Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro H A Konzen

26 de março de 2020

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa **i**

Licença **ii**

Prefácio **iii**

Sumário **iv**

1 Introdução **1**
- 1.1 Equações diferenciais 1
- 1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno 5

2 EDO de primeira ordem **11**
- 2.1 Equações lineares 11
  - 2.1.1 EDO autônoma e homogênea 11
  - 2.1.2 Método dos fatores integrantes 13
  - 2.1.3 Caso geral 15
  - 2.1.4 Aplicação em modelagem 16
- 2.2 Equações separáveis 21
  - 2.2.1 Equação de Verhulst 23

Respostas dos Exercícios **30**

Referências Bibliográficas **32**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Equações diferenciais

Equação Diferencial (ED) é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita.

Exemplo 1.1.1. São exemplos de equações diferenciais:

a) Modelo de queda de um corpo com resistência do ar.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \tag{1.1}$$

Nesta equação, temos a velocidade $v = v(t)$ (v função de t) como **incógnita**. O tempo é descrito por t como uma variável independente. As demais letras correspondem a parâmetros dados (constantes). Mais especificamente, g corresponde à gravidade, k à resistência do ar e m à massa do corpo.

b) Equação de Verhulst (Equação Logística)

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y. \tag{1.2}$$

Esta equação é um clássico modelo de crescimento populacional. Aqui, $y = y(t)$ é o tamanho da população (incógnita) no tempo t (variável independente). As demais letras correspondem a parâmetros dados.

Licença CC-BY-SA 4.0

c) Equação de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{kx^2}{2}\psi = E\psi. \tag{1.3}$$

Esta equação modela a função de onda ψ (incógnita) de uma partícula em função de sua posição x (modelo unidimensional). Neste modelo quântico, $\hbar$, m, k e E são parâmetros.

d) Modelagem da corrente em um circuito elétrico.

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I = E. \tag{1.4}$$

Aqui, a incógnita é função corrente I em função do tempo. O modelo refere-se a um circuito elétrico com os seguintes parâmetros: L indutância, R resistência, C capacitância e E voltagem do gerador.

e) Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.5}$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura (incógnita) $u = u(t,x)$ como função do tempo e da posição (variáveis independentes). O parâmetro é o coeficiente de difusão térmica α.

Equação Diferencial Ordinária (EDO) é aquela em a incógnita é função apenas de uma variável independente. Desta forma, todas as derivadas que aparecem na equação são ordinárias. No Exemplo 1.1.1, as equações diferenciais a), b), c) e d) são ordinárias. A equação e) não é ordinária, pois a incógnita $u = u(t,x)$ é função das varáveis independentes t e x, portanto, os termos diferenciais são parciais (derivadas parciais). Equações como esta são chamadas de equações diferenciais parciais.
Toda EDO pode ser escrita na seguinte forma geral

$$F(t,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0. \tag{1.6}$$

Aqui, F é uma função envolvendo a variável independente t e a variável dependente $y = y(t)$ (incógnita, função de t) e pelo menos uma derivada ordinária de y em relação a t[1]. O índice n corresponde a **ordem** da derivada

[1] Lembre-se que $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ e assim por diante.

Licença CC-BY-SA 4.0

de maior ordem que aparece na equação, sendo $n \geq 1$. Quando F é função linear das variáveis y, y', $\cdots$, $y^{(n)}$, então a EDO é dita ser **linear**, caso contrário, é **não linear**. Quando F não dependente explicitamente de t, a equação é dita ser **autônoma**.

Exemplo 1.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A equação
$$y'' + y = 0 \tag{1.7}$$
é uma EDO de ordem 2, linear e autônoma. Aqui, temos $F(y, y'') = y''+y$.

b) As equações (1.1) e (1.2) são EDOs de **primeira ordem** (de ordem 1), autônomas e não lineares.

c) A Equação de Schrödinger (1.3) é uma EDO de **segunda ordem**, linear e não autônoma.

Uma **solução** de uma EDO (1.6) é uma função $y = y(t)$ que satisfaça a equação para todos os valores de t[2].

Exemplo 1.1.3. As funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da equação diferencial ordinária
$$y'' - y = 0. \tag{1.8}$$
De fato, tomando $y = y_1(t) = e^t$, temos $y'' = e^t$ e
$$y'' - y = e^t - e^t = 0 \tag{1.9}$$
para todo t. Também, tomando $y = y_2(t) = e^{-t}$, temos $y'' = e^{-t}$ e
$$y'' - y = e^{-t} - e^{-t} = 0, \quad \forall t. \tag{1.10}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Determine a ordem e diga se a seguinte EDO é linear ou autônoma. Justifique suas respostas.
$$t^2\frac{dy}{dt} + (1+y^2)\frac{d^2y}{dt} + y = e^t. \tag{1.11}$$

[2]Em várias situações o domínio de interesse de t é também informado junto com a equação. Veremos isso mais adiante.

Solução.

a) Ordem 2.

A equação tem ordem 2, pois o termo diferencial de maior ordem é uma derivada de segunda ordem.

b) EDO é não linear.

A equação tem um termo $y^2\frac{d^2y}{dt}$, o qual não é linear em y.

c) EDO não é autônoma.

A equação não é autônoma, pois a variável independente t aparece explicitamente. A saber, no primeiro termo do lado esquerdo e no termo fonte da equação.

◊

ER 1.1.2. Determine os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ é solução da equação

$$y'' - y = 0. \tag{1.12}$$

ER 1.1.3. Para que $y = e^{rt}$ seja solução da equação dada, devemos ter

$$\begin{aligned} y'' - y = 0 &\Rightarrow \left(e^{rt}\right)'' - e^{rt} = 0 && (1.13)\\ &\Rightarrow r^2e^{rt} - e^{rt} = 0 && (1.14)\\ &\Rightarrow (r^2-1)\cdot\underbrace{e^{rt}}_{>0} = 0 && (1.15)\\ &\Rightarrow r^2 - 1 = 0 && (1.16)\\ &\Rightarrow r = \pm 1. && (1.17)\end{aligned}$$

Exercícios

E 1.1.1. Determine quais das seguintes são EDOs. Justifique sua resposta.

a) $y = y''$.

b) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}$.

c) $y \cdot \dfrac{d^5y}{dx^5} = x\ln(y) + \dfrac{d}{dx}e^{x^2}$.

d) $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, sendo α um parâmetro.

E 1.1.2. Determine a ordem das seguintes EDOs. Justifique sua resposta.

a) $t^2y' = e^t$.

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^3y}{dt^3}$.

c) $y \cdot y'' - 3y'' = y - y'$.

d) $\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = e^t$.

E 1.1.3. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 não são autônomas. Justifique sua resposta.

E 1.1.4. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 são lineares. Justifique sua resposta.

E 1.1.5. Para cada equação a seguir, calcule os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ seja solução da equação.

a) $y'' + y' - 6y = 0$.

b) $y''' = 3y''$.

E 1.1.6. Calcule os valores de α para os quais $y = t^\alpha$, $t > 0$, seja solução da equação

$$t^2y'' = 2y. \tag{1.18}$$

1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) pode ter infinitas soluções.

Exemplo 1.2.1. A EDO
$$y' = 1 \tag{1.19}$$
tem soluções
$$\int y'\,dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y = t + c, \tag{1.20}$$
onde c é uma constante indeterminada.

Afim de fixar uma solução única para tais EDOs, comumente define-se uma **condição inicial** apropriada, i.e. o valor da solução para um dado valor da variável independente. O problema de resolver uma EDO com condição inicial dada é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI).

Exemplo 1.2.2. No exemplo anterior, t é a variável independente. Assim, por exemplo,
$$y(t_0) = y(0) = 1 \tag{1.21}$$
é um exemplo de uma condição inicial. Neste caso, determinamos a constante c com

$$y(t) = t + c \Rightarrow y(0) = 0 + c = 1 \tag{1.22}$$
$$\Rightarrow c = 1. \tag{1.23}$$

Ou seja, a solução deste problema de valor inicial é $y(t) = t + 1$.

EDOs de segunda ordem podem requer duas condições iniciais.

Exemplo 1.2.3. Consideramos o seguinte problema de valores iniciais

$$y'' = 1, \tag{1.24}$$
$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \tag{1.25}$$

Integrando a EDO, obtemos

$$\int y''\,dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y' = t + c_1. \tag{1.26}$$

Integrando novamente

$$\int y'\,dt = \int t + c_1\,dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.27}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Com isso, obtemos a chamada **solução geral** desta EDO

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.28}$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0 \tag{1.29}$$
$$y'(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1. \tag{1.30}$$

Da segunda condição, obtemos $c_1 = 0$. Logo, da primeira, obtemos $c_2 = -\frac{1}{2}$. Portanto, a solução deste PVI de ordem 2 é:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}. \tag{1.31}$$

Observação 1.2.1. Observe que o número de condições iniciais é igual à ordem da EDO.

No caso de EDOs de ordem 2, também podemos fixar uma solução através da aplicação de **condições de contorno**. Neste caso, estamos interessados em obter a solução para valores da variável independente restritos a um intervalo fechado $[t_0, t_1]$. A solução é fixada pela determinação de seus valores nos pontos t_0 e t_1. O problema de encontrar a solução de uma EDO com condições de contorno, é chamado de **Problema de Valor de Contorno (PVC)**.

Exemplo 1.2.4. Consideramos o seguinte problema de valores de contorno

$$y'' = 1, \quad 0 < t < 1, \tag{1.32}$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}. \tag{1.33}$$

Integrando duas vezes a EDO, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.34}$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, \tag{1.35}$$
$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = 0. \tag{1.36}$$

Desta forma, temos que a solução do PVC é

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1. \tag{1.37}$$

Observação 1.2.2. O número de constantes indeterminadas na solução geral está relacionado à ordem da EDO.

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y' = t + 1, \quad t > 0, \tag{1.38}$$
$$y(0) = 2. \tag{1.39}$$

Solução. Integrando a EDO obtemos

$$\int y'\,dt = \int t + 1\,dt \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + t + c, \tag{1.40}$$

a qual é a solução geral da EDO.
Então, aplicando a condição inicial $y(0) = 2$, obtemos

$$c = 2. \tag{1.41}$$

Logo, a solução do PVC é $y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 2$.

◊

ER 1.2.2. Encontre a solução do seguinte problema de valor de contorno (PVC)

$$y'' = t + 1, \quad -1 < t < 1, \tag{1.42}$$
$$y(-1) = y(1) = 0. \tag{1.43}$$

Solução. Integrando duas vezes a EDO, obtemos

$$y'' = t + 1 \Rightarrow \int y''\,dt = \int t + 1\,dt \tag{1.44}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{t^2}{2} + t + c_1 \tag{1.45}$$
$$\Rightarrow \int y'\,dt = \int \frac{t^2}{2} + t + c_1\,dt \tag{1.46}$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.47}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Obtida a solução geral da EDO, aplicamos as condições de contorno

$$y(-1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 0 \tag{1.48}$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0. \tag{1.49}$$

Ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema linear

$$-c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \tag{1.50}$$

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}. \tag{1.51}$$

Resolvendo, obtemos $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{6}$.

◊

ER 1.2.3. Determine o valor de x para o qual a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad x > 0, \tag{1.52}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.53}$$

atinge seu valor máximo.

Solução. Lembramos que a monotonicidade de $y = y(x)$ pode ser analisada a partir do estudo de sinal de dy/dx. Fazendo o estudo de sinal de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \tag{1.54}$$

vemos que $dy/dx > 0$ para $x \in (0, \ln 2)$ e $dy/dx < 0$ para $x \in (\ln 2, \infty)$. Logo, temos que $y = y(x)$ é crescente em $[0, \ln 2]$ e decrescente em $[\ln 2, \infty)$. Desta forma, concluímos que a solução do PVI atinge seu valor máximo em $x = \ln 2$.

◊

Licença CC-BY-SA 4.0

Exercícios

E 1.2.1. Resolva o seguinte PVI

$$y' = 0, \quad y(-1) = 1. \tag{1.55}$$

E 1.2.2. Resolva o seguinte PVI

$$y' = t, \quad y(-1) = 1. \tag{1.56}$$

E 1.2.3. Resolva o seguinte PVC

$$y'' = 1, \tag{1.57}$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1. \tag{1.58}$$

E 1.2.4. Resolva o seguinte PVC

$$y'' = \operatorname{sen}(t), \tag{1.59}$$
$$y(-\pi) = y(\pi) = 0. \tag{1.60}$$

Capítulo 2

EDO de primeira ordem

2.1 Equações lineares

A forma geral de uma **EDO linear de primeira ordem** é

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{2.1}$$

onde $P(t) \neq 0$, $Q(t)$ e $G(t)$ são funções de t. Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{2.2}$$

escolhendo $p(t) = Q(t)/P(t)$ e $g(t) = G(t)/P(t)$.

2.1.1 EDO autônoma e homogênea

Primeiramente, vamos considerar o caso em que $p(t) \equiv a \neq 0$ (constante) e $g(t) \equiv 0$, i.e.

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0. \tag{2.3}$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -a\,dt. \tag{2.5}$$

Agora, integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\,dy = -\int a\,dt &\Rightarrow \ln|y| = -at + c && (2.6)\\
&\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-at+c} && (2.7)\\
&\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-at}e^{c} && (2.8)\\
&\Rightarrow y = ce^{-at}, && (2.9)
\end{aligned}$$

onde c é uma constante indeterminada.
Com isso, temos que

$$y(t) = ce^{-at} \tag{2.10}$$

é **solução geral** da equação (2.3).

Exemplo 2.1.1. Vamos resolver o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' - y = 0, \quad t > 0, y(0) = 1. \tag{2.11}$$

Começamos calculando a solução geral da EDO:

$$\begin{aligned}
y' = y &\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1 && (2.12)\\
&\Rightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{=}\int 1\,dt && (2.13)\\
&\Rightarrow \ln|y| = t + c && (2.14)\\
&\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{t+c} && (2.15)\\
&\Rightarrow y(t) = ce^{t}. && (2.16)\\
& && (2.17)
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando a condição inicial, obtemos

$$\begin{aligned}
y(0) = 1 &\Rightarrow ce^{0} = 1 && (2.18)\\
&\Rightarrow c = 1. && (2.19)
\end{aligned}$$

Concluímos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^{t}. \tag{2.20}$$

2.1.2 Método dos fatores integrantes

Vejamos, agora, o caso de uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t). \tag{2.21}$$

O **método dos fatores integrantes** consiste em multiplicarmos a equação por uma função $\mu = \mu(t)$ (fator integrante) de forma que

$$\mu\frac{dy}{dt} + \mu a y = \frac{d}{dt}\left(\mu y\right). \tag{2.22}$$

Pela regra do produto para derivada, temos que

$$\mu\frac{dy}{dt} + \mu a y = \mu\frac{dy}{dt} + \mu' y. \tag{2.23}$$

Ou seja, tal função μ deve satisfazer a seguinte EDO

$$\mu' = a\mu. \tag{2.24}$$

Usando o mesmo procedimento utilizado para (2.3), obtemos que

$$\mu(t) = ce^{at}. \tag{2.25}$$

Observamos que qualquer escolha de $c \neq 0$ é apropriada e, por simplicidade, escolhemos $c = 1$. Ou seja, escolhemos o fator integrante

$$\mu(t) = e^{at}. \tag{2.26}$$

Agora, retornamos a equação (2.21). Multiplicando-a pelo fator integrante $\mu(t) = e^{at}$, obtemos

$$\begin{align}
\mu\frac{dy}{dt} + \mu a y = \mu g(t) &\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mu y\right) = \mu g(t) \tag{2.27}\\
&\Rightarrow \int d(\mu y) = \int \mu g(t)\,dt \tag{2.28}\\
&\Rightarrow \mu y = \int \mu g(t)\,dt + c \tag{2.29}\\
&\Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu g(t)\,dt + c\right]. \tag{2.30}\\
& \tag{2.31}
\end{align}$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) = e^{-at}\left[\int g(t)e^{at}\,dt + c\right] \tag{2.32}$$

é a **solução geral** de (2.21).

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' - y = 1. \tag{2.33}$$

Aplicando o método dos fatores integrantes, temos

$$\begin{align} \mu y' - \mu y &= (\mu y)' \tag{2.34}\\ &= \mu' y + \mu y'. \tag{2.35}\end{align}$$

Ou seja, devemos escolher μ tal que

$$\begin{align} \mu' = -\mu &\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -1 \tag{2.36}\\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\mu}\,d\mu = -\int 1\,d\mu \tag{2.37}\\ &\Rightarrow \ln|\mu| = -t + c \tag{2.38}\\ &\Rightarrow \mu = ce^{-t}. \tag{2.39}\end{align}$$

Por simplicidade, escolhemos $\mu = e^{-t}$.
Com isso, a EDO (2.33) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t}y\right) = e^{-t}. \tag{2.40}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{align} e^{-t}y = \int e^{-t}\,dt &\Rightarrow e^{-t}y(t) = -e^{-t} + c \tag{2.41}\\ &\Rightarrow y(t) = -e^{t}e^{-t} + ce^{t} \tag{2.42}\\ &\Rightarrow y(t) = -1 + ce^{t}, \tag{2.43}\end{align}$$

a qual é a solução geral.

Licença CC-BY-SA 4.0

2.1.3 Caso geral

O caso geral de uma EDO linear de primeira ordem

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{2.44}$$

também pode ser resolvido pelo **método dos fatores integrantes**. Neste caso, o fator integrante $\mu = \mu(t)$ deve ser escolhido de forma que

$$\begin{align} \mu y' + \mu p(t)y &= (\mu y)' \tag{2.45}\\ &= \mu' y + \mu y', \tag{2.46}\end{align}$$

ou seja

$$\mu' = p(t)\mu. \tag{2.47}$$

Integrando, obtemos o **fator integrante**

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}. \tag{2.48}$$

Usando este fator integrante, a equação (2.44) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu g(t). \tag{2.49}$$

Integrando, obtemos a **solução geral**

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)\,dt + c\right]. \tag{2.50}$$

Exemplo 2.1.3. Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = t. \tag{2.51}$$

Primeiramente, calculamos o fator integrante $\mu = \mu(t)$ tal que

$$\mu y' + \mu\frac{1}{t}y = (\mu y)' = \mu' y + \mu y'. \tag{2.52}$$

Ou seja, precisamos que

$$\mu' = \frac{1}{t}\mu. \tag{2.53}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Integrando, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}\,dt} \tag{2.54}$$
$$= e^{\ln|t|} \tag{2.55}$$
$$= t. \tag{2.56}$$

Aplicando o fator integrante a EDO (2.51), obtemos

$$\frac{d}{dt}(ty) = t^2 \Rightarrow ty = \int t^2\,dt \tag{2.57}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{t}\left[\frac{t^3}{3} + c\right] \tag{2.58}$$
$$\Rightarrow y = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}. \tag{2.59}$$

2.1.4 Aplicação em modelagem

Exemplo 2.1.4. (Mistura em tanque) No instante inicial $t = 0$ s (segundo), um tanque contem q_0 kg (quilograma) de sal dissolvido em l L (litro) de água. Uma solução de s kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de r L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de r L/s.
Vamos modelar a quantidade de sal q kg presente no tanque a cada instante t s. Temos que q é função do tempo t s, i.e. $q = q(t)$. A condição inicial é

$$q(0) = q_0. \tag{2.60}$$

A taxa de variação de q no tempo é dq/dt e é modelada por

$$\frac{dq}{dt} = \underbrace{sr}_{\text{taxa de entrada}} - \underbrace{\frac{q}{l}r}_{\text{taxa de saída}}. \tag{2.61}$$

Ou seja, o problema é modelado como o seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = sr - \frac{q}{l}r, \quad t > 0, \tag{2.62}$$
$$q(0) = q_0, \tag{2.63}$$

onde s, r, l e q_0 são parâmetros do problema. A EDO relacionada é linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Veja o Exercício Resolvido **??**.

Exemplo 2.1.5. (Objeto em queda livre) Seja m kg a massa de um objeto em queda livre em um meio com resistência de γ kg/s e aceleração da gravidade de g m/s^2. A segunda lei de Newton é a lei física que estabelece que a força total atuando sobre o objeto é igual a sua massa multiplicada por sua aceleração. Desta forma, obtemos

$$\underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{\text{massa}\times\text{aceleração}} = \underbrace{mg}_{\text{força da gravidade}} - \underbrace{\gamma v}_{\text{força da resistência]}}, \tag{2.64}$$

onde $v = v(t)$ m/s é a velocidade do objeto (sentido positivo igual ao da força da gravidade). Assumindo que o objeto tem velocidade v_0 m/s no instante inicial $t = 0$, o modelo resume-se ao seguinte PVI:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \quad t > 0, \tag{2.65}$$

$$v(0) = v_0, \tag{2.66}$$

onde m, g, γ e v_0 são parâmetros.

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Resolva o seguinte PVI

$$y' + y = 1, \quad t > 0, \tag{2.67}$$

$$y(0) = 2. \tag{2.68}$$

Solução. Primeiramente, obtemos a solução geral da EDO pelo método dos fatores integrante. Para tanto, buscamos pelo fator integrante μ tal que

$$\mu y' + \mu y = (\mu y)', \tag{2.69}$$

ou seja,

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = e^t. \tag{2.70}$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^t y\right) = e^t. \tag{2.71}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y = 1 + ce^{-t}. \tag{2.72}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + ce^{-0} = 2 \tag{2.73}$$
$$\Rightarrow c = 1. \tag{2.74}$$

Concluímos que a solução do PVI é $y(t) = 1 + e^{-t}$.

◊

ER 2.1.2. Calcule a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = \operatorname{sen}(t), \quad t > 0. \tag{2.75}$$

Solução. Buscamos pelo fator integrante μ tal que

$$\mu y' + \mu\frac{1}{t}y = (\mu y)', \tag{2.76}$$

ou seja,

$$\mu' = \frac{\mu}{t} \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}\,dt} = e^{\ln|t|} = t. \tag{2.77}$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot \operatorname{sen}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = t\operatorname{sen}(t). \tag{2.78}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{c}{t} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} - \cos(t). \tag{2.79}$$

◊

ER 2.1.3. (Mistura em tanque) No instante inicial $t = 0$ s (segundo), um tanque contem 100 kg de sal dissolvidos em 1000 L d'água. Uma solução de 0,2 kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de 10 L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de sal misturado no tanque após 1 hora de operação, i.e. quando $t = 3600$ s.

Solução. Denotando por $q = q(t)$ kg a quantidade de sal misturado no tanque no instante t, temos que a taxa de variação de q no tempo é dada por

$$\begin{align}\frac{dq}{dt} &= 0{,}2 \cdot 10 - \frac{q}{1000} \cdot 10 \tag{2.80}\\ &= 2 - \frac{q}{100}. \tag{2.81}\end{align}$$

Ou seja, o modelo constitui-se no seguinte PVI

$$\begin{align}\frac{dq}{dt} &= 2 - \frac{q}{100}, \quad t > 0, \tag{2.82}\\ q(0) &= 100. \tag{2.83}\end{align}$$

Para resolver o problema, vamos usar o método dos fatores integrantes. O fator integrante é escolhido como sendo

$$\begin{align}\mu(t) &= e^{\int \frac{1}{100}\,dt} \tag{2.84}\\ &= e^{t/100}. \tag{2.85}\end{align}$$

Segue que a EDO (2.82) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}\left(qe^{t/100}\right) = 2e^{t/100}. \tag{2.86}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{align}q(t) &= e^{-t/100}\int 2e^{t/100}\,dt \tag{2.87}\\ &= e^{-t/100}\left(200e^{t/100} + c\right) \tag{2.88}\\ &= 200 + ce^{-t/100}. \tag{2.89}\end{align}$$

Da condição inicial, obtemos

$$\begin{align}q(0) = 100 &\Rightarrow 200 + c = 100 \tag{2.90}\\ &\Rightarrow c = -100. \tag{2.91}\end{align}$$

Logo, a solução do PVI é

$$q(t) = 200 - 100e^{-t/100}. \tag{2.92}$$

No tempo $t = 3600$ s, temos

$$q(3600) = 200 - 100e^{-3600/100} \approx 200 \text{ kg}. \tag{2.93}$$

◊

Exercícios

E 2.1.1. Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' + y = 0, \quad t > 0, \tag{2.94}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.95}$$

E 2.1.2. Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' - y = 2, \quad t > 0, \tag{2.96}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.97}$$

E 2.1.3. Calcule a solução geral da seguinte EDO

$$y' + y = \operatorname{sen}(t). \tag{2.98}$$

E 2.1.4. Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$y' + \frac{1}{t}y = 2t, \quad t > 1, \tag{2.99}$$
$$y(1) = 0. \tag{2.100}$$

E 2.1.5. Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$ty' + 2y = 1, \quad t > 1, \tag{2.101}$$
$$y(1) = 1. \tag{2.102}$$

E 2.1.6. Seja um objeto de massa $m = 1$ kg em queda livre sujeito a aceleração da gravidade de 9,8 m/s^2 e resistência do meio de $\gamma = 0{,}2$ kg/s. Assuma, ainda, que o objeto está em repouso no tempo inicial e a uma altura de 10 m (metros) do solo. Quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.

2.2 Equações separáveis

Uma EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.103}$$

é dita ser uma **equação separável** quando pode ser reescrita na seguinte forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.104}$$

Exemplo 2.2.1. Vejamos os seguintes casos.

a) É separável a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \tag{2.105}$$

pois pode ser reescrita como segue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = x^2 \tag{2.106}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.107}$$

b) Não é separável a EDO

$$e^{xy} - x\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.108}$$

Observe que não há como reescrever esta equação na forma (2.104).

Agora, vamos ver como podemos resolver uma EDO separável. Consideremos a equação separável

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.109}$$

Sejam, também, $F = F(x)$ e $G = G(y)$ primitivas de M e N, respectivamente. I.e.

$$\frac{d}{dx}F(x) = M(x), \tag{2.110}$$

$$\frac{d}{dy}G(y) = N(y). \tag{2.111}$$

Lembrando que $y = y(x)$, temos da **regra da cadeia** que

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\frac{dy}{dx} \tag{2.112}$$

$$= N(y)\frac{dy}{dx}. \tag{2.113}$$

Ou seja, a EDO (2.109) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(y) = 0 \tag{2.114}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) + G(y)\right) = 0. \tag{2.115}$$

Então, integrando em relação a x, obtemos

$$F(x) + G(y) = c, \tag{2.116}$$

a qual é uma equação algébrica para y que, com sorte, pode ser usada para explicitar a solução da EDO (2.109).

Exemplo 2.2.2. Vamos resolver a seguinte EDO separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}. \tag{2.117}$$

a) **Método 1**. Primeiramente, reescrevemos a EDO no formato (2.104):

$$\underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.118}$$

Então, calculamos as primitivas

$$F(x) = \int M(x)\,dx \tag{2.119}$$

$$= \int -x^2\,dx \tag{2.120}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + c \tag{2.121}$$

e

$$G(y) = \int N(y)\,dy \tag{2.122}$$
$$= \int y\,dy \tag{2.123}$$
$$= \frac{y^2}{2} + c. \tag{2.124}$$

Então, segue que a EDO resume-se a seguinte equação algébrica

$$F(x) + G(y) = c \Rightarrow -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c, \tag{2.125}$$

a qual é uma equação implícita da solução geral $y = y(x)$.

b) **Método 2**. A EDO separável

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \tag{2.126}$$

pode ser reescrita como

$$y\,dy = x^2\,dx. \tag{2.127}$$

Integrando ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c, \tag{2.128}$$

a qual é equivalente a solução obtida em (2.125).

Observação 2.2.1. Como vimos no exemplo anterior (Exemplo 2.2.2), a solução geral de uma EDO separável nem sempre pode ser explicitada. Em muitos casos o procedimento de separar as variáveis nos leva a obter a solução da EDO na forma de uma equação algébrica implícita.

2.2.1 Equação de Verhulst

A **equação de Verhulst**[1] (ou **equação logística**) é um clássico modelo de crescimento populacional. Trata-se da seguinte equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{2.129}$$

[1] Pierre François Verhulst, 1804-1849, matemático belga.

Licença CC-BY-SA 4.0

onde y é a medida de tamanho da população e os parâmetros são: $r > 0$ a taxa de crescimento intrínseca e $K > 0$ o nível de saturação.
Antes de resolvermos esta equação, vamos fazer algumas observações que podem ser obtidas diretamente da EDO. Do cálculo, temos que se $dy/dt = 0$ para todos os valores de t, então y é constante, i.e. a população se mantém constante. A derivada é nula quando o lado direito de (2.129) for nulo, i.e.

$$r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y = 0. \tag{2.130}$$

Isso ocorre quando $y = 0$ ou quando $y = K$. Ou seja, se a população é nula não há crescimento populacional, bem como, não há crescimento se a população estiver em seu nível de saturação.
Agora, o que ocorre se a população for $0 < y < K$? Neste caso, temos

$$\frac{dy}{dt} = r\underbrace{\left(1 - \frac{y}{K}\right)}_{>0}y > 0, \tag{2.131}$$

ou seja, a população cresce. Por outro lado, se $y > K$ (a população está acima de seu nível de saturação), então

$$\frac{dy}{dt} = r\underbrace{\left(1 - \frac{y}{K}\right)}_{<0}y < 0, \tag{2.132}$$

a população decresce. Estas conclusões também nos levam a inferir que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K, \tag{2.133}$$

para qualquer população inicial não nula.

Solução da equação logística

Consideramos o seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad t > 0, \tag{2.134}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.135}$$

A equação de Verhulst é uma EDO separável, daí segue que

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y}\,dy = r\,dt. \tag{2.136}$$

Vamos integrar o lado direito desta última equação:

$$\begin{align} \int \frac{1}{\left(1-\frac{y}{K}\right)y}\,dy &= \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1-y/K}\right)dy \tag{2.137}\\ &= \ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right|. \tag{2.138}\end{align}$$

Logo, a solução da equação logística satisfaz a seguinte equação algébrica

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c, \tag{2.139}$$

onde c é uma constante a determinar. Antes, observamos que esta equação é equivalente a

$$\ln\left|\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right| = rt + c. \tag{2.140}$$

Aplicando a função exponencial, obtemos

$$\frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}. \tag{2.141}$$

Da condição inicial $y(0) = y_0$, encontramos

$$c = \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \tag{2.142}$$

Agora, isolando y em (2.141), vemos que

$$\begin{align} y &= \frac{ce^{rt}}{1 + \frac{c}{K}e^{rt}} \tag{2.143}\\ &= \frac{K}{\frac{K}{c}e^{-rt} + 1} \tag{2.144}\end{align}$$

Por fim, de (2.142), obtemos a solução

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \tag{2.145}$$

Da solução, corroboramos que a população permanece constante quando $y_0 = 0$ ou $y_0 = K$. Ainda, se $0 < y_0 < K$ ou $y_0 > K$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)\cancelto{0}{e^{-rt}}} \tag{2.146}$$

$$= K. \tag{2.147}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule a solução geral da EDO

$$y' = 2y^2 + xy^2. \tag{2.148}$$

Solução. Separando as variáveis, obtemos

$$y' = 2y^2 + xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(2 + x)) \tag{2.149}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = (2 + x)\,dx. \tag{2.150}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c. \tag{2.151}$$

◊

ER 2.2.2. Calcule a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad x > 0, \qquad y(0) = 2. \tag{2.152}$$

Solução. Separamos as variáveis e integramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = x^2\,dx \tag{2.153}$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int x^2\,dx \tag{2.154}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c. \tag{2.155}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Determinamos a constante c pela aplicação da condição inicial $y(0) = 1$. Ou seja, temos

$$\frac{y^2(0)}{2} = \frac{0^3}{3} + c \Rightarrow c = 2. \tag{2.156}$$

Logo, a solução $y = y(x)$ do PVI é dada pela equação algébrica

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2. \tag{2.157}$$

Buscando explicitar a solução, observamos que

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \tag{2.158}$$

Lembrando que $y(0) = 2$, temos necessariamente que

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \tag{2.159}$$

$\Diamond$

ER 2.2.3. (Crescimento populacional com limiar) Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$. Forneça os valores de y_0 para os quais a população é crescente.

Solução. A população y é crescente quando

$$\frac{dy}{dt} > 0. \tag{2.160}$$

Logo, precisamos ter

$$-r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y > 0. \tag{2.161}$$

Isto ocorre quando

$$1 - \frac{y}{L} < 0 \Rightarrow y > L. \tag{2.162}$$

Logo, concluímos que uma população inicial $y_0 > L$ é necessária para produzir uma taxa de crescimento populacional positiva.

$\Diamond$

Exercícios

E 2.2.1. Calcule a solução de

$$\frac{dy}{dx} = xe^y, \quad x > 0, \tag{2.163}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.164}$$

E 2.2.2. Resolva a EDO

$$y' + y^2 \cos x = 0. \tag{2.165}$$

E 2.2.3. Resolva o PVI

$$e^{x+y}y' = 1, \quad x > 0, y(0) = 0. \tag{2.166}$$

E 2.2.4. Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$. Qual é a tendência da população $y = y(t)$ quando $t \to \infty$ e

a) $y_0 = 0$;

b) $0 < y_0 < L$;

c) $y_0 = L$;

d) $y_0 > L$

E 2.2.5. Resolva o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$.

Licença CC-BY-SA 4.0

E 2.2.6. Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad t > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r > 0$, $K > L > 0$. Qual é a tendência da população $y = y(t)$ quando $t \to \infty$ e

a) $y_0 = 0$;

b) $0 < y_0 < L$;

c) $y_0 = L$

d) $L < y_0 < K$;

e) $y_0 = K$

f) $y_0 > K$

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a), c)

E 1.1.2. a) 1; b) 3; c) 2; d) 2.

E 1.1.3. a), d).

E 1.1.4. a), b).

E 1.1.5. a) $\{-3, 2\}$; b) $\{0, 3\}$

E 1.1.6. $\{-1, 2\}$.

E 1.2.1. $y(t) = 1$.

E 1.2.2. $y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$.

E 1.2.3. $y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}t + 1$.

E 1.2.4. $y(t) = -\operatorname{sen}(t)$.

E 2.1.1. $y(t) = e^{-t}$

E 2.1.2. $y(t) = 3e^t - 2$

E 2.1.3. $y(t) = ce^{-t} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$

E 2.1.4. $y(t) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t} + t^2\right)$

E 2.1.5. $y(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)$

E 2.1.6. 1.5 s

E 2.2.1. $y(x) = \ln\left(\frac{2}{2e^{-1} - x^2}\right)$.

E 2.2.2. $y(x) = \frac{1}{c + \operatorname{sen} x}$

E 2.2.3. $y(x) = \ln\left(c - e^{-x}\right)$

E 2.2.4. a) $y(t) \equiv 0$; b) $y(t) \to 0$; c) $y(t) \equiv L$; d) $y(t) \to \infty$.

E 2.2.5. $y(t) = \dfrac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{rt}}$.

E 2.2.6. a) $y(t) \equiv 0$; b) $y(t) \to 0$; c) $y(t) \equiv L$; d) $y(t) \to K$; e) $y(t) \equiv K$; f) $y(t) \to K$.

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] E.C. Oliveira and J.E. Maiorino. *Introdução aos métodos de matemática aplicada*. Unicamp, 2. edition, 2013.