

# Vetores

Pedro H A Konzen

12 de maio de 2020

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
<b>1 Vetores</b>	<b>1</b>
1.1 Segmentos orientados . . . . .	1
1.2 Vetores . . . . .	6
1.2.1 Adição de vetores . . . . .	8
1.2.2 Vetor oposto . . . . .	9
1.2.3 Subtração de vetores . . . . .	10
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar . . . . .	11
1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores . . . . .	12
<b>2 Bases e coordenadas</b>	<b>15</b>
2.1 Dependência linear . . . . .	15
2.1.1 Combinação linear . . . . .	15
2.1.2 Dependência linear . . . . .	16
2.1.3 Observações . . . . .	17
2.2 Bases e coordenadas . . . . .	22
2.2.1 Operações de vetores com coordenadas . . . . .	24
2.2.2 Dependência linear . . . . .	26
2.3 Mudança de base . . . . .	28
2.4 Bases ortonormais . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Produto escalar</b>	<b>31</b>
3.1	Produto escalar . . . . .	31
3.1.1	Propriedades do produto escalar . . . . .	31
3.2	Ângulo entre dois vetores . . . . .	33
3.2.1	Desigualdade triangular . . . . .	35
3.3	Projeção ortogonal . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Produto vetorial</b>	<b>38</b>
4.1	Definição . . . . .	39
4.1.1	Interpretação geométrica . . . . .	39
4.1.2	Produto vetorial via coordenadas . . . . .	40
4.1.3	Exercícios . . . . .	40
4.2	Propriedades do produto vetorial . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Produto misto</b>	<b>44</b>
5.1	Definição . . . . .	44
5.1.1	Propriedades . . . . .	45
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>47</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Vetores

### 1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ . O conjunto de todos os pontos de  $r$  entre  $A$  e  $B$  é chamado de **segmento**  $AB$ .

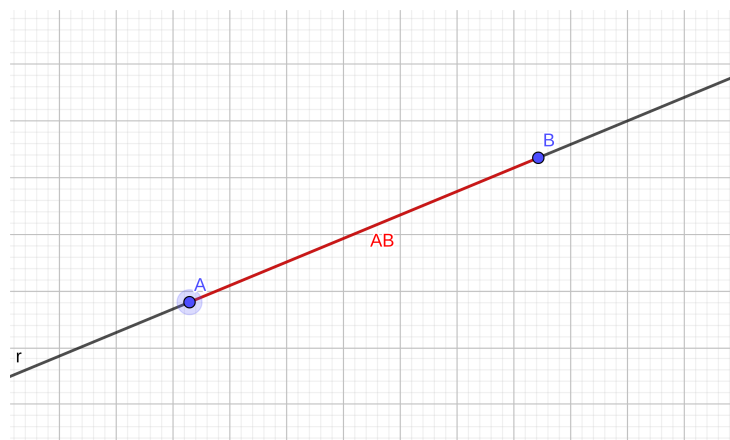


Figura 1.1: Esboço de um segmento  $AB$ .

Associado a um segmento  $AB$ , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos  $A$  e  $B$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é denotada por  $|AB|$  ou  $|BA|$ .

A **direção** de um segmento  $AB$  é a direção da reta que fica determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**Exemplo 1.1.1.** Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos  $AB$  e  $CD$  têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento  $EF$  tem direção diferente dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

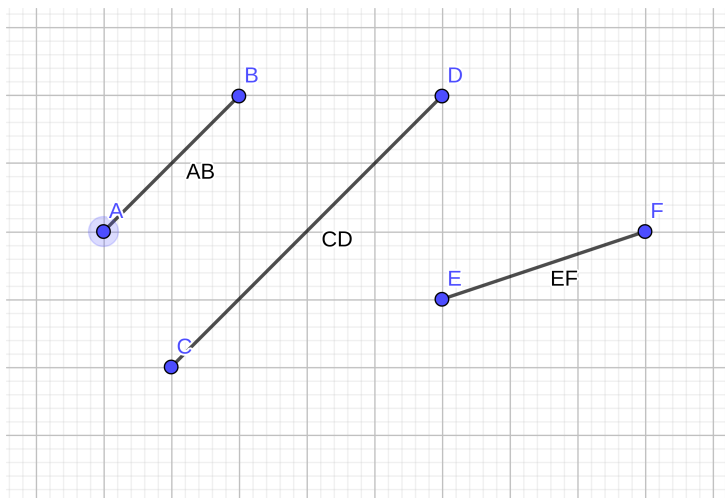


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se  $A$  e  $B$  são o mesmo ponto, então chamamos  $AB$  de **segmento nulo** e temos  $|AB| = 0$ . Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento  $AB$  é igual ao segmento  $BA$ . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado  $AB$  é o segmento definido pelos pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $A$  a origem e  $B$  a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos  $AB$  e  $CD$  têm a **mesma direção** quando as retas  $AB$  e  $CD$  forem paralelas ou coincidentes.

**Exemplo 1.1.2.** Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  têm a mesma direção. Já o segmento orientado  $EF$  tem direção diferente dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

Sejam dados dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  de mesma direção, cujas retas  $AB$  e  $CD$  não sejam coincidentes. Então, as retas  $AB$  e  $CD$  determinam um único plano e a reta  $AC$  determina dois semiplanos (veja a Figura

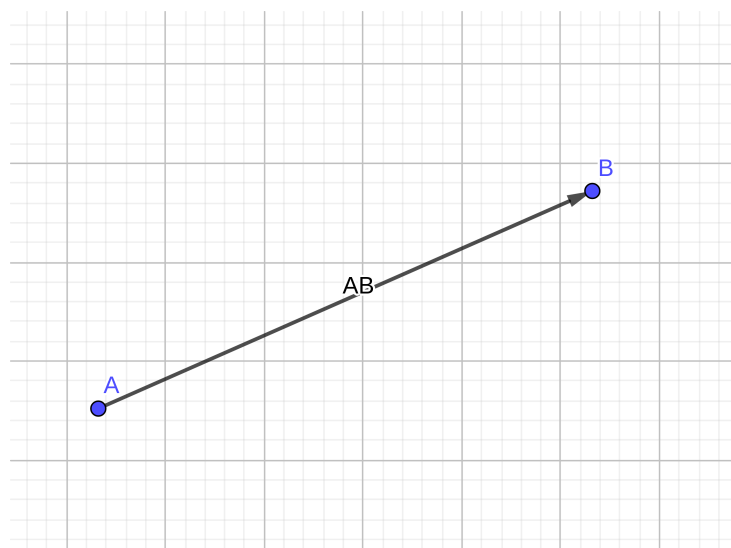


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado  $AB$ .

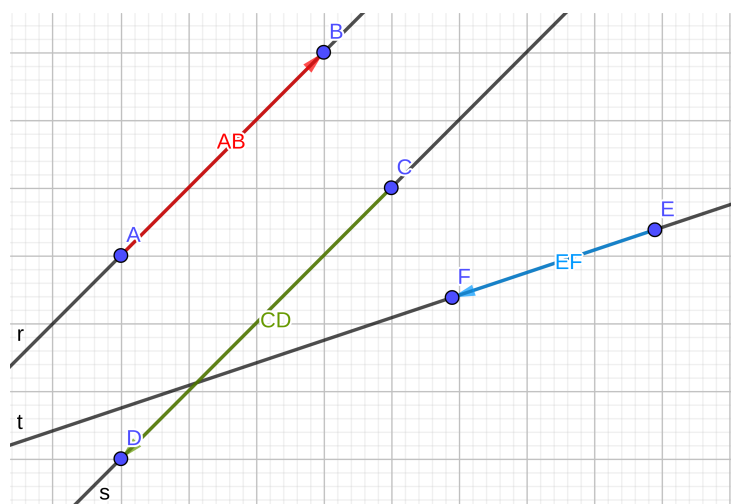


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

1.5). Assim sendo, dizemos que os segmentos  $AB$  e  $CD$  têm **mesmo sentido** quando os pontos  $B$  e  $D$  estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais



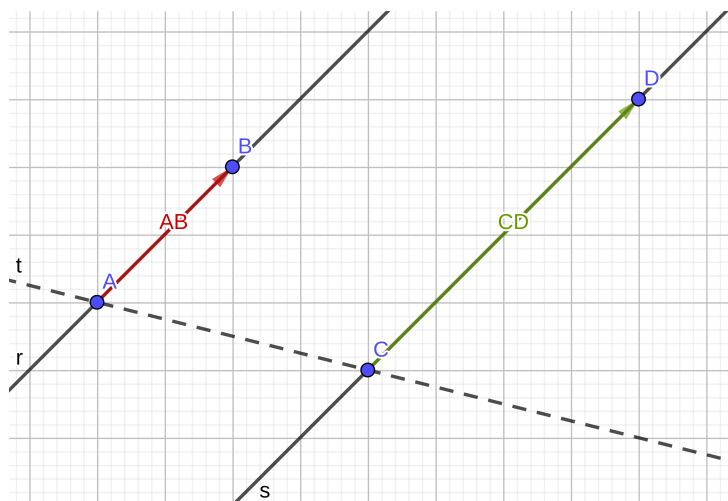


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6. Segmentos nulos também são considerados equipolentes entre si. Quando  $AB$  é equipolente a  $CD$ , escrevemos  $AB \sim CD$ .

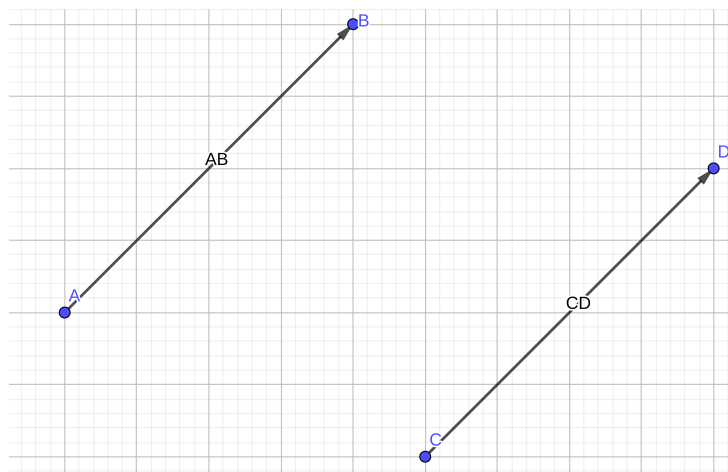


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  equipolentes.

A relação de equipolência é uma **relação de equivalência**. De fato, temos:

- **relação reflexiva:**  $AB \sim AB$ ;
- **relação simétrica:**  $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$ ;
- **relação transitiva:**  $AB \sim CD$  e  $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ .

Com isso, dado um segmento  $AB$ , definimos a **classe de equipolência** de  $AB$  como o conjunto de todos os segmentos equipolentes a  $AB$ . O segmento  $AB$  é um **representante** desta classe.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Mostre que dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de  $AD$  e  $BC$  são coincidentes.

**Solução.** Começamos mostrando a implicação. Por hipótese, temos que  $AB$  e  $CD$  são equipolentes. A tese é clara no caso de  $AB$  e  $CD$  serem coincidentes. Vejamos, então, o caso em que  $AB$  e  $CD$  não são coincidentes. Desta forma,  $ABCD$  determina um paralelogramo de diagonais  $AD$  e  $BC$ . Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios, temos demonstrado a implicação.

Agora, mostramos a recíproca. Por hipótese, temos que os pontos médios de  $AD$  e  $BC$  são coincidentes. Novamente, se  $AD$  e  $BC$  são coincidentes a conclusão é direta. Consideremos o caso em que  $AD$  e  $BC$  não são coincidentes. Daí, segue que  $AB$  e  $CD$  têm o mesmo tamanho e mesma direção. Seja  $M$  o ponto médio de  $AD$  e  $BC$  e  $\pi$  o plano determinado pelos segmentos  $AB$  e  $CD$ . Notando que  $M$ ,  $B$  e  $D$  estão no mesmo semiplano de  $\pi$  determinado pela reta  $AC$ , concluímos que  $AB$  e  $CD$  são equipolentes.

◇

**ER 1.1.2.** Mostre que  $AB \sim CD$ , então  $BA \sim DC$ .

**Solução.**  $AB$  e  $BA$  têm o mesmo tamanho e direção.  $CD$  e  $DC$  têm o mesmo tamanho e direção. Como  $AB \sim CD$ , temos que  $BA$  e  $DC$  têm o mesmo tamanho e direção. Por fim, observa-se que  $BA$  e  $DC$  têm ambos o mesmo sentido oposto de  $AB$  e  $DC$ .

◇

## Exercícios

**E 1.1.1.** Faça o esboço de dois segmentos  $AB$  e  $CD$  com  $|AB| \neq |CD|$  e cujas retas determinadas por eles sejam coincidentes.

**E 1.1.2.** Faça o esboço de dois segmentos orientados  $AB \not\sim CD$  e de mesmo sentido.

**E 1.1.3.** Faça o esboço de dois segmentos orientados colineares, de tamanhos iguais e sentidos opostos.

**E 1.1.4.** Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: é quadrado todo trapézio retângulo  $ABCD$  com segmentos orientados  $AD$  e  $BC$  equipolentes. Justifique sua afirmação.

**E 1.1.5.** Mostre que  $AB \sim CD$ , então  $AC \sim BD$ .

**E 1.1.6.** Mostre que se  $AC \sim CB$ , então  $C$  é ponto médio do segmento  $AB$ .

## 1.2 Vetores

Dado um segmento orientado  $AB$ , chama-se **vetor**  $AB$  e denota-se  $\overrightarrow{AB}$ , qualquer segmento orientado equipolente a  $AB$ . Em outras palavras, o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é a classe de equipolência que tem o segmento orientado  $AB$  como um representante. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor  $\overrightarrow{AB}$ .

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

O **vetor nulo** é aquele que tem como seu representante um segmento orientado nulo. É denotado por  $\vec{0}$ .

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor  $\vec{v}$  é denotado(a) por  $|\vec{v}|$  e é definido como o valor do comprimento de qualquer uma de suas representações. Mais precisamente, se  $\overrightarrow{AB}$  é uma representação de  $\vec{v}$ , então  $|\vec{v}| := |\overrightarrow{AB}|$ .

**Observação 1.2.1.**  $|\vec{v}| = 0$  se, e somente se,  $\vec{v} = \vec{0}$ .

Seja  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . Lembrando que  $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ , i.e. a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , segue que se  $\vec{v} = \vec{0}$ , então  $A$  e  $B$  são dois pontos sobrepostos e,

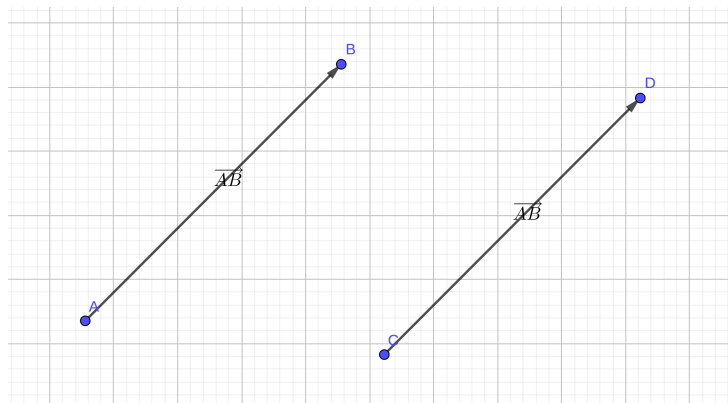


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

portanto,  $|\vec{v}| = |AB| = 0$ . Reciprocamente, se  $|AB| = 0$ , então  $A$  e  $B$  são sobrepostos e  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

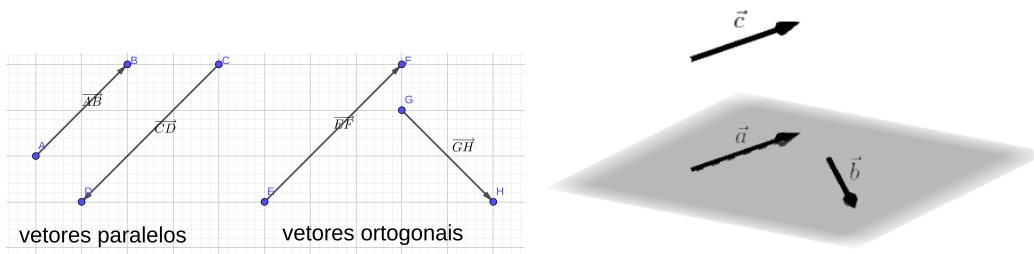


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

## 1.2.1 Adição de vetores

► Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Sejam, ainda, uma representação  $\overrightarrow{AB}$  de  $\vec{u}$  e uma representação  $\overrightarrow{BC}$  do vetor  $\vec{v}$ . Então, define-se o vetor soma  $\vec{u} + \vec{v}$  como o vetor representado por  $\overrightarrow{AC}$ . Veja a Figura 1.9.

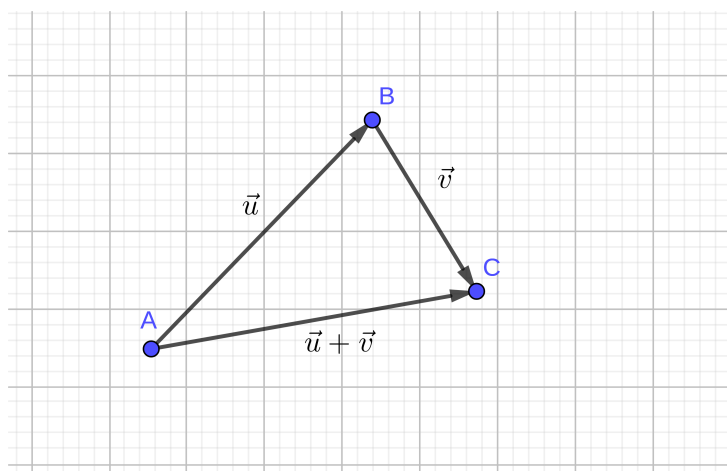


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

**Observação 1.2.2.** Vejamos as seguintes propriedades:

a) Elemento neutro na adição:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad (1.1)$$

De fato, seja  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Observamos que podemos representar  $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$ . Logo, temos  $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

b) Associatividade na adição:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \quad (1.2)$$

De fato, sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$ . Então, segue

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \quad (1.3)$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \quad (1.4)$$

$$= \overrightarrow{AD}, \quad (1.5)$$

bem como,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \quad (1.6)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \quad (1.7)$$

$$= \overrightarrow{AD}. \quad (1.8)$$

c) Comutatividade da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.9)$$

Esta propriedade pode ser demonstrada usando a regra do paralelogramo que veremos mais adiante. Veja, também, o Exercício Resolvido 1.2.1.

### 1.2.2 Vetor oposto

► Vídeo disponível!

Um **vetor**  $\vec{v}$  é dito ser **oposto** a um dado vetor  $\vec{u}$ , quando quaisquer representações de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por  $-\vec{u}$  o vetor oposto a  $\vec{u}$ . Veja a Figura 1.10.

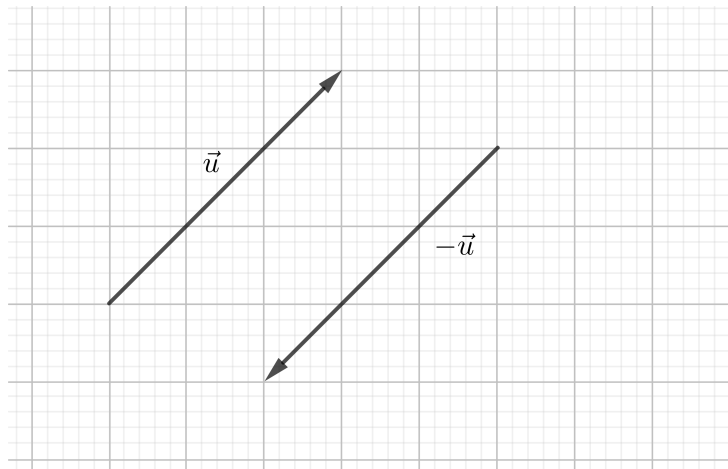


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

**Observação 1.2.3.**  $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$ .

De fato, seja  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . Então,  $|\vec{v}| = |AB| = |BA| = |-\vec{v}|$ .

**Observação 1.2.4.** (Existência do oposto)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \quad (1.10)$$

De fato, seja  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Então,  $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Segue que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) \quad (1.11)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \quad (1.12)$$

$$= \overrightarrow{AA} \quad (1.13)$$

$$= \vec{0}. \quad (1.14)$$

### 1.2.3 Subtração de vetores

► Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . A subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é denotada por  $\vec{u} - \vec{v}$  e é definida pela adição de  $\vec{u}$  com  $-\vec{v}$ , i.e.  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ . Veja a Figura 1.11.

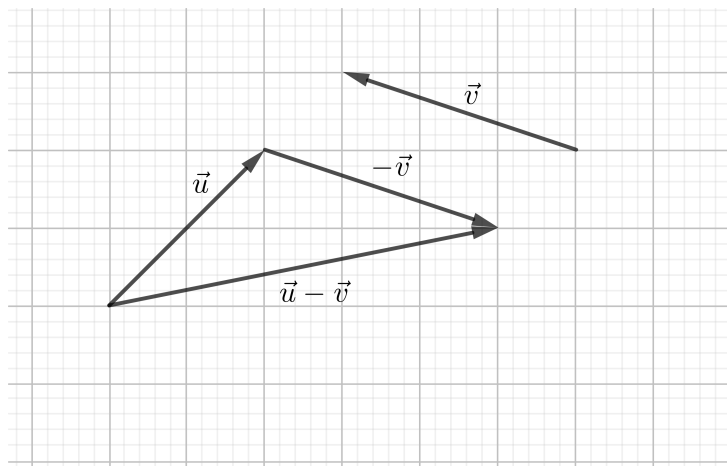


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$ , i.e.  $\vec{u} - \vec{v}$ .

**Observação 1.2.5.** (Regra do paralelogramo)

► Vídeo disponível!

Sejam vetores não nulos  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ . Seja, ainda,  $C$  o vértice oposto ao  $A$  no paralelogramo determinado pelos lados formados pelos segmentos  $AB$  e  $AD$ . Então, temos  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$  e  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$ . Veja a Figura 1.12.

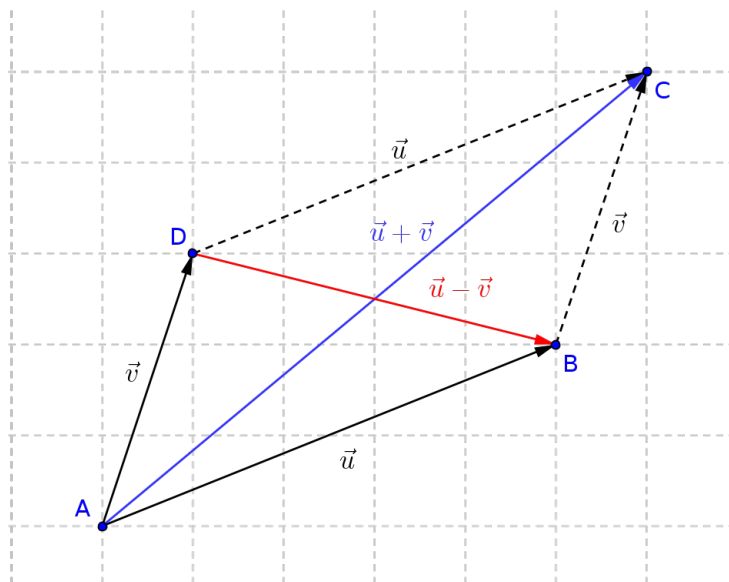


Figura 1.12: Regra do paralelogramo para a apresentação geométrica da soma e da diferença de vetores.

### 1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

► Vídeo disponível!

A multiplicação de um número real  $\alpha > 0$  (escalar) por um vetor  $\vec{u}$  é denotado por  $\alpha\vec{u}$  e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de  $\vec{u}$  com norma  $\alpha|\vec{u}|$ . Quando  $\alpha = 0$ , define-se  $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ , i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

**Observação 1.2.6.** • Para  $\alpha < 0$ , temos  $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$ .

•  $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$ .

**Observação 1.2.7.** As seguintes propriedades são válidas:



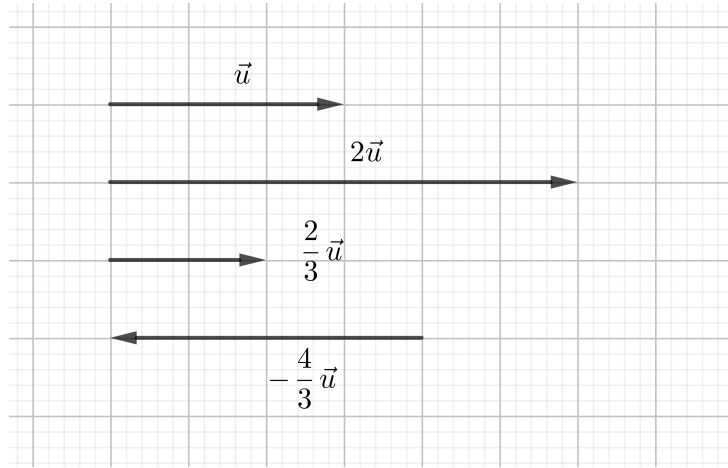


Figura 1.13: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

a) Associatividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u} \quad (1.15)$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que  $\alpha (\beta \vec{u})$  e  $(\alpha\beta) \vec{u}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido. Por fim, temos

$$|\alpha (\beta \vec{u})| = |\alpha| |\beta \vec{u}| \quad (1.16)$$

$$= |\alpha| (|\beta| |\vec{u}|) \quad (1.17)$$

$$= (|\alpha| |\beta|) |\vec{u}| \quad (1.18)$$

$$= |\alpha\beta| |\vec{u}| \quad (1.19)$$

$$= |(\alpha\beta) \vec{u}|. \quad (1.20)$$

b) Distributividade:

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \quad (1.21)$$

$$\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \quad (1.22)$$

### 1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e quaisquer escalares  $\alpha$

e  $\beta$  temos:

- comutatividade da adição:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ;
- associatividade da adição:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ ;
- elemento neutro da adição:  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ;
- existência do oposto:  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ ;
- associatividade da multiplicação por escalar:  $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ ;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad (1.23)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.24)$$

- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar:  $1\vec{u} = \vec{u}$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Mostre que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

**Solução.** Seja  $ABCD$  o paralelogramo com  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Logo, pela regra do paralelogramo temos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (1.25)$$

$$= \overrightarrow{AC} \quad (1.26)$$

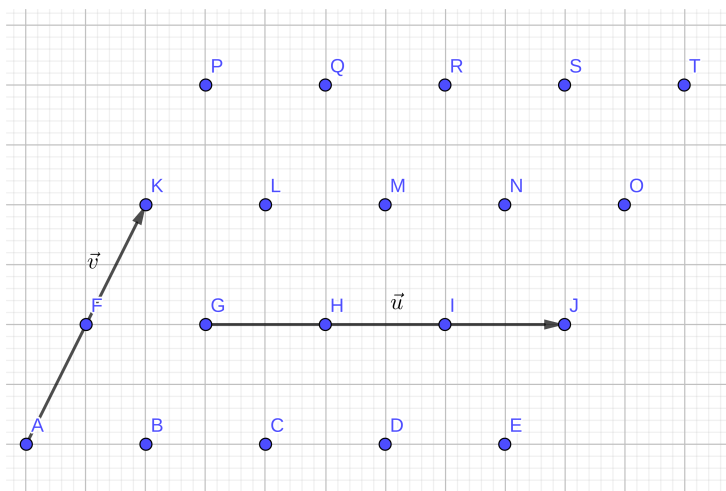
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad (1.27)$$

$$= \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.28)$$

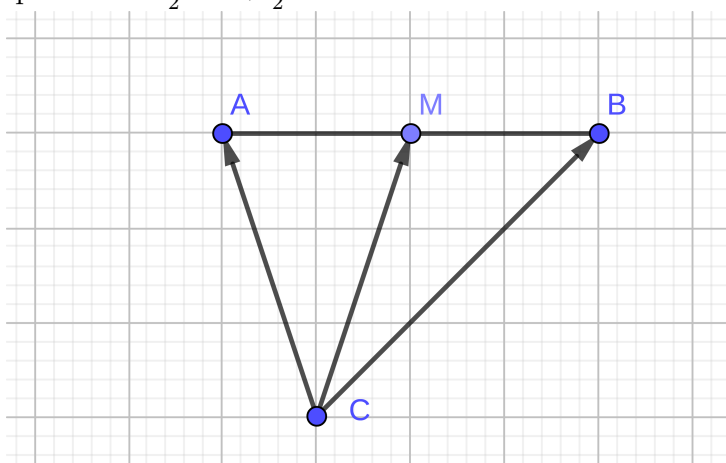
◇

## Exercícios

**E 1.2.1.** Na figura abaixo, temos  $\vec{u} = \overrightarrow{GJ}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$ . Assim sendo, escreva os vetores  $\overrightarrow{RS}$ ,  $\overrightarrow{NI}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{NQ}$ ,  $\overrightarrow{AT}$  e  $\overrightarrow{PE}$  em função de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .



**E 1.2.2.** Sejam  $\vec{CA}$ ,  $\vec{CM}$  e  $\vec{CB}$  os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que  $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$ .



**E 1.2.3.** Seja dado um vetor  $\vec{u} \neq 0$ . Calcule a norma do vetor  $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$ <sup>1</sup>.

**E 1.2.4.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

1.  $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$
2.  $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

<sup>1</sup> $\vec{u}/|\vec{u}|$  é chamado de vetor  $\vec{u}$  normalizado, ou a normalização do vetor  $\vec{u}$ .

# Capítulo 2

## Bases e coordenadas

**Observação 2.0.1.** Neste capítulo, vamos computar a solução de alguns problemas usando `Python`. Para tanto, utilizaremos a biblioteca de matemática simbólica `SymPy`.

Nos códigos `Python` apresentados ao longo deste capítulo, assumiremos que os seguintes comandos já estejam executados:

```
from sympy import *
```

### 2.1 Dependência linear

#### 2.1.1 Combinação linear

Dados vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  e números reais  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , com  $n$  inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n \quad (2.1)$$

uma **combinação linear** de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ . Neste caso, também dizemos que  $\vec{u}$  é **gerado** pelos vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor  $\vec{u}$ .

**Exemplo 2.1.1.** Sejam dados os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{z}$ . Então, temos:

- a)  $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{v} + \sqrt{2}\vec{z}$  é uma combinação linear dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{z}$ .
- b)  $\vec{u}_2 = \vec{v} - 2\vec{z}$  é uma outra combinação linear dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{z}$ .

c)  $\vec{u}_3 = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$  é uma combinação linear dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{z}$ .

d)  $\vec{u}_4 = \frac{3}{2}\vec{z}$  é uma combinação linear do vetor  $\vec{z}$ .

**Observação 2.1.1.** (Interpretação geométrica)

a) Uma combinação linear não nula envolvendo um único vetor  $\vec{u}$  é um vetor paralelo a  $\vec{u}$ . De fato, seja

$$\vec{v} = c\vec{u}, \quad c \neq 0, \quad (2.2)$$

i.e.  $\vec{v}$  é combinação linear não nula de  $\vec{u}$ . Então,  $\vec{v}$  tem a mesma direção de  $\vec{u}$ .

b) Uma combinação linear não nula envolvendo dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é coplanar a estes vetores. De fato, seja

$$\vec{w} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}, \quad c_1 \cdot c_2 \neq 0, \quad (2.3)$$

e  $\pi$  o plano determinado pelas representações de  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Logo, seguindo a regra do paralelogramo, vemos que  $\vec{w}$  tem uma representação no plano determinado pelos segmentos  $AB$  e  $AC$ .

## 2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

**Exemplo 2.1.2.** No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

a)  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  dependem linearmente dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{z}$ .

b)  $\vec{u}_3$  depende linearmente dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{z}$ .

c) Os vetores  $\vec{u}_4$  e  $\vec{z}$  são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

### 2.1.3 Observações

#### Dois vetores

Dois vetores quaisquer  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

a) um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta \vec{u}; \quad (2.4)$$

b)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm a mesma direção;

c)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos.

De fato, a afirmação a) é a definição de dependência linear. A b) é consequência imediata da a), bem como a c) é equivalente a b). Por fim, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores paralelos, então um é múltiplo por escalar do outro. Ou seja, c) implica a).

**Observação 2.1.2.** O vetor nulo  $\vec{0}$  é l.d. a qualquer vetor  $\vec{u}$ . De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \quad (2.5)$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor  $\vec{u}$ .

**Observação 2.1.3.** Dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.6)$$

De fato, se  $\alpha \neq 0$ , então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}, \quad (2.7)$$

i.e. o vetor  $\vec{u}$  é combinação linear do vetor  $\vec{v}$  e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se  $\beta \neq 0$ , então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{u} \quad (2.8)$$

e, então, teríamos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  l.d..

## Três vetores

Três vetores quaisquer  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \quad (2.9)$$

**Afirmamos que se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d., então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.**

Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são não nulos e seja  $\pi$  o plano determinado pelos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Se  $\alpha = 0$ , então  $\vec{u} = \beta\vec{w}$  e teríamos uma representação de  $\vec{u}$  no plano  $\pi$ . Analogamente, se  $\beta = 0$ , então  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$  e teríamos uma representação de  $\vec{u}$  no plano  $\pi$ . Por fim, observamos que se  $\alpha, \beta \neq 0$ , então  $\alpha\vec{v}$  tem a mesma direção de  $\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$  tem a mesma direção de  $\vec{w}$ . Isto é,  $\alpha\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$  admitem representações no plano  $\pi$ . Sejam  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  representações dos vetores  $\alpha\vec{v}$  e  $\beta\vec{w}$ , respectivamente. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a  $\pi$ , assim como o segmento  $AC$ . Como  $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ , concluímos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.

Reciprocamente, **se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares, então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..**

De fato, se um deles for nulo, por exemplo,  $\vec{u} = \vec{0}$ , então  $\vec{u}$  pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.10)$$

Neste caso,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.11)$$

E, então,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Agora, suponhamos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então  $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$  e  $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$  representações sobre um plano  $\pi$ . Sejam  $r$  e  $s$  as retas determinadas por  $PA$  e  $PC$ , respectivamente. Seja, então,  $D$  o ponto de interseção da reta  $s$  com a reta paralela a  $r$  que passa pelo ponto  $B$ . Seja, também,  $E$  o ponto de interseção da reta  $r$  com a reta paralela a  $s$  que passa pelo ponto  $B$ . Sejam, então,  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$  e  $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$ . Como  $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ , temos que  $\vec{v}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , i.e.  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

**Observação 2.1.4.** Três vetores dados  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \quad (2.12)$$

De fato, sem perda de generalidade, se  $\alpha \neq 0$ , podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \quad (2.13)$$

e teríamos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores l.d..

### Quatro ou mais vetores

**Quatro ou mais vetores são sempre l.d..** De fato, sejam dados quatro vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ . Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda,  $\pi$  o plano determinado pelos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e as representações  $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$  e  $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$ .

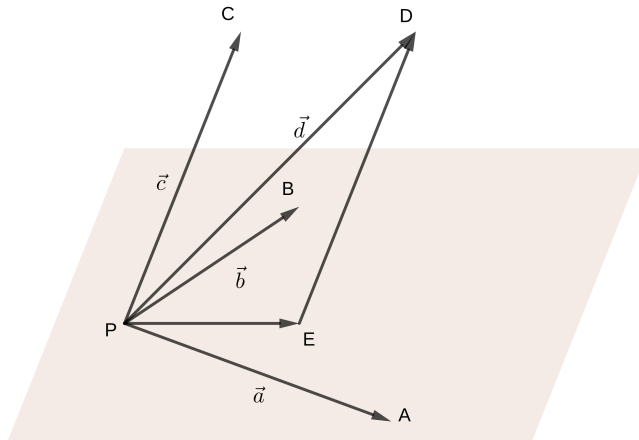


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta  $r$  paralela a  $\overrightarrow{PC}$  que passa pelo ponto  $D$ . Então, seja  $E$  o ponto de interseção de  $r$  com o plano  $\pi$ . Vejamos a Figura 2.1. Observamos



que o vetor  $\overrightarrow{PE}$  é coplanar aos vetores  $\overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{PB}$  e, portanto, existem números reais  $\alpha$  e  $\beta$  tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}. \quad (2.14)$$

Além disso, como  $\overrightarrow{ED}$  tem a mesma direção e sentido de  $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ , temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma \overrightarrow{PC} \quad (2.15)$$

para algum número real  $\gamma$ . Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \end{aligned}$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (2.16)$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}, \quad (2.17)$$

então  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.d.?

**Solução.** Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.18)$$

Observemos que

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (2\alpha + \beta)\vec{u} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{v} \quad (2.19)$$

$$= \vec{0} \quad (2.20)$$

implica

$$2\alpha + \beta = 0 \quad (2.21)$$

$$-3\alpha + 2\beta = 0 \quad (2.22)$$

Resolvendo este sistema, vemos que  $\alpha = \beta = 0$ . Logo, concluímos que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i..

◇

**ER 2.1.2.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  três vetores. Verifique a seguinte afirmação de que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d.. Justifique sua resposta.

**Solução.** A afirmação é verdadeira. De fato, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então existe um escalar  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}. \quad (2.23)$$

Segue que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.24)$$

Isto é,  $\vec{u}$  é combinação linear de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Então, por definição,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

◇

**ER 2.1.3.** Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Mostre que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d..

**Solução.** Primeiramente, vamos verificar a implicação. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, então os segmentos  $AB$  e  $AC$  têm a mesma direção. Logo, são l.d. os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

Agora, verificamos a recíproca. Se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  são l.d., então os segmentos  $AB$  e  $AC$  têm a mesma direção. Como eles são concorrentes, segue que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares.

◇

## Exercícios

**E 2.1.1.** Sendo  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ , mostre que  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  e  $\overrightarrow{PC}$  são l.d. para qualquer ponto  $P$ .

**E 2.1.2.** Sejam dados três vetores quaisquer  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . Mostre que os vetores  $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$  e  $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$  são l.d..

**E 2.1.3.** Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ . Mostre que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares se, e somente se,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.d..

**E 2.1.4.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}, \quad (2.25)$$

$$\vec{b} = 2\vec{v} - 4\vec{u}, \quad (2.26)$$

então  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são l.i.? Justifique sua resposta.

**E 2.1.5.** Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a)  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  l.d.  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  l.d..

b)  $\vec{u}, \vec{0}, \vec{w}$  são l.d..

c)  $\vec{u}, \vec{v}$  l.i.  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  l.i..

d)  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  l.d.  $\Rightarrow -\vec{u}, 2\vec{v}, -3\vec{w}$  l.d..

## 2.2 Bases e coordenadas

Seja  $V$  o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Subseção 2.1.2, se  $\vec{a}, \vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i., então qualquer vetor  $\vec{u} \in V$  pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.27)$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de  $V$  é uma sequência de três vetores l.i. de  $V$ .

Seja  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma dada base de  $V$ . Então, dado qualquer  $\vec{v} \in V$ , existe um único terno de números reais  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  tais que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.28)$$

De fato, a existência de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  segue imediatamente do fato de que  $\vec{a}, \vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i. e, portanto,  $\vec{v}$  pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , tomamos  $\alpha', \beta'$  e  $\gamma'$  tais que

$$\vec{v} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}. \quad (2.29)$$

Subtraindo (2.29) de (2.28), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}. \quad (2.30)$$

Como  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i., segue que<sup>1</sup>

$$\alpha - \alpha' = 0, \beta - \beta' = 0, \gamma - \gamma' = 0, \quad (2.31)$$

i.e.  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  e  $\gamma = \gamma'$ .

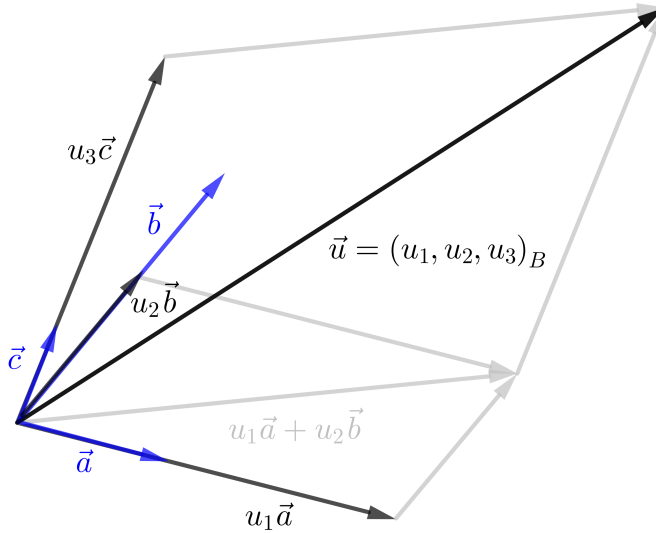


Figura 2.2: Representação de um vetor  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  em uma dada base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

Com isso, fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , cada vetor  $\vec{u}$  é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.32)$$

onde  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do  $\vec{u}$  na base  $B$ . Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \quad (2.33)$$

para expressar o vetor  $\vec{u}$  nas suas coordenadas na base  $B$ . Vejamos a Figura 2.2.

<sup>1</sup>Lembre-se da Observação 2.1.4.

**Exemplo 2.2.1.** Fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , o vetor  $\vec{u}$  de coordenadas  $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)$  é o vetor  $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ .

## 2.2.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operações são definidas a partir das coordenadas de vetores.

Sejam  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma base de  $V$  e os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$ . Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.34)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \quad (2.35)$$

Então, a **adição** de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \quad (2.36)$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \quad (2.37)$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \quad (2.38)$$

**Exemplo 2.2.2.** Fixada uma base qualquer  $B$  e dados os vetores  $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$  e  $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$ , temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1, 3, -8)_B. \quad (2.39)$$

Podemos usar o **SymPy** para manipularmos vetores em coordenadas. Para computarmos a soma neste exemplo, podemos usar os seguintes comandos<sup>2</sup>:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u+v
```

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor  $\vec{u}$  é

$$-\vec{u} = -\underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.40)$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \quad (2.41)$$

---

<sup>2</sup>Veja a Observação 2.0.1.

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \quad (2.42)$$

**Exemplo 2.2.3.** Fixada uma base qualquer  $B$  e dado o vetor  $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$ , temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B. \quad (2.43)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar o oposto do vetor  $\vec{v}$  com os seguintes comandos:<sup>3</sup>:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
-v
```

Lembrando que **subtração** de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é  $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$ , segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \quad (2.44)$$

**Exemplo 2.2.4.** Fixada uma base qualquer  $B$  e dados os vetores  $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$  e  $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$ , temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5, 2)_B. \quad (2.45)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar  $\vec{u} - \vec{v}$  com os seguintes comandos:<sup>4</sup>:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u-v
```

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número**  $\alpha$  pelo **vetor**  $\vec{u}$ . Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \quad (2.46)$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \quad (2.47)$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \quad (2.48)$$

---

<sup>3</sup>Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

<sup>4</sup>Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

**Exemplo 2.2.5.** Fixada uma base qualquer  $B$  e dado o vetor  $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$ , temos

$$\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \quad (2.49)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar o oposto do vetor  $\frac{1}{3}\vec{v}$  com os seguintes comandos:<sup>5</sup>:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
1/3*v
```

## 2.2.2 Dependência linear

### Dois vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que dois vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real  $\alpha$  tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}, \quad (2.50)$$

sem perda de generalidade<sup>6</sup>.

Fixada uma base  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , temos  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$ . Com isso, a equação (2.50) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \quad (2.51)$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1, u_2 = \alpha v_2, u_3 = \alpha v_3. \quad (2.52)$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

**Exemplo 2.2.6.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\vec{u} = (2, -1, -3)$  e  $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$  são l.d., pois

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{2}, -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), -3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right). \quad (2.53)$$

b)  $\vec{u} = (2, -1, -3)$  e  $\vec{v} = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$  são l.i., pois  $u_1 = 1 \cdot v_1$ , enquanto  $u_2 = 2v_2$ .

<sup>5</sup>Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

<sup>6</sup>Formalmente, pode ocorrer  $\vec{v} = \beta\vec{u}$ .

## Três vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \quad (2.54)$$

Seja, então,  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma base de  $V$ . Então, temos que a equação

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (2.55)$$

é equivalente a

$$\alpha(u_1, u_2, u_3)_B + \beta(v_1, v_2, v_3)_B + \gamma(w_1, w_2, w_3)_B = (0, 0, 0)_B. \quad (2.56)$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.58)$$

**Exemplo 2.2.7.** Fixada uma base  $B$  de  $V$ , sejam os vetores  $\vec{u} = (2, 1, -3)_B$ ,  $\vec{v} = (1, -1, 2)_B$  e  $\vec{w} = (-2, 1, 1)_B$ . Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.59)$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \quad (2.60)$$

## Exercícios

Em construção ...



## 2.3 Mudança de base

Sejam  $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$  e  $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$  bases do espaço  $V$ . Conhecendo as coordenadas de um vetor na base  $C$ , queremos determinar suas coordenadas na base  $B$ . Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C = z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \quad (2.61)$$

Agora, tendo  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$ ,  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$  e  $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$ , então

$$(z_1, z_2, z_3)_C = z_1(r_1, r_2, r_3)_B + z_2(s_1, s_2, s_3)_B + z_3(t_1, t_2, t_3)_B \quad (2.62)$$

$$= \underbrace{(r_1 z_1 + s_1 z_2 + t_1 z_3)}_{z'_1} \vec{u} \quad (2.63)$$

$$+ \underbrace{(r_2 z_1 + s_2 z_2 + t_2 z_3)}_{z'_2} \vec{v} \quad (2.64)$$

$$+ \underbrace{(r_3 z_1 + s_3 z_2 + t_3 z_3)}_{z'_3} \vec{w} \quad (2.65)$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

onde  $\vec{z} = (z'_1, z'_2, z'_3)_B$ .

A matriz  $M_{CB}$  é chamada de matriz de mudança de base de  $C$  para  $B$ . Como os vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{s}$  e  $\vec{t}$  são l.i., temos que a matriz de mudança de base  $M_{BC}$  tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Além disso, observamos que

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \quad (2.67)$$

**Exemplo 2.3.1.** Sejam dadas as bases  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  e  $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , com  $\vec{u} = (1, 2, 0)_B$ ,  $\vec{v} = (2, 0, -1)_B$  e  $\vec{w} = (-1, -3, 1)_B$ . Seja, ainda, o vetor  $\vec{z} = (1, -2, 1)_B$ . Vamos encontrar as coordenadas de  $\vec{z}$  na base  $C$ .

Há duas formas de proceder. A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$\vec{z} = (-1, -3, 1)_B = (x, y, z)_C. \quad (2.68)$$

Esta é equivalente a

$$-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \quad (2.69)$$

$$= x(\vec{a} + 2\vec{b}) + y(2\vec{a} - \vec{c}) + z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.70)$$

$$= (x + 2y - z)\vec{a} + (2x - 3z)\vec{b} + (-y + z)\vec{c}. \quad (2.71)$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - 3z = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad (2.72)$$

Resolvendo este sistema, obtemos  $x = 6/5$ ,  $y = 4/5$  e  $z = 9/5$ , i.e.

$$\vec{z} = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)_C. \quad (2.73)$$

Outra maneira de se obter as coordenadas de  $\vec{z}$  na base  $C$  é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base  $C$  para a base  $B$  é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Então, a matriz de mudança da base  $B$  para a base  $C$  é  $M_{BC} = M^{-1}$ . Logo,  $(x, y, z)_C = M_{BC}(-1, -3, 1)_B$ .

## Exercícios

Em construção ...

## 2.4 Bases ortonormais

Uma **base**  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ .

**Observação 2.4.1.** (Teorema de Pitágoras) Se  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , então  $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ .

**Proposição 2.4.1.** Seja  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal e  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ . Então,  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ .

*Demonstração.* Temos  $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}|^2$ . Seja  $\pi$  um plano determinado por dadas representações de  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ . Como  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são ortogonais, temos que  $\vec{k}$  é ortogonal ao plano  $\pi$ . Além disso, o vetor  $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$  também admite uma representação em  $\pi$ , logo  $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$  é ortogonal a  $\vec{k}$ . Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.4.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \quad (2.75)$$

Analogamente, como  $\vec{i} \perp \vec{j}$ , do Teorema de Pitágoras segue

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 \quad (2.76)$$

$$= |u_1|^2|\vec{i}|^2 + |u_2|^2|\vec{j}|^2 + |u_3||\vec{k}|^2 \quad (2.77)$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (2.78)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado.  $\square$

**Exemplo 2.4.1.** Se  $\vec{u} = (-1, 2, -\sqrt{2})_B$  e  $B$  é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \quad (2.79)$$

## Exercícios

**E 2.4.1.** Seja  $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  uma base ortogonal, i.e.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que  $C = (\vec{a}/|\vec{a}|, \vec{b}/|\vec{b}|, \vec{c}/|\vec{c}|)$  é uma base ortonormal.

Em construção ...

# Capítulo 3

## Produto escalar

### 3.1 Produto escalar

Ao longo desta seção, assumiremos  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal no espaço. O **produto escalar** dos vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (3.1)$$

**Exemplo 3.1.1.** Se  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{v} = (-3, -4, 2)$ , então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 4. \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  e qualquer número real  $\alpha$ , temos:

- Comutatividade:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.3)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (3.4)$$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \quad (3.5)$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad (3.6)$$

- Distributividade com multiplicação por escalar:

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}). \quad (3.7)$$

Dem.:

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.8)$$

$$= (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 \quad (3.9)$$

$$= \alpha(u_1v_1) + \alpha(u_2v_2) + \alpha(u_3v_3) \quad (3.10)$$

$$= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (3.11)$$

$$= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) \quad (3.12)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3) \quad (3.13)$$

$$= \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}). \quad (3.14)$$

- Distributividade com a adição:  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .

Dem.:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)) \quad (3.15)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot [(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)] \quad (3.16)$$

$$= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \quad (3.17)$$

$$= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \quad (3.18)$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \quad (3.19)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (3.20)$$

- Sinal:  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$  e  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0. \quad (3.21)$$

Além disso, observamos que a soma de números não negativos é nula se, e somente se, os números forem zeros.

- Norma:  $|u|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ .

Dem.: Como fixamos uma base ortonormal  $B$ , a Proposição 2.4.1 nos garante que

$$|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}. \quad (3.22)$$

**Exemplo 3.1.2.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{w} = (1, 0, -1)$ . Vejamos os seguintes casos:

- Comutatividade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -1, \quad (3.23)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1. \quad (3.24)$$

- Distributividade com a multiplicação por escalar:

$$(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2, 4, 2) \cdot (2, -1, 3) = -4 - 4 + 6 = -2, \quad (3.25)$$

$$2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(-2 - 2 + 3) = -2, \quad (3.26)$$

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = (-1, 2, 1) \cdot (4, -2, 6) = -2. \quad (3.27)$$

- Distributividade com a adição:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-1, 2, 1) \cdot (3, -1, 2) = -3 - 2 + 2 = -3, \quad (3.28)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2 - 2 + 3) + (-1 + 0 - 1) = -3. \quad (3.29)$$

- Sinal:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = 1 + 0 + 1 = 2 \geq 0. \quad (3.30)$$

- Norma:

$$|\vec{u}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \quad (3.31)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6. \quad (3.32)$$

## Exercícios

Em construção ...

## 3.2 Ângulo entre dois vetores

O **ângulo formado entre dois vetores**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos, é definido como o menor ângulo determinado entre quaisquer representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

**Proposição 3.2.1.** *Dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , temos*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.33)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

*Demonstração.* Tomamos as representações  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ . Observamos que  $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$ . Então, aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $\triangle OAB$ , obtemos

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \alpha, \quad (3.34)$$

ou, equivalentemente,

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.35)$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.36)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.37)$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.38)$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha. \quad (3.39)$$

□

**Exemplo 3.2.1.** Vamos determinar ângulo entre os vetores  $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  e  $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ . Da Proposição 3.2.1, temos

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.41)$$

Portanto, temos  $\alpha = \pi/6$ .

**Observação 3.2.1.** O ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é:

- agudo se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ ;
- obtuso se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ .

Se  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , então:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$  se, e somente se,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### 3.2.1 Desigualdade triangular

Dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  temos

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \quad (3.42)$$

esta é conhecida como a **desigualdade triangular**. Para demonstrá-la, começamos observando que

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \quad (3.43)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (3.44)$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (3.45)$$

Agora, vamos estimar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Pela Proposição 3.2.1, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.46)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Mas, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha. \quad (3.47)$$

Daí, como  $|\cos \alpha| \leq 1$ , temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|, \quad (3.48)$$

a qual é chamada de **desigualdade de Cauchy-Schwarz**<sup>1</sup>.

## Exercícios

**E 3.2.1.** Verifique que (??) é equivalente a (3.1) no caso de bases ortonormais.

Em construção ...

---

<sup>1</sup>Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857, matemático francês. Fonte: [Wikipédia](#). Hermann Schwarz, 1843-1921, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).



### 3.3 Projeção ortogonal

Sejam dados os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ . Seja, ainda,  $P$  a interseção da reta perpendicular a  $OB$  que passa pelo ponto  $A$ . Observemos a Figura 3.1. Com isso, definimos a **projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$**  por  $\overrightarrow{OP}$ . Denotamos

$$\overrightarrow{OP} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}. \quad (3.49)$$

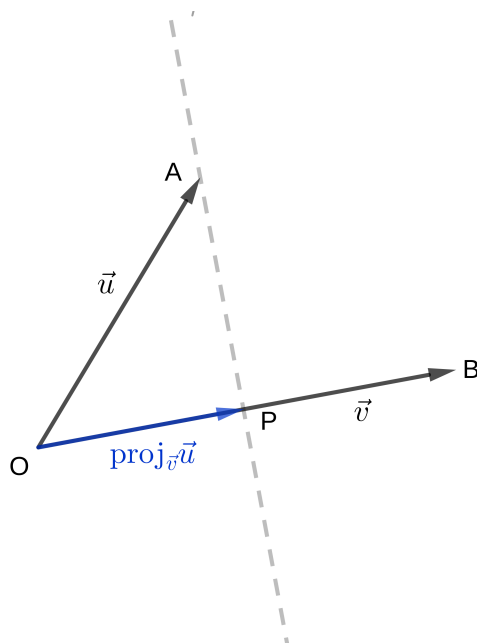


Figura 3.1: Ilustração da definição da projeção ortogonal.

Da definição, temos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \alpha \vec{v} \quad (3.50)$$

para algum número real  $\alpha$ . Além disso, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.51)$$

Portanto

$$\alpha \vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.52)$$

Tomando o produto escalar com  $\vec{v}$  em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (3.53)$$

pois  $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$ , uma vez que  $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$ . Daí, lembrando que  $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ , temos

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad (3.54)$$

e concluímos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (3.55)$$

**Exemplo 3.3.1.** Sejam  $\vec{u} = (-1, 1, -1)$  e  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ . Usando a equação (3.55), obtemos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (2, 1, -2)}{|(2, 1, -2)|^2} (2, 1, -2) \quad (3.56)$$

$$= \frac{-2 + 1 + 2}{4 + 1 + 4} (2, 1, -2) \quad (3.57)$$

$$= \left( \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{9} \right). \quad (3.58)$$

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

# Capítulo 4

## Produto vetorial

De agora em diante, vamos trabalhar com um base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dita com orientação positiva, i.e. os vetores  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  e  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  estão dispostos em sentido anti-horário, veja Figura 4.2.

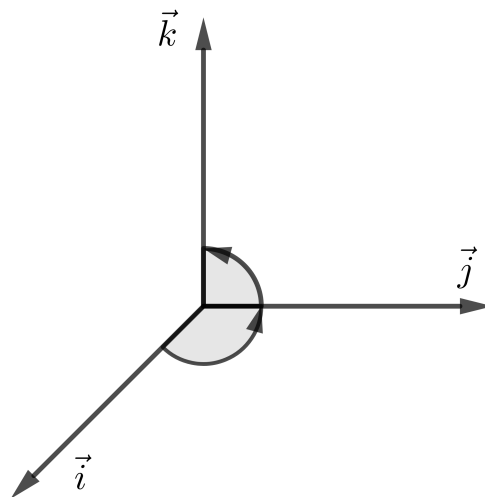


Figura 4.1: Base ortonormal positiva.

## 4.1 Definição

Dados vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , definimos o produto vetorial de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$ , denotado por  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , como o vetor:

- se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.d., então  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
- se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são l.i., então
  - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e
  - $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  formam uma base positiva.

### 4.1.1 Interpretação geométrica

Sejam dados  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  l.i.. Estes vetores determinam um paralelogramo, veja Figura ???. Seja, então,  $h$  a altura deste paralelogramo tendo  $\vec{u}$  como sua base. Logo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento da base com sua altura, neste caso

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha. \quad (4.1)$$

Ou seja, o produto vetorial  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  tem norma igual à área do paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

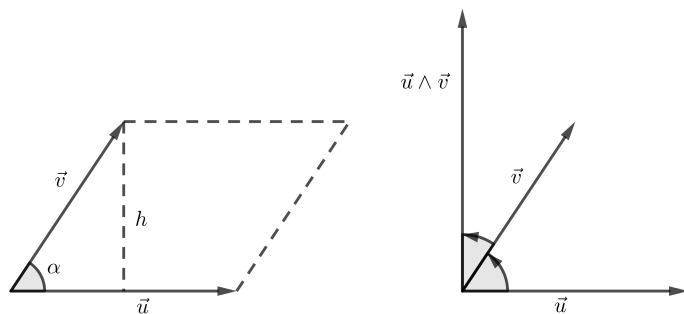


Figura 4.2: Base ortonormal positiva.

### 4.1.2 Produto vetorial via coordenadas

Dados  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  em uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (4.2)$$

**Observação 4.1.1.** Uma regra mnemônica, é

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

**Exemplo 4.1.1.** Dados os vetores  $\vec{u} = (1, -2, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 2, -1)$ , temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

$$= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad (4.6)$$

$$= (0, 1, 2). \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Exercícios

Em construção ...

## 4.2 Propriedades do produto vetorial

Nesta seção, discutiremos sobre algumas propriedades do produto vetorial. Para tanto, sejam dados os vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  e o número real  $\gamma$ .

Da definição do produto vetorial, temos  $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$  e  $\vec{v} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ , logo

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0. \quad (4.8)$$

Em relação à multiplicação por escalar, temos

$$\gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\gamma\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}). \quad (4.9)$$

De fato,

$$(\gamma\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \gamma u_1 & \gamma u_2 & \gamma u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}) \quad (4.11)$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}). \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

Também, vale a propriedade distributiva com a operação de soma, i.e.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (4.14)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (4.17)$$

Observamos que o produto vetorial não é comutativo, entretanto

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (4.18)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

$$= -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (4.21)$$

Também, o produto vetorial não é associativo sendo  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ , em geral, diferente de  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ . Com efeito, temos

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}, \quad (4.22)$$

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, suponhamos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são l.i. e seja  $\pi$  um plano determinado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Então,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  é ortogonal a  $\pi$ . Como  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  é ortogonal a  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  e a  $\vec{w}$ , temos que  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  também pertence a  $\pi$ . Logo,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  são l.d. e existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}. \quad (4.24)$$

Vamos determinar  $\alpha$  e  $\beta$ . Para tanto, consideremos uma base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tal que  $\vec{i} \parallel \vec{u}$  e  $\vec{j} \in \pi$ . Nesta base, temos

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) \quad (4.25)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, 0) \quad (4.26)$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3). \quad (4.27)$$

Também, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.28)$$

$$= (0, 0, u_1 v_2) \quad (4.29)$$

e

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & u_1 v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

$$= (-u_1 v_2 w_2, u_1 v_2 w_1, 0). \quad (4.31)$$

Daí, temos

$$\alpha(u_1, 0, 0) + \beta(v_1, v_2, 0) = (-u_1 v_2 w_2, u_1 v_2 w_1, 0), \quad (4.32)$$

donde

$$-u_1 v_2 w_2 = \alpha u_1 + \beta v_1, \quad (4.33)$$

$$u_1 w_1 v_2 = \beta v_2. \quad (4.34)$$

Resolvendo, obtemos

$$\alpha = -v_1 w_1 - v_2 w_2 = -\vec{v} \cdot \vec{w} \quad (4.35)$$

$$\beta = \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (4.36)$$

Portanto, temos

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}. \quad (4.37)$$

Usando a identidade acima, obtemos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} \quad (4.38)$$

$$= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} \quad (4.39)$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \quad (4.40)$$

## Exercícios

Em construção ...



# Capítulo 5

## Produto misto

Ao longo deste capítulo, assumiremos trabalhar com uma base ortonormal positiva  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 5.1 Definição

O **produto misto** de três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , nesta ordem, é definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}. \quad (5.1)$$

Em coordenadas, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (5.2)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{w} \quad (5.3)$$

$$= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} \right. \quad (5.4)$$

$$\left. + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) \quad (5.5)$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 \quad (5.6)$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

**Exemplo 5.1.1.** Dados os vetores  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, 2)$  e  $\vec{w} = (1, -1, 1)$ , temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Propriedades

Valem as seguintes propriedades:

- a)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$
- b)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$
- c)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$$\text{d) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$\text{e) } [\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$\text{f) } [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.4.** Verdadeira.

**E 1.1.5.** Dica:  $ABCD$  determina um paralelogramo.

**E 1.2.2.** Dica:  $M$  é o ponto médio do segmento orientado  $AB = CB - AC$ .

**E 1.2.3.**  $|\vec{v}| = 1$ .

**E 1.2.4.** a) verdadeira; b) verdadeira.

**E 2.1.1.** Dica: os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são l.d..

**E 2.1.2.** Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

**E 2.1.3.** Três vetores são l.d. se, e somente se, eles são coplanares.

**E 2.1.4.** Não.

**E 2.1.5.** a) falsa; b) verdadeira; c) falsa; d) verdadeira.

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Camargo and P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson, 3. edition, 2005.
- [2] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

# Índice Remissivo

- ângulo
  - entre vetores, [7](#)
- base, [22](#)
- comprimento, [1](#)
- coordenadas, [23](#)
- distância, [1](#)
- equipolentes, [4](#)
- extremidade, [2](#)
- módulo, [6](#)
- mesmo sentido, [3](#)
- norma, [6](#)
- origem, [2](#)
- segmento, [1](#)
- segmento nulo, [2](#)
- segmento orientado, [2](#)
- vetor
  - oposto, [9](#)
- vetores
  - coplanares, [7](#)
  - não coplanares, [7](#)
  - ortogonais, [7](#)
  - paralelos, [7](#)