\sqrt{2}$  é um número entre 1 e 2, exclusivamente. Vamos, então, escolher como aproximação inicial

$$x_0 = \frac{3}{2} = 1.5 \quad (1.114)$$

Daí, calculamos uma nova aproximação como

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{2}{x_0} \right) \quad (1.115)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) \quad (1.116)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) \quad (1.117)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{9+8}{6} \right) \quad (1.118)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} \quad (1.119)$$

$$= \frac{17}{12} = 1,41\bar{6} \quad (1.120)$$

Então, analogamente podemos calcular uma melhor aproximação com

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{2}{x_1} \right) \quad (1.121)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}} \right) \quad (1.122)$$

$$= \frac{577}{408} = 1,414215686274509803921 \quad (1.123)$$

e assim sucessivamente. Estes números racionais estão de fato se aproximando do valor de  $\sqrt{2}$ . Notamos que

$$x_0^2 = \left( \frac{3}{2} \right)^2 = 2,25 \quad (1.124)$$

$$x_1^2 = \left( \frac{17}{12} \right)^2 = 2,0069\bar{4} \quad (1.125)$$

$$x_2^2 = \left( \frac{577}{408} \right)^2 = 2,000006 \dots \quad (1.126)$$

O método babilônico, nos mostra que  $\sqrt{2}$  pode ser calculado como o **limite** de uma **sequência** de números racionais. Ou seja, é sempre possível escolher um número racional que aproxime do valor de  $\sqrt{2}$  tão bem quanto se queira. No caso, basta iterarmos o método babilônico um número suficiente de vezes.

Neste caso, ainda dizemos que  $\sqrt{2}$  pertence ao **fecho** dos números racionais, escrevemos

$$\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}. \quad (1.127)$$

Mais precisamente,  $x \in \overline{\mathbb{Q}}$  quando sempre é possível escolher um número racional  $p/q \in \mathbb{Q}$  que aproxima o valor de  $x$  tão bem quanto se queira.

O **conjunto dos números reais** é denotado por  $\mathbb{R}$  e é tal que

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}. \quad (1.128)$$

Ou seja, é a união dos números racionais com os números irracionais que podem ser arbitrariamente aproximados por números racionais.

**Observação 1.3.2.**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad (1.129)$$

Além disso, os números reais herdam as operações e suas propriedades dos números racionais.

**Exemplo 1.3.1.** Consideramos os seguintes casos:

- a) todo número inteiro é um número real.
- b) todo número racional é um número real.
- c)  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$  são números reais.
- d)  $\pi = 3,141592\dots$  é um número real.

O  $\pi$  é a área da circunferência de raio 1.

No **Python**, estes exemplos podem ser verificados com

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> S.Integers.is_subset(S.Reals)
3      True
4      >>> S.Rationals.is_subset(S.Reals)
5      True
6      >>> sqrt(3) in S.Reals
```

```

7      True
8      >>> sqrt(5) in S.Reals
9      True
10     >>> sqrt(7) in S.Reals
11     True
12     >>> pi in S.Reals
13     True

```

De posse dos números reais, vamos definir  $m$ -ésima raiz de um número  $x \in \mathbb{R}$  por

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}, \quad (1.130)$$

sendo que quando  $m = 2$ , escrevermos simplesmente  $\sqrt{x}$ .

**Observação 1.3.3.**

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \quad (1.131)$$

De fato, seja

$$x = \sqrt{-1}, \quad (1.132)$$

então

$$x^2 = -1. \quad (1.133)$$

Entretanto, o quadrado de qualquer número real é um número não negativo! Ou seja,  $x \notin \mathbb{R}$ .

Mais geralmente, não é número real a raiz de índice par de qualquer número negativo.

### 1.3.3 Reta real

A reta real é uma representação geométrica do conjunto dos números reais (Figura 1.2).

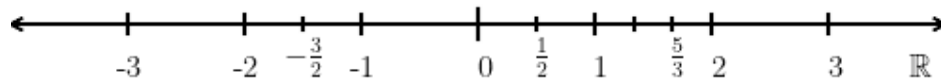


Figura 1.2: Reta real.

Traçamos uma reta horizontal e escolhemos um ponto como sendo a origem. Neste ponto, marcamos a posição do número zero. Usando um espaçamento fixo, posicionamos os números naturais a direita do zero e de forma sucessiva. Os números inteiros negativos são posicionados à esquerda do zero, também em posições sucessivas. Os números racionais são posicionados tomando as frações do espaçamento escolhido. A Figura 1.2 é um esboço da reta real.

Uma das propriedades notáveis dos números reais é a chamada **tricotomia**, i.e. um número real  $x$  é

- positivo (posicionado à direita da origem),
- zero (posicionado na origem), ou
- negativo (posicionado à esquerda da origem),

exclusivamente.

### 1.3.4 Infinito

O infinito é denotado por  $\infty$  e representa a noção daquilo que não tem fim. Quando sem sinal, é interpretado na direção positiva (direita) da reta real. Quando escrito  $-\infty$  (lê-se menos infinito) é interpretado na direção negativa (esquerda) da reta real. Nesta reta (Fig. 1.3),  $\infty$  é representado por sua seta à direita e  $-\infty$  por sua seta à esquerda.

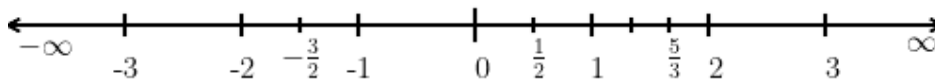


Figura 1.3: Reta real.

**Observação 1.3.4.**  $\infty$  não é um número!

Sendo  $x$  é um número real, podemos inferir as seguintes propriedades para qualquer dado  $x \in \mathbb{R}$ :

- $\pm\infty \pm x = \pm\infty$



- $\pm\infty \mp x = \pm\infty$
- $-\infty = -1 \cdot \infty$
- $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty$
- $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$

**Exemplo 1.3.2.** Estudamos os seguintes casos:

- a)  $\infty + \infty = \infty$
- b)  $-1 \cdot (-\infty) = \infty$
- c)  $2 \cdot (-\infty) = -\infty$
- d)  $\infty \cdot \infty = \infty$
- e)  $-\infty \cdot \infty = -\infty$

No [Python](#), podemos verificar estas contas com os seguintes comandos:

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> oo + oo
3      oo
4      >>> -1 * -oo
5      oo
6      >>> 2 * -oo
7      -oo
8      >>> oo * oo
9      oo
10     >>> -oo * oo
11     -oo

```

No entanto, são consideradas **indeterminações matemáticas** as seguintes operações:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty^0$
- $1^\infty$
- $0^0$
- $\frac{0}{0}$

**Observação 1.3.5.** Com o [SymPy](#), as indeterminações são marcadas como `nan`<sup>11</sup> ou retornam erro. Por exemplo:

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> oo - oo
3      nan
4      >>> 0/0
5      Traceback (most recent call last):
6      File "<stdin>", line 1, in <module>
7      ZeroDivisionError: division by zero

```

Atenção! Exceções são os casos envolvendo potências de expoente 0, por exemplo:

```

1      >>> 0**0
2      1
3      >>> oo**0
4      1

```

### 1.3.5 Intervalos de números reais

Intervalos de números reais são conjuntos especiais e muito utilizados. Por simplicidade, recebem uma notação própria. Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos os seguintes tipos de intervalos:

- Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (1.134)$$

---

<sup>11</sup>Do inglês, *not a number*.



Figura 1.4: Representação geométrica de um intervalo  $[a, b]$ .

- Intervalo semi-aberto à esquerda (semi-fechado à direita)

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (1.135)$$



Figura 1.5: Representação geométrica de um intervalo  $(a, b]$ .

- Intervalo semi-aberto à direita (semi-fechado à esquerda)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (1.136)$$



Figura 1.6: Representação geométrica de um intervalo  $[a, b)$ .

- Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (1.137)$$



Figura 1.7: Representação geométrica de um intervalo  $(a, b)$ .

**Exemplo 1.3.3.** Vamos estudar os seguintes casos:

a)  $-2 \in [-3, 1]$

b)  $\sqrt{2} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

c)  $2 \notin [-3, 2)$

d)  $\pi \in (3, 4]$

e)  $[a, a] = \{a\}$

f)  $[3, 2] = \emptyset$

g)  $(1, 1) = \emptyset$

Com o [SymPy](#), podemos checar os casos acima usando o comando [Interval](#). Vejamos alguns dos casos acima:

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> -2 in Interval(-3, 1)
3      True
4      >>> sqrt(2) in Interval(1, 3/2,
5      ... left_open=True, right_open=True)
6      True
7      >>> 2 in Interval(-3, 2, right_open=True)
8      False
9      >>> Interval(3, 2)
10     EmptySet

```

Ainda, temos os seguintes casos especiais

- Intervalos semi-limitados à esquerda

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad (1.138)$$



Figura 1.8: Representação geométrica dos intervalos  $[a, \infty)$  (acima) e  $(a, \infty)$  (abaixo).

- Intervalos semi-limitados à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad (1.139)$$

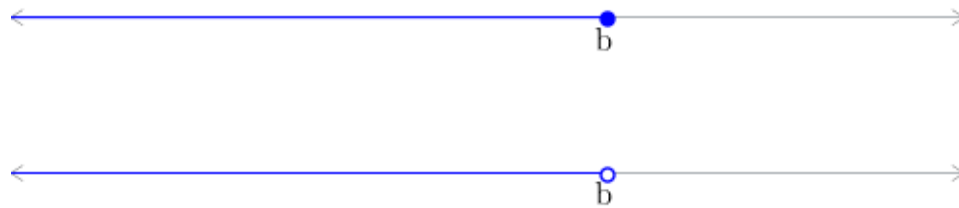


Figura 1.9: Representação geométrica dos intervalos  $(-\infty, b]$  (acima) e  $(-\infty, b)$  (abaixo).

- Intervalo ilimitado

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \quad (1.140)$$

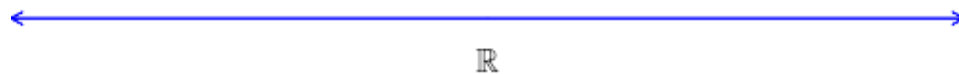


Figura 1.10: Representação geométrica dos intervalos  $(-\infty, \infty)$ .

**Exemplo 1.3.4.** Estudamos os seguintes casos:

- a)  $2 \in [2, \infty)$
- b)  $10^6 \in (2, \infty)$
- c)  $1 \notin (-\infty, 1)$
- d)  $-10^{308} \in (-\infty, 1]$
- e)  $\pi \in (-\infty, \infty)$

Com o [Python](#), podemos fazer estas verificações com os seguintes comandos:

```
1      >>> from sympy import *
2      >>> oo in Interval(2,oo)
3      False
4      >>> from sympy import *
5      >>> 2 in Interval(2,oo)
6      True
7      >>> 10**6 in Interval(2,oo,
8      ... left_open=True)
9      True
10     >>> 1 in Interval(-oo, 1,
11     ... right_open=True)
12     False
13     >>> -10**308 in Interval(-oo, 1)
14     True
15     >>> pi in Interval(-oo, oo)
16     True
```

## Exercícios

**Exercício 1.3.1.** Verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

- a) Se  $p, q$  são números pares, então  $p + q$  é um número par.
- b) Se  $p, q$  são números ímpares, então  $p + 1$  é um número ímpar.
- c) Se  $p$  é número par e  $q$  é número ímpar, então  $p + q$  é número ímpar.
- d) Se  $p$  é número par e  $q$  é número ímpar, então  $p \cdot q$  é número ímpar.

e) Se  $p, q$  são números ímpares, então  $p \cdot q$  é número ímpar.

**Exercício 1.3.2.** Mostre que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercício 1.3.3.** Um número primo  $p$  tem somente quatro divisores  $\pm 1$ ,  $\pm p$  e é tal que  $p \neq 0$  e  $p \neq \pm 1$ . Faça a **decomposição em fatores primos** dos seguintes números<sup>12</sup>.

- a) 14
- b) 24
- c) 36
- d) 2205

**Exercício 1.3.4.** Encontre o resultado e faça a representação gráfica em cada um dos seguintes itens.

- 1.  $(-1, 2] \cup [-1, 0]$
- 2.  $[2, 4) \cap [4, 5)$
- 3.  $(-2, 2) \cap [-1, 1)$
- 4.  $(-\infty, 1) \cup [0, \infty)$
- 5.  $(-1, 1) \cup \{1\}$

**Exercício 1.3.5.** Verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

- a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$
- b)  $\sqrt{4} + 2 = 4$
- c)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = 2\sqrt{7}$
- d)  $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$
- e)  $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[2]{2^3}$

---

<sup>12</sup>Dica: consulte o método `sympy.factorint`.

**Exercício 1.3.6.** Mostre que<sup>13</sup>  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

---

<sup>13</sup> $|x| = x$ ,  $x \geq 0$  e  $|x| = -x$ , caso contrário.



## Capítulo 2

# Equações e inequações

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

### 2.1 Equações

Uma equação é uma declaração de que duas expressões são iguais. Escrevemos

$$E_{\text{esq}} = E_{\text{dir}} \quad (2.1)$$

para estabelecer que a expressão à esquerda  $E_{\text{esq}}$  é igual a expressão à direita  $E_{\text{dir}}$ .

**Exemplo 2.1.1.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $2^2 = 4$
- b)  $2x - 1 = 0$
- c)  $e^{x+y} = e^x e^y$
- d)  $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$

No [Python](#), podemos declarar as equações com a função <https://docs.sympy.org/latest/modules/solvers/solvers.html>. Os casos são implementados como segue:

```
1      >>> from sympy import *
2      >>> Eq(2**2, 4)
```

```

3      True
4      >>> x = Symbol('x')
5      >>> Eq(2*x - 1, 0)
6      Eq(2*x - 1, 0)
7      >>> y = Symbol('y')
8      >>> Eq(exp(x+y), exp(x)*exp(y))
9      Eq(exp(x + y), exp(x)*exp(y))
10     >>> Eq((x**2-1)/(x+1), x-1)
11     Eq((x**2 - 1)/(x + 1), x - 1)

```

### 2.1.1 Solução de uma equação

Equação é uma poderosa ferramenta matemática para impor uma condição sobre uma ou mais **incógnitas** (ou **variáveis**). Por exemplo, quando escrevemos

$$2^x = 4 \quad (2.2)$$

estamos impondo que a incógnita  $x$  seja aquela a satisfazer esta equação. No caso,  $x = 2$  satisfaz a equação, pois ao substituirmos  $x$  por 2 nela, obtemos

$$2^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4. \quad (2.3)$$

Usualmente, dizemos que  $x = 2$  é **solução** da equação. O procedimento de encontrar a(s) solução(ões) de uma equação é chamado de **resolução** da equação, i.e. o procedimento de resolver a equação.

**Observação 2.1.1.** Uma equação pode ter uma única solução, várias soluções, infinitas soluções ou nenhuma solução.

**Exemplo 2.1.2.** Estudemos os seguintes casos:

- a)  $x - 1 = 0$  tem solução única  $x = 1$ .
- b)  $y^2 - 1 = 0$  têm soluções  $y = -1$  ou  $y = 1$ .
- c)  $x^2 = -1$  não tem solução.
- d)  $(u + 1)^2 = u^2 + 2u + 1$ , qualquer  $u \in \mathbb{R}$  é solução.

No **Python**, podemos resolver estas equações com o comando **solve** ou **solveset**. Estudemos as seguintes entradas e saídas:

```

1      >>> from sympy import *
2      >>> x = Symbol('x', real=True)
3      >>> solve(x-1, domain=S.Reals)
4      [1]
5      >>> solveset(x-1, domain=S.Reals)
6      FiniteSet(1)
7      >>> y,u = symbols('y,u', real=True)
8      >>> solve(y**2-1, domain=S.Reals)
9      [-1, 1]
10     >>> solve(Eq(x**2, -1), domain=S.Reals)
11     []
12     >>> solveset(Eq(x**2, -1), domain=S.Reals)
13     EmptySet
14     >>> solveset(Eq((u+1)**2, u**2 + 2*u + 1), domain=S.Reals)
15     Reals

```

Não existe um procedimento único para a resolução de equações em geral. Em síntese, a resolução, quando possível, é obtida da aplicação das seguintes propriedades. Sendo  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  expressões matemáticas, temos

- Simetria

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 E_2 &= E_1
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

- Cancelamento por adição

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 E_1 + E_3 &= E_2 + E_3
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

- Cancelamento por multiplicação<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 E_1 \cdot E_3 &= E_2 \cdot E_3
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

---

<sup>1</sup>Somente no caso de  $E_3 \in \mathbb{R}^*$

As operações acima reescrevem a equação original  $E_1 = E_2$  em **equações equivalentes**, i.e. equações que têm as mesmas soluções.

**Exemplo 2.1.3.** Estudemos os casos a seguir.

a)

$$-1 = x \quad (2.7)$$

$$x = -1 \quad (2.8)$$

b)

$$x - 2 = 1 \quad (2.9)$$

$$x - 2 + 2 = 1 + 2 \quad (2.10)$$

$$x = 3 \quad (2.11)$$

c)

$$2x = 4 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 4 \quad (2.13)$$

$$1 \cdot x = 2 \quad (2.14)$$

$$x = 2 \quad (2.15)$$

## 2.1.2 Equações lineares

Equação algébricas lineares de uma incógnita são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$ax + b = 0, \quad (2.16)$$

onde, são conhecidos (dados) os **coeficientes**  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Sua resolução pode ser feita da seguinte forma

$$ax + b = 0 \quad (2.17)$$

$$ax + b - b = 0 - b \quad (2.18)$$

$$ax = -b \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b) \quad (2.20)$$

$$1 \cdot x = -\frac{b}{a} \quad (2.21)$$

$$x = -\frac{b}{a} \quad (2.22)$$

**Exemplo 2.1.4.** Vamos resolver

$$2x - 4 = 5 - x \quad (2.23)$$

Esta é uma equação linear, pois

$$2x - 4 - 5 = 5 - x - 5 \quad (2.24)$$

$$2x - 9 = -x \quad (2.25)$$

$$x + 2x - 9 = x - x \quad (2.26)$$

$$3x - 9 = 0 \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

Logo, a solução é

$$x = \frac{9}{3} = 3. \quad (2.29)$$

No [Python](#), podemos resolver esta equação com

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol('x', real=True)
3 >>> solve(Eq(2*x - 4, 5 - x), domain=S.Reals)
4 [3]
```

### 2.1.3 Equação quadrática

Uma equação algébrica quadrática de um incógnita é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.30)$$

com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ .

Para resolver tal equação, vamos, primeiro, lembrar que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (2.31)$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ . A ideia é usar desta **identidade**<sup>2</sup> para reduzirmos a equação em duas equações lineares.

Começamos reescrevendo (2.30) da seguinte forma

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c \quad (2.32)$$

$$ax^2 + bx = -c \quad (2.33)$$

$$(ax^2 + bx) \cdot \frac{1}{a} = -c \cdot \frac{1}{a} \quad (2.34)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2.35)$$

Agora, vamos **completar os quadrados** do lado direito para usarmos a identidade (2.31). Fazemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (2.36)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (2.37)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2.38)$$

---

<sup>2</sup>Identidade é o nome dado a uma equação que é satisfeita para todos os possíveis valores de sua(s) incógnita(s).

Agora, extraímos a raiz quadrada de ambos os lados da equação<sup>3</sup>

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (2.39)$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right| \quad (2.40)$$

Daí, seguem as seguintes equações lineares

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.41)$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

Equivalentemente, escrevemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.44)$$

Por fim, isolamos  $x$  co

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.45)$$

donde temos a chamada **Fórmula de Bhaskara**<sup>4</sup>

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.46)$$

**Exemplo 2.1.5.** Vamos resolver

$$x^2 = x + 2. \quad (2.47)$$

Esta é uma equação quadrática, pois

$$x^2 - x - 2 = x + 2 - x - 2 \quad (2.48)$$

$$x^2 - x - 2 = 0. \quad (2.49)$$

---

<sup>3</sup> $\sqrt{x^2} = |x|$ .

<sup>4</sup>Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático indiano. Fonte: [Wikipédia](#).

Logo, da Fórmula da Bhaskara (2.46), obtemos

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \quad (2.50)$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad (2.51)$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad (2.52)$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \quad (2.53)$$

Donde,

$$x = \frac{1-3}{2} \quad (2.54)$$

$$x = \frac{-2}{2} \quad (2.55)$$

$$x = -1 \quad (2.56)$$

ou

$$x = \frac{1+3}{2} \quad (2.57)$$

$$x = \frac{4}{2} \quad (2.58)$$

$$x = 2 \quad (2.59)$$

Concluimos que a equação tem soluções  $x = -1$  ou  $x = 2$ .

No [Python](#), podemos resolver esta equação com

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = Symbol('x', real=True)
3 >>> solve(Eq(x**2, x + 2), domain=S.Reals)
4 [-1, 2]
```

### 2.1.4 Equações exponenciais

Um equação exponencial é aquela em que a incógnita aparece como expoente em um ou mais termos. Tais equações não tem formato único, nem procedimento geral de resolução. Quando possível, a ideia é reescrever todos os termos da equação em uma base comum.



**Observação 2.1.2.** Lembramos que<sup>5</sup>:

- $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$
- $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$
- $b^{xy} = (b^x)^y$
- $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$
- $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x}$

**Exemplo 2.1.6.** Vamos resolver

$$5^{x+3} = 25. \quad (2.60)$$

Para resolver esta equação, vamos escrever 25 como potência de 5, i.e.

$$25 = 5^2. \quad (2.61)$$

Logo, a equação é equivalente a

$$5^{x+3} = 5^2 \quad (2.62)$$

donde

$$x + 3 = 2 \quad (2.63)$$

$$x = -1. \quad (2.64)$$

Ou seja, a solução é  $x = -1$ .

No [Python](#):

```
1      >>> from sympy import *
2      >>> x = Symbol('x', real=True)
3      >>> solve(Eq(5**(x+3), 25), domain=S.Reals)
4      [-1]
```

**Exemplo 2.1.7.** Vamos resolver

$$5^{x+3} = 5^{-x} + 20. \quad (2.65)$$

---

<sup>5</sup>Quando bem definido.

Notamos que esta equação é equivalente a

$$5^x \cdot 5^3 = (5^x)^{-1} + 20. \quad (2.66)$$

Fazemos, então, a seguinte **mudança de variável**

$$y = 5^x. \quad (2.67)$$

Com isso, a equação se resume a

$$y \cdot 5^3 = y^{-1} + 20 \quad (2.68)$$

Resolvemos esta equação como segue

$$125y = \frac{1}{y} + 20 \quad (2.69)$$

$$125y^2 = 1 + 20y \quad (2.70)$$

$$125y^2 - 20y - 1 = 0 \quad (2.71)$$

Usando a fórmula de Bhaskara, obtemos

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 125 \cdot (-1)}}{2 \cdot 125} \quad (2.72)$$

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{900}}{250} \quad (2.73)$$

$$y = \frac{20 - \pm 30}{250} \quad (2.74)$$

Ou seja,  $y = -1/25$  ou  $y = 1/5$ . Observando que  $y = 5^x$  e, portanto positivo, temos

$$5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1}. \quad (2.75)$$

Concluimos que  $x = -1$ .

No **Python**:

```
1     >>> from sympy import *
2     >>> x = Symbol('x', real=True)
3     >>> solveset(Eq(5**(x+3), 5**(-x) + 20), domain=S.Reals)
4     [-1]
```

## Exercícios

**Exercício 2.1.1.** Calcule a solução das seguintes equações:

- a)  $x - 2 = 0$
- b)  $3 - x = 1$
- c)  $0 = -1 + x$
- d)  $\sqrt{2} \cdot x = 0$

**Exercício 2.1.2.** Calcule a solução das seguintes equações:

- a)  $2x - 3 = 2$
- b)  $2x - 3 = 2 - x$
- c)  $x - 3 = 2 + 2x$

**Exercício 2.1.3.** Calcule a solução das seguintes equações:

- 1.  $x^2 = 0$
- 2.  $x^2 + 4 = 0$
- 3.  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- 4.  $x^2 - 16 = 0$
- 5.  $x^2 + x - 2 = 0$
- 6.  $2x - 6 + x^2 = -x^2 - 2$

**Exercício 2.1.4.** Calcule a solução das seguintes equações:

- 1.  $3^x = 27$
- 2.  $2^x = 2 \cdot 2^x - 1$
- 3.  $4^x = 2 - 2^x$

**Exercício 2.1.5.** Calcule a solução da seguinte equação

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad (2.76)$$

## 2.2 Inequações

Uma inequação é uma sentença matemática que expressa uma relação de desigualdade entre duas expressões matemáticas. São exemplos de inequações

$$E_{\text{esq}} \neq E_{\text{dir}} \quad (2.77)$$

$$E_{\text{esq}} < E_{\text{dir}} \quad (2.78)$$

$$E_{\text{esq}} \leq E_{\text{dir}} \quad (2.79)$$

$$E_{\text{esq}} > E_{\text{dir}} \quad (2.80)$$

$$E_{\text{esq}} \geq E_{\text{dir}} \quad (2.81)$$

Assim como equações, inequações são usadas para descrever propriedades ou restrições sobre uma ou mais incógnitas. Neste caso, a **solução** é o conjunto de valores que a incógnita pode assumir de forma a satisfazer a inequação.

**Exemplo 2.2.1.** São exemplos de inequações envolvendo incógnitas:

a) Inequação de primeiro grau

$$2x + 3 > 5 \quad (2.82)$$

b) Inequação de segundo grau

$$x^2 \leq x - 3 \quad (2.83)$$

c) Inequação racional

$$\frac{2x + 3}{x^2} \geq \frac{5}{x - 3} \quad (2.84)$$

Não existe um procedimento geral para calcular a solução de uma inequação, mas o chamado estudo de sinal pode ser uma estratégia adequada em várias situações. Na sequência, vamos aplicá-la na resolução de algumas inequações.

### 2.2.1 Inequações de primeiro grau

Inequações de primeiro grau são aquelas em que a incógnita aparece apenas na potência 1. Ou seja, qualquer inequação que possa ser escrita na seguinte forma

$$ax + b \gtrless 0, \quad (2.85)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , são coeficientes/parâmetros dados e  $x$  é a incógnita.

Para resolvê-la, podemos usar o **estudo de sinal** da expressão<sup>6</sup>  $ax + b$ . Para que seja nula, temos

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \quad (2.86)$$

Com isso, observamos que no caso de  $a > 0$ , temos que

$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b > 0 \quad (2.87)$$

e

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b < 0. \quad (2.88)$$

Consultemos a Figura 2.1.

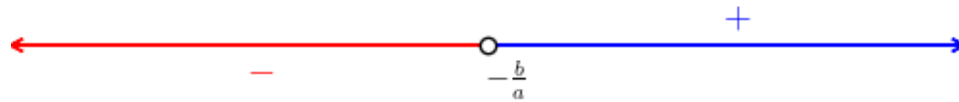


Figura 2.1: Representação geométrica do estudo do sinal de  $ax + b$ , com  $a > 0$ .

Agora, no caso de  $a < 0$ , temos

$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b < 0 \quad (2.89)$$

e

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b > 0. \quad (2.90)$$

Consultemos a Figura 2.2.

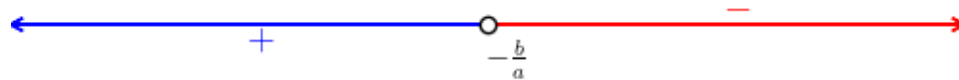


Figura 2.2: Representação geométrica do estudo do sinal de  $ax + b$ , com  $a < 0$ .

<sup>6</sup>Lembremos a tricotomia dos números reais. Consulte a Subseção 1.3.3.

**Exemplo 2.2.2.** Vamos resolver

$$4 + x \geq -x \quad (2.91)$$

Primeiramente, vamos reescrever a inequação no formato da (2.85). Para tanto, calculamos

$$4 + x + x \geq -x + x \quad (2.92)$$

$$4 + 2x \geq 0 \quad (2.93)$$

$$2x + 4 \geq 0 \quad (2.94)$$

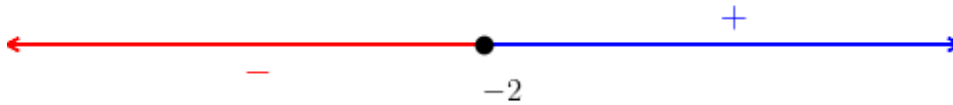


Figura 2.3: Estudo do sinal de  $2x + 4$ .

Agora, fazemos o estudo de sinal de  $2x + 3$ . Temos

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2. \quad (2.95)$$

Daí, segue que

$$x > -2 \Rightarrow 2x + 4 > 0 \quad (2.96)$$

e

$$x < -2 \Rightarrow 2x + 4 < 0 \quad (2.97)$$

Consulte a Figura 2.3. Logo, concluímos que a solução é  $x \in [-2, \infty)$ .

Com o [SymPy](#), podemos computar a solução deste problema com os seguintes comandos

```
1 >>> from sympy import *
2 >>> x = symbols('x')
3 >>> solve_univariate_inequality(4 + x >= -x, x)
4 (-2 <= x) & (x < oo)
```

Em alguns casos, é possível calcular a solução apenas a partir de manipulações algébricas.

**Exemplo 2.2.3.** Vamos resolver

$$-2x < 4 \quad (2.98)$$

Começamos multiplicando ambos os lados da inequação por  $-1$  para obtermos<sup>7</sup>

$$2x > -4 \quad (2.99)$$

Agora, multiplicamos por  $\frac{1}{2}$ , como segue

$$\frac{1}{2} \cdot 2x > \frac{1}{2} \cdot (-4) \quad (2.100)$$

$$x > -2 \quad (2.101)$$

Donde, temos a solução  $x \in (-2, \infty)$ .

Verifique usando o [SymPy](#)!

## 2.2.2 Produtos ou quocientes

Inequações envolvendo produtos ou quocientes de expressões de primeiro grau podemos ser resolvidas fazendo-se o **estudo de sinal**.

**Exemplo 2.2.4.** Vamos resolver

$$(x - 1)(2 - x) < 0. \quad (2.102)$$



Figura 2.4: Estudo do sinal de  $(x - 1)(2 - x)$ .

<sup>7</sup>Notemos que a desigualdade se inverte ao multiplicarmos a inequação por um número negativo.

Para tanto, fazemos os estudos de sinais do primeiro fator  $(x - 1)$  e do segundo fator  $(x + 1)$ . Em seguida, fazemos o estudo de sinal do produto  $(x - 1)(x + 1)$ . Neste caso, obtemos a Figura 2.4. Com isso, temos que a solução é  $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ .

Verifique usando o [SymPy!](#)

No caso de quocientes, devemos nos atentar para o fato de que o denominador não seja nulo.

**Exemplo 2.2.5.** Vamos resolver

$$\frac{x - 1}{2 - x} \geq 0. \quad (2.103)$$

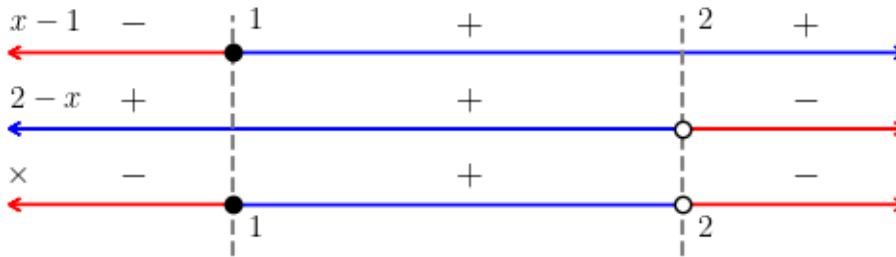


Figura 2.5: Estudo do sinal de  $(x - 1)/(2 - x)$ .

Para tanto, fazemos os estudos de sinais do primeiro fator  $(x - 1)$  e do segundo fator  $(x + 1)$ . Em seguida, fazemos o estudo de sinal do quociente  $(x - 1)(x + 1)$ . Neste caso, obtemos a Figura 2.5. Com isso, temos que a solução é  $x \in [1, 2)$ .

Verifique usando o [SymPy!](#)

## Exercícios

**Exercício 2.2.1.** Resolva as seguintes inequações

- a)  $x - 1 < 0$
- b)  $2 - x \geq 0$



c)  $2 - 2x > 5$

d)  $3x + 2 \leq 3 - x$

**Exercício 2.2.2.** Resolva as seguintes inequações

1.  $(x - 2)(x + 1) > 0$

2.  $(x - 2)(1 - x) \geq 0$

3.  $(x - 2)(1 - x) < 0$

4.  $(5x - 2)(1 - 3x) \leq 0$

**Exercício 2.2.3.** Resolva as seguintes inequações

1.  $(x - 2)/(x + 1) > 0$

2.  $(x - 2)/(1 - x) \geq 0$

3.  $(x - 2)/(1 - x) < 0$

4.  $(5x - 2)/(1 - 3x) \leq 0$

**Exercício 2.2.4.** Resolva a seguinte inequação

$$x^2 - 4 < 0 \tag{2.104}$$

**Exercício 2.2.5.** Resolva a seguinte inequação

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \geq 0 \tag{2.105}$$

# Capítulo 3

## Funções

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

### 3.1 Definição e Gráfico de Funções

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

#### 3.1.1 Definição

[\[YouTube\]](#) | [\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

Uma **função** de um conjunto  $D$  em um conjunto  $Y$  é uma regra que associa um único elemento  $y \in Y$  a cada dado elemento  $x \in D$ . Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo,  $f$  e escrevemos

$$f : D \mapsto Y, y = f(x) \quad (3.1)$$

para denotar que a função recebe **valor de entrada** em  $D$  e fornece **valor de saída** em  $Y$ , seguindo uma **regra de associação** preestabelecida  $y = f(x)$ . Usualmente,  $D$  é chamado **conjunto de entrada** e  $Y$  de **conjunto de saída**.

**Observação 3.1.1.** No [Python](#), podemos definir uma função abstrata  $f$  com o seguinte código

```
1     from sympy import *
2     f = Function('f')
```

Para restringirmos o conjunto de saída aos números reais, usamos

```
1      f = Function('f', real=True)
```

**Exemplo 3.1.1.** Consultemos os seguintes exemplos:

a)  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, y = 2x - 1$

A função  $f$  toma valor de entrada  $x$  no conjunto dos números reais  $D = \mathbb{R}$  e fornece o valor de saída  $y = 2x - 1$ , também no conjunto dos números reais  $Y = \mathbb{R}$ . A regra de associação é  $y = 2x - 1$ . Seguem alguns exemplos de aplicação:

$$f(x) = 2x - 1 \quad (3.2)$$

$$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3 \quad (3.3)$$

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 \quad (3.4)$$

$$f(z) = 2z - 1, \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

No [Python](#), podemos definir esta função com o seguinte código

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x', real=True)
3      f = Lambda(x, 2*x-1)
```

Com isso, temos

```
1      In : f(x)
2      Out: 2*x - 1
3
4      In : f(-1)
5      Out: -3
6
7      In : f(sqrt(2))
8      Out: -1 + 2*sqrt(2)
9
10     In : z = Symbol('z', real=True)
11     In : f(z)
12     Out: 2*z - 1
```

b)  $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}, y = \frac{1}{x}$

A função  $g$  toma um valor de entrada em  $D = \mathbb{Z}$  e fornece o valor de saída  $y = \frac{1}{x}$  no conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ . A regra de associação é  $y = \frac{1}{x}$ . Segue alguns exemplos de aplicação:

$$g(2) = \frac{1}{2} \quad (3.6)$$

$$g(-5) = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \quad (3.7)$$

$$g(u) = \frac{1}{u}, \quad \forall u \in \mathbb{Z}^* \quad (3.8)$$

No [Python](#), podemos definir esta função com o seguinte código

```
1      from sympy import *
2      x = Symbol('x', integer=True)
3      g = Lambda(x, 1/x)
```

Com isso, temos

```
1      In : g(x)
2      Out: 1/x
3
4      In : g(2)
5      Out: 1/2
6
7      In : g(-5)
8      Out: -1/5
9
10     In : u = Symbol('u', integer=True)
11     In : g(u)
12     Out: 1/u
```

**Observação 3.1.2.** Ao longo do texto, vamos assumir que as funções são definidas de  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , salvo explicitamente escrito diferente. Assim sendo, vamos passar a usar a notação simplificada

$$f : x \mapsto f(x). \quad (3.9)$$

Mais ainda, as funções serão descritas diretamente de suas regras associação.

**Observação 3.1.3.** No [SymPy](#), as computações são realizadas no conjunto dos números complexos. Portanto, deve-se tomar alguns cuidados na interpretação dos resultados. Por exemplo,  $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$  e com o [SymPy](#), temos

```
1      In : from sympy import *
2      In : sqrt(-1)
3      Out: I
```

onde,  $I$  denota o número imaginário  $i = \sqrt{-1}$ .

### 3.1.2 Domínio e Imagem

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

O conjunto  $D$  de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. Em notação de conjunto, escrevemos

$$D_f := \{x \in D : f(x) \in Y\}, \quad (3.10)$$

i.e. o domínio de  $f$ , denotado por  $D_f$ , é o conjunto de todos os valores  $x \in D$ , tal que  $f(x) \in Y$ <sup>1</sup>.

**Exemplo 3.1.2.** Estudemos os seguintes casos.

a)  $f : x \mapsto f(x), y = x^2$

Observamos que, dado qualquer valor de entrada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2$  está definido e é, também, um número real. Desta forma, a função  $f$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.

$$D_f = \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Neste caso, dizemos que  $f$  está **definida em toda parte**.

b)  $g : x \mapsto g(x), y = \frac{1}{x}$ :

Lembramos que a divisão por zero não está definida. A expressão  $1/x$  está definida para todo número real não nulo, i.e.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Logo, o domínio de  $g$  é

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.12)$$

Equivalentemente, escrevemos que  $g$  está definida para todo  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , ou ainda, simplesmente para todo  $x \neq 0$ .

---

<sup>1</sup>O valor de saída  $f(x)$  pertence ao conjunto  $Y$ .

c)  $y = \sqrt{1 - x^2}$

A partir da regra, entendemos que  $y$  é função de  $x$ , i.e.  $y \mapsto y(x)$ . Aqui, observamos que a raiz quadrada está definida apenas para números reais não negativos. Logo, esta função está definida para  $x$  tal que

$$1 - x^2 \geq 0 \quad (3.13)$$

$$-x^2 \geq -1 \quad (3.14)$$

$$x^2 \leq 1 \quad (3.15)$$

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (3.16)$$

Concluimos que seu domínio é  $x \in (-1, 1)$ .

Dada uma função  $f : D \mapsto Y$ , o conjunto de todos os valores  $f(x) \in Y$  tal que  $x \in D$  é chamado de **imagem** da função. Em notação de conjunto, temos

$$I_f = \{y \in Y : y = f(x) \wedge x \in D\}, \quad (3.17)$$

i.e. o conjunto de todos os valores  $y \in Y$  tal que  $y = f(x)$  e  $x \in D$ .

**Exemplo 3.1.3.** Estudemos os seguintes casos.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2$ :

Observamos que para qualquer número real  $x$ , temos  $y = x^2 \geq 0$ . Além disso, para cada número real não negativo  $y$ , temos que

$$x = \sqrt{y} \quad (3.18)$$

$$x^2 = (\sqrt{y})^2 \quad (3.19)$$

$$y = x^2 \quad (3.20)$$

Logo, concluimos que a imagem de  $f$  é

$$I_f = \mathbb{R}_+, \quad (3.21)$$

i.e. o conjunto de todos os  $y \geq 0$ .

b)  $y = 1/x$ :

Primeiramente, observemos que se  $y = 0$ , então não existe número real tal que  $0 = 1/x$ . Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por

outro lado, dado qualquer número  $y \neq 0$ , temos que

$$x = \frac{1}{y} \quad (3.22)$$

$$y = \frac{1}{x}. \quad (3.23)$$

Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

c)  $y = \sqrt{1 - x^2}$ :

No Exemplo 3.1.2, vimos que esta função está definida apenas para  $-1 \leq x \leq 1$ . Desta forma, temos que

$$0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \quad (3.24)$$

$$0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \quad (3.25)$$

Ou seja, a imagem desta função é o intervalo  $[0, 1]$ .

**Observação 3.1.4.** Em aplicações, o domínio e imagem de funções também ficam restritos à modelagem do problema. Por exemplo, pela [Lei geral dos gases](#), o produto da pressão  $P$  pelo volume  $V$  de uma gás é função da temperatura  $T$  como segue

$$P = \frac{K}{V_0} \cdot T, \quad (3.26)$$

onde  $V_0$  é o volume dado do gás e  $K > 0$  é uma constante que depende do gás. A temperatura é dada em [Kelvin](#), logo  $T \geq 0$ . Entendendo a pressão  $P$  como função de  $T$ , temos que o domínio é  $T_0 < T < T_1$ , onde  $T_0$  é a menor temperatura que o gás admite e  $T_1$  é a maior temperatura que o gás admite. A imagem é, então,  $\frac{K}{V_0}T_0 < P < \frac{K}{V_0}T_1$ .

### 3.1.3 Gráfico

O **gráfico** de uma função  $f$  é o conjunto dos **pontos** ou **pares ordenados**  $(x, f(x))$  tal que  $x$  pertence ao domínio da função. Mais precisamente, para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico é o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{D} \times \mathbb{Y} : x \in D_f\}. \quad (3.27)$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um **plano cartesiano**.

**Exemplo 3.1.4.** Na sequência, temos os esboços dos gráficos de funções selecionadas.

a)  $f(x) = x^2$

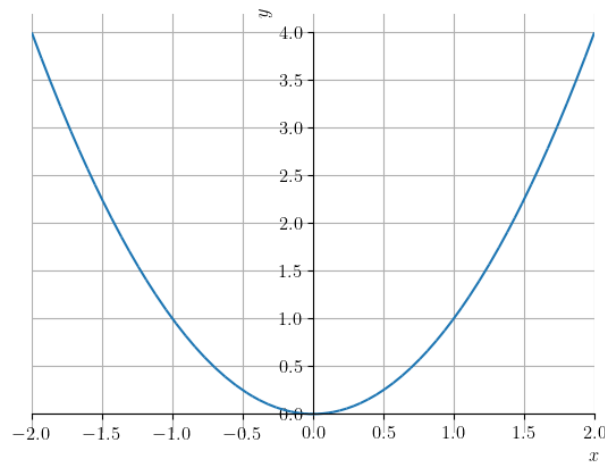


Figura 3.1: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$ .

Com o [SymPy](#), podemos plotar este gráfico com o seguinte código.

```
1 from sympy import *
2 x = Symbol('x', real=True)
3 plot(x**2, (x,-2, 2))
```

b)  $y = \frac{1}{x}$





Figura 3.2: Esboço do gráfico de  $y = \frac{1}{x}$ .

Com o [SymPy](#), podemos plotar este gráfico com o seguinte código

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x', real=True)
3      plot(1/x, (x, -2, 2), ylim=[-6, 6])
```

c)  $y = \sqrt{1 - x^2}$

Figura 3.3: Esboço do gráfico de  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

Com o [SymPy](#), podemos plotar este gráfico com o seguinte código

```
1      from sympy import *
2      x = Symbols('x', real=True)
3      plot(sqrt(1 - x**2), (x, -1, 1))
```

### 3.1.4 Categorias de Funções

[\[Vídeo\]](#) | [\[Áudio\]](#) | [\[Contatar\]](#)

#### Funções Algébricas

**Funções algébricas** são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Funções polinomiais e as funções algébricas derivadas são estudadas nas próximas seções.

**Exemplo 3.1.5.** São exemplos de funções algébricas:

- a)  $f(x) = 2$
- b)  $g(x) = 2x - 1$

c)  $h(x) = 2 - x^3 + x$

d)  $f_1(u) = \frac{u^2 + 2u + 1}{u - 1}$

e)  $y = 2^z - \sqrt{z - 1}$

### Funções Transcendentes

**Funções transcendent**es são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais são introduzidas nas próximas seções.

**Exemplo 3.1.6.** São exemplos de funções transcendent

a)  $f(x) = e^{-x^2}$

b)  $y = \log_2(2x - 1)$

c)  $g(v) = \text{sen}(v) - \cos(v)$

d)  $h(u) = \text{arctg}(u)$

### Funções Definidas por Partes

**Funções definidas por partes** são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**<sup>2</sup>

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 3.4.

---

<sup>2</sup>Esta função também pode ser definida por  $|x| = \sqrt{x^2}$ .



Figura 3.4: Esboço do gráfico da função valor absoluto  $y = |x|$ .

Com o [SymPy](#), a função valor absoluto é definida por `abs()` ou `Abs()`. Por exemplo, temos

```
1 In : from sympy import *
2 In : abs(-1)
3 Out: 1
```

Use o [SymPy](#) para plotar o gráfico da função valor absoluto! Verifique com a Figura 3.4.

## Exercícios

[[Vídeo](#)] | [[Áudio](#)] | [[Contatar](#)]

**Exercício 3.1.1.** Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e.  $f(x) = x$ . Então, faça o esboço de seu gráfico.

**Exercício 3.1.2.** Determine o domínio e a imagem da função  $f(x) = x^2 + 1$ . Então, faça o esboço de seu gráfico.

**Exercício 3.1.3.** Determine o domínio e a imagem da função  $f(x) = 1 - x^2$ . Então, faça o esboço de seu gráfico.

**Exercício 3.1.4.** Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \quad (3.29)$$

Então, faça o esboço de seu gráfico.

**Exercício 3.1.5.** Determine o domínio e a imagem da função valor absoluto.

## 3.2 Função Afim

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \quad (3.30)$$

sendo  $m$  e  $b$  parâmetros<sup>3</sup> dados. O parâmetro  $m$  é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro  $b$  é chamado de **coeficiente constante**<sup>4</sup>.

Quando  $m = 0$ , temos uma **função constante**  $f(x) = b$ . Esta tem domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $\{b\}$ . Quando  $b = 0$ , temos uma **função linear**  $f(x) = mx$ , cujo domínio é  $(-\infty, \infty)$  e imagem é  $(-\infty, \infty)$ .

De forma geral, toda função linear com  $m \neq 0$  tem  $(-\infty, \infty)$  como domínio e imagem.

**Exemplo 3.2.1.** A Figura 3.5 mostra esboços dos gráficos das funções afins  $f(x) = -5/2$ ,  $f(x) = 2$  e  $f(x) = 2x - 1$ .

---

<sup>3</sup>números reais.

<sup>4</sup>Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

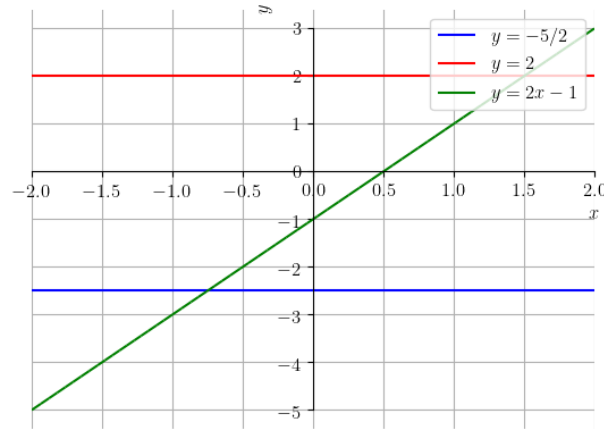


Figura 3.5: Esboços dos gráficos das funções afins  $y = -5/2$ ,  $y = 2$  e  $y = 2x - 1$  discutidas no Exemplo 3.2.1.

Com o [SymPy](#), podemos plotar o gráfico mostrado na Figura 3.5 com o seguinte código:

```

1     from sympy import *
2     x = Symbol('x')
3     p = plot(-5/2, (x,-2,2), line_color="blue", show=False)
4     q = plot(2, (x,-2,2), line_color="red", show=False)
5     p.extend(q)
6     q = plot(2*x-1, (x,-2,2), line_color="green", show=False)
7     p.extend(q)
8     p[0].label = "$y=-5/2$"
9     p[1].label = "$y=2$"
10    p[2].label = "$y=$"
11    p.legend = True
12    p.show()
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular  $m$  controla a **inclinação da reta** em relação ao eixo  $x$ <sup>5</sup>. Quando  $m = 0$ , temos uma reta horizontal. Quando  $m > 0$  temos uma

---

<sup>5</sup>eixo das abscissas

reta com inclinação positiva (crescente) e, quando  $m < 0$  temos uma reta com inclinação negativa.

**Exemplo 3.2.2.** A Figura 3.6 mostra esboços dos gráficos das funções lineares  $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = 2x$ ,  $f_4(x) = -2x$ ,  $f_5(x) = -x$  e  $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$ .



Figura 3.6: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo 3.2.2.

Verifique, plotando os gráficos com o [SymPy](#)!



Figura 3.7: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo **ângulo de declividade** (veja a Figura 3.7). Para definirmos este ângulo, sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ ,  $x_0 < x_1$ , pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim  $f(x) = mx + b$ . O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_0)$  e o segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_1)$ . Denotando este ângulo por  $\theta$ , temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad (3.31)$$

$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (3.32)$$

$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \quad (3.33)$$

$$= m, \quad (3.34)$$

o que justifica chamar  $m$  de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , com  $x_0 \neq x_1$ , determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a ex-



pressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \quad (3.35)$$

$$mx_1 + b = y_1 \quad (3.36)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \quad (3.37)$$

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad (3.38)$$

Daí, substituindo o valor de  $m$  na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \quad (3.39)$$

$$b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0 \quad (3.40)$$

Ou seja, a expressão da função linear (**equação da reta**) que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_m (x - x_0) + y_0. \quad (3.41)$$

**Exemplo 3.2.3.** Vamos traçar o esboço da reta que representa o gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ . Para tanto, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função  $f(x) = -x - 1$ , temos

$x$	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, -2)$  em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura 3.8.



Figura 3.8: Esboço do gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ .

Plote o gráfico com o [SymPy](#) e compare com o seu esboço!

**Exemplo 3.2.4.** Vamos determinar a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(1, -1)$  e  $(2, 1)$ . Para tanto, vamos usar (3.41). Tomamos

$$(x_0, y_0) = (1, -1) \quad (3.42)$$

$$(x_1, y_1) = (2, 1) \quad (3.43)$$

Então, substituindo em (3.41) temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \quad (3.44)$$

De (3.41), temos

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad (3.45)$$

$$= 2(x - 1) + (-1) \quad (3.46)$$

$$= 2x - 3. \quad (3.47)$$

Ou seja, a função afim desejada é  $f(x) = 2x - 3$ .

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
x0 = 1
y0 = -1
x1 = 2
y1 = 1
m = (y1-y0)/(x1-x0)
f = Lambda(x, m*(x-x0) + y0)
print(f"f(x) = {f(x)}")
```

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.2.1.** Determine o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções afins:

a)  $f(x) = -100x + 1$

b)  $y = -\pi$

c)  $h(v) = 2 + x$

**Exercício 3.2.2.** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f_1(x) = x$

b)  $f_2(x) = -x$

c)  $f_3(x) = x - 1$

d)  $f_4(x) = -x + 1$

**Exercício 3.2.3.** Determine a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(-2, 1)$  e  $(0, -2)$ .

**Exercício 3.2.4.** Verifique se as retas  $y = -x - 1$  e  $y = 2x - 3$  se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

**Exercício 3.2.5.** Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 2x - 1$ .

### 3.3 Função Potência

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Uma função da forma  $f(x) = x^n$ , onde  $n \neq 0$  é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potência têm comportamentos característicos conforme o valor de  $n$ . Quando  $n$  é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são  $(-\infty, \infty)$ . Veja a Figura 3.9.

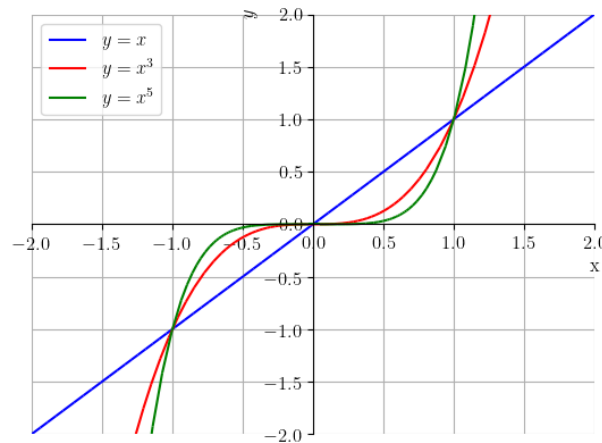


Figura 3.9: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x$ ,  $y = x^3$  e  $y = x^5$ .

Funções potência com  $n$  positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem  $[0, \infty)$ . Veja a Figura 3.10.

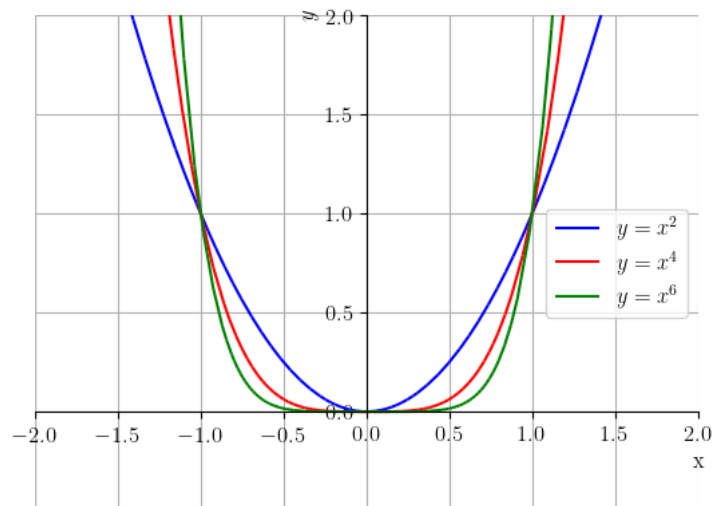


Figura 3.10: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x^2$ ,  $y = x^4$  e  $y = x^6$ .

Funções potência com  $n$  inteiro negativo ímpar não são definidas em  $x = 0$ , tendo domínio e imagem igual a  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Também, quando  $n$  inteiro negativo par, a função potência não está definida em  $x = 0$ , tem domínio  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , mas imagem  $(0, \infty)$ . Veja a Figura 3.11.

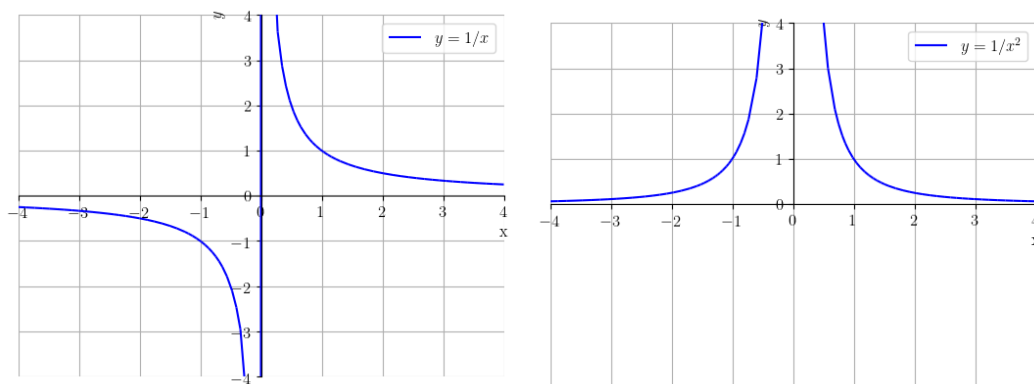


Figura 3.11: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = 1/x$  (esquerda),  $y = 1/x^2$  (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando  $n = 1/2$ ,  $1/3$ ,  $3/2$  e

2/3. Veja a Figura 3.12.

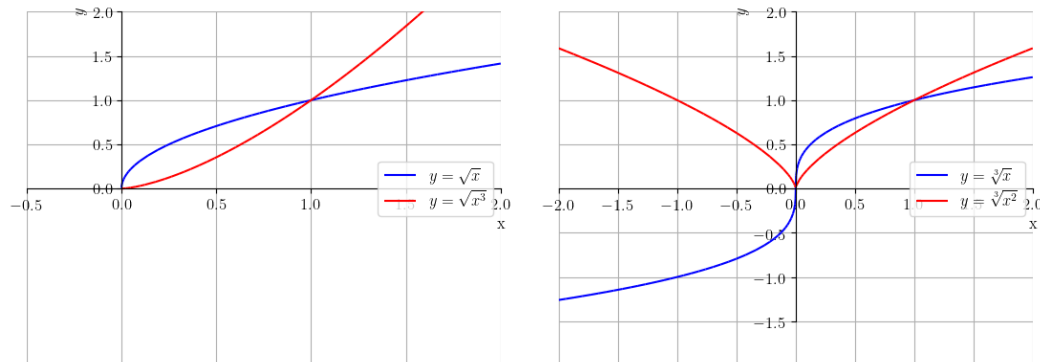


Figura 3.12: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{x^3}$ . Direita:  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

## Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.3.1.** Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^{5/2}$ ;

b)  $g(x) = x^{5/3}$ .

**Solução.**

- a) Vamos analisar a função  $f(x) = x^{5/2}$ . Como  $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$  e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que  $x^5$  deve ser não negativo. Daí,  $x$  deve ser não negativo. Logo, o domínio de  $f(x) = x^{5/2}$  é  $[0, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura 3.13.

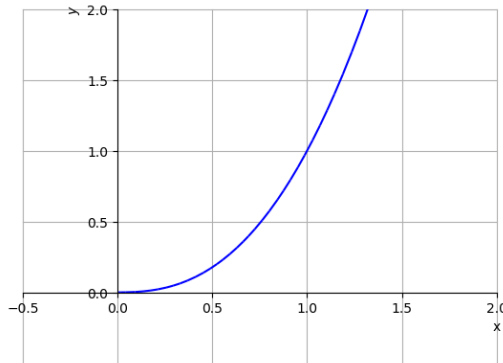


Figura 3.13: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^{5/2}$ .

Verifique o gráfico plotando-o com o [SymPy](#)!

- b) Vamos analisar a função  $g(x) = x^{5/3}$ . Como  $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ , não temos restrição sobre os valores de  $x$ . Logo, o domínio da função  $g$  é  $(-\infty, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura 3.14.



Figura 3.14: Esboço do gráfico de  $g(x) = x^{5/3}$ .

Para plotar o gráfico de  $g(x)$  com o [SymPy](#), digitamos:

```
1 from sympy import *
2 p = plot(real_root(x**5,3),(x,-2,2))
```

◇

**ER 3.3.2.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

**Solução.** Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de interseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa  $x$  tais que

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow 1 = x\sqrt[3]{x} \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad (3.50)$$

$$\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 \quad (3.52)$$

$$\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow x^4 = 1 \quad (3.54)$$

$$\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (3.55)$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 1$ . Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura 3.15. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando  $f(x)$ , temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \quad (3.56)$$

e

$$(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1) \quad (3.57)$$

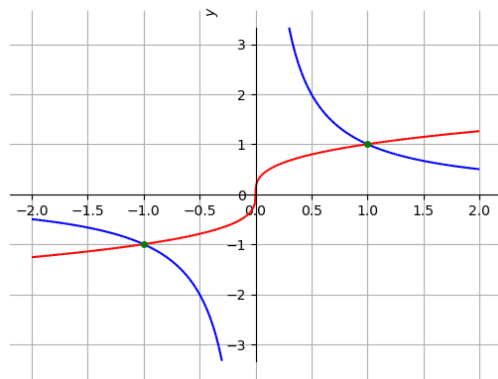


Figura 3.15: Interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  (azul) e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  (vermelho).



Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$  e  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ . De (3.41), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \quad (3.58)$$

$$y = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) + (-1) \quad (3.59)$$

$$y = x + 1 - 1 \quad (3.60)$$

$$y = x. \quad (3.61)$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  tem equação  $y = x$ .

Usando o [SymPy](#), podemos resolver o problema com o seguinte código.

```

1      from sympy import *
2      x = Symbol('x')
3      f = Lambda(x, 1/x)
4      g = Lambda(x, real_root(x,3))
5      # x positivo
6      x = Symbol('x', negative=True)
7      x0 = solve(f(x)-g(x))[0]
8      y0 = f(x0)
9      # x negativo
10     x = Symbol('x', positive=True)
11     x1 = solve(f(x)-g(x))[0]
12     y1 = f(x1)
13
14     print(f"y = {(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0}")
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.3.1.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^7$ ;

b)  $g(x) = x^8$ .

**Exercício 3.3.2.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$ ;

b)  $g(x) = \frac{1}{x^8}$ .

**Exercício 3.3.3.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ;

b)  $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ .

**Exercício 3.3.4.** Determine o(s) ponto(s) de interseção entre as funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = 1/x$ .

**Exercício 3.3.5.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção entre as funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 1/x^2$ .

## 3.4 Função Polinomial

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (3.62)$$

onde  $a_i$  são coeficientes reais,  $a_n \neq 0$  e  $n$  é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte<sup>6</sup>. Polinômios de grau ímpar tem imagem  $(-\infty, \infty)$ . Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem

---

<sup>6</sup>Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é  $(\infty, \infty)$

de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 3.16.

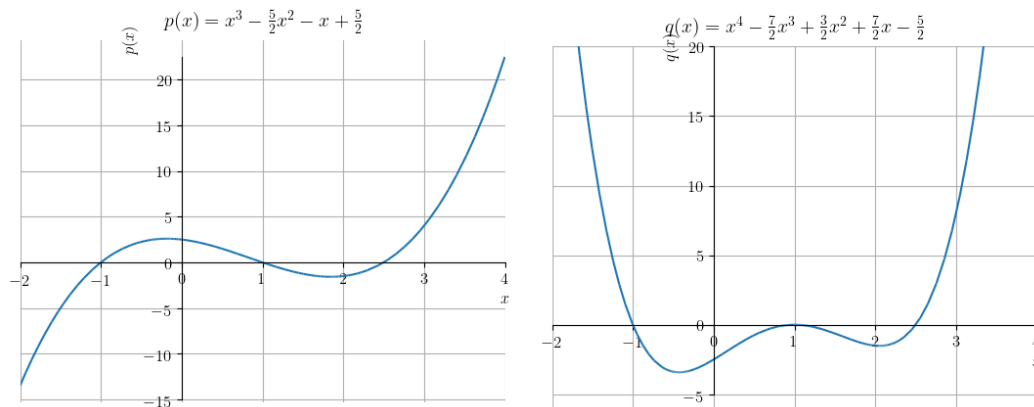


Figura 3.16: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda:  $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$ . Direita:  $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$ .

Quando  $n = 0$ , temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando  $n = 1$ , temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando  $n = 2$  temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando  $n = 3$ , temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

### 3.4.1 Função Quadrática

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (3.63)$$

onde  $a$  é chamado de **coeficiente do termo quadrático**,  $b$  o **coeficiente do termo linear** e  $c$  o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.64)$$

O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando  $a > 0$  e, **côncava para baixo** quando  $a < 0$ . Veja a Figura 3.17.

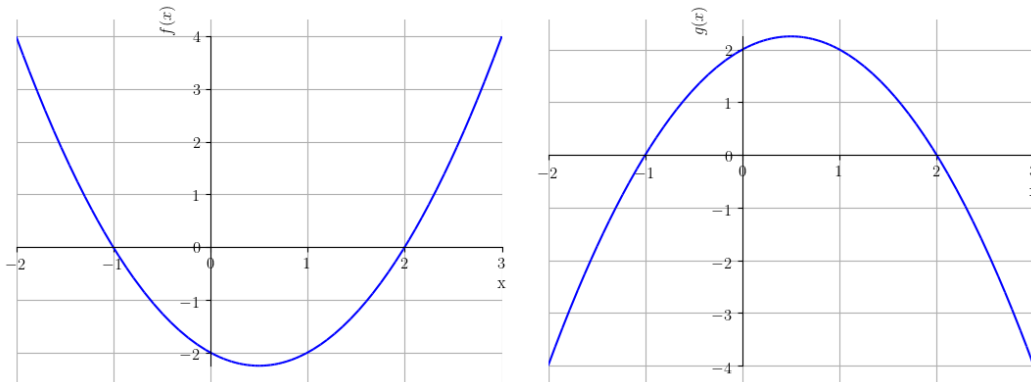


Figura 3.17: Esboço dos gráficos das funções quadráticas:  $f(x) = x^2 - x - 2$  (esquerda) e  $g(x) = -x^2 + x + 2$  (direita).

O **vértice** da parábola que representa uma função quadrática  $f(x)$  com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor mínimo (máximo)** em todo o seu domínio natural. Quando  $f$  têm zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros  $x_0$  e  $x_1$  da função, i.e. o vértice  $V = (x_v, y_v)$  é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \quad (3.65)$$

O valor  $x_v$  é a abscissa do ponto em que a função quadrática  $f$  atinge o **valor máximo (valor mínimo)**  $y_v$ . Em geral, o vértice é dado por

$$(x_v, y_v) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \quad (3.66)$$

## Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.4.1.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

**Solução.** Determinar os zeros da função  $f$  significa encontrar todos os valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$  (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de  $f$  intercepta o eixo das abscissas). Temos

$$f(x) = 0 \quad (3.67)$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad (3.68)$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0 \quad (3.69)$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0. \quad (3.70)$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (3.64) na equação  $x^2 - x - 2 = 0$ , obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.71)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad (3.72)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad (3.73)$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \quad (3.74)$$

$$= -1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad (3.75)$$

Com isso, temos que os zeros da função  $f$  ocorrem nos pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ .

Com o [SymPy](#), podemos calcular os zeros da função  $f$  com o seguinte comando:

```
1 from sympy import *
2 solve(x**3-x**2-2*x)
```

◇

**ER 3.4.2.** Determine o valor mínimo da função  $f(x) = x^2 - x - 2$ .

**Solução.** Como  $f$  é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo,  $f$

atinge seu valor mínimo no seu vértice, que tem abscissa

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad (3.76)$$

$$= -\frac{-1}{2 \cdot 1} \quad (3.77)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (3.78)$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de  $f$  é  $x_v = 1/2$  e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 \quad (3.79)$$

$$= \frac{1 - 2 - 8}{4} \quad (3.80)$$

$$= -\frac{9}{4}. \quad (3.81)$$

Usando [SymPy](#), podemos resolver este exercício com o seguinte código:

```
1  from sympy import *
2  x = Symbol('x')
3  a = 1
4  b = -1
5  c = -2
6  f = Lambda(x, a*x**2 + b*x + c)
7  xv = -b/(2*a)
8  print(f"Valor mínimo = {f(xv)}")
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar](#)

**Exercício 3.4.1.** Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções polinomiais:

1.  $f(x) = 1$
2.  $g(x) = -x + 1$

3.  $h(x) = x^2 - 1$

4.  $f_1(x) = x^3$

**Exercício 3.4.2.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$ .

**Exercício 3.4.3.** Determine o valor máximo da função  $f(x) = -x^2 + x + 2$ .

**Exercício 3.4.4.** Faça um esboço da região determinada entre os gráficos de  $y = 0$  e  $y = x^2 - 1$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ .

## 3.5 Função Racional

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (3.82)$$

onde  $p(x)$  e  $q(x) \neq 0$  são polinômios.

Funções racionais não estão definidas nos zeros de  $q(x)$ . Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura [3.18](#) para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \quad (3.83)$$



Figura 3.18: Esboço do gráfico da função racional  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ .

Com o estudo do **cálculo de limites**, veremos que a reta  $y = 0$  (eixo das abscissas) é uma **assíntota horizontal** e a reta  $x = 1$  (reta tracejada) é uma **assíntota vertical** ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto  $x = 1$  está relacionada ao fato de que o denominador se anula em  $x = 1$ . Ainda, para  $x \neq 1$  temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \quad (3.84)$$

Com isso, podemos concluir que o domínio da função  $f(x)$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.5.1.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \quad (3.85)$$



**Solução.** Como  $f(x)$  é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (3.86)$$

Logo, o domínio de  $f(x)$  é o conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

◇

**ER 3.5.2.** Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x-1}. \quad (3.87)$$

**Solução.** Tendo em vista que o denominador se anula em  $x = 1$ , o domínio de  $g$  é  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que  $g(x) = 1$  para  $x \neq 1$ . I.e.,  $g$  é uma função constante para valores de  $x \neq 1$  e não está definida em  $x = 1$ . Veja a Figura 3.19 para o esboço do gráfico da função  $g$ .

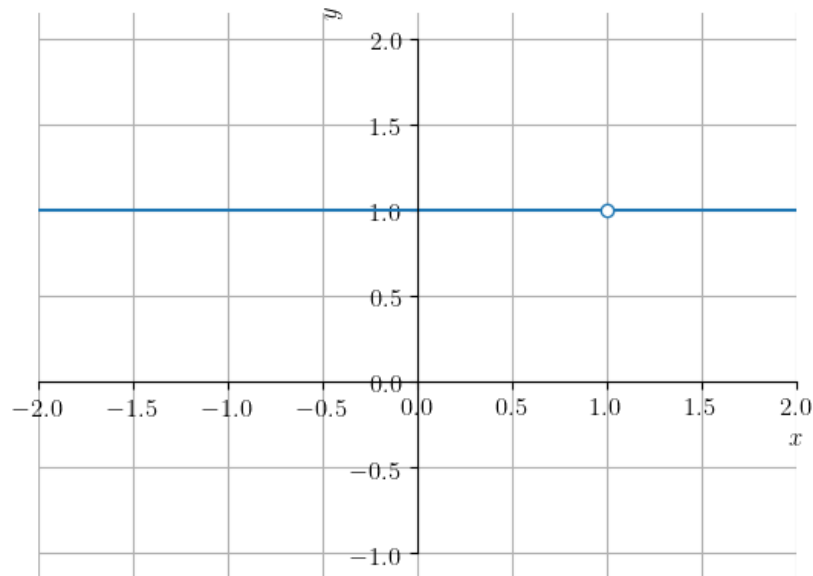


Figura 3.19: Esboço do gráfico da função  $g(x) = (x-1)/(x-1)$ .

Usando o [SymPy](#), os comandos

```
1 from sympy import *
2 plot((x-1)/(x-1), (x, -2, 2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em  $x = 1$ . Isto ocorre, pois os gráficos com o [SymPy](#) são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.

Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

◇

## Exercícios

[[Vídeo](#)] | [[Áudio](#)] | [[Contatar](#)]

**Exercício 3.5.1.** Determine o domínio e faça um esboço do gráfico da função racional

$$y = \frac{1}{x-1} \quad (3.88)$$

**Exercício 3.5.2.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} \quad (3.89)$$

**Exercício 3.5.3.** Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}. \quad (3.90)$$

**Exercício 3.5.4.** Encontre o(s) ponto(s) de interseção entre os gráficos das funções

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (3.91)$$

e

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - x^3} \quad (3.92)$$

**Exercício 3.5.5.** Determine os zeros da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \quad (3.93)$$

## 3.6 Funções Trigonômétricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Funções trigonométricas são funções transcendentais e são construídas a partir do estudo trigonométrico de triângulos retângulos.

### 3.6.1 Seno e Cosseno

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

As funções trigonométricas seno  $y = \text{sen}(x)$  e cosseno  $y = \text{cos}(x)$  podem ser definidas a partir do **círculo trigonométrico** (veja a Figura 3.20). Seja  $x$  o ângulo<sup>7</sup> de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta  $r$  na Figura 3.20). Seja, então,  $(a, b)$  o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária<sup>8</sup>. Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = b, \quad \text{cos}(x) = a. \quad (3.94)$$

A partir da definição, notamos que ambas funções têm domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $[-1, 1]$ .

---

<sup>7</sup>Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.

<sup>8</sup>Circunferência do círculo de raio 1.



Figura 3.20: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 3.21 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3.95)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (3.96)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (3.97)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3.98)$$

$$(3.99)$$

As funções seno e cosseno estão definidas no [SymPy](#) como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de  $\pi/6$ , digitamos:

```
1 from sympy import *
2 sin(pi/6)
```

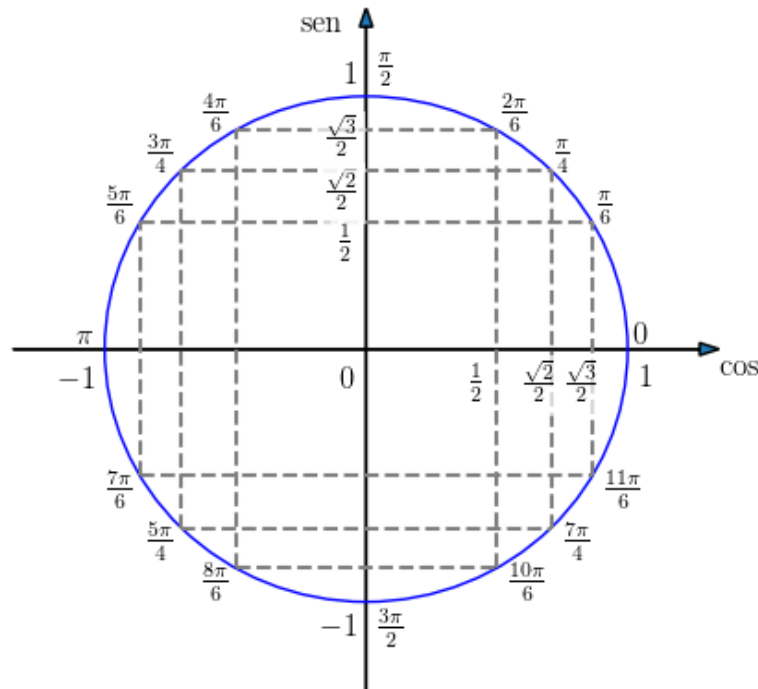


Figura 3.21: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função**  $f(x)$  é dita **periódica** quando existe um número  $p$ , chamado de **período** da função, tal que

$$f(x + p) = f(x) \quad (3.100)$$

para qualquer valor de  $x$  no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, observamos que ambas são periódicas com período  $2\pi$ , i.e.

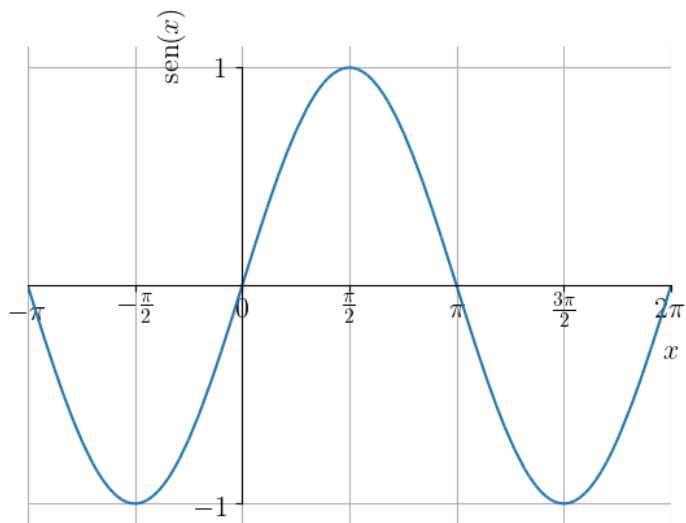
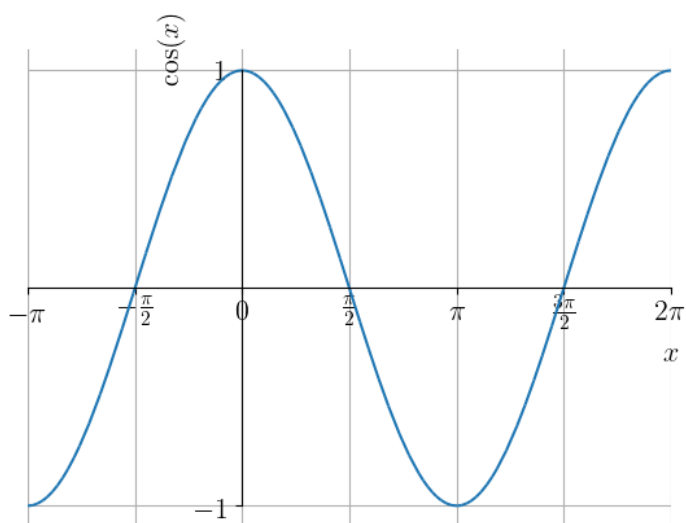
$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x) \quad (3.101)$$

e

$$\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}(x) \quad (3.102)$$

para qualquer valor de  $x$ .

A Figura ?? contém o esboço do gráfico da função seno e a Figura ?? o da função cosseno.

Figura 3.22: Esboço do gráfico de  $y = \sin x$ .Figura 3.23: Esboço do gráfico de  $y = \cos x$ .

### 3.6.2 Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} \quad (3.103)$$

$$\operatorname{cotg}(x) := \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \quad (3.104)$$

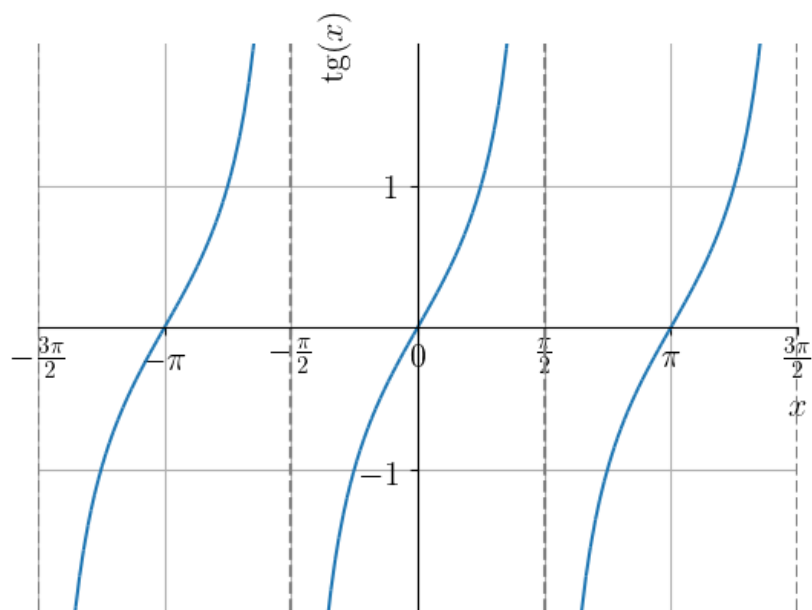
$$\operatorname{sec}(x) := \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \quad (3.105)$$

$$\operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \quad (3.106)$$

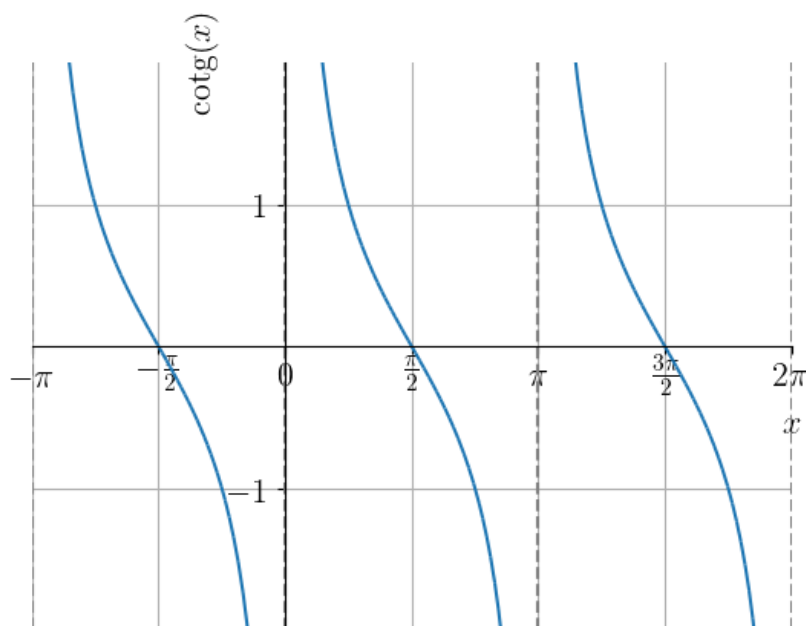
No [Python+SymPy](#), as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções **tan**, **cot**, **sec** e **csc**, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de  $\operatorname{cosec}(\pi/4)$  com o comando

```
1 In : from sympy import *
2 ...: csc(pi/4)
3 Out: sqrt(2)
```

Na Figura [3.24](#), temos o esboço do gráfico da função **tangente** e na Figura [3.25](#) o da **cotangente**. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos  $(2k+1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, \infty)$  e período  $\pi$ .

Figura 3.24: Esboço do gráfico de  $y = \operatorname{tg} x$ .



Figura 3.25: Esboço do gráfico de  $y = \cotg x$ .

Na Figura 3.26, temos os esboços dos gráficos das funções **secante** e **cossecante**. Observemos que a função secante não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$  e período  $\pi$ .

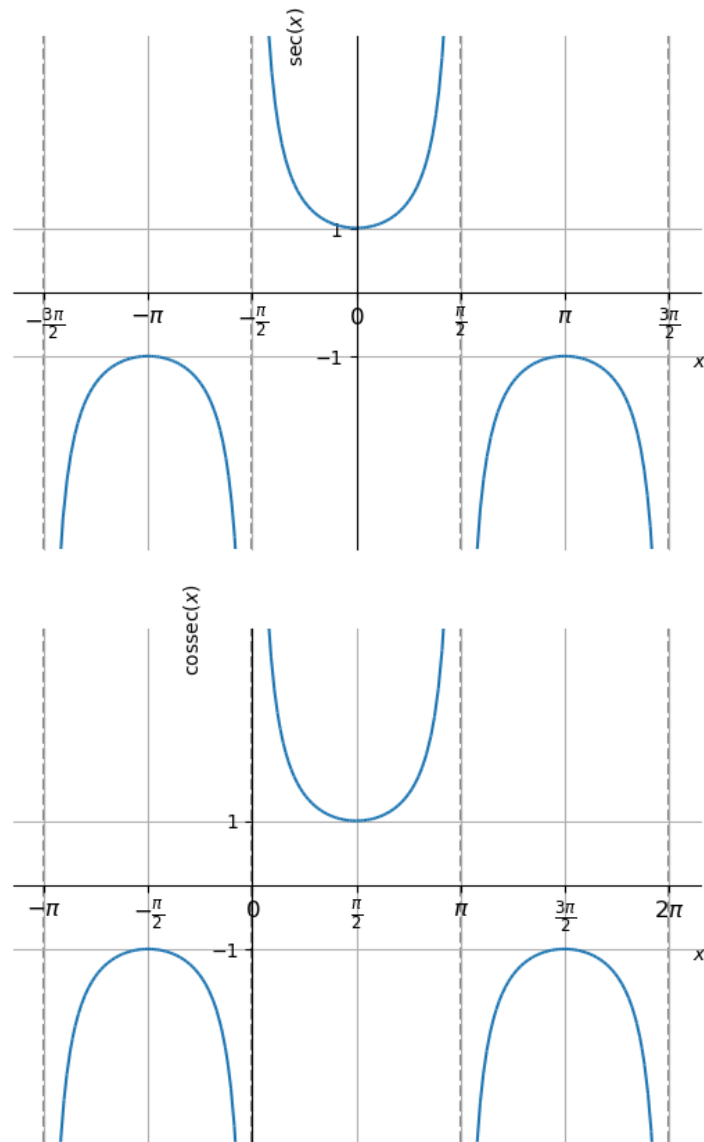


Figura 3.26: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

### 3.6.3 Identidades Trigonômétricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Começemos pela **identidade fundamental**

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (3.107)$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \quad (3.108)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \quad (3.109)$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \quad (3.110)$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y), \quad (3.111)$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (3.112)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (3.113)$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (3.114)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (3.115)$$

## Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.6.1.** Mostre que

$$\cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (3.116)$$

**Solução.** A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (3.117)$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}. \quad (3.118)$$

Então, isolando  $\cos x$ , obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (3.119)$$

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad (3.120)$$

$$\cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (3.121)$$

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.6.1.** Calcule os seguintes valores

- a)  $\operatorname{sen}(7\pi/6)$
- b)  $\cos(7\pi/6)$
- c)  $\operatorname{tg}(7\pi/6)$
- d)  $\operatorname{cotg}(7\pi/6)$
- e)  $\sec(7\pi/6)$
- f)  $\operatorname{cosec}(7\pi/6)$

**Exercício 3.6.2.** Calcule os seguintes valores

- a)  $\operatorname{sen}(-\pi/3)$
- b)  $\operatorname{tg}(-3\pi/4)$
- c)  $\cos(19\pi/6)$

**Exercício 3.6.3.** Mostre que  $\sin x$  é uma **função ímpar**<sup>9</sup>, i.e.

$$\sin x = -\sin(-x) \quad (3.122)$$

para todo número real  $x$ .

**Exercício 3.6.4.** Mostre que  $\cos x$  é uma **função par**<sup>10</sup>, i.e.

$$\cos x = \cos(-x) \quad (3.123)$$

para todo número real  $x$ .

**Exercício 3.6.5.** Determine os pontos de interseção entre as funções  $f(x) = 2x/\pi$  e  $g(x) = \sin(x)$ .

## 3.7 Operações com Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

### 3.7.1 Soma , Diferença , Produto e Quociente

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$  com domínio em comum  $D$ . Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  para todo  $x \in D$  tal que  $g(x) \neq 0$ .

**Exemplo 3.7.1.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$ . Temos:

- a)  $(f + g)(x) = x^2 + x$  e está definida em toda parte.
- b)  $(g - f)(x) = x - x^2$  e está definida em toda parte.

<sup>9</sup>Por definição,  $f(x)$  é função ímpar quando  $f(x) = -f(-x)$ .

<sup>10</sup>Por definição,  $f(x)$  é uma função par quando  $f(x) = f(-x)$ .

c)  $(f \cdot g)(x) = x^3$  e está definida em toda parte.

d)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$  e tem domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ <sup>11</sup>.

### 3.7.2 Função Composta

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$ . Definimos a **função composta** de  $f$  com  $g$  por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \quad (3.124)$$

Seu domínio consiste dos valores de  $x$  que pertençam ao domínio da  $g$  e tal que  $g(x)$  pertença ao domínio da  $f$ . Em notação matemática

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \quad (3.125)$$

**Exemplo 3.7.2.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ . A função composta de  $f$  com  $g$  é

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (3.126)$$

$$= f(x + 1) = (x + 1)^2 \quad (3.127)$$

### 3.7.3 Translação, Contração, Dilatação e Reflexão de Gráficos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característicos no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

### 3.7.4 Translação

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

---

<sup>11</sup>Observemos que não podemos simplificar o  $x$ , pois a função  $y = x$  é diferente da função  $y = x^2/x$ .

Dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que a o gráfico de  $y = f(x) + k$  é uma **translação vertical** do gráfico de  $f$ . Se  $k > 0$ , observamos uma **translação vertical para cima**. Se  $k < 0$ , observamos uma **translação vertical para baixo**.

**Exemplo 3.7.3.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 3.27, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k = x^2 + k$  para  $k = 1$ .

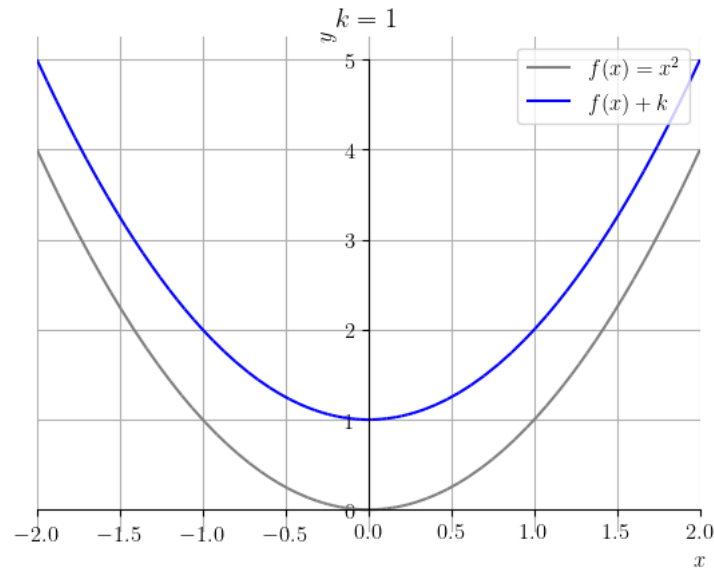


Figura 3.27: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $y = f(x) + k$  com  $k = 1$ .

O seguinte código [Python](#), faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k$ :

```

1     import matplotlib.pyplot as plt
2     from sympy import *
3     plt.style.use('bmh')
4     x = Symbol('x')
5     k = 1
6     f = Lambda(x, x**2)
7     p = plot(f(x), (x, -2, 2), line_color="gray", show=False)
8     q = plot(f(x)+k, (x, -2, 2), line_color="blue", show=False)
9     p.extend(q)
10    p.title = (f"$k = {k}$")
11    p.xlabel = '$x$'
```

```

12     p.ylabel = '$y$'
13     p[0].label = "$f(x) = x^2$"
14     p[1].label = "$f(x)+k$"
15     p.legend = True
16     p.show()

```

Alterare o valor de  $k$  e a função  $f$  para analisar outros casos!

**Translações horizontais** de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que o gráfico de  $y = f(x + k)$  é uma translação horizontal do gráfico de  $f$  em  $k$  unidades. Se  $k > 0$ , observamos uma **translação horizontal para a esquerda**. Se  $k < 0$ , observamos uma **translação horizontal para a direita**.

**Exemplo 3.7.4.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 3.28, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k) = (x + k)^2$  para  $k = 1$ .

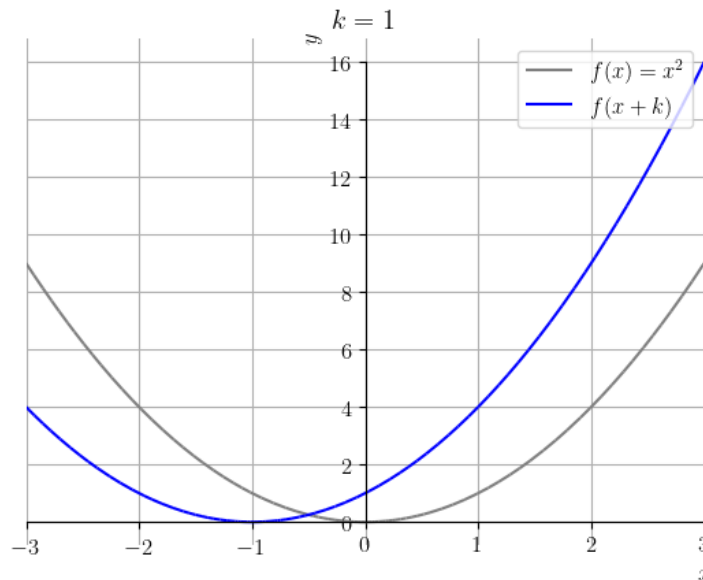


Figura 3.28: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $f(x + k)$  com  $k = 1$ .

O seguinte código [Python](#), faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k)$ :

```

1     import matplotlib.pyplot as plt

```



```

2     from sympy import *
3     plt.style.use('bmh')
4     x = Symbol('x')
5     k = 1
6     f = Lambda(x, x**2)
7     p = plot(f(x), (x, -3, 3), line_color="gray", show=False)
8     q = plot(f(x+k), (x, -3, 3), line_color="blue", show=False)
9     p.extend(q)
10    p.title = (f"$k = {k}$")
11    p.xlabel = '$x$'
12    p.ylabel = '$y$'
13    p[0].label = "$f(x) = x^2$"
14    p[1].label = "$f(x)+k$"
15    p.legend = True
16    p.show()

```

Altere o valor de  $k$  e a função  $f$  para analisar outros casos!

### 3.7.5 Dilatação e Contração

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Sejam dadas uma função  $f$  e uma constante  $\alpha$ . Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$  é uma **dilatação vertical** do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = \alpha f(x)$  é uma **contração vertical** do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma **contração horizontal** do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma **dilatação horizontal** do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ .

**Exemplo 3.7.5.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 3.29, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot x^2$  para  $\alpha = 2$ .

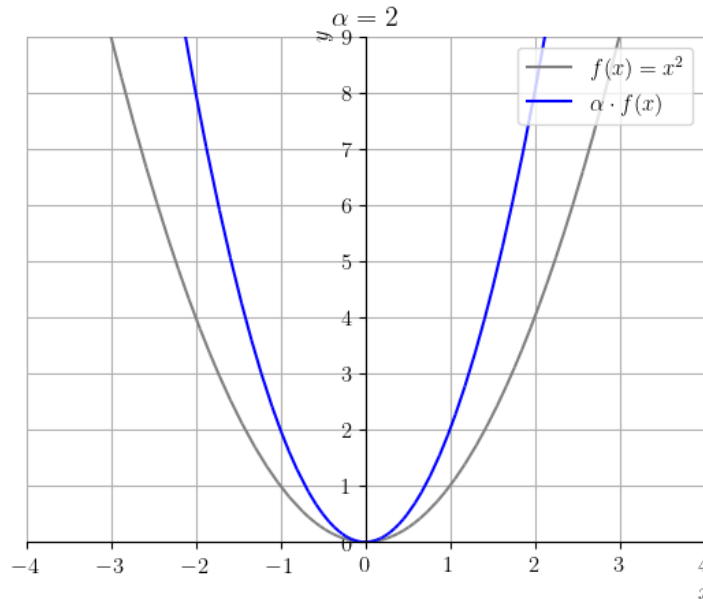


Figura 3.29: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $(\alpha \cdot f)(x)$  com  $\alpha = 2$ .

O seguinte código [Python](#), faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $(\alpha \cdot f)(x)$ :

```

1     import matplotlib.pyplot as plt
2     from sympy import *
3     plt.style.use('bmh')
4     x = Symbol('x')
5     alpha = 2
6     f = Lambda(x, x**2)
7     p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
8     q = plot(alpha * f(x),(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
9     p.extend(q)
10    p.title = (f"$\\alpha = {alpha}$")
11    p.xlabel = '$x$'
12    p.ylabel = '$y$'
13    p[0].label = "$f(x) = x^2$"
14    p[1].label = "$(\alpha \cdot f)(x)$"
15    p.legend=True
16    p.show()

```

Alterare o valor de `alpha` e a função `f` para estudar outros casos!

**Exemplo 3.7.6.** Seja  $f(x) = x^3$ . A Figura 3.30, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^3$  para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

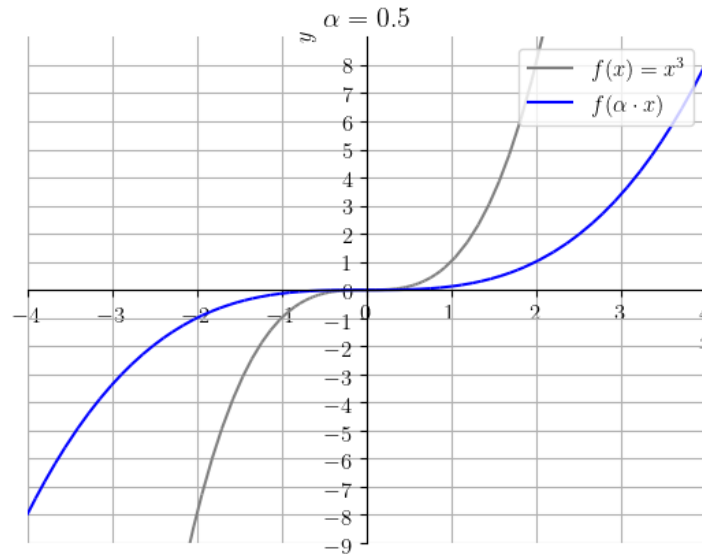


Figura 3.30: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^3$  e  $f(\alpha \cdot x)$  com  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

O seguinte código [Python](#), faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x)$ :

```

1     import matplotlib.pyplot as plt
2     from sympy import *
3     plt.style.use('bmh')
4     x = Symbol('x')
5     alpha = 0.5
6     f = Lambda(x, x**3)
7     p = plot(f(x), (x, -4, 4), ylim=[-9, 9], line_color="gray", show=False)
8     q = plot(f(alpha*x), (x, -4, 4), ylim=[-9, 9], line_color="blue", show=False)
9     p.extend(q)
10    p.title = (f"$\\alpha = {alpha}$")
11    p.xlabel = '$x$'
12    p.ylabel = '$y$'
13    p[0].label = "$f(x) = x^3$"
14    p[1].label = "$f(\\alpha \\cdot x)$"
15    p.legend=True
16    p.show()

```

Altere o valor de `alpha` e a função `f` para estudarmos outros casos!

### 3.7.6 Reflexão

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja dada uma função  $f$ . O gráfico da função  $y = -f(x)$  é uma **reflexão em torno do eixo das abscissas** do gráfico da função  $f$ . Já, o gráfico da função  $y = f(-x)$  é uma **reflexão em torno do eixo das ordenadas** do gráfico da função  $f$ .

**Exemplo 3.7.7.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura 3.32, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$ .

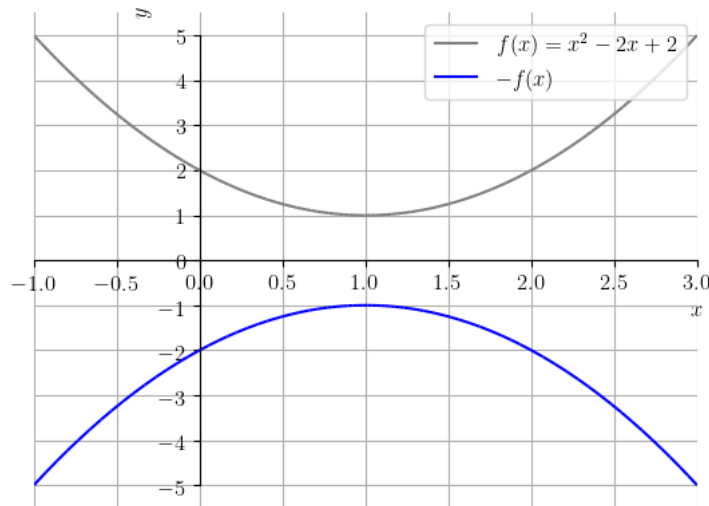


Figura 3.31: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $-f(x)$ .

O seguinte código [Python](#), faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x)$ :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from sympy import *
3 plt.style.use('bmh')
4 x = Symbol('x')
5 f = Lambda(x, x**2-2*x+2)
6 p = plot(f(x),(x,-1,3),ylim=[-5,5],line_color="gray",show=False)
7 q = plot(-f(x),(x,-1,3),ylim=[-5,5],line_color="blue",show=False)
```

```

8     p.extend(q)
9     p.xlabel = '$x$'
10    p.ylabel = '$y$'
11    p[0].label = "$f(x)$"
12    p[1].label = "$-f(x)$"
13    p.legend=True
14    p.show()

```

Altere a função  $f$  para estudar outros casos!

**Exemplo 3.7.8.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x) = x^2 + 2x + 2$ .

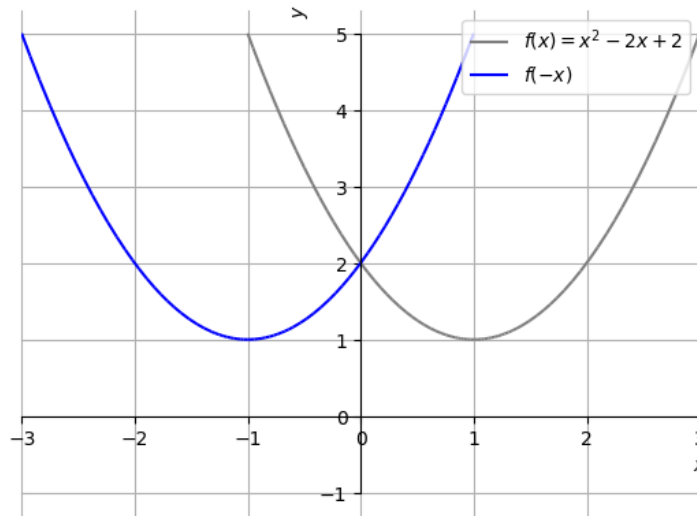


Figura 3.32: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $f(-x)$ .

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x)$ :

```

1     import matplotlib.pyplot as plt
2     from sympy import *
3     plt.style.use('bmh')
4     x = Symbol('x')
5     f = Lambda(x, x**2-2*x+2)
6     p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
7     q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)

```

```

8     p.extend(q)
9     q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="",show=False)
10    p.extend(q)
11    p.xlabel = '$x$'
12    p.ylabel = '$y$'
13    p[0].label = "$f(x)$"
14    p[1].label = "$f(-x)$"
15    p.legend=True
16    p.show()

```

Altere a função  $f$  para estudar outros casos!

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.7.1.** Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \quad (3.128)$$

Determine a função composta  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**Solução.** Começamos determinando a função composta

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (3.129)$$

$$= f(x^2 + 1) \quad (3.130)$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^2 - \sqrt{x^2 + 1 - 1}}{x^2 + 1} \quad (3.131)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{x^2}}{x^2 + 1} \quad (3.132)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - |x|}{x^2 + 1}. \quad (3.133)$$

Agora, observamos que  $g$  está definida em toda parte e tem imagem  $[1, \infty)$ . Como o domínio da  $f$  é  $[1, \infty)$ , temos que  $(f \circ g)$  está definida em toda parte.

◇

**ER 3.7.2.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$ .

**Solução.** Começamos traçando o gráfico de  $f_1(x) = x^3$ . Então, obtemos o gráfico de  $f_2(x) = (x - 1)^3$  por translação de uma unidade à direita. O gráfico de  $f_3(x) = 2(x - 1)^3$  é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de  $f_4(x) = 2(x - 1)^3 + 1$  é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura 3.33.

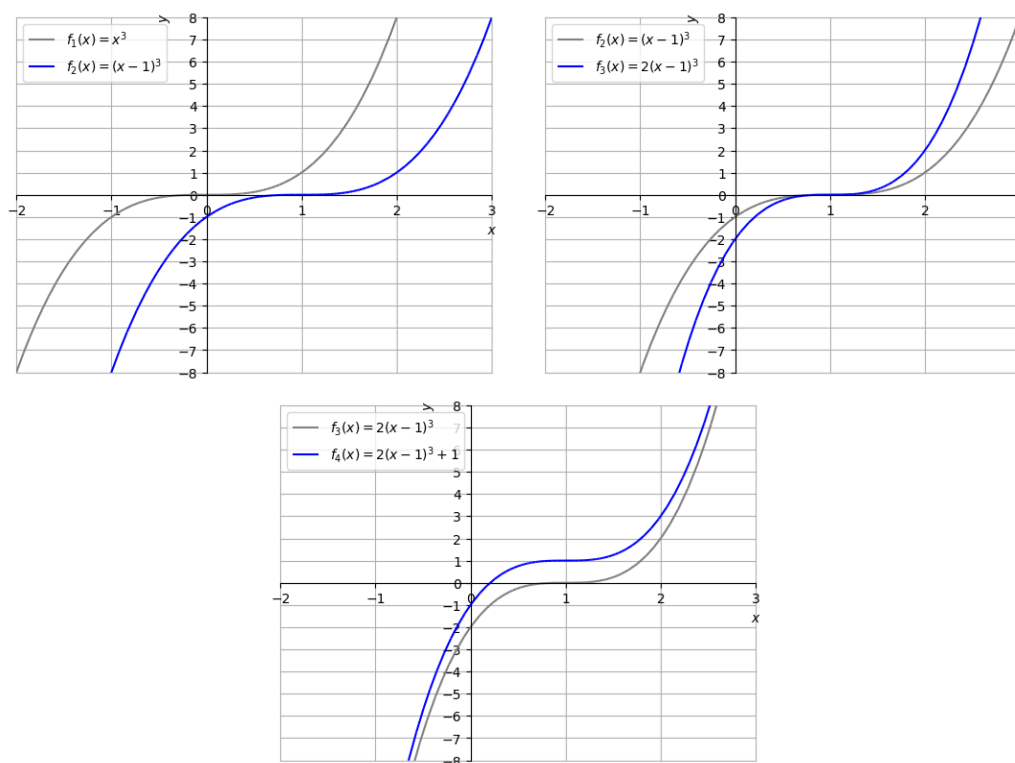


Figura 3.33: Construção do esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x - 1)^3 + 1$ .

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.7.1.** Dadas as funções  $f(x) = x^2 + 2x$  e  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ . Determine as seguintes funções e forneça seus respectivos domínios.

- a)  $(f + g)(x)$
- b)  $(f - g)(x)$
- c)  $(f \cdot g)(x)$
- d)  $(f \div g)(x)$

**Exercício 3.7.2.** Seja  $f(x) = 2^x - \sqrt{x-1} + x^3$ . Escreva a regra e determine o domínio das seguintes funções:

- a)  $f(x) + 1$
- b)  $2 \cdot f(x)$
- c)  $f(2x)$
- d)  $f(-x)$

**Exercício 3.7.3.** Sejam  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Determine a função  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**Exercício 3.7.4.** Faça um esboço do gráfico de  $g(x) = 2x^3 - 1$ .

**Exercício 3.7.5.** Faça um esboço do gráfico de  $h(x) = -1/(x^2 + 2x + 1)$ .

## 3.8 Propriedades de Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

### 3.8.1 Funções Crescentes ou Decrescentes

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

Uma da função  $f$  é dita ser **crescente** quando  $f(x_1) < f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$  no seu domínio. É dita **não decrescente** quando  $f(x_1) \leq f(x_2)$  para todos os  $x_1 < x_2$  no seu domínio. Analogamente, é dita **decrescente** quando  $f(x_1) > f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ . E, por fim, é dita **não crescente** quando  $f(x_1) \geq f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ , sempre no seu domínio. Em todos estes casos, diz que  $f$  é uma **função monótona**.



**Exemplo 3.8.1.** Estudemos os seguintes casos:

- a) A **função identidade**  $f(x) = x$  é crescente.
- b) A função valor absoluto  $y = |x|$  não é monótona.
- c) A função  $h(x) = -x^3$  é uma função decrescente.
- d) A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0, \\ 2 & , 0 < x \leq 1, \\ (x - 1)^2 + 2 & , x > 1 \end{cases} \quad (3.134)$$

é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

**Exemplo 3.8.2.** A função  $f(x) = x^2$  é uma função decrescente no intervalo  $(-\infty, 0]$  e crescente no intervalo  $[0, \infty)$ .

### 3.8.2 Funções Pares ou Ímpares

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma dada **função**  $f$  é dita **par** quando  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio.

**Exemplo 3.8.3.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  é uma função par.
- $f(x) = x^3$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \sin x$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$  é uma função par.
- $f(x) = x + 1$  não é par nem ímpar.

### 3.8.3 Funções Injetoras

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função  $f$  é dita ser **injetora** quando  $f(x_1) \neq f(x_2)$  para todos  $x_1 \neq x_2$  no seu domínio.

**Exemplo 3.8.4.** Estudemos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$  é uma função injetora.
- $f(x) = x - 1$  é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora  $y = f(x)$ , existe uma única função  $g$  tal que

$$g(f(x)) = x, \quad (3.135)$$

para todo  $x$  no domínio da  $f$ . Tal função  $g$  é chamada de **função inversa** de  $f$  é comumente denotada por  $f^{-1}$ .<sup>12</sup>

**Exemplo 3.8.5.** Vamos calcular a função a função inversa de  $f(x) = x^3 + 1$ . Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \quad (3.136)$$

Então, isolando  $x$ , temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \quad (3.137)$$

Desta forma, concluímos que  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ . Verifique que  $f^{-1}(f(x)) = x$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ !

**Observação 3.8.1.** Os gráficos de uma dada função injetora  $f$  e de sua inversa  $f^{-1}$  são simétricos em relação a **reta identidade**  $y = x$ . Use [Python](#) e [SymPy](#) para verificar esta afirmação plotando os gráficos de  $f$ ,  $f^{-1}$  e da função identidade!

## Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.8.1.** Defina os intervalos em que a função  $f(x) = -|x + 1|$  é crescente ou decrescente.

---

<sup>12</sup>Atenção! Não confundamos com a função  $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$ .

**Solução.** A função  $f$  é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função  $f(x) = |x|$ . Veja a Figura 3.34.

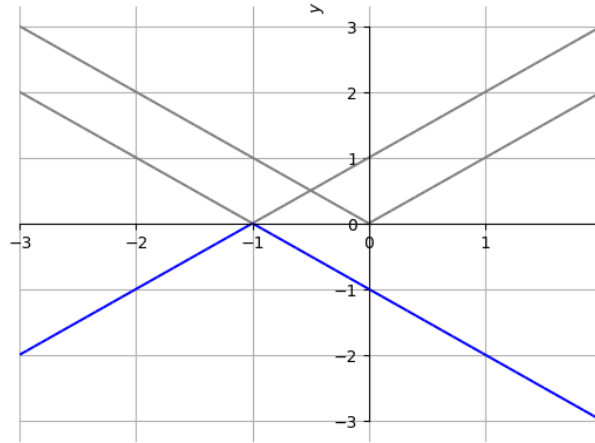


Figura 3.34: Esboço do gráfico de  $f(x) = -|x + 1|$ .

Do esboço do gráfico de  $f$ , podemos inferir que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, -1]$  e decrescente no intervalo  $[-1, \infty)$ .

◇

**ER 3.8.2.** Analise a paridade da função  $\text{tg}(x)$ .

**Solução.** Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\text{tg}(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{cos}(-x)} = \frac{-\text{sen } x}{\text{cos } x} = -\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = -\text{tg } x. \quad (3.138)$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

◇

**ER 3.8.3.** Calcule a função inversa de  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ .

**Solução.** Para obtermos a função inversa de uma função  $f$ , resolvemos  $y = f(x)$  para  $x$ . Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x + 1} \quad (3.139)$$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \quad (3.140)$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \quad (3.141)$$

Logo, temos  $f^{-1}(x) = x^2 - 1$  restrita ao conjunto imagem da  $f$ , i.e. o domínio de  $f^{-1}$  é  $[0, \infty)$ .

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.8.1.** Determine a monotonicidade das seguintes funções:

1.  $f(x) = 1 - x$
2.  $g(x) = x^2 - 2x + 1$
3.  $h(x) = x^5 - 1$
4.  $f_1(x) = \sqrt{-x}$
5.  $f_2(x) = \operatorname{tg}(x)$

**Exercício 3.8.2.** Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x+5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (3.142)$$

**Exercício 3.8.3.** Analise a paridade da função  $\operatorname{cosec} x$ .

**Exercício 3.8.4.** Seja  $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$ . Calcule  $f^{-1}$  e determine seu domínio.

**Exercício 3.8.5.** Mostre que toda função crescente (ou decrescente) é uma função injetora.

## 3.9 Funções exponenciais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \quad (3.143)$$

onde  $a \neq 1$  é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem  $(0, \infty)$ . O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos  $(-1, 1/a)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, a)$ . Veja a Figura 3.35.

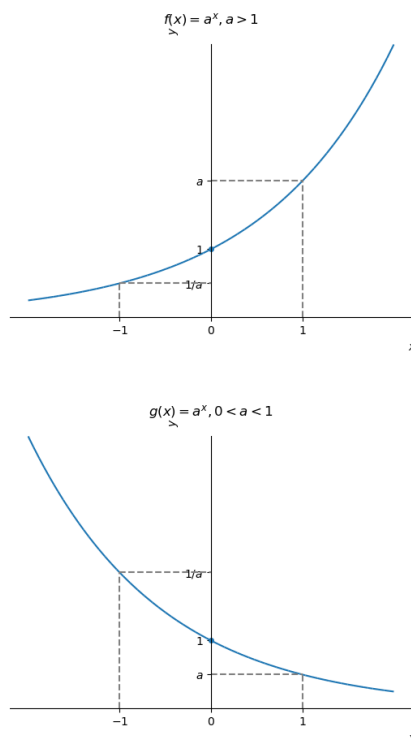


Figura 3.35: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (acima)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$ ; (abaixo)  $g(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 3.9.1.** Quando a base é o **Número de Euler**<sup>13</sup>

$$e \approx 2,718281828459045 \quad (3.144)$$

<sup>13</sup>Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

chamamos  $f(x) = e^x$  de função exponencial (natural).

No [SymPy](#)<sup>14</sup>, o número de Euler é obtido com a constante E:

```
1      In : from sympy import *
2      In : N(E,25)
3      Out: 2.718281828459045235360287
```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.9.1.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

**Solução.** Primeiramente, observamos que

$$f(x) = e^{-2x+1} - 1 \quad (3.145)$$

$$= e^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 1 \quad (3.146)$$

Então, partindo do gráfico de  $e^{-x}$ , fazemos uma translação de  $\frac{1}{2}$  unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de  $\frac{1}{2}$  vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura 3.36.

---

<sup>14</sup>Veja a Observação ??

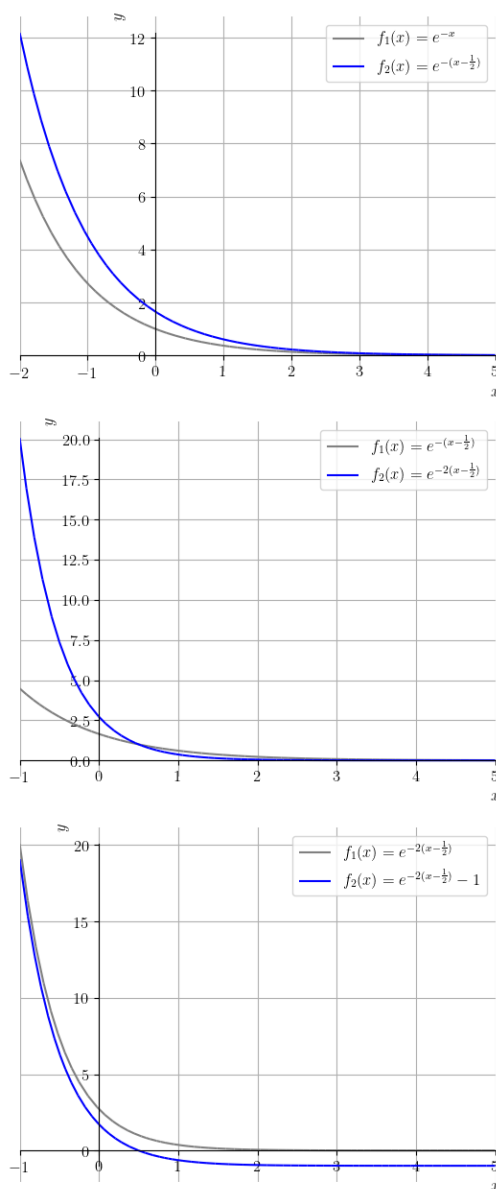


Figura 3.36: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.9.1.** Justificando, determine a veracidade das seguintes afirmações:

- a)  $y = e^x$  é uma função crescente;
- b)  $y = e^{-x}$  é uma função decrescente;
- c)  $y = e^{-x^2}$  é uma função decrescente;
- d)  $e^{-x} > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.9.2.** Calcule o zero da função

$$f(x) = 2^{x-1} - 1 \tag{3.147}$$

**Exercício 3.9.3.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = 2e^{x-1} + 2$ .

## 3.10 Funções logarítmicas

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

A **função logarítmica**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , é a função inversa da função exponencial  $y = a^x$ . Veja a Figura 3.37. O domínio da função logarítmica é  $(0, \infty)$  e a imagem  $(-\infty, \infty)$ .



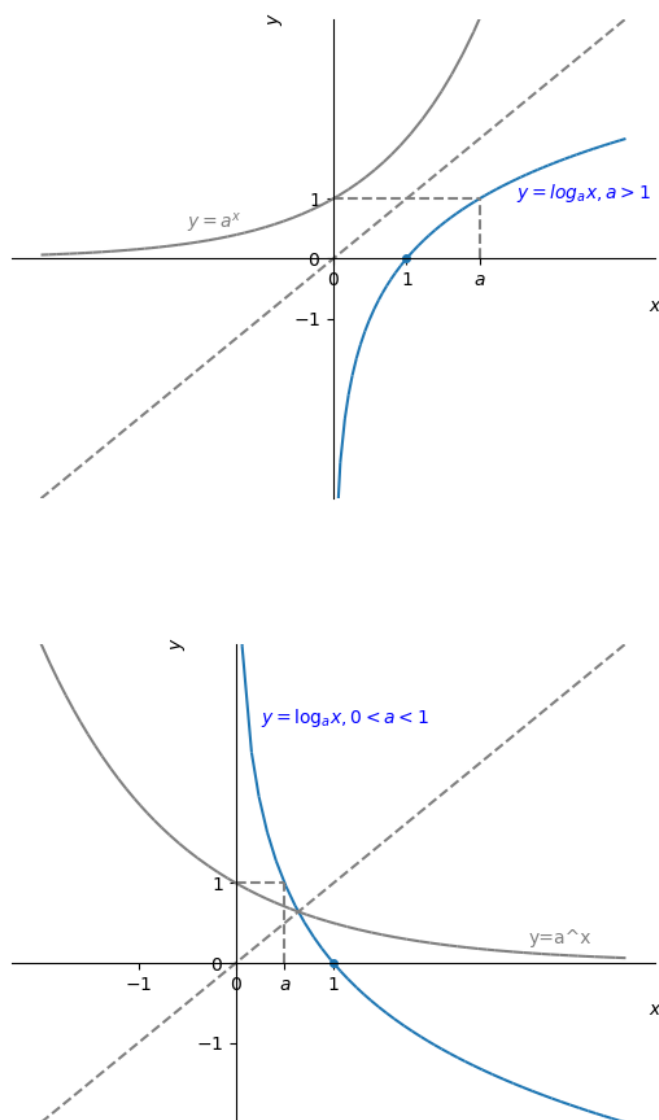


Figura 3.37: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (acima)  $y = \log_a x$ ,  $a > 1$ ; (abaixo)  $y = \log_a x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 3.10.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ ,

chamamos  $y = \log_e x$  de **função logarítmica natural** e denotamo-la por  $y = \ln x$ .

No [SymPy](#), podemos computar  $\log_a x$  com a função `log(x,a)`. O  $\ln x$  é computado com `log(x)`.

**Observação 3.10.2.** Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ ;
- $\log_a 1 = 0$ ;
- $\log_a a = 1$ ;
- $\log_a a^x = x$ ;
- $a^{\log_a x} = x$ ;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ .
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**ER 3.10.1.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x+2) + 1$  e determine seu domínio.

**Solução.** Para fazermos o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x+2) + 1$ , podemos começar com o gráfico de  $f_1(x) = \ln x$ . Então, podemos transladá-lo 2 unidades à esquerda, de forma a obtermos  $f_2(x) = \ln(x+2) = f_1(x+2)$ . Por fim, transladamos o gráfico de  $f_2(x)$  uma unidade para cima, obtendo o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x+2) + 1 = f_2(x) + 1$ . Veja a Figura 3.38.

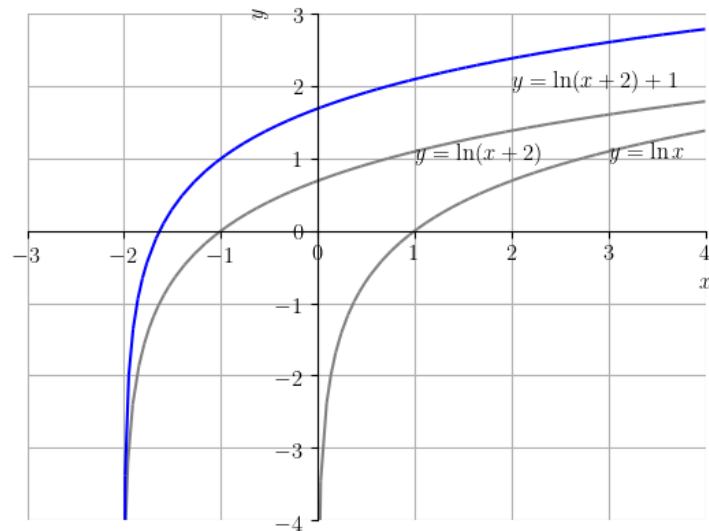


Figura 3.38: Esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x+2) + 1$ .

Ainda, o domínio de  $\ln x$  é  $(0, \infty)$ . Como,  $f(x) = \ln(x+2) + 1$  é uma translação de duas unidades à esquerda e uma para cima de  $\ln x$ , temos que o domínio de  $f(x)$  é  $(-2, \infty)$ .

◇

**ER 3.10.2.** Resolva a seguinte equação para  $x$

$$\ln(x+2) + 1 = 1. \quad (3.148)$$

**Solução.** Podemos calcular a solução pelos seguintes passos:

$$\ln(x+2) + 1 = 1 \quad (3.149)$$

$$\ln(x+2) = 0 \quad (3.150)$$

$$e^{\ln(x+2)} = e^0 \quad (3.151)$$

$$x+2 = e^0 \quad (3.152)$$

$$x = 1 - 2 = -1. \quad (3.153)$$

$$(3.154)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar a solução com os seguintes comandos:

```
1      from sympy import *
2      solve(Eq(log(x+2)+1,1),x)
```

◇

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [\[Contatar\]](#)

**Exercício 3.10.1.** Calcule o valor de:

a)  $2 \ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{3}{4}$

b)  $\log_{10} 50 - \log_{10} 5$

**Exercício 3.10.2.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \log(x - 2) - 1$  e determine seu domínio.

**Exercício 3.10.3.** Resolva para  $x$ :

a)  $\ln x^2 = 4$

b)  $\log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 0$

# Resposta dos Exercícios

**Exercício 1.1.1.** a) V; b) V; c) F; d) V; e) F

**Exercício 1.1.2.** a)  $\{-4, -3, -1, 0, 2, 3, 5\}$ ; b)  $\{-4, 2\}$ ; c)  $\{-1, 0, 3\}$ , d)  $\{-3, 5\}$ ; e)  $C$ ; f)  $\emptyset$

**Exercício 1.1.3.** a) V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) F

**Exercício 1.1.4.**  $C \times D = \{(-4, 5), (-4, -3), (-4, 2), (-4, -4), (2, 5), (2, -3), (2, 2), (2, -4)\}$

**Exercício 1.1.5.** F

**Exercício 1.2.1.** a) V; b) V; c) V; d) V; e) F; f) V

**Exercício 1.2.2.** a) F; b) V; c) V

**Exercício 1.2.3.** Dica:  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$

**Exercício 1.2.4.** a) V; b) F; c) V

**Exercício 1.2.6.** Dica: Por definição, para  $p \geq 0$  tem-se  $|p| = p$  e, para  $p < 0$  tem-se  $|p| = -p$ . Consulte (1.65).

**Exercício 1.3.1.** a) V; b) F; c) V; d) F; e) V

**Exercício 1.3.3.** a)  $14 = 2 \cdot 7$ ; b)  $24 = 2^3 \cdot 3$ ; c)  $36 = 2^2 \cdot 3^2$ ; d)  $2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

**Exercício 1.3.4.** a)  $[-1, 2]$ , b)  $\emptyset$ ; c)  $[-1, 1)$ ; d)  $\mathbb{R}$ ; e)  $(-1, 1]$

**Exercício 1.3.5.** a) F; b) V; c) V; d) V; e) F

**Exercício 2.1.1.** a) 2; b) 2; c) 1; d) 0

**Exercício 2.1.2.** a)  $\frac{5}{2}$ ; b)  $\frac{5}{3}$ ; c) 5

**Exercício 2.1.3.** a) 0; b)  $\nexists$ ; c) 2; d)  $\{-4, 4\}$ ; e)  $\{-2, 1\}$ ; f)  $\{-2, 1\}$

**Exercício 2.1.4.** a) 3; b) 0; c) 0

**Exercício 2.1.5.**  $\{-1, 1\}$

**Exercício 2.2.1.** a)  $(-\infty, 1)$ ; b)  $(-\infty, 2]$ ; c)  $(-3/2, \infty)$ ; d)  $(-\infty, 1/4]$

**Exercício 2.2.2.** a)  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ; b)  $[1, 2]$ ; c)  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ ; d)  $(-\infty, 1/3] \cup [2/5, \infty)$

**Exercício 2.2.3.** a)  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ; b)  $(1, 2]$ ; c)  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ ; d)  $(-\infty, 1/3) \cup [2/5, \infty)$

**Exercício 2.2.4.**  $(-2, 2)$

**Exercício 2.2.5.**  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1]$

**Exercício 3.1.1.** Domínio:  $\mathbb{R}$ ; Imagem:  $\mathbb{R}$

**Exercício 3.1.2.** Domínio:  $\mathbb{R}$ ; Imagem:  $[1, \infty)$ .

**Exercício 3.1.3.** Domínio:  $\mathbb{R}$ ; Imagem:  $(-\infty, 1]$ .

**Exercício 3.1.4.** Domínio:  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ; Imagem:  $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ .

**Exercício 3.1.5.** Domínio:  $\mathbb{R}$ ; Imagem:  $[0, \infty)$ .

**Exercício 3.2.1.** a)  $D = \mathbb{R}; I = \mathbb{R}$ ; b)  $D = \mathbb{R}, I = \{\pi\}$ ; c)  $D = \mathbb{R}; I = \mathbb{R}$

**Exercício 3.2.3.**  $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

**Exercício 3.2.4.**  $(2/3, -5/3)$

**Exercício 3.2.5.** não há

**Exercício 3.3.1.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**Exercício 3.3.2.** a) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**Exercício 3.3.3.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**Exercício 3.3.4.**  $(-1, -1), (1, 1)$

**Exercício 3.3.5.**  $y = 1$

**Exercício 3.4.2.**  $-1, 0, 2$

**Exercício 3.4.3.**  $9/4$

**Exercício 3.5.1.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**Exercício 3.5.2.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

**Exercício 3.5.3.**  $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$

**Exercício 3.5.4.**  $x = \frac{1}{2}$

**Exercício 3.5.5.**  $\{-1,1\}$

**Exercício 3.6.1.** a)  $-1/2$ ; b)  $-\sqrt{3}/2$ ; c)  $\sqrt{3}/3$ ; d)  $\sqrt{3}$ ; e)  $-2\sqrt{3}/3$ ; f)  $-2$

**Exercício 3.6.2.** a)  $-\sqrt{3}/2$ ; b)  $1$ ; c)  $-\sqrt{3}/2$

**Exercício 3.6.3.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**Exercício 3.6.4.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**Exercício 3.6.5.**  $(-\pi/2, -1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(\pi/2, 1)$

**Exercício 3.7.1.** a)  $(f+g)(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus -1,1$ ; b)  $(f+g)(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus -1,1$ ; c)  $(f \cdot g)(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus -1,1$ ; d)  $(f \div g)(x) = x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ .

**Exercício 3.7.2.** a)  $f(x) + 1 = 2^x - \sqrt{x-1} + x^3 + 1$ ,  $D = [1,\infty)$ ; b)  $2f(x) = 2^{x+1} - 2\sqrt{x-1} + 2x^3$ ,  $D = [1,\infty)$ ; c)  $f(2x) = 4^x - \sqrt{2x-1} + 2^3x^3$ ,  $D = [\frac{1}{2},\infty)$ ; d)  $f(-x) = 2^{-x} - \sqrt{-x-1} - x^3$ ,  $D = (-\infty, -1]$

**Exercício 3.7.3.**  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$ ; domínio:  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ .



**Exercício 3.7.4.** Dica: verifique sua resposta usando [Python](#) e [SymPy](#).

**Exercício 3.7.5.** Dica: verifique sua resposta usando [Python](#) e [SymPy](#).

**Exercício 3.8.1.** a) função decrescente; b) função não monótona; c) função crescente; d) função crescente; e) função não monótona

**Exercício 3.8.2.** decrescente:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ; crescente:  $[-1, 1]$ .

**Exercício 3.8.3.** função ímpar

**Exercício 3.8.4.**  $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ ; domínio  $[-1, \infty)$

**Exercício 3.9.1.** a) V; b) V; c) F; d) V

**Exercício 3.9.2.**  $x = 1$

**Exercício 3.9.3.** Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

**Exercício 3.10.1.** a) 0; b) 1

**Exercício 3.10.2.** Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar o esboço de seu gráfico. Domínio:  $(2, \infty)$ .

**Exercício 3.10.3.** a)  $x = e^2$ ; b)  $x = 0$

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Axler. *Pré-Cálculo: uma preparação para o cálculo*. LTC, Rio de Janeiro, 2. edition, 2016.
- [2] A.M. Caldeira, L.M.O da Silva, M.A.S. Machado, and V.Z. Medeiros. *Pré-Cálculo*. Cengage Learning, 3. edition, 2014.
- [3] F.M. Gomes. *Pré-Cálculo: operações, equações, funções e trigonometria*. Cengage Learning Brasil, São Paulo, 2018.
- [4] F. Safier. *Pré-Cálculo*. Bookman, Porto Alegre, 2011.