Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

24 de maio de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python[1] são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

Observação 1.0.1. Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos Python[1] com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

1.1 Equações a diferenças

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f\left(y(n+k), y(n+k-1), \ldots, y(n); n\right) = 0, \tag{1.1}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \geq 0$ número natural e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

Exemplo 1.1.1. Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y(n+1) = (1+r)y(n) \tag{1.2}$$

[1] Veja a Observação 1.0.1.

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa r por período de tempo n (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja $y(0)$ o valor da aplicação inicial, então

$$y(1) = (1 + r)y(0) \tag{1.3}$$

é o valor corrigido a taxa r no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y(2) = (1 + r)y(1) \tag{1.4}$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y(n + 1) = ry(n)\left(1 - \frac{y(n)}{K}\right), \tag{1.5}$$

onde $y(n)$ representa o tamanho da população no período n, r é a taxa de crescimento e K um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**[2]

$$y(n + 2) = y(n + 1) + y(n), \tag{1.6}$$

onde $y(0) = 1$ e $y(1) = 1$.

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem** k (ou de k-ésima ordem). É dita ser **linear** quando f é função linear nas variáveis dependentes $y(n + k), y(n + k - 1), \ldots, y(n)$, noutro caso é dita ser **não linear**.

Exemplo 1.1.2. No Exemplo 1.1.1, temos

a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.

b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.

c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

[2] Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: Wikipedia.

A solução de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números $(y(n))_{n=0}^{\infty} = (y(0), y(1), \ldots, y(n), \ldots)$ que satisfazem a equação. Em alguns casos é possível escrever a solução como uma forma fechada

$$y(n) = g(n), \tag{1.7}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $g : n \mapsto g(n)$ é a função discreta que representa a solução.

Exemplo 1.1.3. Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y(n+1) = (1+r)y(n), \quad n \geq 0. \tag{1.8}$$

A partir do valor inicial $y(0)$, temos

$$\begin{align}
y(1) &= (1+r)y(0) \tag{1.9}\\
y(2) &= (1+r)y(1) \tag{1.10}\\
&= (1+r)(1+r)y(0) \tag{1.11}\\
&= (1+r)^2 y(0) \tag{1.12}\\
y(3) &= (1+r)y(2) \tag{1.13}\\
&= (1+r)(1+r)^2 y(0) \tag{1.14}\\
&= (1+r)^3 y(0) \tag{1.15}\\
&\vdots \tag{1.16}
\end{align}$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y(n) = (1+r)^n y(0), \tag{1.17}$$

onde o valor inicial $y(0)$ é arbitrário.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Calcule $y(10)$, sendo que

$$y(n+1) = 1{,}05 y(n), \quad n \geq 0, y(0) = 1000. \tag{1.18}$$

Solução. Observamos que

$$\begin{aligned}
y(1) &= 1{,}05y(0) && (1.19)\\
y(2) &= 1{,}05y(1) && (1.20)\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05y(0) && (1.21)\\
&= 1{,}05^2 y(0) && (1.22)\\
y(3) &= 1{,}05y(2) && (1.23)\\
&= 1{,}05 \cdot 1{,}05^2 y(0) && (1.24)\\
&= 1{,}05^3 y(0) && (1.25)\\
&\vdots && (1.26)
\end{aligned}$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = 1{,}05^n y(0). \tag{1.27}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y(10) &= 1{,}05^{10} y(0) && (1.28)\\
&= 1{,}05^{10} \cdot 1000 && (1.29)\\
&\approx 1628{,}89. && (1.30)
\end{aligned}$$

◊

ER 1.1.2. Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores $y(n)$ no final do n-ésimo ano.

Solução. No final do ano $n + 2 \geq 0$, o número de flores é igual a

$$y(n + 2) = 2u(n + 2) + 3d(n + 2), \tag{1.31}$$

onde $u(n+2)$ é o número de flores plantadas a um ano e $d(n+2)$ é o número de flores plantas a pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$u(n + 2) = u(n + 1) + 2d(n + 1) \tag{1.32}$$

e

$$d(n + 2) = u(n + 1) + d(n + 1). \tag{1.33}$$

Com isso, temos

$$\begin{align}
y(n+2) &= 2\left[u(n+1) + 2d(n-1)\right] + 3\left[u(n+1) + d(n-1)\right] \tag{1.34}\\
&= 2y(n+1) + u(n+1) + d(n+1) \tag{1.35}\\
&= 2y(n+1) + \underbrace{u(n) + 2d(n)}_{u(n+1)} + \underbrace{u(n) + d(n)}_{d(n+1)} \tag{1.36}\\
&= 2y(n+1) + 2u(n) + 3d(n) \tag{1.37}\\
&= 2y(n) + y(n). \tag{1.38}
\end{align}$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y(n+2) = 2y(n+1) + y(n+2). \tag{1.39}$$

◊

Exercícios

E 1.1.1. Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

1. $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1$
2. $ny(n+1) = y(n)\ln(n+1)$
3. $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1$
4. $y(n+1) - [1 - y(n)]\,[1 + y(n)] = 0$
5. $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}$

E 1.1.2. Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de $y(0)$ reais e que o cartão não está mais em uso.

E 1.1.3. Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no n-ésimo mês.

Capítulo 2

Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f\left(y(n+1),y(n);n\right) = 0, \tag{2.1}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ e $y : n \mapsto y(n)$ é função discreta (incógnita).

2.1 Equações lineares

Nesta seção, discutimos sobre equações a diferenças de ordem 1 e lineares. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \tag{2.2}$$

onde $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, n_0 número inteiro, $a : n \mapsto a(n)$ e $g : n \mapsto g(n)$ é o termo fonte. A equação é dita ser **homogênea** quando $g \equiv 0$ e, caso contrário, é dita ser **não homogênea**.

2.1.1 Equação homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.3}$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para $n \geq n_0$, temos

$$
\begin{aligned}
y(n+1) &= a(n)y(n) && (2.4)\\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) && (2.5)\\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) && (2.6)\\
&\vdots && (2.7)\\
&= a(n)a(n-1)\cdots a(n_0)y(n_0). && (2.8)
\end{aligned}
$$

Ou seja, dado o valor inicial $y(n_0)$, temos a solução[1]

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0), \tag{2.9}$$

assumindo a notação de que $\prod_{i=n+1}^{n} a(i) = 1$.

Exemplo 2.1.1. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

Comparando com (2.3), temos $a(n) = 2$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$
\begin{aligned}
y(n+1) &= 2y(n) && (2.11)\\
&= 2\cdot 2y(n-1) && (2.12)\\
&= 2^2y(n-1) && (2.13)\\
&= 2^2\cdot 2y(n-2) && (2.14)\\
&= 2^3y(n-2) && (2.15)\\
&\cdots && (2.16)\\
&= 2^{n+1}y(0) && (2.17)
\end{aligned}
$$

Equivalentemente, por (2.9), temos

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) && (2.18)\\
&= 2^n y(0). && (2.19)
\end{aligned}
$$

[1] A demonstração por ser feita por indução matemática.

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.
No Python[2], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0
```

2.1.2 Equação não homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0, \tag{2.20}$$

pode ser obtida por iterações diretas.
Vejamos, para $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= a(n)y_n + g(n) \\
&= a(n)\left[a(n-1)y(n-1) + g(n-1)\right] + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)y(n-1) + a(n)g(n-1) + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)\left[a(n-2)y(n-2) + g(n-2)\right] \\
&+ a(n)g(n-1) + g(n) \\
&= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \\
&+ a(n)a(n-1)g(n-2) + a(n)g(n-1) + g(n) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Com isso, podemos inferir[3] que

$$y(n+1) = \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.21}$$

$$+ \sum_{i=n_0}^{n} \left[\prod_{j=i+1}^{n} a(i)\right] g(i). \tag{2.22}$$

[2]Veja a Observação 1.0.1.
[3]A demonstração por ser feita por indução matemática.

No último termo, consideramos a notação $\sum_{j=i+1}^{i} a(i) = 0$. Ou equivalentemente,

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(i)\right] g(i). \tag{2.23}$$

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad n \geq 0. \tag{2.24}$$

Comparando com (2.20), temos $a(n) = 2$ e $g(n) = -1$ para todo n. Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$\begin{align}
y(n+1) &= 2y(n) - 1 \tag{2.25}\\
&= 2 \cdot [2y(n-1) - 1] - 1 \tag{2.26}\\
&= 2^2 y(n-1) - 2 - 1 \tag{2.27}\\
&= 2^2 \cdot [2y(n-2) - 1] - 2 - 1 \tag{2.28}\\
&= 2^3 y(n-2) - 2^2 - 2 - 1 \tag{2.29}\\
&\cdots \tag{2.30}\\
&= 2^{n+1} y(0) - \sum_{i=0}^{n} 2^i \tag{2.31}
\end{align}$$

Este último termo, é a soma dos termos da **progressão geométrica** de razão $q = 2$ (veja Subseção 2.1.3), i.e.

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{2.32}$$

Logo, temos que a solução de (2.20) é

$$\begin{align}
y(n+1) &= 2^{n+1} y(0) - \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \tag{2.33}\\
&= 2^{n+1} y(0) - 2^{n+1} + 1. \tag{2.34}
\end{align}$$

Equivalentemente, por (2.23), temos

$$
\begin{align}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y(n_0) \tag{2.35}\\
&+ \sum_{i=n_0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} a(i)\right] g(i) \tag{2.36}\\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \tag{2.37}\\
&+ \sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right](-1) \tag{2.38}\\
&= 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} \tag{2.39}\\
&= 2^n y(0) - 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \tag{2.40}\\
&= 2^n y(0) - 2^n + 1. \tag{2.41}
\end{align}
$$

A solução vale para qualquer valor inicial $y(0)$.

No Python[4], podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)-1)
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0 + 1
```

Observamos que esta solução é equivalente à (2.41), pois

$$
\begin{align}
y(n) &= 2^n y(0) - 2^n + 1 \tag{2.42}\\
&= 2^n\left[y(0) - 1\right] + 1, \tag{2.43}
\end{align}
$$

onde $y(0)$ é um valor inicial arbitrário.

[4] Veja a Observação 1.0.1.

2.1.3 Somas definidas

Seguem algumas somas definidas que podem ser úteis na resolução de equações a diferenças.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.44}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.45}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{2.46}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30} \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1 \tag{2.48}$$

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{(q-1)(n+1)q^{n+1} - q^{n+2} + q}{(q-1)^2} \tag{2.49}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Calcule a solução da equação à diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.50}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.51}$$

Solução. De (2.9), temos

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right] y(0) \tag{2.52}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \tag{2.53}$$

$$= 2^{-n}. \tag{2.54}$$

No Python[5], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

[5]Veja a Observação 1.0.1.

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),1/2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):1})
Out: 0.5**n
```

$\lozenge$

ER 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + \frac{1}{2}^n, \quad n \geq 0, \tag{2.55}$$

$$y(0) = 0. \tag{2.56}$$

Solução. De (2.23), temos

$$\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2\right] y(0) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1}\left[\prod_{j=i+1}^{n-1} 2\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i && (2.57)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i}\cdot 2^{-i} && (2.58)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1}\cdot 2^{-2i} && (2.59)\\
&= 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^i && (2.60)\\
&= 2^{n-1}\cdot\frac{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} && (2.61)\\
&= 2^{n-1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4^n}\right) && (2.62)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}}{4^n}\right) && (2.63)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1}-2^{n-1}2^{-2n}\right) && (2.64)\\
&= \frac{4}{3}\left(2^{n-1}-2^{-n-1}\right) && (2.65)\\
&= \frac{2}{3}\left(2^n-2^{-n}\right). && (2.66)
\end{aligned}$$

No Python[6], podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=true)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1),2*y(n)+(1/2)**n)
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):0})
Out: -0.666666666666667*0.5**n + 0.666666666666667*2**n
```

◊

[6]Veja a Observação 1.0.1.

Exercícios

E 2.1.1. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n), \quad n \geq 0. \tag{2.67}$$

E 2.1.2. Calcule a solução de

$$y(n+1) = \frac{1}{3}y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.68}$$
$$y(0) = -1. \tag{2.69}$$

E 2.1.3. Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n) - 3, \quad n \geq 0, \tag{2.70}$$
$$y(0) = 2. \tag{2.71}$$

E 2.1.4. Calcule a solução de

$$y(n+1) = ny(n) + n!, \quad n \geq 0, \tag{2.72}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.73}$$

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

E 1.1.2. $y(n+1) = 3y(n)$.

E 1.1.3. Sequência de Fibonacci

E 2.1.1. $y(n) = 3^n y(0)$

E 2.1.2. $y(n) = -\frac{1}{3^n}$

E 2.1.3. $y(n) = \frac{1}{2}(3^n + 3)$

E 2.1.4. $y(n) = n!$

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, 3. edition, 2005.