

# Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

14 de março de 2019

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
<b>1 Vetores</b>	<b>1</b>
1.1 Segmentos orientados . . . . .	1
1.1.1 Exercícios . . . . .	5
1.2 Vetores . . . . .	5
1.2.1 Adição de vetores . . . . .	6
1.2.2 Vetor oposto . . . . .	7
1.2.3 Subtração de vetores . . . . .	7
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar . . . . .	7
1.2.5 Propriedades das operações com vetores . . . . .	8
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>10</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>11</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>12</b>

# Capítulo 1

## Vetores

### 1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ . O conjunto de todos os pontos de  $r$  entre  $A$  e  $B$  é chamado de **segmento**  $AB$ .

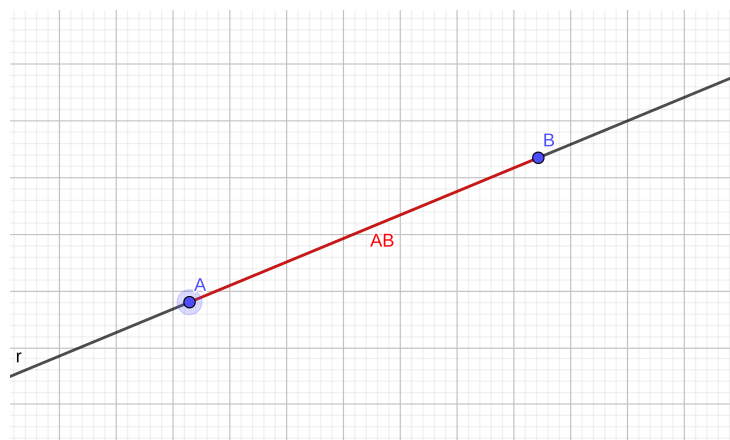


Figura 1.1: Esboço de um segmento  $AB$ .

Associado a um segmento  $AB$ , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos  $A$  e  $B$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é denotada por  $|AB|$  ou  $|BA|$ .

A **direção** de um segmento  $AB$  é a direção da reta que fica determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**Exemplo 1.1.1.** Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos  $AB$  e  $CD$  têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento  $EF$  tem direção diferente dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

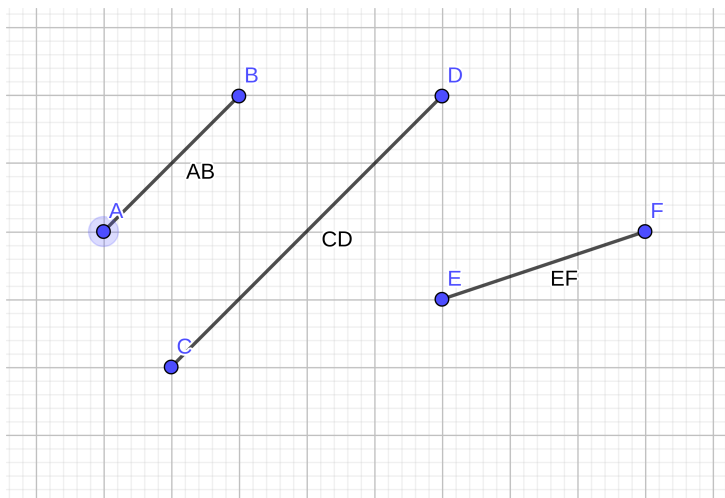


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se  $A$  e  $B$  são o mesmo ponto, então chamamos  $AB$  de **segmento nulo** e temos  $|AB| = 0$ . Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento  $AB$  é igual ao segmento  $BA$ . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado  $AB$  é o segmento definido pelos pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $A$  a origem e  $B$  a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos  $AB$  e  $CD$  têm a **mesma direção** quando as retas  $AB$  e  $CD$  forem paralelas ou coincidentes.

**Exemplo 1.1.2.** Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  têm a mesma direção. Já o segmento orientado  $EF$  tem direção diferente dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

Sejam dados dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  de mesma direção, cujas retas  $AB$  e  $CD$  não sejam coincidentes. Então, as retas  $AB$  e  $CD$  determinam um único plano e a reta  $AC$  determina dois semiplanos (veja a Figura

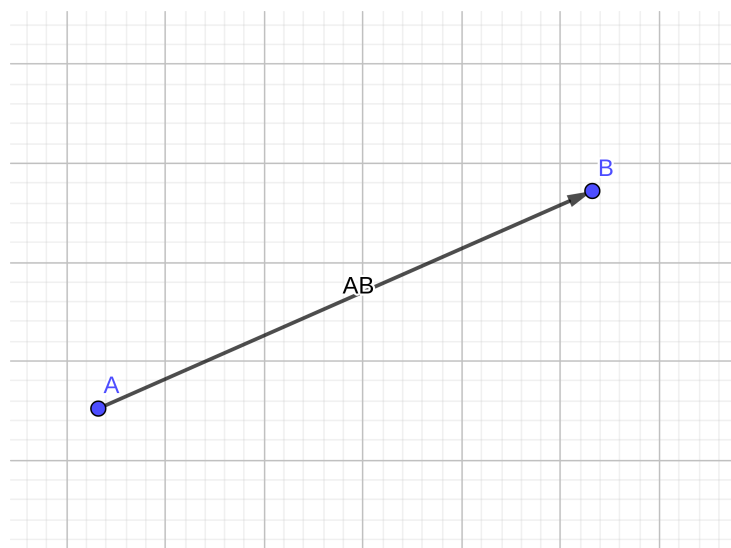


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado  $AB$ .

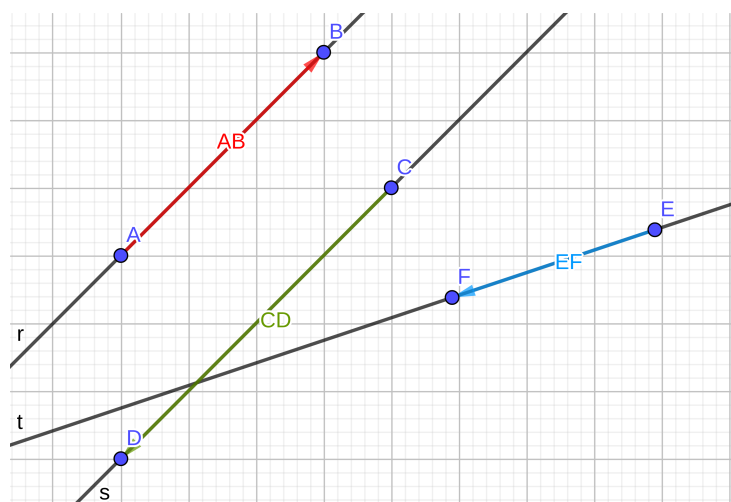


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

??). Assim sendo, dizemos que os segmentos  $AB$  e  $CD$  têm **mesmo sentido** quando os pontos  $B$  e  $D$  estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

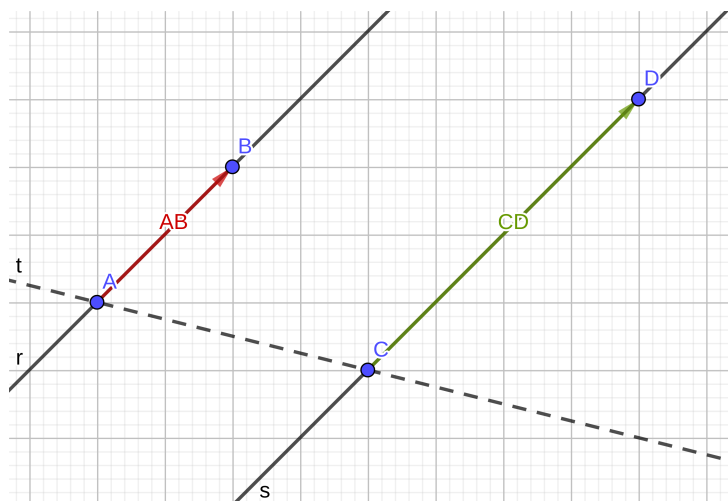


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

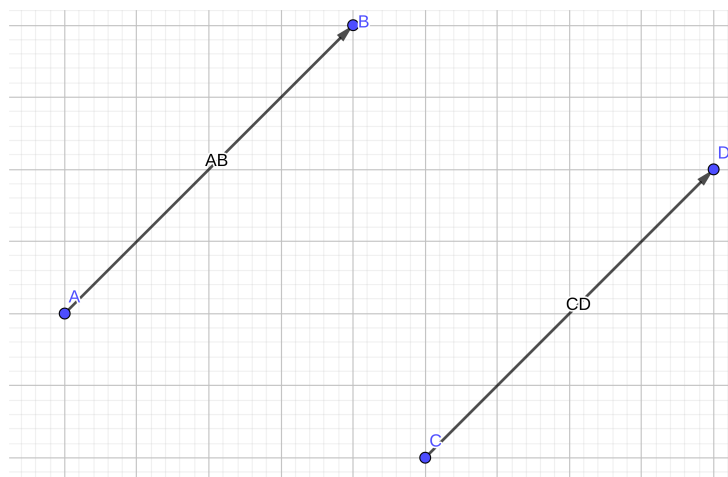


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  equipolentes.



### 1.1.1 Exercícios

**E 1.1.1.** Mostre que dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de  $AD$  e  $BC$  são coincidentes.

Em construção ...

## 1.2 Vetores

Dado um segmento orientado  $AB$ , chama-se **vetor**  $AB$  e denota-se  $\overrightarrow{AB}$ , qualquer segmento orientado equipolente a  $AB$ . Cada segmento orientado equipolente a  $AB$  é um representado de  $\overrightarrow{AB}$ . A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor  $\overrightarrow{AB}$ .

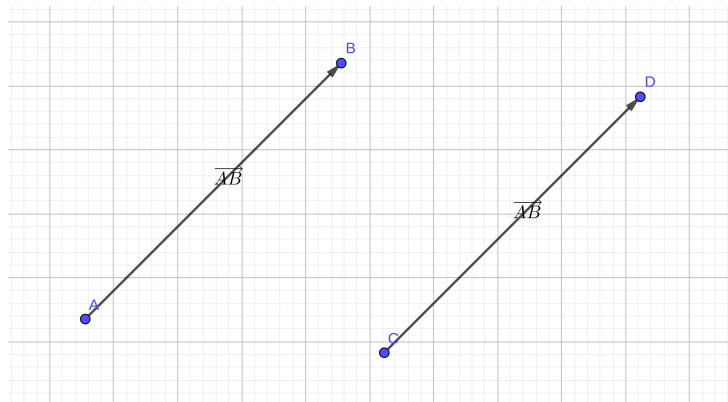


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor  $\overrightarrow{AB}$  é o valor de seu comprimento e é denotado por  $|\overrightarrow{AB}|$ .

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

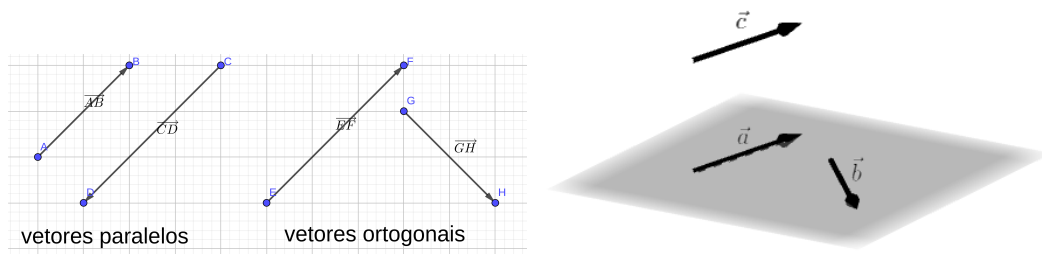


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

### 1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Sejam, ainda, uma representação  $\overrightarrow{AB}$  qualquer de  $u$  e a representação  $\overrightarrow{BC}$  do vetor  $\vec{v}$ . Então, define-se o vetor soma  $\vec{u} + \vec{v}$  como o vetor dado por  $\overrightarrow{AC}$ . Veja a Figura 1.9.

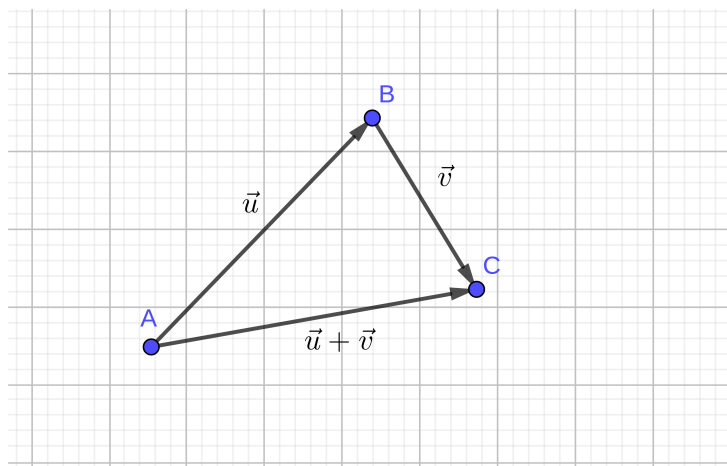


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

### 1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor**  $\vec{v}$  é dito ser **oposto** a um dado vetor  $\vec{u}$ , quando quaisquer representações de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por  $-\vec{u}$  o vetor oposto a  $\vec{u}$ . Veja a Figura 1.10.

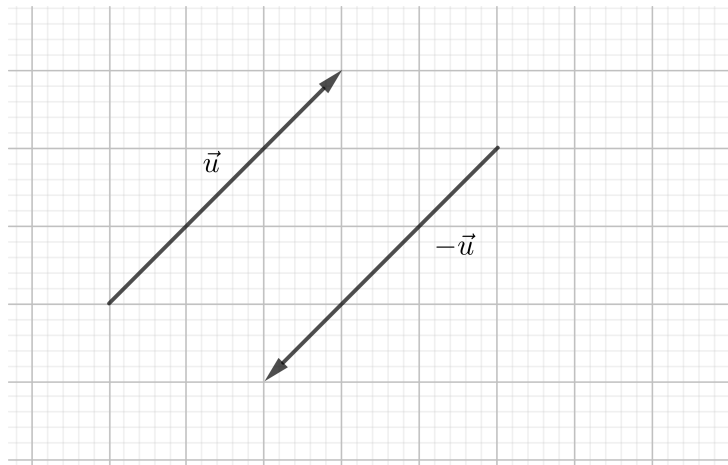


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

### 1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . A subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é denotada por  $\vec{u} - \vec{v}$  e é definida pela adição de  $\vec{u}$  com  $-\vec{v}$ , i.e.  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ . Veja a Figura 1.11.

### 1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real  $\alpha > 0$  (escalar) por um vetor  $\vec{u}$  é denotado por  $\alpha\vec{u}$  e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de  $\vec{u}$  com norma  $\alpha|\vec{u}|$ . Quando  $\alpha = 0$ , define-se  $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ , i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

**Observação 1.2.1.** • Para  $\alpha < 0$ , temos  $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$ .

- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$ .

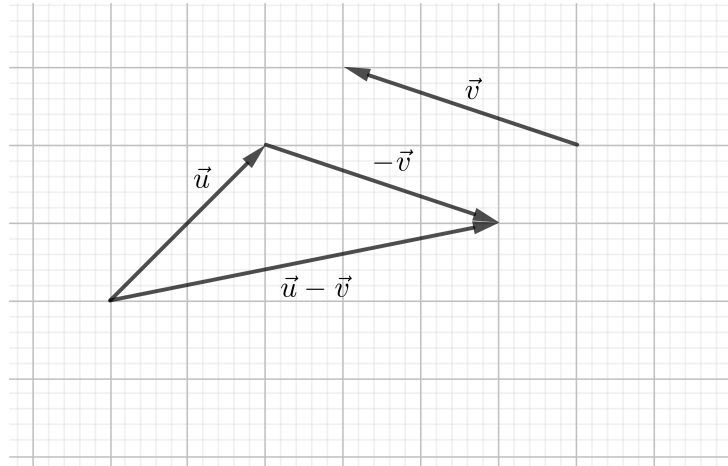


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$ , i.e.  $\vec{u} - \vec{v}$ .

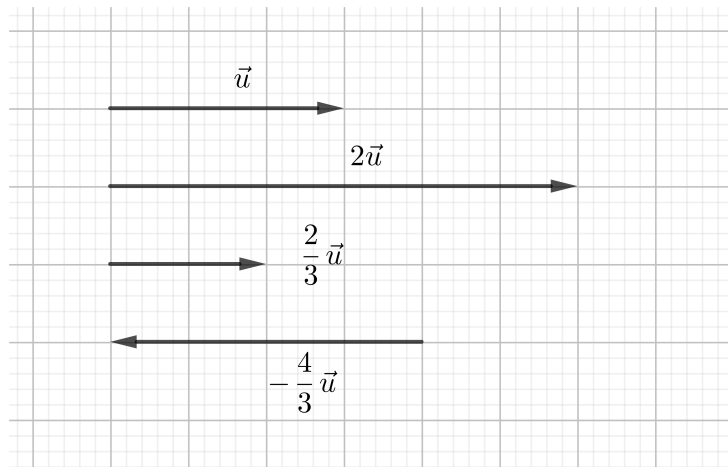


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

### 1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$  temos:

- comutatividade da adição:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ;

- associatividade da adição:  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ ;
- elemento neutro da adição:  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ;
- existência do oposto:  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ ;
- associatividade da multiplicação por escalar:  $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$ ;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad (1.1)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.2)$$

- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar:  $1\vec{u} = \vec{u}$ .

## Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.1.** Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

# Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

# Índice Remissivo

ângulo

entre vetores, 5

comprimento, 1

distância, 1

equipolentes, 4

extremidade, 2

módulo, 5

mesmo sentido, 3

norma, 5

origem, 2

segmento, 1

segmento nulo, 2

segmento orientado, 2

vetor

oposto, 7

vetores

coplanares, 5

não coplanares, 5

ortogonais, 5

paralelos, 5