

Vetores

Pedro H A Konzen

2 de maio de 2020

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
1 Vetores	1
1.1 Segmentos orientados	1
1.2 Vetores	6
1.2.1 Adição de vetores	8
1.2.2 Vetor oposto	9
1.2.3 Subtração de vetores	10
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar	11
1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores	12
2 Bases e coordenadas	15
2.1 Dependência linear	15
2.1.1 Combinação linear	15
2.1.2 Dependência linear	16
2.1.3 Observações	17
2.2 Bases e coordenadas	22
2.2.1 Operações de vetores com coordenadas	24
2.2.2 Dependência linear	26
2.3 Mudança de base	28
2.4 Bases ortonormais	29

3	Produto escalar	31
3.1	Produto escalar	31
3.1.1	Propriedades do produto escalar	31
3.2	Ângulo entre dois vetores	33
3.2.1	Desigualdade triangular	35
3.3	Projeção ortogonal	36
4	Produto vetorial	38
4.1	Definição	39
4.1.1	Interpretação geométrica	39
4.1.2	Produto vetorial via coordenadas	40
4.1.3	Exercícios	40
4.2	Propriedades do produto vetorial	40
5	Produto misto	44
5.1	Definição	44
5.1.1	Propriedades	45
	Respostas dos Exercícios	47
	Referências Bibliográficas	48
	Índice Remissivo	49

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r . O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB .

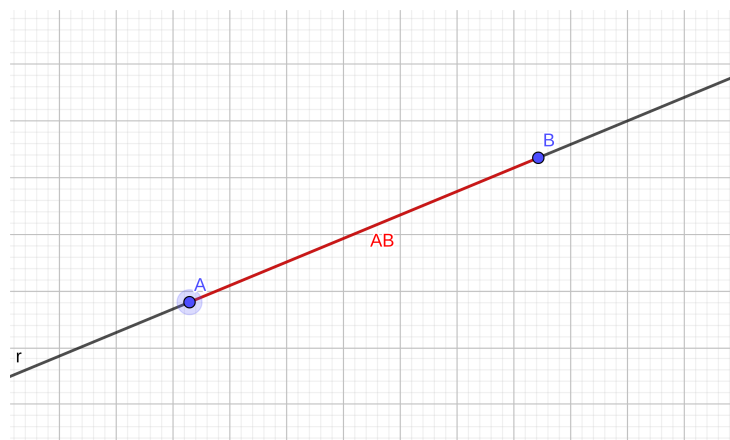


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB .

Associado a um segmento AB , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B . A distância entre os pontos A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.

A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B .

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

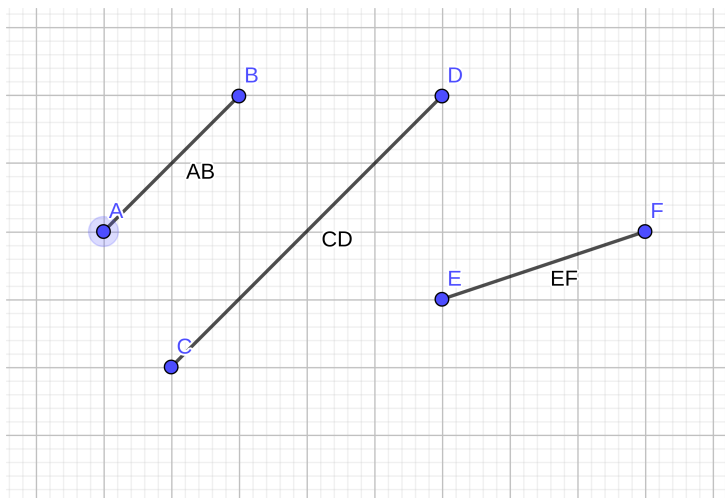


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B , sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

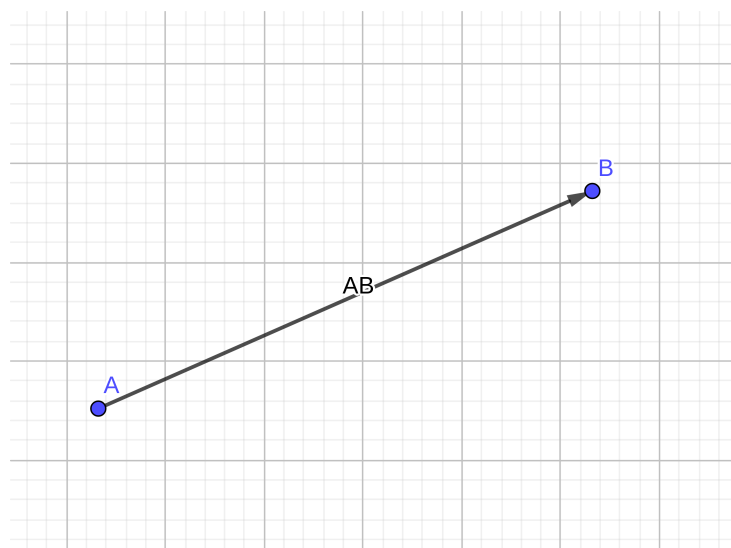


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB .

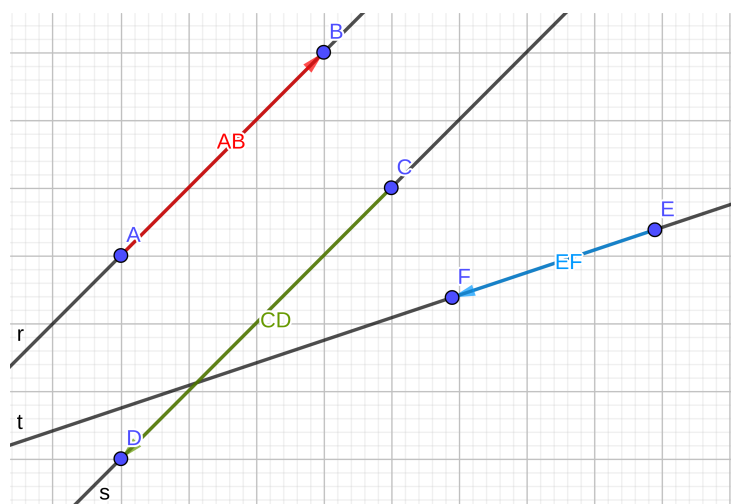


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

1.5). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

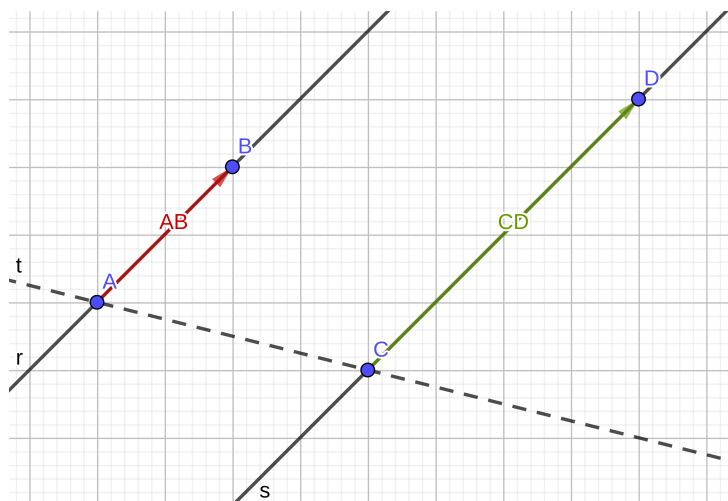


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6. Segmentos nulos também são considerados equipolentes entre si. Quando AB é equipolente a CD , escrevemos $AB \sim CD$.

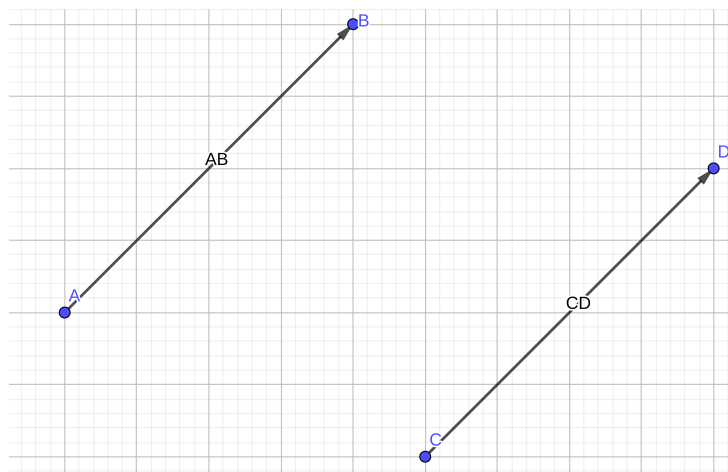


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

A relação de equipolência é uma **relação de equivalência**. De fato, temos:

- **relação reflexiva:** $AB \sim AB$;
- **relação simétrica:** $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$;
- **relação transitiva:** $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$.

Com isso, dado um segmento AB , definimos a **classe de equipolência** de AB como o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB . O segmento AB é um **representante** desta classe.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

Solução. Começamos mostrando a implicação. Por hipótese, temos que AB e CD são equipolentes. A tese é clara no caso de AB e CD serem coincidentes. Vejamos, então, o caso em que AB e CD não são coincidentes. Desta forma, $ABCD$ determina um paralelogramo de diagonais AD e BC . Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios, temos demonstrado a implicação.

Agora, mostramos a recíproca. Por hipótese, temos que os pontos médios de AD e BC são coincidentes. Novamente, se AD e BC são coincidentes a conclusão é direta. Consideremos o caso em que AD e BC não são coincidentes. Daí, segue que AB e CD têm o mesmo tamanho e mesma direção. Seja M o ponto médio de AD e BC e π o plano determinado pelos segmentos AB e CD . Notando que M , B e D estão no mesmo semiplano de π determinado pela reta AC , concluímos que AB e CD são equipolentes.

◇

ER 1.1.2. Mostre que $AB \sim CD$, então $BA \sim DC$.

Solução. AB e BA têm o mesmo tamanho e direção. CD e DC têm o mesmo tamanho e direção. Como $AB \sim CD$, temos que BA e DC têm o mesmo tamanho e direção. Por fim, observa-se que BA e DC têm ambos o mesmo sentido oposto de AB e DC .

◇

Exercícios

E 1.1.1. Faça o esboço de dois segmentos AB e CD com $|AB| \neq |CD|$ e cujas retas determinadas por eles sejam coincidentes.

E 1.1.2. Faça o esboço de dois segmentos orientados $AB \not\sim CD$ e de mesmo sentido.

E 1.1.3. Faça o esboço de dois segmentos orientados colineares, de tamanhos iguais e sentidos opostos.

E 1.1.4. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: é quadrado todo trapézio retângulo $ABCD$ com segmentos orientados AD e BC equipolentes. Justifique sua afirmação.

E 1.1.5. Mostre que $AB \sim CD$, então $AC \sim BD$.

E 1.1.6. Mostre que se $AC \sim CB$, então C é ponto médio do segmento AB .

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB , chama-se **vetor** AB e denota-se \overrightarrow{AB} , qualquer segmento orientado equipolente a AB . Em outras palavras, o vetor \overrightarrow{AB} é a classe de equipolência que tem o segmento orientado AB como um representante. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor \overrightarrow{AB} .

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

O **vetor nulo** é aquele que tem como seu representante um segmento orientado nulo. É denotado por $\vec{0}$.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor \vec{v} é denotado(a) por $|\vec{v}|$ e é definido como o valor do comprimento de qualquer uma de suas representações. Mais precisamente, se \overrightarrow{AB} é uma representação de \vec{v} , então $|\vec{v}| := |\overrightarrow{AB}|$.

Observação 1.2.1. $|\vec{v}| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Lembrando que $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$, i.e. a distância entre os pontos A e B , segue que se $\vec{v} = \vec{0}$, então A e B são dois pontos sobrepostos e,

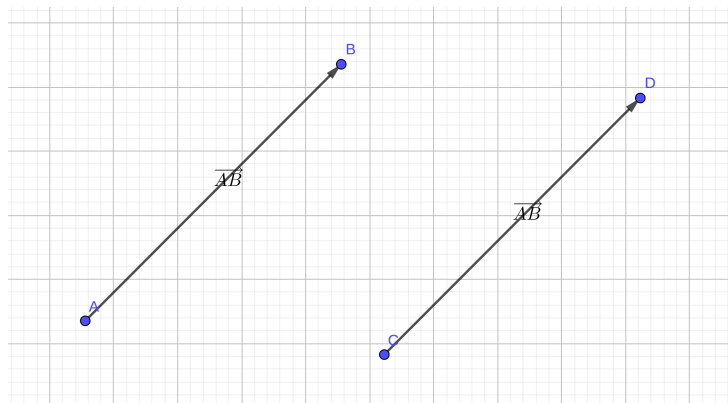


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

portanto, $|\vec{v}| = |AB| = 0$. Reciprocamente, se $|AB| = 0$, então A e B são sobrepostos e $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

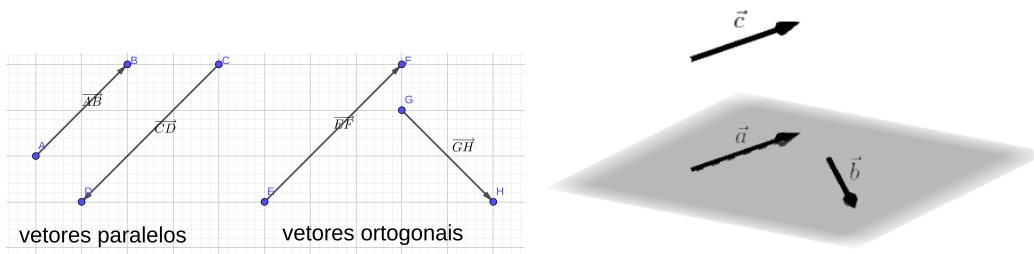


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

► Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . Sejam, ainda, uma representação \overrightarrow{AB} de \vec{u} e uma representação \overrightarrow{BC} do vetor \vec{v} . Então, define-se o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o vetor representado por \overrightarrow{AC} . Veja a Figura 1.9.

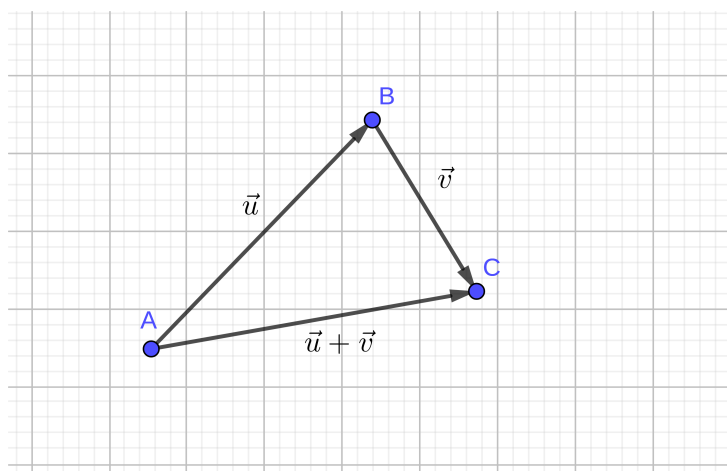


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

Observação 1.2.2. Vejamos as seguintes propriedades:

a) Elemento neutro na adição:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad (1.1)$$

De fato, seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Observamos que podemos representar $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$. Logo, temos $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) Associatividade na adição:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \quad (1.2)$$

De fato, sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$. Então, segue

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \quad (1.3)$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \quad (1.4)$$

$$= \overrightarrow{AD}, \quad (1.5)$$

bem como,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \quad (1.6)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \quad (1.7)$$

$$= \overrightarrow{AD}. \quad (1.8)$$

c) Comutatividade da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.9)$$

Esta propriedade pode ser demonstrada usando a regra do paralelogramo que veremos mais adiante. Veja, também, o Exercício Resolvido 1.2.1.

1.2.2 Vetor oposto

► Vídeo disponível!

Um **vetor** \vec{v} é dito ser **oposto** a um dado vetor \vec{u} , quando quaisquer representações de \vec{u} e \vec{v} são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a \vec{u} . Veja a Figura 1.10.

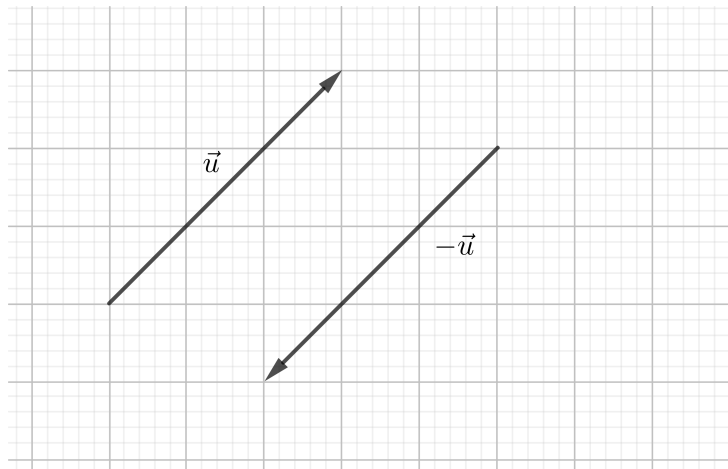


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

Observação 1.2.3. $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$.

De fato, seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Então, $|\vec{v}| = |AB| = |BA| = |-\vec{v}|$.

Observação 1.2.4. (Existência do oposto)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \quad (1.10)$$

De fato, seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Então, $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Segue que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) \quad (1.11)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \quad (1.12)$$

$$= \overrightarrow{AA} \quad (1.13)$$

$$= \vec{0}. \quad (1.14)$$

1.2.3 Subtração de vetores

► [Vídeo disponível!](#)

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . A subtração de \vec{u} com \vec{v} é denotada por $\vec{u} - \vec{v}$ e é definida pela adição de \vec{u} com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

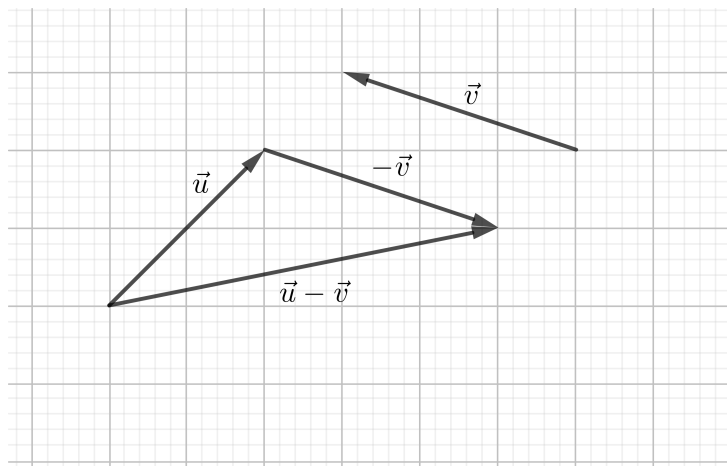


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de \vec{u} com \vec{v} , i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

Observação 1.2.5. (Regra do paralelogramo)

► Vídeo disponível!

Sejam vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Seja, ainda, C o vértice oposto ao A no paralelogramo determinado pelos lados formados pelos segmentos AB e AD . Então, temos $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$. Veja a Figura 1.12.

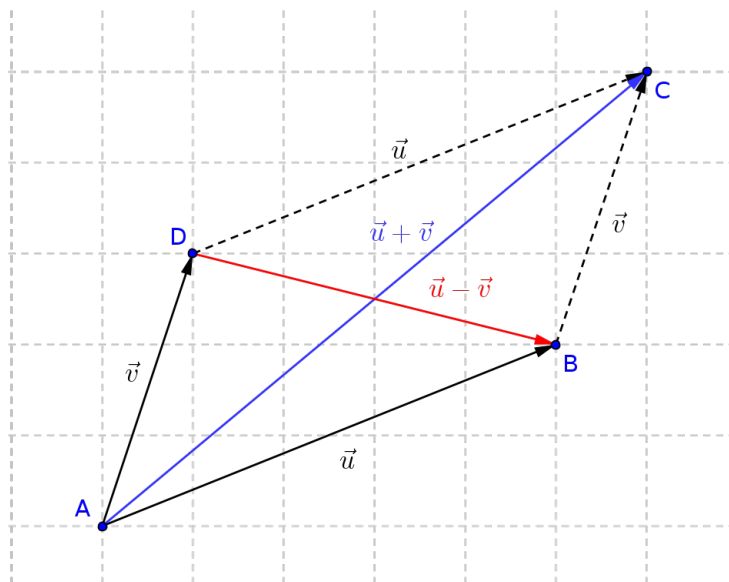


Figura 1.12: Regra do paralelogramo para a apresentação geométrica da soma e da diferença de vetores.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

► Vídeo disponível!

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor \vec{u} é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de \vec{u} com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.6. • Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.

• $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

Observação 1.2.7. As seguintes propriedades são válidas:

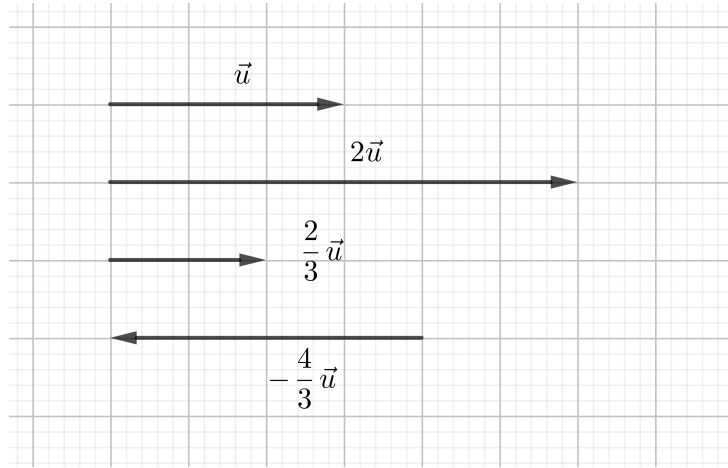


Figura 1.13: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

a) Associatividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \vec{u} \quad (1.15)$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que $\alpha (\beta \vec{u})$ e $(\alpha\beta) \vec{u}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido. Por fim, temos

$$|\alpha (\beta \vec{u})| = |\alpha| |\beta \vec{u}| \quad (1.16)$$

$$= |\alpha| (|\beta| |\vec{u}|) \quad (1.17)$$

$$= (|\alpha| |\beta|) |\vec{u}| \quad (1.18)$$

$$= |\alpha\beta| |\vec{u}| \quad (1.19)$$

$$= |(\alpha\beta) \vec{u}|. \quad (1.20)$$

b) Distributividade:

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \quad (1.21)$$

$$\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \quad (1.22)$$

1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e quaisquer escalares α

e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad (1.23)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.24)$$

- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Mostre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Solução. Seja $ABCD$ o paralelogramo com $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Logo, pela regra do paralelogramo temos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (1.25)$$

$$= \overrightarrow{AC} \quad (1.26)$$

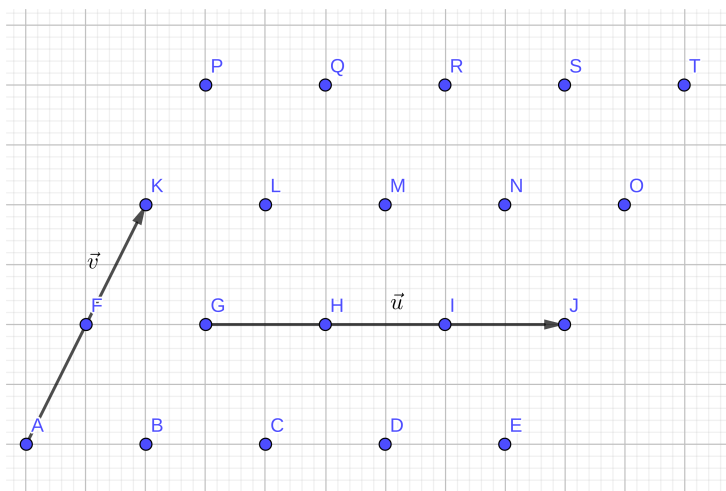
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad (1.27)$$

$$= \vec{v} + \vec{u}. \quad (1.28)$$

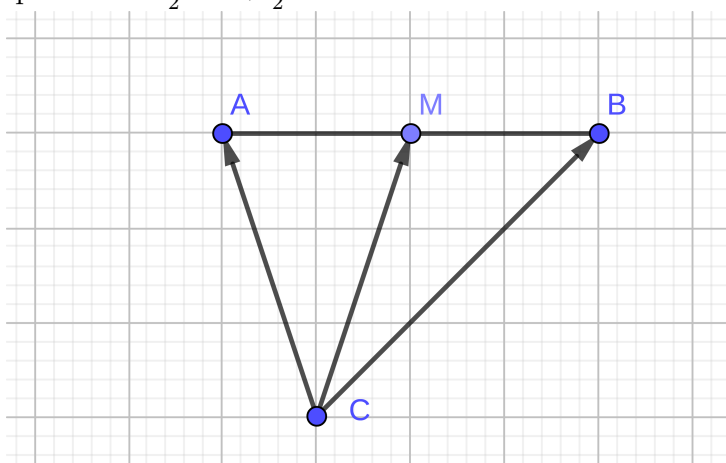
◇

Exercícios

E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u} = \overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores \overrightarrow{RS} , \overrightarrow{NI} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{NQ} , \overrightarrow{AT} e \overrightarrow{PE} em função de \vec{u} e \vec{v} .



E 1.2.2. Sejam \vec{CA} , \vec{CM} e \vec{CB} os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$.



E 1.2.3. Seja dado um vetor $\vec{u} \neq 0$. Calcule a norma do vetor $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$ ¹.

E 1.2.4. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

1. $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$
2. $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

¹ $\vec{u}/|\vec{u}|$ é chamado de vetor \vec{u} normalizado, ou a normalização do vetor \vec{u} .

Capítulo 2

Bases e coordenadas

Observação 2.0.1. Neste capítulo, vamos computar a solução de alguns problemas usando `Python`. Para tanto, utilizaremos a biblioteca de matemática simbólica `SymPy`.

Nos códigos `Python` apresentados ao longo deste capítulo, assumiremos que os seguintes comandos já estejam executados:

```
from sympy import *
```

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, \dots, c_n , com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n \quad (2.1)$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que \vec{u} é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor \vec{u} .

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores \vec{v} , \vec{w} e \vec{z} . Então, temos:

- a) $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{v} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .
- b) $\vec{u}_2 = \vec{v} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{z} .

c) $\vec{u}_3 = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores \vec{u} , \vec{w} e \vec{z} .

d) $\vec{u}_4 = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor \vec{z} .

Observação 2.1.1. (Interpretação geométrica)

a) Uma combinação linear não nula envolvendo um único vetor \vec{u} é um vetor paralelo a \vec{u} . De fato, seja

$$\vec{v} = c\vec{u}, \quad c \neq 0, \quad (2.2)$$

i.e. \vec{v} é combinação linear não nula de \vec{u} . Então, \vec{v} tem a mesma direção de \vec{u} .

b) Uma combinação linear não nula envolvendo dois vetores \vec{u} e \vec{v} é coplanar a estes vetores. De fato, seja

$$\vec{w} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}, \quad c_1 \cdot c_2 \neq 0, \quad (2.3)$$

e π o plano determinado pelas representações de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Logo, seguindo a regra do paralelogramo, vemos que \vec{w} tem uma representação no plano determinado pelos segmentos AB e AC .

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

a) \vec{u}_1 e \vec{u}_2 dependem linearmente dos vetores \vec{u} e \vec{z} .

b) \vec{u}_3 depende linearmente dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{z} .

c) Os vetores \vec{u}_4 e \vec{z} são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguinte condições é satisfeita:

a) um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta \vec{u}; \quad (2.4)$$

b) \vec{u} e \vec{v} têm a mesma direção;

c) \vec{u} e \vec{v} são paralelos.

De fato, a afirmação a) é a definição de dependência linear. A b) é consequência imediata da a), bem como a c) é equivalente a b). Por fim, se \vec{u} e \vec{v} são vetores paralelos, então um é múltiplo por escalar do outro. Ou seja, c) implica a).

Observação 2.1.2. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor \vec{u} . De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \quad (2.5)$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor \vec{u} .

Observação 2.1.3. Dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.6)$$

De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}, \quad (2.7)$$

i.e. o vetor \vec{u} é combinação linear do vetor \vec{v} e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{u} \quad (2.8)$$

e, então, teríamos \vec{u} e \vec{v} l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \quad (2.9)$$

Afirmamos que se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d., então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores \vec{v} e \vec{w} . Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de \vec{u} no plano π . Por fim, observamos que se $\alpha, \beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de \vec{v} e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de \vec{w} . Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π . Sejam \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A , B e C pertencem a π , assim como o segmento AC . Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

Reciprocamente, **se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..**

De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então \vec{u} pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores \vec{v} e \vec{w}

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.10)$$

Neste caso, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.11)$$

E, então, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Agora, suponhamos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π . Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC , respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B . Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B . Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que \vec{v} é combinação linear de \vec{u} e \vec{w} , i.e. \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..

Observação 2.1.4. Três vetores dados \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \quad (2.12)$$

De fato, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \quad (2.13)$$

e teríamos \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} . Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores \vec{a} , \vec{b} e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

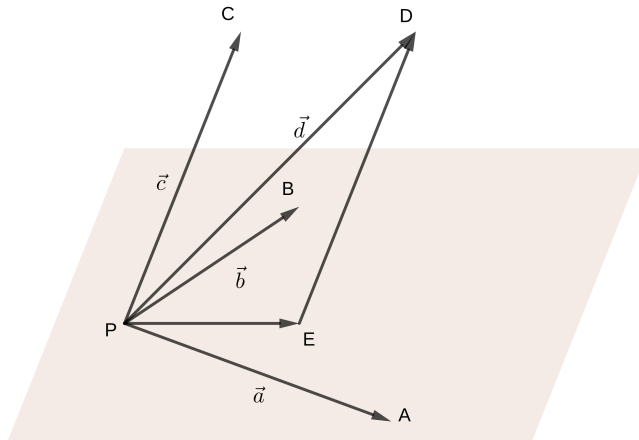


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a \overrightarrow{PC} que passa pelo ponto D . Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π . Vejamos a Figura 2.1. Observamos

que o vetor \overrightarrow{PE} é coplanar aos vetores \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} e, portanto, existem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB}. \quad (2.14)$$

Além disso, como \overrightarrow{ED} tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma \overrightarrow{PC} \quad (2.15)$$

para algum número real γ . Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Se \vec{u} e \vec{v} são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}, \quad (2.16)$$

$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}, \quad (2.17)$$

então \vec{a} e \vec{b} são l.d.?

Solução. Os vetores \vec{a} e \vec{b} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \quad (2.18)$$

Observemos que

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (2\alpha + \beta)\vec{u} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{v} \quad (2.19)$$

$$= \vec{0} \quad (2.20)$$

implica

$$2\alpha + \beta = 0 \quad (2.21)$$

$$-3\alpha + 2\beta = 0 \quad (2.22)$$

Resolvendo este sistema, vemos que $\alpha = \beta = 0$. Logo, concluímos que \vec{a} e \vec{b} são l.i..

◇

ER 2.1.2. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores. Verifique a seguinte afirmação de que se \vec{u} e \vec{v} são l.d., então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d.. Justifique sua resposta.

Solução. A afirmação é verdadeira. De fato, se \vec{u} e \vec{v} são l.d., então existe um escalar α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}. \quad (2.23)$$

Segue que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \quad (2.24)$$

Isto é, \vec{u} é combinação linear de \vec{v} e \vec{w} . Então, por definição, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..

◇

ER 2.1.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Mostre que A , B e C são colineares se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} são l.d..

Solução. Primeiramente, vamos verificar a implicação. Se A , B e C são colineares, então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Logo, são l.d. os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Agora, verificamos a recíproca. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são l.d., então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Como eles são concorrentes, segue que A , B e C são colineares.

◇

Exercícios

E 2.1.1. Sendo $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, mostre que \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{PC} são l.d. para qualquer ponto P .

E 2.1.2. Sejam dados três vetores quaisquer \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Mostre que os vetores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$ são l.d..

E 2.1.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Mostre que A , B , C e D são coplanares se, e somente se, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.d..

E 2.1.4. Se \vec{u} e \vec{v} são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}, \quad (2.25)$$

$$\vec{b} = 2\vec{v} - 4\vec{u}, \quad (2.26)$$

então \vec{a} e \vec{b} são l.i.? Justifique sua resposta.

E 2.1.5. Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.d. $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ l.d..

b) $\vec{u}, \vec{0}, \vec{w}$ são l.d..

c) \vec{u}, \vec{v} l.i. $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e \vec{w} l.i..

d) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l.d. $\Rightarrow -\vec{u}, 2\vec{v}, -3\vec{w}$ l.d..

2.2 Bases e coordenadas

Seja V o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Subseção 2.1.2, se \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} são l.i., então qualquer vetor $\vec{u} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais α, β e γ tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.27)$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de V é uma sequência de três vetores l.i. de V .

Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma dada base de V . Então, dado qualquer $\vec{v} \in V$, existe um único terno de números reais α, β e γ tais que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (2.28)$$

De fato, a existência de α, β e γ segue imediatamente do fato de que \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} são l.i. e, portanto, \vec{v} pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de α, β e γ , tomamos α', β' e γ' tais que

$$\vec{v} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}. \quad (2.29)$$

Subtraindo (2.29) de (2.28), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}. \quad (2.30)$$

Como \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i., segue que¹

$$\alpha - \alpha' = 0, \beta - \beta' = 0, \gamma - \gamma' = 0, \quad (2.31)$$

i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

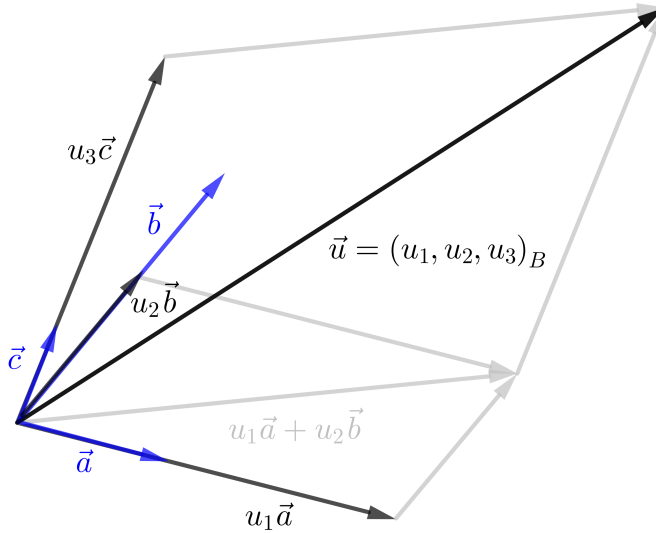


Figura 2.2: Representação de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ em uma dada base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Com isso, fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, cada vetor \vec{u} é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.32)$$

onde u_1 , u_2 e u_3 são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do \vec{u} na base B . Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \quad (2.33)$$

para expressar o vetor \vec{u} nas suas coordenadas na base B . Vejamos a Figura 2.2.

¹Lembre-se da Observação 2.1.4.

Exemplo 2.2.1. Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, o vetor \vec{u} de coordenadas $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)$ é o vetor $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

2.2.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operações são definidas a partir das coordenadas de vetores.

Sejam $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \quad (2.34)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \quad (2.35)$$

Então, a **adição** de \vec{u} com \vec{v} é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \quad (2.36)$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \quad (2.37)$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \quad (2.38)$$

Exemplo 2.2.2. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1, 3, -8)_B. \quad (2.39)$$

Podemos usar o **SymPy** para manipularmos vetores em coordenadas. Para computarmos a soma neste exemplo, podemos usar os seguintes comandos²:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u+v
```

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor \vec{u} é

$$-\vec{u} = -\underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.40)$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \quad (2.41)$$

²Veja a Observação 2.0.1.

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \quad (2.42)$$

Exemplo 2.2.3. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B. \quad (2.43)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar o oposto do vetor \vec{v} com os seguintes comandos:³:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
-v
```

Lembrando que **subtração** de \vec{u} com \vec{v} é $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$, segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \quad (2.44)$$

Exemplo 2.2.4. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5, 2)_B. \quad (2.45)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar $\vec{u} - \vec{v}$ com os seguintes comandos:⁴:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u-v
```

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número** α pelo **vetor** \vec{u} . Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha \underbrace{(u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c})}_{\vec{u}} \quad (2.46)$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \quad (2.47)$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \quad (2.48)$$

³Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

⁴Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

Exemplo 2.2.5. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \quad (2.49)$$

Usando o **Sympy**, podemos computar o oposto do vetor $\frac{1}{3}\vec{v}$ com os seguintes comandos:⁵:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
1/3*v
```

2.2.2 Dependência linear

Dois vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que dois vetores \vec{u} , \vec{v} são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}, \quad (2.50)$$

sem perda de generalidade⁶.

Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, temos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Com isso, a equação (2.50) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \quad (2.51)$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1, u_2 = \alpha v_2, u_3 = \alpha v_3. \quad (2.52)$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

Exemplo 2.2.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ são l.d., pois

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{2}, -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), -3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right). \quad (2.53)$$

b) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ são l.i., pois $u_1 = 1 \cdot v_1$, enquanto $u_2 = 2v_2$.

⁵Veja a Observação 2.0.1 no início deste capítulo.

⁶Formalmente, pode ocorrer $\vec{v} = \beta\vec{u}$.

Três vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \quad (2.54)$$

Seja, então, $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V . Então, temos que a equação

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \quad (2.55)$$

é equivalente a

$$\alpha(u_1, u_2, u_3)_B + \beta(v_1, v_2, v_3)_B + \gamma(w_1, w_2, w_3)_B = (0, 0, 0)_B. \quad (2.56)$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.58)$$

Exemplo 2.2.7. Fixada uma base B de V , sejam os vetores $\vec{u} = (2, 1, -3)_B$, $\vec{v} = (1, -1, 2)_B$ e $\vec{w} = (-2, 1, 1)_B$. Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.59)$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \quad (2.60)$$

Exercícios

Em construção ...

2.3 Mudança de base

Sejam $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ e $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ bases do espaço V . Conhecendo as coordenadas de um vetor na base C , queremos determinar suas coordenadas na base B . Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C = z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \quad (2.61)$$

Agora, tendo $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$ e $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$, então

$$(z_1, z_2, z_3)_C = z_1(r_1, r_2, r_3)_B + z_2(s_1, s_2, s_3)_B + z_3(t_1, t_2, t_3)_B \quad (2.62)$$

$$= \underbrace{(r_1 z_1 + s_1 z_2 + t_1 z_3)}_{z'_1} \vec{u} \quad (2.63)$$

$$+ \underbrace{(r_2 z_1 + s_2 z_2 + t_2 z_3)}_{z'_2} \vec{v} \quad (2.64)$$

$$+ \underbrace{(r_3 z_1 + s_3 z_2 + t_3 z_3)}_{z'_3} \vec{w} \quad (2.65)$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

onde $\vec{z} = (z'_1, z'_2, z'_3)_B$.

A matriz M_{CB} é chamada de matriz de mudança de base de C para B . Como os vetores \vec{r} , \vec{s} e \vec{t} são l.i., temos que a matriz de mudança de base M_{BC} tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Além disso, observamos que

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \quad (2.67)$$

Exemplo 2.3.1. Sejam dadas as bases $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ e $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, com $\vec{u} = (1, 2, 0)_B$, $\vec{v} = (2, 0, -1)_B$ e $\vec{w} = (-1, -3, 1)_B$. Seja, ainda, o vetor $\vec{z} = (1, -2, 1)_B$. Vamos encontrar as coordenadas de \vec{z} na base C .

Há duas formas de proceder. A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$\vec{z} = (-1, -3, 1)_B = (x, y, z)_C. \quad (2.68)$$

Esta é equivalente a

$$-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \quad (2.69)$$

$$= x(\vec{a} + 2\vec{b}) + y(2\vec{a} - \vec{c}) + z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.70)$$

$$= (x + 2y - z)\vec{a} + (2x - 3z)\vec{b} + (-y + z)\vec{c}. \quad (2.71)$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - 3z = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \quad (2.72)$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = 6/5$, $y = 4/5$ e $z = 9/5$, i.e.

$$\vec{z} = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)_C. \quad (2.73)$$

Outra maneira de se obter as coordenadas de \vec{z} na base C é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base C para a base B é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Então, a matriz de mudança da base B para a base C é $M_{BC} = M^{-1}$. Logo, $(x, y, z)_C = M_{BC}(-1, -3, 1)_B$.

Exercícios

Em construção ...

2.4 Bases ortonormais

Uma **base** $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Observação 2.4.1. (Teorema de Pitágoras) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Proposição 2.4.1. Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$. Então, $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Demonstração. Temos $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}|^2$. Seja π um plano determinado por dadas representações de \vec{i} e \vec{j} . Como \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são ortogonais, temos que \vec{k} é ortogonal ao plano π . Além disso, o vetor $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ também admite uma representação em π , logo $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ é ortogonal a \vec{k} . Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.4.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \quad (2.75)$$

Analogamente, como $\vec{i} \perp \vec{j}$, do Teorema de Pitágoras segue

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 \quad (2.76)$$

$$= |u_1|^2|\vec{i}|^2 + |u_2|^2|\vec{j}|^2 + |u_3||\vec{k}|^2 \quad (2.77)$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (2.78)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado. \square

Exemplo 2.4.1. Se $\vec{u} = (-1, 2, -\sqrt{2})_B$ e B é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \quad (2.79)$$

Exercícios

E 2.4.1. Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base ortogonal, i.e. \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que $C = (\vec{a}/|\vec{a}|, \vec{b}/|\vec{b}|, \vec{c}/|\vec{c}|)$ é uma base ortonormal.

Em construção ...

Capítulo 3

Produto escalar

3.1 Produto escalar

Ao longo desta seção, assumiremos $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal no espaço. O **produto escalar** dos vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (3.1)$$

Exemplo 3.1.1. Se $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (-3, -4, 2)$, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = 4. \quad (3.2)$$

3.1.1 Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} e qualquer número real α , temos:

- Comutatividade: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.3)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (3.4)$$

$$= v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \quad (3.5)$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad (3.6)$$

- Distributividade com multiplicação por escalar:

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}). \quad (3.7)$$

Dem.:

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (3.8)$$

$$= (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 \quad (3.9)$$

$$= \alpha(u_1v_1) + \alpha(u_2v_2) + \alpha(u_3v_3) \quad (3.10)$$

$$= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (3.11)$$

$$= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) \quad (3.12)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3) \quad (3.13)$$

$$= \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}). \quad (3.14)$$

- Distributividade com a adição: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Dem.:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)) \quad (3.15)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot [(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)] \quad (3.16)$$

$$= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \quad (3.17)$$

$$= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \quad (3.18)$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \quad (3.19)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (3.20)$$

- Sinal: $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Dem.:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0. \quad (3.21)$$

Além disso, observamos que a soma de números não negativos é nula se, e somente se, os números forem zeros.

- Norma: $|u|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Dem.: Como fixamos uma base ortonormal B , a Proposição 2.4.1 nos garante que

$$|u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}. \quad (3.22)$$

Exemplo 3.1.2. Sejam $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$. Vejamos os seguintes casos:

- Comutatividade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -1, \quad (3.23)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1. \quad (3.24)$$

- Distributividade com a multiplicação por escalar:

$$(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2, 4, 2) \cdot (2, -1, 3) = -4 - 4 + 6 = -2, \quad (3.25)$$

$$2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2(-2 - 2 + 3) = -2, \quad (3.26)$$

$$\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = (-1, 2, 1) \cdot (4, -2, 6) = -2. \quad (3.27)$$

- Distributividade com a adição:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (-1, 2, 1) \cdot (3, -1, 2) = -3 - 2 + 2 = -3, \quad (3.28)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2 - 2 + 3) + (-1 + 0 - 1) = -3. \quad (3.29)$$

- Sinal:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = 1 + 0 + 1 = 2 \geq 0. \quad (3.30)$$

- Norma:

$$|\vec{u}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \quad (3.31)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6. \quad (3.32)$$

Exercícios

Em construção ...

3.2 Ângulo entre dois vetores

O **ângulo formado entre dois vetores** \vec{u} e \vec{v} não nulos, é definido como o menor ângulo determinado entre quaisquer representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Proposição 3.2.1. *Dados \vec{u} e \vec{v} , temos*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.33)$$

onde α é o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} .

Demonstração. Tomamos as representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Observamos que $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Então, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\triangle OAB$, obtemos

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \alpha, \quad (3.34)$$

ou, equivalentemente,

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.35)$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.36)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.37)$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.38)$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha. \quad (3.39)$$

□

Exemplo 3.2.1. Vamos determinar ângulo entre os vetores $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Da Proposição 3.2.1, temos

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (3.40)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.41)$$

Portanto, temos $\alpha = \pi/6$.

Observação 3.2.1. O ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} é:

- agudo se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- obtuso se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, então:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3.2.1 Desigualdade triangular

Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} temos

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \quad (3.42)$$

esta é conhecida como a **desigualdade triangular**. Para demonstrá-la, começamos observando que

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \quad (3.43)$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (3.44)$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \quad (3.45)$$

Agora, vamos estimar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Pela Proposição 3.2.1, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \quad (3.46)$$

onde α é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . Mas, então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha. \quad (3.47)$$

Daí, como $|\cos \alpha| \leq 1$, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|, \quad (3.48)$$

a qual é chamada de **desigualdade de Cauchy-Schwarz**¹.

Exercícios

E 3.2.1. Verifique que (??) é equivalente a (3.1) no caso de bases ortonormais.

Em construção ...

¹Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857, matemático francês. Fonte: [Wikipédia](#). Hermann Schwarz, 1843-1921, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).

3.3 Projeção ortogonal

Sejam dados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. Seja, ainda, P a interseção da reta perpendicular a OB que passa pelo ponto A . Observemos a Figura 3.1. Com isso, definimos a **projeção ortogonal de \vec{u} na direção de \vec{v}** por \overrightarrow{OP} . Denotamos

$$\overrightarrow{OP} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}. \quad (3.49)$$

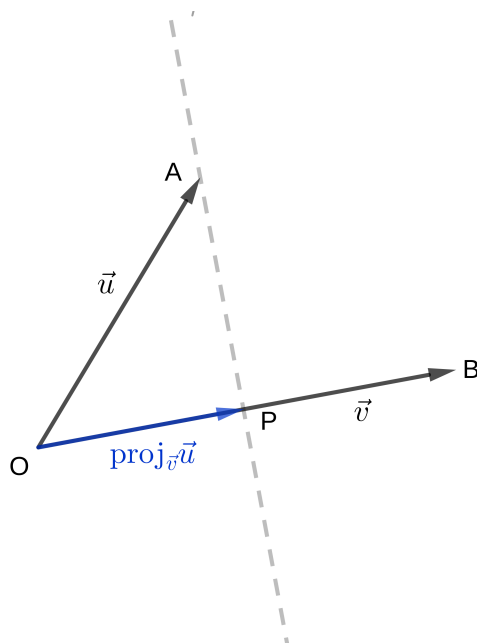


Figura 3.1: Ilustração da definição da projeção ortogonal.

Da definição, temos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \alpha \vec{v} \quad (3.50)$$

para algum número real α . Além disso, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.51)$$

Portanto

$$\alpha \vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.52)$$

Tomando o produto escalar com \vec{v} em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (3.53)$$

pois $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$, uma vez que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$. Daí, lembrando que $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$, temos

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad (3.54)$$

e concluímos que

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}. \quad (3.55)$$

Exemplo 3.3.1. Sejam $\vec{u} = (-1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$. Usando a equação (3.55), obtemos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (2, 1, -2)}{|(2, 1, -2)|^2} (2, 1, -2) \quad (3.56)$$

$$= \frac{-2 + 1 + 2}{4 + 1 + 4} (2, 1, -2) \quad (3.57)$$

$$= \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{9} \right). \quad (3.58)$$

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 4

Produto vetorial

De agora em diante, vamos trabalhar com um base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dita com orientação positiva, i.e. os vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ estão dispostos em sentido anti-horário, veja Figura 4.2.

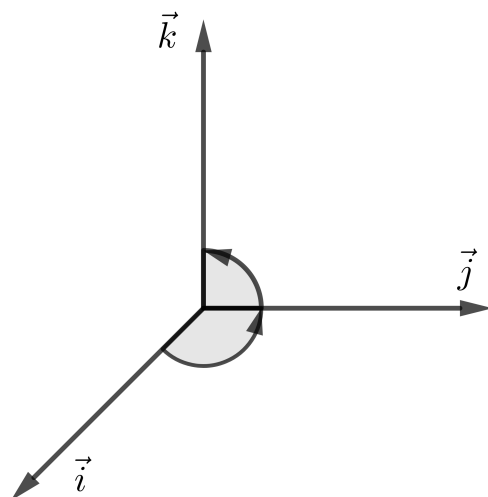


Figura 4.1: Base ortonormal positiva.

4.1 Definição

Dados vetores \vec{u} e \vec{v} , definimos o produto vetorial de \vec{u} com \vec{v} , denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, como o vetor:

- se \vec{u} e \vec{v} são l.d., então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- se \vec{u} e \vec{v} são l.i., então
 - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$, onde α é o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} ,
 - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} , e
 - \vec{u} , \vec{v} e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ formam uma base positiva.

4.1.1 Interpretação geométrica

Sejam dados \vec{u} e \vec{v} l.i.. Estes vetores determinam um paralelogramo, veja Figura ???. Seja, então, h a altura deste paralelogramo tendo \vec{u} como sua base. Logo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento da base com sua altura, neste caso

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha. \quad (4.1)$$

Ou seja, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tem norma igual à área do paralelogramo determinado por \vec{u} e \vec{v} .

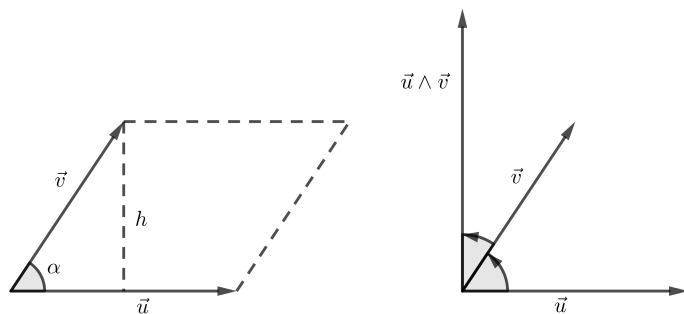


Figura 4.2: Base ortonormal positiva.

4.1.2 Produto vetorial via coordenadas

Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (4.2)$$

Observação 4.1.1. Uma regra mnemônica, é

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Exemplo 4.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

$$= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad (4.6)$$

$$= (0, 1, 2). \quad (4.7)$$

4.1.3 Exercícios

Em construção ...

4.2 Propriedades do produto vetorial

Nesta seção, discutiremos sobre algumas propriedades do produto vetorial. Para tanto, sejam dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ e o número real γ .

Da definição do produto vetorial, temos $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$, logo

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0. \quad (4.8)$$

Em relação à multiplicação por escalar, temos

$$\gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\gamma\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}). \quad (4.9)$$

De fato,

$$(\gamma\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \gamma u_1 & \gamma u_2 & \gamma u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}) \quad (4.11)$$

$$= \gamma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}). \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

Também, vale a propriedade distributiva com a operação de soma, i.e.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (4.14)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (4.17)$$

Observamos que o produto vetorial não é comutativo, entretanto

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (4.18)$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

$$= -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (4.21)$$

Também, o produto vetorial não é associativo sendo $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, em geral, diferente de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Com efeito, temos

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}, \quad (4.22)$$

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, suponhamos que \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são l.i. e seja π um plano determinado por \vec{u} e \vec{v} . Então, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a π . Como $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e a \vec{w} , temos que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ também pertence a π . Logo, \vec{u} , \vec{v} e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ são l.d. e existem α e β tais que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}. \quad (4.24)$$

Vamos determinar α e β . Para tanto, consideremos uma base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j} \in \pi$. Nesta base, temos

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) \quad (4.25)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, 0) \quad (4.26)$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3). \quad (4.27)$$

Também, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.28)$$

$$= (0, 0, u_1 v_2) \quad (4.29)$$

e

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & u_1 v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

$$= (-u_1 v_2 w_2, u_1 v_2 w_1, 0). \quad (4.31)$$

Daí, temos

$$\alpha(u_1, 0, 0) + \beta(v_1, v_2, 0) = (-u_1 v_2 w_2, u_1 v_2 w_1, 0), \quad (4.32)$$

donde

$$-u_1 v_2 w_2 = \alpha u_1 + \beta v_1, \quad (4.33)$$

$$u_1 w_1 v_2 = \beta v_2. \quad (4.34)$$

Resolvendo, obtemos

$$\alpha = -v_1 w_1 - v_2 w_2 = -\vec{v} \cdot \vec{w} \quad (4.35)$$

$$\beta = \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (4.36)$$

Portanto, temos

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}. \quad (4.37)$$

Usando a identidade acima, obtemos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} \quad (4.38)$$

$$= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} \quad (4.39)$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \quad (4.40)$$

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 5

Produto misto

Ao longo deste capítulo, assumiremos trabalhar com uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.1 Definição

O **produto misto** de três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , nesta ordem, é definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}. \quad (5.1)$$

Em coordenadas, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (5.2)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{w} \quad (5.3)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} \right. \quad (5.4)$$

$$\left. + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) \quad (5.5)$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 \quad (5.6)$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

Exemplo 5.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (5.10)$$

5.1.1 Propriedades

Valem as seguintes propriedades:

- a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$
- b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$
- c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$$\text{d) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$\text{e) } [\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$\text{f) } [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.4. Verdadeira.

E 1.1.5. Dica: $ABCD$ determina um paralelogramo.

E 1.2.2. Dica: M é o ponto médio do segmento orientado $AB = CB - AC$.

E 1.2.3. $|\vec{v}| = 1$.

E 1.2.4. a) verdadeira; b) verdadeira.

E 2.1.1. Dica: os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} são l.d..

E 2.1.2. Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

E 2.1.3. Três vetores são l.d. se, e somente se, eles são coplanares.

E 2.1.4. Não.

E 2.1.5. a) falsa; b) verdadeira; c) falsa; d) verdadeira.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Camargo and P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson, 3. edition, 2005.
- [2] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo

- ângulo
 - entre vetores, [7](#)
- base, [22](#)
- comprimento, [1](#)
- coordenadas, [23](#)
- distância, [1](#)
- equipolentes, [4](#)
- extremidade, [2](#)
- módulo, [6](#)
- mesmo sentido, [3](#)
- norma, [6](#)
- origem, [2](#)
- segmento, [1](#)
- segmento nulo, [2](#)
- segmento orientado, [2](#)
- vetor
 - oposto, [9](#)
- vetores
 - coplanares, [7](#)
 - não coplanares, [7](#)
 - ortogonais, [7](#)
 - paralelos, [7](#)