

# Cálculo I

Pedro H A Konzen

18 de agosto de 2019

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre cálculo de funções de uma variável.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	vi
<b>1 Fundamentos sobre funções</b>	<b>1</b>
1.1 Definição e gráfico de funções	1
1.1.1 Categorizações de funções	3
1.2 Função afim	5
1.3 Função potência	12
1.4 Função polinomial	18
1.4.1 Função quadrática	19
1.5 Função racional	22
1.6 Funções trigonométricas	25
1.6.1 Seno e cosseno	25
1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante	28
1.6.3 Identidades trigonométricas	30
1.7 Operações com funções	31
1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes	31
1.7.2 Funções compostas	32
1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos	32
1.7.4 Translações	32
1.7.5 Dilatações e contrações	35
1.7.6 Reflexões	38
1.8 Propriedades de funções	43

1.8.1	Funções crescentes ou decrescentes . . . . .	43
1.8.2	Funções pares ou ímpares . . . . .	43
1.8.3	Funções injetoras . . . . .	44
1.9	Funções exponenciais . . . . .	46
1.10	Funções logarítmicas . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Limites</b>	<b>51</b>
2.1	Noção de limites . . . . .	51
2.1.1	Limites da função constante e da função identidade . .	52
2.2	Regras para o cálculo de limites . . . . .	56
2.2.1	Indeterminação $0/0$ . . . . .	59
2.3	Limites laterais . . . . .	61
2.4	Limites e desigualdades . . . . .	64
2.4.1	Teorema do confronto . . . . .	64
2.4.2	Limites envolvendo $(\sin x)/x$ . . . . .	66
2.5	Limites no infinito . . . . .	68
2.5.1	Assíntotas horizontais . . . . .	70
2.5.2	Assíntotas oblíquas . . . . .	72
2.6	Limites infinitos . . . . .	73
2.6.1	Assíntotas verticais . . . . .	74
2.7	Continuidade . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Derivadas</b>	<b>80</b>
3.1	Retas tangentes e derivadas . . . . .	80
3.1.1	A derivada em um ponto . . . . .	82
3.2	Função derivada . . . . .	83
3.3	Regras básicas de derivação . . . . .	85
3.3.1	Multiplicação por constante e soma . . . . .	87
3.3.2	Produto e quocientes . . . . .	88
3.3.3	Derivadas de funções exponenciais . . . . .	91
3.3.4	Derivadas de ordens mais altas . . . . .	92
3.4	Taxa de variação . . . . .	93
3.5	Derivadas de funções trigonométricas . . . . .	95
3.6	Regra da cadeia . . . . .	95
3.7	Diferenciabilidade da função inversa . . . . .	95
3.7.1	Derivadas de funções trigonométricas inversas . . . . .	97
3.8	Derivação implícita . . . . .	98

<b>4</b>	<b>Aplicações da derivada</b>	<b>100</b>
4.1	Extremos de funções . . . . .	100
4.1.1	Exercícios resolvidos . . . . .	104
4.1.2	Exercícios . . . . .	106
4.2	Teorema do valor médio . . . . .	107
4.2.1	Teorema de Rolle . . . . .	107
4.2.2	Teorema do valor médio . . . . .	108
4.3	Teste da primeira derivada . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Integração</b>	<b>113</b>
5.1	Integrais indefinidas . . . . .	113
5.1.1	Regras básicas de integração . . . . .	114
5.1.2	Exercícios . . . . .	116
5.2	Integração por substituição . . . . .	116
5.3	Integração por partes . . . . .	118
5.4	Integral definida . . . . .	119
5.4.1	Teorema fundamental do cálculo . . . . .	120
5.4.2	Substituição em integrais definidas . . . . .	120
5.4.3	Integração por partes para integrais definidas . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Aplicações da integral</b>	<b>124</b>
6.1	Cálculo de áreas . . . . .	124
6.1.1	Áreas entre curvas . . . . .	124
6.2	Volumes por fatiamento e rotação . . . . .	127
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>128</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>132</b>

# Capítulo 1

## Fundamentos sobre funções

**Observação 1.0.1.** Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#) com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

### 1.1 Definição e gráfico de funções

Uma **função** de um conjunto  $D$  em um conjunto  $Y$  é uma regra que associa um único elemento  $y \in Y$ <sup>1</sup> a cada elemento  $x \in D$ . Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo,  $f$  e escrevemos  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , para denotar que a função  $f$  toma valores de entrada em  $D$  e de saída em  $Y$ .

O conjunto  $D$  de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores  $f(x)$  tal que  $x \in D$  é chamado de **imagem** da função.

Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

---

<sup>1</sup> $y \in Y$  denota que  $y$  é um elemento do conjunto  $Y$ .

**Exemplo 1.1.1.** Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

- $y = x^2$ :
  - Para qualquer número real  $x$ , temos que  $x^2$  também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)<sup>2</sup> é o conjunto  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .
  - Para cada número real  $x$ , temos  $y = x^2 \geq 0$ . Além disso, para cada número real não negativo  $y$ , temos que  $x = \sqrt{y}$  é tal que  $y = x^2$ . Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e.  $[0, \infty)$ .
- $y = 1/x$ :
  - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
  - Primeiramente, observemos que se  $y = 0$ , então não existe número real tal que  $0 = 1/x$ . Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número  $y \neq 0$ , temos que  $x = 1/y$  é tal que  $y = 1/x$ . Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
- $y = \sqrt{1 - x^2}$ :
  - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \quad (1.2)$$

Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$  (ou, equivalentemente, o intervalo  $[-1, 1]$ ).

Com o [SymPy](#), podemos usar o comando

---

<sup>2</sup>O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.



`reduce_inequalities(1-x**2>=0,[x])`

para resolvermos a inequação  $1 - x^2 \geq 0$ .

- Uma vez que  $-1 \leq x \leq 1$ , temos que  $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$  e, portanto,  $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ . Ou seja, a imagem desta função é o intervalo  $[0, 1]$ .

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$  tal que  $x$  pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \quad (1.3)$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

**Exemplo 1.1.2.** A Figura 1.1 mostra os esboços dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

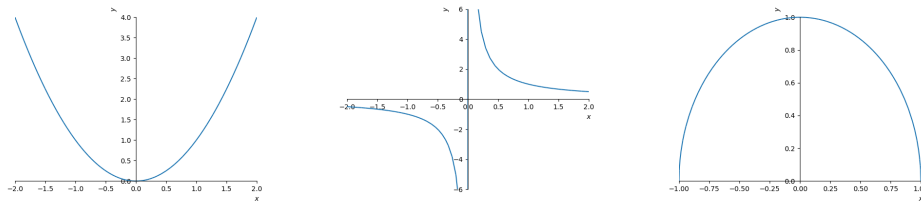


Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$  dadas no Exemplo 1.1.2.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos:

```
plot(x**2, (x, -2, 2))
plot(1/x, (x, -1, 1), ylim=(-10, 10))
plot(sqrt(1-x**2), (x, -1, 1))
```

### 1.1.1 Categorizações de funções

#### Funções algébricas

**Funções algébricas** são funções definidas a partir de somas, subtrações,

multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

## Funções transcendent

**Funções transcendent** são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

## Funções definidas por partes

**Funções definidas por partes** são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**<sup>3</sup>

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 1.2.

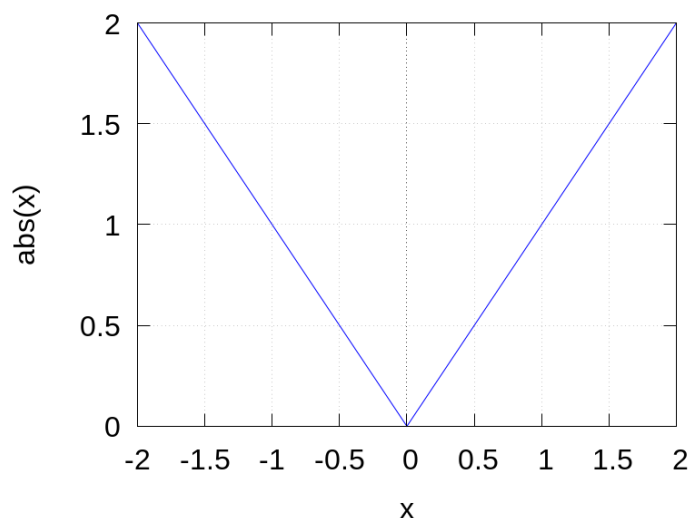


Figura 1.2: Esboço do gráfico da função valor absoluto  $y = |x|$ .

---

<sup>3</sup>Esta função também pode ser definida por  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

## Exercícios

**Exemplo 1.1.3.** Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e.  $f(x) = x$ .

**Exemplo 1.1.4.** Determine o domínio e a imagem da função  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Exemplo 1.1.5.** Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \quad (1.5)$$

## 1.2 Função afim

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \quad (1.6)$$

sendo  $m$  e  $b$  parâmetros<sup>4</sup> dados. O parâmetro  $m$  é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro  $b$  é chamado de **coeficiente constante**<sup>5</sup>.

Quando  $m = 0$ , temos uma **função constante**  $f(x) = b$ . Esta tem domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $\{b\}$ . Quando  $b = 0$ , temos uma **função linear**  $f(x) = mx$ , cujo domínio é  $(-\infty, \infty)$  e imagem é  $(-\infty, \infty)$ .

Por outro lado, toda função linear com  $m \neq 0$  tem  $(-\infty, \infty)$  como domínio e imagem.

**Exemplo 1.2.1.** A Figura 1.3 mostra esboços dos gráficos das funções afins  $f(x) = -5/2$ ,  $f(x) = 2$  e  $f(x) = 2x - 1$ .

---

<sup>4</sup>números reais.

<sup>5</sup>Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

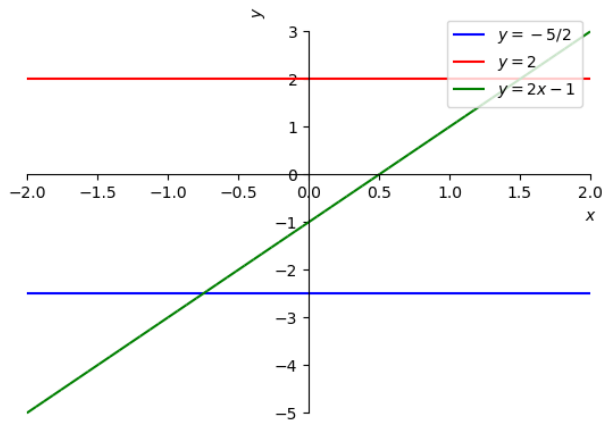


Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções afins  $y = -5/2$ ,  $y = 2$  e  $y = 2x - 1$  discutidas no Exemplo 1.2.1.

Com o **Sympy**, podemos plotar os gráficos destas funções com os seguintes comandos<sup>6</sup>:

```
plot(-5/2, (x, -2, 2))
plot(2, (x, -2, 2))
plot(2*x-1, (x, -2, 2))
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular  $m$  controla a inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ <sup>7</sup>. Quando  $m = 0$ , temos uma reta horizontal. Quando  $m > 0$  temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando  $m < 0$  temos uma reta com inclinação negativa.

**Exemplo 1.2.2.** A Figura 1.4 mostra esboços dos gráficos das funções lineares  $f_1(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = 2x$ ,  $f_4(x) = -2x$ ,  $f_5(x) = -x$  e  $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$ .

<sup>6</sup>Veja a Observação 1.0.1

<sup>7</sup>eixo das abscissas

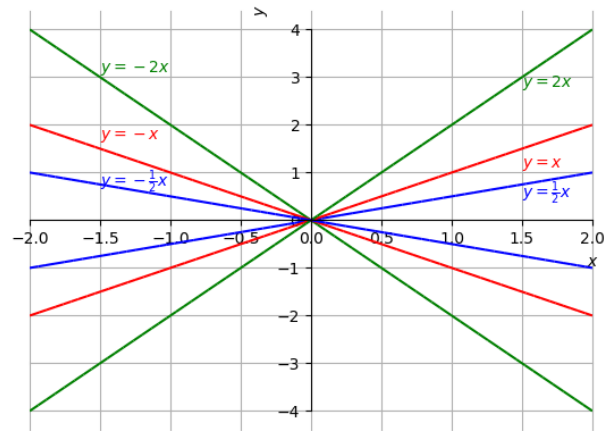


Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo 1.2.2.

Verifique, plotando os gráficos com o Sympy!

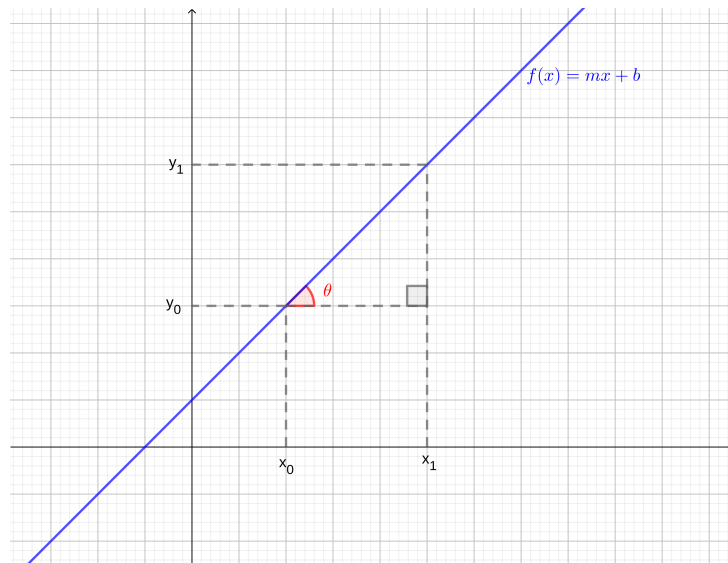


Figura 1.5: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo ângulo de declividade (veja a Figura 1.5). Para definirmos este ângulo, sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ ,  $x_0 < x_1$ , pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim  $f(x) = mx + b$ . O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_0)$  e o segmento que parte de  $(x_0, y_0)$  e termina em  $(x_1, y_1)$ . Denotando este ângulo por  $\theta$ , temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1.7)$$

$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \quad (1.8)$$

$$= m, \quad (1.9)$$

o que justifica chamar  $m$  de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , com  $x_0 \neq x_1$ , determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \quad (1.10)$$

$$mx_1 + b = y_1 \quad (1.11)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \quad (1.12)$$

Daí, substituindo o valor de  $m$  na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x_0 + y_0. \quad (1.13)$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_m (x - x_0) + y_0. \quad (1.14)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Trace o esboço da reta que representa o gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ .

**Solução.** Para esboçar o gráfico de uma função afim, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função  $f(x) = -x - 1$ , temos

$x$	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, -2)$  em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura 1.6.

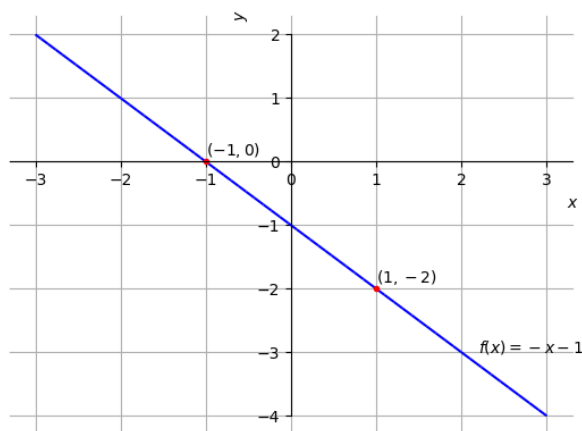


Figura 1.6: Esboço do gráfico da função afim  $f(x) = -x - 1$ .

Com o `Sympy`, podemos plotar o gráfico da função  $f(x) = -x - 1$  com o seguinte comando<sup>8</sup>:

```
plot(-x-1, (x, -3, 3))
```

◇

---

<sup>8</sup>Veja a Observação 1.0.1

**ER 1.2.2.** Determine a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(1, -1)$  e  $(2, 1)$ .

**Solução.** Vamos usar (1.14). Para tanto, tomamos  $(x_0, y_0) = (1, -1)$  e  $(x_1, y_1) = (2, 1)$ . Desta forma, temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \quad (1.15)$$

De (1.14), temos

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad (1.16)$$

$$= 2(x - 1) + (-1) \quad (1.17)$$

$$= 2x - 3. \quad (1.18)$$

Ou seja, a função afim desejada é  $f(x) = 2x - 3$ .

Com o **Sympy**, podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código<sup>9</sup>:

```
x0 = 1
y0 = -1

x1 = 2
y1 = 1

m = (y1-y0)/(x1-x0)

print(m*(x-x0) + y0)
```

◇

**ER 1.2.3.** Verifique se as retas  $y = -x - 1$  e  $y = 2x - 3$  se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

**Solução.** As retas dadas são gráficos das funções afins  $f(x) = -x - 1$  e  $g(x) = 2x - 3$ . Como os coeficientes angulares de  $f(x)$  e  $g(x)$  são diferentes, temos que as retas têm ângulos de declividade diferentes e, portanto, são retas concorrentes<sup>10</sup>.

---

<sup>9</sup>Veja a Observação

<sup>10</sup>Retas concorrentes são retas que se interceptam em um ponto.



Agora, vamos determinar o ponto de interseção. No ponto de interseção dos gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$  deve ocorrer que  $f(x) = g(x)$ . Segue

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x - 1 = 2x - 3 \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}. \quad (1.21)$$

Assim, temos que as retas se interceptam no ponto de abscissa  $x = 2/3$ . Para determinar a ordenada deste ponto, podemos usar qualquer uma das funções. Usando  $f(x)$  temos

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} - 3 = \frac{4 - 9}{3} = -\frac{5}{3}. \quad (1.22)$$

Concluimos que as retas se interceptam no ponto  $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$ .

Com o **Sympy**, podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código<sup>11</sup>:

```
f = lambda x: -x-1
g = lambda x: 2*x-3

px = solve(f(x)-g(x))[0]
py = f(px)

print(px, py)
```

◇

## Exercícios

**Exemplo 1.2.3.** Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f_1(x) = x$

b)  $f_2(x) = -x$

c)  $f_3(x) = x - 1$

---

<sup>11</sup>Veja a Observação

d)  $f_4(x) = -x + 1$

**Exemplo 1.2.4.** Determine a função afim  $f(x) = mx + b$ , cujo gráfico contém os pontos  $(-2, 1)$  e  $(0, -2)$ .

**Exemplo 1.2.5.** Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = 2x - 1$ .

## 1.3 Função potência

Uma função da forma  $f(x) = x^n$ , onde  $n \neq 0$  é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de  $n$ . Quando  $n$  é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são  $(-\infty, \infty)$ . Veja a Figura 1.7.

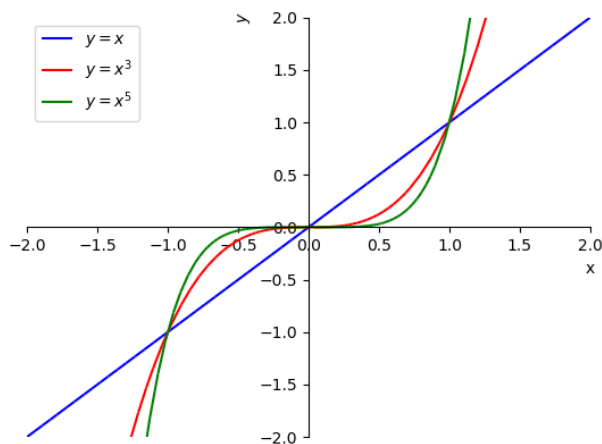


Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x$ ,  $y = x^3$  e  $y = x^5$ .

Funções potências com  $n$  positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem  $[0, \infty)$ . Veja a Figura 1.8.

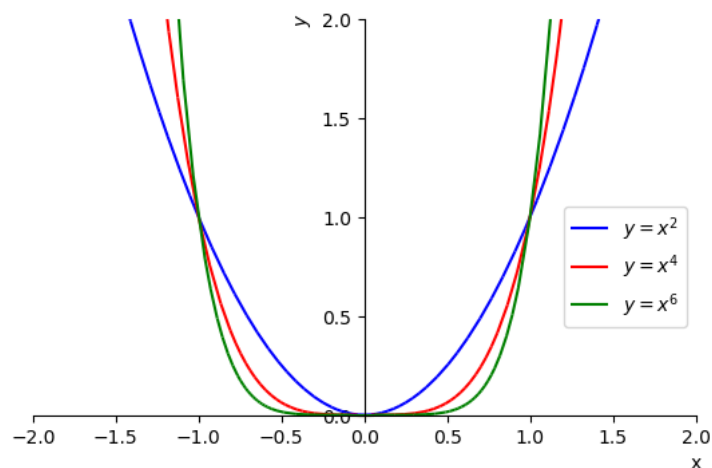


Figura 1.8: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x^2$ ,  $y = x^4$  e  $y = x^6$ .

Funções potências com  $n$  inteiro negativo ímpar não são definidas em  $x = 0$ , tendo domínio e imagem igual a  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Também, quando  $n$  inteiro negativo par, a função potência não está definida em  $x = 0$ , tem domínio  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , mas imagem  $(0, \infty)$ . Veja a Figura 1.9.

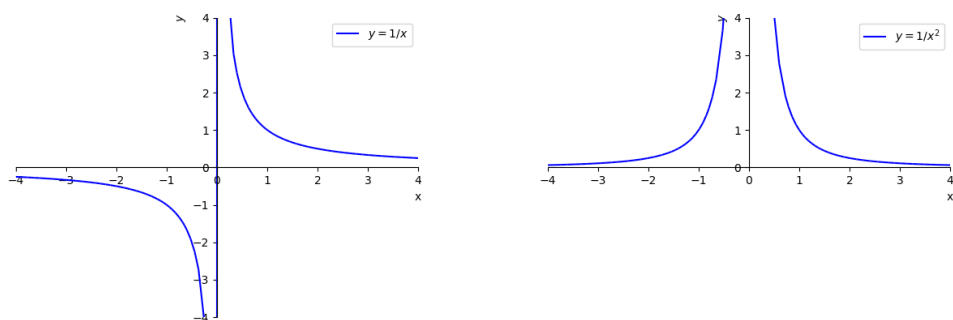


Figura 1.9: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = 1/x$  (esquerda),  $y = 1/x^2$  (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando  $n = 1/2, 1/3, 3/2$  e  $2/3$ . Veja a Figura 1.10.

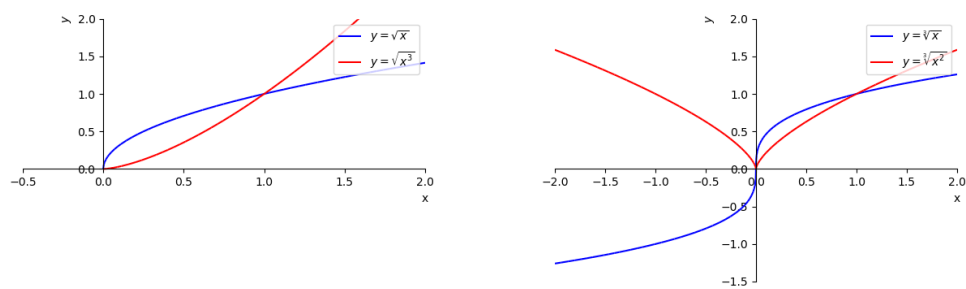


Figura 1.10: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{x^3}$ . Direita:  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 1.3.1.** Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^{5/2}$ ;

b)  $g(x) = x^{5/3}$ .

**Solução.**

- a) Vamos analisar a função  $f(x) = x^{5/2}$ . Como  $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$  e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que  $x^5$  deve ser não negativo. Daí,  $x$  deve ser não negativo. Logo, o domínio de  $f(x) = x^{5/2}$  é  $[0, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura 1.11.

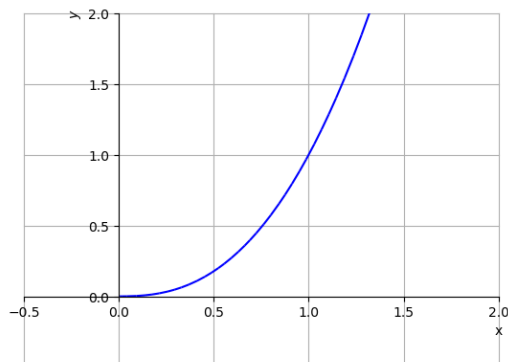


Figura 1.11: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^{5/2}$ .

Para plotar o gráfico de  $f(x)$  com o **Sympy**, basta digitar, por exemplo:

```
plot(x**(5/2), (x,0,2))
```

- b) Vamos analisar a função  $g(x) = x^{5/3}$ . Como  $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ , não temos restrição sobre os valores de  $x$ . Logo, o domínio da função  $g$  é  $(-\infty, \infty)$ . Veja o esboço desta função na Figura 1.12.

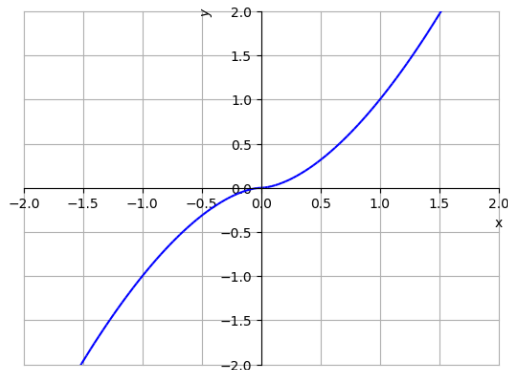


Figura 1.12: Esboço do gráfico de  $g(x) = x^{5/3}$ .

Para plotar o gráfico de  $g(x)$  com o **Sympy**, digitamos:

```
p = plot(x**(5/3), (x,-2,2), line_color="blue", show=False)
```

```
q = plot(-(-x)**(5/3), (x, -2, 0), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

Você sabe o porquê não pode-se usar, simplesmente, o seguinte comando?

```
plot(x**(5/3), (x, -2, 2))
```

◇

**ER 1.3.2.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

**Solução.** Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de interseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa  $x$  tais que

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 1 = x\sqrt[3]{x} \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow x^4 = 1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (1.30)$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 1$ . Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura 1.13. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando  $f(x)$ , temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1). \quad (1.31)$$

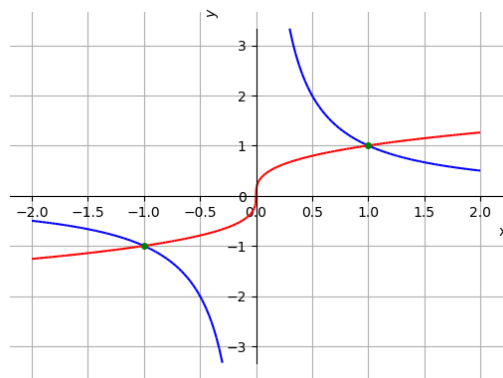


Figura 1.13: Interseção dos gráficos das funções  $f(x) = 1/x$  (azul) e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  (vermelho).

Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$  e  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ . De (1.14), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) + (-1) \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow y = x + 1 - 1 \Rightarrow y = x. \quad (1.33)$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$  tem equação  $y = x$ .

Os seguintes comandos, mostrar como podemos resolver este problema usando o Sympy:

```
f = lambda x: 1/x
# x nao negativo
g1 = lambda x: cbrt(x)
# x negativo
g2 = lambda x: -cbrt(-x)

x0 = solve(f(x)-g2(x))[0]
x1 = solve(f(x)-g1(x))[0]

y0 = f(x0)
y1 = f(x1)

print('y = ', (y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0)
```

◇

## Exercícios

**E 1.3.1.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^7$ ;

b)  $g(x) = x^8$ .

**E 1.3.2.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$ ;

b)  $g(x) = \frac{1}{x^8}$ .

**E 1.3.3.** Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a)  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ;

b)  $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ .

## 1.4 Função polinomial

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.34)$$

onde  $a_i$  são coeficientes reais,  $a_n \neq 0$  e  $n$  é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte<sup>12</sup>. Polinômios de grau ímpar tem imagem  $(-\infty, \infty)$ . Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem

---

<sup>12</sup>Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é  $(\infty, \infty)$



de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.14.

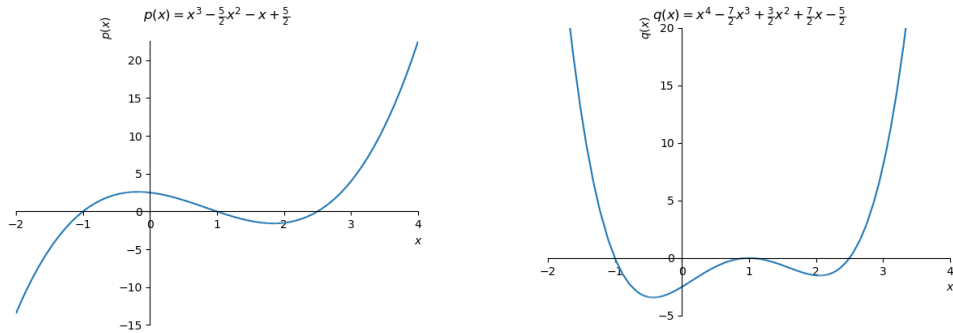


Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda  $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$ . Direita:  $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$ .

Quando  $n = 0$ , temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando  $n = 1$ , temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando  $n = 2$  temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando  $n = 3$ , temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

### 1.4.1 Função quadrática

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (1.35)$$

onde  $a$  é chamado de **coeficiente do termo quadrático**,  $b$  o **coeficiente do termo linear** e  $c$  o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.36)$$

O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando  $a > 0$  e, **côncava para baixo** quando  $a < 0$ . Veja a Figura 1.15.

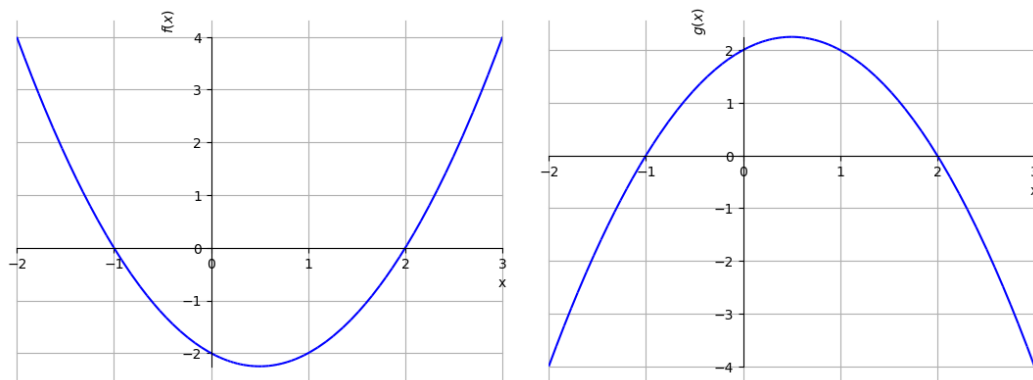


Figura 1.15: Esboço dos gráficos das funções quadráticas  $f(x) = x^2 - x - 2$  (esquerda) e  $g(x) = -x^2 + x + 2$  (direita).

O **vértice** da função quadrática  $f(x)$  com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor máximo (mínimo)** em todo o seu domínio natural. Quando  $f$  tem zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros  $x_0$  e  $x_1$  da função, i.e. o vértice  $V = (x_v, y_v)$  é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \quad (1.37)$$

O valor  $x_v$  é a abscissa do ponto em que a função quadrática  $f$  atinge o valor máximo (valor mínimo)  $y_v$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 1.4.1.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

**Solução.** Determinar os zeros da função  $f$  significa entrar todos os valores de  $x$  tais que  $f(x) = 0$  (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de  $f$  intercepta o eixo das abscissas). Temos

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0. \quad (1.40)$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (1.36) na equação  $x^2 - x - 2 = 0$ , obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.41)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad (1.42)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad (1.43)$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \quad (1.44)$$

$$= -1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad (1.45)$$

Com isso, temos que os zeros da função  $f$  ocorrem nos pontos  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ .

Com o **Sympy**, podemos calcular os zeros da função  $f$  com o seguinte comando

```
solve(x**3-x**2-2*x)
```

◇

**ER 1.4.2.** Determine o valor mínimo da função  $f(x) = x^2 - x - 2$ .

**Solução.** Como  $f$  é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo,  $f$  atinge seu valor mínimo no seu vértice. Por sorte, os zeros de  $f$  são  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 2$ . Logo, o vértice tem abscissa

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (1.46)$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de  $f$  é  $1/2$  e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 - 8}{4} = -\frac{9}{4}. \quad (1.47)$$

Podemos resolver este exercício com o seguinte código **Sympy**:

```
f = lambda x: x**2-x-2
z = solve(f(x))
f((z[0]+z[1])/2)
```

◇

## Exercícios

**E 1.4.1.** Determine os zeros do polinômio  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$ .

**E 1.4.2.** Determine o valor máximo da função  $f(x) = -x^2 + x + 2$ .

## 1.5 Função racional

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (1.48)$$

onde  $p(x)$  e  $q(x) \not\equiv 0$  são polinômios.

Função racionais não estão definidas nos zeros de  $q(x)$ . Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura [1.16](#) para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \quad (1.49)$$

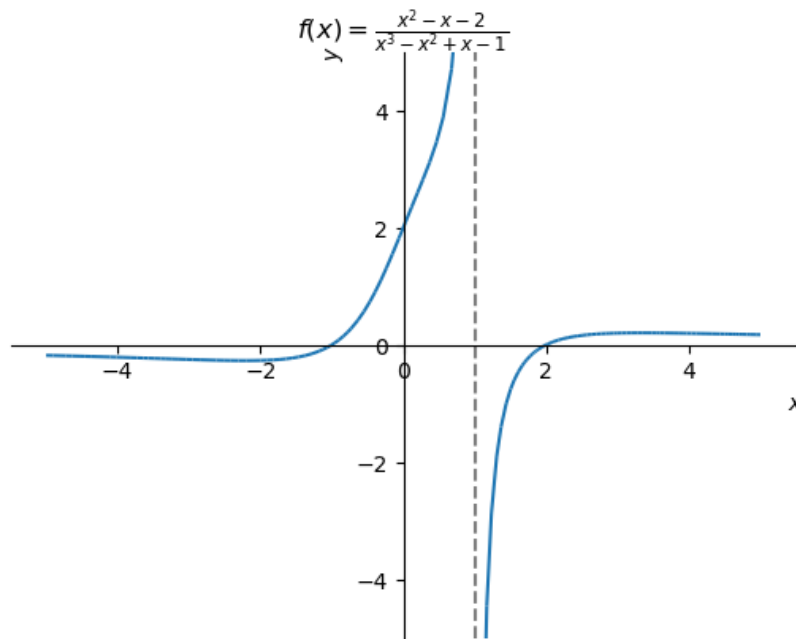


Figura 1.16: Esboço do gráfico da função racional  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ .

Com o estudo do cálculo de limites, veremos que a reta  $y = 0$  (eixo das abscissas) é uma assíntota horizontal e a reta  $x = 1$  (reta tracejada) é uma assíntota vertical ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto  $x = 1$  está relacionada ao fato de que o denominador se anula em  $x = 1$ . Ainda, temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \quad (1.50)$$

o que mostra que  $x = 1$  é a única raiz do denominador. Com isso, podemos concluir que o domínio da função  $f(x)$  é  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

## Exercícios resolvidos

**E 1.5.1.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \quad (1.51)$$

**Solução.** Como  $f(x)$  é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (1.52)$$

Logo, o domínio de  $f(x)$  é o conjunto  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

◇

**E 1.5.2.** Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x - 1}{x - 1}. \quad (1.53)$$

**Solução.** Tendo em vista que o denominador se anula em  $x = 1$ , o domínio de  $g$  é  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que  $g(x) = 1$  para  $x \neq 1$ . I.e.,  $g$  é uma função constante para valores de  $x \neq 1$  e não está definida em  $x = 1$ . Veja a Figura 1.17 para o esboço do gráfico da função  $g$ .

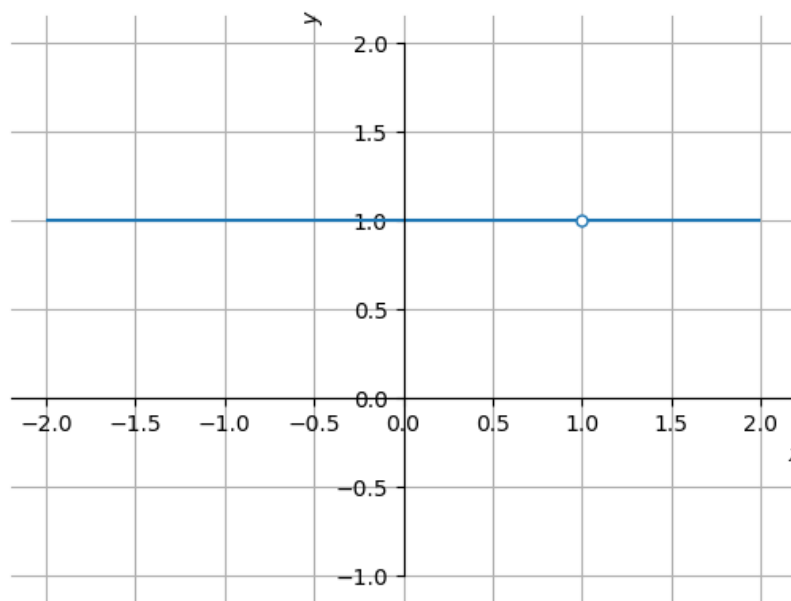


Figura 1.17: Esboço do gráfico da função  $g(x) = (x - 1)/(x - 1)$ .

Com o **Sympy**, o comando

```
plot((x-1)/(x-1),(x,-2,2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em  $x = 1$ . Isto ocorre, pois os gráficos com o **Sympy** são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.

Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

◇

## Exercícios

**E 1.5.3.** Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}. \quad (1.54)$$

## 1.6 Funções trigonométricas

### 1.6.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno  $y = \text{sen}(x)$  e cosseno  $y = \text{cos}(x)$  podem ser definidas a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura 1.18). Seja  $x$  o ângulo<sup>13</sup> de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta  $r$  na Figura 1.18). Seja, então,  $(a,b)$  o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária<sup>14</sup>. Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = a, \quad \text{cos}(x) = b. \quad (1.55)$$

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $[-1, 1]$ .

---

<sup>13</sup>Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.

<sup>14</sup>Circunferência do círculo de raio 1.

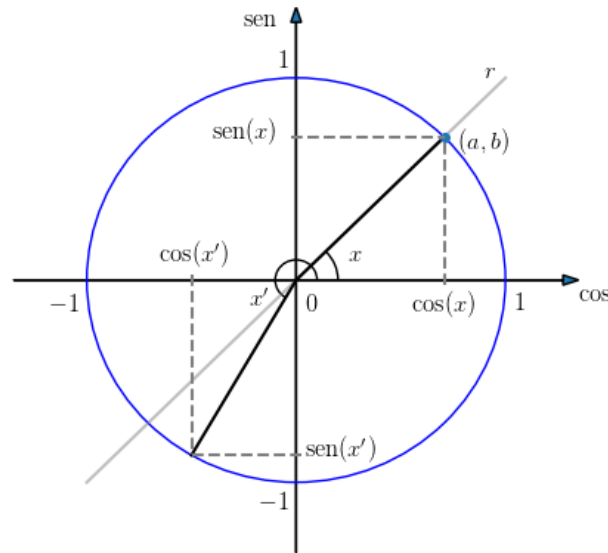


Figura 1.18: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 1.19 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.56)$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.57)$$

$$\text{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (1.58)$$

$$\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.59)$$

$$(1.60)$$

As funções seno e cosseno estão definidas no [SymPy](#) como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de  $\pi/6$ , digitamos:

```
sin(pi/6)
```



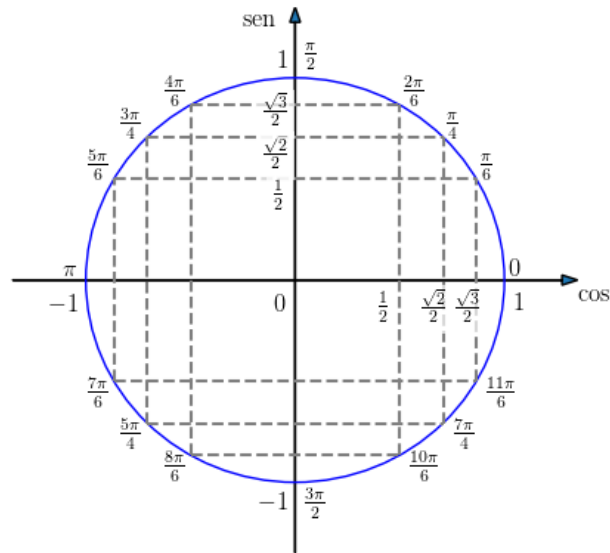


Figura 1.19: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função**  $f(x)$  é dita **periódica** quando existe um número  $p$ , chamado de período da função, tal que

$$f(x + p) = f(x) \quad (1.61)$$

para qualquer valor de  $x$  no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período  $2\pi$ , i.e.

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (1.62)$$

para qualquer valor de  $x$ .

Na Figura 1.20, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

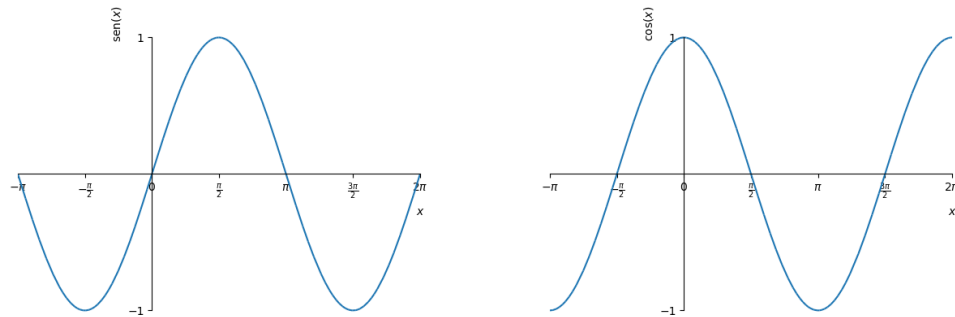


Figura 1.20: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

### 1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad (1.63)$$

$$\operatorname{sec}(x) := \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \quad (1.64)$$

No [SymPy](#), as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções **tan**, **cot**, **sec** e **csc**, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de  $\operatorname{cosec}(\pi/4)$  com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura [1.21](#), temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos  $(2k+1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, \infty)$  e período  $\pi$ .

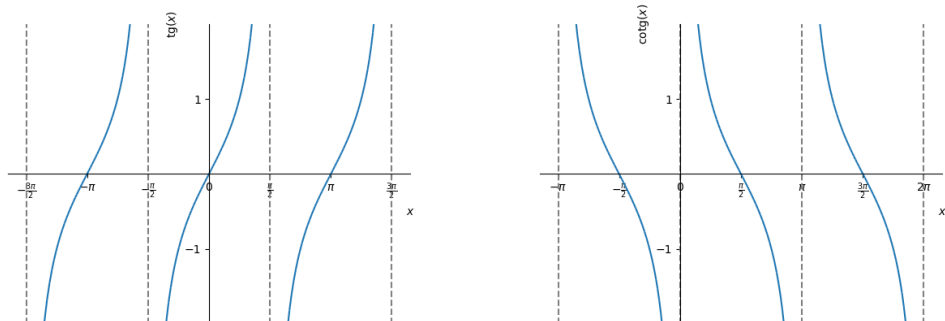


Figura 1.21: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura 1.22, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$  e período  $\pi$ .

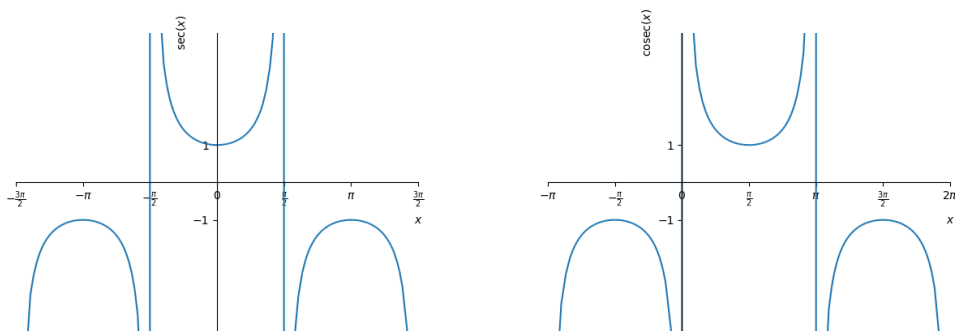


Figura 1.22: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

### 1.6.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Começemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1.65)$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \quad (1.66)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \quad (1.67)$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.68)$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.69)$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (1.70)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (1.71)$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (1.72)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (1.73)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 1.6.1.** Mostre que

$$\cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.74)$$

**Solução.** A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (1.75)$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}. \quad (1.76)$$

Então, isolando  $\cos x$ , obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad (1.77)$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.78)$$

◇

## Exercícios

**E 1.6.1.** Mostre que  $\operatorname{sen} x$  é uma função ímpar, i.e.

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x) \quad (1.79)$$

para todo número real  $x$ .

**E 1.6.2.** Mostre que  $\cos x$  é uma função par, i.e.

$$\cos x = -\cos(-x) \quad (1.80)$$

para todo número real  $x$ .

## 1.7 Operações com funções

### 1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$  com domínio em comum  $D$ . Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  para todo  $x \in D$  tal que  $g(x) \neq 0$ .

**Exemplo 1.7.1.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$ . Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$  e está definida em toda parte.

- $(g - f)(x) = x - x^2$  e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$  e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$  e tem domínio  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ <sup>15</sup>.

## 1.7.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$ . Definimos a **função composta** de  $f$  com  $g$  por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \quad (1.81)$$

Seu domínio consiste dos valores de  $x$  que pertençam ao domínio da  $g$  e tal que  $g(x)$  pertença ao domínio da  $f$ .

**Exemplo 1.7.2.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ . A função composta  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ .

## 1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

## 1.7.4 Translações

Dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que a o gráfico de  $y = f(x) + k$  é uma translação vertical do gráfico de  $f$ . Se  $k > 0$ , observamos uma translação vertical para cima. Se  $k < 0$ , observamos uma translação vertical para baixo.

**Exemplo 1.7.3.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 1.23, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k = x^2 + k$  para  $k = 1$ .

---

<sup>15</sup>Observemos que não podemos simplificar o  $x$ , pois a função  $y = x$  é diferente da função  $y = x^2/x$ .

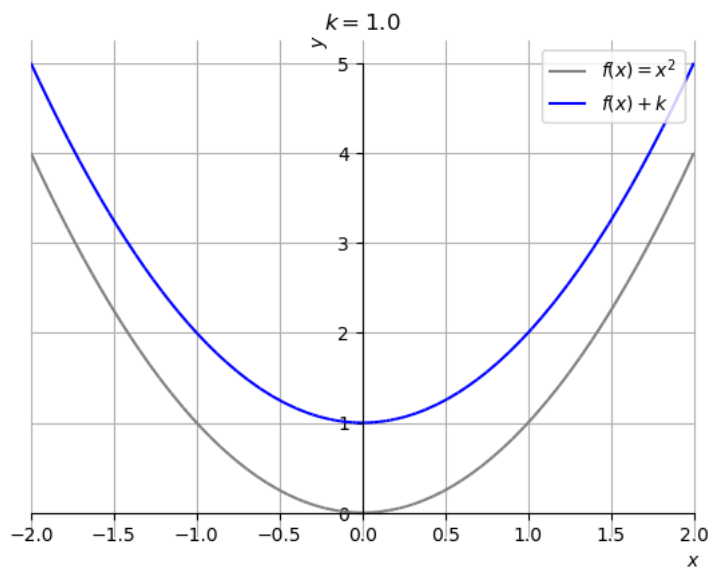


Figura 1.23: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $f(x) + k$  com  $k = 1$ .

O seguinte código Python<sup>16</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x) + k$ :

```
k = 1
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x)+k,(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("k = %1.1f" % k)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x)+k$"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

<sup>16</sup>Veja a Observação 1.0.1.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de  $k$  e a função  $f$  para vermos o efeito das translações verticais.

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que o gráfico de  $y = f(x + k)$  é uma translação horizontal do gráfico de  $f$  em  $k$  unidades. Se  $k > 0$ , observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se  $k < 0$ , observamos uma translação horizontal para a direita.

**Exemplo 1.7.4.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 1.24, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k) = (x + k)^2$  para  $k = 1$ .

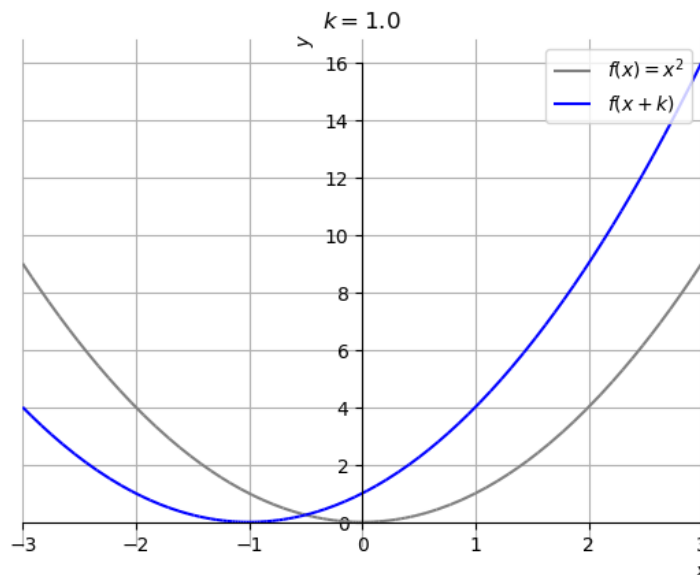


Figura 1.24: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $f(x + k)$  com  $k = 1$ .

O seguinte código Python<sup>17</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(x + k)$ :

```
k = 1
```

---

<sup>17</sup>Veja a Observação 1.0.1.



```

f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -3, 3), line_color="gray", show=False)
q = plot(f(x+k), (x, -3, 3), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("k = %1.1f" % k)
p.xlabel = 'x'
p.ylabel = 'y'
p[0].label = "f(x) = x^2"
p[1].label = "f(x+k)"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar o valor de  $k$  e a função  $f$  para vermos o efeito das translações horizontais.

### 1.7.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função  $f$  e uma constante  $\alpha$ . Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$  é uma dilatação vertical do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = \alpha f(x)$  é uma contração vertical do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma contração horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma dilatação horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ .

**Exemplo 1.7.5.** Seja  $f(x) = x^2$ . A Figura 1.25, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot x^2$  para  $\alpha = 2$ .

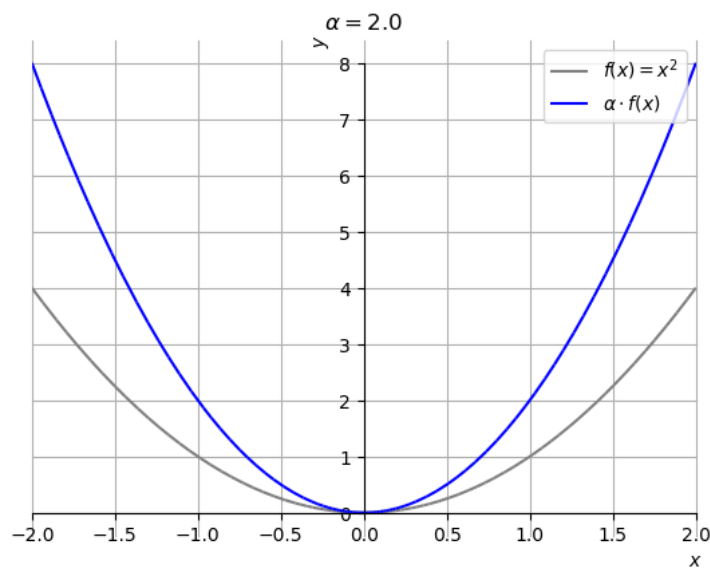


Figura 1.25: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2$  e  $\alpha \cdot f(x)$  com  $\alpha = 2$ .

O seguinte código Python<sup>18</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $\alpha \cdot f(x)$ :

```
alpha = 2
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -2, 2), line_color="gray", show=False)
q = plot(alpha*f(x), (x, -2, 2), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha = %1.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$\alpha \cdot f(x)$"
p.save('fig_ex_dilavert.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

<sup>18</sup>Veja a Observação 1.0.1.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilavert.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações verticais.

**Exemplo 1.7.6.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . A Figura 1.26, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^2 - 2(\alpha \cdot x) + 1$  para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

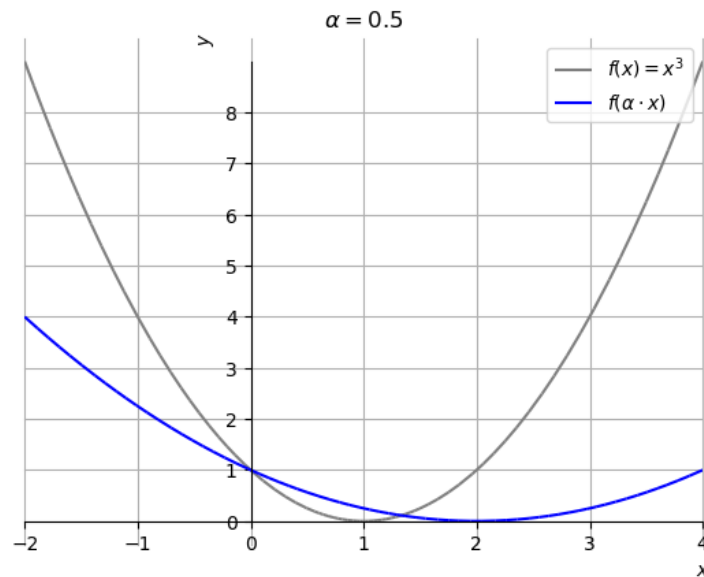


Figura 1.26: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  e  $f(\alpha \cdot x)$  com  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

O seguinte código Python<sup>19</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(\alpha \cdot x)$ :

```
alpha = 0.5
f = lambda x: x**2-2*x+1

p = plot(f(x),(x,-2,4),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(alpha*x),(x,-2,4),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha$ = %.1f" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
```

<sup>19</sup>Veja a Observação 1.0.1.

```

p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^3$"
p[1].label = "$f(\\alpha \\cdot x)$"
p.save('fig_ex_dilahoriz.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(0,9))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilahoriz.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar o valor de  $\alpha$  e a função  $f$  para vermos o efeito das dilatações/contrações horizontais.

### 1.7.6 Reflexões

Seja dada uma função  $f$ . O gráfico da função  $y = -f(x)$  é uma reflexão em torno do eixo das abscissas do gráfico da função  $f$ . Já, o gráfico da função  $y = f(-x)$  é uma reflexão em torno do eixo das ordenadas do gráfico da função  $f$ .

**Exemplo 1.7.7.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura 1.28, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$ .

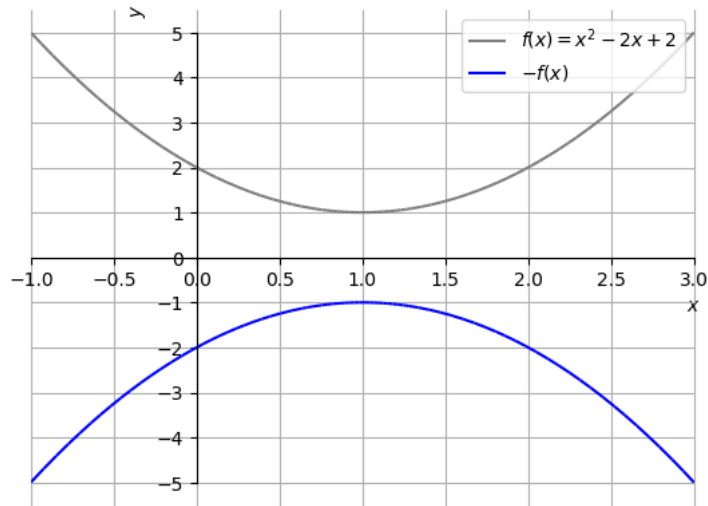


Figura 1.27: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $-f(x)$ .

O seguinte código Python<sup>20</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $-f(x)$ :

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(-f(x),(x,-1,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$-f(x)$"
p.save('fig_ex_reflex.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-5,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_reflex.png', bbox_inches='tight')
```

<sup>20</sup>Veja a Observação 1.0.1.

Podemos alterar a função  $f$  para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das abscissas.

**Exemplo 1.7.8.** Seja  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ . A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x) = x^2 + 2x + 2$ .

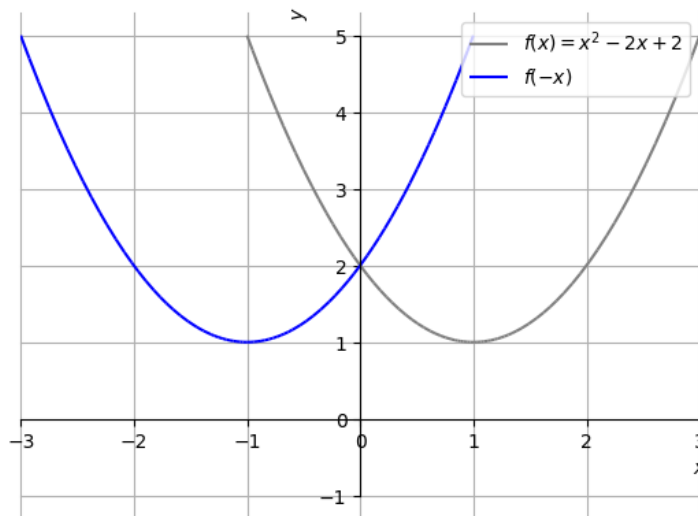


Figura 1.28: Esboço do gráfico de  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  e  $f(-x)$ .

O seguinte código Python<sup>21</sup>, faz os esboços dos gráficos de  $f(x)$  e  $f(-x)$ :

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="none",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$f(-x)$"
p[2].label = ""
```

<sup>21</sup>Veja a Observação 1.0.1.

```

p.save('fig_ex_refley.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-1,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_refley.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar a função  $f$  para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das ordenadas.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.7.1.** Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \quad (1.82)$$

Determine a função composta  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**Solução.** Começamos determinando a função composta

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (1.83)$$

$$= f(x^2 + 1) \quad (1.84)$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^2 - \sqrt{x^2 + 1 - 1}}{x^2 + 1} \quad (1.85)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{x^2}}{x^2 + 1} \quad (1.86)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - |x|}{x^2 + 1}. \quad (1.87)$$

Agora, observamos que  $g$  está definida em toda parte e tem imagem  $[1, \infty)$ . Como o domínio da  $f$  é  $[1, \infty)$ , temos que  $(f \circ g)$  está definida em toda parte.

◇

**ER 1.7.2.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$ .

**Solução.** Começamos traçando o gráfico de  $f_1(x) = x^3$ . Então, obtemos o gráfico de  $f_2(x) = (x - 1)^3$  por translação de uma unidade à direita. O gráfico de  $f_3(x) = 2(x - 1)^3$  é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de  $f_4(x) = 2(x - 1)^3 + 1$  é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura 1.29.

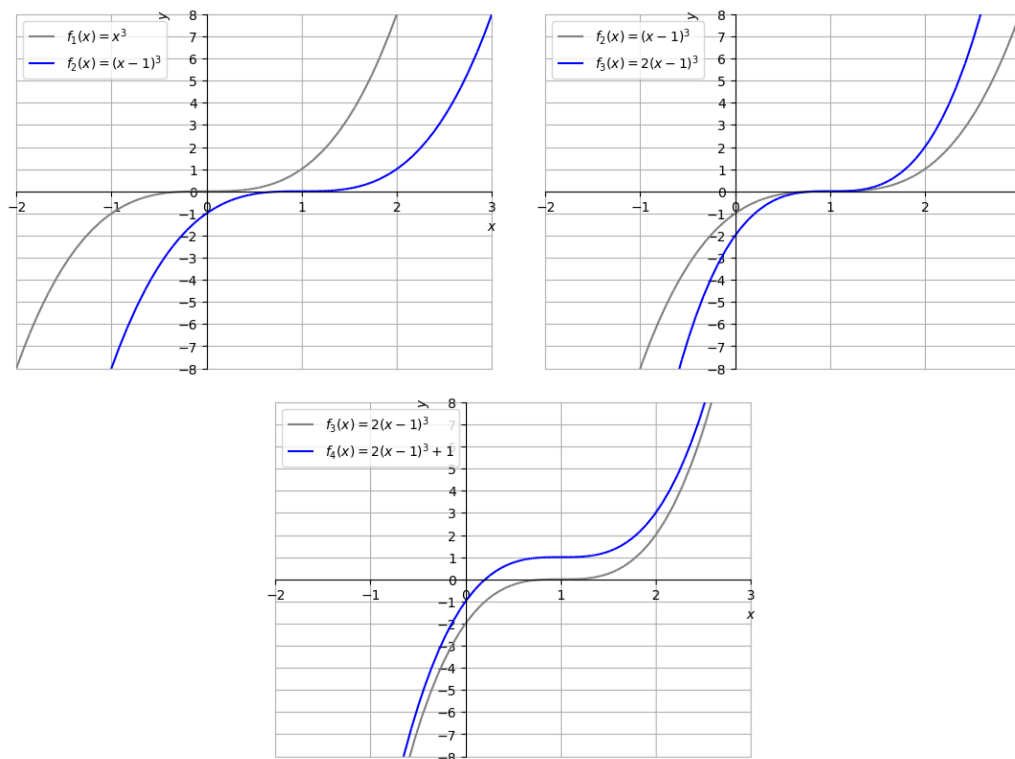


Figura 1.29: Construção do esboço do gráfico de  $f(x) = 2(x - 1)^3 + 1$ .

◇

## Exercícios

**E 1.7.1.** Sejam  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  e  $g(x) = x^2 - 1$ . Determine a função  $(f \circ g)$  e seu domínio.

**E 1.7.2.** Faça um esboço do gráfico de  $g(x) = 2x^3 - 1$ .



## 1.8 Propriedades de funções

### 1.8.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma da função  $f$  é dita ser crescente quando  $f(x_1) < f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$  no seu domínio. É dita não decrescente quando  $f(x_1) \leq f(x_2)$  para todos os  $x_1 < x_2$  no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando  $f(x_1) > f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ . E, por fim, é dita não crescente quando  $f(x_1) \geq f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ , sempre no seu domínio.

**Exemplo 1.8.1.** Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade**  $f(x) = x$  é crescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0, \\ 2 & , 0 < x \leq 1, \\ (x - 1)^2 + 2 & , x > 1 \end{cases} \quad (1.88)$$

é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

**Exemplo 1.8.2.** A função  $f(x) = x^2$  é uma função decrescente no intervalo  $(-\infty, 0]$  e crescente no intervalo  $[0, \infty)$ .

### 1.8.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função**  $f$  é dita **par** quando  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio.

**Exemplo 1.8.3.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  é uma função par.
- $f(x) = x^3$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \sin x$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$  é uma função par.
- $f(x) = x + 1$  não é par nem ímpar.

### 1.8.3 Funções injetoras

Uma dada **função**  $f$  é dita **injetora** quando  $f(x_1) \neq f(x_2)$  para todos  $x_1 \neq x_2$  no seu domínio.

**Exemplo 1.8.4.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$  é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$  é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora  $y = f(x)$ , existe uma única função  $g$  tal que

$$g(f(x)) = x, \quad (1.89)$$

para todo  $x$  no domínio da  $f$ . Tal função  $g$  é chamada de **função inversa** de  $f$  é comumente denotada por  $f^{-1}$ .<sup>22</sup>

**Exemplo 1.8.5.** Vamos calcular a função a função inversa de  $f(x) = x^3 + 1$ . Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \quad (1.90)$$

Então, isolando  $x$ , temos

$$x = \sqrt[3]{y-1}. \quad (1.91)$$

Desta forma, concluímos que  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ . Verifique que  $f^{-1}(f(x)) = x$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ !

**Observação 1.8.1.** Os gráficos de uma dada função injetora  $f$  e de sua inversa  $f^{-1}$  são simétricos em relação a **reta identidade**  $y = x$ .

### Exercícios resolvidos

**ER 1.8.1.** Defina os intervalos em que a função  $f(x) = -|x+1|$  é crescente ou decrescente.

---

<sup>22</sup>Observe que, em geral,  $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ .

**Solução.** A função  $f$  é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função  $f(x) = |x|$ . Veja a Figura 1.30.

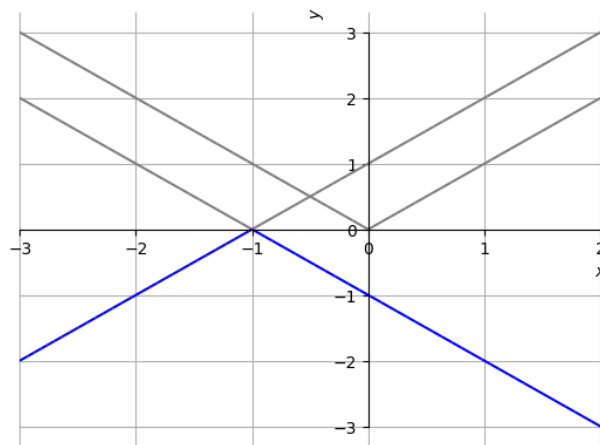


Figura 1.30: Esboço do gráfico de  $f(x) = -|x + 1|$ .

Do esboço do gráfico de  $f$ , podemos inferir que  $f$  é crescente no intervalo  $(-\infty, -1]$  e decrescente no intervalo  $[-1, \infty)$ .

◇

**ER 1.8.2.** Analise a paridade da função  $\operatorname{tg}(x)$ .

**Solução.** Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x. \quad (1.92)$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

◇

**ER 1.8.3.** Calcule a função inversa de  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ .

**Solução.** Para obtermos a função inversa de uma função  $f$ , resolvemos  $y = f(x)$  para  $x$ . Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x + 1} \quad (1.93)$$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \quad (1.94)$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \quad (1.95)$$

Logo, temos  $f^{-1}(x) = x^2 - 1$  restrita ao conjunto imagem da  $f$ , i.e. o domínio de  $f^{-1}$  é  $[0, \infty)$ .

◇

## Exercícios

**E 1.8.1.** Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x+5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (1.96)$$

**E 1.8.2.** Analise a paridade da função  $\operatorname{cosec} x$ .

**E 1.8.3.** Seja  $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$ . Calcule  $f^{-1}$  e determine seu domínio.

## 1.9 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \quad (1.97)$$

onde  $a \neq 1$  é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem  $(0, \infty)$ . O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos  $(-1, 1/a)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, a)$ . Veja a Figura 1.31.

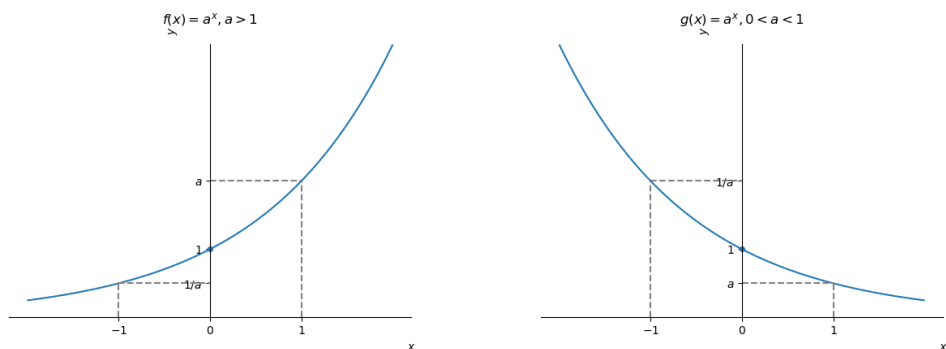


Figura 1.31: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $g(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.9.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $f(x) = e^x$  de função exponencial natural.

No [SymPy](#), o número de Euler é obtido com a constante `E`:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

## Exercícios resolvidos

**ER 1.9.1.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

**Solução.** Primeiramente, observamos que  $f(x) = e^{-2x+1} - 1 = e^{-2(x-\frac{1}{2})} - 1$ . Então, partindo do gráfico de  $e^{-x}$ , fazemos uma translação de  $\frac{1}{2}$  unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de  $\frac{1}{2}$  vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura [1.32](#).

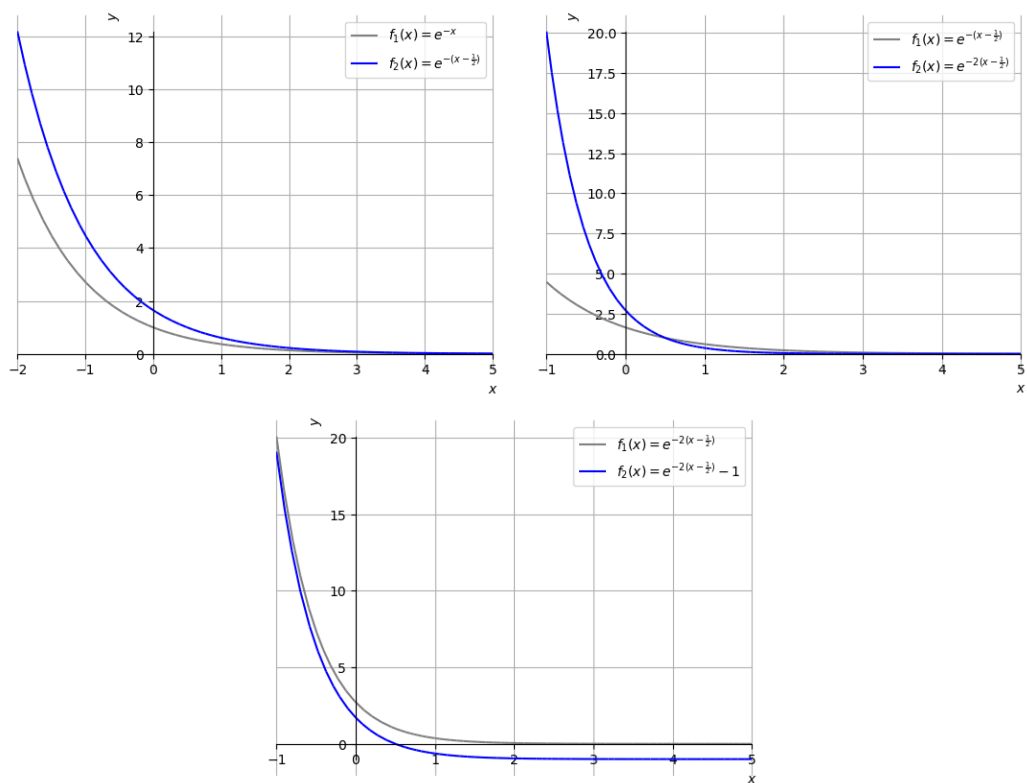


Figura 1.32: Esboço do gráfico de  $f(x) = e^{-2x+1} - 1$ .

◇

## Exercícios

**E 1.9.1.** Faça um esboço do gráfico de  $f(x) = 2e^{x-1} + 2$ .

## 1.10 Funções logarítmicas

A **função logarítmica**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , é a função inversa da função exponencial  $y = a^x$ . Veja a Figura 1.33. O domínio da função logarítmica é  $(0, \infty)$  e a imagem  $(-\infty, \infty)$ .

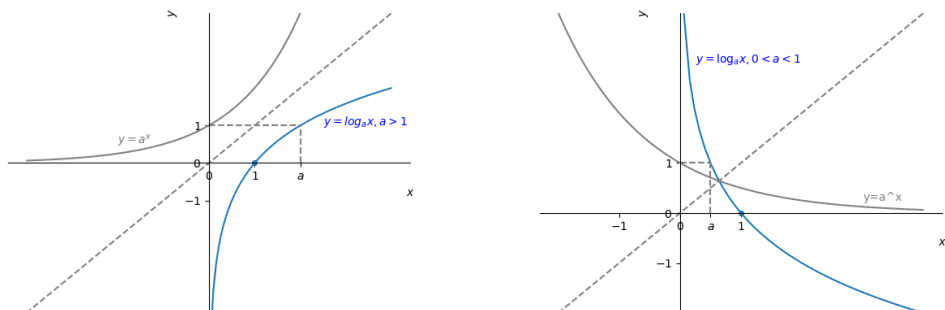


Figura 1.33: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda)  $y = \log_a x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $y = \log_a x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.10.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $y = \log_e x$  de função exponencial natural e denotamo-la por  $y = \ln x$ .

No [SymPy](#), podemos computar  $\log_a x$  com a função `log(x,a)`. O  $\ln x$  é computado com `log(x)`.

**Observação 1.10.2.** Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ ;
- $\log_a 1 = 0$ ;
- $\log_a a = 1$ ;
- $\log_a a^x = x$ ;
- $a^{\log_a x} = x$ ;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ .
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.10.1.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \ln(x + 2) + 1$  e determine seu domínio.

**Solução.** Em construção ...



## Exercícios

**E 1.10.1.** Faça o esboço do gráfico de  $f(x) = \log(x - 2) - 1$  e determine seu domínio.



# Capítulo 2

## Limites

Ao longo deste capítulo, ao apresentarmos códigos [Python](#) estaremos assumindo os seguintes comandos prévios:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

### 2.1 Noção de limites

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto  $x_0$ , exceto talvez em  $x_0$ . Quando o valor de  $f(x)$  é arbitrariamente próximo de um número  $L$  para  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (2.1)$$

e dizemos que o limite da função  $f$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$ .

**Exemplo 2.1.1.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (2.2)$$

Na Figura [2.1](#), temos um esboço do gráfico desta função.

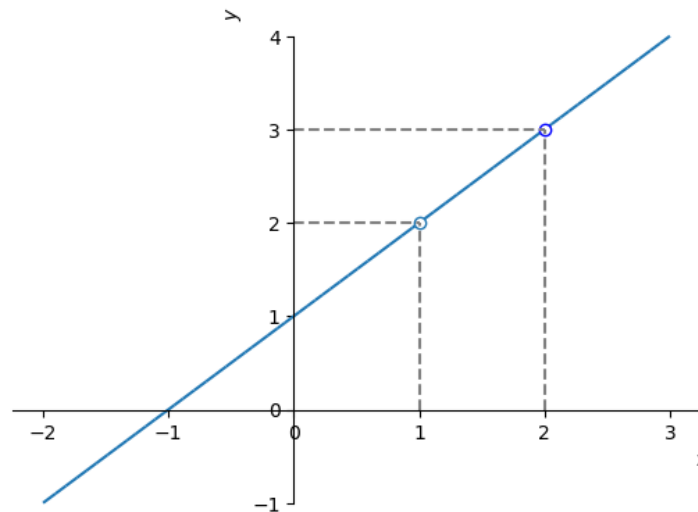


Figura 2.1: Esboço do gráfico da função  $f(x)$  dada no Exemplo 2.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

$x$	-0,01	-0,001	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , embora  $f(1)$  não esteja definido.

$x$	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , embora  $f(2)$  também não esteja definido. Verifique!

### 2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

Da noção de limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (2.3)$$

seja qual for a constante  $k$ . Vejamos a Figura 2.2.

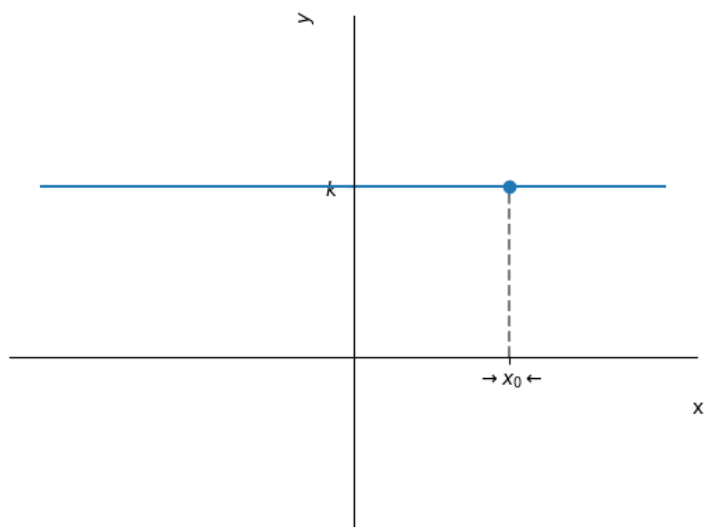


Figura 2.2: Esboço do gráfico de uma função constante  $f(x) = k$ .

**Exemplo 2.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{2} - e = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (2.4)$$

seja qual for o ponto  $x_0$ . Vejamos a Figura 2.3.

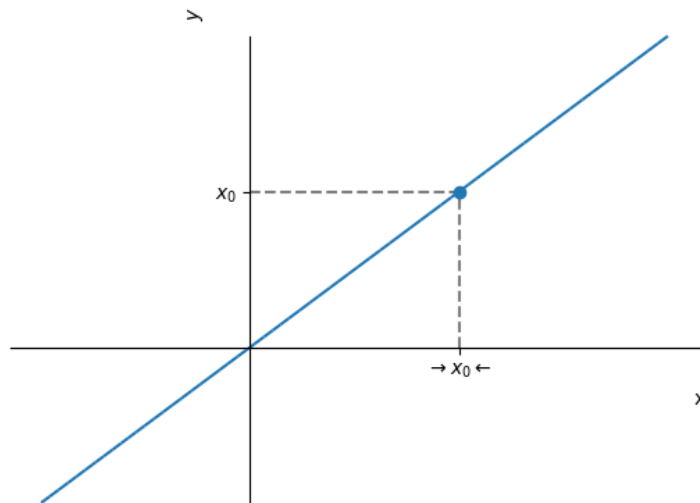


Figura 2.3: Esboço do gráfico da função identidade  $f(x) = x$ .

**Exemplo 2.1.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

## Exercícios

**E 2.1.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de

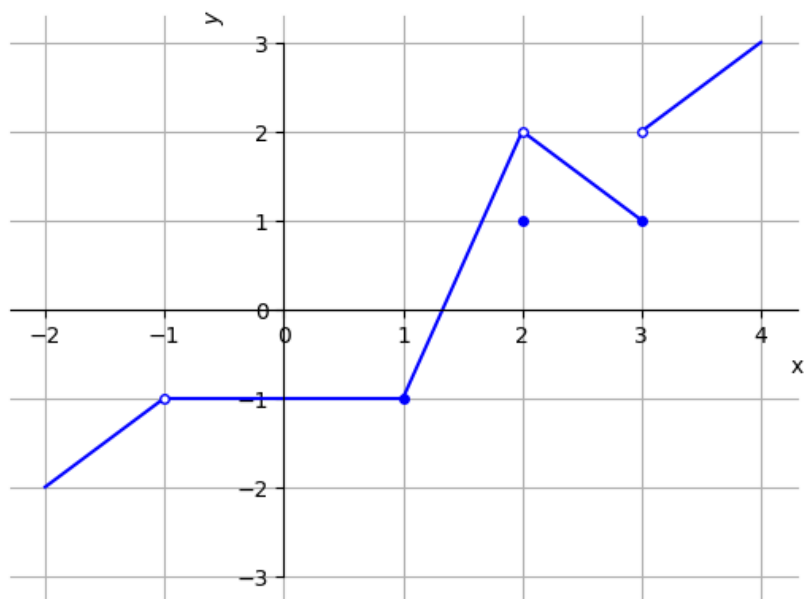


gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**E 2.1.2.** Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercícios 2.1.1), forneça

1.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

**E 2.1.3.** Forneça o valor dos seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} -3$

d)  $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

**E 2.1.4.** Forneça o valor dos seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} x$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} x$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} x$

d)  $\lim_{x \rightarrow e} x$

## 2.2 Regras para o cálculo de limites

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2, \quad (2.5)$$

com  $x_0, L_1, L_2$  números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL_1, \quad (2.6)$$

para qualquer número real  $k$ .

- Regra da soma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2 \quad (2.7)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.8)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.9)$$

desde que  $L_2 \neq 0$ .

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = L_1^s, \quad (2.10)$$

se  $L_1^s$  é um número real.

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (2.11)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (2.12)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit(2*x,x,-1)
```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.13)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.14)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (2.15)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

`limit(x**2-1,x,-1)`

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2}.$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} 1-x^2} \quad (2.16)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow -1} x\right)^2} \quad (2.17)$$

$$= \sqrt{1 - (-1)^2} \quad (2.18)$$

$$= 0. \quad (2.19)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

`limit(sqrt(1-x**2),x,-1)`

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1)(x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)} \quad (2.21)$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1. \quad (2.22)$$

**Proposição 2.2.1.** (Limites de polinômios) Se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.23)$$

para qualquer número real  $b$  dado.

*Demonstração.* Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação. Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (2.25)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.26)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = p(b). \quad (2.27)$$

□



### Exemplo 2.2.2.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}. \quad (2.28)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

**Proposição 2.2.2.** (Limite de funções racionais) Sejam  $r(x) = p(x)/q(x)$  é uma função racional e  $b$  um número real tal que  $q(b) \neq 0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.29)$$

*Demonstração.* Segue da regra do limite do quociente e da Proposição 2.2.1:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (2.30)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.31)$$

□

### Exemplo 2.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = 1. \quad (2.32)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

## 2.2.1 Indeterminação 0/0

Quando  $f(a) = 0$  e  $g(a) = 0$ , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.33)$$

é uma indeterminação do tipo 0/0. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum  $(x - a)$ .

**Exemplo 2.2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3. \quad (2.34)$$

No [SymPy](#), podemos computar o limite acima com

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

**Exemplo 2.2.5.** No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (2.35)$$

temos que o denominador  $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  se anula em  $x = 1$ , assim como o denominador  $q(x) = x^2 + x - 2$ . Assim sendo,  $(x - 1)$  é um fator em comum entre  $p(x)$  e  $q(x)$ . Para explicitá-lo,

$$\frac{p(x)}{x - 1} = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad \frac{q(x)}{x - 1} = x + 2. \quad (2.36)$$

No [SymPy](#), podemos computar estas divisões com os seguintes comandos

```
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad \text{e} \quad q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (2.37)$$

Com isso, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (2.38)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (2.39)$$

**Exemplo 2.2.6.** No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (2.40)$$

temos uma indeterminação do tipo  $0/0$  envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (2.41)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.42)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.43)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.44)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit((sqrt(1-x)-1)/x,x,0)
```

## Exercícios

**E 2.2.1.** Assumindo que o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$  e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (2.45)$$

forneça o valor de  $L$ .

Em construção ...

## 2.3 Limites laterais

Seja dada uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(L, a)$ , sendo  $a$  um número real com  $L < a$  podendo ser  $L = -\infty$ . O **limite lateral à esquerda** de  $f$  no ponto  $a$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (2.46)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x < a$ . Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (2.47)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x < a$  suficientemente próximo de  $a$ .

Para uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(a, L)$ , sendo  $a$  um número real com  $L > a$  podendo ser  $L = \infty$ , o **limite lateral à direita** de  $f$  no ponto  $a$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (2.48)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x > a$ . Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad (2.49)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x > a$  suficientemente próximo de  $a$ .

**Observação 2.3.1.** Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} x = a^\pm, \quad (2.50)$$

onde  $a$  e  $k$  são quaisquer números reais.

**E 2.3.1.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (2.51)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de  $x = 0$ , trabalhamos com  $x < 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (2.53)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (2.54)$$

Verifique!

Usando o [SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos:

```
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

**Teorema 2.3.1.** *Existe o limite de uma dada função  $f$  no ponto  $x = a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se, existem e são iguais a  $L$  os limites laterais à esquerda e à direita de  $f$  no ponto  $x = a$ .*

**E 2.3.2.** No exemplo anterior (Exemplo 2.3.1), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (2.55)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 2.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (2.56)$$

**E 2.3.3.** Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (2.57)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (2.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (2.59)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (2.60)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (2.61)$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, concluímos que não existe o limite de  $|x|/x$  no ponto  $x = 0$ .

No [SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

`limit(abs(x)/x,x,0)`

fornece o valor 1 como saída.

## Exercícios

Em construção ...

## 2.4 Limites e desigualdades

Se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$  em um certo intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e existem os limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (2.62)$$

Observe que a tomada do limite não preserva a desigualdade estrita.

**E 2.4.1.** As funções  $f(x) = x^2/3$  e  $g(x) = x^2/2$  são tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \neq 0$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (2.63)$$

**Observação 2.4.1.** A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x < a$  e existem os limites lateral à esquerda de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x). \quad (2.64)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita. Escreva-o!

### 2.4.1 Teorema do confronto

**Teorema 2.4.1.** (Teorema do confronto) Se  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (2.65)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (2.66)$$

*Demonstração.* Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (2.67)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (2.68)$$

□

**E 2.4.2.** Toda função  $f(x)$  tal que  $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$ , para todo  $x \neq 0$ , tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (2.69)$$

**Observação 2.4.2.** O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

**Exemplo 2.4.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2.70)$$

De fato, começamos assumindo  $0 < x < \pi/2$ . Tomando  $O = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ , observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (2.71)$$

i.e.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x, \quad (2.72)$$

para todo  $0 < x < \pi/2$ .

É certo que  $\operatorname{sen} x < -x$  para  $-\pi/2 < x < 0$ . Com isso e o resultado acima, temos

$$\operatorname{sen} x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.73)$$

Lembrando que  $\operatorname{sen} x$  é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.74)$$

Logo, de (2.73) e (2.74), temos

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|. \quad (2.75)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (2.76)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2.77)$$

**Observação 2.4.3.** Do exemplo anterior (Exemplo 2.4.1), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.78)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade (1.73)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (2.79)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (2.80)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right] \quad (2.81)$$

$$= 1 + 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2. \quad (2.82)$$

Agora, fazemos a mudança de variável  $y = x/2$ . Neste caso, temos  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} y = 0. \quad (2.83)$$

Então, retornando a equação (2.82), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.84)$$

## 2.4.2 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.85)$$



Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos  $0 < x < \pi/2$ . Sendo os pontos  $O = (0,0)$ ,  $P = (\cos x, \sin x)$ ,  $A = (1,0)$  e  $T = (1, \tan x)$ , observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (2.86)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}. \quad (2.87)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por  $\sin x$ <sup>1</sup>, obtemos

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2.88)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (2.89)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (2.90)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.91)$$

Agora, usando o fato de que  $\sin x/x$  é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (2.92)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.93)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

**Exemplo 2.4.2.** Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (2.94)$$

Veja o Exercício 2.4.5.

---

<sup>1</sup> $\sin x > 0$  para todo  $0 < x < \pi/2$ .

## Exercícios

**E 2.4.3.** Supondo que  $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$  para todo  $x \neq 0$ , determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ .

**E 2.4.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{6x}. \quad (2.95)$$

**E 2.4.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (2.96)$$

**E 2.4.6.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (2.97)$$

Em construção ...

## 2.5 Limites no infinito

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função  $f(x)$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ou  $x \rightarrow \infty$ .

Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , se os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente próximos de  $L$  para valores de  $x$  suficientemente pequenos. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (2.98)$$

Analogamente, dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende  $\infty$ , se os valores de  $f(x)$  são arbitrariamente próximos de  $L$  para valores de  $x$  suficientemente grandes. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.99)$$

**Exemplo 2.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Supondo que  $L$ ,  $M$  e  $k$  são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (2.100)$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (2.101)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (2.102)$$

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (2.103)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (2.104)$$

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (2.105)$$

### Exemplo 2.5.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (2.106)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (2.107)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (2.108)$$

**Exemplo 2.5.3.** (Limites no infinito de funções racionais) Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.109)$$

Observe que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. Para contornar este problema, podemos multiplicar e dividir por  $1/x^3$  (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3}. \quad (2.110)$$

Então, aplicando a regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.111)$$

**Observação 2.5.1.** Dados dois polinômios  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (2.112)$$

**Exemplo 2.5.4.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.3), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.113)$$

### 2.5.1 Assíntotas horizontais

A reta  $y = L$  é uma assíntota horizontal do gráfico da função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.114)$$

**Exemplo 2.5.5.** No Exemplo 2.5.3, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.115)$$

Logo, temos que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal do gráfico desta função.

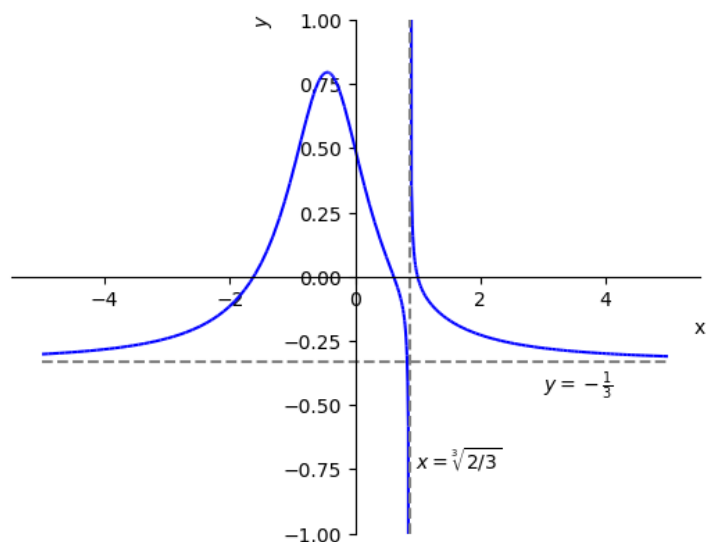


Figura 2.4: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$ .

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.116)$$

O que reforça que  $y = -1/3$  é uma assíntota horizontal desta função. Veja a Figura 2.4.

**Exemplo 2.5.6.** (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.117)$$

donde temos que  $y = 0$  é uma assíntota horizontal da função exponencial natural.

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad (2.118)$$

e, portanto,  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico da recíproca da função exponencial natural.

## 2.5.2 Assíntotas oblíquas

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assíntota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

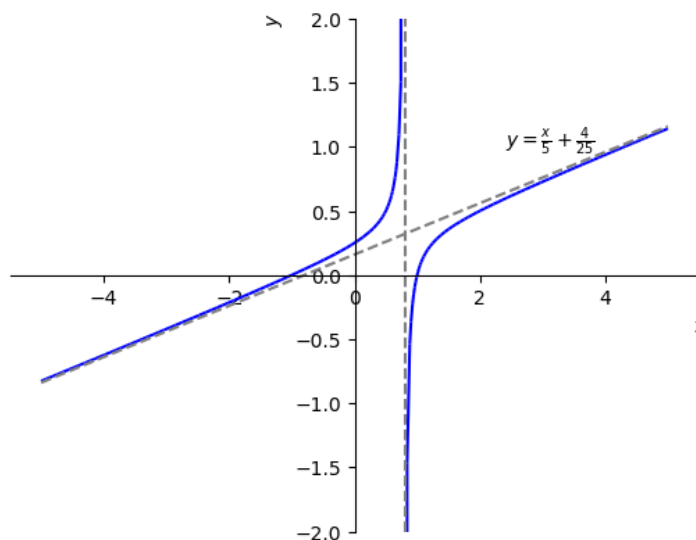


Figura 2.5: Esboço do gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$ .

**Exemplo 2.5.7.** Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (2.119)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (2.120)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , i.e.  $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Com isso, concluímos que  $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$  é uma assíntota oblíqua ao gráfico de  $f(x)$ . Veja a Figura 2.5.

**Observação 2.5.2.** Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

## Exercícios

Em construção ...

## 2.6 Limites infinitos

O limite de uma função nem sempre existe. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (2.121)$$

Entretanto, como é o caso acima, em muitos casos podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, no caso acima, quando  $x \rightarrow 0$  os valores de  $f(x)$  crescem arbitrariamente, i.e.  $f(x) \rightarrow \infty$ .

Mais precisamente, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é infinito quando  $x$  tende a um número  $a$ , quando  $f(x)$  torna-se arbitrariamente grande para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \quad (2.122)$$

Similarmente, definimos os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty. \quad (2.123)$$

### Exemplo 2.6.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty. \quad (2.124)$$

Observe que  $1/|x|$  torna-se arbitrariamente grande para valores de  $x$  suficientemente próximos a  $a$ .

Analogamente, dizemos que o limite de uma dada função  $f(x)$  é menos infinito quando  $x$  tende a  $a$ , quando  $f(x)$  torna-se arbitrariamente pequeno para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ . Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \quad (2.125)$$

De forma similar, definimos os limites laterais  $f(x) \rightarrow -\infty$  quando  $x \rightarrow a^\pm$ .

**Exemplo 2.6.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (2.126)$$

**Exemplo 2.6.3.** Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (2.127)$$

e que não podemos concluir que este limite é  $\infty$  ou  $-\infty$ . Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (2.128)$$

Por outro lado, também não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}, \quad (2.129)$$

mas temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (2.130)$$

Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (2.131)$$

### 2.6.1 Assíntotas verticais

Uma reta  $x = a$  é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função  $y = f(x)$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty. \quad (2.132)$$

**Exemplo 2.6.4.** Vejamos os seguintes casos:

- A função  $f(x) = 1/x$  tem  $y = 0$  como assíntota vertical.
- A função  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$  não está definida para valores de  $x$  tais que seu denominador se anule, i.e.

$$2 - 3x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}. \quad (2.133)$$



Este ponto é um candidato para ter uma assíntota vertical. Isto é, de fato, o caso, pois

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2/3}^-} = -\infty, \quad (2.134)$$

e, ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2/3}^+} = \infty. \quad (2.135)$$

Com isso, dizemos que  $x = \sqrt[3]{2/3}$  é uma assíntota vertical do gráfico desta função. Veja a Figura 2.4.

**Exemplo 2.6.5.** (Função logarítmica) A função logarítmica natural  $y = \ln x$  é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (2.136)$$

i.e.,  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $\ln x$ . Isto decorre do fato de  $y = \ln x$  ser a função inversa de  $y = e^x$  e, esta, ter uma assíntota horizontal  $y = 0$ .

**Exemplo 2.6.6.** As funções trigonométricas  $y = \sec x$  e  $y = \operatorname{tg} x$  têm assíntotas verticais  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  para  $k$  inteiro. Veja as Figuras 1.21.

**Exemplo 2.6.7.** As funções trigonométricas  $y = \operatorname{cosec} x$  e  $y = \operatorname{cotg} x$  têm assíntotas verticais  $x = k\pi$  para  $k$  inteiro. Veja as Figuras 1.22.

## Exercícios

**E 2.6.1.** Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (2.137)$$

Em construção ...

## 2.7 Continuidade

Dizemos que uma **função**  $f$  é **contínua** em um ponto  $c$ , quando  $f(c)$  está definida, existe o limite  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (2.138)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou **à direita**. Quando a **função**  $f$  não é contínua em um dado ponto  $c$ , dizemos que  $f$  é **descontínua** neste ponto.

**Exemplo 2.7.1.** Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (2.139)$$

Na Figura 2.6, temos um esboço do gráfico de  $f$ .

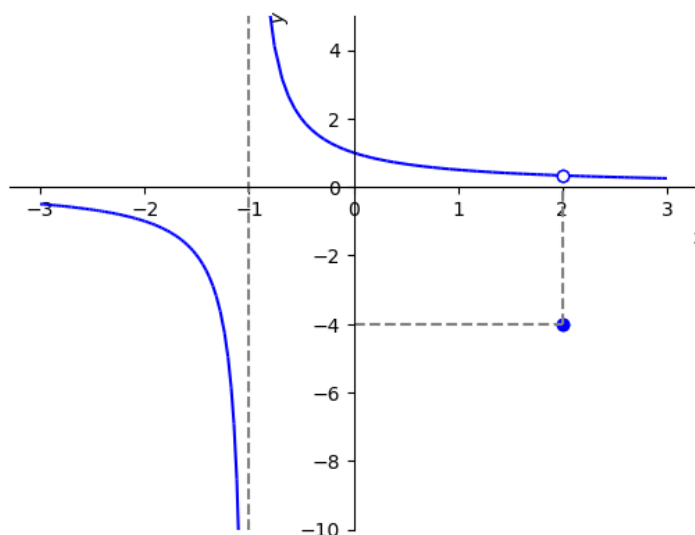


Figura 2.6: Esboço do gráfico da função  $f(x) = (x - 2)/((x + 1)(x - 2))$  estudada no Exemplo 2.7.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

1.  $x = -2$ . Neste ponto, temos  $f(-2) = -1$  e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (2.140)$$

Com isso, concluímos que  $f$  é contínua no ponto  $x = -2$ .

2.  $x = -1$ . Neste ponto,  $f(-1)$  não está definida e, portanto,  $f$  é descontínua neste ponto. Observemos que  $f$  tem uma assíntota vertical em  $x = -1$ , verifique!

3.  $x = 2$ . Neste ponto, temos  $f(2) = -4$  e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (2.141)$$

Portanto, concluímos que  $f$  é descontínua em  $x = 2$ .

Uma função  $f$  é dita ser **contínua em um intervalo**  $(a, b)$ , quando  $f$  é contínua em todos os pontos  $c \in (a, b)$ . Para intervalos,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $[a, b]$ , empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em  $(-\infty, \infty)$ , dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

**Exemplo 2.7.2.** Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.7.1), temos que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (2.142)$$

é contínua nos intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 2)$  e  $(2, \infty)$ .

**Exemplo 2.7.3.** (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.143)$$

Portanto, para  $x \in (-\infty, 0)$  temos  $|x| = -x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Também, para  $x \in (0, \infty)$  temos  $|x| = x$  que é contínua para todos estes valores de  $x$ . Agora, em  $x = 0$ , temos  $|0| = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (2.144)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (2.145)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|, \quad (2.146)$$

donde concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

**Proposição 2.7.1.** (Propriedades de funções contínuas) Se  $f$  e  $g$  funções contínuas em  $x = c$  e  $k$  um número real, então também são contínuas:

- $kf$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $f/g$ , se  $g(c) \neq 0$
- $f^k$ , se existe  $f^k(c)$ .

**Corolário 2.7.1.** *Funções polinomiais  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  são contínuas em toda parte.*

**Corolário 2.7.2.** *Funções racionais  $r(x) = p(x)/q(x)$ , com  $p$  e  $q$  polinômios, são contínuas em todos os pontos de seus domínios.*

**Exemplo 2.7.4.** A função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 2}{x^2 - 1} \quad (2.147)$$

é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (2.148)$$

**Proposição 2.7.2.** (Composição de funções contínuas) Se  $f$  é contínua no ponto  $c$  e  $g$  é contínua no ponto  $f(c)$ , então  $g \circ f$  é contínua no ponto  $c$ .

**Exemplo 2.7.5.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (2.149)$$

Isto é, esta função é contínua em  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

b)  $y = \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|$  é descontínua nos pontos  $x$  tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (2.150)$$

**Observação 2.7.1.** São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

**Exemplo 2.7.6.** Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+4} e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x + 4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0^+} x} = 2. \quad (2.151)$$

**Teorema 2.7.1.** (Teorema do valor intermediário) Uma função  $f$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

**Exemplo 2.7.7.** Podemos afirmar que  $f(x) = x^3 - x - 1$  tem um zero entre  $(0, 2)$ . De fato,  $f$  é contínua no intervalo  $[0, 2]$  e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre  $f(0) = -1 < 0$  e  $f(2) = 5 > 0$ . Observemos que  $y = 0$  está entre  $f(0)$  e  $f(2)$ .

## Exercícios

Em construção ...

# Capítulo 3

## Derivadas

**Observação 3.0.1.** (Códigos Python) Nos códigos Python inseridos ao longo deste capítulos, estaremos assumindo o seguinte preâmbulo:

```
%matplotlib inline
from sympy import *
init_printing()
var('x', real=True)
```

### 3.1 Retas tangentes e derivadas

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função  $f$  pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ ,  $x_0 \neq x_1$ , como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.1)$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ . Veja a Figura 3.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

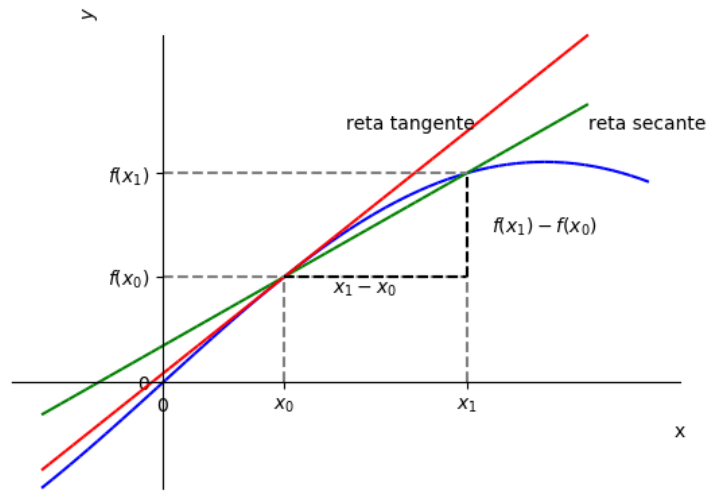


Figura 3.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelho) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função  $f$  em  $x = x_0$  é a reta que passa pelo ponto  $(x_0, f(x_0))$  e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.3)$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.4)$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos  $x_0$  e  $x_1$ , quando  $x_1 \rightarrow x_0$ . Veja a Figura 3.1.

**Observação 3.1.1.** Fazendo  $h = x_1 - x_0$ , temos que (3.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.5)$$

**Exemplo 3.1.1.** Seja  $f(x) = x^2$  e  $x_0 = 1$ . O coeficiente angular da reta

tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $x_0$  é

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} \quad (3.7)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \quad (3.8)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{1} = 2. \quad (3.9)$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  no ponto  $x_0 = 1$  tem coeficiente angular  $m_{\text{tg}} = 2$  e equação

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (3.10)$$

Com o **SymPy**, podemos obter a reta tangente com os seguintes comandos:

```
h = symbols('h', real=True)
f = lambda x: x**2
x0 = 1
# coef. angular
mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h, h, 0)

# reta tangente
mtg*(x-x0)+f(x0)
```

### 3.1.1 A derivada em um ponto

A **derivada** de uma função  $f$  **em um ponto**  $x = x_0$  é denotada por  $f'(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$  e é definida por

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.11)$$

**Exemplo 3.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $f(x) = k$ ,  $k$  constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.12)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0. \quad (3.13)$$



b)  $f(x) = x$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \quad (3.15)$$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ .

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \quad (3.16)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} \quad (3.17)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.18)$$

## Exercícios

Em construção ...

## 3.2 Função derivada

A **derivada** de uma função  $f$  em relação à variável  $x$  é a função  $f' = \frac{df}{dx}$  cujo valor em  $x$  é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.19)$$

quando este limite existe. Dizemos que  $f$  é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto  $x$  de seu domínio, quando o limite dado em (3.19) existe. Se isso ocorre para todo número real  $x$ , dizemos que  $f$  é derivável em toda parte.

**Exemplo 3.2.1.** A derivada de  $f(x) = x^2$  é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.20)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (3.21)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \quad (3.22)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \quad (3.23)$$

Com o SymPy, podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
h = symbols('h',real=True)
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)
```

**Observação 3.2.1.** A derivada à direita (à esquerda) de uma função  $f$  em um ponto  $x$  é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{df}{dx^{\pm}} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.24)$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

**Exemplo 3.2.2.** A função valor absoluto é derivável para todo  $x \neq 0$  e não é derivável em  $x = 0$ . De fato, para  $x < 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.25)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \quad (3.26)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.27)$$

Analogamente, para  $x > 0$  temos

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.28)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.30)$$

Agora, para  $x = 0$ , devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad (3.31)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.32)$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que  $y = |x|$  não é derivável em  $x = 0$ .

**Exemplo 3.2.3.** Vamos calcular a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para  $x = 0$ , só faz sentido calcular a derivada lateral à direita:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = +\infty. \quad (3.33)$$

Ou seja,  $f(x) = \sqrt{x}$  não é derivável em  $x = 0$ . Agora, para  $x > 0$ , temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (3.34)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (3.35)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.37)$$

## Exercícios

Em construção ...

## 3.3 Regras básicas de derivação

Vejamos as derivadas da função constante e da função potência.

- $\frac{dk}{dx} = 0$ , onde  $k$  é uma constante.

Dem.: Com  $f(x) \equiv k$  temos

$$\frac{dk}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.38)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \quad (3.39)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (3.40)$$

No **SymPy**, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
k = symbols('k',real=True)
diff(k,x)
```

- $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ , para  $n$  inteiro positivo.

Dem.: Com  $f(x) = x^n$ , temos

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.41)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (3.42)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (3.43)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \quad (3.44)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (3.45)$$

No **SymPy**, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
n = symbols('n',integer=True, positive=True)
simplify(diff(x**n,x))
```

**Exemplo 3.3.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\frac{d\sqrt{2}}{dx} = 0.$

b)  $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2.$

### 3.3.1 Multiplicação por constante e soma

Sejam  $c$  um número real,  $u$  e  $v$  funções. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $(cu)' = cu'$ .

Dem.:

$$\frac{d}{dx}(cu)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \quad (3.46)$$

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (3.47)$$

$$= c \frac{du}{dx}. \quad (3.48)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
c = symbols('c', real=True)
u = Function('u', real=True)(x)
diff(c*u,x)
```

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .

Dem.:

$$(u \pm v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u \pm v)(x+h) - (u \pm v)(x)}{h} \quad (3.49)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \quad (3.50)$$

$$= u'(x) \pm v'(x). \quad (3.51)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u+v,x)
```

#### Exemplo 3.3.2.

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x - 1) = \frac{d}{dx}x^3 - 2\frac{dx}{dx} - \frac{d1}{dx} \quad (3.52)$$

$$= 3x^2 - 2. \quad (3.53)$$

### 3.3.2 Produto e quocientes

Sejam  $y = u(x)$  e  $y = v(x)$  funções deriváveis, com  $v(x) \neq 0$ . Então:

- $(uv)' = u'v + uv'$ .

Dem.:

$$(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \quad (3.54)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (3.55)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \right. \quad (3.56)$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (3.57)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \quad (3.58)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \quad (3.59)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.60)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u*v, x)
```

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

Dem.:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \quad (3.61)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \quad (3.62)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \right. \quad (3.63)$$

$$\left. - \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.64)$$

$$= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \right. \quad (3.65)$$

$$\left. - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.66)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad (3.67)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
simplify(diff(u/v,x))
```

**Exemplo 3.3.3.** Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + x)(1 + x^3)] = \left[ \frac{d}{dx} (x^2 + x) \right] (1 + x^3) \quad (3.68)$$

$$+ (x^2 + x) \left[ \frac{d}{dx} (1 + x^3) \right] \quad (3.69)$$

$$= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 \quad (3.70)$$

$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 \quad (3.71)$$

$$= 5x^4 + 4x^3 + 2x + 1. \quad (3.72)$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Veja a Observação 3.0.1.

```
d = diff((x**2+x)*(1+x**3),x)
simplify(d)
```

b)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right) = \frac{\left[ \frac{d}{dx}(x^2 + x) \right] (1 - x^3) - (x^2 + x) \left[ \frac{d}{dx}(1 - x^3) \right]}{(1 - x^3)^2} \quad (3.73)$$

$$= \frac{(2x + 1)(1 - x^3) + (x^2 + x)3x^2}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.74)$$

$$= \frac{2x - 2x^4 + 1 - x^3 + 3x^4 + 3x^3}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.75)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} \quad (3.76)$$

Com o SymPy, podemos computar esta derivada com o seguinte comando<sup>2</sup>:

```
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

**Observação 3.3.1.** (Derivada de funções potência) No início desta seção, vimos que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad (3.77)$$

para  $n > 0$  inteiro. Agora, podemos afirmar que este é, também, o caso quando  $n < 0$  inteiro. De fato, se  $n < 0$ , então

$$(x^n)' = \left( \frac{1}{x^{-n}} \right) \quad (3.78)$$

$$= \frac{(1)'x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{(x^{-n})^2} \quad (3.79)$$

$$= \frac{0 - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} \quad (3.80)$$

$$= nx^{2n-n-1} = nx^{n-1}. \quad (3.81)$$

O SymPy, obtém o mesmo resultado, verifique usando os comandos:

---

<sup>2</sup>Veja a Observação 3.0.1.



```
var('n',integer=True)
simplify(diff(x**n,x))
```

**Exemplo 3.3.4.**

$$\frac{d}{dx}x^{-5} = -5x^{-5-1} = -5x^{-4}. \quad (3.82)$$

### 3.3.3 Derivadas de funções exponenciais

Seja  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Então

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.83)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (3.84)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \quad (3.85)$$

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad (3.86)$$

Pode-se mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \quad (3.87)$$

Desta forma, temos

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a. \quad (3.88)$$

Para a função exponencial natural  $y = e^x$ , temos

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \ln e \quad (3.89)$$

$$= e^x. \quad (3.90)$$

**Exemplo 3.3.5.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\frac{d2^x}{dx} = 2^x \ln 2.$

b)

$$\frac{de^{2x}}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x e^x) \quad (3.91)$$

$$= e^x e^x + e^x e^x \quad (3.92)$$

$$= 2e^{2x}. \quad (3.93)$$

### 3.3.4 Derivadas de ordens mais altas

A derivada de uma função  $y = f(x)$  em relação a  $x$  é a função  $y = f'(x)$ . Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de  $f$ , denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right). \quad (3.94)$$

**Exemplo 3.3.6.** Seja  $f(x) = 1/x$ . Então, a primeira derivada de  $f$  é

$$f'(x) = [x^{-1}]' = -x^{-2}. \quad (3.95)$$

De posse da primeira derivada, podemos calcular a segunda derivada de  $f$ , como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' = [-x^{-2}]' = 2x^{-3}. \quad (3.96)$$

Generalizando, quando existe, a  $n$ -ésima derivada de uma função  $y = f(x)$ ,  $n \geq 1$ , é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{d^n}{dx^n} f(x) := \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right], \quad (3.97)$$

com  $f^{(3)} \equiv f'''$ ,  $f^{(2)} \equiv f''$ ,  $f^{(1)} \equiv f'$  e  $f^{(0)} \equiv f$ .

**Exemplo 3.3.7.** a) Para obtermos a terceira derivada de  $f(x) = x^3 - 2x$ , calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 2. \quad (3.98)$$

então

$$f''(x) = 6x \quad (3.99)$$

e, finalmente,

$$f'''(x) = 6. \quad (3.100)$$

Com o **Sympy**, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

```
diff(x**3-2*x,x,3)
```

b) A milionésima primeira derivada de  $f(x) = e^x$  é  $f^{(1001)}(x) = e^x$ . Verifique!

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

### 3.4 Taxa de variação

Observamos que a razão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.101)$$

pode ser entendida como a **taxa de variação média** de  $f$  no intervalo de  $x_0$  a  $x_0 + h$ ,  $h \neq 0$ . Tomando o limite de  $h \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad (3.102)$$

temos a **taxa de variação instantânea** de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $x_0$ , i.e. a taxa com que  $f$  varia no ponto  $x = x_0$ .

**Exemplo 3.4.1.** (Taxa de variação) Suponhamos que o número de litros de água em um tanque,  $t$  minutos depois de iniciar seu esvaziamento, é dado por  $V = 2000(40 - t)^2$ . Deste modelo, podemos tirar várias conclusões.

a) A taxa média do volume de água no tanque nos primeiros 10 minutos é:

$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \frac{V(0 + 10) - V(0)}{10} \quad (3.103)$$

$$= \frac{2000 \cdot 30^2 - 2000 \cdot 40^2}{10} \quad (3.104)$$

$$= 200(900 - 1600) = 100\,000 \text{ L/min.} \quad (3.105)$$

b) Podemos obter a taxa instantânea do volume de água no tanque em  $t = 10$  minutos. Para tanto, calculamos a derivada

$$V'(t) = -160\,000 + 4000t. \quad (3.106)$$

Assim, temos que a taxa de variação instantânea do volume de água no tanque em  $t = 10$  minutos é:

$$V'(10) = 160\,000 + 40\,000 = 120\,000 \text{ L/min.} \quad (3.107)$$

**Exemplo 3.4.2.** (Movimento de uma partícula) Consideremos que, no instante  $t \geq 0$  segundos ( $s$ ), a posição (em metros,  $m$ ) de uma partícula sobre o eixo  $s$  é modelada por  $s = t^2 - 3t$ . Vejamos, então, as seguintes conclusões.

- a) A **velocidade** é, por definição, a derivada da função posição em relação ao tempo (taxa de variação da posição em relação ao tempo). Desta forma, temos que a velocidade da partícula no instante  $t$  é

$$v(t) := \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 3t) = 2t - 3 \text{ m/s.} \quad (3.108)$$

- b) A **aceleração** é, por definição, a derivada da função velocidade em relação ao tempo<sup>3</sup>. Desta forma, temos que a aceleração da partícula no instante  $t$  é

$$a(t) := \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 3) = 2 \text{ m/s}^2. \quad (3.109)$$

**Exemplo 3.4.3.** O volume de um balão esférico é dado em função de seu raio por  $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ . Então, podemos concluir que:

- a) A taxa de variação do volume do balão em relação ao raio quando  $r = 1$  é

$$V'(1) = \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=1} \quad (3.110)$$

$$= \left. \frac{4\pi}{3}r^2 \right|_{r=1} = \frac{4\pi}{3}. \quad (3.111)$$

- b) A taxa de variação calculada no item a), significa que, quando  $r = 1$ , o volume do balão está aumentando  $4\pi/3$  unidades por unidade do raio. Assim, aproximadamente, se o raio aumentar de 1 para 1,1, o volume do balão aumentará  $V'(1)(1,1 - 1) = 0,4\pi/3$ . Observamos que, fazendo o cálculo exato, temos que o aumento do volume é de  $0,4\pi/3$ .

## Exercícios

Em construção ...

---

<sup>3</sup>A aceleração é a segunda derivada da função velocidade em relação ao tempo.

## 3.5 Derivadas de funções trigonométricas

Em construção ...

### Exercícios

Em construção ...

## 3.6 Regra da cadeia

Em construção ...

### Exercícios

Em construção ...

## 3.7 Diferenciabilidade da função inversa

Seja  $f$  uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto  $I$ . Então, pode-se mostrar que sua inversa  $f^{-1}$  é diferenciável em qualquer ponto da imagem da  $f$  no qual  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3.112)$$

**Exemplo 3.7.1.** Seja  $f(x) = 2x^3 - 1$ . Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = 2x^3 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x^3 \quad (3.113)$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{y + 1}{2} \quad (3.114)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y + 1}{2}}. \quad (3.115)$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}. \quad (3.116)$$

Calculando a derivada de  $f^{-1}$  diretamente, temos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{4}}}, \quad (3.117)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}}. \quad (3.118)$$

Agora, usando (3.112) e observando que  $f'(x) = 6x^2$ , obtemos

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (3.119)$$

$$= \frac{1}{6\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^2}, \quad = \frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \quad (3.120)$$

como esperado.

**Exemplo 3.7.2.** (Derivada da função logarítmica)

- Tomando  $f(x) = e^x$  temos  $f^{-1}(x) = \ln x$  e, daí por (3.112)

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (3.121)$$

- Tomando  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos  $f^{-1}(x) = \log_a x$  e, por (3.112),

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3.122)$$

**Exemplo 3.7.3.** (Derivada de funções potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad (3.123)$$

para qualquer  $n \neq 0$  racional. Também, se  $r \neq 0$  é um número real, temos

$$y = x^r \Rightarrow \ln y = \ln x^r = r \ln x. \quad (3.124)$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} r \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \quad (3.125)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y \quad (3.126)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = r x^{r-1}. \quad (3.127)$$

### 3.7.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

Seja  $f(x) = \sin x$  restrita a  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ . Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \arcsin x. \quad (3.128)$$

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (3.112), donde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}. \quad (3.129)$$

Como  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$  (veja Figura 3.2, concluimos

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.130)$$

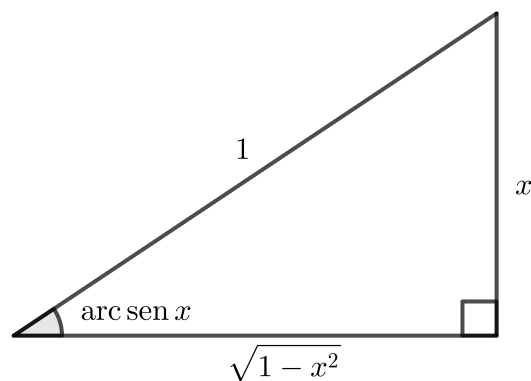


Figura 3.2: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

**Exemplo 3.7.4.**

$$\frac{d}{dx} \arcsen x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.131)$$

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.132)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.133)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (3.134)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.135)$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.136)$$

## Exercícios

Em construção ...

## 3.8 Derivação implícita

Seja  $y = y(x)$  definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \quad (3.137)$$

A derivada  $dy/dx$  pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} g(y(x)) = \frac{d0}{dx} \Rightarrow g'(y(x)) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.138)$$

**Exemplo 3.8.1.** Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.139)$$



Para calcularmos  $dy/dx$ , fazemos

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d0}{dx} \Rightarrow 2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (3.140)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.141)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.142)$$

Em construção ...

## Exercícios

# Capítulo 4

## Aplicações da derivada

**Observação 4.0.1.** Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

### 4.1 Extremos de funções

Seja  $f$  uma função com domínio  $D$ . Dizemos que  $f$  tem valor **máximo absoluto** no ponto  $x = a$  quando

$$f(x) < f(a), \quad (4.1)$$

para todo  $x \in D$ . Analogamente, dizemos que  $f$  tem valor **mínimo absoluto** no ponto  $x = b$  quando

$$f(x) > f(b), \quad (4.2)$$

para todo  $x \in D$ . Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos absolutos**.

**Exemplo 4.1.1.** A função  $f(x) = x^2$  tem valor mínimo absoluto no ponto  $x = 0$  e não assume valor máximo absoluto. A função  $g(x) = -x^2$  tem valor máximo absoluto no ponto  $x = 0$  e não assume valor mínimo absoluto. A função  $h(x) = x^3$  não assume valores mínimo e máximo absolutos. Veja a Figura 4.1.

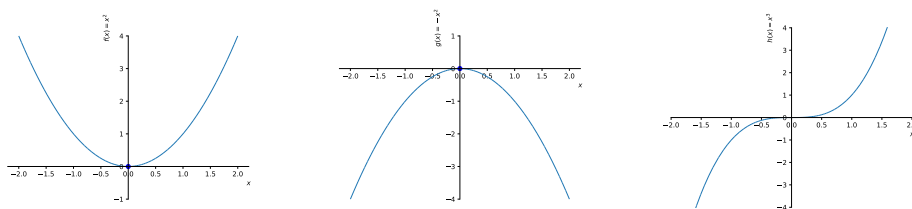


Figura 4.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 4.1.1.

**Teorema 4.1.1.** (Teorema do valor extremo) Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  assume tanto um valor máximo como um valor mínimo absoluto em  $[a, b]$ .

**Exemplo 4.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

- a) A função  $f(x) = (x-1)^2 + 1$  é contínua no intervalo fechado  $[0, \frac{3}{2}]$ . Assume valor mínimo absoluto de 1 no ponto  $x = 1$ . Ainda, assume valor máximo absoluto igual a 2 no ponto  $x = 0$ . Veja Figura 4.2.

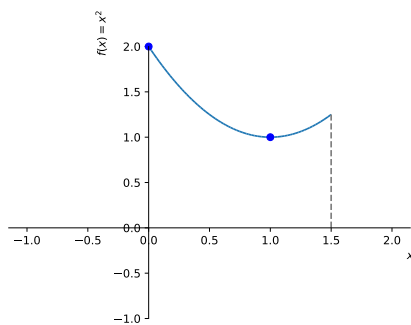


Figura 4.2: Esboço do gráfico de  $f(x) = (x-1)^2 + 1$  no intervalo  $[0, \frac{3}{2}]$ . Veja o Exemplo 4.1.2 a).

- b) A função  $g(x) = \ln x$  é contínua no intervalo  $(0, e]$ . Neste intervalo, assume valor máximo absoluto no ponto  $x = e$ , mas não assume valor mínimo absoluto. Veja Figura 4.3.

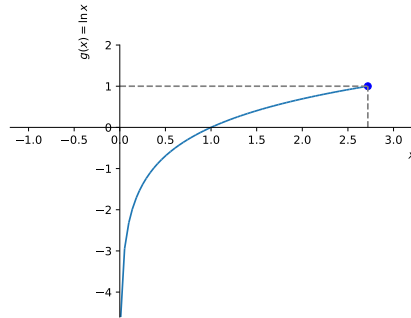


Figura 4.3: Esboço do gráfico de  $g(x) = \ln x$  no intervalo  $(0, e]$ . Veja o Exemplo 4.1.2 b).

c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

definida no intervalo  $[0, 1]$  é descontínua no ponto  $x = 1$ . Neste intervalo, assume valor mínimo absoluto no ponto  $x = 0$ , mas não assume valor máximo absoluto. Veja a Figura 4.4.

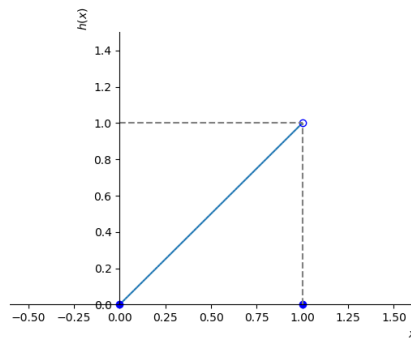


Figura 4.4: Esboço do gráfico de  $h(x)$  no intervalo  $[0, 1]$ . Veja o Exemplo 4.1.2 c).

Uma função  $f$  tem um valor **máximo local** em um ponto interior  $x = a$  de seu domínio, se  $f(x) \leq f(a)$  para qualquer  $x$  em um intervalo aberto que

contenha o ponto  $a$ . Analogamente,  $f$  tem um valor **mínimo local** em um ponto interior  $x = b$  de seu domínio, se  $f(x) \geq f(b)$  para qualquer  $x$  em um intervalo aberto que contenha o ponto  $b$ . Em tais pontos, dizemos que a função tem valores **extremos locais** (ou relativos).

**Exemplo 4.1.3.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < \frac{1}{2}, \\ |x| & , \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \quad (4.4)$$

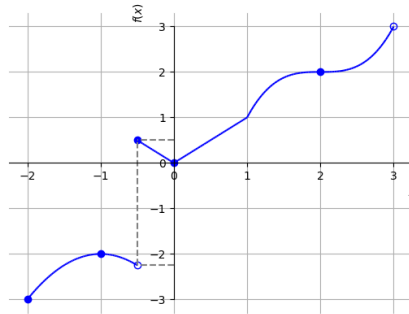


Figura 4.5: Esboço do gráfico de  $f(x)$  discutida no Exemplo 4.1.3.

Na Figura 4.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que  $f$  tem um valor máximo local no ponto  $x = -1$  e tem um valor mínimo local no ponto  $x = 0$ . Observamos que  $x = -2$ ,  $x = -1/2$ ,  $x = 2$  e  $x = 3$  não são pontos de extremos locais desta função. No ponto  $x = -2$ ,  $f$  tem seu valor mínimo absoluto. Ainda,  $f$  não tem valor máximo absoluto.

**Teorema 4.1.2.** (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se  $f$  possui um valor extremo local em um ponto  $x = a$  e  $f$  é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \quad (4.5)$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função  $f$  pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde  $f' = 0$ ,

2. pontos interiores de seu domínio onde  $f'$  não existe, ou
3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função  $f$  onde  $f' = 0$  ou não existe, é chamado de **ponto crítico** da função. Desta forma, afirmamos que  $f$  pode ter valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

**Exemplo 4.1.4.** Consideramos a função  $f(x)$  discutida no Exemplo 4.1.3. No ponto  $x = -1$ ,  $f'(-1) = 0$  e  $f$  tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto  $x = 2$ , também temos  $f'(2) = 0$ , mas  $f$  não tem valor extremo neste ponto.

No ponto  $x = 0$ ,  $f'(0)$  não existe e  $f$  tem valor mínimo local neste ponto. Entretanto, no ponto  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $f'(-\frac{1}{2})$  não existe e  $f$  não tem extremo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que  $f$  tem valor mínimo absoluto no ponto  $x = -2$ , mas não tem extremo absoluto no ponto  $x = 3$ .

### 4.1.1 Exercícios resolvidos

**ER 4.1.1.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = (x+1)^2 - 1$  no intervalo  $[-2,1]$ .

**Solução.** Os valores extremos de uma função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como  $f(x) = (x+1)^2 - 1$  é diferenciável no intervalo  $(-2,1)$ , seus pontos críticos são pontos tais que  $f' = 0$ . Para identificá-los, calculamos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1) = 0 \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow x = -1. \tag{4.7}$$

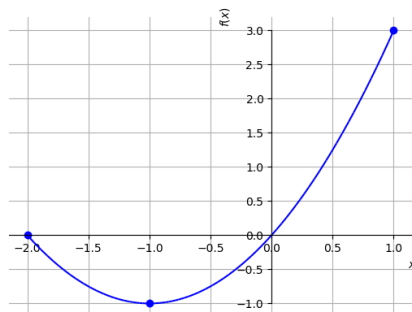


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função  $f(x) = (x + 1)^2 - 1$  discutida no Exercício Resolvido 4.1.1.

Desta forma,  $f$  pode ter valores extremos nos pontos  $x = -2$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ . Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 4.7) e a seguinte tabela:

$x$	-2	-1	1
$f(x)$	0	-1	3

Daí, podemos concluir que  $f$  tem o valor mínimo absoluto (e local) de  $f(-1) = -1$  no ponto  $x = -1$  e tem valor máximo absoluto de  $f(1) = 3$  no ponto  $x = 1$ .

Podemos usar o **Sympy** para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos:

```
# f(x)
f = lambda x: (x+1)**2-1
# f'(x)
f1 = lambda x: diff(f(x),x)
# f'(x)=0
solve(f1(x),x)
# valores nos extremos e no pto crítico
f(-2), f(-1), f(1)
# esboço do gráfico
plot((x+1)**2-1,(x,-2,1),show=True)
```

◇

**ER 4.1.2.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = x^3$  no intervalo  $[-1,1]$ .

**Solução.** Como  $f$  é diferenciável no intervalo  $(-1,1)$ , temos que seus pontos críticos são tais que  $f'(x) = 0$ . Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4.8)$$

é o único ponto crítico de  $f$ . Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura ??) vemos  $f$  não tem valor extremo local neste ponto. Assim, os pontos extremos da  $f$  só podem ocorrer nos extremos do domínio  $[-1,1]$ . Concluimos que  $f(-1) = -1$  é o valor mínimo absoluto de  $f$  e  $f(1) = 1$  é seu valor máximo absoluto.

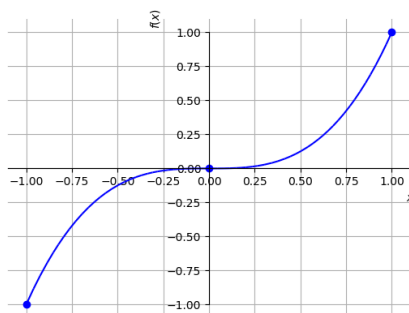


Figura 4.7: Esboço do gráfico da função  $f(x) = x^3$  discutida no Exercício Resolvido 4.1.2.

◇

## 4.1.2 Exercícios

**Exemplo 4.1.5.** Determine os pontos extremos da função  $f(x) = x^{1/3}$  no intervalo  $[-1,1]$ .

Em construção ...



## 4.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

### 4.2.1 Teorema de Rolle

O teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

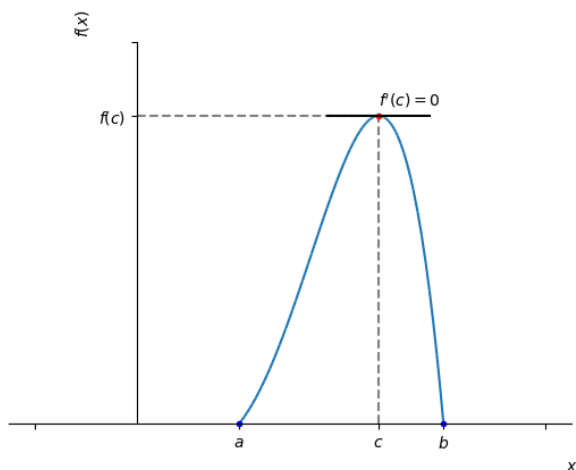


Figura 4.8: Ilustração do teorema de Rolle.

**Teorema 4.2.1.** (Teorema de Rolle) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se

$$f(a) = f(b), \quad (4.9)$$

então existe pelo menos um ponto  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = 0. \quad (4.10)$$

**Exemplo 4.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

- a) O polinômio  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$  tem pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(0,1)$  e no intervalo  $(1,3)$ . De fato,

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \quad (4.11)$$

$$= x(x^2 - 4x + 3) \quad (4.12)$$

$$= x(x-1)(x-3). \quad (4.13)$$

Logo, temos  $p(0) = p(1) = 0$  e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto  $c \in (0,1)$  tal que  $f'(c) = 0$ . Analogamente, como  $p(1) = p(3) = 0$ , segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo  $(1,3)$ .

A função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

é tal que  $f(0) = f(1) = 0$ , entretanto sua derivada  $f'(x) = 1$  no intervalo  $(0,1)$ . Ou seja, a condição da  $f$  ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle.

Não existe ponto tal que a derivada da  $g(x) = -|x-1| + 1$  seja nulo. Entretanto, notemos que  $g(0) = g(2) = 0$  e  $g$  contínua no intervalo fechado  $[0,2]$ . O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois  $g$  não é diferenciável no intervalo  $(0,2)$ , mais especificamente, no ponto  $x = 1$ .

## 4.2.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

**Teorema 4.2.2.** (Teorema do valor médio) Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a,b)$ . Então, existe pelo menos um ponto  $c \in (a,b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.15)$$

**Exemplo 4.2.2.** A função  $f(x) = x^2$  é contínua no intervalo  $[0,2]$  e diferenciável no intervalo  $(0,2)$ . Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto  $c \in (0,2)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \quad (4.16)$$

De fato,  $f'(x) = 2x$  e, portanto, tomando  $c = 1$ , temos  $f'(c) = 2$ .

**Corolário 4.2.1.** (Funções com derivadas nulas são constantes) Se  $f'(x) = 0$  para todos os pontos em um intervalo  $(a, b)$ , então  $f$  é constante neste intervalo.

*Demonstração.* De fato, sejam  $x_1, x_2 \in (a, b)$  e, sem perda de generalidade,  $x_1 < x_2$ . Então, temos  $f$  é contínua no intervalo  $[x_1, x_2]$  e diferenciável em  $(x_1, x_2)$ . Segue do teorema do valor médio que existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (4.17)$$

Como  $f'(c) = 0$ , temos  $f(x_2) = f(x_1)$ . Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo  $(a, b)$ , logo é constante neste intervalo.  $\square$

**Corolário 4.2.2.** (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se  $f'(x) = g'(x)$  para todos os pontos em um intervalo aberto  $(a, b)$ , então  $f(x) = g(x) + C$ ,  $C$  constante, para todo  $x \in (a, b)$ .

*Demonstração.* Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  $\square$

**Corolário 4.2.3.** (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que  $f$  seja contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

- Se  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .
- Se  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .

## Exercícios resolvidos

**ER 4.2.1.** Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

**Solução.** Seja  $s = s(t)$  a função distância percorrida pelo carro e  $t$  o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, existe tempo  $t_1 \in (0, 1,5)$  tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1,5) - s(0)}{1,5 - 0} = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ km/h}. \quad (4.18)$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

$\diamond$

Em construção ...

## Exercícios

**E 4.2.1.** Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

## 4.3 Teste da primeira derivada

Na Seção , vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 4.2.3 nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja  $c$  um ponto crítico de uma função contínua  $f$  e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto  $(a,b)$  contendo  $c$ , exceto possivelmente no ponto  $c$ . Movendo-se no sentido positivo em  $x$ :

- se  $f'$  muda de negativa para positiva em  $c$ , então  $f$  possui um mínimo local em  $c$ ;
- se  $f'$  muda de positiva para negativa em  $c$ , então  $f$  possui um máximo local em  $c$ ;
- se  $f'$  não muda de sinal em  $c$ , então  $c$  não é um extremo local de  $f$ .

**Exemplo 4.3.1.** Consideremos a função  $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$ . Como  $f$  é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.19)$$

Temos  $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ . Segue, que os pontos críticos são

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad (4.20)$$

Com isso, temos

Intervalos	$x < \frac{2-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{7}}{3} < x$
$f'$	+	-	+
$f$	crescente	decrecente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que  $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$  é ponto de máximo local e que  $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$  é ponto de mínimo local.

Podemos usar o **Sympy** para computarmos a derivada de  $f$  com o comando

```
f1 = diff((x - 2)*(x - 1)*(x + 1))
```

Então, podemos resolver  $f'(x) = 0$  com o comando

```
solve(f1)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da  $f'$  com os comandos

```
reduce_inequalities(f1<0)
```

```
reduce_inequalities(f1>0)
```

## Exercícios resolvidos

**ER 4.3.1.** Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \quad (4.21)$$

**Solução.** Como o domínio da  $f$  é  $(-\infty, \infty)$  e  $f$  é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.22)$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.23)$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.24)$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}. \quad (4.25)$$

Portanto, os pontos críticos são  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$  e  $x_3 = -1$ . Fazendo o estudo de sinal da  $f'$ , temos

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x$
$4x$	-	+	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+
$f$	decrecente	crescente	decrecente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que  $x_1 = 0$  é ponto de mínimo local,  $x_2 = -2$  é ponto de máximo local e  $x_3 = -1$  é ponto de máximo local.

◇

## Exercícios

# Capítulo 5

## Integração

**Observação 5.0.1.** Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

### 5.1 Integrais indefinidas

Seja  $f(x)$  uma função. Dizemos que  $F(x)$  é uma **primitiva** de  $f(x)$  quando

$$F'(x) = f(x) \quad (5.1)$$

para todo  $x$  no domínio da  $f$ .

**Exemplo 5.1.1.** Seja  $f(x) = 2x$ . Notemos que  $F(x) = x^2$  é uma primitiva de  $f$ , pois

$$F'(x) = 2x = f(x). \quad (5.2)$$

Também, se  $C$  é uma constante qualquer,  $F(x) = x^2 + C$  é primitiva de  $f(x)$ . De fato, lembrando que a derivada de uma constante é zero, temos

$$F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x). \quad (5.3)$$

**Observação 5.1.1.** Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , então  $F(x) + C$ , com  $C$  constante, também é primitiva de  $f(x)$ .

A **integral indefinida** de uma função  $f(x)$  é denotada por

$$\int f(x) dx \quad (5.4)$$

e é definida por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.5)$$

onde  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ .

**Exemplo 5.1.2.** Do observado no exemplo anterior (Exemplo 5.1.1), temos

$$\int 2x dx = x^2 + C. \quad (5.6)$$

Com o `Sympy`, podemos computar a integral indefinida acima com o comando<sup>1</sup>:

```
integrate(2*x)
```

Observe que o `Sympy` não adiciona a constante indeterminada.

### 5.1.1 Regras básicas de integração

Das regras básicas de derivação, podemos inferir as seguintes regras para integração:

- $\int 0 dx = C.$
- $\int 1 dx = x + C.$
- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \neq 0$  constante.
- $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

---

<sup>1</sup>Veja a Observação 5.0.1.



**Exemplo 5.1.3.**

$$\int x - 3x^2 dx = \int x dx - \int 3x^2 dx \quad (5.7)$$

$$= \int \frac{2}{2} x dx - x^3 + C \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x dx - x^3 + C \quad (5.9)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x^3 + C. \quad (5.10)$$

No exemplo anterior (Exemplo 5.1.3) integramos funções potências. Da regra de derivação

$$[x^n]' = nx^{n-1}, \quad n \neq 0, \quad (5.11)$$

temos

$$\int x^n dx = \int \frac{n+1}{n+1} x^n dx, \quad n \neq -1, \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx, \quad (5.13)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (5.14)$$

Ou seja, obtemos a seguinte regra de integração para função potência

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \quad (5.15)$$

**Exemplo 5.1.4.**

$$\int 3x^{-2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = -\frac{3}{x} + C. \quad (5.16)$$

Das regras de derivação para a função exponencial natural e logaritmo natural, temos

- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$

Também, como  $(a^x)' = a^x \ln a$ , temos

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.17)$$

## Exercícios resolvidos

Em construção ...

### 5.1.2 Exercícios

Em construção ...

## 5.2 Integração por substituição

Seja  $u = u(x)$ . Usando de diferenciais, temos  $du = u'(x)dx$ . Logo,

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.18)$$

Esta é chamada de regra de integração por substituição.

**Exemplo 5.2.1.** Consideremos

$$\int (2x + 1)^2 dx. \quad (5.19)$$

Substituindo

$$u = 2x + 1 \quad (5.20)$$

temos

$$du = 2dx. \quad (5.21)$$

Portanto,

$$\int (x + 1)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2} \quad (5.22)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du \quad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad (5.24)$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \quad (5.25)$$

$$= \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C. \quad (5.26)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 5.2.1.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.27)$$

**Solução.** Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.28)$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \quad (5.29)$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \quad (5.30)$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{u^2} du \quad (5.31)$$

$$= 7 \int u^{-2} du \quad (5.32)$$

$$= 7 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \quad (5.33)$$

$$= -\frac{7}{u} \quad (5.34)$$

$$= \frac{7}{1-x}. \quad (5.35)$$

◇

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

## 5.3 Integração por partes

Sejam  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  funções diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \quad (5.36)$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{du}{dx} v dx + \int u \frac{dv}{dx} dx, \quad (5.37)$$

donde

$$uv = \int v du + \int u dv. \quad (5.38)$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.39)$$

**Exemplo 5.3.1.** Consideremos  $\int x e^x dx$ . Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \quad (5.40)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x. \quad (5.41)$$

Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (5.42)$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad (5.43)$$

$$= x e^x - e^x + C. \quad (5.44)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 5.3.1.** Calcule

$$\int x \ln x dx. \quad (5.45)$$

**Solução.** Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.46)$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.47)$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C. \quad (5.48)$$

Tomando  $C = 0$ , e usando a fórmula, obtemos

$$\int x \ln x dx = \int u dv \quad (5.49)$$

$$= uv - \int v du \quad (5.50)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \quad (5.51)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \quad (5.52)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad (5.53)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (5.54)$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do **Sympy**<sup>2</sup>:

```
integrate(x*log(x),x)
```

◇

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

## 5.4 Integral definida

Em construção ...

---

<sup>2</sup>Veja a Observação [5.0.1](#).

### 5.4.1 Teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre a integral definida de uma função e suas primitivas.

**Teorema 5.4.1.** (Teorema fundamental do cálculo) Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e  $F$  é qualquer primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.55)$$

**Observação 5.4.1.** Uma outra forma do teorema fundamental do cálculo é a seguinte: se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.56)$$

é contínua em  $[a, b]$ , derivável em  $(a, b)$  e sua derivada é

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (5.57)$$

### 5.4.2 Substituição em integrais definidas

Em algumas situações, faz-se necessário a aplicação da técnica de integração por substituição para integrais definidas. Neste contexto, sejam  $f$  e  $u$  funções dadas e  $F$  uma primitiva de  $f$ . Então,

$$[F(u)]' = F'(u)u' = f(u)u'. \quad (5.58)$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = F(u(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \quad (5.59)$$

$$= F(u)\Big|_{u=u(a)}^{u=u(b)} \quad (5.60)$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.61)$$

Resumidamente, temos que a **regra da substituição em integrais definidas**, lê-se

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.62)$$

### 5.4.3 Integração por partes para integrais definidas

Podemos aplicar a fórmula de integração por partes para integrais definidas. Neste caso, temos

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (5.63)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 5.4.1.** Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.64)$$

**Solução.** Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- Solução 1: aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.65)$$

Escolhendo,  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x dx$ . Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.66)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.67)$$

$$= -\frac{1}{2} \left. \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_{u=1}^0 \quad (5.68)$$

$$= -\frac{1}{3} \left. \sqrt{u^3} \right|_{u=1}^0 \quad (5.69)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (5.70)$$

- Solução 2: calculando uma primitiva em função de  $x$ . Para obtermos uma primitiva em função de  $x$ , calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.71)$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo  $u = 1 - x^2$ , temos  $du = -2x \, dx$  e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.72)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du \quad (5.73)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (5.74)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \quad (5.75)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \quad (5.76)$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (5.77)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do Sympy:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2), (x,0,1))
```

◇

**ER 5.4.2.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x e^x \, dx. \quad (5.78)$$

**Solução.** Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx. \quad (5.79)$$

Para tanto, escolhemos  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^x$ , donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x) \, dx = \int e^x \, dx = e^x + C. \quad (5.80)$$



Escolhendo  $C = 0$  e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \int_{-1}^1 f(x) g'(x) dx \quad (5.81)$$

$$= f(x) g(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x) f'(x) dx \quad (5.82)$$

$$= x e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \quad (5.83)$$

$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1 \quad (5.84)$$

$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \quad (5.85)$$

$$= 2e^{-1}. \quad (5.86)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do Sympy:

```
integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
```

◇

Em construção ...

## Exercícios

**E 5.4.1.** Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.87)$$

**E 5.4.2.** Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx. \quad (5.88)$$

**E 5.4.3.** Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx. \quad (5.89)$$

**E 5.4.4.** Calcule

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx. \quad (5.90)$$

# Capítulo 6

## Aplicações da integral

**Observação 6.0.1.** Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

### 6.1 Cálculo de áreas

A integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  está associada a área entre o gráfico da função  $f$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[a, b]$ . Ocorre que se  $f$  for não negativa, então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Se  $f$  for negativa, então  $\int_a^b f(x) dx < 0$ . Por isso, dizemos que  $\int_a^b f(x) dx$  é a área líquida (ou com sinal) entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

Em construção ...

#### 6.1.1 Áreas entre curvas

Observamos que se  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx \tag{6.1}$$

corresponde à área entre as curvas  $f(x)$  e  $g(x)$  restritas ao intervalo  $[a, b]$ .

Em construção ...

## Exercícios resolvidos

**ER 6.1.1.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3 - x$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1,1]$ .

**Solução.** Para calcularmos a área entre o gráfico de  $f(x)$  e o eixo das abscissas no intervalo  $[-1,1]$ , fazemos:

1. O estudo de sinal de  $f$  no intervalo  $[-1,1]$ .

(a) Cálculo das raízes de  $f$  no intervalo  $[-1,1]$ .

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \quad (6.4)$$

(b) Os sinais de  $f(x)$ .

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (6.5)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (6.6)$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

(a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^3 - x dx \quad (6.7)$$

$$= \int x^3 dx - \int x dx \quad (6.8)$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \quad (6.9)$$

(b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (6.10)$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \quad (6.11)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

Podemos computar a solução deste exercício usando os seguintes comandos do Sympy<sup>1</sup>. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

◇

**ER 6.1.2.** Calcule a área entre a reta  $y = 1$  e o gráfico de  $f(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ .

**Solução.** Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado  $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$  descontada a área sob o gráfico de  $f(x) = x^2$  restrita ao intervalo  $[0,1]$ . Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2 dx \quad (6.13)$$

$$= 1 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad (6.14)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6.15)$$

◇

**ER 6.1.3.** Calcule a área entre as curvas  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$  e  $x = 1$ .

**Solução.** O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  restritas ao intervalo  $[0,1]$ . Como  $f(x) \geq g(x)$  neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) dx \quad (6.16)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx \quad (6.17)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{6}. \quad (6.19)$$

---

<sup>1</sup>Veja Observação 6.0.1.



Em construção ...

## Exercícios

**E 6.1.1.** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^3$  e a reta  $y = 1$  restritas ao intervalo  $[-1, 1]$ .

**E 6.1.2.** Calcule a área entre as curvas  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$  e  $x = 2$ .

Em construção ...

## 6.2 Volumes por fatiamento e rotação

Em construção ...

### Exercícios resolvidos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; Imagem:  $(-\infty, \infty)$

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; Imagem:  $[1, \infty)$ .

**E 1.1.0.** Domínio:  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ; Imagem:  $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ .

**E 1.2.0.**  $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

**E 1.2.0.** não há.

**E 1.3.1.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.3.2.** a) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ; imagem:  $(0, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.3.3.** a) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $[0, \infty)$ . b) domínio:  $(-\infty, \infty)$ ; imagem:  $(-\infty, \infty)$ . Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

**E 1.4.1.**  $-1, 0, 1$

**E 1.4.2.**  $9/4$

**E 1.5.3.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

**E 1.6.1.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**E 1.6.2.** Dica: analise o ciclo trigonométrico.

**E 1.7.1.**  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$ ; domínio:  $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ .

**E 1.7.2.** Dica: verifique sua resposta com um pacote de matemática simbólica, por exemplo, com o **Sympy**.

**E 1.8.1.** decrescente:  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ; crescente:  $[-1, 1]$ .

**E 1.8.2.** função ímpar

**E 1.8.3.**  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ ; domínio  $[-1, \infty)$

**E 1.9.1.** Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

**E 1.10.1.** Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar sua resposta.

**E 2.1.1.** a)  $-1$ ; b)  $-1$ ; c)  $2$ ; d)  $\nexists$

**E 2.1.3.** a)  $2$ ; b)  $2$ ; c)  $-3$ ; d)  $\pi$

**E 2.1.4.** a)  $2$ ; b)  $-2$ ; c)  $-3$ ; d)  $e$

**E 2.2.1.**  $6$

**E 2.4.3.**  $1$

**E 2.4.4.**  $0$

**E 2.4.5.**  $0$

**E 2.4.6.**  $\frac{1}{2}$

**E 4.1.0.**  $f(-1) = -1$  é o valor mínimo absoluto;  $f(1) = 1$  é o valor máximo absoluto.

**E 5.4.1.**  $\frac{7}{2}$

**E 5.4.2.**  $4$

**E 5.4.3.**  $\frac{1}{2}$

**E 5.4.4.**  $-\frac{5}{e} + e$

**E 6.1.1.** 2

**E 6.1.2.** Observamos o problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$  restritas no intervalo  $[0,2]$ . Como  $g(x) \geq f(x)$  no intervalo  $[0,1]$  e  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[1,2]$ , temos

$$A = \int_0^1 g(x) - f(x) dx + \int_1^2 f(x) - g(x) dx \quad (6.20)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x dx \quad (6.21)$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \quad (6.22)$$

$$= 1 \quad (6.23)$$



# Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.
- [2] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

# Índice Remissivo

- base, [46](#)
- domínio, [1](#)
  - natural, [2](#)
- função, [1](#)
  - ímpar, [43](#)
  - afim, [5](#)
  - algébrica, [3](#)
  - cúbica, [19](#)
  - composta, [32](#)
  - constante, [5](#)
  - contínua, [75](#)
  - cossecante, [28](#)
  - cotangente, [28](#)
  - definida por partes, [4](#)
  - exponencial, [46](#)
  - identidade, [43](#)
  - inversa, [44](#)
  - logarítmica, [48](#)
  - par, [43](#)
  - periódica, [27](#)
  - potência, [12](#)
  - quadrática, [19](#)
  - racional, [22](#)
  - secante, [28](#)
  - tangente, [28](#)
  - transcendente, [4](#)
  - valor absoluto, [4](#)
- função polinomial, [18](#)
- gráfico, [3](#)
- grau do polinômio, [18](#)
- imagem, [1](#)
- polinômio, [18](#)
  - quadrático, [19](#)
- polinômio cúbico, [19](#)
- reta
  - identidade, [44](#)