# Cálculo I

Pedro H A Konzen

1 de agosto de 2022

# Licença

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Sumário

# Capítulo 1

# Limites

## 1.1 Noção de limites

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto $x_0$, exceto talvez em $x_0$. Quando o valor de $f(x)$ é **arbitrariamente próximo** de um número $L$ para $x$ **suficientemente próximo** de $x_0$, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \tag{1.1}$$

e dizemos que o **limite da função** $f$ **é** $L$ **quando** $x$ **tende a** $x_0$. Veja a Figura 1.1.

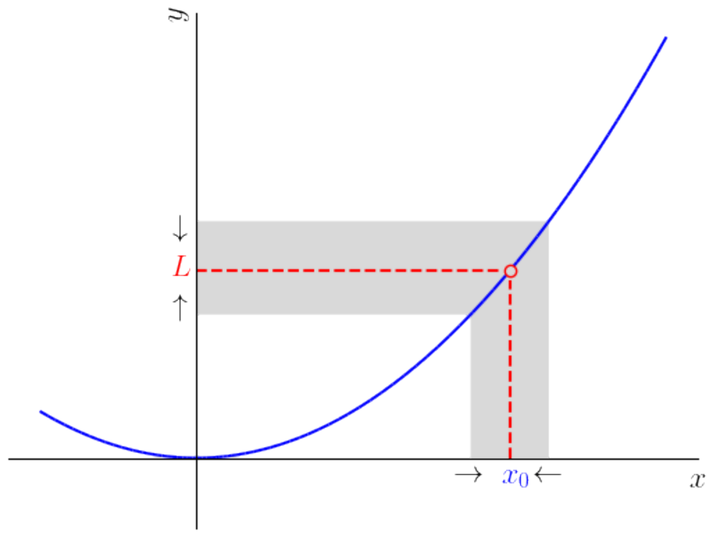



Figura 1.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

**Exemplo 1.1.1.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}. \tag{1.2}$$

Na Figura 1.2, temos um esboço do gráfico desta função.

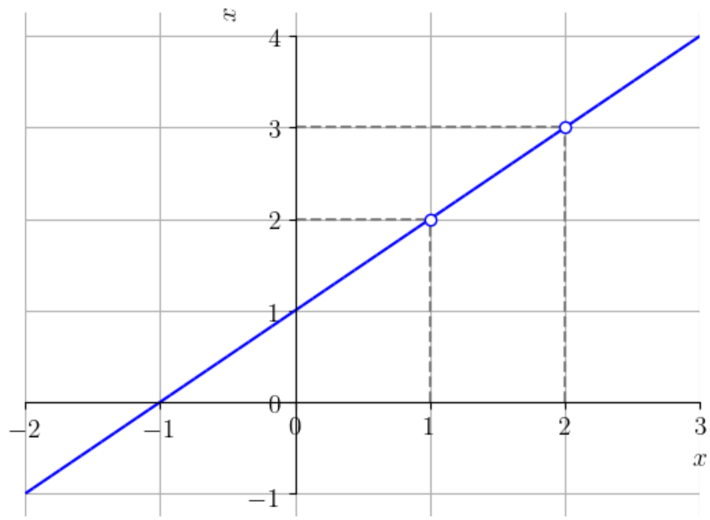



Figura 1.2: Esboço do gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 1.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

| $x$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ | $\to 0 \leftarrow$ | $0{,}0001$ | $0{,}001$ | $0{,}01$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0{,}99$ | $0{,}999$ | $0{,}9999$ | $\to 1 \leftarrow$ | $1{,}0001$ | $1{,}001$ | $1{,}01$ |

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol('x')
...: f = Lambda(x, (x**2-1)*(x-2)/ \
...:               ((x-1)*(x-2)))
...: limit(f(x), x, 0)
Out: 1
```

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

| $x$ | $0{,}9$ | $0{,}99$ | $0{,}999$ | $\to 1 \leftarrow$ | $1{,}0001$ | $1{,}001$ | $1{,}01$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1{,}9$ | $1{,}99$ | $1{,}999$ | $\to 2 \leftarrow$ | $2{,}0001$ | $2{,}001$ | $2{,}01$ |

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

### 1.1.1 Limites da função constante e da função identidade

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x\to x_0} k = k, \tag{1.3}$$

seja qual for a constante $k$. Veja a Figura 1.3.

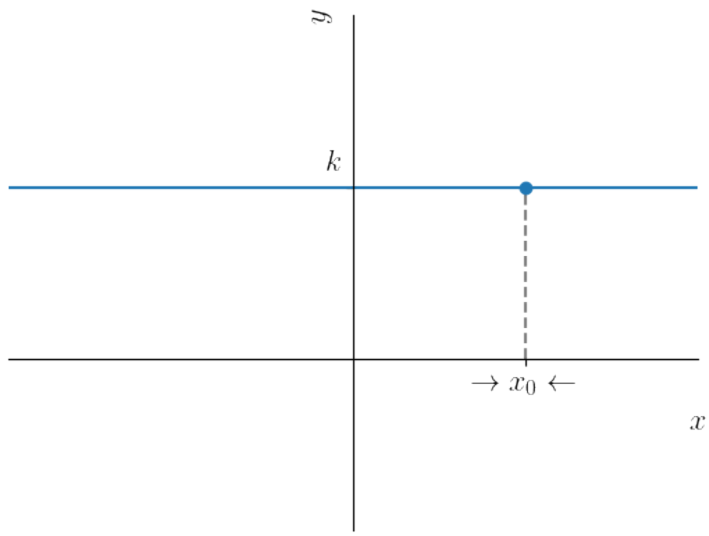



Figura 1.3: Esboço do gráfico de uma função constante $f(x) = k$.

**Exemplo 1.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to -1} 1 = 1$ No Python, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol("x")
...: limit(1, x, -1)
...:
Out: 1
```

b) $\lim_{x\to 2} -3 = -3$

c) $\lim_{x\to\pi}\left(\sqrt{2}-e\right) = \sqrt{2}-e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0, \tag{1.4}$$

seja qual for o ponto $x_0$. Vejamos a Figura 1.4.

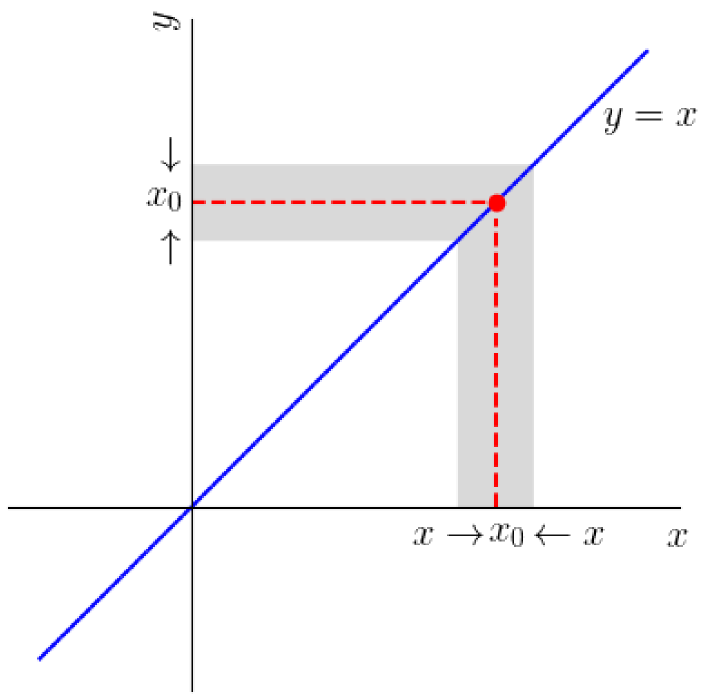



Figura 1.4: Noção de limite para a função identidade $f(x) = x$.

**Exemplo 1.1.3.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x\to -1} x = -1$ Com o Python, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
In : from sympy import *
...: x = Symbol("x")
...: limit(x, x, -1)
...:
Out: -1
```

b) $\lim_{x\to 2} x = 2$

c) $\lim_{x\to \pi} x = \pi$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.1.1.** Estime o valor do limite

$$\lim_{x\to 1} e^x. \tag{1.5}$$

**Solução.** Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto $x_0$, computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

| $x$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 | $\to 1 \leftarrow$ | 1,0001 | 1,001 | 1,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,460 | 2,691 | 2,716 | $\to 2{,}72 \leftarrow$ | 2,719 | 2,721 | 2,746 |

Com isso, inferimos que

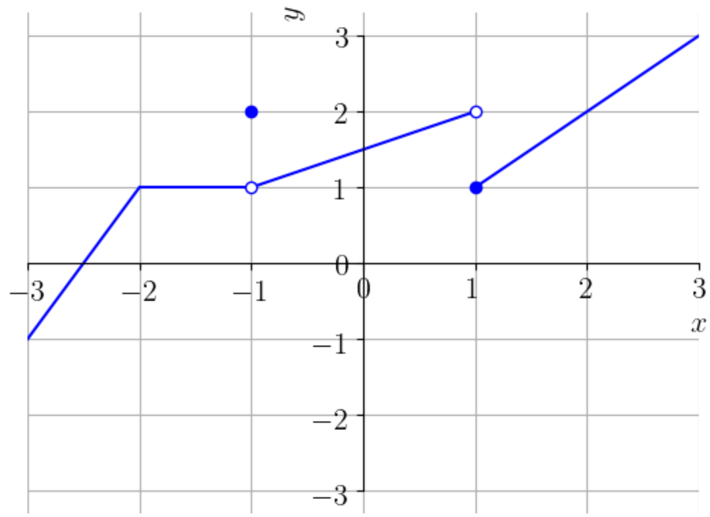
$$\lim_{x\to 1} e^x \approx 2{,}72. \tag{1.6}$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x\to 1} e^x = e \approx 2{,}718281828459045\ldots$.

Verifique usando Python+SymPy!

$\Diamond$

**ER 1.1.2.** Considere que uma dada função $f$ tenha o seguinte esboço de gráfico:




Então, infira o valores de

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

**Solução.**

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de $-2$ e a direita de $-2$ (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de $x$ a esquerda de $-2$ (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos $x$ suficientemente próximo de $-2$. Concluímos que

$$\lim_{x\to -2} = 1. \tag{1.7}$$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x$ suficientemente próximos de $-1$. Logo,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1. \tag{1.8}$$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

Aqui, para valores de $x$ suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda $(x < 1)$, vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de $x$ suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita $(x > 1)$, temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor $L$ tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos $x$ suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois $L$ dependerá de $x$ estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluímos que este limite não existe, e escrevemos

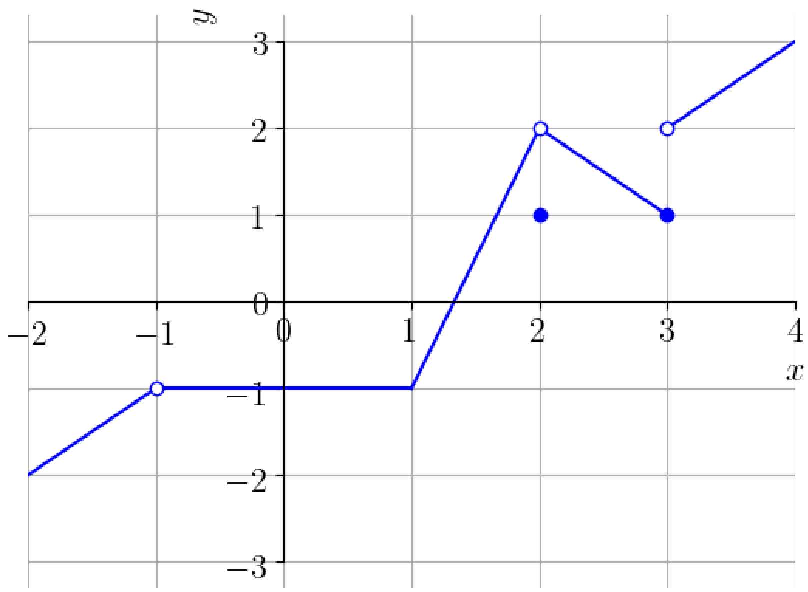
$$\nexists \lim_{x\to 1} f(x). \tag{1.9}$$

$\Diamond$

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.1.1.** Considere que uma dada função $f$ tenha o seguinte esboço




de gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

**Exercício 1.1.2.** Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercício 1.1.1), forneça

1. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}} f(x)$

**Exercício 1.1.3.** Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 2$

b) $\lim_{x\to -2} 2$

c) $\lim_{x\to 2} -3$

d) $\lim_{x\to e} \pi$

**Exercício 1.1.4.** Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} x$

b) $\lim_{x\to -2} x$

c) $\lim_{x\to -3} x$

d) $\lim_{x\to e} x$

# 1.2 Regras para o cálculo de limites

## 1.2.1 Regras de cálculo

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \tag{1.10}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \tag{1.11}$$

com $x_0, L_1, L_2$ números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x\to x_0} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1.12}$$

$$= k\cdot L_1, \tag{1.13}$$

para qualquer número real $k$.

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{1.14}$$

$$= L_1 \pm L_2 \tag{1.15}$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{1.16}$$
$$= L_1 \cdot L_2 \tag{1.17}$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \tag{1.18}$$
$$= \frac{L_1}{L_2}, \qquad L_2 \neq 0 \tag{1.19}$$

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^s = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^s \tag{1.20}$$
$$= L_1^s, \qquad L_1^s \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

**Exemplo 1.2.1.** Consideremos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to -1} 2x$

$$\lim_{x\to -1} 2x = 2\lim_{x\to -1} x \tag{1.22}$$
$$= 2\cdot(-1) = -2 \tag{1.23}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(2*x,x,-1)
```

b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 1 = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1 \tag{1.24}$$
$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 1 \tag{1.25}$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \tag{1.26}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(x**2-1,x,2)
```

c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - x^2} \tag{1.27}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0} 1 - \left(\lim_{x\to 0} x\right)^2} \tag{1.28}$$

$$= \sqrt{1-(0)^2} \tag{1.29}$$

$$= 1. \tag{1.30}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(sqrt(1-x**2),x,0)
```

d) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left[(x^2-1)\cdot(x-2)\right]}{\lim_{x\to 0}\left[(x-1)\cdot(x-2)\right]} \tag{1.31}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(x^2-1)\cdot\lim_{x\to 0}(x-2)}{\lim_{x\to 0}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0}(x-2)} \tag{1.32}$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \tag{1.33}$$

**Proposição 1.2.1.** (Limites de polinômios) Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1.34}$$

então

$$\lim_{x\to b} p(x) = p(b) \tag{1.35}$$
$$= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1.36}$$

para qualquer dado número real $b$.

*Demonstração.* Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação.

$$\lim_{x\to b} p(x) = \lim_{x\to b} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1.37}$$
$$= \lim_{x\to b} a_n x^n + \lim_{x\to b} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to b} a_0 \tag{1.38}$$
$$= a_n \left(\lim_{x\to b} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to b} x\right)^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1.39}$$
$$= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = p(b). \tag{1.40}$$

□

**Exemplo 1.2.2.**

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \tag{1.41}$$
$$= 4 + \sqrt{2}. \tag{1.42}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

**Proposição 1.2.2.** (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ uma função racional e $b$ um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{1.43}$$

*Demonstração.* Segue da regra do **limite do quociente** e da Proposição 1.2.1.

$$\lim_{x\to b}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to b} p(x)}{\lim\limits_{x\to b} q(x)} \tag{1.44}$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \tag{1.45}$$

□

**Exemplo 1.2.3.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(0^2-1)(0-2)}{(0-1)(0-2)} \tag{1.46}$$

$$= \frac{2}{2} = 1. \tag{1.47}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

### 1.2.2 Indeterminação 0/0

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Quando $\lim\limits_{x\to a} f(a) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(a) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.48}$$

é uma **indeterminação do tipo** $0/0$. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x-a)$.

**Exemplo 1.2.4.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1} \tag{1.49}$$

$$= \frac{2^2-1}{2-1} = 3. \tag{1.50}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar o limite acima com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

**Exemplo 1.2.5.** No caso do limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \tag{1.51}$$

temos que o denominador $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2 + x - 2$. Assim sendo, $(x - 1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo, calculamos

$$\begin{align} \frac{p(x)}{x-1} &= \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x-1} \tag{1.52}\\ &= x^2 - 2x - 3 \tag{1.53}\end{align}$$

e

$$\begin{align} \frac{q(x)}{x-1} &= \frac{x^2 + x - 2}{x-1} \tag{1.54}\\ &= x + 2. \tag{1.55}\end{align}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar estas divisões com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \tag{1.56}$$

e

$$q(x) = (x - 1)(x + 2). \tag{1.57}$$

Com isso, segue que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)(x+2)} \tag{1.58}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} = -\frac{4}{3}. \tag{1.59}$$

Use Python+SymPy para computar este limite!

**Exemplo 1.2.6.** No caso de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \tag{1.60}$$

temos uma indeterminação do tipo $0/0$ envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \tag{1.61}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \tag{1.62}$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \tag{1.63}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \tag{1.64}$$

Verifique computando com o Python+SymPy.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.2.1.** Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \tag{1.65}$$

**Solução.** Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x\to -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} x - x^2}{\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x^2 + 3}} \tag{1.66}$$

$$= \frac{-1-(-1)^2}{\sqrt{\lim_{x\to -1} x^2+3}} \tag{1.67}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \tag{1.68}$$

$$= -1. \tag{1.69}$$

$\Diamond$

**ER 1.2.2.** Assumindo que o $\lim_{x\to 2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1, \tag{1.70}$$

forneça o valor de $L$.

**Solução.** Das propriedades de limites, temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-2}{x+2} = 1 \tag{1.71}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)-2}{\lim\limits_{x\to 2} x+2} = 1 \tag{1.72}$$

$$\frac{\lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} 2}{2+2} = 1 \tag{1.73}$$

$$\frac{L-2}{4} = 1 \tag{1.74}$$

$$L-2 = 4 \tag{1.75}$$

$$L = 6. \tag{1.76}$$

$\Diamond$

**ER 1.2.3.** Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}}. \tag{1.77}$$

**Solução.** Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x\to -1} 2-\sqrt{x^2+3} = 0. \tag{1.78}$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x\to -1} x+1 = 0, \tag{1.79}$$

concluímos se tratar de uma indeterminação 0/0. Por racionalização, obtemos

$$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}} \tag{1.80}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \tag{1.81}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \tag{1.82}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \tag{1.83}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \tag{1.84}$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \tag{1.85}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.2.1.** Sabendo que

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 2, \tag{1.86}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to-2} 2\cdot f(x)$.

b) $\lim_{x\to-2} \pi\cdot f(x)$.

c) $\lim_{x\to-2} -e^{\sqrt{2}}\cdot f(x)$.

**Exercício 1.2.2.** Considerando que

$$\lim_{x\to3} f(x) = -2 \tag{1.87}$$

e

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \frac{1}{2}, \tag{1.88}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x\to 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x\to 3} f(x) - 2g(x)$

**Exercício 1.2.3.** Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 \tag{1.89}$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -2, \tag{1.90}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x\to 0} g(x) \cdot (\frac{1}{2} \cdot f(x))$

**Exercício 1.2.4.** Considerando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2 \tag{1.91}$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -3, \tag{1.92}$$

calcule:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

**Exercício 1.2.5.** Considerando que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1 \tag{1.93}$$

e

$$\lim_{x\to -1} g(x) = 4, \tag{1.94}$$

calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

**Exercício 1.2.6.** Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} -3x$

b) $\lim\limits_{x\to -2} x^2 - 3x$

c) $\lim\limits_{x\to -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

**Exercício 1.2.7.** Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

**Exercício 1.2.8.** Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

**Exercício 1.2.9.** Calcule o limite

$$\lim_{x\to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x-6}. \tag{1.95}$$

## 1.3 Limites laterais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja dada uma função $f$ definida para todo $x$ em um intervalo aberto $(a, x_0)$. O **limite lateral à esquerda** de $f$ no ponto $x_0$ é denotado por

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{1.96}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \tag{1.97}$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de $L$, para todo $x < x_0$ suficientemente próximo de $x_0$. Veja a Figura 1.5.

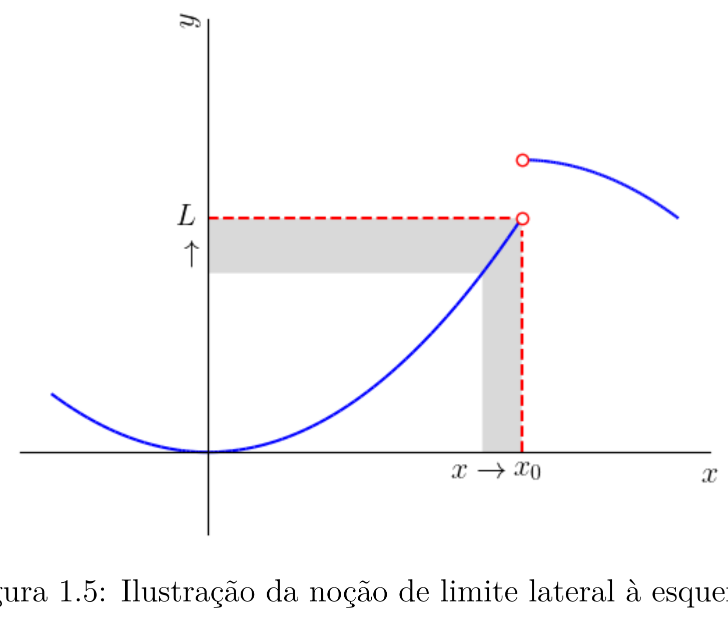



Figura 1.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função $f$ definida para todo $x$ em um intervalo aberto $(x_0, b)$, o **limite lateral à direita** de $f$ no ponto $x_0$ é denotado por

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \tag{1.98}$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, \tag{1.99}$$

quando $f(x)$ é arbitrariamente próximo de $L$, para todo $x > x_0$ suficientemente próximo de $x_0$. Veja a Figura 1.6.

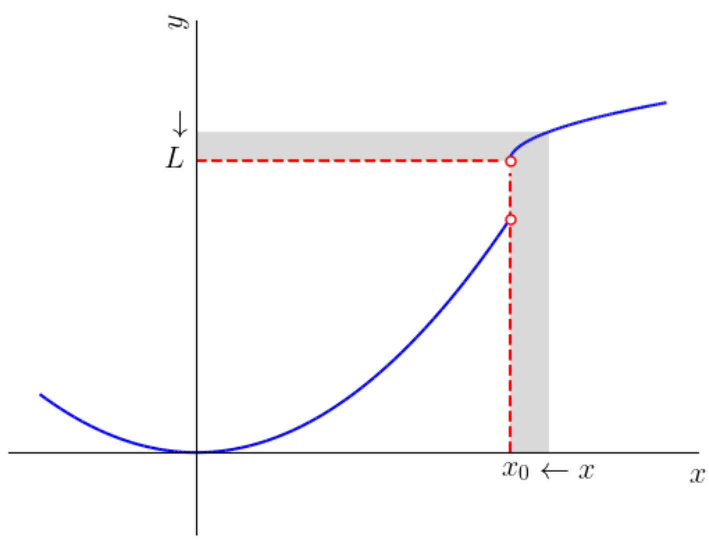



Figura 1.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

**Observação 1.3.1.** Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \to x_0^\pm} k = k \tag{1.100}$$

e

$$\lim_{x \to x_0^\pm} x = x_0, \tag{1.101}$$

onde $x_0$ e $k$ são quaisquer dados números reais.

**Exercício 1.3.1.** Vamos calcular

$$\lim_{x\to 0^-} |x|. \tag{1.102}$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & ,x \geq 0, \\ -x & ,x < 0. \end{cases} \tag{1.103}$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x \tag{1.104}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} x = 0. \tag{1.105}$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0. \tag{1.106}$$

Verifique!

Com o Python+SymPy, podemos computar os limites acima com os seguintes comandos.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

**Teorema 1.3.1.** *Existe o limite de uma dada função $f$ no ponto $x = x_0$ e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \tag{1.107}$$

*se, e somente se, existem e são iguais a $L$ os limites laterais à esquerda e à direita de $f$ no ponto $x = x_0$.*

**Exercício 1.3.2.** No exemplo anterior (Exemplo 1.3.1), vimos que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^+} |x| = 0. \tag{1.108}$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 1.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0. \tag{1.109}$$

**Exercício 1.3.3.** Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}. \tag{1.110}$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{align} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} \tag{1.111}\\ &= \lim_{x\to 0^-} -1 = -1. \tag{1.112}\end{align}$$

Agora, calculando o limite lateral à direta, obtemos

$$\begin{align} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \tag{1.113}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 1 = 1. \tag{1.114}\end{align}$$

Como os **limites laterais** à esquerda e à direita **são diferentes**, concluímos que **não existe o limite** de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.

Com o Python+SymPy, por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(abs(x)/x,x,0)
```

fornece o valor 1 como saída.

**Observação 1.3.2.** As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = L_1 \tag{1.115}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^\pm} g(x) = L_2, \tag{1.116}$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = kL_1, \tag{1.117}$$

para qualquer número real $k$.

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) \tag{1.118}$$
$$= L_1 + L_2 \tag{1.119}$$

- regra do produto:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0^\pm} g(x) \tag{1.120}$$
$$= L_1 \cdot L_2 \tag{1.121}$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x\to x_0^\pm} g(x)} \tag{1.122}$$
$$= \frac{L_1}{L_2}, \tag{1.123}$$

  desde que $L_2 \neq 0$.

- regra da potenciação:

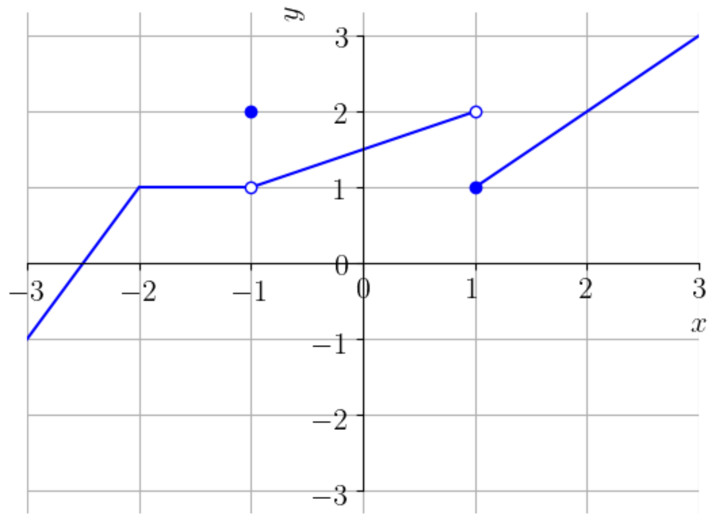
$$\lim_{x\to x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)\right)^s \tag{1.124}$$
$$= L_1^s, \tag{1.125}$$

  se, adicionalmente, $L_1^s$ é um número real.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.3.1.** Considere que uma dada função $f$ tenha o seguinte esboço de gráfico:




Então, infira o valores de

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

e) $\lim_{x \to 1} f(x)$

**Solução.**

a) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de $-2$, podemos observar que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1. Concluímos que

$$\lim_{x \to -2^-} = 1. \tag{1.126}$$

b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$

e suficientemente próximos de $-1$. Logo,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1. \tag{1.127}$$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2. \tag{1.128}$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando $x$ tende a 1 pela esquerda.

d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1. \tag{1.129}$$

Aqui, $f(x) \to f(1) = 1$ quando $x \to 1^+$.

e) $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1. \tag{1.130}$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x). \tag{1.131}$$

◊

**ER 1.3.2.** Calcule $\lim_{x \to -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \tag{1.132}$$

**Solução.** A função $f$ tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x\to -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1)^2 - 1 \tag{1.133}$$
$$= (-1+1)^2 - 1 = -1, \tag{1.134}$$

e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x \tag{1.135}$$
$$= -1. \tag{1.136}$$

Como ambos os limites laterais são iguais a $-1$, concluímos que

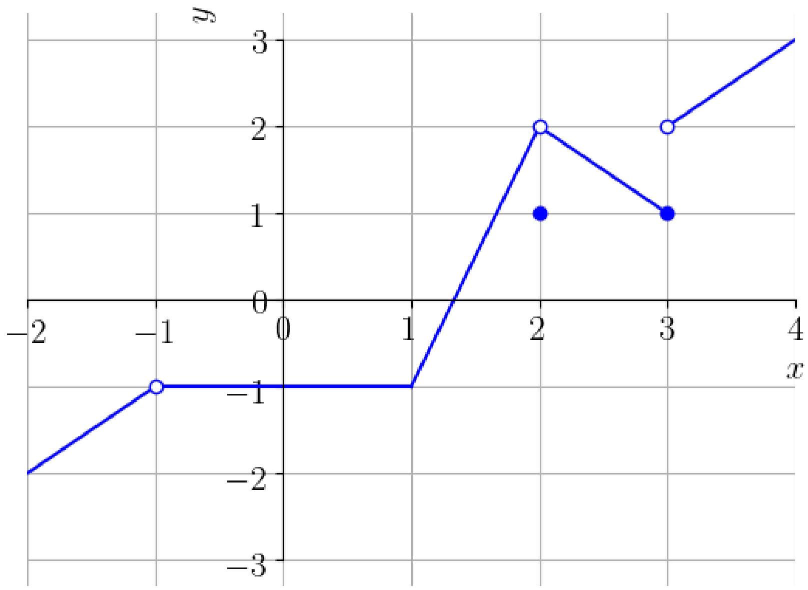
$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1. \tag{1.137}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.3.4.** Considere que uma dada função $f$ tenha o seguinte esboço de gráfico:




Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to 3} f(x)$

**Exercício 1.3.5.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \tag{1.138}$$

calcule

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

**Exercício 1.3.6.** Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \leq 1, \\ 2x+1 & ,x > 1, \end{cases} \tag{1.139}$$

calcule

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

**Exercício 1.3.7.** Calcule

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2|x|}. \tag{1.140}$$

**Exercício 1.3.8.** Calcule

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2}. \tag{1.141}$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

## 1.4 Limite no infinito

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$. Dizemos que o limite de $f(x)$ é $L$ quando $x$ tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de $L$ para todos os valores de $x$ **suficientemente pequenos**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L. \tag{1.142}$$

Veja a Figura 1.7.

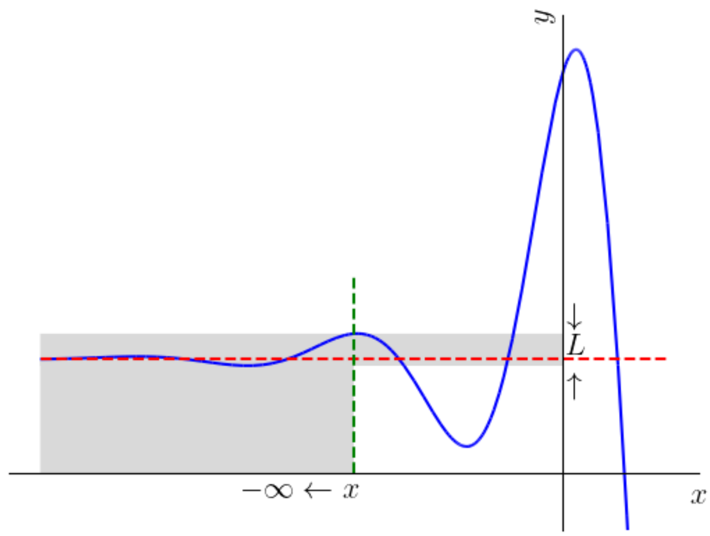



Figura 1.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é $L$ quando $x$ tende $\infty$, se os valores de $f(x)$ são **arbitrariamente próximos** de $L$ para todos os valores de $x$ **suficientemente grandes**. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L. \tag{1.143}$$

Veja a Figura 1.8.

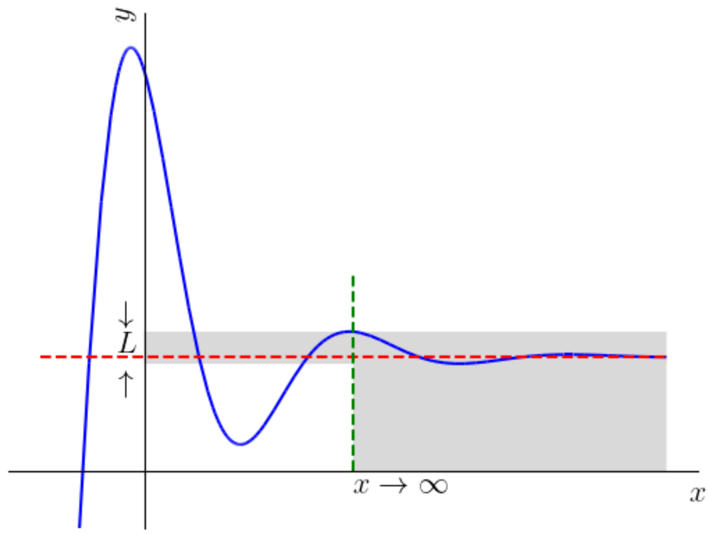



Figura 1.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \to \infty$.

**Exemplo 1.4.1.** Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \to -\infty$ e $x \to \infty$. A Figura 1.9 é um esboço do gráfico desta função.

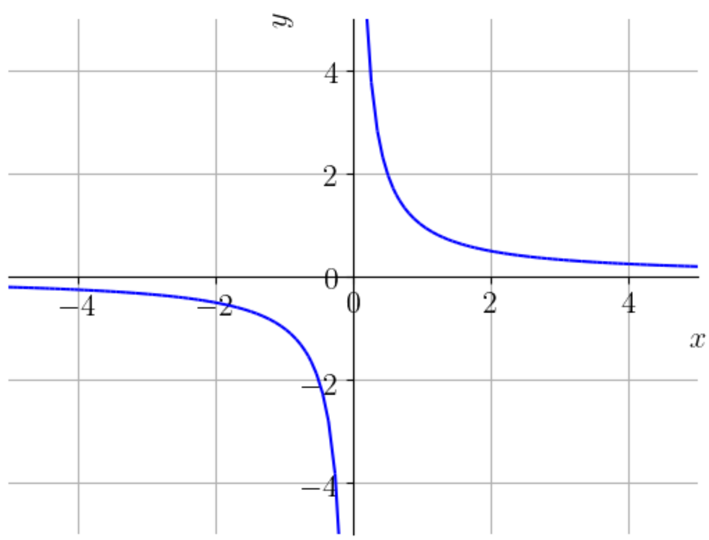



Figura 1.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de $x$, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1.144}$$

Também, quanto maiores os valores de $x$, mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1.145}$$

Podemos computar estes limites com o Python+SymPy, usando os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/x,x,-oo)
limit(1/x,x,oo)
```

**Observação 1.4.1.** (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que $L$, $M$ e $k$ são números reais e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \tag{1.146}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M. \tag{1.147}$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x\to\pm\infty} kf(x) = kL \tag{1.148}$$

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \tag{1.149}$$

- Regra do produto

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = LM \tag{1.150}$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{1.151}$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \tag{1.152}$$

**Exemplo 1.4.2.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1 \tag{1.153}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \tag{1.154}$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \tag{1.155}$$

**Exemplo 1.4.3.** Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \tag{1.156}$$

Observamos que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador.

**Observação 1.4.2.** Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$, temos[1]

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \tag{1.157}$$

**Exemplo 1.4.4.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.4.3), temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \tag{1.158}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-3x^3} \tag{1.159}$$

$$= -\frac{1}{3}. \tag{1.160}$$

[1] Demonstração é feita no Exercício 1.5.6.

### 1.4.1 Assíntotas horizontais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A reta $y = L$ é dita assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \tag{1.161}$$

ou

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L. \tag{1.162}$$

**Exemplo 1.4.5.** No Exemplo 1.4.3, vimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \tag{1.163}$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \tag{1.164}$$

Consulte a Figura 1.10.

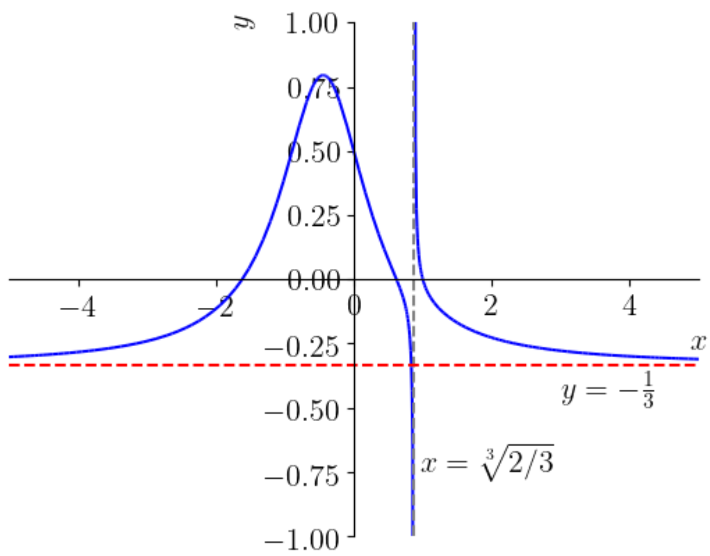



Figura 1.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{2-3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-3x^3} \tag{1.165}$$
$$= -\frac{1}{3}. \tag{1.166}$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

**Exemplo 1.4.6.** (Função exponencial natural)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{1.167}$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 1.11.

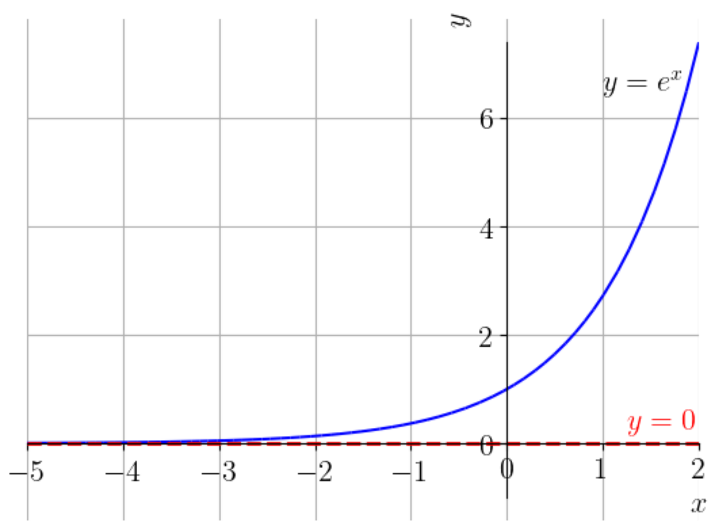



Figura 1.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

**Exemplo 1.4.7.** (Função logística) Na ecologia, a função logística [2]

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0} e^{-rt}\right)} \tag{1.168}$$

[2]Consulte mais em Wikipédia.

é um modelo de crescimento populacional de espécies, sendo $P(t)$ o número de indivíduos da população no tempo $t$. O parâmetro $P_0$ é o número de indíviduos na população no tempo inicial $t = 0$, $r > 0$ é a proporção de novos indivíduos na população devido a reprodução e $K$ é o limite de saturação do crescimento populacional (devido aos recursos escassos como alimentos, território e tratamento a doenças). Observamos que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\cancelto{0}{e^{-rt}}\right)} = K \tag{1.169}$$

Ou seja, $P(t) = K$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $P = P(t)$ e é o limite de saturação do crecimento populacional. Na Figura 1.12, temos o esboço do gráfico da função logística para $t \geq 0$.

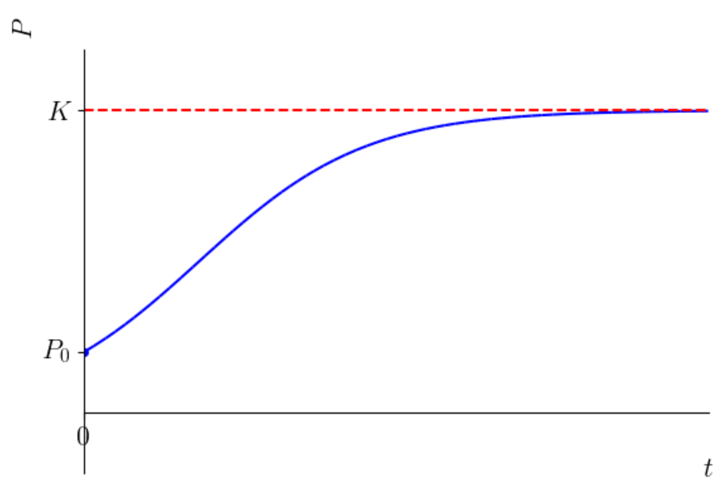



Figura 1.12: Esboço do gráfico da função logistica.

### 1.4.2 Limite no infinito de função periódica

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função $f$ é periódica quando existe um número $T$ tal que

$$f(x) = f(x + T), \tag{1.170}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de $f$. As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas[3].

O limite no infinito de funções periódicas não existe[4]. De fato, se $f$ não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro $k$. Desta forma, não existe número $L$ que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de $x$ suficientemente grandes (ou pequenos).

**Exemplo 1.4.8.** Não existe

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x), \tag{1.171}$$

pois os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 1.13.

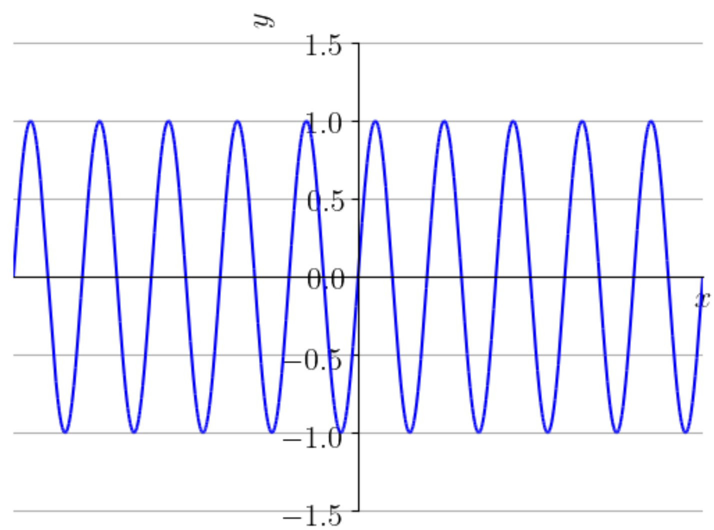



Figura 1.13: Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Com o Python+SymPy, ao computarmos $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ com o comando:

[3] Consulte mais nas Notas de Aula - Pré-Cálculo - Funções Trigonométricas
[4] À exceção de funções constantes.

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(sin(x),x,oo)
```

obtemos como saída o intervalo $[-1, 1]$, indicando que o limite não existe, pois $\operatorname{sen} x$ oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.4.1.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1. \tag{1.172}$$

**Solução.** Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x\to 1} 1 \tag{1.173}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) + 1, \tag{1.174}$$

observando que $\lim_{x\to\infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \to \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \to \infty$ quando $x \to \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \to \infty$ quando $x \to \infty$, i.e.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0. \tag{1.175}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \tag{1.176}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/(x-1)+1,x,oo)
```

◊

**ER 1.4.2.** Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \tag{1.177}$$

**Solução.** Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de $f$, quando

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L. \tag{1.178}$$

Começamos com $x \to -\infty$, temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \tag{1.179}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \tag{1.180}$$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Agora, vamos ver a tendência da função para $x \to \infty$, temos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \tag{1.181}$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \tag{1.182}$$

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função $f$.

Os seguintes comandos do Python+SymPy permitem plotar o esboço do gráfico da função $f$ (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
L = limit(f(x),x,oo)
p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],\
    line_color="blue",show=False)
q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

◊

**ER 1.4.3.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}. \tag{1.183}$$

**Solução.** Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo $y$ do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 1.4.6, vimos que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \tag{1.184}$$

logo

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} g(-x) \tag{1.185}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0. \tag{1.186}$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 1.14.

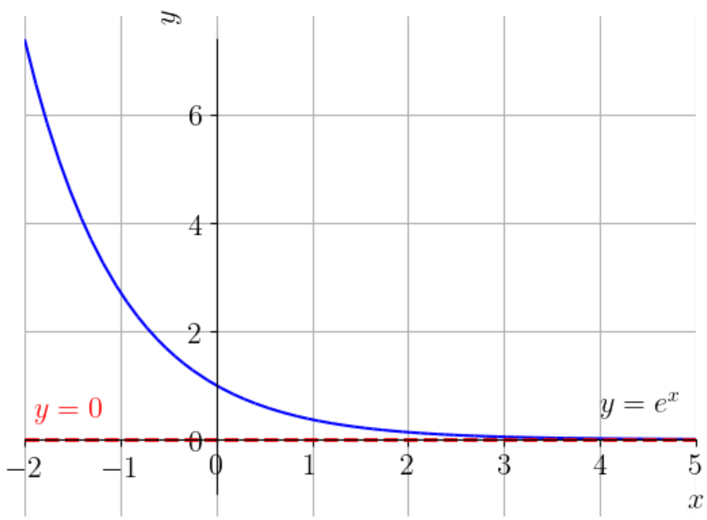



Figura 1.14: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(exp(-x),x,oo)
```

◊

## Exercícios

**Exercício 1.4.1.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \tag{1.187}$$

**Exercício 1.4.2.** Calcule

a) $\lim_{x\to-\infty} e^x + 1$

b) $\lim_{x\to\infty} 3 + e^{-x}$

c) $\lim_{x\to\infty} 2e^{-x} - 1$

d) $\lim_{x\to-\infty} e - e^x$

**Exercício 1.4.3.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \tag{1.188}$$

**Exercício 1.4.4.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \cos x. \tag{1.189}$$

**Exercício 1.4.5.** Calcule:

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+e^{-x}}$.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x+3} - e^x - 1$.

# 1.5 Limites infinitos

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando $x$ tende a um número $x_0$, se $f(x)$ é arbitrariamente grande para todos os valores de $x$ suficientemente próximos de $x_0$, mas $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{1.190}$$

A Figura 1.15, é uma ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

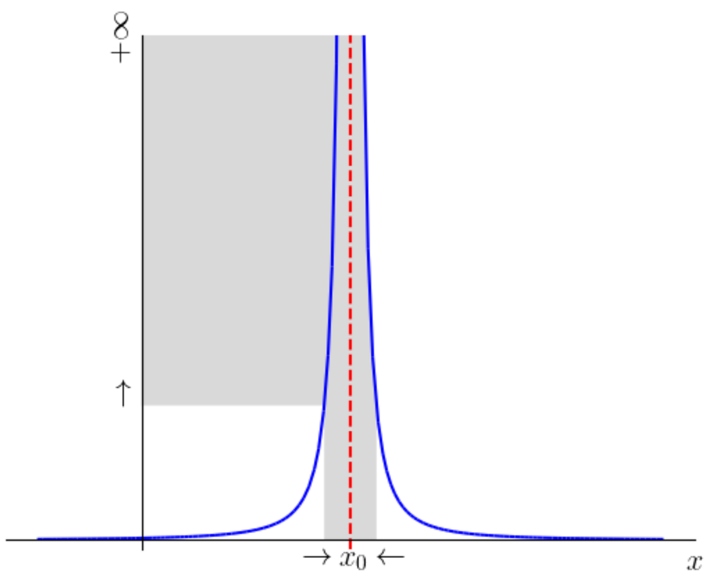



Figura 1.15: Ilustração de $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$.

**Exemplo 1.5.1.** Vejamos o caso de

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}. \tag{1.191}$$

Ao tomarmos $x$ próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

| $x$ | $-10^{-1}$ | $-10^{-2}$ | $-10^{-3}$ | $\to 0 \leftarrow$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ | $\to \infty \leftarrow$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^2$ |

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.16.

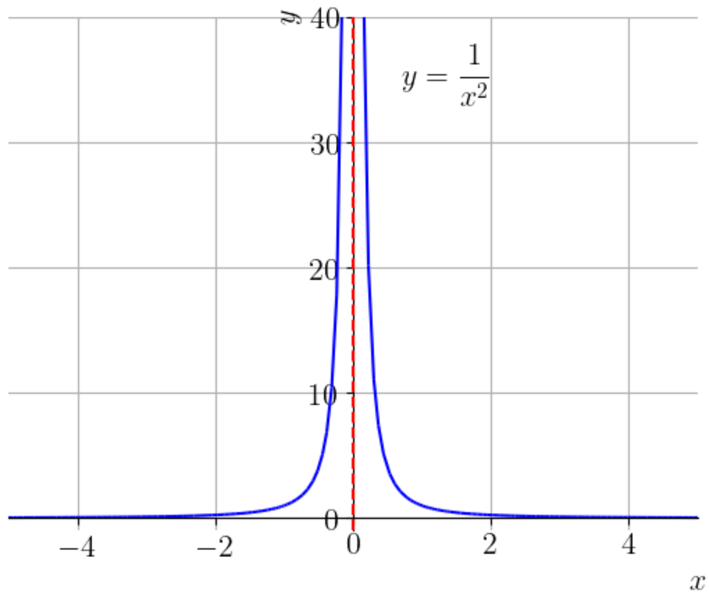



Figura 1.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer $x$ suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \tag{1.192}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \tag{1.193}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty. \tag{1.194}$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \to x_0$ e $x > x_0$.

**Exemplo 1.5.2.**

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \tag{1.195}$$

De fato, conforme tomamos valores de $x$ próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 1.17.

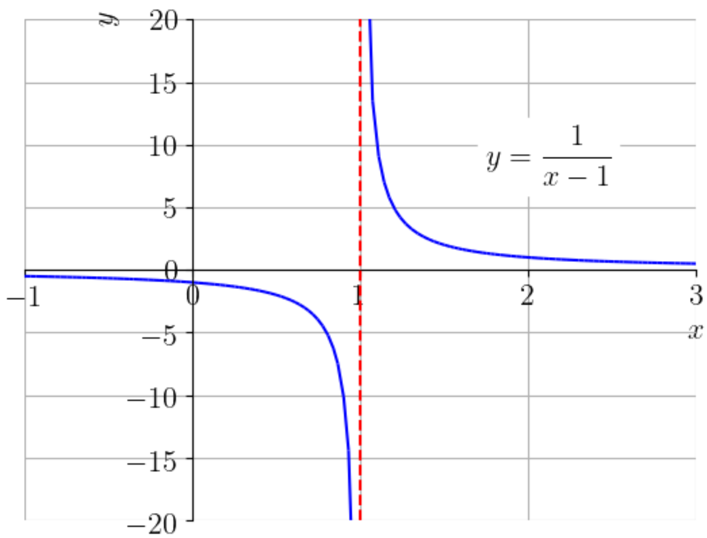



Figura 1.17: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(1/(x-1),x,0,'+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando $x$ tende a $x_0$, quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de $x$ suficientemente próximos de $x_0$, com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty. \tag{1.196}$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \to -\infty$ quando $x \to x_0^{\pm}$.

**Exemplo 1.5.3.** Observe que

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \tag{1.197}$$

e que não podemos concluir que este limite é $\infty$ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \tag{1.198}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \tag{1.199}$$

**Exemplo 1.5.4.**

$$\lim_{x\to -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \tag{1.200}$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo $x$. Veja a Figura 1.18.

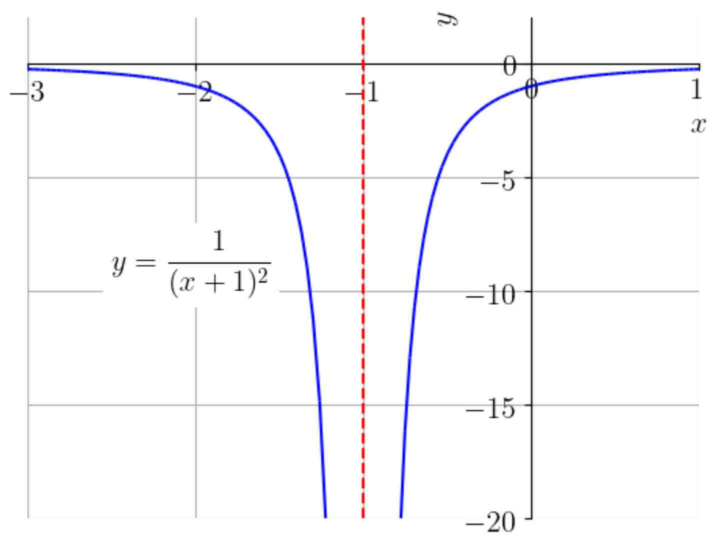



Figura 1.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(-1/(x+1)**2,x,-1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

### 1.5.1 Assíntotas verticais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \tag{1.201}$$

ou

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty. \tag{1.202}$$

**Exemplo 1.5.5.** O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \tag{1.203}$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 1.19.

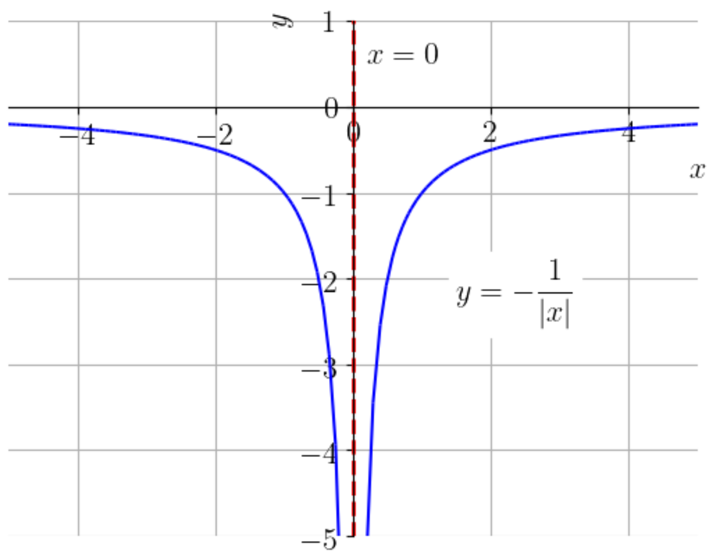



Figura 1.19: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

**Exemplo 1.5.6.** A função $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}$ não está definida para valores de $x$ tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1.204}$$

$$x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1 \tag{1.205}$$

Nestes pontos o gráfico de $f$ pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^3+2x^2-4x-8}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}} = +\infty, \tag{1.206}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{x^3+2x^2-4x-8}^{\to -3}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}} = -\infty, \tag{1.207}$$

e, também, temos

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\cancelto{-9}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^+}{x^2-1}} = -\infty, \tag{1.208}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{\cancelto{-9}{x^3+2x^2-4x-8}}{\cancelto{0^-}{x^2-1}} = +\infty. \tag{1.209}$$

Com isso, temos que as retas $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função $f$. Veja a Figura 1.20 para o esboço do gráfico desta função.

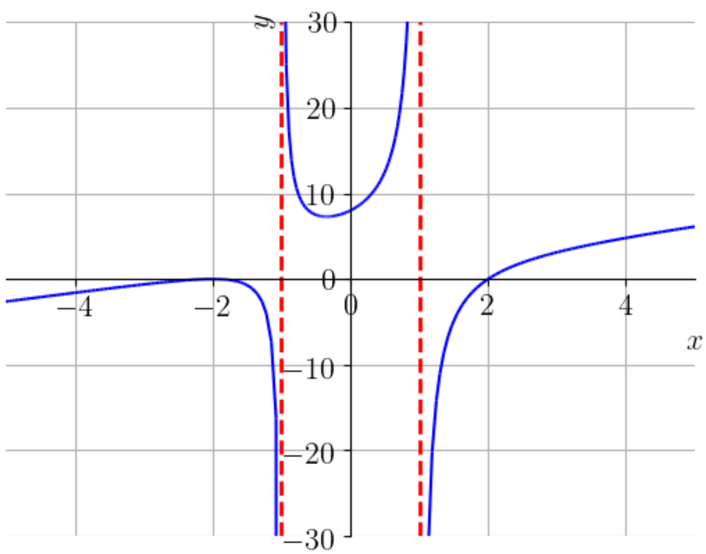



Figura 1.20: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}$.

**Exemplo 1.5.7.** (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y=\ln x$ é tal que

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \tag{1.210}$$

i.e., $x=0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y=\ln x$ ser a função inversa de $y=e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y=0$[5]. A Figura 1.21 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

[5] Veja o Exemplo 1.4.6.

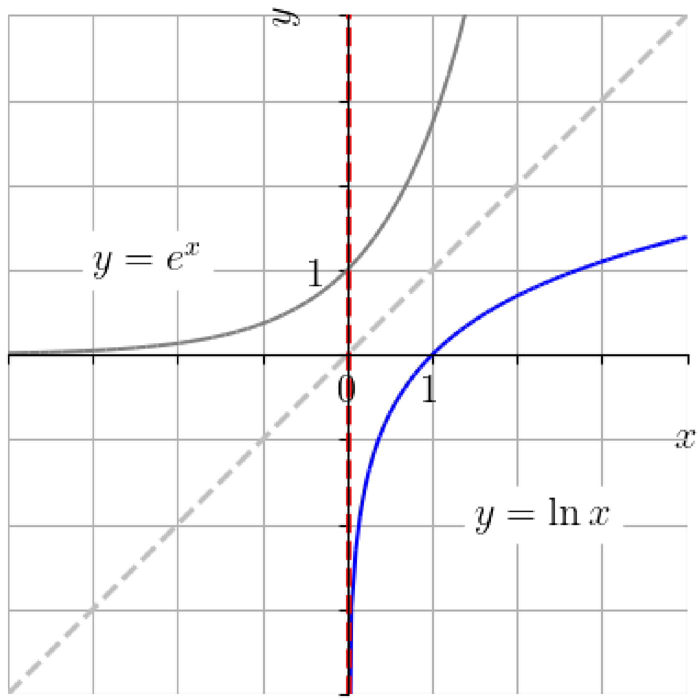



Figura 1.21: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

**Exemplo 1.5.8.** As funções trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \sec x$ têm assíntotas verticais $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ para $k$ inteiro. Já, as funções trigonométricas $y = \operatorname{cotg} x$ e $y = \operatorname{cossec} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para $k$ inteiro. Consulte mais em Funções Trigonométricas nas Notas de Aula de Pré-Cálculo.

### 1.5.2 Assíntotas oblíquas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assintota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

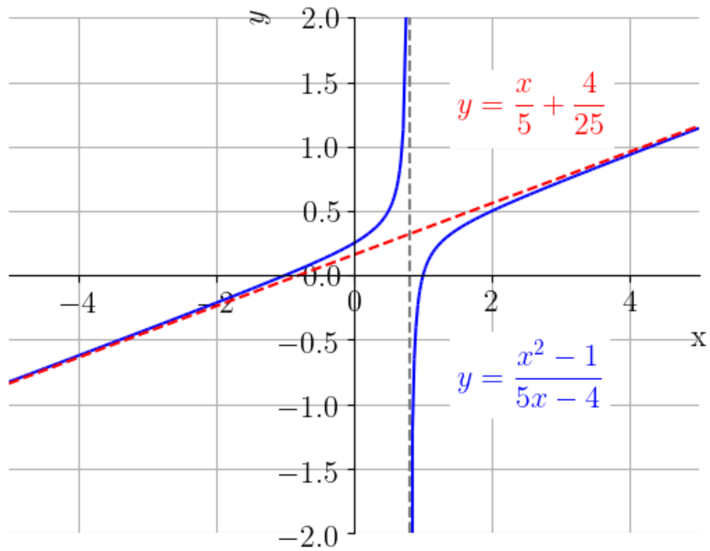



Figura 1.22: Esboço do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5x-4}$.

**Exemplo 1.5.9.** Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2-1}{5x-4}. \tag{1.211}$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x-4}}_{\text{resto}}. \tag{1.212}$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \to \pm\infty$, i.e. $f(x) \to \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \to \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 1.22.

**Observação 1.5.1.** Analogamente à assintotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

### 1.5.3 Limites infinitos no infinito

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \tag{1.213}$$

quando os valores da função $f$ são arbitrariamente grandes para todos os valores de $x$ suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \tag{1.214}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \tag{1.215}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty. \tag{1.216}$$

**Exemplo 1.5.10.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$

**Exemplo 1.5.11.**

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \tag{1.217}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cancelto{0^+}{\frac{10}{x}} + \cancelto{0^+}{\frac{300}{x^3}}}{\cancelto{0^+}{\frac{1}{x^3}}} = \infty. \tag{1.218}$$

**Proposição 1.5.1.** *Dado um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, *temos*

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm} a_n x^n. \tag{1.219}$$

**Exemplo 1.5.12.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 1.5.11, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^3 - 10x^2 + 300 &= \lim_{x\to\infty} x^3 &(1.220)\\ &= \infty. &(1.221)\end{aligned}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.5.1.** Calcule

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \tag{1.222}$$

**Solução.** Temos

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancelto{-1}{x-2}}{\cancelto{0^+}{1-x}} = -\infty. \tag{1.223}$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \to 0^+$ quando $x \to 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = x - 1$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{1-x} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{y+1-2}{y} &(1.224)\\ &= \lim_{y\to 0^+} \frac{y-1}{y} &(1.225)\\ &= -\infty. &(1.226)\end{aligned}$$

Podemos usar o seguinte comandoPython+SymPy para computar este limite:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit((x-2)/(1-x),x,1,'-')
```

◊

**ER 1.5.2.** Calcule

$$\lim_{x\to 1} \ln |x-1|. \tag{1.227}$$

**Solução.** Começamos observando que

$$\ln|x-1| = \begin{cases} \ln(1-x) & ,x<1, \\ \ln(x-1) & ,x>1. \end{cases} \tag{1.228}$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty^6.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \ln|x-1| &= \lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) \\ &= \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty^7.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty. \tag{1.229}$$

Podemos usar os seguintes comandos Python+SymPy para computar os limites laterais:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(log(abs(x-1)),x,1,'-')
limit(log(abs(x-1)),x,1,'+')
```

◊

**ER 1.5.3.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1}. \tag{1.230}$$

**Solução.** Tratando-se de uma função racional, temos[8]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \tag{1.231}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \tag{1.232}$$

$$= \infty. \tag{1.233}$$

[8] Veja a Observação 1.4.2. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 1.20.

$\Diamond$

**ER 1.5.4.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2}. \tag{1.234}$$

**Solução.** Observamos que $1 - x^2 \to -\infty$ quando $x \to \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x^2$, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0. \tag{1.235}$$

$\Diamond$

**ER 1.5.5.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \tag{1.236}$$

**Solução.** Podemos verificar que trata-se de uma indeterminação do tipo $\infty/\infty$. Neste caso, podemos calcular o limite pela multiplicação (em cima e em baixo) pelo inverso do fator dominante no radical, i.e. $1/\sqrt{x^2}$. Ou seja, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \tag{1.237}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \tag{1.238}$$

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \to \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2\frac{x}{|x|}} \tag{1.239}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2\frac{x}{x}} \tag{1.240}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \tag{1.241}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1} \tag{1.242}$$

$$= \frac{1}{2}. \tag{1.243}$$

$\Diamond$

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.5.1.** Calcule

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}. \tag{1.244}$$

**Exercício 1.5.2.** Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x)=\frac{8}{x^2-4}. \tag{1.245}$$

**Exercício 1.5.3.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x^2-1}. \tag{1.246}$$

**Exercício 1.5.4.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+10x^2-300. \tag{1.247}$$

**Exercício 1.5.5.** Calcule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} \tag{1.248}$$

**Exercício 1.5.6.** Dados dois polinômios $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ e $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$, mostre que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}. \tag{1.249}$$

**Exercício 1.5.7.** Mostre que $y=x^2$ é assíntota ao gráfico de

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x}. \tag{1.250}$$

## 1.6 Continuidade

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

### 1.6.1 Definição de função contínua

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Dizemos que uma **função** $f$ é **contínua** em um ponto $x_0$, quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1.251}$$

e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.252}$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou à **direta**. Quando a **função** $f$ não é contínua em um dado ponto $x_0$, dizemos que $f$ é **descontínua** neste ponto.

**Exemplo 1.6.1.** Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & ,x \neq 2, \\ -4 & ,x = 2. \end{cases} \tag{1.253}$$

Na Figura 1.23, temos um esboço do gráfico de $f$.

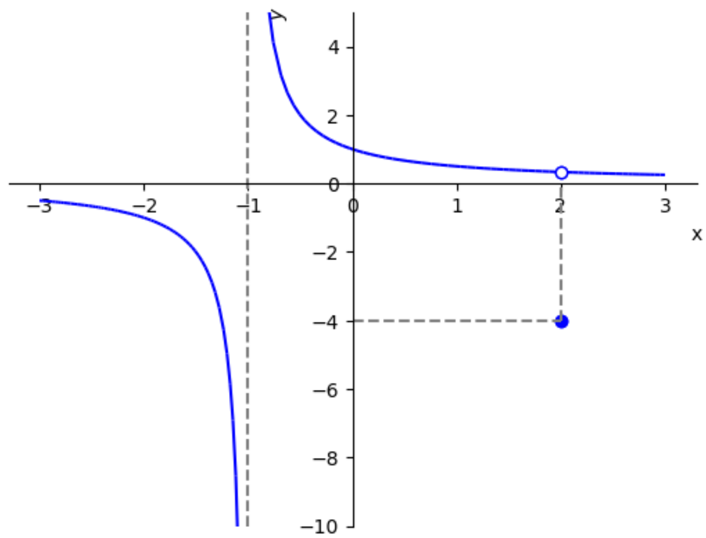



Figura 1.23: Esboço do gráfico da função $f$ definida no Exemplo 1.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1\cdot(-4)} = -1 = f(-2). \tag{1.254}$$

Com isso, concluímos que $f$ é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \tag{1.255}$$

logo, f(-1) não está definido e, portanto, $f$ é descontínua neste ponto. Observemos que $f$ tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \tag{1.256}$$

Portanto, concluímos que $f$ é descontínua em $x = 2$.

Uma função $f$ é dita ser **contínua em um intervalo** $(a, b)$, quando $f$ é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

**Exemplo 1.6.2.** (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \tag{1.257}$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.24.

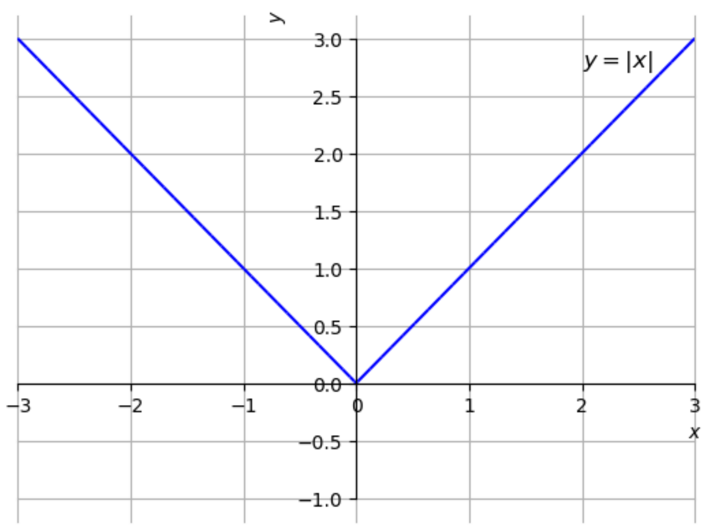



Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x) = |x|$.

Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de $x$. Também, para $x \in (0,\infty)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de $x$. Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0, \tag{1.258}$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0. \tag{1.259}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|. \tag{1.260}$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

### 1.6.2 Propriedades de funções contínuas

Se $f$ e $g$ são funções contínuas em $x = c_0$ e $k$ um número real, então também são contínuas em $x = x_0$ as funções:

a) $k \cdot f$

b) $f \pm g$

c) $f \cdot g$

d) $f/g$, se $g(x_0) \neq 0$

e) $f^k$, se existe $f^k(x_0)$.

**Exemplo 1.6.3.** Temos que $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ são exemplos de funções contínuas em toda parte. Segue das propriedades acima que:

a) $f_a(x) = 2x$ é contínua em toda parte.

b) $f_b(x) = x + |x|$ é contínua em toda parte.

c) $f_c(x) = 2x|x|$ é contínua em toda parte.

d) $f_d(x) = \frac{|x|}{x}$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) $f_e(x) = x^2$ é contínua em toda parte.

**Exemplo 1.6.4. Polinômios são contínuos em toda parte**. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0), \tag{1.261}$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \tag{1.262}$$

**Exemplo 1.6.5. Funções racionais** $r(x) = p(x)/q(x)$ **são contínuas em todos os pontos de seus domínios**. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \tag{1.263}$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \tag{1.264}$$

pois $f$ não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \tag{1.265}$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \tag{1.266}$$

Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \tag{1.267}$$

Ou seja, $f$ é contínua nos intervalos $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

**Observação 1.6.1.** São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Se $f$ é contínua no ponto $x_0$ e $g$ é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto $x_0$.

**Exemplo 1.6.6.** Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2-1}$ é descontínua nos pontos $x$ tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \tag{1.268}$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1,\infty)$.

b) $y = \left|\frac{x-1}{x^2-1}\right|$ é descontínua nos pontos $x$ tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \tag{1.269}$$

**Exemplo 1.6.7.** Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}\cdot e^{\operatorname{sen} x} = \sqrt{\lim_{x\to 0} x+4}\cdot e^{\operatorname{sen} \lim_{x\to 0} x} = \sqrt{4}\cdot e^0 = 2. \tag{1.270}$$

### Teorema do Valor Intermediário

O Teorema do Valor Intermediário estabelece que qualquer dada função $f$ contínua em um intervalo $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Consulte a Figura 1.25.

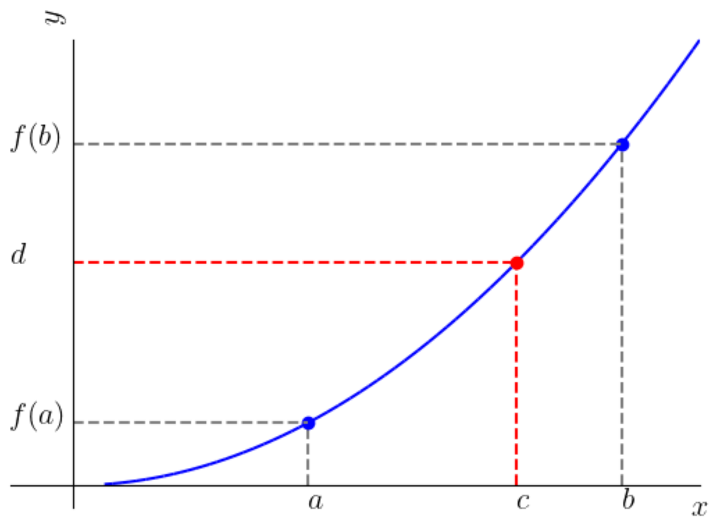



Figura 1.25: Ilustração sobre o Teorema do Valor Intermediário.

**Teorema 1.6.1.** (Teorema do valor intermediário) Seja $f$ função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se $d$ é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

**Exemplo 1.6.8.** Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, $f$ é contínua no intervalo [0,2] e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 1.26.

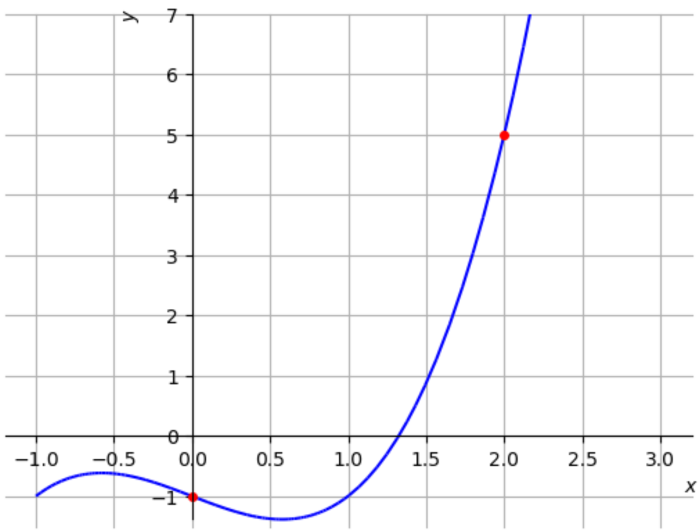



Figura 1.26: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \tag{1.271}$$

**Solução.** Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \tag{1.272}$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a $-1$ e, portanto, contínua.

Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \tag{1.273}$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua.

Concluímos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

◊

**ER 1.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{1.274}$$

**Solução.** A função $f$ pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. $g$ é contínua para todo $x > 0$;

b) a função racional $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função $h$ tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \tag{1.275}$$

Fazendo o estudo de sinal


vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Em resumo, $h$ é contínua em $(0, \infty)$ e $g$ é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. $f$ é contínua em $(1, \infty)$.

◊

### Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.6.1.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \tag{1.276}$$

**Exercício 1.6.2.** Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \tag{1.277}$$

**Exercício 1.6.3.** Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos x}{2}\right). \tag{1.278}$$

## 1.7 Limites e desigualdades

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se $f$ e $g$ são funções tais que $f(x)<g(x)$ para todo $x$ em um certo intervalo aberto contendo $x_0$, exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de $f$ e $g$ no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x). \tag{1.279}$$

Observe que a tomada do **limite não preserva a desigualdade estrita**.

**Exemplo 1.7.1.** As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0. \tag{1.280}$$

**Observação 1.7.1.** A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se $f$ e $g$ são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de $f$ e $g$ no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^-} g(x). \tag{1.281}$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

### 1.7.1 Limites de funções limitadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Se $f(x) \leq L$ para todo $x$ em um intervalo aberto contendo $x_0$, exceto possivelmente em $x_0$, então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq L. \tag{1.282}$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

**Exemplo 1.7.2.** Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x. \tag{1.283}$$

Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x \leq \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \tag{1.284}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x \geq \lim_{x\to\infty} -e^{-x} = 0. \tag{1.285}$$

Logo, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x = 0. \tag{1.286}$$

### 1.7.2 Teorema do confronto

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Teorema 1.7.1.** (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x$ em um intervalo aberto contendo $a$, exceto possivelmente em $x = a$ (consulte a Figura 1.27), e

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L, \tag{1.287}$$

então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{1.288}$$

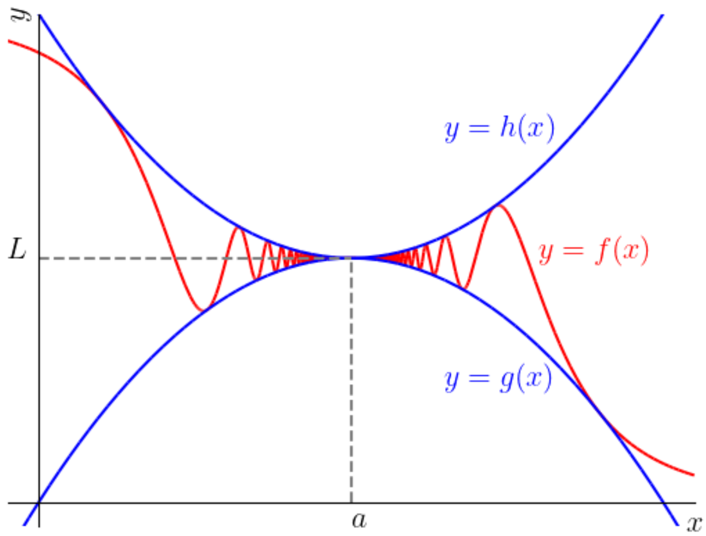



Figura 1.27: Ilustração sobre o Teorema 1.7.1.

*Demonstração.* Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) \tag{1.289}$$

donde

$$L \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq L. \tag{1.290}$$

□

**Exemplo 1.7.3.** Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1. \tag{1.291}$$

**Observação 1.7.2.** O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

**Exemplo 1.7.4.**

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{1.292}$$

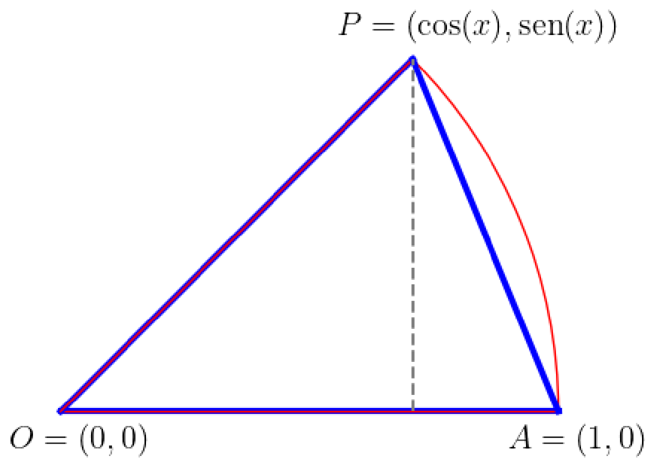



Figura 1.28: Ilustração referente ao Exemplo 1.7.4.

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0{,}0)$, $A = (1{,}0)$ e $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ (consulte a Figura 1.28), observamos que

$$\text{Área do triâng.}OAP < \text{Área do setor}OAP, \tag{1.293}$$

i.e.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x, \tag{1.294}$$

para todo $0 < x < \pi/2$.

É certo que $\operatorname{sen} x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\operatorname{sen} x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{1.295}$$

Lembrando que $\operatorname{sen} x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \tag{1.296}$$

Logo, de (1.295) e (1.296), temos

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|. \tag{1.297}$$

Por fim, como

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0, \tag{1.298}$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0. \tag{1.299}$$

**Observação 1.7.3.** Do exemplo anterior (Exemplo 1.7.4), podemos mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{1.300}$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{1.301}$$

temos

$$\cos x = 1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{1.302}$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left[1 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right] \tag{1.303}$$

$$= 1 + 2\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)^2. \tag{1.304}$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \to 0$ quando $x \to 0$ e, então

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y\to 0} \operatorname{sen} y = 0. \tag{1.305}$$

Então, retornando a equação (1.304), concluímos

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{1.306}$$

### 1.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.307}$$

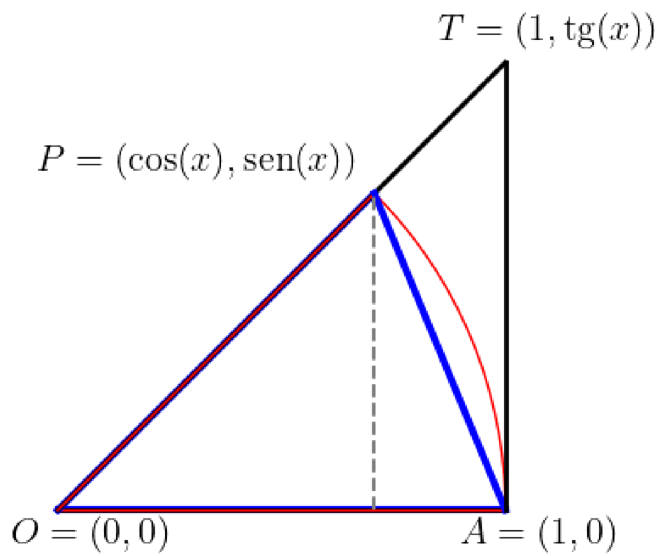



Figura 1.29: Ilustração para o cálculo de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0{,}0)$, $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A = (1{,}0)$ e $T = (1, \operatorname{tg} x)$ (consulte Figura 1.29), observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor} OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \tag{1.308}$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \tag{1.309}$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\operatorname{sen} x$[9], obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{1.310}$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \tag{1.311}$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x\to 0^+} 1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1. \tag{1.312}$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.313}$$

Agora, usando o fato de que $\operatorname{sen} x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \tag{1.314}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.315}$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

**Exemplo 1.7.5.** Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{1.316}$$

Veja o Exercício 1.7.4.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 1.7.1.** Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x). \tag{1.317}$$

[9] $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

**Solução.** Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \cancelto{0}{x^3} \leq \lim_{x\to 0^+} f(x) \leq \lim_{x\to 0^+} \cancelto{0}{\sqrt{x}}. \tag{1.318}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0. \tag{1.319}$$

$\Diamond$

Em construção ...

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.7.1.** Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x\to 0} u(x)$.

**Exercício 1.7.2.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cos x. \tag{1.320}$$

**Exercício 1.7.3.** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \tag{1.321}$$

**Exercício 1.7.4.** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \tag{1.322}$$

**Exercício 1.7.5.** Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \tag{1.323}$$

## 1.8 Exercícios finais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 1.8.1.** Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right). \tag{1.324}$$

**Exercício 1.8.2.** Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

# Capítulo 2

# Derivadas

## 2.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos estudar a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, estudamos as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

### 2.1.1 Reta secante e reta tangente

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função $f$ pelos pontos $x_0$ e $x_1$, $x_0 \neq x_1$, como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.1}$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1,f(x_1))$. Veja a Figura 2.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{2.2}$$

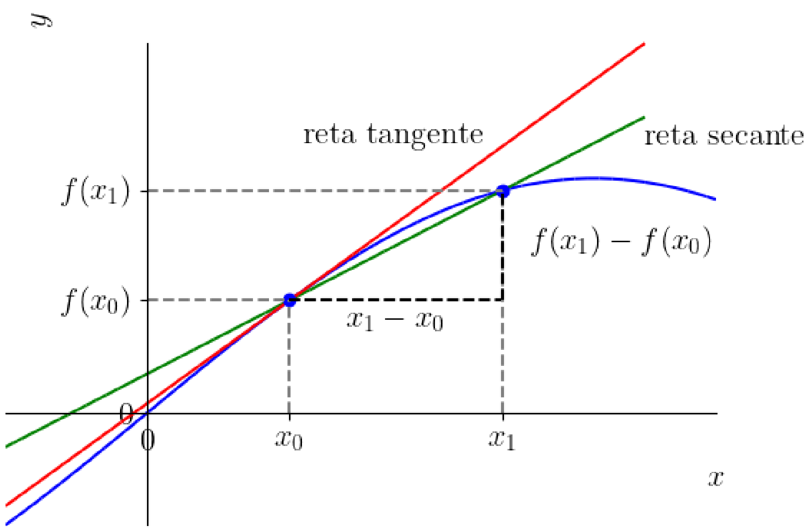



Figura 2.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelho) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função $f$ em $x = x_0$ é a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{2.3}$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.4}$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos $x_0$ e $x_1$, quando $x_1 \to x_0$. Veja a Figura 2.1.

**Observação 2.1.1.** Fazendo a mudança de variável $h = x_1 - x_0$, temos que (2.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.5}$$

De fato, da mudança de variável, temos que $x_1 = x_0 + h$ e quando $x_1 \to x_0$, temos que $h = x_1 - x_0 \to 0$. Ou seja,

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{2.6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{2.7}$$

**Exemplo 2.1.1.** Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $f$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{2.8}$$

$$= \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \tag{2.9}$$

$$= \frac{4-1}{1} = 3. \tag{2.10}$$

Logo, a reta secante ao gráfico de $f$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x-x_0) + f(x_0) \tag{2.11}$$

$$y = 3(x-1) + f(1) \tag{2.12}$$

$$y = 3x - 2. \tag{2.13}$$

Na Figura 2.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

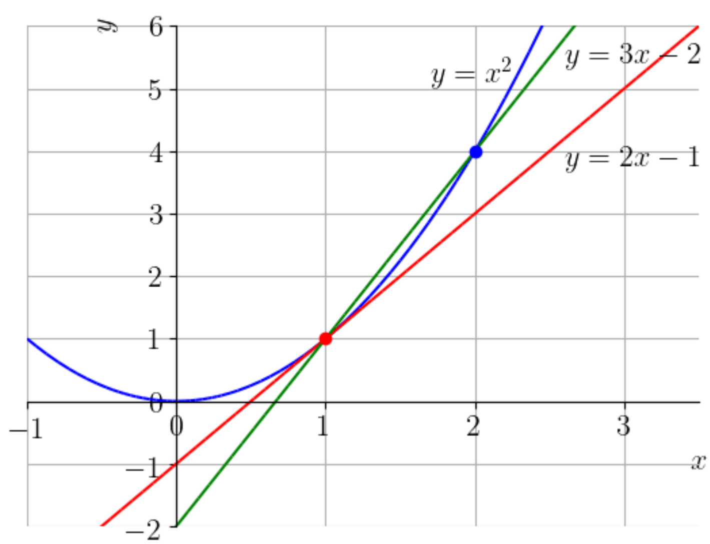



Figura 2.2: Esboços dos gráficos de $f(x) = x^2$ (azul), da reta secante pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ (verde) e da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x_0 = 1$ (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x_0$ é

$$\begin{align}
m_{\text{tg}} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{2.14}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} \tag{2.15}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \tag{2.16}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{1} = 2. \tag{2.17}
\end{align}$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ tem coeficiente angular $m_{\text{tg}} = 2$ e equação

$$y = 2(x-1)+1 = 2x-1. \tag{2.18}$$

Na Figura 2.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o Python+SymPy, podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
...: x,y = symbols('x,y')
...: x0 =  1
...: x1 = 2
...: f = lambda x: x**2
...: msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
...: Eq(y, msec*(x-x0)+f(x0))
Out: Eq(y, 3.0*x - 2.0)
```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
...: x,y = symbols('x,y')
...: h = Symbol('h')
...: x0 = 1
...: f = lambda x: x**2
...: mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)
...: Eq(y, mtg*(x-x0)+f(x0))
...:
Out: Eq(y, 2*x - 1)
```

### 2.1.2 Taxa de variação

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **taxa de variação média** de uma função $f$ quando $x$ varia de $x_0$ a $x_1$ é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{2.19}$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de $f$ no ponto $x_0$, a qual é definida como

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.20}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.21}$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

**Exemplo 2.1.2.** Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo $t_0$ ao tempo $t_1$ é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{2.22}$$

Por exemplo, se $s(t) = 15t^2 + t$ (km), então a velocidade média do objeto entre $t_0 = 1\text{h}$ e $t_1 = 3\text{h}$ é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \tag{2.23}$$

$$= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \tag{2.24}$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \tag{2.25}$$

$$= 61\ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{2.26}$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo $t_0 = 1$ é

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \tag{2.27}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{15(t_0+h)^2 + (t_0+h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \tag{2.28}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \tag{2.29}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \tag{2.30}$$

$$= \lim_{h\to 0} 30t_0 + 15h + 1 \tag{2.31}$$

$$= 30t_0 + 1 = 31\ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{2.32}$$

**Exemplo 2.1.3.** Seja $c(x) = \sqrt{x}$ (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O **custo médio da produção** de $x_0 = 4$ a $x_1 = 9$ é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{2.33}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} \tag{2.34}$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} \tag{2.35}$$

$$= \frac{3 - 2}{5} \tag{2.36}$$

$$= 0{,}2\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \tag{2.37}$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa está produzindo $x_0 = 4$ milhões de unidades é

$$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0=4} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \tag{2.38}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \tag{2.39}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \tag{2.40}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \cancelto{0}{h}} + \sqrt{x_0}} \tag{2.41}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \tag{2.42}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4} = 0{,}25\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \tag{2.43}$$

**Observação 2.1.2.** Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

### 2.1.3 Derivada em um ponto

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **derivada** de uma função $f$ **em um ponto** $x = x_0$ é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ e é definida por

$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.44}$$

**Exemplo 2.1.4.** Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = k$, $k$ constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{2.45}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0. \tag{2.46}$$

b) $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{2.47}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \tag{2.48}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \tag{2.49}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}} \tag{2.50}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \tag{2.51}$$

**Exemplo 2.1.5.** Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por $r(x) = x^2$ (milhões de reais), onde $x$ é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando $x = x_0 = 1$ é

$$r'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \tag{2.52}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \tag{2.53}$$

$$= \lim_{x\to x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \tag{2.54}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.1.1.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Faça, então, os esboços dos gráficos de $f$ e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $x_0 = 4$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.55}$$

A derivada de $f$ no ponto $x_0$ é

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{2.56}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} \tag{2.57}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \tag{2.58}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \tag{2.59}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \tag{2.60}$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + \sqrt{4} \tag{2.61}$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \tag{2.62}$$

Veja a Figura 2.3 para os esboços dos gráfico de $f$ e da reta tangente.

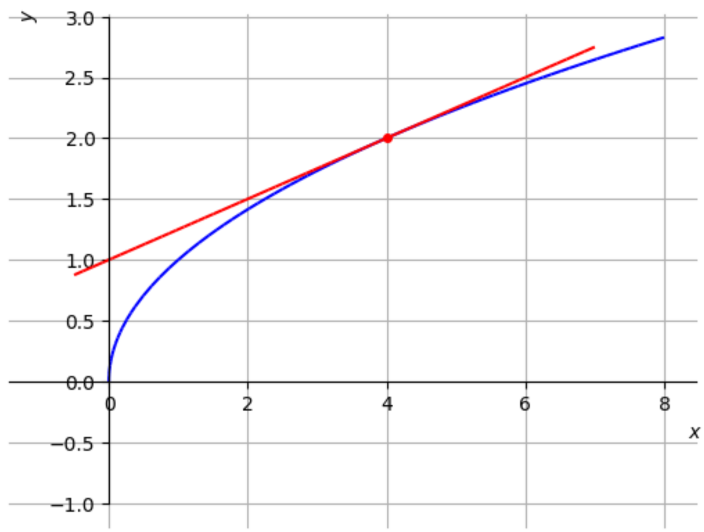



Figura 2.3: Esboços do gráfico da função $f$ e da reta tangente no ponto $x_0 = 4$.

◊

**ER 2.1.2.** Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \tag{2.63}$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \tag{2.64}$$

onde $x$ é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando $x = 1$ mi.

**Solução.** O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \tag{2.65}$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto $x_0 = 1$ é

$$\begin{align}
l'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{l(x_0+h) - l(x_0)}{h} \tag{2.66}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - c(x_0+h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \tag{2.67}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0) - (c(x_0+h) - c(x_0))}{h} \tag{2.68}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{c(x_0+h) - c(x_0)}{h} \tag{2.69}\\
&= r'(x_0) - c'(x_0) \tag{2.70}\\
&= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \tag{2.71}\\
&= 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \tag{2.72}
\end{align}$$

$\lozenge$

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.1.1.** Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2,\ f'(-1);$

b) $g(x) = 10^6,\ g'(10^8);$

c) $h(x) = \ln 2e,\ h'(-\pi);$

**Exercício 2.1.2.** Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2 + x,\ f'(-1);$

b) $g(x) = 10^6 - 2x,\ g'(-3);$

c) $h(x) = \ln(2e) + ex,\ h'(10^6);$

**Exercício 2.1.3.** Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = x,\ f'(-1);$

b) $g(x) = -2x$, $g'(-3)$;

c) $h(x) = ex$, $h'(10^6)$;

**Exercício 2.1.4.** Determine a reta secante ao gráfico de $f(x) = 5 - x^2$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Então, determine a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $x_0 = 1$. Por fim, faça os esboços dos gráficos de $f$, da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

**Exercício 2.1.5.** Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo $c(x) = 2\sqrt{x}$ e rendimento $r(x) = \frac{1}{100}x^3$, dados em milhões de reais com $x$ em milhares de unidades. Calcule:

a) o custo marginal quando $x = 1$;

b) o rendimento marginal quando $x = 1$;

c) o lucro marginal quando $x = 1$.

## 2.2 Função derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **derivada** de uma função $f$ em relação à variável $x$ é a função $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ cujo valor em $x$ é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{2.73}$$

quando este limite existe. Dizemos que $f$ é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto $x$ de seu domínio, quando o limite dado em (2.73) existe. Se isso ocorre para todo número real $x$, dizemos que $f$ é derivável em toda parte.

**Exemplo 2.2.1.** A derivada de $f(x) = x^2$ é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.74}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \tag{2.75}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \tag{2.76}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x. \tag{2.77}$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte.A Figura 2.4.

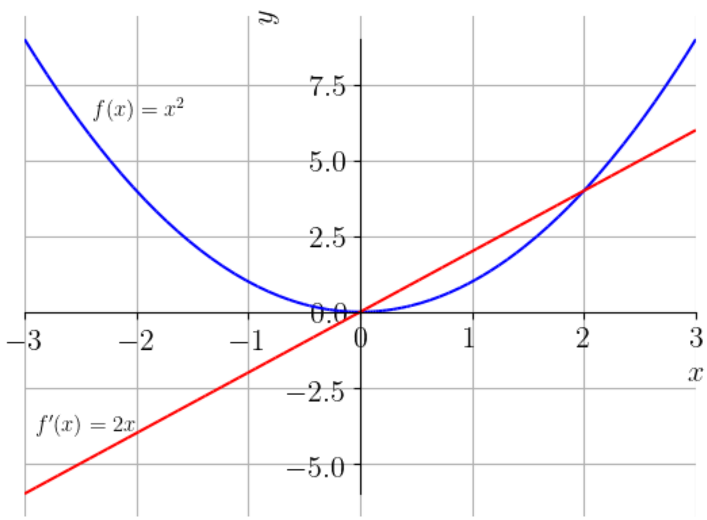



Figura 2.4: Esboços dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$.

Com o SymPy, podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
from sympy import *
x,h = symbols('x,h')
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)
```

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
diff(x**2)
```

para computar a derivada de $x^2$ em relação a $x$.

**Observação 2.2.1.** A derivada à direita (à esquerda) de uma função $f$ em um ponto $x$ é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^{\pm}} = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.78}$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

**Exemplo 2.2.2.** Vamos calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Para $x = 0$, só faz sentido calcular a derivada lateral à direta:

$$\begin{aligned}
f'_{+}(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} &(2.79)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} &(2.80)\\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cancelto{0^+}{\sqrt{h}}} = +\infty. &(2.81)
\end{aligned}$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. Agora, para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &(2.82)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &(2.83)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} &(2.84)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}. &(2.85)
\end{aligned}$$

Na Figura 2.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

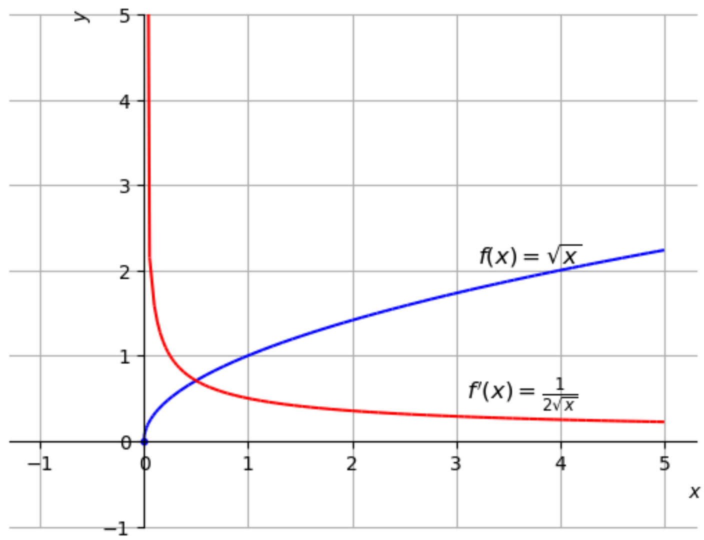



Figura 2.5: Esboços dos gráficos da função $f(x) = \sqrt{x}$ e de sua derivada.

No SymPy, a computação de $f'_+(0)$ pode ser feita com os comandos[1]:

```
from sympy import *
h = Symbol('h')
limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
diff(sqrt(x),x)
```

**Exemplo 2.2.3.** A função valor absoluto é derivável para todo $x \neq 0$ e não é derivável em $x = 0$. De fato, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{2.86}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \tag{2.87}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{2.88}$$

[1] Por padrão no SymPy, o limite é tomado à direita.

Analogamente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{2.89}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \tag{2.90}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{2.91}$$

Agora, para $x = 0$, devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \tag{2.92}$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \tag{2.93}$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Na figura 2.6, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = |x|$ e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \tag{2.94}$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por $\text{sign}(x)$. Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

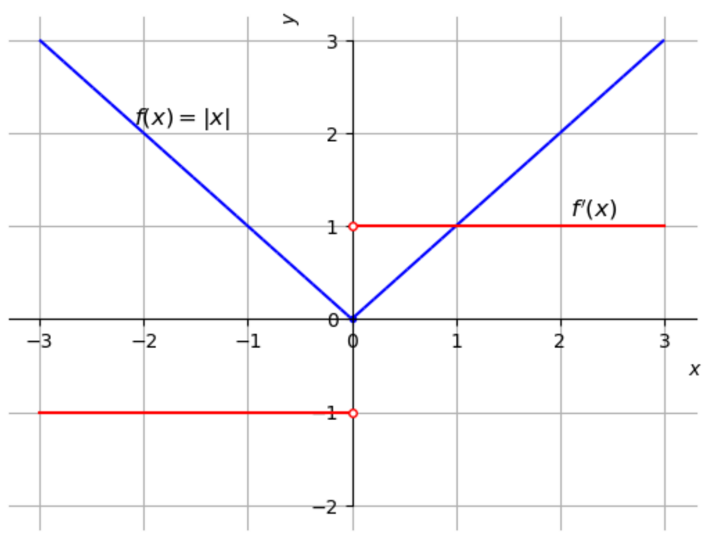



Figura 2.6: Esboços dos gráficos da função $f(x) = |x|$ e de sua derivada.

No SymPy, podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
In : from sympy import *
...: x = symbols('x', real=True)
...: diff(abs(x))
Out: sign(x)
```

### 2.2.1 Continuidade de uma função derivável

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função $y = f(x)$ **derivável** em $x = x_0$ é **contínua** neste ponto. De fato, lembramos que $f$ é contínua em $x = x_0$ quando $x_0$ é um ponto de seu domínio e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.95}$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \tag{2.96}$$

ou, ainda,

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0. \tag{2.97}$$

Vamos mostrar que este é o caso quando $f$ é derivável em $x = x_0$. Neste caso, temos

$$\begin{align}
\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} \tag{2.98}\\
&= \lim_{h \to 0} \left[\overbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}^{f'(x_0)}\right] \cdot h \tag{2.99}\\
&= \lim_{h \to 0} f'(x_0) \cdot h \tag{2.100}\\
&= 0. \tag{2.101}
\end{align}$$

Ou seja, de fato, se $f$ é derivável em $x = x_0$, então $f$ é contínua em $x = x_0$.

**Observação 2.2.2.** A recíproca não é verdadeira, uma função $f$ ser contínua em um ponto $x = x_0$ não garante que ela seja derivável em $x = x_0$. No Exemplo 2.2.3, vimos que a função valor absoluto $f(x) = |x|$ não derivável em $x = 0$, enquanto esta função é contínua (veja, também, o Exemplo 1.6.2).

### 2.2.2 Derivadas de ordens mais altas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação a $x$ é a função $y = f'(x)$. Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de $f$, denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right). \tag{2.102}$$

**Exemplo 2.2.4.** Seja $f(x) = x^3$. Então, a primeira derivada de $f$ é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.103}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \tag{2.104}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \tag{2.105}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \cancelto{0}{3xh} + \cancelto{0}{h^2} = 3x^2. \tag{2.106}$$

De posse da primeira derivada $f'(x) = 3x^2$, podemos calcular a segunda derivada de $f$, como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' \tag{2.107}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{2.108}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \tag{2.109}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} \tag{2.110}$$

$$= \lim_{h\to 0} 6x + \cancelto{0}{h} = 6x, \tag{2.111}$$

i.e. $f''(x) = 6x$.

No SymPy, podemos computar a segunda derivada da função com o comando:

```
In : from sympy import *
...: x = symbols('x')
...: diff(x**3,x,2)
Out: 6*x
```

Generalizando, quando existe, a $n$-ésima derivada de uma função $y = f(x)$, $n \geq 1$, é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} f(x)\right], \tag{2.112}$$

com $f^{(3)} \equiv f'''$, $f^{(2)} \equiv f''$, $f^{(1)} \equiv f'$ e $f^{(0)} \equiv f$.

**Exemplo 2.2.5.** A terceira derivada de $f(x) = x^3$ em relação a $x$ é $f'''(x) = [f''(x)]'$. No exemplo anterior (Exemplo 2.2.4), calculamos $f''(x) = 6x$. Logo,

$$f'''(x) = [6x]' \tag{2.113}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h) - 6x}{h} \tag{2.114}$$

$$= \lim_{h\to 0} 6 = 6. \tag{2.115}$$

A quarta derivada de $f(x) = x^3$ em relação a $x$ é $f^{(4)}(x) \equiv 0$, bem como $f^{(5)}(x) \equiv 0$. Verifique!

No SymPy, podemos computar a terceira derivada da função com o comando:

```
In : from sympy import *
...: x = symbols('x')
...: diff(x**3,x,3)
Out: 6
```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.2.1.** Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em relação a $x$.

**Solução.** Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.116}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2+2x+1)}{h} \tag{2.117}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \tag{2.118}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \tag{2.119}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \tag{2.120}$$

$\Diamond$

**ER 2.2.2.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = |x - 1|$.

**Solução.** O gráfico da função $f(x) = |x-1|$ tem um bico no ponto $x = 1$ (verifique!). Para valores de $x < 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.121}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{<0}| - |\overbrace{x-1}^{<0}|}{h} \tag{2.122}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+1+x-1}{h} \tag{2.123}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1. \tag{2.124}$$

Para valores de $x > 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.125}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{x+h-1}^{>0}| - |\overbrace{x-1}^{>0}|}{h} \tag{2.126}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-1-x+1}{h} \tag{2.127}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{2.128}$$

Ou seja, temos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável para $x \neq 1$. Agora, para $x = 1$, temos

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \tag{2.129}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|\overbrace{h}^{<0}| - |1-1|}{h} \tag{2.130}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \tag{2.131}$$

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \tag{2.132}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|\overbrace{h}^{>0}| - |1-1|}{h} \tag{2.133}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \tag{2.134}$$

$$\tag{2.135}$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, temos que $\nexists f'(1)$. Concluímos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável nos pontos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

◊

**ER 2.2.3.** Calcule a segunda derivada em relação a $x$ da função

$$f(x) = x - x^2. \tag{2.136}$$

**Solução.** Começamos calculando a primeira derivada da função:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.137}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} \tag{2.138}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x^2 - 2xh - h^2 - x + x^2}{h} \tag{2.139}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 - 2x - \cancelto{0}{h} = 1 - 2x. \tag{2.140}$$

Então, calculamos a segunda derivada como segue

$$f''(x) = [f'(x)]' \tag{2.141}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{2.142}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2(x+h) - (1-2x)}{h} \tag{2.143}$$
$$= \lim_{h\to 0} -2 = -2. \tag{2.144}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.2.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2$

b) $g(x) = -3$

c) $h(x) = \sqrt{e}$

**Exercício 2.2.2.** Calcule a derivada em relação a $x$ de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = \sqrt{e}x$

**Exercício 2.2.3.** Calcule a derivada em relação a $x$ da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \tag{2.145}$$

**Exercício 2.2.4.** Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

**Exercício 2.2.5.** Considerando

$$f(x) = x^2 - x^3, \tag{2.146}$$

calcule:

a) $f'(x)$

b) $f''(x)$

c) $f'''(x)$

d) $f^{(4)}$

e) $f^{(1001)}(x)$

## 2.3 Derivada de Funções Constante, Identidade e Potência

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Nesta seção, vamos estudar as derivadas de função constante, de função identidade e de função potência.

### 2.3.1 Derivada de Função Constante

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada de função constante $f(x) \equiv k$, com $k$ constante, é

$$(k)' = 0 \tag{2.147}$$

De fato, da definição de derivada temos

$$\begin{align} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.148}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} \tag{2.149}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0. \tag{2.150}\end{align}$$

**Exemplo 2.3.1.** Estudemos os seguintes casos:

a) $(2)' = 0$

b) $(-3)' = 0$

c) $(\pi)' = 0$

d) $(a)' = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
In : diff(2)
Out: 0

In : diff(-3)
Out: 0

In : diff(pi)
Out: 0

In : x = Symbol('x')
In : a = Symbol('a', const=True)
In : diff(a, x)
Out: 0
```

### 2.3.2 Derivada de Função Identidade

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada da função identidade $f(x) = x$ é

$$(x)' = 1 \tag{2.151}$$

De fato, da definição de derivada temos

$$\begin{align}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.152}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \tag{2.153}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \tag{2.154}\\
& \tag{2.155}
\end{align}$$

**Exemplo 2.3.2.** Usando Python+sympy, podemos computar a derivada da função identidade com as seguintes instruções:

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x)
Out: 1
```

### 2.3.3 Derivada de Função Potência

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A derivada da função potência $f(x) = x^n$, $n$ número inteiro positivo, é

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.156}$$

De fato, da definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.157}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{2.158}$$

Usando binômio de Newton[2], temos

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k, \tag{2.159}$$

onde os coeficientes binomiais são

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.160}$$

Assim, segue que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \tag{2.161}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \tag{2.162}$$

$$= nx^{n-1}. \tag{2.163}$$

**Exemplo 2.3.3.** Estudemos os seguintes casos:

[2] Isaac Newton, 1643 - 1727, matemático inglês. Fonte: Wikipédia.

a) $(x^2)' = 2x^{1-1} = 2x$

b) $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$

c) $(x^{2001})' = 2001x^{2000}$

d) $(x^m)' = mx^{m-1}$ para qualquer $m$ inteiro positivo.

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x**2)
Out: 2*x

In : diff(x**5)
Out: 5*x**4

In : diff(x**2001)
Out: 2001*x**2000

In : m = Symbol('m', integer=True, positive=True)
In : simplify(diff(x**m, x))
Out: m*x**(m - 1)
```

**Observação 2.3.1.** Ao longo das notas de Cálculo, vamos estudar que a fórmula de derivação

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{2.164}$$

**vale para qualquer $r$ número real não nulo**, considerando-se o domínio natural das funções potência. Assim sendo, vamos assumir passar a aplicá-la para qualquer função potência a partir de agora.

**Exemplo 2.3.4.** Estudemos os seguintes casos:

a) $\left(x^{-1}\right)' = -1x^{-1-1} = -x^{-2}$

b) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

c) $(x^e)' = ex^{e-1}$

Com Python+SymPy, podemos computar essas derivadas com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(x**(-1))
Out: -1/x**2

In : diff(x**(S(1)/2))
Out: 1/(2*sqrt(x))

In : diff(x**E)
Out: E*x**E/x
```

### 2.3.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \tag{2.165}$$

$$(x)' = 1 \tag{2.166}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.167}$$

## Exercícios Resolvidos

**ER 2.3.1.** Calcule o ângulo de declividade da reta tangente ao gráfico de cada uma das seguintes funções em qualquer ponto fixado $x = x_0$.

a) Função constante $f(x) \equiv k$

b) Função identidade $f(x) = x$

**Solução.** O ângulo $\theta$ de declividade da reta tangente ao gráfico de uma dada função $f$ em um ponto $x = x_0$ é

$$\theta = \operatorname{arctg}(f'(x_0)). \tag{2.168}$$

a) Função constante $f(x) \equiv k$

Nesse caso, $f'(x) = 0$ para todo $x$, logo

$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arctg}(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Função identidade $f(x) = x$

Nesse caso, $f'(x) = 1$ para todo $x$, logo

$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arctg}(1)\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

◊

**ER 2.3.2.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 1$.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $f$ em um ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{2.169}$$

Nesse caso,

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \tag{2.170}$$

Temos $f(1) = (1)^2 = 1$. Agora, pela derivada de função potência, temos

$$f'(x) = (x^2)' = 2x \tag{2.171}$$

Logo,

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \tag{2.172}$$

Concluímos que equação da reta tangente é

$$y = 2(x - 1) + 1 \tag{2.173}$$

$$y = 2x - 1 \tag{2.174}$$

◊

## Exercícios

**Exercício 2.3.1.** Calcule as seguintes derivadas:

a) $(7)'$

b) $(-1{,}7)'$

c) $\left(\sqrt{2}\right)'$

d) $(\sec(\pi))'$

**Exercício 2.3.2.** Calcule as seguintes derivadas:

a) $(x)'$

b) $(x^3)'$

c) $(\sqrt{x})'$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)'$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'$

f) $(x^\pi)'$

**Exercício 2.3.3.** Calcule as seguintes derivadas de ordem mais alta:

a) $(2)''$

b) $(2^{1001})'''$

c) $[(-3)^4]^{(4)}$

**Exercício 2.3.4.** Calcule o coeficiente angular da reta tangente $y = mx + b$ ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto $x = 0$. Faça o esboço do gráfico desta função.

**Exercício 2.3.5.** Calcule o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2$ nos pontos $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Faça, em um mesmo esboço, os gráficos de $f$ e das retas tangentes calculadas.

## 2.4 Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Nesta seção vamos estudar a derivada de funções exponenciais e logarítmicas. Começamos com a definição no número de Euler[3] por limites.

### 2.4.1 Número de Euler

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O número de Euler $e \approx 2{,}7183...$ pode ser definido pelo seguinte limite

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{2.175}$$

**Exemplo 2.4.1.** Consideremos os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}} &= \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^2 && (2.176)\\
&= \left[\lim_{h\to 0}\cancelto{e}{(1+h)^{\frac{1}{h}}}\right]^2 && (2.177)\\
&= e^2 && (2.178)
\end{aligned}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
...: h = Symbol('h')
...: limit((1+h)**(2/h), h, 0)
Out: exp(2)
```

b) $\lim\limits_{h\to 0}(1+2h)^{\frac{1}{h}}$

Para calcular este limite, podemos fazer a seguinte **mudança de variável**

$$u = 2h \tag{2.179}$$

donde, temos que $u \to 0$ quando $h \to 0$. Então, segue que

$$\lim_{h\to 0}(1+2h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}} \tag{2.180}$$

[3] Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático suíço. Fonte: Wikipédia.

$$= e^2 \tag{2.181}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar este limite com os seguintes comandos:

```
In : from sympy import *
...: h = Symbol('h')
...: limit((1+2*h)**(1/h), h, 0)
Out: exp(2)
```

### 2.4.2 Derivada de Funções Exponenciais

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Vamos calcular a derivada da função exponencial

$$f(x) = a^x \tag{2.182}$$

com $a > 0$. Partindo da definição de definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.183}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \tag{2.184}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h} \tag{2.185}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{2.186}$$

Agora, fazemos a seguinte **mudança de variável**

$$u = a^h - 1 \tag{2.187}$$

donde, $u \to 0$ quando $h \to 0$ e

$$h = \log_a(1+u). \tag{2.188}$$

Com isso, voltando a (2.186) segue que

$$(a^x) = a^x \lim_{u\to 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} \tag{2.189}$$

$$= a^x \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u}\log_a(1+u)} \tag{2.190}$$

$$= a^x \lim_{u\to 0} \frac{1}{\log_a \cancelto{e}{(1+u)^{\frac{1}{u}}}} \tag{2.191}$$

$$= a^x \frac{1}{\log_a e} \tag{2.192}$$

Lembrando que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{2.193}$$

concluímos que

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{2.194}$$

No caso particular da **função exponencial natural**, temos

$$(e^x)' = e^x \ln e \tag{2.195}$$

ou seja,

$$(e^x)' = e^x \tag{2.196}$$

**Exemplo 2.4.2.** Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(2^x)' = 2^x \ln 2 \tag{2.197}$$

b)

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]' = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\frac{3}{2} \tag{2.198}$$

c)

$$\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)' = \left[(\sqrt{e})^x\right]' \tag{2.199}$$

$$= (\sqrt{e})^x \ln\sqrt{e} \tag{2.200}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \tag{2.201}$$

Com o Python+SymPy, podemos computar essas derivadas como segue:

```
In : from sympy import *
In : x = Symbol('x')
In : diff(2**x)
Out: 2**x*log(2)

In : diff((S(3)/2)**x)
Out: (3/2)**x*log(3/2)

In : diff(exp(x/2))
Out: exp(x/2)/2
```

### 2.4.3 Derivada de Funções Logarítmicas

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Vamos calcular a derivada da função logarítmica

$$f(x) = \log_a x \tag{2.202}$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Partimos da definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.203}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x)}{h} \tag{2.204}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \tag{2.205}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \tag{2.206}$$

$$= \lim_{h\to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{2.207}$$

Tendo em vista que[4]

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{2.208}$$

obtemos

$$(\log_a x)' = \log_a e^{\frac{1}{x}} \tag{2.209}$$

[4]Consulte o Exercício 2.4.5

$$= \frac{1}{x}\log_a e \tag{2.210}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{\ln e}{\ln a} \tag{2.211}$$

e concluímos que

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \tag{2.212}$$

Observamos que no caso particular da função logaritmo natural, segue que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.213}$$

**Exemplo 2.4.3.** Estudemos os seguintes casos:

a)

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\ln 2} \tag{2.214}$$

b)

$$\left(\log_{\frac{3}{2}} x\right)' = \frac{1}{x\ln\frac{3}{2}} \tag{2.215}$$

c)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.216}$$

### 2.4.4 Lista de derivadas

$$(k)' = 0 \tag{2.217}$$

$$(x)' = 1 \tag{2.218}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.219}$$

$$(a^x)' = a^x\ln a \tag{2.220}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{2.221}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \tag{2.222}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.223}$$

## Exercícios Resolvidos

**ER 2.4.1.** Mostre que

$$e = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h \tag{2.224}$$

**Solução.** Tendo em mente a definição dada na Equação 2.175, fazemos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{1}{h} \tag{2.225}$$

donde, $u \to 0$ quando $h \to \infty$. Logo, temos

$$\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} \tag{2.226}$$

$$= e. \tag{2.227}$$

◊

**ER 2.4.2.** Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ no ponto $x = 1$.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.228}$$

Neste exercício, temos $x_0 = 1$ e $f(x) = \ln x$. Então, calculamos

$$f'(x) = (\ln x)' \tag{2.229}$$

$$= \frac{1}{x} \tag{2.230}$$

No ponto $x_0 = 1$, temos $f'(x_0) = 1/x_0 = 1$. Logo, a equação da reta tangente é

$$y = 1\cdot(x-1) + f(1)y = x - 1 + 0 \tag{2.231}$$

$$y = x - 1 \tag{2.232}$$

◊

## Exercícios

**Exercício 2.4.1.** Calcule:

a) $(3^x)'$

b) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]'$

**Exercício 2.4.2.** Calcule:

a) $\left(\frac{2^x}{5^x}\right)'$

b) $\left(e^{2x}\right)'$

**Exercício 2.4.3.** Calcule:

1. $(\log_3 x)'$
2. $\left(\log_{\frac{2}{5}} x\right)'$
3. $(\ln x)'$

**Exercício 2.4.4.** Mostre que

$$e^x = \lim_{h\to 0}(1 + xh)^{\frac{1}{h}} \tag{2.233}$$

**Exercício 2.4.5.** Mostre que

$$e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{2.234}$$

# 2.5 Regas Básicas de Derivação

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

### 2.5.1 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam $k$ um número real, $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $\boldsymbol{(k \cdot u)' = k \cdot u'}$.

  De fato, pela definição da derivada temos

$$
\begin{align}
(k \cdot u)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h} \tag{2.235}\\
&= \lim_{h \to 0} k \cdot \left( \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \tag{2.236}\\
&= k \cdot \cancelto{u'}{\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}} \tag{2.237}\\
&= k \cdot u'. \tag{2.238}
\end{align}
$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos esta regra de derivação:

```
from sympy import *
k = Symbol('k', real=True)
u = Function('u', real=True)
diff(k*u(x),x)
```

- $\boldsymbol{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.

  De fato, temos

$$
\begin{align}
(u+v)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} \tag{2.239}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} \tag{2.240}\\
&= \lim_{h \to 0} \left[ \cancelto{u'}{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}} \right. \tag{2.241}\\
&\quad \left. + \cancelto{v'}{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}} \right] \tag{2.242}
\end{align}
$$

$$= u'(x) + v'(x). \tag{2.243}$$

Também, como $(-v)' = (-1 \cdot v)' = -1 \cdot v' = -v'$, temos

$$(u - v)' = [u + (-v)]' = u' + (-v)' = u' - v'. \tag{2.244}$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
from sympy import *
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
diff(u(x)+v(x),x)
```

**Exemplo 2.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = 2x$.

Para calcularmos $f'$, podemos identificar $f = k \cdot u$, com $k = 2$ e $u(x) = x$. Então, usando a regra da multiplicação por constante $(ku)' = ku'$, temos

$$f'(x) = (2x)' = 2(x') = 2 \cdot 1 = 2. \tag{2.245}$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(2*x,x)
```

b) $f(x) = 2x + 3$.

Observamos que $f = u + v$, com $u(x) = 2x$ e $v(x) \equiv 3$. Então, da regra da soma $(u + v)' = u' + v'$, temos

$$f'(x) = (2x + 3)' = (2x)' + (3)' = 2 + 0 = 2. \tag{2.246}$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

```
from sympy import *
x = Symbols('x')
diff(2*x+3,x)
```

c) $f(x) = e^x - x^2$.

Observamos que $f = u - v$, com $u(x) = e^x$ e $v(x) = x^2$. Usando a regra da subtração $(u - v)' = u' - v'$ temos

$$f'(x) = (e^x - x^2)' = (e^x)' - (x^2)' = e^x - 2x. \tag{2.247}$$

No SymPy, podemos computar esta derivada com o comando:

```
from sympy import *
x = Symbols('x')
diff(exp(x)-x**2,x)
```

### 2.5.2 Regras do produto e do quociente

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam $y = u(x)$ e $y = v(x)$ funções deriváveis. Então:

- $\boldsymbol{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

  De fato, da definição da derivada temos

$$\begin{align}
(uv)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \tag{2.248}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \tag{2.249}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h}\right. \tag{2.250}\\
&\quad \left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}\right] \tag{2.251}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(v+h) \tag{2.252}\\
&+ \lim_{h\to 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \tag{2.253}\\
&= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{2.254}
\end{align}$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
diff(u(x)*v(x), x)
```

- $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$, no caso de $v(x) \neq 0$.

  De fato, da definição de derivada temos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} && (2.255)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} && (2.256)\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}\right. && (2.257)\\
&\qquad \left. - \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}\right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} && (2.258)\\
&= \left[\overbrace{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x)}^{u'(x)v(x)}\right. && (2.259)\\
&\quad \left. - \overbrace{\lim_{h\to 0} u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}^{u(x)v'(x)}\right] \overbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)}}^{\frac{1}{v^2(x)}} && (2.260)\\
&= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. && (2.261)
\end{aligned}
$$

  No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
u = Function('u', real=True)
v = Function('v', real=True)
simplify(diff(u(x)/v(x),x))
```

**Exemplo 2.5.2.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ da função $f(x) = x^2(x-1)$ de duas formas.

1. Por expansão da expressão e utilização da regra da subtração.

$$f'(x) = [x^2(x-1)]' \tag{2.262}$$
$$= (x^3 - x^2)' \tag{2.263}$$
$$= \overbrace{(x^3)' - (x^2)'}^{(u-v)'=u'-v'} \tag{2.264}$$
$$= 3x^2 - 2x, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}. \tag{2.265}$$

2. Utilizando a regra do produto.

   Observamos que $f = u \cdot v$, com $u(x) = x^2$ e $v(x) = x - 1$. Então, da regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$, com $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 1$, temos

$$f'(x) = [\overbrace{x^2}^{u}\overbrace{(x-1)}^{v}]' \tag{2.266}$$
$$= \overbrace{2x \cdot (x-1)}^{u'\cdot v} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{u\cdot v'} \tag{2.267}$$
$$= 2x^2 - 2x + x^2 \tag{2.268}$$
$$= 3x^2 - 2x. \tag{2.269}$$

**Exemplo 2.5.3.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ de $f(x) = 1/x^2$ para $x \neq 0$. Observamos que $f = (u/v)$ com $u(x) \equiv 1$ e $v(x) = x^2$. Tendo em vista que $u'(x) \equiv 0$ e $v'(x) = 2x$, temos da regra do quociente que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \tag{2.270}$$
$$= \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}, \qquad \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \tag{2.271}$$
$$= -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \tag{2.272}$$
$$= -2x^{-3}. \tag{2.273}$$

**Observação 2.5.1.** Com abuso de linguagem, temos

$$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}, \tag{2.274}$$

com $n$ inteiro. No caso de $n = 1$, temos $(x)' \equiv 1$. No caso de $n <= 0$, devemos ter $x \neq 0$[5]. Mais ainda, a regra também vale para $n = 1/2$, veja o Exemplo 2.2.2.

**Exemplo 2.5.4.** Voltando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.3), temos

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \overbrace{(x^{-2})'}^{(x^n)'} = \overbrace{-2x^{-2-1}}^{nx^{n-1}} = -2x^{-3}. \tag{2.275}$$

**Exemplo 2.5.5.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ de $f(x) = xe^x$. Usando a regra do produto $(uv)' = u'v + uv'$ com $u(x) = x$ e $v(x) = e^x$, temos

$$f'(x) = \overbrace{(xe^x)'}^{(uv)'} \tag{2.276}$$
$$= \overbrace{1 \cdot e^x}^{u'\cdot v} + \overbrace{x \cdot e^x}^{u\cdot v'} \tag{2.277}$$
$$= (x+1)e^x. \tag{2.278}$$

### 2.5.3 Lista de derivadas

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \tag{2.279}$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{2.280}$$
$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.281}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{2.282}$$
$$(k)' = 0 \tag{2.283}$$
$$(x)' = 1 \tag{2.284}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.285}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{2.286}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{2.287}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{2.288}$$

[5]Devido a indeterminação de $0^0$ e a inexistência de $0^n$ com $n$ negativo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.289}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.5.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ da função

$$f(x) = (x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2. \tag{2.290}$$

**Solução.**

$$\begin{align}
f'(x) &= \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3) - 2x^2\right]'}^{(u-v)'} \tag{2.291}\\
&= \overbrace{\left[(x^2 + x)(1 + x^3)\right]'}^{(uv)'} - \overbrace{(2x^2)'}^{(ku)'} \tag{2.292}\\
&= (x^2 + x)'(1 + x^3) + (x^2 + x)(1 + x^3)' - 2(x^2)' \tag{2.293}\\
&= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 - 4x \tag{2.294}\\
&= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 - 4x \tag{2.295}\\
&= 5x^4 + 4x^3 - 2x + 1. \tag{2.296}
\end{align}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
d = diff((x**2+x)*(1+x**3)-2x^2,x)
simplify(d)
```

◊

**ER 2.5.2.** Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2 + x}{1 - x^3}\right). \tag{2.297}$$

**Solução.** Da regra de derivação do quociente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2 + x}{1 - x^3}\right) = \frac{(x^2 + x)'(1 - x^3) - (x^2 + x)(1 - x^3)'}{(1 - x^3)^2} \tag{2.298}$$

$$= \frac{(2x+1)(1-x^3)+(x^2+x)3x^2}{1-2x^3+x^6} \tag{2.299}$$

$$= \frac{2x-2x^4+1-x^3+3x^4+3x^3}{1-2x^3+x^6} \tag{2.300}$$

$$= \frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^6-2x^3+1} \tag{2.301}$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

◊

**ER 2.5.3.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $f$ no ponto $x = x_0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.302}$$

No caso, temos $f(x) = xe^{-x}$ e $x_0 = 1$. Calculamos

$$f'(x) = [xe^{-x}]' = \left[\frac{x}{e^x}\right] \tag{2.303}$$

$$= \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \tag{2.304}$$

$$= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} \tag{2.305}$$

$$= \frac{(1-x)e^x}{e^{2x}} \tag{2.306}$$

$$= (1-x)e^x e^{-2x} = (1-x)e^{-x}. \tag{2.307}$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \tag{2.308}$$

$$y = 0 \cdot (x-1) + e^{-1} \tag{2.309}$$

$$y = \frac{1}{e}. \tag{2.310}$$

Na Figura 2.7, temos os esboços dos gráfico da função $f$ e sua reta tangente no ponto $x = 1$.

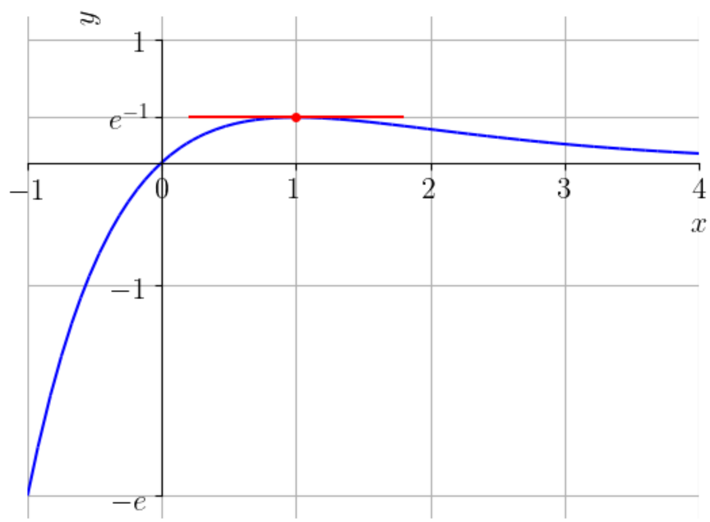



Figura 2.7: Esboço da reta tangente ao gráfico de $f(x) = xe^{-x}$ no ponto $x = 1$.

Com o SymPy, podemos computar a expressão desta reta tangente com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
f = x*exp(-x)
x0 = 1
fl = diff(f,x)
# y =
fl.subs(x,1)*(x-1)+f.subs(x,1)
```

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.5.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 - 5x^3$

b) $g(x) = (2x - 1)(2 - 4x^2)$

c) $h(x) = \dfrac{2 - 4x^2}{2x - 1}$

**Exercício 2.5.2.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções:

a) $f(x) = xe^x$

b) $g(x) = xe^{2x}$

c) $g(x) = xe^{-2x}$

**Exercício 2.5.3.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $g(x) = x \ln x^2$

c) $g(x) = x \ln x^2 e^x$

**Exercício 2.5.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$.

## 2.6 Derivadas de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Começamos pela derivada da função seno. Pela definição da derivada, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} && (2.311)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen} x}{h} && (2.312)\\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} && (2.313)
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen}(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \tag{2.314}$$

Usando do Teorema do confronto para limites de funções, podemos mostrar que[6]

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0. \tag{2.315}$$

Logo, temos

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}' x = \cos x}. \tag{2.316}$$

De forma similar, temos

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &(2.317)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos x}{h} &(2.318)\\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} &(2.319)\\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\cos(h)-1}{h}} - \operatorname{sen}(x) \lim_{h\to 0} \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}. &(2.320)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{\cos' x = -\operatorname{sen} x}. \tag{2.321}$$

**Exemplo 2.6.1.** A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)' &(2.322)\\
&= (\operatorname{sen}^2 x)' + (\cos^2 x)' &(2.323)\\
&= (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x)' + (\cos x \cdot \cos x)' &(2.324)\\
&= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen} x &(2.325)\\
&= 0, &(2.326)
\end{aligned}$$

conforme esperado.

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sin(x)**2+cos(x)**2,x)
```

[6]Veja a Seção 1.7.3.

Conhecidas as derivadas da função seno e cosseno, podemos obter as derivadas das demais funções trigonométricas pela regra do quociente. Temos:

- $\mathbf{tg}'\,\boldsymbol{x} = \mathbf{sec}^2\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{align}
\operatorname{tg}' x &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \tag{2.327}\\
&= \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} \tag{2.328}\\
&= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \tag{2.329}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \tag{2.330}\\
&= \sec^2 x. \tag{2.331}
\end{align}$$

- $\mathbf{cotg}'\,\boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}^2\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{align}
\operatorname{cotg}' x &= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' \tag{2.332}\\
&= \frac{\cos' x \operatorname{sen} x - \cos x \operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{2.333}\\
&= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{2.334}\\
&= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \tag{2.335}\\
&= \operatorname{cossec}^2 x. \tag{2.336}
\end{align}$$

- $\mathbf{sec}'\,\boldsymbol{x} = \mathbf{sec}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$\begin{align}
\sec' x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \tag{2.337}\\
&= \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} \tag{2.338}\\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \tag{2.339}
\end{align}$$

$$
\begin{align}
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \tag{2.340}\\
&= \operatorname{tg} x \sec x. \tag{2.341}
\end{align}
$$

- $\mathbf{cossec}' \boldsymbol{x} = -\,\mathbf{cossec}\, \boldsymbol{x}\, \mathbf{cotg}\, \boldsymbol{x}$

  Dem.:

$$
\begin{align}
\operatorname{cossec}' x &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' \tag{2.342}\\
&= \frac{-\operatorname{sen}' x}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{2.343}\\
&= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{2.344}\\
&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \tag{2.345}\\
&= -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x. \tag{2.346}
\end{align}
$$

**Observação 2.6.1.** Os cálculos acima, mostram que as funções trigonométricas são deriváveis em todos os pontos de seus domínios.

**Exemplo 2.6.2.** A derivada em relação a $x$ de

$$
f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x} \tag{2.347}
$$

pode ser calculada como segue

$$
\begin{align}
f'(x) &= \left(\frac{x + \operatorname{tg} x}{\sec x}\right)' \tag{2.348}\\
&= \frac{(x + \operatorname{tg} x)' \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec' x}{\sec^2 x} \tag{2.349}\\
&= \frac{(1 + \sec^2 x) \sec x - (x + \operatorname{tg} x) \sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} \tag{2.350}\\
&= \frac{1 + \sec^2 x - (x + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} x}{\sec x}. \tag{2.351}
\end{align}
$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff((x+tan(x))/sec(x),x)
```

### 2.6.1 Lista de derivadas

$$(ku)' = ku' \tag{2.352}$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{2.353}$$
$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.354}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{2.355}$$
$$(k)' = 0 \tag{2.356}$$
$$(x)' = 1 \tag{2.357}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{2.358}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{2.359}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{2.360}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{2.361}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.362}$$
$$\operatorname{sen}' x = \cos x \tag{2.363}$$
$$\cos' x = -\operatorname{sen} x \tag{2.364}$$
$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \tag{2.365}$$
$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cossec}^2 x \tag{2.366}$$
$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x \tag{2.367}$$
$$\operatorname{cossec}' x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \tag{2.368}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.6.1.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = x + 0$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.369}$$

No caso deste exercício, temos $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$. Assim sendo, calculamos a derivada em relação a $x$ de $f(x)$, i.e.

$$f'(x) = \operatorname{sen}' x = \cos x. \tag{2.370}$$

Segue que a equação da reta tangente é

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \tag{2.371}$$
$$y = \cos(0)(x - 0) + \operatorname{sen}(0) \tag{2.372}$$
$$y = x. \tag{2.373}$$

Na Figura 2.8, temos os esboços dos gráficos da função seno e da reta tangente encontrada.

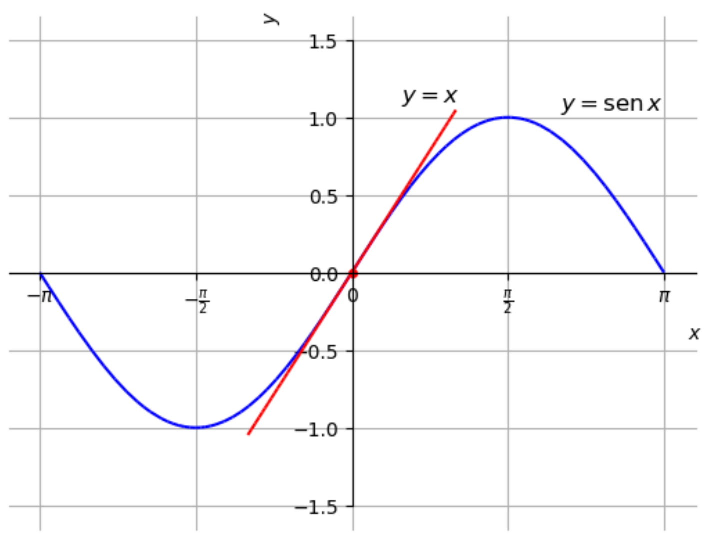



Figura 2.8: Esboços dos gráfico da função seno e de sua reta tangente no ponto $x = 0$.

Com o SymPy, podemos resolver este exercício com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
f = sin(x)
x0 = 0

```

```
    # reta tangente
    rt = diff(f,x).subs(x,x0)*(x-x0)+f.subs(x,x0)
    print("Reta tangente: y = %s" % rt)

    # graficos
    plot(f,rt,(x,-pi,pi))
```

◊

**ER 2.6.2.** Resolva a equação

$$\sec'(x) = 0, \tag{2.374}$$

para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

**Solução.** Temos

$$\begin{align} 0 &= \sec'(x) \tag{2.375}\\ &= \sec(x)\operatorname{tg}(x) \tag{2.376}\\ &= \frac{1}{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \tag{2.377}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \tag{2.378}\end{align}$$

donde segue que

$$\operatorname{sen}(x) = 0. \tag{2.379}$$

Por fim, observamos que para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, a função seno se anula somente em $x = \pi$, a qual é a solução da equação.

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.6.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ de

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)$

b) $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$

c) $h(x) = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(x)}{\sec(x)}$

**Exercício 2.6.2.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \cos x$ no ponto $x = 0$. Então, faça os esboços desta função e da reta tangente, em uma mesma figura.

**Exercício 2.6.3.** Calcule a derivada em relação a $x$ de

a) $f(x) = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{cotg}(x)$

b) $g(x) = \sec(x) - \mathrm{cossec}(x)$

c) $g(x) = \sec(x) - \mathrm{cossec}(x)$

## 2.7 Regra da cadeia

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Regra da cadeia é nome dado a técnica de derivação de uma função composta. Sejam $f$ e $g$, com $g$ derivável em $x$ e $f$ derivável em $g(x)$, então $(f \circ g)$ é derivável em $x$, sendo

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \tag{2.380}$$

chamada de regra da cadeia.

**Exemplo 2.7.1.** A derivada em relação a $x$ de $h(x) = (x+1)^2$ pode ser calculada das seguintes formas:

a) pela regra da cadeia.

A função $h$ é a composição da função $f(x) = x^2$ com a função $g(x) = x + 1$, i.e. $h(x) = f(g(x))$. Temos $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 1$. Então, segue pela regra da cadeia

$$h'(x) = [f(g(x))]' \tag{2.381}$$
$$= f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{2.382}$$
$$= 2(x+1) \cdot 1 \tag{2.383}$$
$$= 2x + 2. \tag{2.384}$$

b) por cálculo direto.

Observando que $h(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2 + 2x + 1)' && (2.385)\\ &= (x^2)' + (2x)' + (1)' && (2.386)\\ &= 2x + 2. && (2.387) \end{aligned}$$

Com o SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff((x+1)**2,x)
2*x + 2
```

Usualmente, a regra da cadeia também é apresentada da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(u) = f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{2.388}$$

onde $u$ é uma função derivável em $x$ e $f$ é derivável em $u(x)$.

**Observação 2.7.1.** (Derivada de função potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}, \tag{2.389}$$

para qualquer $n$ inteiro[7]. Agora, se $r \neq 0$ e $r \neq 1$ é um número real, temos

$$\begin{aligned} y &= x^r && (2.390)\\ \ln y &= \ln x^r = r \ln x. && (2.391) \end{aligned}$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação e observando que $y = y(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r \ln x && (2.392)\\ \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{r}{x} && (2.393)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{r}{x} y && (2.394) \end{aligned}$$

[7]Mais precisamente, para $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = rx^{r-1}. \tag{2.395}$$

Ou seja, a regra da potência

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}, \tag{2.396}$$

vale para todo $r$ real, com $r \neq 0$ e $r \neq 1$.

**Exemplo 2.7.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \tag{2.397}$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \tag{2.398}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{2.399}$$

b)

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}. \tag{2.400}$$

**Observação 2.7.2.** A regra da cadeia aplicada a derivada de função potência é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^r = ru^{r-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.401}$$

**Exemplo 2.7.3.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ de

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \tag{2.402}$$

Vamos usar (2.401), com

$$u = x^2 + 1 \tag{2.403}$$

e $r = 1/2$. Segue que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{dx} \tag{2.404}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \tag{2.405}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{2.406}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sqrt(x**2+1),x)
x/sqrt(x**2 + 1)
```

A regra da cadeia pode ser estendida para calcular a derivada de uma composição encadeada de três ou mais funções. Por exemplo,

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' \tag{2.407}$$

$$= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \tag{2.408}$$

Neste caso, a regra é válida para todo ponto tal que $h$ é derivável em $x$ com $g$ derivável em $h(x)$ e $f$ derivável em $f(g(h(x)))$.

**Exemplo 2.7.4.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$. Pela regra da cadeia, temos

$$[\operatorname{sen}(\cos(x^2))] = \cos(\cos(x^2)) \cdot [\cos(x^2)]' \tag{2.409}$$

$$= \cos(\cos(x^2)) \cdot [-\operatorname{sen}(x^2) \cdot (x^2)'] \tag{2.410}$$

$$= -\cos(\cos(x^2)) \cdot \operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x. \tag{2.411}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(sin(cos(x**2)))
-2*x*sin(x**2)*cos(cos(x**2))
```

### 2.7.1 Lista de derivadas

$$(ku)' = ku' \tag{2.412}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{2.413}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.414}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{2.415}$$
$$(k)' = 0 \tag{2.416}$$
$$(x)' = 1 \tag{2.417}$$
$$\frac{\mathrm{d}u^n}{\mathrm{d}x} = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.418}$$
$$\frac{\mathrm{d}a^u}{\mathrm{d}x} = a^u \ln a \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.419}$$
$$\frac{\mathrm{d}e^u}{\mathrm{d}x} = e^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.420}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.421}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} u = \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.422}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\operatorname{sen}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.423}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} u = \sec^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.424}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.425}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec u = \sec(u)\operatorname{tg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.426}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.427}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.7.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ de

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}. \tag{2.428}$$

**Solução.** Da regra da cadeia aplicada à função exponencial, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.429}$$

Então, com $u = \sqrt{x+1}$, segue

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\sqrt{x+1}} \tag{2.430}$$

$$= e^{\sqrt{x+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x+1}\right). \tag{2.431}$$

Agora, aplicamos a regra da cadeia para a função raiz quadrada, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{2.432}$$

com $u = x + 1$. Segue, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1) \tag{2.433}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \tag{2.434}$$

Portanto, concluímos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}. \tag{2.435}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(exp(sqrt(x+1)),x)
exp(sqrt(x + 1))/(2*sqrt(x + 1))
```

◊

**ER 2.7.2.** Mostre que a função logística

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{2.436}$$

satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f(x)(1 - f(x)). \tag{2.437}$$

**Solução.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ da função logística, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{2.438}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-1}\right] \tag{2.439}$$

$$= -1\cdot\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)'}_{=-e^{-x}} \tag{2.440}$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}. \tag{2.441}$$

Por outro lado, temos

$$f(x)(1-f(x)) = \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right) \tag{2.442}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(\frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}\right) \tag{2.443}$$

$$= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}. \tag{2.444}$$

Ou seja, de fato temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f(x)(1-f(x)). \tag{2.445}$$

◊

**ER 2.7.3.** Assuma que o custo de produção de uma unidade empresarial seja modelada pela função

$$c(x) = \sqrt{x-1} + e^{x-7}, \tag{2.446}$$

onde $c$ é o custo em função da produção $x$. Determine o custo marginal quando $x = 3$.

**Solução.** O custo marginal é a função derivada do custo em relação à produção. Calculando, temos

$$c'(x) = \left(\sqrt{x-1} + e^{x-7}\right) \tag{2.447}$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt{x-1}\right)'}_{(u^n)'=nu^{n-1}u'} + \underbrace{\left(e^{x-7}\right)'}_{(e^u)'=e^u u'} \tag{2.448}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + e^{x-7}. \tag{2.449}$$

Logo, o custo marginal quando $x = 3$ é

$$c'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3-1}} + e^{3-7} = \sqrt{2} + e^{-4}. \tag{2.450}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.7.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções

a) $f(x) = (2x-3)^9$

b) $g(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^{51}}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

**Exercício 2.7.2.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções

a) $f(x) = 2^{3x-1}$

b) $g(x) = e^{-x^2}$

**Exercício 2.7.3.** Calcule as seguintes derivadas

a) $\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]'$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[\log_2(x-1) + \log_2(x+1)\right]$

**Exercício 2.7.4.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

b) $g(x) = \cos(\sqrt{x})$

c) $h(x) = \operatorname{tg}(2x)$

d) $u(x) = \operatorname{cotg}(3 - x)$

e) $v(x) = \sec\left(\frac{1}{x^2}\right)$

f) $z(x) = \operatorname{cossec}\left(5x + x^2\right)$

**Exercício 2.7.5.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \tag{2.451}$$

no ponto $x = 3$.

## 2.8 Diferenciabilidade da função inversa

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f$ uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto $I$. Então, pode-se mostrar que sua inversa $f^{-1}$ é diferenciável em qualquer ponto da imagem da $f$ no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{2.452}$$

**Exemplo 2.8.1.** Seja $f(x) = (2x - 1)^2$ para $x > 1/2$. Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = (2x - 1)^2 \tag{2.453}$$

$$\sqrt{y} = 2x - 1 \tag{2.454}$$

$$x = \frac{\sqrt{y} + 1}{2} \tag{2.455}$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + 1). \tag{2.456}$$

Calculando a derivada de $f^{-1}$ diretamente, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+1\right)' \tag{2.457}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{2.458}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} \tag{2.459}$$

Agora, usando (2.452) e observando que $f'(x) = 8x - 4$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \tag{2.460}$$

$$= \frac{1}{8\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+1\right)-4}, \tag{2.461}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}, \tag{2.462}$$

como esperado.

**Observação 2.8.1.** (Derivada da função logarítmica)

- Tomando $f(x) = e^x$ temos $f^{-1}(x) = \ln x$ e, daí por (2.452)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \tag{2.463}$$

- Tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f^{-1}(x) = \log_a x$ e, por (2.452),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \frac{1}{x\ln a}. \tag{2.464}$$

**Exemplo 2.8.2.** Vamos calcular a derivada em relação a $x$ da função

$$f(x) = \ln\frac{1}{x}. \tag{2.465}$$

Aplicando a regra da cadeia na derivada da função logarítmica, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.466}$$

Portanto, temos

$$f'(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)' \tag{2.467}$$
$$= \frac{1}{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) \tag{2.468}$$
$$= -\frac{1}{x}. \tag{2.469}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(log(1/x),x)
-1/x
```

### 2.8.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ restrita a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \operatorname{arc\,sen} x. \tag{2.470}$$

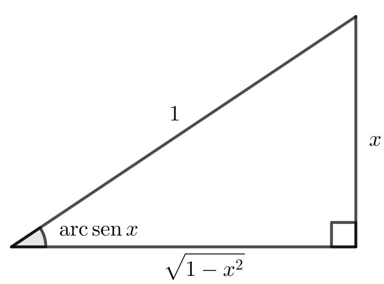



Figura 2.9: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (2.452) com $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f'(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, donde

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}. \tag{2.471}$$

Como $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ (veja Figura 2.9), concluímos

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.472}$$

**Exemplo 2.8.3.** A regra da cadeia aplicada à derivada da função arco seno é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.473}$$

Por exemplo, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,sen} x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{2.474}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(asin(x**2),x)
2*x/sqrt(-x**4 + 1)
```

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.475}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{2.476}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{2.477}$$

$$(\operatorname{arc\,sec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{2.478}$$

$$(\operatorname{arc\,cosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{2.479}$$

**Exemplo 2.8.4.** A regra da cadeia aplicada a função arco tangente é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.480}$$

Por exemplo, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} \tag{2.481}$$

$$= \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}. \tag{2.482}$$

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
diff(atan(sqrt(x)))
1/(2*sqrt(x)*(x + 1))
```

### 2.8.2 Lista de derivadas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$(ku)' = ku' \tag{2.483}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{2.484}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2.485}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{2.486}$$

$$(k)' = 0 \tag{2.487}$$

$$(x)' = 1 \tag{2.488}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^r = ru^{r-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.489}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^u = a^u \ln a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.490}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.491}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.492}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.493}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sen} u = \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.494}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\operatorname{sen}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.495}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} u = \sec^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.496}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cossec}^2(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.497}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec u = \sec(u)\operatorname{tg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.498}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cossec} u = -\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.499}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.500}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cos} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.501}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.502}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cotg} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.503}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,sec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.504}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,cossec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2.505}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 2.8.1.** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x = 1$. Faça, então, um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln x$ no ponto $x_0 = 1$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{2.506}$$
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1). \tag{2.507}$$

Observando que

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{2.508}$$

temos que a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1 \tag{2.509}$$

$$y = x - 1. \tag{2.510}$$

Na Figura 2.10, temos um esboço dos gráficos da função e da reta tangente.

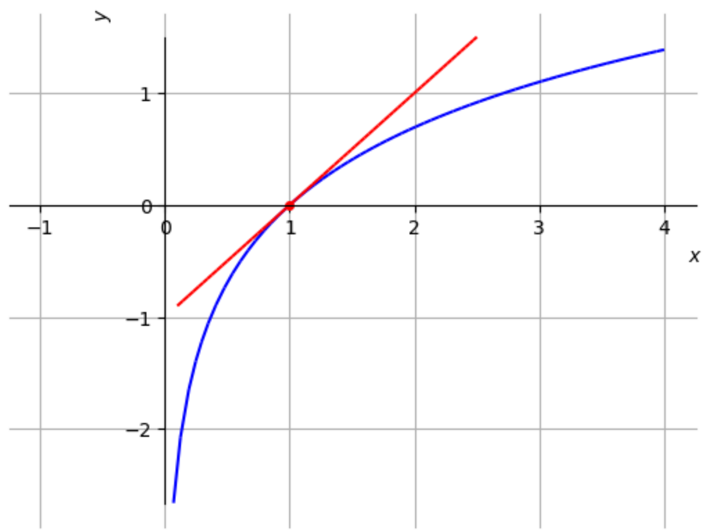



Figura 2.10: Esboço dos gráficos da função logarítmica natural e da reta tangente no ponto $x = 1$.

No SymPy, temos:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
rt = diff(log(x)).subs(x,1)*(x-1)+log(1)
print("y = %s" % rt)
y = x - 1
```

◊

**ER 2.8.2.** Resolva a equação

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arc\,tg} x = 1. \tag{2.511}$$

**Solução.** Lembrando que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}, \tag{2.512}$$

temos

$$\begin{align}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arc\,tg} x &= 1 \tag{2.513}\\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 \tag{2.514}\\
1+x^2 &= 1 \tag{2.515}\\
x^2 &= 0 \tag{2.516}\\
x &= 0. \tag{2.517}
\end{align}$$

◊

**ER 2.8.3.** Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x. \tag{2.518}$$

**Solução.** Observamos que

$$\begin{align}
y &= x^x \tag{2.519}\\
\ln y &= \ln x^x \tag{2.520}\\
\ln y &= x\ln x. \tag{2.521}
\end{align}$$

Agora, derivando em relação a $x$ ambos os lados desta equação, obtemos

$$\begin{align}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x) \tag{2.522}\\
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1+\ln x \tag{2.523}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y(1+\ln x) \tag{2.524}\\
\frac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x} &= x^x(1+\ln x). \tag{2.525}
\end{align}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 2.8.1.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x^2$

b) $g(x) = \ln(xe^x)$

**Exercício 2.8.2.** Calcule a derivada em relação a $x$ das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $g(x) = (1 + 2x)^e$

**Exercício 2.8.3.** Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x)^x. \tag{2.526}$$

**Exercício 2.8.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ no ponto $x = 0$.

## 2.9 Derivação implícita

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \tag{2.527}$$

A derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(y(x)) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} \tag{2.528}$$

$$g'(y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{2.529}$$

**Exemplo 2.9.1.** Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.530}$$

Aqui, vamos calcular d$y$/d$x$ de duas maneiras diferentes.

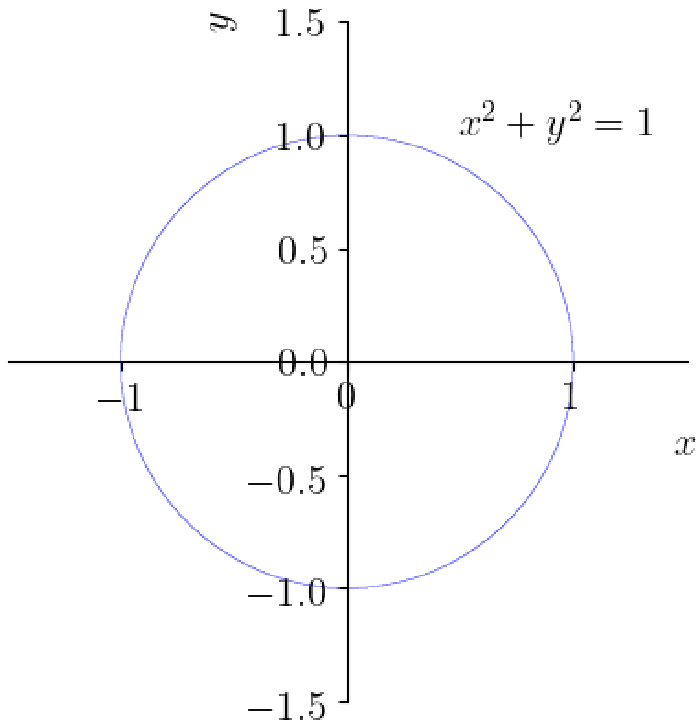



Figura 2.11: Esboço do gráfico da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

a) Por derivação direta. Isolando $y$ em (2.530), temos

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \tag{2.531}$$

o que está bem definido para $-1 \leq x \leq 1$. Calculando a derivada, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) \tag{2.532}$$

$$= \pm\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \tag{2.533}$$

$$= \mp\frac{x}{y} \tag{2.534}$$

Ou seja, para $y < 0$, temos $y' = x/y$ e, para $y > 0$, temos $y' = -x/y$. Logo, concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{2.535}$$

b) Por derivação implícita. Derivamos ambos os lados da (2.530) em relação a $x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+y^2\right)=\frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} \tag{2.536}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2(x)\right)=0 \tag{2.537}$$

$$2x+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2.538}$$

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{2.539}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}. \tag{2.540}$$

**Observação 2.9.1** (Derivadas de potências racionais de $x$)**.** Vamos mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r=rx^{r-1}, \tag{2.541}$$

para qualquer **número racional** $r\neq 0$. Denotando $r=m/n$, $m,n\in\mathbb{N}$, temos

$$y=x^{m/n} \tag{2.542}$$

$$\Leftrightarrow \tag{2.543}$$

$$y^n=x^m \tag{2.544}$$

Da derivação de função potência com exponente inteiro, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m \tag{2.545}$$

$$ny^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=mx^{m-1} \tag{2.546}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{m-1}y^{1-n} \tag{2.547}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{m-1}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-n} \tag{2.548}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{m-1}x^{\frac{m}{n}(1-n)} \tag{2.549}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}x^{m-1+\frac{m}{n}(1-n)} \tag{2.550}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \tag{2.551}$$

Logo, segue o resultados que queríamos demonstrar.

**Exemplo 2.9.2.** Vamos calcular $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ para

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2.552}$$

Primeiramente, precisamos calcular $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Isso foi feito no Exemplo 2.9.1, onde obtivemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{2.553}$$

Antes de derivarmos novamente, vamos reescrever essa última expressão da seguinte forma

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x \tag{2.554}$$

Derivando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[-x] \tag{2.555}$$

$$1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 \tag{2.556}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -1 \tag{2.557}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{x^2}{y^2} - 1. \tag{2.558}$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.9.1.** Calcule $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ para a lemniscata de Bernoulli[8]

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{2.559}$$

[8]Jacob Bernoulli, 1655 - 1705, matemático suíço. Fonte: Wikipédia.

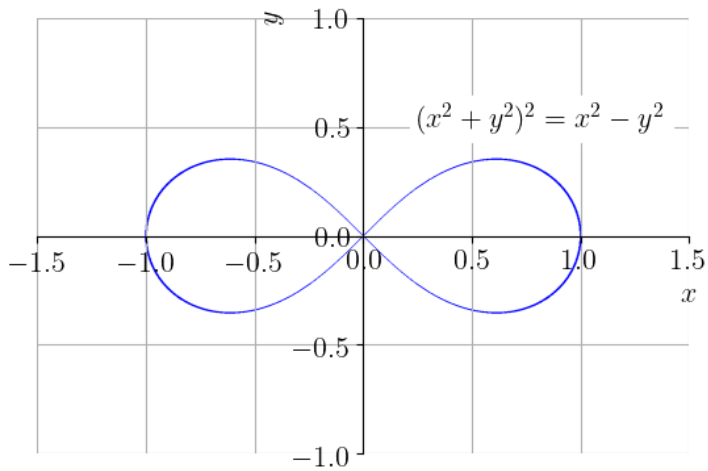



Figura 2.12: Esboço da lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

**Solução.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2+y^2)^2\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2-y^2\right] \tag{2.560}$$

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2.561}$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$2(y+2x^2y+2y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 4xy^2 - 4x^3 \tag{2.562}$$

ou ainda

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-2x^3-2xy^2}{y+2x^2y+2y^3} \tag{2.563}$$

◊

**ER 2.9.2.** Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência unitária

$$x^2+y^2=1 \tag{2.564}$$

no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**Solução.** A equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$ é dada por

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \tag{2.565}$$

onde, nesse caso, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}. \tag{2.566}$$

Calculamos $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ como segue

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} \tag{2.567}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2(x)\right) = 0 \tag{2.568}$$

$$2x + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.569}$$

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{2.570}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \tag{2.571}$$

Com isso, temos

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y(x_0)} \tag{2.572}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \tag{2.573}$$

$$= -1. \tag{2.574}$$

Concluímos que a equação da reta tangente é

$$y = -1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.575}$$

$$y = -x + \sqrt{2}. \tag{2.576}$$

◊

## Exercícios

**Exercício 2.9.1.** Calcule d$y$/
$dx$ para:

a) $x + 2xy - x^3 = 3$

b) $x^2 + y^2 = xy$

**Exercício 2.9.2.** Calcule $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ para

$$x^2 + y^2 = xy \tag{2.577}$$

**Exercício 2.9.3.** Encontre o ponto de interseção das retas tangentes ao gráfico de

$$y^2 = x - 1 \tag{2.578}$$

nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 1)$.

**Exercício 2.9.4.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da circunferência de centro $C = (1,1)$ e raio $r = 1$ que passa pela origem $O = (0,0)$.

**Exercício 2.9.5.** Seja $c$ a circunferência de raio $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2.579}$$

Mostra que a reta tangente ao gráfico de $c$ em qualquer ponto arbitrário $P = (x_0, y_0) \in c$ é perpendicular a reta $\overline{OP}$, i.e. a reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ e pelo ponto $P$.

# Capítulo 3

# Aplicações da derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Observação 3.0.1.** Nos códigos SymPy apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
var('x',real=True)
```

## 3.1 Regra de L'Hôpital

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A regra de L'Hôpital é uma técnica para o cálculo de limites de indeterminações. Sejam $f$ e $g$ funções deriváveis em um intervalo aberto contendo $x = a$, exceto possivelmente em $x = a$, e

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{3.1}$$

Se, ainda, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe ou for $\pm\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.2}$$

Esta é a versão da regra de L'Hôpital para indeterminações do tipo $0/0$. Sem grandes modificações, é diretamente estendida para os casos $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

**Exemplo 3.1.1.** Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}. \tag{3.3}$$

a) Pela regra de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)'}{(x^2-1)'} && (3.4)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} && (3.5)\\
&= \frac{1}{2}. && (3.6)
\end{aligned}$$

b) Por eliminação do fator comum.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} && (3.7)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} && (3.8)\\
&= \frac{1}{2}. && (3.9)
\end{aligned}$$

No SymPy[1], temos

```
>>> limit((x-1)/(x**2-1),x,1)
1/2
```

**Exemplo 3.1.2.** O limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} \tag{3.10}$$

é uma indeterminação $0/0$. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancelto{0}{2x-4}}{\cancelto{0}{3x^2-6x}}, \tag{3.11}$$

que também é uma indeterminação do tipo $0/0$. Agora, aplicando a regra de L'Hôpital novamente, obtemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{3x^2-6x} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{6x-6} = \frac{1}{3}. \tag{3.12}$$

[1] Veja a Observação 3.0.1.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} = \frac{1}{3}. \tag{3.13}$$

No SymPy[2], temos

```
>>> limit((x**2-4*x+4)/(x**3-3*x**2+3),x,2)
1/3
```

**Observação 3.1.1.** A regra de L'Hôpital também pode ser usada para indeterminações do tipo $\infty/\infty$.

**Exemplo 3.1.3.** Vamos calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}, \tag{3.14}$$

que é uma indeterminação do tipo $\infty/\infty$. Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty. \tag{3.15}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.1.1.** Calcule

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x^2}. \tag{3.16}$$

**Solução.** Observamos tratar-se de uma indeterminação do tipo 0/0, i.e.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cancelto{0}{e^x-1}}{\cancelto{0}{x^2}}. \tag{3.17}$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancelto{1}{e^x}}{\cancelto{0^-}{2x}} = -\infty. \tag{3.18}$$

[2] Veja a Observação 3.0.1.

$\Diamond$

**ER 3.1.2.** (Indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$)

Calcule

$$\lim_{x\to\infty} x^{51}e^{-x}. \tag{3.19}$$

**Solução.** Observamos que

$$\lim_{x\to\infty} \cancelto{\infty}{x^{51}}\cancelto{0}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancelto{\infty}{x^{51}}}{\cancelto{\infty}{e^{x}}} \tag{3.20}$$

Então, aplicando a regra de L'Hôpital sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^{51}e^{-x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{51}}{e^x} && (3.21)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{51\cdot x^{50}}{e^x} && (3.22)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{51\cdot 50\cdot x^{49}}{e^x} && (3.23)\\
&\vdots && (3.24)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{51!}{\cancelto{\infty}{e^x}} = 0. && (3.25)
\end{aligned}$$

$\Diamond$

**ER 3.1.3.** (Indeterminação do tipo $\infty - \infty$)

Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right). \tag{3.26}$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$, pois

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cancelto{\infty}{\frac{1}{x}} - \cancelto{\infty}{\frac{1}{e^x - 1}}\right). \tag{3.27}$$

Neste caso, calculando a subtração, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 + x}{xe^x - x}, \tag{3.28}$$

a qual é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancelto{0}{e^x - 1}}{\cancelto{0}{(x+1)e^x - 1}} \tag{3.29}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{(x+2)e^x} \tag{3.30}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}. \tag{3.31}$$

◊

**ER 3.1.4.** (Indeterminação do tipo $1^\infty$)

Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}. \tag{3.32}$$

**Solução.** Trata-se de uma indeterminação do tipo $1^\infty$. Em tais casos, a seguinte estratégia pode ser útil. Nos pontos de continuidade da função logaritmo natural, temos

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \tag{3.33}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancelto{0}{\ln(1+x)}}{\cancelto{0}{x}} \tag{3.34}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1. \tag{3.35}$$

Ou seja,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = e. \tag{3.36}$$

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.1.1.** Calcule

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+3x+2}. \tag{3.37}$$

**Exercício 3.1.2.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} x^{-51}e^x. \tag{3.38}$$

**Exercício 3.1.3.** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right). \tag{3.39}$$

**Exercício 3.1.4.** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{2x}}. \tag{3.40}$$

## 3.2 Extremos de funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f$ uma função com domínio $D$. Dizemos que $f$ tem o valor **máximo global**[3] $f(a)$ no ponto $x = a$ quando

$$f(x) \leq f(a), \tag{3.41}$$

para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que $f$ tem o valor **mínimo global**[4] $f(b)$ no ponto $x = b$ quando

$$f(x) \geq f(b), \tag{3.42}$$

para todo $x \in D$. Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos globais** (ou extremos absolutos).

**Exemplo 3.2.1.** A função $f(x) = x^2$ tem valor mínimo global no ponto $x = 0$ e não assume valor máximo global. A função $g(x) = -x^2$ tem valor máximo global no ponto $x = 0$ e não assume valor mínimo global. A função $h(x) = x^3$ não assume valores mínimo e máximo globais. Veja a Figura 3.1.

[3] Também chamado de máximo absoluto.
[4] Também chamado de mínimo absoluto.

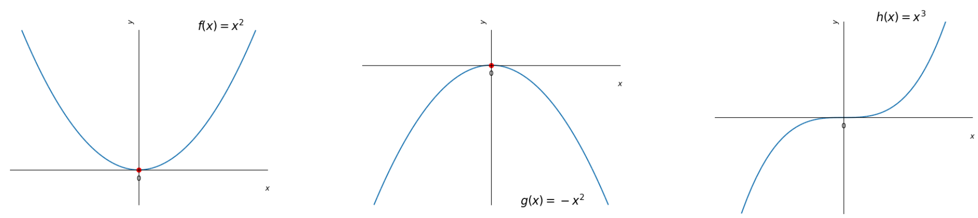



Figura 3.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 3.2.1.

**Teorema 3.2.1.** (Teorema do valor extremo) Se $f$ é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então $f$ assume tanto um valor máximo como um valor mínimo global em $[a, b]$.

**Exemplo 3.2.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) A função $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 + 1}$ é contínua no intervalo fechado $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Assume valor mínimo global 1 no ponto $x = 1$. Ainda, assume valor máximo global igual a 2 no ponto $x = 0$. Veja Figura 3.2.

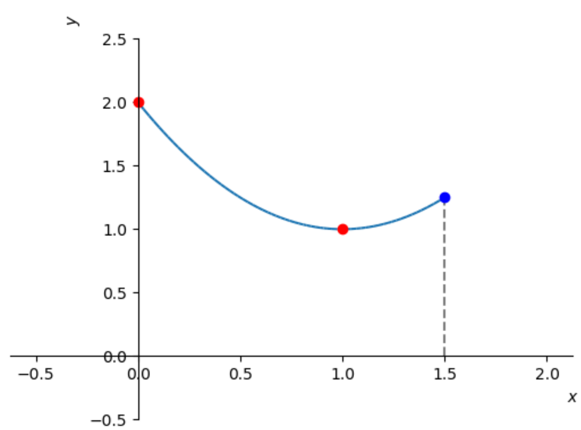



Figura 3.2: Esboço do gráfico de $f(x) = (x-1)^2 + 1$ no intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Veja o Exemplo 3.2.2 a).

b) A função $\boldsymbol{g(x) = \ln x}$ é contínua no intervalo $(0, e]$. Neste intervalo, assume valor máximo global no ponto $x = e$, mas não assume valor mínimo global. Veja Figura 3.3.

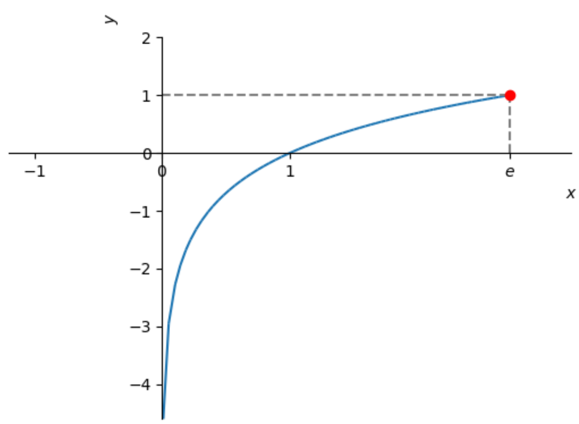



Figura 3.3: Esboço do gráfico de $g(x) = \ln x$ no intervalo $(0,e]$. Veja o Exemplo 3.2.2 b).

c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \tag{3.43}$$

definida no intervalo $[0, 1]$ é descontínua no ponto $x = 1$. Neste intervalo, assume valor mínimo global no ponto $x = 0$, mas não assume valor máximo global. Veja a Figura 3.4.

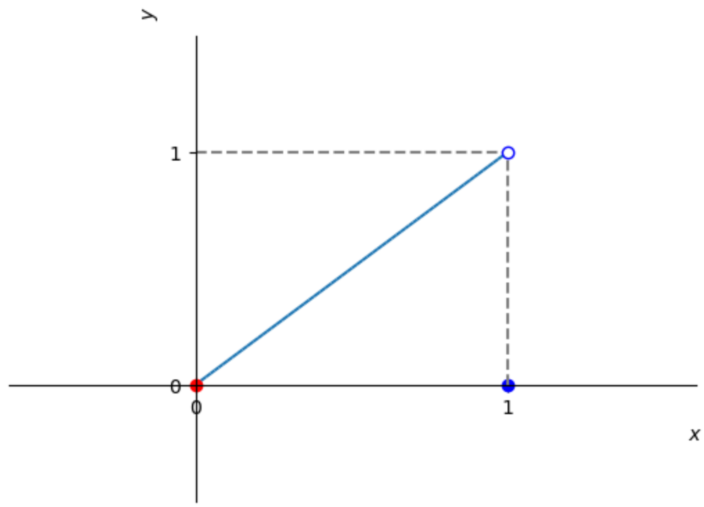



Figura 3.4: Esboço do gráfico de $h(x)$ no intervalo [0,1]. Veja o Exemplo 3.2.2 c).

Uma função $f$ tem um valor **máximo local** em um ponto interior $x = a$ de seu domínio, se $f(x) < f(a)$ para todo $x$ em um intervalo aberto em torno de $a$, excluindo-se $x = a$. Analogamente, $f$ tem um valor **mínimo local** em um ponto interior $x = b$ de seu domínio, se $f(x) > f(b)$ para todo $x$ em um intervalo aberto em torno de $b$, excluindo-se $x = b$. Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos). Um tal ponto é chamado de **ponto de máximo local** ou **de mínimo local**, conforme o caso.

**Exemplo 3.2.3.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ |x| & , -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \tag{3.44}$$

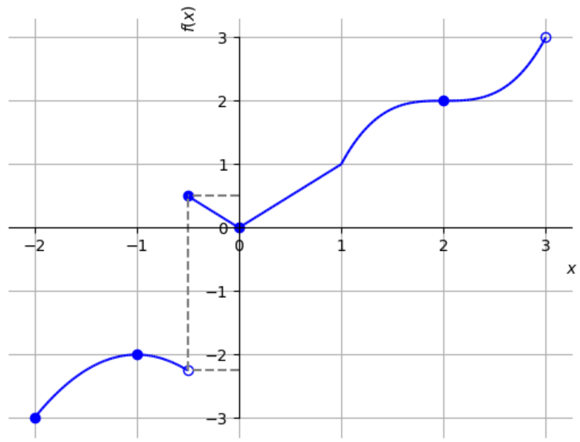



Figura 3.5: Esboço do gráfico de $f(x)$ discutida no Exemplo 3.2.3.

Na Figura 3.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que $f$ tem valores máximos locais nos pontos $x = -1$ e $x = -1/2$. No ponto $x = 0$ tem um valor mínimo local. Observamos que $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$ não são pontos de extremos locais desta função. No ponto $x = -2$, $f$ tem seu valor mínimo global. Ainda, $f$ não tem valor máximo global.

**Teorema 3.2.2.** (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se $f$ possui um valor extremo local em um ponto $x = a$ e $f$ é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \tag{3.45}$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função $f$ pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde $f' = 0$,

2. pontos interiores de seu domínio onde $f'$ não existe, ou

3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função $f$ onde $f' = 0$ ou $f'$ não existe, é chamado de **ponto crítico** da função.

**Observação 3.2.1.** Uma função tem valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

**Exemplo 3.2.4.** Consideramos a função $f(x)$ discutida no Exemplo 3.2.3. No ponto $x = -1$, $f'(-1) = 0$ e $f$ tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = 2$, também temos $f'(2) = 0$, mas $f$ não tem valor extremo neste ponto.

No ponto $x = 0$, $f'(0)$ não existe e $f$ tem valor mínimo local neste ponto. No ponto, $x = -1/2$, $f'(1/2)$ não existe e $f$ tem valor máximo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que $f$ tem valor mínimo global no ponto $x = -2$, mas não tem extremo global no ponto $x = 3$.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.2.1.** Determine os pontos extremos da função $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ no intervalo $[-2,1]$.

**Solução.** Os valores extremos de um função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como $f(x) = (x+1)^2-1$ é diferenciável no intervalo $(-2,1)$, seus pontos críticos são pontos tais que $f' = 0$. Para identificá-los, calculamos

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 2(x+1) = 0 && (3.46)\\ &\Rightarrow x = -1. && (3.47) \end{aligned}$$

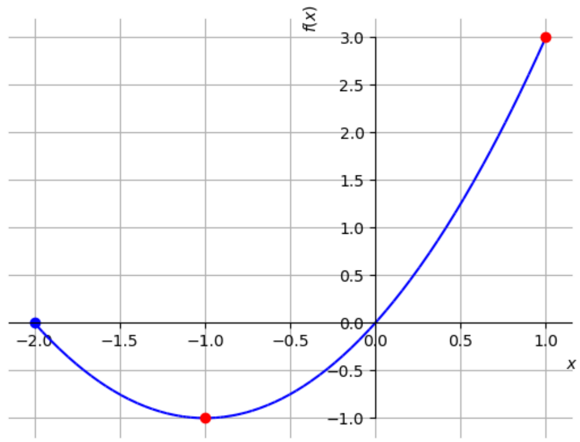



Figura 3.6: Esboço do gráfico da função $f(x) = (x+1)^2 - 1$ discutida no Exercício Resolvido 3.2.1.

Desta forma, $f$ pode ter valores extremos nos ponto $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 3.6) e a seguinte tabela:

| $x$ | -2 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | -1 | 3 |

Daí, podemos concluir que $f$ tem o valor mínimo global (e local) de $f(-1) = -1$ no ponto $x = -1$ e tem valor máximo global de $f(1) = 3$ no ponto $x = 1$.

Podemos usar o SymPy para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos[5]:

```
>>> f = (x+1)**2-1, f
>>> f = (x+1)**2-1; f
(x + 1)**2 - 1
>>> fl = diff(f,x); fl
2*x + 2
>>> xc = solve(fl,x); xc
```

[5]Veja a Observação 3.0.1.

```
[-1]
>>> f.subs(x,-2); f.subs(x,-1); f.subs(x,1)
>>> plot(f,(x,-2,1))
```

◊

**ER 3.2.2.** Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1, 1]$.

**Solução.** Como $f$ é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$, temos que seus pontos críticos são tais que $f'(x) = 0$. Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \tag{3.48}$$

é o único ponto crítico de $f$. Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura 3.7) vemos que $f$ não tem valor extremo local neste ponto. Assim, seus pontos extremos só podem ocorrer nos extremos do domínio $[-1, 1]$. Concluímos que $f(-1) = -1$ é o valor mínimo global de $f$ e $f(1) = 1$ é seu valor máximo global.

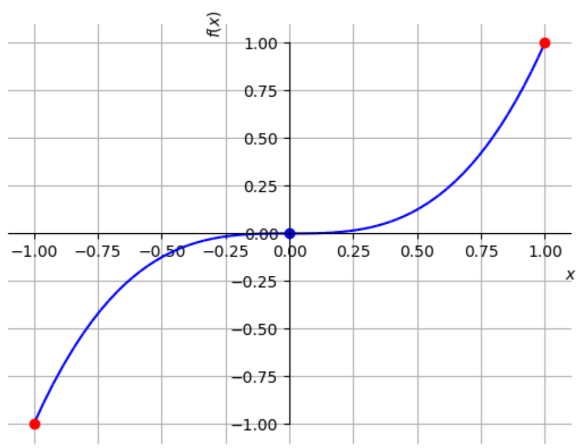


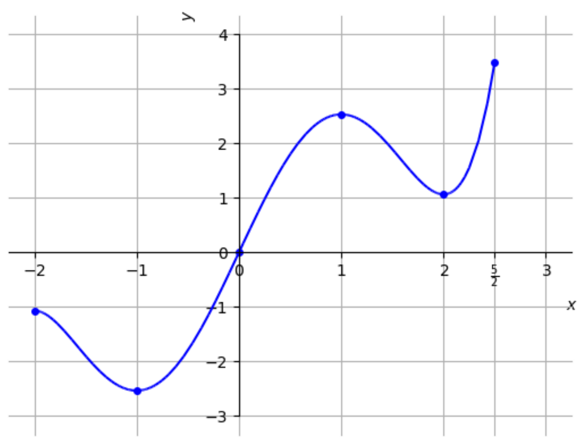

Figura 3.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3$ discutida no Exercício Resolvido 3.2.2.

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.2.1.** Considere que uma dada função $f$ tenha o seguinte esboço de gráfico:




Determine e classifique os pontos extremos desta função.

**Exercício 3.2.2.** Dada a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ restrita ao intervalo $[-1,2]$, determine:

a) seu(s) ponto(s) crítico(s).

b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.

c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.3.** Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ restrita ao intervalo $[0,3]$, determine:

a) seu(s) ponto(s) crítico(s).

b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.

c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.4.** Dada a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ restrita ao intervalo $[0, \infty)$, determine:

a) seu(s) ponto(s) crítico(s).

b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.

c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

**Exercício 3.2.5.** Dada a função $f(x) = x^{1/3}$ restrita ao intervalo $[-1,1]$, determine:

a) seu(s) ponto(s) crítico(s).

b) seu(s) ponto(s) extremo(s) e o(s) classifique.

c) seu(s) valor(es) extremo(s) e o(s) classifique.

## 3.3 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

### 3.3.1 Teorema de Rolle

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O Teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

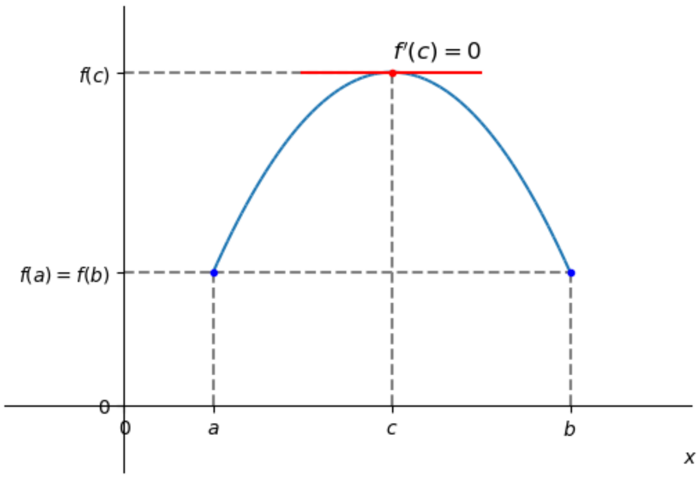



Figura 3.8: Ilustração do Teorema de Rolle.

**Teorema 3.3.1.** (Teorema de Rolle) Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto $(a, b)$. Se

$$f(a) = f(b), \tag{3.49}$$

então existe pelo menos um **ponto crítico** $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0. \tag{3.50}$$

**Exemplo 3.3.1.** O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ tem pelo menos um ponto crítico no intervalo (0,1) e no intervalo (1,3). De fato,temos $p(0) = p(1) = 1$ e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Analogamente, como também $p(1) = p(3) = 1$, segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo (1,3). Veja o esboço do gráfico de $p$ na Figura 3.9.

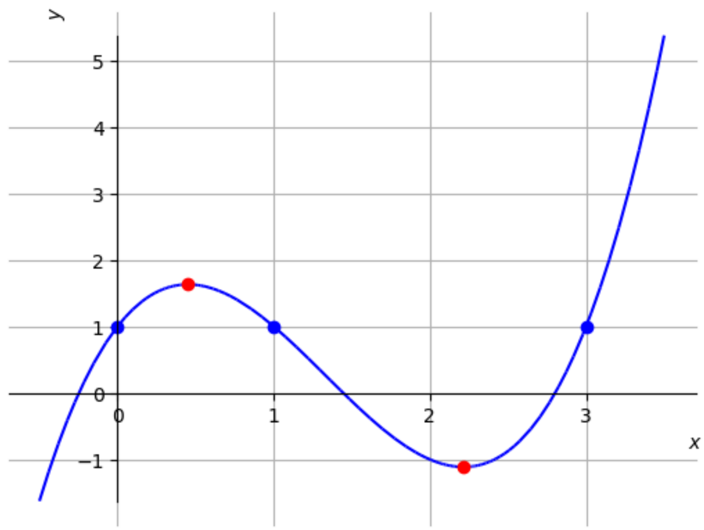



Figura 3.9: Esboço do gráfico de $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

De fato, como todo polinômio é derivável em toda parte, podemos calcular os pontos críticos como segue.

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \tag{3.51}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \cancelto{2\sqrt{7}}{\sqrt{64-36}}}{6} \tag{3.52}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}45 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \approx 2{,}22. \tag{3.53}$$

Podemos usar os seguintes comandos[6] para computar os pontos críticos de $p$ e plotar seu gráfico:

```
>>> p = x**3 - 4*x**2 + 3*x + 1
>>> pc = solve(p.diff()); pc
[-sqrt(7)/3 + 4/3, sqrt(7)/3 + 4/3]
>>> plot(p,(x,-0.5,3.5))
```

**Exemplo 3.3.2.** Vejamos os seguintes casos em que o Teorema de Rolle não se aplica:

[6] Veja a Observação 3.0.1.

a) A função

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 1, \\ 0 & ,x = 1. \end{cases} \tag{3.54}$$

é tal que $f(0) = f(1) = 0$, entretanto sua derivada $f'(x) = 1$ no intervalo $(0, 1)$. Ou seja, a condição da $f$ ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle. Veja a Figura 3.10 para o esboço do gráfico desta função.

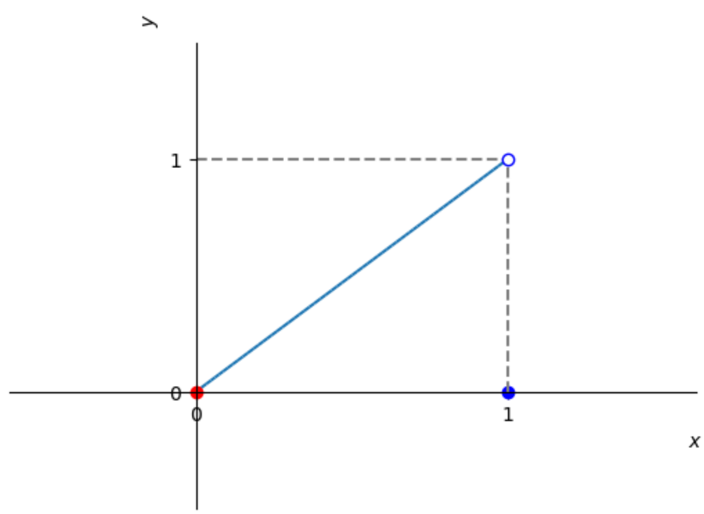



Figura 3.10: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 3.3.2 a).

b) Não existe ponto tal que a derivada da $g(x) = -|x - 1| + 1$ seja nula. Entretanto, notemos que $g(0) = g(2) = 0$ e $g$ contínua no intervalo fechado $[0, 2]$. O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois $g$ não é derivável no intervalo (0,2), mais especificamente, no ponto $x = 1$. Veja a Figura 3.11.

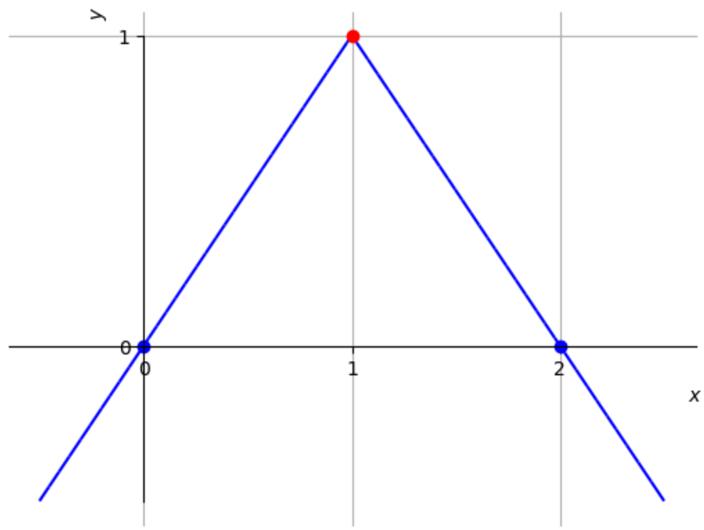



Figura 3.11: Esboço do gráfico da função referente ao Exemplo 3.3.2 b).

### 3.3.2 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

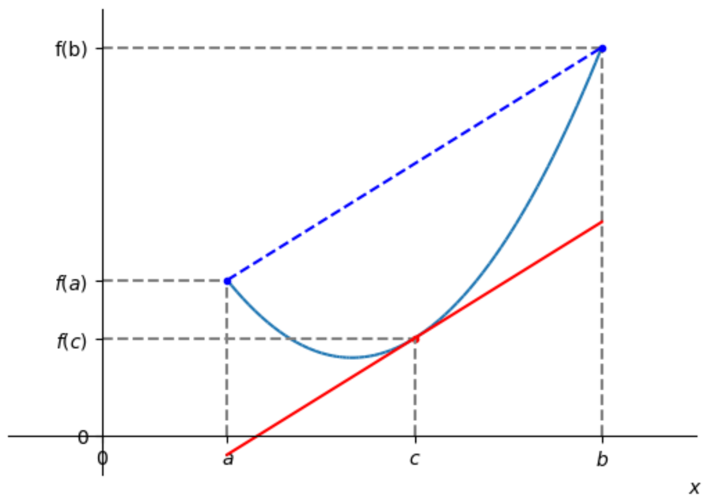



Figura 3.12: Ilustração do Teorema do valor médio.

**Teorema 3.3.2.** (Teorema do valor médio) Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto $(a,b)$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{3.55}$$

**Observação 3.3.1.** Em um contexto de aplicação, o Teorema do valor médio relaciona a taxa de variação média da função em um intervalo $[a, b]$ com a taxa de variação instantânea da função em um ponto interior deste intervalo.

**Exemplo 3.3.3.** A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[0,2]$ e diferenciável no intervalo $(0,2)$. Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto $c \in (0,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \tag{3.56}$$

De fato, $f'(x) = 2x$ e, portanto, tomando $c = 1$, temos $f'(c) = 2$.

**Corolário 3.3.1.** (Funções com derivadas nulas são constantes) Se $f'(x) = 0$ para todos os pontos em um intervalo $(a, b)$, então $f$ é constante neste intervalo.

*Demonstração.* De fato, sejam $x_1,x_2 \in (a, b)$ e, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$. Então, temos $f$ é contínua no intervalo $[x_1,x_2]$ e diferenciável em $(x_1,x_2)$. Segue do teorema do valor médio que existe $c \in (x_1,x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \tag{3.57}$$

Como $f'(c) = 0$, temos $f(x_2) = f(x_1)$. Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois ponto no intervalo $(a, b)$, logo é constante neste intervalo. □

**Corolário 3.3.2.** (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os pontos em um intervalo aberto $(a,b)$, então $f(x) = g(x) + C$, $C$ constante, para todo $x \in (a,b)$.

*Demonstração.* Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função $h(x) = f(x) - g(x)$. □

**Corolário 3.3.3.** (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que $f$ seja contínua em $[a,b]$ e derivável em $(a,b)$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $f$ é crescente em $[a,b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $f$ é decrescente em $[a,b]$.

**Exemplo 3.3.4.** Vamos estudar a monotonicidade da função polinomial $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$. Na Figura 3.13, temos o esboço de seu gráfico.

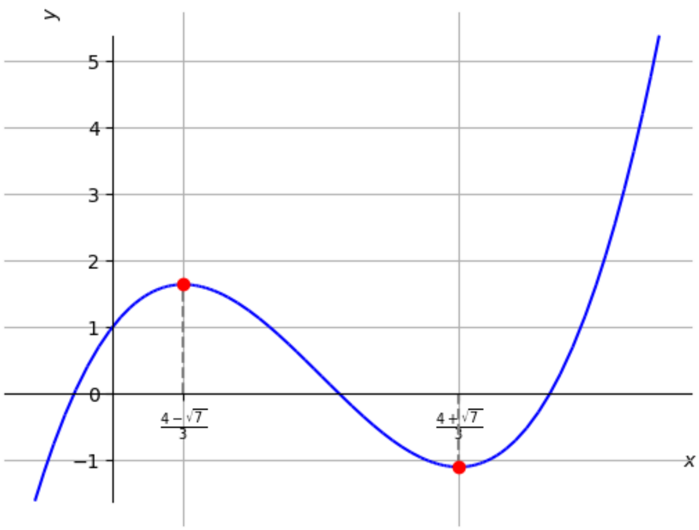
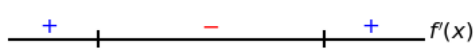



Figura 3.13: Esboço do gráfico de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

Podemos usar o Corolário 3.3.3 para estudarmos a monotonicidade (i.e. intervalos de crescimento ou decrescimento). Isto é, fazemos o estudo de sinal da derivada de $f$. Calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3. \tag{3.58}$$

Logo, temos




Ou seja, $f'(x) < 0$ no conjunto $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ e $f'(x) < 0$ no conjunto $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$. Concluímos que $f$ é **crescente** nos intervalos $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right]$ e $\left[\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$, enquanto que $f$ é **decrescente** no intervalo $\left[\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right]$.

**Exemplo 3.3.5.** A função exponencial $f(x) = e^x$ é crescente em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = e^x > 0, \tag{3.59}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.3.1.** Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

**Solução.** Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida pelo carro e $t$ o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, exite tempo $t_1 \in (0,\ 1{,}5)$ tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1{,}5) - s(0)}{1{,}5 - 0} = \frac{150}{1{,}5} = 100 \text{ km/h}. \tag{3.60}$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

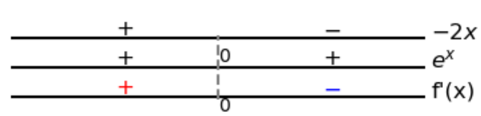
◊

**ER 3.3.2.** Estude a monotonicidade da função gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

**Solução.** Para estudarmos a monotonicidade de uma função, podemos fazer o estudo de sinal de sua derivada. Neste caso, temos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}. \tag{3.61}$$

Assim, vemos que




Concluímos que $f$ é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e decrescente no intervalo $(0, \infty)$.

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.3.1.** Estude a monotonicidade de $f(x) = x^2 - 2x$.

**Exercício 3.3.2.** Estude a monotonicidade de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

**Exercício 3.3.3.** Estude a monotonicidade de $f(x) = \ln x$.

**Exercício 3.3.4.** Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

# 3.4 Teste da primeira derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 3.2, vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 3.3.3 nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja $c$ um ponto crítico de uma função contínua $f$ e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto $(a, b)$ contendo $c$, exceto possivelmente no ponto $c$. Movendo-se no sentido positivo em $x$:

- se $f'(x)$ muda de negativa para positiva em $c$, então $f$ possui um mínimo local em $c$;
- se $f'(x)$ muda de positiva para negativa em $c$, então $f$ possui um máximo local em $c$;
- se $f'$ não muda de sinal em $c$, então $c$ não é um extremo local de $f$.

Veja a Figura 3.14.

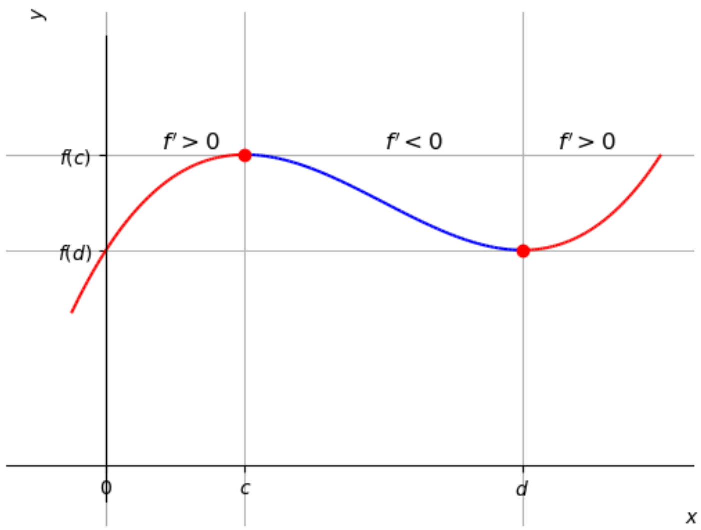



Figura 3.14: Ilustração do teste da primeira derivada com $c$ ponto de máximo local e $d$ ponto de mínimo local.

**Exemplo 3.4.1.** Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 3$. Como $f$ é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \tag{3.62}$$

Temos $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Segue, que os pontos críticos são

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{\cancelto{2}{16 - 12}}}{2} \tag{3.63}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \tag{3.64}$$

Com isso, temos

| Intervalo | $x < 1$ | $1 < x < 3$ | $3 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | - | + |
| $f$ | crescente | decrescente | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 1$ é ponto de máximo local e que $x_2 = 3$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar o SymPy para computarmos a derivada de $f$ com o comando[7]

```
fl = diff(x**3/3-2*x**2+3*x+3)
```

Então, podemos resolver $f'(x) = 0$ com o comando

```
solve(fl)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da $f'$ com os comandos

```
reduce_inequalities(fl<0)
reduce_inequalities(fl>0)
```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.4.1.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \tag{3.65}$$

**Solução.** Como o domínio da $f$ é $(-\infty, \infty)$ e $f$ é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \tag{3.66}$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \tag{3.67}$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{3.68}$$

$$x_1 = 0x = \frac{3 \pm 1}{2}. \tag{3.69}$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \tag{3.70}$$

Portanto, os ponto críticos são $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Fazendo o estudo de sinal da $f'$, temos

[7] Veja a Observação 3.0.1.

| | $x < 0$ | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ | $2 < x$ |
|---|---|---|---|---|
| $4x$ | - | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - 3x + 2$ | $+$ | $+$ | - | $+$ |
| $f'(x)$ | - | $+$ | - | $+$ |
| $f$ | decrescente | crescente | decrescente | crescente |

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 0$ é ponto de mínimo local, $x_2 = -2$ é ponto de máximo local e $x_3 = -1$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar os seguintes comandos do SymPy[8] para resolvermos este exercício:

```
# f'
fl = Lambda(x, diff(x**4 - 4*x**3 + 4*x**2,x))
# f'(x) = 0
solve(fl(x))
# fl(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# fl(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
```

$\lozenge$

**ER 3.4.2.** Encontre o valor máximo global de $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

**Solução.** Como $f$ é diferenciável em toda parte, temos que seu máximo ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2-x)e^{-x} = 0 \tag{3.71}$$
$$\Rightarrow 2 - x = 0 \tag{3.72}$$
$$\Rightarrow x = 2. \tag{3.73}$$

Fazendo o estudo de sinal da derivada, obtemos

| | x<0 | 0<x |
|---|---|---|
| f' | + | - |
| f | crescente | decrescente |

[8]Veja a Observação 3.0.1.

Portanto, do teste da primeira derivada, podemos concluir que $x = 2$ é ponto de máximo local. O favor da função neste ponto é $f(2) = e^{-2}$. Ainda, temos

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x} = -\infty, \tag{3.74}$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-1)e^{-x} = 0. \tag{3.75}$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de $f$ é $f(2) = e^{-2}$.

Podemos usar os seguintes comandos do SymPy[9] para resolvermos este exercício:

```
# f(x)
f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
# f'(x)
fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
# pontos críticos
xc = solve(fl(x))
# f'(x) < 0
reduce_inequalities(fl(x)<0)
# f'(x) > 0
reduce_inequalities(fl(x)>0)
# lim f(x), x->-oo
limit(f(x),x,-oo)
# lim f(x), x->oo
limit(f(x),x,oo)
# f(2)
f(xc[0])
```

$\Diamond$

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.4.1.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^2 - 2x$.

[9]Veja a Observação 3.0.1.

**Exercício 3.4.2.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

**Exercício 3.4.3.** Use o teste da primeira derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^{2/3}(x-1)$.

## 3.5 Concavidade e o Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O gráfico de uma função diferenciável $f$ é

a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto $I$, se $f'$ é crescente em $I$;

b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto $I$, se $f'$ é decrescente em $I$.

Assumindo que $f$ é duas vezes diferenciável, temos que a monotonicidade de $f'$ está relacionada ao sinal de $f''$ (a segunda derivada de $f$). Logo, o gráfico de $f$ é

a) **côncavo para cima** em um intervalo aberto $I$, se $f'' > 0$ em $I$;

b) **côncavo para baixo** em um intervalo aberto $I$, se $f'' < 0$ em $I$.

**Exemplo 3.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

a) o gráfico de $f(x) = x^2$ é uma parábola côncava para cima em toda parte. De fato, temos

$$f'(x) = 2x, \tag{3.76}$$

uma função crescente em toda parte. Também, temos

$$f''(x) = 2 > 0, \tag{3.77}$$

em toda parte.

b) o gráfico de $g(x) = -x^2$ é uma parábola côncava para baixo em toda parte. De fato, temos

$$g'(x) = -2x, \tag{3.78}$$

uma função decrescente em toda parte. Também, temos

$$g''(x) = -2 < 0, \tag{3.79}$$

em toda parte.

c) o gráfico da função $h(x) = x^3$ é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncavo para cima em $(0, \infty)$. De fato, temos

$$h'(x) = x^2, \tag{3.80}$$

que é uma função decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, \infty)$. Também, temos

$$h''(x) = 2x \tag{3.81}$$

que assume valores negativos em $(-\infty, 0)$ e valores positivos em $(0, \infty)$.

Um ponto em que o gráfico de uma função $f$ muda de concavidade é chamado de **ponto de inflexão**. Em tais pontos temos

$$f'' = 0 \quad \text{ou} \quad \nexists f''. \tag{3.82}$$

**Exemplo 3.5.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) O gráfico da função $f(x) = x^3$ tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$f'(x) = 3x^2 \tag{3.83}$$

que é diferenciável em toda parte com

$$f''(x) = 6x. \tag{3.84}$$

Logo, os pontos de inflexão ocorrem quando

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \tag{3.85}$$

$$\Rightarrow x = 0. \tag{3.86}$$

b) O gráfico da função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. De fato, temos

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0. \tag{3.87}$$

Segue que

$$g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad x \neq 0, \tag{3.88}$$

donde $g'' > 0$ em $(-\infty, 0)$e $g'' < 0$ em $(0, \infty)$. Isto é, o gráfico de $g$ muda de concavidade em $x = 0$, $\nexists g''(0)$, sendo $g$ côncava para cima em $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo em $(0, \infty)$.

### 3.5.1 Teste da segunda derivada

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $x = x_0$ um ponto crítico de uma dada função $f$ duas vezes diferenciável e $f''$ contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$. Temos

a) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então $x = x_0$ é um ponto de mínimo local de $f$;

b) se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então $x = x_0$ é um ponto de máximo local de $f$.

**Exemplo 3.5.3.** A função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ tem pontos críticos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{3.89}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \tag{3.90}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2. \tag{3.91}$$

A segunda derivada de $f$ é

$$f''(x) = 12x - 18. \tag{3.92}$$

Logo, como $f''(x_1) = f''(1) = -6 < 0$, temos que $x_1 = 1$ é ponto de máximo local de $f$. E, como $f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$, temos que $x_2 = 2$ é ponto de mínimo local de $f$.

**Observação 3.5.1.** Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então $x = x_0$ pode ser ponto extremo local de $f$ ou não. Ou seja, o teste é inconclusivo.

**Exemplo 3.5.4.** Vejamos os seguintes casos:

a) A função $f(x) = x^3$ tem ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \tag{3.93}$$

$$\Rightarrow x = 0. \tag{3.94}$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0. \tag{3.95}$$

Neste caso, $x = 0$ não é ponto de extremo local e temos $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$.

b) A função $f(x) = x^4$ tem um ponto crítico

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \tag{3.96}$$
$$\Rightarrow x = 0. \tag{3.97}$$

Neste ponto, temos

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0. \tag{3.98}$$

Neste caso, $x = 0$ é ponto de mínimo local e temos $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$.

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 3.5.1.** Encontre o valor máximo global de $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

**Solução.** Como $f$ é diferenciável em toda parte, temos que seu valor máximo (se existir) ocorre em ponto crítico tal que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2-x)e^{-x} = 0 \tag{3.99}$$
$$\Rightarrow 2 - x = 0 \tag{3.100}$$
$$\Rightarrow x = 2. \tag{3.101}$$

Agora, usando o teste da segunda derivada, temos

$$f''(x) = (x-3)e^{-x} \Rightarrow f''(2) = -e^{-2} < 0. \tag{3.102}$$

Logo, $x = 2$ é ponto de máximo local. O favor da função neste ponto é $f(2) = e^{-2}$. Ainda, temos

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty, \tag{3.103}$$
$$\lim_{x\to\infty} (x-1)e^{-x} = 0. \tag{3.104}$$

Por tudo isso, concluímos que o valor máximo global de $f$ é $f(2) = e^{-2}$.

Podemos usar os seguintes comandos do SymPy[10] para resolvermos este exercício:

```
>>> f = (x-1)*exp(-x)
>>> fl = diff(f,x)
>>> f = Lambda(x, (x-1)*exp(-x))
>>> fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(fl(x))
[2]
>>> fll = Lambda(x, diff(f(x),x,2))
>>> fll(2)
  -2
-e
>>> f(2), fl(2), fll(2)
 -2        -2
e  , 0, -e
>>> limit(f(x),x,oo)
0
>>> limit(f(x),x,-oo)
-oo
```

◊

**ER 3.5.2.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \tag{3.105}$$

restrita ao intervalo de $[-1, 3]$.

**Solução.** Como $f$ é diferenciável em $(-1, 3)$, temos que seus extremos locais ocorrem nos seguintes pontos críticos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \tag{3.106}$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \tag{3.107}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2. \tag{3.108}$$

Calculando a segunda derivada de $f$, temos

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8. \tag{3.109}$$

[10] Veja a Observação 3.0.1.

Do teste da segunda derivada, temos

$$f''(x_1) = f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ pto. mín. local} \tag{3.110}$$
$$f''(x_2) = f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ pto. máx. local} \tag{3.111}$$
$$f''(x_3) = f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ pto. mín. local} \tag{3.112}$$

Agora, vejamos os valores de $f$ em cada ponto de interesse.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $9$ | $0$ | $1$ | $0$ | $9$ |

Então, podemos concluir que $x = -1$ e $x = 3$ são pontos de máximo global (o valor máximo global é $f(-1) = f(3) = 9$), $x = 1$ é ponto de máximo local, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de mínimo global (o valor mínimo global é $f(0) = f(2) = 0$).

Podemos usar os seguintes comandos do SymPy[11] para resolvermos este exercício:

```
>>> f = Lambda(x, x**4 - 4*x**3 + 4*x**2)
>>> fl = Lambda(x, diff(f(x),x))
>>> solve(fl(x))
[0, 1, 2]
>>> fll = Lambda(x, diff(fl(x),x))
>>> fll(0), fll(1), fll(2)
(8, -4, 8)
>>> f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)
(9, 0, 1, 0, 9)
```

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 3.5.1.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^2 - 2x$.

[11] Veja a Observação 3.0.1.

**Exercício 3.5.2.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

**Exercício 3.5.3.** Use o teste da segunda derivada para encontrar e classificar o(s) ponto(s) extremo(s) de $f(x) = x^{2/3}(x-1)$.

**Exercício 3.5.4.** Seja $f(x) = -x^4$. Mostre que $x = 0$ é ponto de máximo local de $f$ e que $f'(0) = f''(0) = 0$.

# Capítulo 4

# Integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Observação 4.0.1.** Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
init_session()
```

## 4.1 Noção de integral

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

### 4.1.1 Soma de Riemann

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Seja, também, $P$ a seguinte **partição** de $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}, \tag{4.1}$$

onde $n + 1$ é o número de pontos na partição. Definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{4.2}$$

o tamanho de cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ da partição, com $i = 1, 2, \cdots, n$. A **norma da partição** é definida por

$$\|P\| = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i, \tag{4.3}$$

i.e. o tamanho do maior subintervalo da partição. Com isso, chama-se de uma **soma de Riemann** toda a expressão da forma

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i, \tag{4.4}$$

onde $x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$ (arbitrariamente escolhido).

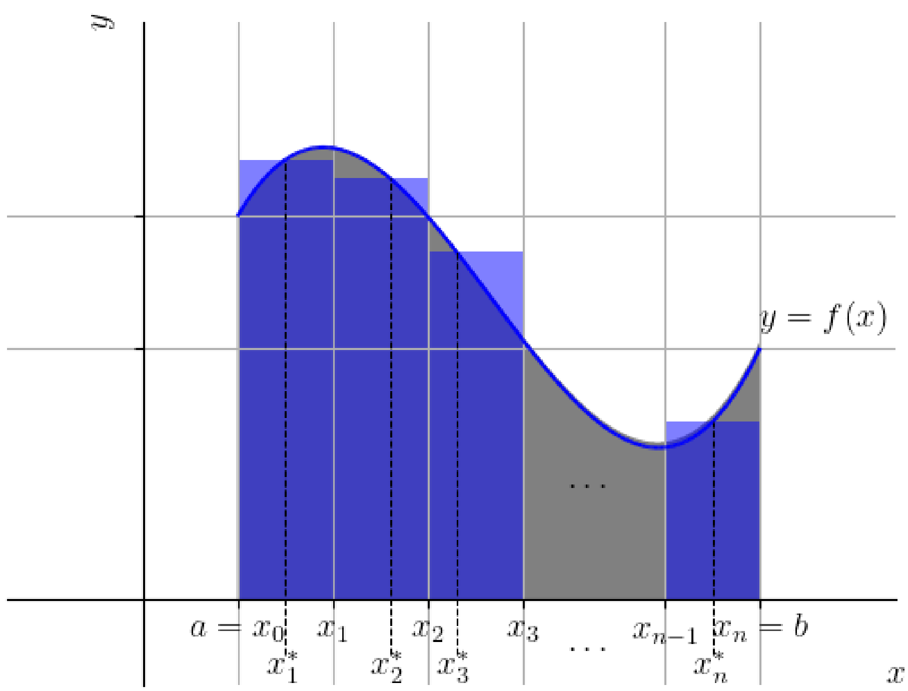



Figura 4.1: Ilustração da soma de Riemann.

**Observação 4.1.1.** (Aproximação da área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa, uma soma de Riemann é uma aproximação da área sob seu gráfico e o eixo das abscissas[1]. Veja a Figura 4.1.

[1] Veja o Exercício 4.1.4 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

### 4.1.2 Integral

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A integral (definida) de $a$ até $b$ de uma dada função $f$ em relação a $x$ é denotada e definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i. \tag{4.5}$$

De forma genérica, a integral definida de $a$ até $b$ é o limite das somas de Riemann quando a norma das partições $P$ do intervalo $[a,b]$ tendem a zero. Quando o limite existe, dizemos que $f$ é **integrável** no intervalo $[a,b]$.

**Observação 4.1.2.** Na notação de integral definida acima, chamamos $a$ de **limite inferior** e $b$ de **limite superior de integração**, $f$ é chamada de **integrando** e $x$ de **variável de integração**.

**Observação 4.1.3.** Funções contínuas são funções integráveis.

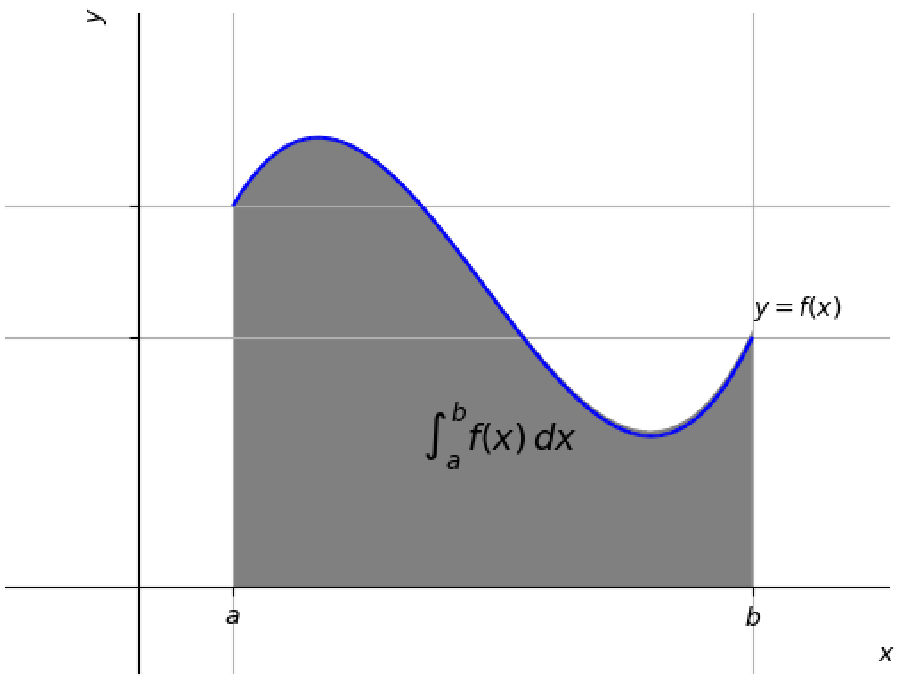



Figura 4.2: A integral definida como a área sob o gráfico.

**Observação 4.1.4.** (Área sob o gráfico) No caso de uma função não negativa,

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.6}$$

é a área sob o gráfico de $f$[2]. Veja a Figura 4.2.

**Exemplo 4.1.1.** Vamos calcular

$$\int_0^1 1\,dx. \tag{4.7}$$

Aqui, o integrando é a função constante $f(x) \equiv 1$ e o **intervalo de integração** é $[a, b]$. Da Observação 4.1.4, temos que esta integral é a área sob o gráfico de $f$ no intervalo $[0, 1]$. Esta área é um retângulo de altura 1 e comprimento 1. Logo,

$$\int_0^1 1\,dx = 1 \cdot 1 = 1. \tag{4.8}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 4.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx. \tag{4.9}$$

**Solução.** Esta integral corresponde à área sob o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ restrita ao intervalo $[-1, 1]$. Observando que

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow y^2 + x^2 = 1, \tag{4.11}$$

vemos que esta é a área do semicírculo de raio 1. Logo,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}. \tag{4.12}$$

$\Diamond$

[2]Veja o Exercício 4.1.5 para uma interpretação geométrica no caso geral de funções contínuas.

**ER 4.1.2.** Determine a função $F(x)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x t\,dt, \tag{4.13}$$

para todo $x \geq 0$. Então, mostre que $F'(x) = x$.

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 4.1.1.** Calcule

$$\int_{-1}^{2} 2\,dx. \tag{4.17}$$

**Exercício 4.1.2.** Calcule

$$\int_{-3}^{-1} 1 - x\,dx. \tag{4.18}$$

**Exercício 4.1.3.** Determine $F(x)$ tal que

$$F(x) = \int_0^x t + 1\,dt. \tag{4.19}$$

para $x \geq 0$. Então, calcule $F'(x)$.

**Exercício 4.1.4.** Faça uma interpretação geométrica da uma soma de Riemann aplicada a uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

**Exercício 4.1.5.** Faça uma interpretação geométrica de

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.20}$$

quando $f$ é uma função contínua e não positiva. Estenda sua interpretação para funções contínuas arbitrárias.

**Exercício 4.1.6.** Calcule

$$\int_{-1}^{2} -1\,dx. \tag{4.21}$$

**Exercício 4.1.7.** Calcule

$$\int_{-1}^{1} x\,dx. \tag{4.22}$$

## 4.2 Propriedades de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 4.1, vimos que a integral definida de uma dada função $f$ em um intervalo $[a,b]$ está associada à área (líquida) entre seu gráfico e as retas $y=0$, $x=a$ e $x=b$. Veja a Figura 4.2.

Com base nesta noção geométrica, podemos inferir as seguintes propriedades de integração para funções integráveis $f$ e $g$:

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

e) $\displaystyle\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\cdot(b-a)$

**Exemplo 4.2.1.** Sejam $f$ e $g$ funções integráveis tais que

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2, \tag{4.23}$$

$$\int_{4}^{5} f(x)\,dx = 3, \tag{4.24}$$

$$\int_{-1}^{4} g(x)\,dx = -1. \tag{4.25}$$

Então, vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int_{4}^{-1} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{4} g(x)\,dx = -(-1) = 1. \tag{4.26}$$

b)

$$\int_{-1}^{-1} 4f(x)\,dx = 0. \tag{4.27}$$

c)

$$\int_{-1}^{4} -2g(x)\,dx = -2\int_{-1}^{4} g(x)\,dx = 2. \tag{4.28}$$

d)

$$\begin{align}
\int_{-1}^{4} \left[f(x) - 2g(x)\right]\,dx &= \int_{-1}^{4} f(x)\,dx - \int_{-1}^{4} 2g(x)\,dx \tag{4.29}\\
&= 2 - 2\int_{-1}^{4} g(x)\,dx \tag{4.30}\\
&= 2 + 2 = 4. \tag{4.31}
\end{align}$$

e)

$$\begin{align}
\int_{-1}^{5} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{5} f(x)\,dx \tag{4.32}\\
&= 2 + 3 = 5. \tag{4.33}
\end{align}$$

**Exemplo 4.2.2.** Lembrando que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, temos da propriedade e) acima que

$$\begin{align}
&2\pi \min_{x\in[-\pi,\pi]}\{\operatorname{sen}(x)\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \leq 2\pi \max_{x\in[pi,\pi]}\{\operatorname{sen}(x)\} \tag{4.34}\\
&\Rightarrow -2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \leq 2\pi. \tag{4.35}
\end{align}$$

### 4.2.1 Teorema do valor médio

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na noção de integral, define-se a média de uma função $f$ no intervalo $[a,b]$ por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4.36}$$

no caso de $f$ ser integrável neste intervalo.

**Teorema 4.2.1.** (Teorema do valor médio para integrais) Se $f$ for contínua em $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.37}$$

*Demonstração.* Vejamos uma ideia da demonstração. Da propriedade de integração e) acima, temos

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}. \tag{4.38}$$

Agora, pelo Teorema do valor intermediário (Teorema 1.6.1), temos $f$ assume todos os valores entre seus valores mínimo e máximo. Logo, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.39}$$

□

**Exemplo 4.2.3.** Seja $f$ uma função contínua em $[a,b]$, $a \neq b$, e

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0, \tag{4.40}$$

então $f$ possui pelo menos um zero neste intervalo. De fato, do Teorema do valor médio para integrais, temos que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0. \tag{4.41}$$

### 4.2.2 Teorema fundamental do cálculo, parte I

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $f$ uma função integrável e $F$ a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{4.42}$$

para algum número real $a$ dado.

**Teorema 4.2.2.** (Teorema fundamental do cálculo, parte I) Se $f$ é contínua em $[a,b]$, então é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $(a,b)$ a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4.43}$$

sendo

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{4.44}$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. Da definição de derivada, temos

$$\begin{align}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{4.45}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right] \tag{4.46}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx. \tag{4.47}
\end{align}$$

Agora, do Teorema do valor médio para integrais (Teorema 4.2.1), temos que existe $c_h \in [x, x+h]$ tal que

$$f(c_h) = \frac{1}{x+h-x}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx. \tag{4.48}$$

Notemos que $c_h \to x$ quando $h \to 0$ e, portanto, temos

$$\begin{align}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \tag{4.49}\\
&= \lim_{h\to 0} f(c_h) \tag{4.50}\\
&= f(x). \tag{4.51}
\end{align}$$

□

**Exemplo 4.2.4.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx}\int_1^x t^2\,dt = x^2. \tag{4.52}$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \operatorname{sen}(t)\,dt = \operatorname{sen}(x) \tag{4.53}$$

### 4.2.3 Integral indefinida

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema 4.2.2), mostra que a derivada da integral de uma função $f$ (contínua) é uma função $F$ tal que

$$F'(x) = f(x). \tag{4.54}$$

Dizemos que $F$ é uma **primitiva** da função $f$.

Observamos que se $F$ é uma primitiva de $f$, então $G(x) = F(x) + C$ também é primitiva de $f$ para qualquer constante $C$, i.e.

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x). \tag{4.55}$$

Mais ainda, do Corolário 3.3.2 do Teorema do valor médio para derivadas, temos que quaisquer duas primitivas de uma mesma função diferem-se apenas uma constante.

Com isso, definimos **integral indefinida** de $f$ em relação a $x$ por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{4.56}$$

onde $F$ é qualquer primitiva de $f$ e $C$ uma constante indeterminada.

**Exemplo 4.2.5.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\displaystyle\int dx = x + C$

b) $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$

c) $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$

d) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

### 4.2.4 Teorema fundamental do cálculo, parte II

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Teorema 4.2.3.** (Teorema fundamental do cálculo, parte II) Se $f$ é contínua em $[a, b]$ e $F$ é qualquer primitiva de $f$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4.57}$$

*Demonstração.* Vejamos a ideia da demonstração. A parte I do Teorema fundamental do cálculo (Teorema 4.2.2), nos garante a existência de

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{4.58}$$

Seja, então, $F$ uma primitiva qualquer de $f$. Logo,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] && (4.59)\\ &= G(b) - G(a) && (4.60)\\ &= \int_a^b f(t)\,dx - \int_a^a f(t)\,dt && (4.61)\\ &= \int_a^b f(t)\,dx. && (4.62) \end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.2.6.** Vejamos os seguintes casos:

1. $\int_0^1 dx = x\big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

2. $\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

**Observação 4.2.1.** Do Teorema fundamental do cálculo, parte II, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4.63}$$

De fato, se $F$ é uma primitiva de $f$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{4.64}$$
$$= -\left[F(a) - F(b)\right] \tag{4.65}$$
$$= -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4.66}$$

**Exemplo 4.2.7.** Temos que

$$\int_0^1 dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1. \tag{4.67}$$

Agora,

$$\int_1^0 dx = x|_1^0 = 0 - 1 = -1. \tag{4.68}$$

Conforme esperado, temos

$$\int_0^1 dx = -\int_1^0 dx. \tag{4.69}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 4.2.1.** Calcule

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x}\,dx. \tag{4.70}$$

**Solução.** Primeiramente, notemos que

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \tag{4.71}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C. \tag{4.72}$$

Então, usando as propriedades de integração, temos

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx \tag{4.73}$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} - \left[\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} \tag{4.74}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{e})^2}{2} - \frac{1}{2}\right] - \left[\ln\sqrt{e} - \ln 1\right] \quad (4.75)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(e) - 0 \quad (4.76)$$

$$= \frac{e}{2} - 1. \quad (4.77)$$

◊

**ER 4.2.2.** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e as retas $y = 0$, $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$.

**Solução.** Lembrando que a integral definida está associada a área sob o gráfico do integrando, temos que a área desejada pode ser calculada por

$$A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx, \quad (4.78)$$

pois $\operatorname{sen}(x) < 0$ para $x \in (-\pi/2, 0)$ e $\operatorname{sen}(x) > 0$ para $x \in (0, \pi/2)$. Também, observamos que

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C. \quad (4.79)$$

Logo, do Teorema fundamental do cálculo segue que

$$A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\,dx \quad (4.80)$$

$$= -\left[-\cos(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[-\cos(x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \quad (4.81)$$

$$= -[-1 - 0] + [-0 - (-1)] = 2. \quad (4.82)$$

◊

**ER 4.2.3.** Encontre a função $y = y(x)$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = x, \quad (4.83)$$

e $y(0) = 1$.

**Solução.** Integrando ambos os lados da equação diferencial em relação a $x$, temos

$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = \int x\,dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C \quad (4.84)$$

Agora, da condição $y(0) = 1$, segue

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + C = 1 \tag{4.85}$$
$$\Rightarrow C = 1. \tag{4.86}$$

Concluímos que $y = x^2/2 + 1$.

◊

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 4.2.1.** Sejam $f$ e $g$ tais que

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -2, \quad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}, \tag{4.87}$$
$$\int_{-2}^{0} g(x)\,dx = 1. \tag{4.88}$$

Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} f(x) - 51 \cdot g(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2g(x) - \frac{1}{2}f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

**Exercício 4.2.2.** Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} 1 - x\,dx$

c) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{2}{x}\,dx$

**Exercício 4.2.3.** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ e as retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

**Exercício 4.2.4.** Encontre a função $y = y(x)$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \tag{4.89}$$

e $y(\pi) = 1$.

## 4.3 Regras básicas de integração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 4.2, definimos a integral indefinida por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{4.90}$$

onde $F$ é uma **primitiva** de $f$, i.e. $F' = f$, e $C$ é uma **constante indeterminada**. Na sequência, vamos discutir sobre as regras básicas para o cálculo de integrais.

### 4.3.1 Integral de função potência

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na derivada de função potência, podemos afirmar que

$$\boldsymbol{\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1}. \tag{4.91}$$

De fato, temos

$$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = (r+1)\cdot\frac{x^r}{r+1} = x^r, \tag{4.92}$$

para $r \neq -1$.

**Exemplo 4.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

**Exemplo 4.3.2.** Vamos calcular

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx. \tag{4.93}$$

Da regra da potência, temos

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{4.94}$$

Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{align}
\int_{-1}^{1} x^2\,dx &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} \tag{4.95}\\
&= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \tag{4.96}\\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \tag{4.97}
\end{align}$$

### 4.3.2 Regras da multiplicação por constante e da soma

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Das regras de multiplicação por constante e da soma para derivadas, podemos concluir que

- $\displaystyle\boldsymbol{\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx},\quad k \neq 0$ constante.

  De fato, seja $F$ uma primitiva de $f$. Temos $(k\cdot F)' = k\cdot F' = k\cdot f$, i.e. $k\cdot F$ é primitiva de $k\cdot f$.

- $\displaystyle\boldsymbol{\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx}.$

  De fato, sejam $F$ uma primitiva de $f$ e $G$ uma primitiva de $g$. Temos $(F+G)' = F' + G' = f + g$, i.e. $F+G$ é primitiva de $f+g$.

**Observação 4.3.1.** Como $(x)' = 1$, temos que a **integral de função constante** $f(x)\equiv k$ é

$$\int k\,dx = k\int 1\cdot\,dx = k\cdot x + C. \tag{4.98}$$

**Exemplo 4.3.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx \tag{4.99}$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \tag{4.100}$$

$$= x^2 + C \tag{4.101}$$

[3]

b)

$$\int (2x^2 - 3x + 1)\,dx = \int 2x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int dx \tag{4.102}$$

$$= 2\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + x + C \tag{4.103}$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \tag{4.104}$$

**Exemplo 4.3.4.** Vamos calcular

$$\int_0^1 x^2 + 1\,dx. \tag{4.105}$$

Temos

$$\int x^2 + 1\,dx = \int x^2\,dx + \int dx \tag{4.106}$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C. \tag{4.107}$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 x^2 + 1\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x\right|_0^1 \tag{4.108}$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right) \tag{4.109}$$

$$= \frac{4}{3}. \tag{4.110}$$

[3]Como $C$ é uma constante indeterminada, $2\cdot C$ também é uma constante indeterminada.

### 4.3.3 Integral de $1/x$

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção ??, a função logaritmo natural $y = \ln x$ foi definida como a inversa da função exponencial natural $y = e^x$. Pode-se mostrar que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0. \tag{4.111}$$

Isto está de acordo com o fato de que da parte I do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{4.112}$$

Agora, da Regra da cadeira temos

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\frac{d(-x)}{dx} \tag{4.113}$$

$$= \frac{1}{x}. \tag{4.114}$$

Com isso, podemos concluir que

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}. \tag{4.115}$$

**Exemplo 4.3.5.** Vamos calcular

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx. \tag{4.116}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_1^e \tag{4.117}$$

$$= \ln(e) - \ln(1) \tag{4.118}$$

$$= 1. \tag{4.119}$$

### 4.3.4 Integral da função exponencial natural

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Da derivada da função exponencial natural, temos

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{4.120}$$

**Exemplo 4.3.6.**

$$\begin{align}
\int e^{2+x}\,dx &= \int e^2 e^x\,dx \tag{4.121}\\
&= e^2 \int e^x\,dx \tag{4.122}\\
&= e^2 e^x + C \tag{4.123}\\
&= e^{2+x} + C \tag{4.124}
\end{align}$$

### 4.3.5 Integrais de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Com base na derivada de funções trigonométricas, temos

- $$\int \mathbf{sen}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = -\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C} \tag{4.125}$$
- $$\int \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = \mathbf{sen}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C} \tag{4.126}$$

**Exemplo 4.3.7.** Vamos calcular

$$\int_0^\pi \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx. \tag{4.127}$$

Temos

$$\begin{align}
\int \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx &= \int \cos(x)\,dx - \int \operatorname{sen}(x)\,dx \tag{4.128}\\
&= \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C. \tag{4.129}
\end{align}$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{align}
\int_0^\pi \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx &= \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\big|_0^\pi \tag{4.130}\\
&= \operatorname{sen}(\pi) + \cos(\pi) - [\operatorname{sen}(0) + \cos(0)] \tag{4.131}\\
&= -1 - 1 = -2. \tag{4.132}
\end{align}$$

### 4.3.6 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \tag{4.133}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{4.134}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \tag{4.135}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \tag{4.136}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4.137}$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C \tag{4.138}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C \tag{4.139}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 4.3.1.** Calcule a área total entre as curvas $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

**Solução.** Tendo em vista que $x^2 - 1 \leq 0$ para $x \in [0, 1]$ e $x^2 - 1 \geq [0, 1]$, temos que a área $A$ pedida é igual a

$$A = -\int_0^1 x^2 - 1\,dx + \int_1^2 x^2 - 1\,dx. \tag{4.140}$$

Agora, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int x^2 - 1\,dx = \int x^2\,dx - \int\,dx \tag{4.141}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + C. \tag{4.142}$$

Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 \tag{4.143}$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - 1\right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right] \tag{4.144}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{4}{3} = 2. \tag{4.145}$$

Podemos usar o SymPy para calcular a área, com os seguintes comandos[4]:

```
>>> -integrate(x**2-1,(x,0,1))+integrate(x**2-1,(x,1,2))
2
```

◊

**ER 4.3.2.** Calcule

$$\int \frac{1}{2x}\,dx. \tag{4.146}$$

**Solução.** Das regras básicas de integração, temos

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \tag{4.147}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx \tag{4.148}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x) + C \tag{4.149}$$

$$= \ln\sqrt{x} + C. \tag{4.150}$$

No SymPy, temos[5]:

```
>>> integrate(1/(2*x),x)
log(x)/2
```

◊

### 4.3.7 Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

[4]Veja a Observação 4.0.1.
[5]Veja a Observação 4.0.1.

**Exercício 4.3.1.** Calcule

a) $\int dx$

b) $\int x^{-2}\,dx$

c) $\int \sqrt{x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

**Exercício 4.3.2.** Calcule

a) $\int 1 + x^{-2}\,dx$

b) $\int x - \frac{1}{x}\,dx$

**Exercício 4.3.3.** Calcule

a) $2\cos(x)\,dx$

b) $1 - \operatorname{sen}(x)\,dx$

**Exercício 4.3.4.** Calcule

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx. \tag{4.151}$$

**Exercício 4.3.5.** Calcule a área total entre as curvas $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

## 4.4 Integração por substituição

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja $u = u(x)$. A regra de integração por substituição é

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{4.152}$$

De fato, se

$$\int f(u)\,du = F(u) + C, \tag{4.153}$$

então, da regra da cadeira (Seção 2.7), temos

$$\begin{align}
\frac{d}{dx}F(u(x)) &= F'(u(x))u'(x) \tag{4.154}\\
&= f(u(x))u'(x), \tag{4.155}
\end{align}$$

i.e. $F(u(x))$ é primitiva de $f(u(x))u'(x)$.

**Exemplo 4.4.1.** Vejamos os seguintes casos:

a) $\displaystyle\int 2(2x+1)^2\,dx$.

Tomamos $f(u) = u^2$ com $u(x) = 2x+1$, donde $u'(x) = 2$. Logo

$$\begin{align}
\int 2(2x+1)^2\,dx &= \int f(u(x))u'(x)\,dx \tag{4.156}\\
&= \int f(u)\,du \tag{4.157}\\
&= \int u^2\,du \tag{4.158}\\
&= \frac{u^3}{3} + C \tag{4.159}\\
&= \frac{(2x+1)^3}{3} + C. \tag{4.160}
\end{align}$$

b) $\displaystyle\int \pi\operatorname{sen}(\pi x)\,dx$.

Tomando $f(u) = \operatorname{sen}(u)$, $u = \pi x$, temos $u'(x) = \pi$. Logo

$$\begin{align}
\int \pi\operatorname{sen}(\pi x)\,dx &= \int f(u(x))u'(x)\,dx \tag{4.161}\\
&= \int f(u)\,du \tag{4.162}\\
&= \int \operatorname{sen}(u)\,du \tag{4.163}\\
&= -\cos(u) + C \tag{4.164}\\
&= -\cos(\pi x) + C. \tag{4.165}
\end{align}$$

**Exemplo 4.4.2.** Consideremos

$$\int (2x+1)^2\,dx. \tag{4.166}$$

Substituindo

$$u = 2x+1 \tag{4.167}$$

temos

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}. \tag{4.168}$$

Portanto,

$$\begin{align}
\int (2x+1)^2\,dx &= \int u^2\,\frac{du}{2} \tag{4.169}\\
&= \frac{1}{2}\int u^2\,du \tag{4.170}\\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{2+1}}{2+1} + C \tag{4.171}\\
&= \frac{u^3}{6} + C \tag{4.172}\\
&= \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C. \tag{4.173}
\end{align}$$

### 4.4.1 Integral de função exponencial

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Subseção 4.3.4, vimos que

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4.174}$$

Agora, com a regra da substituição, temos

$$\begin{align}
\int a^x\,dx &= \int e^{\ln a^x}\,dx \tag{4.175}\\
&= \int e^{x\ln a}\,dx, \tag{4.176}
\end{align}$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tomando

$$u = x\ln a \Rightarrow du = \ln(a)dx. \tag{4.177}$$

Segue que

$$\int a^x\,dx = \int e^u \frac{du}{\ln a} \tag{4.178}$$
$$= \frac{1}{\ln a}\int e^u\,du \tag{4.179}$$
$$= \frac{e^u}{\ln a} + C \tag{4.180}$$
$$= \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} + C \tag{4.181}$$
$$= \frac{e^{\ln a^x}}{\ln a} + C \tag{4.182}$$
$$= \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{4.183}$$

Ou seja, concluímos que

$$\boldsymbol{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}. \tag{4.184}$$

**Exemplo 4.4.3.** Vamos calcular

$$\int x\cdot 2^{x^2}\,dx. \tag{4.185}$$

Por substituição, tomamos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx, \tag{4.186}$$

segue

$$\int x\cdot 2^{x^2}\,dx = \int \cdot 2^u \frac{du}{2} \tag{4.187}$$
$$= \frac{1}{2}\int \cdot 2^u\,du \tag{4.188}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2^u}{\ln 2} + C \tag{4.189}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C \tag{4.190}$$

### 4.4.2 Integral de funções trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Na Seção 4.3.5, vimos que

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C \quad \text{e} \tag{4.191}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C. \tag{4.192}$$

**Exemplo 4.4.4.** Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx. \tag{4.193}$$

Usando a identidade trigonométrica **??**, temos

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx \tag{4.194}$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx. \tag{4.195}$$

Agora, tomando $u = 2x$, temos $du = 2\,dx$, donde

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \cos(u)\frac{du}{2} \tag{4.196}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u) + C \tag{4.197}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C. \tag{4.198}$$

Retornando a 4.195, obtemos

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C. \tag{4.199}$$

Agora, com o método da substituição podemos calcular

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx. \tag{4.200}$$

Observamos que

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx. \tag{4.201}$$

Escolhendo
$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)\,dx. \tag{4.202}$$
Fazendo a substituição e calculando, temos
$$\begin{align}
\int \operatorname{tg}(x)\,dx &= -\int \frac{1}{u}\,du \tag{4.203}\\
&= -\ln|u| + C \tag{4.204}\\
&= -\ln|\cos(x)| + C \tag{4.205}\\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos(x)}\right| + C \tag{4.206}\\
&= \ln|\sec(x)| + C. \tag{4.207}
\end{align}$$
Ou seja, concluímos que
$$\boldsymbol{\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + C}. \tag{4.208}$$

**Exemplo 4.4.5.** Vamos calcular
$$\int x\operatorname{tg}(x^2)\,dx. \tag{4.209}$$
Usando a regra de substituição, escolhemos
$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,du. \tag{4.210}$$
Fazendo a substituição e calculando, obtemos
$$\begin{align}
\int x\operatorname{tg}(x^2)\,dx &= \int \operatorname{tg}(u)\,\frac{du}{2} \tag{4.211}\\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}(u)\,du \tag{4.212}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec(u)| + C \tag{4.213}\\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec(x^2)| + C. \tag{4.214}
\end{align}$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função tangente, obtemos[6]
$$\boldsymbol{\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C}. \tag{4.215}$$

[6] Veja o Exercício 4.4.9.

Agora, vamos calcular

$$\int \sec(x)\,dx. \tag{4.216}$$

Observamos que

$$\int \sec(x)\,dx = \int \sec(x)\cdot\frac{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx \tag{4.217}$$

$$= \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx. \tag{4.218}$$

Então, fazendo a substituição

$$u = \sec(x)+\operatorname{tg}(x) \Rightarrow du = \sec(x)\operatorname{tg}(x)+\sec^2(x), \tag{4.219}$$

temos

$$\int \sec(x)\,dx = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{\sec(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx \tag{4.220}$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du \tag{4.221}$$

$$= \ln|u| + C \tag{4.222}$$

$$= \ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)| + C. \tag{4.223}$$

Ou seja, obtemos

$$\boldsymbol{\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)| + C}. \tag{4.224}$$

**Exemplo 4.4.6.** Vamos calcular

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right)\,du. \tag{4.225}$$

Fazendo a substituição

$$v = \frac{u}{2} \Rightarrow dv = \frac{du}{2}, \tag{4.226}$$

segue

$$\int \sec\left(\frac{u}{2}\right)\,du = \int \sec(v)\cdot 2\,dv \tag{4.227}$$

$$= 2\int \sec(v)\,dv \tag{4.228}$$

$$= 2\ln|\sec(v)+\operatorname{tg}(v)| + C \tag{4.229}$$

$$= 2\ln\left|\sec\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C. \tag{4.230}$$

Com raciocínio análogo ao utilizado na integração da função secante, obtemos[7]

$$\int \operatorname{cossec}(x)\,dx = -\ln|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C. \tag{4.231}$$

### 4.4.3 Integrais definidas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A regra de substituição para integrais definidas é

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du. \tag{4.232}$$

**Exemplo 4.4.7.** Vamos calcular

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx. \tag{4.233}$$

Por substituição, escolhemos

$$u = -2x \Rightarrow du = -2dx. \tag{4.234}$$

Logo,

$$\begin{align}
\int 0^1 e^{-2x}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} e^u \frac{du}{-2} \tag{4.235}\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{-2} e^u du \tag{4.236}\\
&= -\frac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{-2} \tag{4.237}\\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2} - e^0\right) \tag{4.238}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}. \tag{4.239}
\end{align}$$

Alternativamente, podemos calcular a integral indefinida primeiramente e, então, usar o Teorema Fundamental do Cálculo com a primitiva obtida. Ou seja, temos

$$\int e^{-2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{-2} \tag{4.240}$$

[7]Veja o Exercício 4.4.11.

$$= -\frac{1}{2}\int e^u\,du \tag{4.241}$$
$$= -\frac{1}{2}e^u + C \tag{4.242}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + C. \tag{4.243}$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \tag{4.244}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^0 \tag{4.245}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}, \tag{4.246}$$

como esperado.

No SymPy, temos[8]:

```
>>> integrate(exp(-2*x),(x,0,1))
   -2
  e     1
-____ + __
   2    2
```

### 4.4.4 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx \tag{4.247}$$
$$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{4.248}$$
$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r\neq -1 \tag{4.249}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \tag{4.250}$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4.251}$$

[8]Veja a Observação 4.0.1.

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{4.252}$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C \tag{4.253}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C \tag{4.254}$$

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + C \tag{4.255}$$

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C \tag{4.256}$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \tag{4.257}$$

$$\int \operatorname{cossec}(x)\,dx = -\ln|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \tag{4.258}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 4.4.1.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx. \tag{4.259}$$

**Solução.** Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{4.260}$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \tag{4.261}$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \tag{4.262}$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{7}{u^2}\,du \tag{4.263}$$

$$= 7\int u^{-2}\,du \tag{4.264}$$

$$= 7\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \tag{4.265}$$

$$= -\frac{7}{u} \tag{4.266}$$
$$= \frac{7}{1-x}. \tag{4.267}$$

◇

**ER 4.4.2.** Calcule

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx. \tag{4.268}$$

**Solução.** Fazendo a substituição

$$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x\,dx, \tag{4.269}$$

temos

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \tag{4.270}$$
$$= \ln|u| + C \tag{4.271}$$
$$= \ln|e^x - 1| + C. \tag{4.272}$$

No SymPy, temos[9]:

```
>>> integrate(exp(x)/(exp(x)-1),x)
     x
log(e  - 1)
```

◇

**ER 4.4.3.** Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{4.273}$$

**Solução.** Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- **Solução 1**: aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du. \tag{4.274}$$

[9]Veja a Observação 4.0.1.

Escolhendo, $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x\,dx$. Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u}\,\frac{du}{-2x} \tag{4.275}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\,du \tag{4.276}$$
$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{u=1}^{0} \tag{4.277}$$
$$= -\frac{1}{3}\left.\sqrt{u^3}\right|_{u=1}^{0} \tag{4.278}$$
$$= \frac{1}{3}. \tag{4.279}$$

- **Solução 2**: calculando uma primitiva em função de $x$. Para obtermos uma primitiva em função de $x$, calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{4.280}$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x\,dx$ e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x\sqrt{u}\,\frac{du}{-2x} \tag{4.281}$$
$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \tag{4.282}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \tag{4.283}$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{u^3} \tag{4.284}$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C. \tag{4.285}$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left.\sqrt{(1-x^2)^3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}. \tag{4.286}$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do SymPy[10]:

[10] Veja a Observação 4.0.1.

```
integrate(x*sqrt(1-x**2),(x,0,1))
```

◊

**ER 4.4.4.** Calcule a área total entre as curvas $y = (1-x)^3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.

**Solução.** A função $f(x) = (1-x)^3$ é positiva em $(0,1)$ e negativa em $(1,2)$. Logo, a área é igual a

$$A = \int_0^1 (1-x)^3\,dx - \int_1^2 (1-x)^3\,dx. \tag{4.287}$$

Agora, calculamos

$$\int (1-x)^3\,dx. \tag{4.288}$$

Para tanto, fazemos a substituição

$$u = 1 - x \Rightarrow du = -dx. \tag{4.289}$$

Logo,

$$\begin{align}
\int (1-x)^3\,dx &= -\int u^3 du \tag{4.290}\\
&= -\frac{u^4}{4} + C \tag{4.291}\\
&= -\frac{(1-x)^4}{4} + C. \tag{4.292}
\end{align}$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{align}
A &= \left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 - \left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_1^2 \tag{4.293}\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tag{4.294}\\
&= \frac{1}{2}. \tag{4.295}
\end{align}$$

No SymPy, temos[11]:

```
>>> integrate((1-x)**3,(x,0,1))-integrate((1-x)**3,(x,1,2))
1/2
```

◊

[11]Veja a Observação 4.0.1.

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 4.4.1.** Calcule

a) $\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$

b) $\int \sqrt{x-1}\,dx$

c) $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$

**Exercício 4.4.2.** Calcule

$$\int \cos^2(x)\,dx. \tag{4.296}$$

**Exercício 4.4.3.** Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx. \tag{4.297}$$

**Exercício 4.4.4.** Calcule

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x}\,dx. \tag{4.298}$$

**Exercício 4.4.5.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2}\,dx. \tag{4.299}$$

**Exercício 4.4.6.** Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx. \tag{4.300}$$

**Exercício 4.4.7.** Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1}\,dx. \tag{4.301}$$

**Exercício 4.4.8.** Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2(x)e^{\operatorname{tg}(x)}\,dx. \tag{4.302}$$

**Solução.** $e-1$

$\Diamond$

**Exercício 4.4.9.** Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C. \tag{4.303}$$

**Exercício 4.4.10.** Calcule

$$\int \cos^2(x)\,dx. \tag{4.304}$$

**Exercício 4.4.11.** Use a regra da substituição para mostrar que

$$\int \operatorname{cossec}(x)\,dx = -\ln|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C. \tag{4.305}$$

## 4.5 Integração por partes

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis, então da regra do produto para derivadas temos

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \tag{4.306}$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx}dx = \int \frac{du}{dx}v dx + \int u\frac{dv}{dx}dx, \tag{4.307}$$

donde

$$uv = \int vdu + \int udv. \tag{4.308}$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}. \tag{4.309}$$

**Exemplo 4.5.1.** Vamos calcular

$$\int xe^x\, dx. \tag{4.310}$$

Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \tag{4.311}$$

$$dv = e^x\, dx \Rightarrow \int dv = \int e^x\, dx \Rightarrow v = e^x. \tag{4.312}$$

Observa-se que no cálculo de $v$, desprezamos a constante indeterminada. Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int xe^x\, dx = \int udv = uv - \int vdu \tag{4.313}$$

$$= xe^x - \int e^x dx \tag{4.314}$$

$$= xe^x - e^x + C. \tag{4.315}$$

No SymPy[12], temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),x)
     x
(x-1)e
```

### 4.5.1 A integral do logaritmo natural

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

[12] Veja a Observação 4.0.1.

Vamos calcular

$$\int \ln x\, dx. \tag{4.316}$$

Usando integração por partes, tomamos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \tag{4.317}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \tag{4.318}$$

Segue que

$$\int \ln x\, dx = \int u\, dv \tag{4.319}$$

$$= uv - \int v\, du \tag{4.320}$$

$$= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx \tag{4.321}$$

$$= x\ln(x) - \int dx \tag{4.322}$$

$$= x\ln(x) - x + C. \tag{4.323}$$

Ou seja, concluímos que

$$\boldsymbol{\int \ln x\, dx = x\ln(x) - x + C}. \tag{4.324}$$

**Exemplo 4.5.2.** Vamos calcular

$$\int \ln(2x)\, dx. \tag{4.325}$$

Da equação 4.324, temos

$$\int \ln x\, dx = x\ln(x) - x + C. \tag{4.326}$$

Usando a regra da substituição (veja Seção 4.4), escolhemos

$$u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx. \tag{4.327}$$

Fazendo a substituição e calculando, temos

$$\int \ln(2x)\, dx = \int \ln(u)\frac{du}{2} \tag{4.328}$$

$$= \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du \tag{4.329}$$
$$= \frac{u\ln(u)}{2} - \frac{u}{2} + C \tag{4.330}$$
$$= x\ln(2x) - x + C. \tag{4.331}$$

No SymPy[13], temos:

```
>>> integrate(log(2*x),x)
x·log(2·x) - x
```

**Exemplo 4.5.3.** Vamos calcular

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx. \tag{4.332}$$

Para integrar por partes, podemos escolher

$$u = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,dx \tag{4.333}$$
$$dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x \tag{4.334}$$

Então, segue

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx. \tag{4.335}$$

Agora, aplicamos integração por partes a esta última integral. Tomamos as seguintes novas escolhas

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)\,dx \tag{4.336}$$
$$dv = e^x\,dx \Rightarrow dv = e^x \tag{4.337}$$

Segue que

$$\int \cos(x)e^x\,dx = \cos(x)e^x + \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx. \tag{4.338}$$

Substituindo este resultado na equação (4.335), obtemos

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx. \tag{4.339}$$

[13]Veja a Observação 4.0.1.

Somando este primeiro termo em ambos os lados desta equação, obtemos

$$2\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))e^x. \tag{4.340}$$

Daí, concluímos que

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}e^x + C. \tag{4.341}$$

No SymPy[14], temos:

```
>>> integrate(sin(x)*exp(x),x)
 x            x
e ⋅ sin(x)   e ⋅ cos(x)
---------- - ----------
    2            2
```

### 4.5.2 Integral definida

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis em $x$. Segue que $du = u'(x)\,dx$ e $dv = v'(x)\,dx$. Segue que a fórmula de integração por partes para integrais definidas é

$$\boldsymbol{\int_{x=a}^{b} u\,dv = uv|_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} v\,du}. \tag{4.342}$$

**Exemplo 4.5.4.** Vamos calcular

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx. \tag{4.343}$$

Para aplicar integração por partes, escolhemos

$$u = x \Rightarrow du = dx \tag{4.344}$$

$$dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} \tag{4.345}$$

[14]Veja a Observação 4.0.1.

Segue da fórmula de integração por partes para integrais definidas que

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,dx \tag{4.346}$$
$$= -2e^{-2} + \left[-e^{-x}\right]_0^2 \tag{4.347}$$
$$= -3e^{-2} + 1. \tag{4.348}$$

No SymPy[15], temos:

```
>>> integrate(x*exp(-x),(x,0,2))
    -2
- 3e   + 1
```

### 4.5.3 Tabela de integrais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx \tag{4.349}$$
$$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \tag{4.350}$$
$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,\quad r\neq -1 \tag{4.351}$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{4.352}$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4.353}$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{4.354}$$
$$\int \ln x\,dx = x\ln(x) - x + C \tag{4.355}$$
$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C \tag{4.356}$$
$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C \tag{4.357}$$
$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + C \tag{4.358}$$

[15]Veja a Observação 4.0.1.

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C \tag{4.359}$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C \tag{4.360}$$

$$\int \operatorname{cossec}(x)\,dx = -\ln|\operatorname{cossec}(x) + \operatorname{cotg}(x)| + C \tag{4.361}$$

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 4.5.1.** Calcule

$$\int x \ln x\,dx. \tag{4.362}$$

**Solução.** Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{4.363}$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \tag{4.364}$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}. \tag{4.365}$$

Segue que

$$\int x\ln x\,dx = \int udv \tag{4.366}$$

$$= uv - \int v\,du \tag{4.367}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \tag{4.368}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx \tag{4.369}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C \tag{4.370}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \tag{4.371}$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do SymPy[16]:

[16]Veja a Observação 4.0.1.

```
>>> integrate(x*log(x),x)
 2            2
x ⋅ log(x)    x
---------- - ---
    2         4
```

◊

**ER 4.5.2.** Calcule

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx. \tag{4.372}$$

**Solução.** Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx. \tag{4.373}$$

Para tanto, escolhemos $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C. \tag{4.374}$$

Escolhendo $C = 0$ e usando a fórmula, temos

$$\begin{align}
\int_{-1}^{1} xe^x\,dx &= \int_{-1}^{1} f(x)g'(x)\,dx \tag{4.375}\\
&= f(x)g(x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g(x)f'(x)\,dx \tag{4.376}\\
&= xe^x|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx \tag{4.377}\\
&= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^{1} \tag{4.378}\\
&= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \tag{4.379}\\
&= 2e^{-1}. \tag{4.380}
\end{align}$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do SymPy[17]:

```
>>> integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
   -1
2⋅e
```

◊

[17]Veja a Observação 4.0.1.

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 4.5.1.** Calcule

a) $\int x \operatorname{sen}(x)\,dx$

b) $\int x \cos(x)\,dx$

c) $\int x^2 \ln(x)\,dx$

**Exercício 4.5.2.** Calcule

$$\int \log_2(x)\,dx. \tag{4.381}$$

**Exercício 4.5.3.** Calcule

a) $\int x^2 e^x\,dx$

b) $\int x^2 \operatorname{sen}(x)\,dx$

**Exercício 4.5.4.** Calcule

$$\int \cos(x)e^x\,dx. \tag{4.382}$$

**Exercício 4.5.5.** Calcule

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(x)\,dx$

b) $\int_{-\pi}^{0} x \cos(x)\,dx$

c) $\int_1^{e} x^2 \ln(x)\,dx$

**Exercício 4.5.6.** Calcule

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^x \, dx. \tag{4.383}$$

## 4.6 Integração por frações parciais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

## 4.7 Integração por substituição trigonométrica

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

# Capítulo 5

# Aplicações da integral

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Observação 5.0.1.** Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
init_session()
```

## 5.1 Cálculo de áreas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ está associada a área entre o gráfico da função $f$ e o eixo das abscissas no intervalo $[a,b]$ (Veja Seção 4.1). Ocorre que se $f$ for não negativa, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Se $f$ for negativa, então $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Por isso, dizemos que $\int_a^b f(x)\,dx$ é a **área líquida** (ou com sinal) entre o gráfico de $f$ e o eixo das abscissas.

**Exemplo 5.1.1.** Vamos calcular a área total entre o gráfico de $f(x) = (x-1)^3$ e o eixo das abscissas, restrito ao intervalo $[0,2]$.

Começamos fazendo o estudo de sinal de $f$ no intervalo. Como $x - 1 \leq 0$ para $x \leq 1$ e, $x - 1 \geq 0$ para $x \geq 1$, temos que $f(x) < 0$ em $[0,1]$ e $f(x) > 0$

em $[1,2]$. Logo, a área total é dada por

$$A = -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx. \tag{5.1}$$

]

Agora, usando a substituição $u = x - 1$, temos $du = dx$ e segue que

$$\begin{align}
\int f(x)\,dx &= \int (x-1)^3\,dx \tag{5.2}\\
&= \int u^3\,du \tag{5.3}\\
&= \frac{u^4}{4} + C \tag{5.4}\\
&= \frac{(x-1)^4}{4} + C. \tag{5.5}
\end{align}$$

Então, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{align}
A &= -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \tag{5.6}\\
&= -\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^2 \tag{5.7}\\
&= -\left[\frac{(1-1)^4}{4} - \frac{(0-1)^4}{4}\right] + \left[\frac{(2-1)^4}{4} - \frac{(1-1)^4}{4}\right] \tag{5.8}\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{5.9}
\end{align}$$

No SymPy podemos usar os seguintes comandos[1]:

```
>>> -integrate((x-1)**3,(x,0,1))+integrate((x-1)**3,(x,1,2))
1/2
```

### 5.1.1 Áreas entre curvas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

[1]Veja a Observação 4.0.1.

Observamos que se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.10}$$

corresponde à área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ restritas ao intervalo $[a,b]$. Ou seja, fazendo $h(x) = f(x) - g(x)$, temos que

$$\int_a^b h(x)\,dx \tag{5.11}$$

é a área entre essas curvas restritas ao intervalo $[a, b]$. Ainda, se $f(x) \leq g(x)$, entre a área entre elas é dada por

$$-\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.12}$$

**Exemplo 5.1.2.** Vamos calcular a área entre as curvas $y = (x-1)^3$, $y = x-1$, $x = 0$ e $x = 2$.

Começamos definindo $h(x) = (x-1)^3 - (x-1)$. A fim de fazermos o estudo de sinal de $h$, identificamos seus zeros.

$$\begin{align} h(x) &= (x-1)^3 - (x-1) \tag{5.13}\\ &= (x-1)\left[(x-1)^2 - 1\right] \tag{5.14}\\ &= (x-1)(x^2 - 2x) \tag{5.15}\\ &= (x-1)\cdot x \cdot (x-2). \tag{5.16}\end{align}$$

Ou seja, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ são as raízes de $h$. Daí, segue seu estudo de sinal:

| | $0 < x < 1$ | $1 < x < 2$ |
|---|---|---|
| $(x-1)$ | - | + |
| $x$ | + | + |
| $(x-2)$ | - | - |
| $h(x)$ | + | - |

Assim, temos que a área desejada pode ser calculada como

$$A = \int_0^1 h(x)\,dx - \int_1^2 h(x)\,dx. \tag{5.17}$$

Agora, calculamos a integral de $h$, i.e.

$$\int h(x)\,dx = \int (x-1)^3 - (x-1)\,dx \tag{5.18}$$
$$= \int (x-1)^3\,dx - \int x\,dx + \int dx \tag{5.19}$$
$$= \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C. \tag{5.20}$$

Por fim, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$A = \int_0^1 h(x)\,dx - \int_1^2 h(x)\,dx \tag{5.21}$$
$$= \left[\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 - \left[\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 \tag{5.22}$$
$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - 2 + 2 + \frac{1}{2} - 1\right) \tag{5.23}$$
$$= \frac{1}{2}. \tag{5.24}$$

No SymPy podemos usar os seguintes comandos[2]:

```
>>> f = (x-1)**3-(x-1)
>>> integrate(f,(x,0,1))-integrate(f,(x,1,2))
1/2
```

## Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**ER 5.1.1.** Cálculo a área entre a reta $y = 1$ e o gráfico de $f(x) = x^2$ restritas ao intervalo [0,1].

**Solução.** Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$ descontada a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ restrita ao intervalo [0,1]. Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2\,dx \tag{5.25}$$

[2]Veja a Observação 4.0.1.

$$= 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \tag{5.26}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \tag{5.27}$$

◊

**ER 5.1.2.** Calcule a área entre as curvas $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$.

**Solução.** O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$. Como $f(x) \geq g(x)$ neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx \tag{5.28}$$

$$= \int_0^1 x - x^2\, dx \tag{5.29}$$

$$= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 \tag{5.30}$$

$$= \frac{1}{6}. \tag{5.31}$$

◊

**ER 5.1.3.** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$.

**Solução.** Para calcularmos a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1,1]$, fazemos:

1. O estudo de sinal de $f$ no intervalo $[-1,1]$.

   (a) Cálculo das raízes de $f$ no intervalo $[-1,1]$.

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \tag{5.32}$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \tag{5.33}$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \tag{5.34}$$

   (b) Os sinais de $f(x)$.

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \tag{5.35}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \tag{5.36}$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

   (a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx = \int x^3 - x\,dx \tag{5.37}$$
$$= \int x^3\,dx - \int x\,dx \tag{5.38}$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \tag{5.39}$$

   (b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx \tag{5.40}$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \tag{5.41}$$
$$= \frac{1}{2}. \tag{5.42}$$

Podemos computar a solução deste exercícios usando os seguintes comandos do SymPy[3]. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

♢

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

**Exercício 5.1.1.** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e a reta $y = 1$ restritas ao intervalo $[-1,1]$.

[3]Veja Observação 5.0.1.

**Exercício 5.1.2.** Calcule a área entre as curvas $y = x$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$.

## 5.2 Volumes por fatiamento e rotação

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

## 5.3 Problema de valor inicial

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

## Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**Exercício 1.1.1.** a) $-1$; b) $-1$; c) 2; d) $\nexists$

**Exercício 1.1.2.** a) $-\frac{3}{2}$; b) $-1$; c) $-1$

**Exercício 1.1.3.** a) 2; b) 2; c) -3; d) $\pi$

**Exercício 1.1.4.** a) 2; b) -2; c) -3; d) $e$

**Exercício 1.2.1.** a) 4; b) $2\pi$; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

**Exercício 1.2.2.** a) $-3/2$; b) $5/2$; c) $-3$

**Exercício 1.2.3.** a) $-6$; b) $-3$;

**Exercício 1.2.4.** a) $2/3$; b) $1/3$;

**Exercício 1.2.5.** a) 2; b) $-1$; c) 1

**Exercício 1.2.6.** a) 6; b) 10; c) 12

**Exercício 1.2.7.** a) $1/2$; b) $-1/3$;

**Exercício 1.2.8.** a) $\nexists$; b) 3;

**Exercício 1.2.9.** $-1/4$

**Exercício 1.3.4.** a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) $\nexists$

**Exercício 1.3.5.** a) 2; b) 2; c) 2

**Exercício 1.3.6.** a) 2; b) 3; c) $\nexists$

**Exercício 1.3.7.** $-\frac{1}{2}$

**Exercício 1.3.8.** 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é $[-1, 1]$.

**Exercício 1.4.1.** 2

**Exercício 1.4.2.** a) 1; b) 3; c) $-1$; d) $e$

**Exercício 1.4.3.** $-1/2$

**Exercício 1.4.4.** não existe.

**Exercício 1.4.5.** a) 1; b) $-3$

**Exercício 1.5.1.** $\infty$

**Exercício 1.5.2.** $x = 2$; $x = -2$

**Exercício 1.5.3.** $\infty$

**Exercício 1.5.4.** $-\infty$

**Exercício 1.5.5.** $-\frac{1}{2}$

**Exercício 1.5.6.** Dica: use as regras para o cálculo de limites.

**Exercício 1.5.7.** Dica: Observe que $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ e analise o limite de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$.

**Exercício 1.6.1.** $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

**Exercício 1.6.2.** $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

**Exercício 1.6.3.** 0

**Exercício 1.7.1.** 1

**Exercício 1.7.2.** 0

**Exercício 1.7.3.** $\frac{1}{2}$

**Exercício 1.7.4.** 0

**Exercício 1.7.5.** 0

**Exercício 1.8.1.** $\infty$

**Exercício 1.8.2.** a) $\infty$; b) 0

**Exercício 2.1.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.1.2.** a) $-1$; b) $-2$; c) $e$

**Exercício 2.1.3.** a) $-1$; b) $-2$; c) $e$

**Exercício 2.1.4.** reta secante: $y = -3x + 7$; reta tangente: $y = -2x + 6$; dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

**Exercício 2.1.5.** a) $1000\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; b) $30\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; c) $-970\ \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$.

**Exercício 2.2.1.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.2.2.** a) 2; b) $-3$; c) $\sqrt{e}$

**Exercício 2.2.3.** $f'(x) = 2x - 2$

**Exercício 2.2.4.** $(1, \infty)$

**Exercício 2.2.5.** a) $2x - 3x^2$; b) $2 - 6x$; c) $-6$; d) 0; e) 0

**Exercício 2.3.1.** a) 0; b) 0; c) 0; d) 0

**Exercício 2.3.2.** a) 1; b) $3x^2$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $-\dfrac{1}{x^2}$; e) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; f) $\pi x^{\pi-1}$

**Exercício 2.3.3.** a) 0; b) 0; c) 0

**Exercício 2.3.4.** 0

**Exercício 2.3.5.** $(0, -1)$

**Exercício 2.4.1.** a) $3^x \ln 3$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$

**Exercício 2.4.2.** a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5}$; b) $2e^{2x}$

**Exercício 2.4.3.** a) $\dfrac{1}{x \ln 3}$ b) $\dfrac{1}{x \ln \frac{2}{5}}$; c) $\frac{1}{x}$

**Exercício 2.4.4.** Dica! Consulte o Exemplo **??**

**Exercício 2.4.5.** Dica! Consulte o Exercício 2.4.4

**Exercício 2.5.1.** a) $f'(x) = -15x^2$; b) $g'(x) = -24x^2 + 8x + 4$; c) $h'(x) = \dfrac{4\left(2x^2 - 2x\left(2x-1\right) - 1\right)}{\left(2x-1\right)^2}$

**Exercício 2.5.2.** a) $f'(x) = (1+x)e^x$; b) $g'(x) = (1+2x)e^{2x}$; c) $h'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

**Exercício 2.5.3.** a) $f'(x) = 2/x$; b) $g'(x) = \ln x^2 + 2$; c) $h'(x) = 2 + 2x + \ln x^2$

**Exercício 2.5.4.** $y = x - 1$

**Exercício 2.6.1.** a) $f'(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(x)$; b) $g'(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot (2 - 3\sin^2(x)))$; c) $h'(x) = 2\cos(x)$

**Exercício 2.6.2.** $y = 1$. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar os esboços dos gráficos.

**Exercício 2.6.3.** a) $f'(x) = \sec^2(x) + \operatorname{cossec}^2(x)$; b) $g'(x) = \sec(x)\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)$; c) $h'(x) = \frac{1}{2}\sec^2(x)$

**Exercício 2.7.1.** a) $f'(x) = 18(2x-3)^8$; b) $g'(x) = -\dfrac{102}{(2x-3)^{52}}$; c) $h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

**Exercício 2.7.2.** a) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-1}\ln 2$; b) $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

**Exercício 2.7.3.** a) $\dfrac{2x}{x^2-1}$; b) $\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 2}$

**Exercício 2.7.4.** a) $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$; b) $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(\sqrt{x})$; c) $h'(x) = 2\sec^2(2x)$; d) $u'(x) = \operatorname{cossec}^2(3-x)$; e) $v'(x) = -\dfrac{2}{x^2}\sec\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; f) $z'(x) = -(5+2x)\operatorname{cossec}\left(5x+x^2\right)\operatorname{cotg}\left(5x+x^2\right)$

**Exercício 2.7.5.** $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{e^2}{4}$

**Exercício 2.8.1.** a) $f'(x) = \dfrac{2}{x\ln 2}$; b) $g'(x) = \frac{1+x}{x}$

**Exercício 2.8.2.** a) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; b) $g'(x) = 2e(1+2x)^{e-1}$

**Exercício 2.8.3.** $x(1+x)^{x-1} + (1+x)^x\ln(1+x)$

**Exercício 2.8.4.** $y = x$

**Exercício 2.9.1.** a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2-2y-1}{2x}$ b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1-y}{x}$

**Exercício 2.9.2.** $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{x+y-2}{x^2}$

**Exercício 2.9.3.** $(0,\ 0)$

**Exercício 2.9.4.** $y = -x$

**Exercício 3.1.1.** 1

**Exercício 3.1.2.** $\infty$

**Exercício 3.1.3.** $\infty$

**Exercício 3.1.4.** $e$

**Exercício 3.2.1.** $x = -1$ ponto de mínimo global; $x = 1$ ponto de máximo local; $x = 2$ ponto de mínimo local; $x = \frac{5}{2}$ ponto de máximo global.

**Exercício 3.2.2.** a) $x = 1$; b) $x = -1$ ponto de máximo global; $x = 1$ ponto de mínimo local e global; c) $f(-1) = 6$ valor máximo global; $f(1) = 2$ valor mínimo local e global;

**Exercício 3.2.3.** a) $x = 1$; b) $x = 1$ ponto de máximo local e global; $x = 3$ ponto de mínimo global; c) $f(1) = 2$ valor máximo local e global; $f(3) = -2$ valor mínimo global;

**Exercício 3.2.4.** a) $x = 1$; b) $x = 0$ ponto de mínimo global;c) $f(0) = 0$ valor mínimo global;

**Exercício 3.2.5.** a) $x = 0$; b) $x = -1$ ponto de mínimo global; $x = 1$ ponto de máximo global; c) $f(-1) = -1$ valor mínimo global; $f(1) = 1$ valor máximo global;

**Exercício 3.3.1.** Decrescente: $(-\infty, 1]$; Crescente: $[1, \infty)$

**Exercício 3.3.2.** Decrescente: $[-1, 1]$; Crescente: $(-\infty, -1]$; $[1, \infty)$

**Exercício 3.3.3.** Crescente: $(0, \infty)$

**Exercício 3.4.1.** $x = 1$ ponto de mínimo global

**Exercício 3.4.2.** $x_1 = -1$ ponto de máximo local; $x_2 = 1$ ponto de mínimo local;

**Exercício 3.4.3.** $x_1 = 0$ ponto de máximo local; $x_2 = 2/5$ ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.1.** $x = 1$ ponto de mínimo global

**Exercício 3.5.2.** $x_1 = -1$ ponto de máximo local; $x_2 = 1$ ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.3.** $x_1 = 0$ ponto de máximo local; $x_2 = 2/5$ ponto de mínimo local;

**Exercício 3.5.4.** $f'(x) = -4x^3$, $f'(0) = 0$. Pelo teste da 1. derivada, temos que $x = 0$ é ponto de máximo local. $f''(x) = -12x^2$, $f''(0) = 0$.

**Exercício 4.1.0.** A integral definida

$$\int_0^x t\,dt \tag{4.14}$$

é a área sob o gráfico de $f(t) = t$ restrita no intervalo $[0, x]$. Isto é, a área do triângulo retângulo de base $x$ e altura $x$. Logo,

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}. \tag{4.15}$$

Ou seja, temos $F(x) = x^2/2$ e, portanto,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x. \tag{4.16}$$

**Exercício 4.1.1.** 6

**Exercício 4.1.2.** 6

**Exercício 4.1.3.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$; $F'(x) = x + 1$.

**Exercício 4.1.4.** Dica: a soma de Riemann é uma aproximação da área líquida sob o gráfico da função.

**Exercício 4.1.5.** Dica: $\int_a^b f(x)\,dx$é a área líquida sob o gráfico da função.

**Exercício 4.1.6.** $-3$

**Exercício 4.1.7.** 0

**Exercício 4.2.1.** a) 0; b) 3; c) $-5/2$

**Exercício 4.2.2.** a) 6; b) 6; c) 2

**Exercício 4.2.3.** $4/3$

**Exercício 4.2.4.** $y = \operatorname{sen}(x) + 1$

**Exercício 4.3.1.** a) $x + C$; b) $-\frac{1}{x} + C$; c) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$; d) $2x^{1/2} + C$

**Exercício 4.3.2.** a) $x - \frac{1}{x} + C$; b) $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$

**Exercício 4.3.3.** a) $2\operatorname{sen}(x) + C$; b) $x + \cos(x) + C$

**Exercício 4.3.4.** 0

**Exercício 4.3.5.** $1/2$

**Exercício 4.4.1.** a) $\frac{-\cos(2x)}{2} + C$; b) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$; c) $\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + C$

**Exercício 4.4.2.** $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C$

**Exercício 4.4.3.** $1/2$

**Exercício 4.4.4.** $\dfrac{3\ln^2(x)}{2} + C$

**Exercício 4.4.5.** $\frac{7}{2}$

**Exercício 4.4.6.** 4

**Exercício 4.4.7.** $\frac{1}{2}$

**Exercício 4.4.10.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2} + C$

**Exercício 4.5.1.** a) $\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) + C$; b) $\cos(x) + x\operatorname{sen}(x) + C$; c) $\dfrac{x^3\ln(x)}{3} - \dfrac{x^3}{9} + C$

**Exercício 4.5.2.** $\dfrac{x\ln(x)}{\log_2(x)} - \dfrac{x}{\log_2(x)} + C$

**Exercício 4.5.3.** a) $\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$; b) $-x^2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C$

**Exercício 4.5.4.** $\dfrac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{2}e^x + C$

**Exercício 4.5.5.** a) 1; b) 2; c) $\dfrac{1}{9} + \dfrac{2e^3}{9}$

**Exercício 4.5.6.** $-\frac{5}{e} + e$

**Exercício 5.1.1.** 2

**Exercício 5.1.2.** 1

# Referências Bibliográficas


[1] H. Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.

[2] J. Stewart. *Cálculo*. Thomson Learning, 2006.

[3] G. Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.