Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

7 de fevereiro de 2024

Licença

Prefácio

O site notaspedrok.com.br é uma plataforma que construí para o compartilhamento de minhas notas de aula. Essas anotações feitas como preparação de aulas é uma prática comum de professoras/es. Muitas vezes feitas a rabiscos em rascunhos com validade tão curta quanto o momento em que são concebidas, outras vezes, com capricho de um diário guardado a sete chaves. Notas de aula também são feitas por estudantes - são anotações, fotos, prints, entre outras formas de registros de partes dessas mesmas aulas. Essa dispersão de material didático sempre me intrigou e foi o que me motivou a iniciar o site.

Com início em 2018, o site contava com apenas três notas incipientes. De lá para cá, conforme fui expandido e revisando os materais, o site foi ganhando acessos de vários locais do mundo, em especial, de países de língua portugusa. No momento, conta com 13 notas de aula, além de minicursos e uma coleção de vídeos e áudios.

As notas de **Métodos de Elementos Finitos** abordam tópicos introdutórios sobre o método de elementos finitos para equações diferenciais. Códigos exemplos são trabalhos em linguagem Python com a ajuda do pacote computacional FEniCSx.

Aproveito para agradecer a todas/os que de forma assídua ou esporádica contribuem com correções, sugestões e críticas! ;)

Pedro H A Konzen
`https://www.notaspedrok.com.br`

Conteúdo

Capítulo 1

Problemas Unidimensionais

1.1 Interpolação e Projeção

Seja dado um intervalo $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$. O **espaço vetorial das funções lineares** em I é definido por

$$P_1(I) := \{v :\ v(x) = c_0 + c_1 x,\ x \in I,\ c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Observamos que dado $v \in P_1(I)$, temos que v é unicamente determinada pelos valores

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= v(x_0), \\ \alpha_1 &= v(x_1). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como consequência, existe exatamente uma única função $v \in P_1(I)$ para quaisquer dados valores α_0 e α_1. Desta observação, introduzimos a chamada **base nodal** (base lagrangiana[1]) $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ para $P_1(I)$, definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ,i = j, \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}, \tag{1.3}$$

com $i, j = 0, 1$. Consulte a Figura 1.1.

[1]Consulte mais em Notas de Aula: Matemática Numérica I: Interpolação de Lagrange.

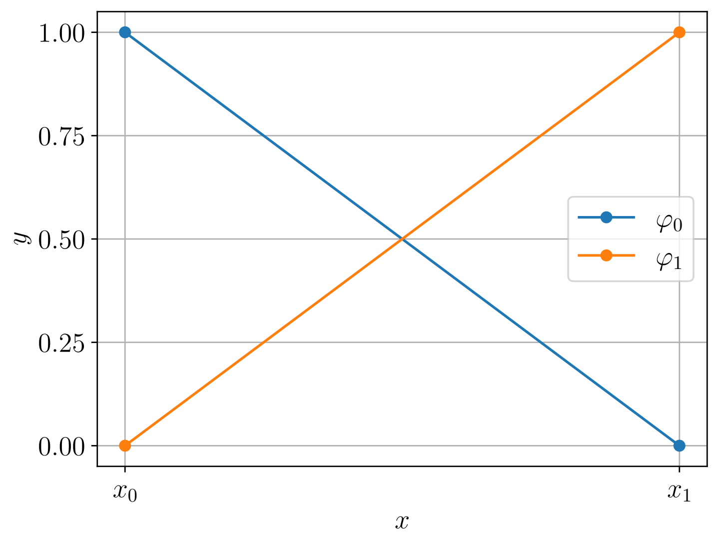

Figura 1.1: Base nodal para o espaço $P_1([x_0, x_1])$.

Com esta base, toda função $v \in P_1(I)$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções φ_0 e φ_1 com coeficientes α_0 e α_1 (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x). \tag{1.4}$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \tag{1.5}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{1.6}$$

Uma extensão do espaço $P_1(I)$ é o **espaço das funções lineares por partes**. Dado $I = [l_0, l_1]$, $l_0 \neq l_1$, consideramos uma partição (**malha**) de I com $n + 1$ pontos

$$\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = l_1\} \tag{1.7}$$

e, portanto, com n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimento (**tamanho da malha**) $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na malha $\mathcal{I}$ definimos o seguinte **espaço das funções lineares por partes**

$$V_h := \{v : \ v \in C^0(\mathcal{I}),\ v|_{I_i} \in P_1(I_i),\ i = 1, 2, \dots, n\}. \tag{1.8}$$

Observamos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$. Reciprocamente, todo conjunto de valores nodas $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ determina unicamente uma função $v \in V_h$. Desta observação, temos que os **valores nodais determinam os graus de liberdade** com a base nodal $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ para V_h definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \tag{1.9}$$

com $i, j = 0, 1, \dots, n$. Ou seja, temos que

$$v(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \phi_j(x). \tag{1.10}$$

Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \tag{1.11}$$

consulte, Figura 1.2. É notável que $\varphi_i(x)$ tem suporte compacto $I_i \cup I_{i+1}$.

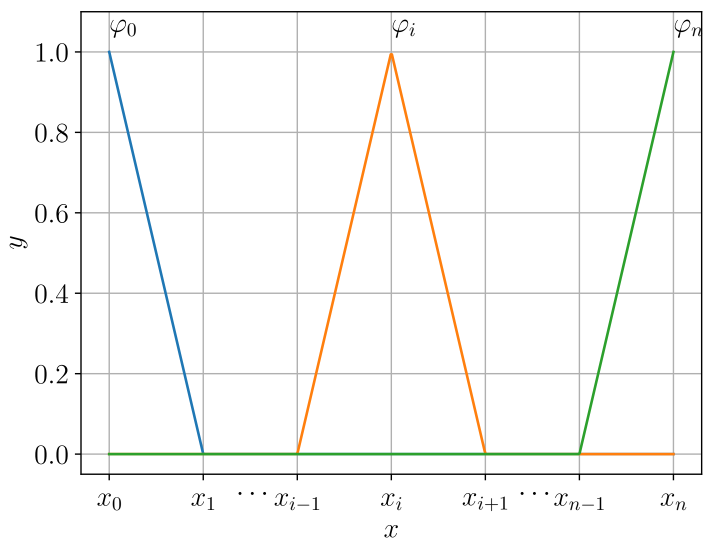

Figura 1.2: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

1.1.1 Interpolação

Em revisão

Interpolação é uma técnica de aproximação de funções. Dada uma função contínua f em $I = [l_0, l_1]$, definimos o **operador de interpolação linear** $\pi : C^0(I) \to V_h$ por

$$\pi f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\varphi_j(x) \tag{1.12}$$

Observamos que πf é igual a f nos nodos x_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo 1.1.1. A Figura 1.3 ilustra a interpolação da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço de elementos finitos V_h das funções lineares por partes com 5 células.

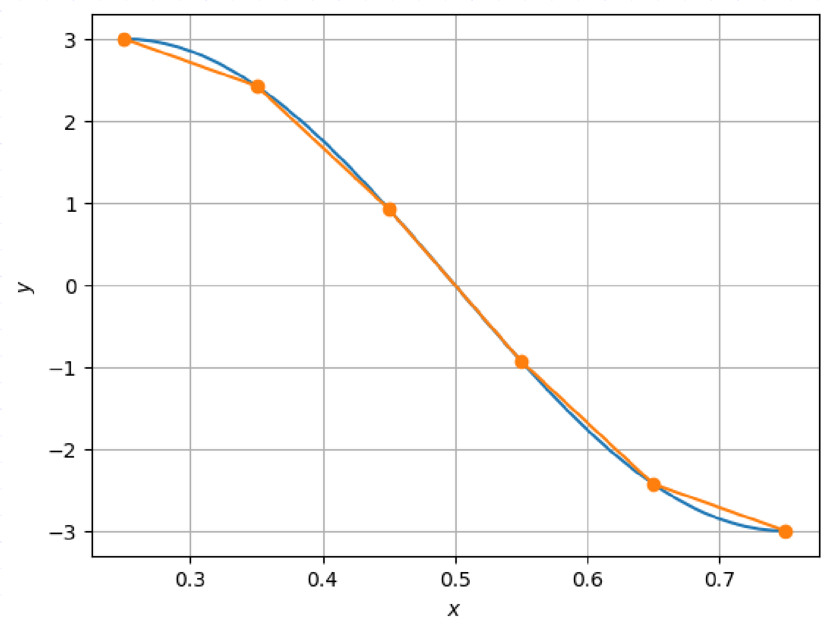

Figura 1.3: Interpolação linear de $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço de elementos finitos V.

Código 1.1: mef1d_interp_lin

```
from dolfinx import fem, mesh
```

```
import ufl
import numpy as np
from mpi4py import MPI
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
l0 = 0.25
l1 = 0.75
domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
                              nx = 5,
                              points = [l0, l1])
x = ufl.SpatialCoordinate(domain)

# espaço
V = fem.FunctionSpace(domain, ('P', 1))

# fun
def fun(x, mod):
    return 3.*mod.sin(2.*mod.pi*x)

x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
f_expr = fem.Expression(fun(x[0], ufl),
                        V.element.interpolation_points())

# interpolação
pif = fem.Function(V)
pif.interpolate(f_expr)
```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e. $f - \pi f$. Para tanto, podemos usar a norma L^2 definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left(\int_I v^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Lembramos que valem a **desigualdade triangular**

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \tag{1.14}$$

e a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**[2]

$$\int_I vw\,dx \leq \|v\|_{L^2(I)}\|w\|_{L^2(I)}, \tag{1.15}$$

[2] Também conhecida como desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz. Augustin-

para qualquer funções $v, w \in L^2(I)$.

Proposição 1.1.1. (Erro da interpolação linear) O interpolador $\pi f : C^0(I) \to P_1(I)$ satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \tag{1.16}$$
$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \tag{1.17}$$

onde C é uma constante e $h = x_1 - x_0$.

Demonstração. Denotemos o erro de interpolação por $e = f - \pi f$. Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^{y} e'(x)\,dx, \tag{1.18}$$

onde $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$. Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.15), temos

$$\begin{aligned} e(y) &= \int_{x_0}^{y} e'\,dx & (1.19)\\ &\leq \int_{x_0}^{y} |e'|\,dx & (1.20)\\ &\leq \int_I 1 \cdot |e'|\,dx & (1.21)\\ &\leq \left(\int_I 1^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_I e'^2\,dx\right)^{1/2} & (1.22)\\ &= h^{1/2} \left(\int_I e'^2\,dx\right)^{1/2}, & (1.23) \end{aligned}$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2\,dx = h\|e'\|^2_{L^2(I)}. \tag{1.24}$$

Então, integrando em I obtemos

$$\|e\|^2_{L^2(I)} = \int_I e^2(y)\,dy \leq \int_I h\|e'\|^2_{L^2(I)}\,dy = h^2\|e'\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.25}$$

Louis Cauchy, 1789 - 1857, matemático francês. Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804 - 1889, matemático Russo. Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921, matemático alemão.

ou seja, temos a seguinte desigualdade

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h\|e'\|_{L^2(I)}. \tag{1.26}$$

Agora, observando que $e(x_0) = e(x_1) = 0$, o **teorema de Rolle**[3] garante a existência de um ponto $\tilde{x} \in I$ tal que $e'(\tilde{x}) = 0$, donde do teorema fundamental do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^{y} e''\,dx \tag{1.27}$$
$$= \int_{\tilde{x}}^{y} e''\,dx \tag{1.28}$$
$$\leq \int_I 1 \cdot |e''|\,dx \tag{1.29}$$
$$\leq h^{1/2}\left(\int_I e''^2\right)^{1/2}. \tag{1.30}$$

Então, integrando em I, obtemos

$$\|e'\|^2_{L^2(I)} \leq h^2\|e''\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.31}$$

a qual, observando que $e'' = f''$, equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch\|f''\|_{L^2(I)}. \tag{1.32}$$

Por fim, de (1.31) e de (1.26), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2\|f''\|_{L^2(I)}. \tag{1.33}$$

□

Vamos, agora, generalizar o resultado da Proposição 1.1.1 para a interpolação no espaço V_h das funções lineares por parte.

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho h_i de cada elemento da malha.

Proposição 1.1.2. *O interpolador πf satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|^2_{L^2(I)} \leq C\sum_{i=1}^{n} h_i^4\|f''\|^2_{L^2(I)}, \tag{1.34}$$

[3] Michel Rolle, 1652 - 1719, matemático francês.

$$\|(f-\pi f)'\|^2_{L^2(I)} \leq C\sum_{i=1}^n h_i^2\|f''\|^2_{L^2(I)}. \tag{1.35}$$

$$\tag{1.36}$$

Demonstração. Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição 1.1.1. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f-\pi f\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{i=1}^n \|f-\pi f\|^2_{L^2(I_i)} \tag{1.37}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n Ch_i^4\|f''\|^2_{L^2(I_i)}. \tag{1.38}$$

□

1.1.2 Projeção L^2

Em revisão

Dada uma função $f \in L^2(I)$, definimos o **operador de projeção L^2** $P_h : L^2(I) \to V_h$ por

$$\int_I (f-P_hf)v\,dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{1.39}$$

Como V_h é um espaço de dimensão finita, a condição (1.39) é equivalente a

$$\int_I (f-P_hf)\varphi_i\,dx = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \tag{1.40}$$

onde φ_i é a i-ésima função base de V_h. Além disso, como $P_hf \in V_h$, temos

$$P_hf = \sum_{j=0}^n \xi_j\varphi_j, \tag{1.41}$$

onde ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, são $n+1$ incógnitas a determinar. Logo,

$$\int_I (f-P_hf)\varphi_i\,dx = 0 \tag{1.42}$$

$$\int_I f\varphi_i\,dx = \int_I P_hf\varphi_i\,dx \tag{1.43}$$

$$\int_I f\varphi_i\,dx = \int_I \left(\sum_{j=0}^{n} \xi_j\varphi_j\right)\varphi_i\,dx \tag{1.44}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \xi_j \int_I \varphi_j\varphi_i\,dx = \int_I f\varphi_i\,dx, \tag{1.45}$$

para $i = 0, 1, \dots, n$.

Observamos que (1.45) consiste em um sistema de $n+1$ equações lineares para as $n+1$ incógnitas ξ_j, $j = 0, 1, \dots, n$. Este, por sua vez, pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$M\xi = b, \tag{1.46}$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n+1}$ é chamada de **matriz de massa**

$$m_{i,j} = \int_I \varphi_j\varphi_i\,dx \tag{1.47}$$

e $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ é chamado de **vetor de carregamento**

$$b_i = \int_I f\varphi_i\,dx. \tag{1.48}$$

Ou seja, a projeção L^2 de f no espaço V_h é

$$P_h f = \sum_{j=0}^{n} \xi_j\varphi_j, \tag{1.49}$$

onde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é solução do sistema (1.46).

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.4 ilustra a projeção L^2 da função $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo $I = [1/4, 3/4]$ com $n = 4$ subintervalos (5 células).

Código 1.2: ex_mef1d_proj.py

```
from dolfinx import fem, mesh
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
import ufl
from mpi4py import MPI

# malha
l0 = 0.25
```

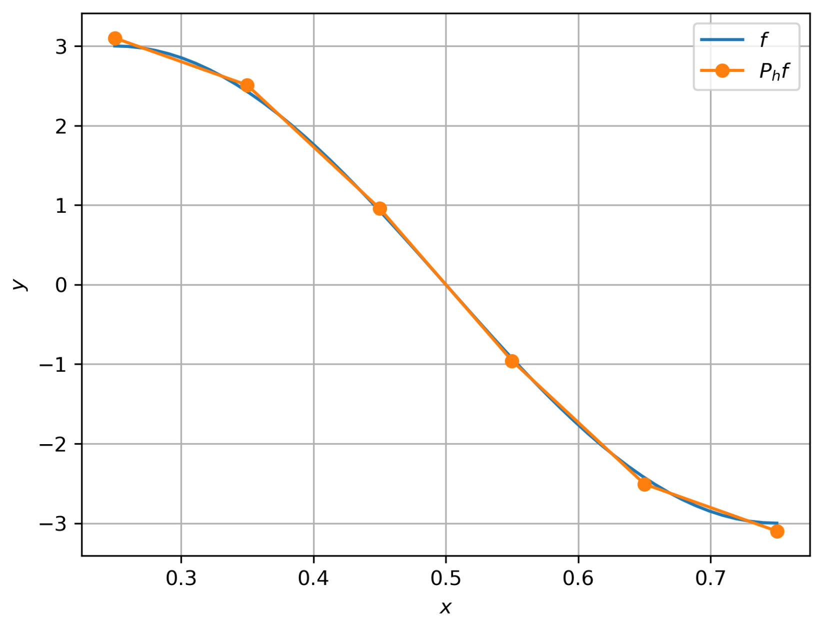

Figura 1.4: Projeção L^2 de $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 células.

```
l1 = 0.75
domain = mesh.create_interval(MPI.COMM_WORLD,
                              nx=5,
                              points=[l0, l1])
x = ufl.SpatialCoordinate(domain)

# espaço
V = fem.functionspace(domain, ("P", 1))

# fun
f = 3.*ufl.sin(2.*ufl.pi*x[0])

# project f
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)
a =  ufl.dot(u, v) * ufl.dx
L = ufl.dot(f, v) * ufl.dx
problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
```

```
Phf = problem.solve()
```

O próximo teorema mostra que $P_h f$ é a função que melhor aproxima f dentre todas as funções do espaço V_h.

Teorema 1.1.1. *(*A melhor aproximação.) A projeção L^2 satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} \leq \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_h. \tag{1.50}$$

Demonstração. Dado $v \in V_h$, temos

$$\begin{aligned}
\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I |f - P_h f|^2\, dx \qquad (1.51)\\
&= \int_I (f - P_h f)(f - v + v - P_h f)\, dx \qquad (1.52)\\
&= \int_I (f - P_h f)(f - v)\, dx + \int_I (f - P_h f)(v - P_h f)\, dx \qquad (1.53)\\
&= \int_I (f - P_h f)(f - v)\, dx \qquad (1.54)\\
&\leq \|f - P_h f\|_{L^2(I)} \|f - v\|_{L^2(I)}, \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

O próximo teorema fornece uma estimativa *a-priori* do erro $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$ em relação ao tamanho da malha.

Teorema 1.1.2. *A projeção L^2 satisfaz*

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \tag{1.56}$$

Demonstração. Tomando a interpolação $\pi f \in V_h$, temos do Teorema da melhor aproximação (Teorema 1.1.1) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2) que

$$\begin{aligned}
\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 &\leq \|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \qquad (1.57)\\
&\leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \qquad (1.58)
\end{aligned}$$

□

1.1.3 Exercícios

Em revisão

E.1.1.1. Faça um código para verificar a segunda estimativa da Proposição 1.1.1 no caso da interpolação da função $f(x) = 3\,\text{sen}(2\pi x)$ no espaço P_1 das funções lineares.

E.1.1.2. Faça um código para verificar as estimativas da Proposição 1.1.2 no caso da interpolação da função $f(x) = 3\,\text{sen}(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes.

E.1.1.3. Faça um código para computar a projeção L^2 P_hf da função $f(x) = x - cos(x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha com 10 células no intervalo $I = [0, \pi]$. Faça o esboço dos gráficos de f e P_hf e compute o erro $\|f - P_hf\|_{L^2(I)}$.

Respostas

E.1.1.1. badgeConstrucao

1.2 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, discutimos sobre a aplicação do método de elementos finitos para o seguinte problema de valor de contorno: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \tag{1.59}$$

$$u(0) = u(L) = 0, \tag{1.60}$$

onde f é uma função dada.

1.2.1 Formulação Fraca

Em revisão

A derivação de um método de elementos finitos inicia-se da formulação fraca do problema em um espaço de funções apropriado. No caso do problema (1.59)-(1.60), tomamos o espaço

$$V_0 = \{v \in H^1(I) : \; v(0) = v(1) = 0\}. \tag{1.61}$$

Ou seja, se $v \in H^1(I)$, então $\|v\|_{L^2(I)} < \infty$, $\|v'\|_{L^2(I)} < \infty$, bem como v satisfaz as condições de contorno do problema.

A formulação fraca é, então, obtida multiplicando-se a equação (1.59) por uma função teste $v \in V_0$ (arbitrária) e integrando-se por partes, i.e.

$$\int_I fv\,dx = -\int_I u''v\,dx \tag{1.62}$$
$$= \int_I u'v'\,dx - u'(L)v(L) + u'(0)v(0) \tag{1.63}$$
$$\tag{1.64}$$

Donde, das condições de contorno, temos

$$\int_I u'v'\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.65}$$

Desta forma, o problema fraco associado a (1.59)-(1.60) lê-se: encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \tag{1.66}$$

onde

$$a(u,v) = \int_I u'v'\,dx \tag{1.67}$$
$$L(v) = \int_I fv\,dx, \tag{1.68}$$

são chamadas de forma bilinear e forma linear, respectivamente.

1.2.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

Uma formulação de elementos finitos é um aproximação do problema fraco (1.66) em um espaço de dimensão finita. Aqui, vamos usar o espaço $V_{h,0}$ das funções lineares por partes em I que satisfazem as condições de contorno, i.e.

$$V_{h,0} = \{v \in V_h :\ v(0) = v(L) = 0\}. \tag{1.69}$$

Então, substituindo o espaço V_0 pelo subespaço $V_{h,0} \subset V_0$ em (1.66), obtemos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{h,0}. \tag{1.70}$$

Observação 1.2.1. A formulação de elementos finitos não é única, podendo-se trabalhar com outros espaços de funções. No caso em que o espaço da solução é igual ao espaço das funções testes, a abordagem é chamada de método de Galerkin[4].

Observemos que o problema (1.70) é equivalente a: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{1.71}$$

onde φ_i, $i = 1, \dots, n-1$, são as funções base de $V_{h,0}$. Então, como $u_h \in V_{h,0}$, temos

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \tag{1.72}$$

onde ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n-1$, são incógnitas a determinar. I.e., ao computarmos ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n-1$, temos obtido a solução u_h do problema de elementos finitos 1.70.

Agora, da forma bilinear (1.67), temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \tag{1.73}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \tag{1.74}$$

Daí, o problema (1.70) é equivalente a resolvermos o seguinte sistema de equações lineares

$$A\xi = b, \tag{1.75}$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n-1}$ é a matriz de rigidez com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_I \varphi_j' \varphi_i' \, dx, \tag{1.76}$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ é o vetor das incógnitas e $b = (b_i)_{i=1}^{n-1}$ é o vetor de carregamento com

$$b_i = L(\varphi_i) = \int_I f \varphi_i \, dx. \tag{1.77}$$

[4]Boris Grigoryevich Galerkin, matemático e engenheiro soviético. Fonte: Wikipédia.

Exemplo 1.2.1. Consideramos o problema (1.59)-(1.60) com $f \equiv 1$ e $L = 1$, i.e.

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \tag{1.78}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.79}$$

Neste caso, a solução analítica $u(x) = -x^2/2 + x/2$ pode ser facilmente obtida por integração.

Agora, vamos computar uma aproximação de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I);\ v(0) = v(1) = 0\}$ construído numa malha uniforme de 5 células no intervalo $I = [0, 1]$. Para tanto, consideramos o problema fraco: encontrar $u \in V_0 = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(L) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \tag{1.80}$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u'v'\,dx, \quad L(v) = \int_I fv\,dx. \tag{1.81}$$

Então, a formulação de elementos finitos associada, lê-se: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \tag{1.82}$$

A Figura **??** apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h.

Código 1.3: ex_mef1d_modelo.py

```
from mpi4py import MPI

# malha
from dolfinx import mesh
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                   nx = 5)
# espaço
from dolfinx import fem
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# condição de contorno
```

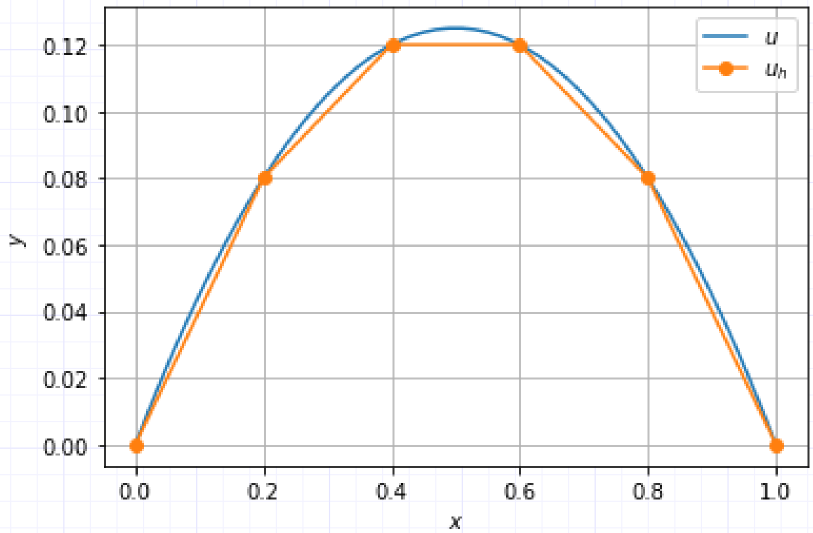

Figura 1.5: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.1.

```
import numpy as np
uD = fem.Function(V)
uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))

tdim = domain.topology.dim
fdim = tdim - 1
domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(domain.topology)
boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V, fdim,
                                            boundary_facets)
bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)

# problema mef
import ufl
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

```

```
a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
L = f * v * ufl.dx

problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
uh = problem.solve()
```

1.2.3 Estimativa *a Priori*

Em revisão

Existem dois tipos de **estimativas do erro** $e := u - u_h$. Estimativas ***a priori***, são aquelas em que o erro é dado em relação da solução u, enquanto que nas estimativas ***a posteriori*** o erro é expresso em relação a solução de elementos finitos u_h.

Teorema 1.2.1. (Ortogonalidade de Galerkin.) A solução de elementos finitos u_h de (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$a(u - u_h, v) := \int_I (u - u_h)'v'\,dx = 0, \quad v \in V_{h,0}, \tag{1.83}$$

onde u é a solução de (1.66).

Demonstração. De (1.70), (1.66) e lembrando que $V_{h,0} \subset V_0$, temos

$$a(u, v) = L(v) = a(u_h, v) \Rightarrow a(u - u_h, v) = 0, \tag{1.84}$$

para todo $v \in V_{h,0}$. □

Teorema 1.2.2. (A melhor aproximação.) A solução de elementos finitos u_h dada por (1.70) satisfaz a seguinte propriedade de melhor aproximação

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - v)'\|_{L^2(I)}, \quad v \in V_{h,0}, \tag{1.85}$$

onde u é a solução de (1.66).

Demonstração. Escrevendo $u - u_h = u - v + v - u_h$ para qualquer $v \in V_{h,0}$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1), temos

$$\|(u - u_h)'\|^2_{L^2(I)} = \int_I (u - u_h)'(u - u_h)'\,dx \tag{1.86}$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v + v - u_h)'\,dx \tag{1.87}$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)'\,dx + \int_I (u - u_h)'(v - u_h)'\,dx \tag{1.88}$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)'\,dx \tag{1.89}$$

$$\leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}\|(u - v)'\|_{L^2(I)}. \tag{1.90}$$

□

Teorema 1.2.3. (Estimativa *a priori*.) O erro em se aproximar a solução u de (1.66) pela solução de elementos finitos u_h dada por (1.70) satisfaz a seguinte estimativa *a priori*

$$\|(u - u_h)'\|^2_{L^2(I)} \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|u''\|^2_{L^2(I_i)}. \tag{1.91}$$

Demonstração. Tomando $v = \pi u$ no teorema da melhor aproximação (Teorema 1.2.2), obtemos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - \pi u)'\|_{L^2(I)}. \tag{1.92}$$

Daí, da estimativa do erro de interpolação (Proposição 1.1.2), temos

$$\|(u - u_h)'\|^2_{L^2(I)} \leq C \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|u''\|^2_{L^2(I_i)}. \tag{1.93}$$

□

Exemplo 1.2.2. A Figura 1.6 apresenta o esboço da evolução do erro $\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}$ da solução de elementos finitos do problema (1.78)-(1.79) para malhas uniformes com $n = 2, 4, 8, \ldots, 128$ células.

Com o FEniCS, a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary
```

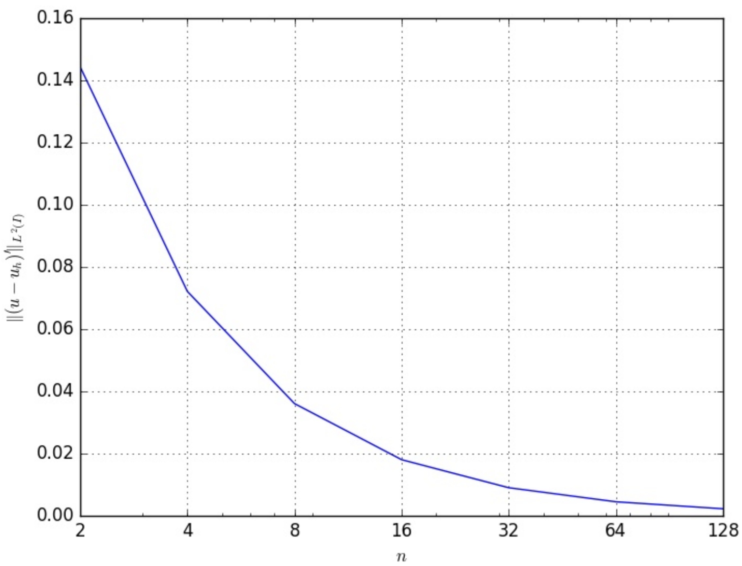

Figura 1.6: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.2.2.

```
def solver(n):
    # malha
    mesh = IntervalMesh(n,0,1)

    # espaco
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

    #MEF problem
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    f = Constant(1.0)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #computa a sol
```

```
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)

    return u, mesh

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]/2',
                degree=2)


lerrors=[]
for n in [2,4,8,16,32,64,128]:
    u, mesh = solver(n)
    e = errornorm(u,ua,norm_type='H10',mesh=mesh)
    lerrors.append(e)

plt.plot([2,4,8,16,32,64,128],lerrors)
plt.xscale('log',basex=2)
#plt.yscale('log',base=2)
plt.xlabel(r"$n$")
plt.ylabel(r"$|\!|(u-u_h)'|\!|_{L^2(I)}$")
plt.xlim((2,128))
plt.xticks([2,4,8,16,32,64,128],[2,4,8,16,32,64,128])
plt.grid('on')
plt.show()
```

1.2.4 Estimativa *a Posteriori*

Em revisão

Aqui, vamos obter uma estimativa *a posteriori* para o erro $e = u - u_h$ da solução de elementos finitos u_h do problema (1.59)-(1.60).

Teorema 1.2.4. *A solução de elementos finitos u_h satisfaz*

$$\|(u-u_h)'\|^2_{L^2(I)} \leq C\sum_{i=1}^n \eta_i^2(u_h), \tag{1.94}$$

onde $\eta_i(u_h)$ é chamado de elemento residual e é dado por

$$\eta_i(u_h) = h_i\|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}. \tag{1.95}$$

Demonstração. Tomando $e = u - u_h$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 1.2.1) temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e'(e - \pi e)'\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} e'(e - \pi e)'\,dx. \tag{1.96}$$

Então, aplicando integração por partes

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} (-e'')(e - \pi e)\,dx + [e'(e - \pi e)]_{x_{i-1}}^{x_i}. \tag{1.97}$$

Daí, observando que $e - \pi e = 0$ nos extremos dos intervalos I_i e que $-e'' = -(u - u_h)'' = -u'' + u_h'' = f + u_h''$, temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} (f + u_h'')(e - \pi e)\,dx. \tag{1.98}$$

Agora, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão de interpolação (1.26), obtemos

$$\begin{align}
\|e'\|_{L^2(I)}^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e - \pi e\|_{L^2(I_i)}\,dx \tag{1.99}\\
&\leq C \sum_{i=1}^{n} h_i \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e'\|_{L^2(I_i)} \tag{1.100}\\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e'\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \tag{1.101}\\
&= C \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \|e'\|_{L^2(I)}, \tag{1.102}
\end{align}$$

donde segue o resultado desejado. □

Observação 1.2.2. No caso da solução de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes, temos $u_h'' = 0$. Logo, o elemento residual se resume em $\eta_i(u_h) = h_i\|f\|_{L^2(I_i)}$.

1.2.5 Exercícios

Em revisão

E.1.2.1. Obtenha uma aproximação por elementos finitos lineares por partes da solução de

$$-u'' + u = 2\operatorname{sen} x, \quad \forall x \in (-\pi, \pi), \tag{1.103}$$
$$u(-\pi) = u(\pi) = 0. \tag{1.104}$$

Respostas

E.1.2.1. Código FENiCS.

1.3 Condições de Contorno

Em revisão

Nesta seção, vamos discutir sobre soluções de elementos finitos para a equações diferencial

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \tag{1.105}$$

com diferentes condições de contorno.

1.3.1 Condições de Dirichlet

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Dirichlet[5]: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \tag{1.106}$$
$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L, \tag{1.107}$$

com u_0, u_L e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V_0 := H_0^1(I) := \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(L) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.106), obtemos

$$-\int_I u''v\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.108}$$

[5] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: Wikipedia.

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v'\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.109}$$

Desta forma, definimos o seguinte **problema fraco** associado: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I);\ v(0) = u_0,\ v(L) = v_L\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \tag{1.110}$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v'\,dx \tag{1.111}$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv\,dx. \tag{1.112}$$

Exemplo 1.3.1. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \tag{1.113}$$

$$u(0) = 1/2, \quad u(1) = 1. \tag{1.114}$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x + 1/2$.

Para obtermos uma aproximação de elementos finitos, consideramos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I);\ v(0) = 1/2,\ v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \tag{1.115}$$

para todo $v \in V_0 = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(1) = 0\}$, onde

$$a(u, v) = \int_I u'v'\,dx, \tag{1.116}$$

$$L(v) = \int_I fv\,dx. \tag{1.117}$$

Então, o problema de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h \in V_h = \{v \in P_1(I);\ v(0) = 1/2,\ v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \tag{1.118}$$

para todo $v_h \in V_{h,0} = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(1) = 0\}$.

Código 1.4: ex_mef1d_dirichlet.py

```
from mpi4py import MPI

# malha
from dolfinx import mesh
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                   nx = 5)
# espaço
from dolfinx import fem
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# condição de contorno
import numpy as np
uD = fem.Function(V)
def dirichlet_bc(x):
    y = np.full(x.shape[1], 0.5)
    y[x[0,:] > 0.5] = 1.
    return y
uD.interpolate(dirichlet_bc)

tdim = domain.topology.dim
fdim = tdim - 1
domain.topology.create_connectivity(fdim, tdim)
boundary_facets = mesh.exterior_facet_indices(domain.topology)
boundary_dofs = fem.locate_dofs_topological(V, fdim,
                                            boundary_facets)
bc = fem.dirichletbc(uD, boundary_dofs)

# problema mef
import ufl
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
L = f * v * ufl.dx

```

```
problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
uh = problem.solve()

# armazena para visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
filename = results_folder / "u"
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
    xdmf.write_mesh(domain)
    xdmf.write_function(uh)
```

1.3.2 Condições de Neumann

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Neumann[6] homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \tag{1.119}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = 0, \tag{1.120}$$

com u_0 e f dados. Trata-se de um problema com condição de contorno de Dirichlet à esquerda e condição de contorno de Neumann[7] homogênea à direita.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.119), obtemos

$$-\int_I u''v\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.121}$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v'\,dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{u'(L)=0} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{v(0)=0} = \int_I fc\,dx. \tag{1.122}$$

[6]Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.
[7]Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I);\ v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{1.123}$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v'\,dx \tag{1.124}$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv\,dx. \tag{1.125}$$

Exemplo 1.3.2. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \tag{1.126}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \tag{1.127}$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x$.

Podemos construir uma aproximação por elementos finitos do seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \tag{1.128}$$

para todo $v \in V$, com as formas bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e linear $L(\cdot)$ dadas em (1.124) e (1.125).

Então, considerando elementos lineares por partes, temos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I);\ v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.129}$$

Código 1.5: ex_mef1d_neumann.py

```python
from mpi4py import MPI

# malha
from dolfinx import mesh
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
```

```
                                  nx = 5)
# espaço
from dolfinx import fem
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# c.c. dirichlet
import numpy as np
from dolfinx.fem import dirichletbc, locate_dofs_geometrical
uD = fem.Function(V)
uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))

def boundary_D(x):
    return np.isclose(x[0], 0.)

dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
bc = dirichletbc(uD, dofs_D)

# problema mef
import ufl
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
L = f * v * ufl.dx

problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
uh = problem.solve()

# armazena para visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
filename = results_folder / "u"
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
    xdmf.write_mesh(domain)
```

```
    xdmf.write_function(uh)
```

Agora, consideramos o seguinte problema com condições de Neumann não-homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \tag{1.130}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = \alpha, \tag{1.131}$$

com u_0, α e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (1.130), obtemos

$$-\int_I u''v\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.132}$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v'\,dx - \alpha v(L) = \int_I fc\,dx. \tag{1.133}$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I);\ v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u,v) - b(= L(v), \quad \forall v \in V, \tag{1.134}$$

onde $a(u,v)$ é a forma bilinear

$$a(u,v) = \int_I u'v'\,dx \tag{1.135}$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv\,dx + \alpha v(L). \tag{1.136}$$

Exemplo 1.3.3. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \tag{1.137}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \tag{1.138}$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 2x$.

Agora, consideramos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I);\ v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{1.139}$$

com

$$a(u, v) = \int_I u'v'\,dx \tag{1.140}$$

e

$$L(v) = \int_I fv\,dx + 1 \cdot v(1). \tag{1.141}$$

Então, consideramos o seguinte problema de elementos finitos associado: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I);\ v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.142}$$

Código 1.6: ex_mef1d_neumann_nh.py

```
from mpi4py import MPI

# malha
from dolfinx import mesh
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                   nx = 5)
# espaço
from dolfinx import fem
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# c.c. dirichlet
import numpy as np
from dolfinx.fem import dirichletbc, locate_dofs_geometrical
uD = fem.Function(V)
uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))

def boundary_D(x):
    return np.isclose(x[0], 0.)

dofs_D = locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
bc = dirichletbc(uD, dofs_D)
```

```

# problema mef
import ufl
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
L = f * v * ufl.dx
L += g * v * ufl.ds

problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
uh = problem.solve()

# armazena para visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
filename = results_folder / "u"
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as x
    xdmf.write_mesh(domain)
    xdmf.write_function(uh)
```

1.3.3 Condições de Robin

Em revisão

Consideramos o seguinte problema com condições de contorno de Robin[8]: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \tag{1.143}$$

$$u'(0) = r_0(u(0) - s_0), \ -u'(L) = r_L(u(L) - s_L), \tag{1.144}$$

com r_0, r_L, s_0, s_L e f dados.

[8]Victor Gustave Robin, 1855 - 1897, matemático francês. Fonte: Wikipedia.

Tomando uma função teste $v \in V = H^1(I)$ e multiplicando-a em (1.143), obtemos

$$-\int_I u''v\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{1.145}$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u'v'\,dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{-u'(L)=r_L(u(L)-s_L)} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{u'(0)=r_0(u(0)-s_0)} = \int_I fc\,dx. \tag{1.146}$$

ou, mais adequadamente,

$$\int_I u'v'\,dx + r_Lu(L)v(L) + r_0u(0)v(0) = \int_I fc\,dx + r_Ls_Lv(L) + r_0s_0v(0). \tag{1.147}$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in H^1(I)$ tal que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{1.148}$$

onde $a(u,v)$ é a forma bilinear

$$a(u,v) = \int_I u'v'\,dx + r_Lu(L)v(L) + r_0u(0)v(0) \tag{1.149}$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I fv\,dx + r_Ls_Lv(L) + r_0s_0v(0). \tag{1.150}$$

Exemplo 1.3.4. Consideramos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0,1], \tag{1.151}$$

$$u'(0) = u(0), \quad -u'(1) = u(1) - 1. \tag{1.152}$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 5x/6 + 5/6$.

Aqui, tomamos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V = H^1(I)$ tal que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{1.153}$$

onde

$$a(u,v) = \int_I u'v'\,dx + u(1)v(1) + u(0)v(0) \tag{1.154}$$

e

$$L(v) = \int_I f v\, dx + 1 \cdot v(1). \tag{1.155}$$

Então, uma aproximação por elementos finitos lineares por partes pode ser obtida resolvendo o seguinte problema: encontrar $u_h \in V_h = P_1(I)$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.156}$$

```python
from mpi4py import MPI

# malha
from dolfinx import mesh
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                   nx = 5)
# espaço
from dolfinx import fem
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# boundary colors
from dolfinx.mesh import locate_entities
from dolfinx.mesh import meshtags
boundaries = [(0, lambda x: np.isclose(x[0], 0.)),
              (1, lambda x: np.isclose(x[0], 1.))]
facet_indices, facet_markers = [], []
fdim = domain.topology.dim - 1
for (marker, locator) in boundaries:
    facets = locate_entities(domain, fdim, locator)
    facet_indices.append(facets)
    facet_markers.append(np.full_like(facets, marker))
facet_indices = np.hstack(facet_indices).astype(np.int32)
facet_markers = np.hstack(facet_markers).astype(np.int32)
sorted_facets = np.argsort(facet_indices)
facet_tag = meshtags(domain, fdim, facet_indices[sorted_facets], facet

# problema mef
import ufl
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
```

```python
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

f = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))
g = fem.Constant(domain, default_scalar_type(1.))

ds = ufl.Measure('ds', domain=domain, subdomain_data=facet_tag)

a = ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
a += u * v * ds(1) + u * v * ds(0)
L = f * v * ufl.dx
L += g * v * ds(1)

problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
uh = problem.solve()

# armazena para visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
filename = results_folder / "u"
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
    xdmf.write_mesh(domain)
    xdmf.write_function(uh)
```

1.3.4 Exercícios

Em revisão

E.1.3.1. Considere o problema

$$-u'' + u' + 2u = -\cos(x), \quad x \in (0, \pi/2), \tag{1.157}$$

$$u(0) = -0,3, \quad u(\pi/2) = -0,1. \tag{1.158}$$

Obtenha uma aproximação por elementos finitos para a solução deste problema, empregando o espaço de elementos finitos linear sobre uma malha uniforme com 10 células. Então, compare a aproximação computada com sua solução analítica $u(x) = 0,1(\text{sen}(x) + 3\cos(x))$, bem como, compute o erro $\|u - u_h\|_{L^2}$.

Respostas

E.1.3.1. Código.

1.4 Malhas Auto-Adaptativas

Em revisão

Retornemos ao problema modelo (1.59)-(1.60)

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \tag{1.159}$$
$$u(0) = u(L) = 0. \tag{1.160}$$

A estimativa *a posteriori* dada no Teorema 1.2.4, indica que os elementos residuais $\eta_i(u_h)$ podem ser utilizados para estimarmos a precisão da aproximação por elementos finitos. Ou seja, espera-se que quanto menores forem os elementos residuais, mais precisa é a solução por elementos finitos. Além disso, como

$$\eta_i(u_h) = h_i\|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}, \tag{1.161}$$

podemos reduzir $\eta_i(u_h)$ diminuindo o tamanho da célula I_i.

Do observado acima, motiva-se o seguinte algoritmo de elementos finitos com refinamento automático de malha:

1. Escolhemos uma malha inicial.
2. Iteramos:
   2. Resolvemos o problema de elementos finitos na malha corrente.
   2. Computamos $\eta_i(u_h)$ em cada célula da malha corrente.
   2. Com base na malha corrente, Contruímos uma nova malha pelo refinamento das células com os maiores valores de $\eta_i(u_h)$.
   2. Verificamos o critério de parada.

Uma estratégia clássica para a escolha das células a serem refinadas é a seguinte: refina-se a i-ésima célula se

$$\eta_i(u_h) > \alpha \max_{j=1,2,\dots,n} \eta_j(u_h), \tag{1.162}$$

onde escolhemos $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1.4.1. Consideramos o problema

$$-u'' = e^{-100|x-\frac{1}{2}|}, \quad x \in I = [0,1], \tag{1.163}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.164}$$

Aqui, computamos aproximações de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I);\ v(0) = v(1) = 0\}$ com sucessivos refinamentos de malha. Utilizamos uma malha inicial uniforme com 10 células e fazemos, então, 5 refinamentos sucessivos utilizando como critério de refinamento a estratégia (1.162) com $\alpha = 0,5$. A Figura 1.7 apresenta o esboço do gráfico da solução de elementos finitos na malha mais refinada. Além disso, na Tabela 1.1 temos os o número de células e o $\eta_i(u_h)$ máximo respectivo.

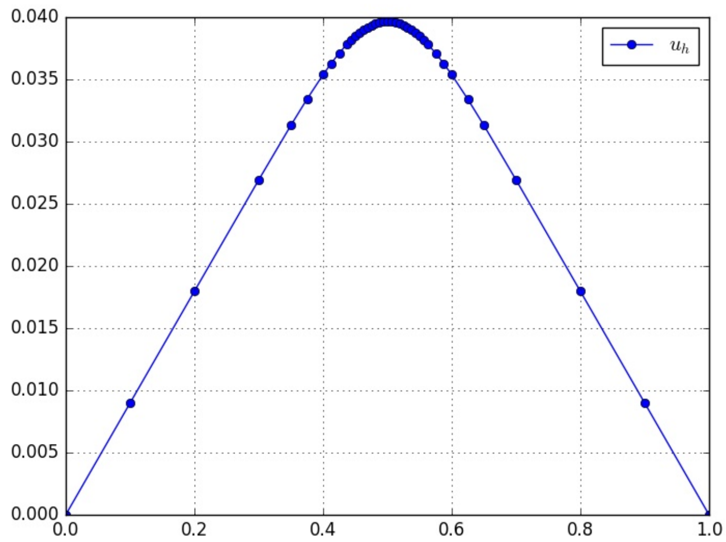

Figura 1.7: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.4.1.

Com o FEniCS, a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

#malha	#células	$\max_i \eta_i(u_h)$
0	10	5.0E-03
1	12	2.0E-03
2	14	8.6E-04
3	22	2.9E-04
4	30	1.4E-04
5	38	6.1E-05

Tabela 1.1: Resultados referente ao Exemplo 1.4.1.

```
# malha
mesh = IntervalMesh(10,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# fonte
f = Expression('exp(-100*pow(fabs(x[0]-0.5),2))',degree=1)

# condicoes de contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

#iteracoes
for iter in np.arange(6):

    #problema
    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #resolve
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)
```

```
#grafico
plt.close('all')
xx = mesh.coordinates()[:,0]
sorted_indices =  np.argsort(xx)
yy = u.compute_vertex_values()
plt.plot(xx[sorted_indices],yy[sorted_indices],
             marker="o",label=r"$u_h$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

DG = FunctionSpace(mesh, "DG", 0)
v = TestFunction(DG)
a = CellVolume(mesh)
eta = assemble(f**2*v*a*dx)

# refinamento da malha
cell_markers = MeshFunction("bool", mesh, mesh.topology().dim(), False)
eta_max = np.amax(eta[:])
print(eta_max)
print("%d %d %1.1E\n" % (iter,mesh.num_cells(),eta_max))
alpha = 0.5
for i,cell in enumerate(cells(mesh)):
    if (eta[i] > alpha*eta_max):
        cell_markers[cell] = True

mesh = refine(mesh, cell_markers)
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

1.4.1 Exercícios

Em revisão

E.1.4.1. Use uma estratégia de sucessivos refinamentos globais para resolver o problema dado no Exemplo 1.4.1. Compare seus resultados com aqueles obtidos no exemplo.

Respostas

E.1.4.1. Código.

1.5 Aplicação: EDP Evolutiva

Em construção

Como exemplo de **aplicação do método de elementos finitos (MEF) na solução de equações diferenciais parciais evolutivas no tempo**, consideramos a **equação do calor** com dadas condição inicial e condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$u_t = \alpha u_{xx} + f,\ (t, x) \in (0, t_f] \times (a, b), \tag{1.165a}$$

$$u(0, x) = u_0(x), x \in [a, b], \tag{1.165b}$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0,\ t \in [0, t_f], \tag{1.165c}$$

onde $f = f(t, x)$ denota uma dada fonte.

1.5.1 Discretização do Tempo

Consideramos os $n_t + 1$ tempos discretos $t^{(k)} = kh_t$, passo no tempo $h_t = t_f/n_t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$. Seguindo esquema θ denotando $u^{(k)} \approx u\left(t^{(k)}, x\right)$ e $f^{(k)} = f\left(t^{(k)}, x\right)$, o problema (1.165) pode ser aproximado pela iteração

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} = \theta\left(\alpha u_{xx}^{(k+1)} + f^{(k+1)}\right)$$

$$(1 - \theta)\left(\alpha u_{xx}^{(k)} + f^{(k)}\right), \tag{1.166a}$$

$$u^{(k+1)}(a) = u^{(k+1)}(b) = 0, \tag{1.166b}$$

onde $u^{(0)} = u_0$.

Observação 1.5.1. (Esquema θ.) O esquema θ e um forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0.$: Euler explícito.
- $\theta = 1.$: Euler implícito.

- $\theta = 0.5$: Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice k, denotando $u^{(k+1)} := u$, $u^{(k)} = u^0$ e similar para $f^{(k)}$. Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.166) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$-\alpha\theta u_{xx} + \frac{1}{h_t}u = \frac{1}{h_t}u^0 + (1-\theta)\alpha u^0_{xx} + (1-\theta)f^0 + \theta f, \tag{1.167a}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{1.167b}$$

1.5.2 Formulação de Elementos Finitos

A formulação fraca do problema (1.167) consiste em: encontrar $u \in V := H^1_0(a,b)$ tal que

$$a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V, \tag{1.168}$$

onde

$$a(u,v) := \int_a^b \theta\alpha u'v'\,dx + \int_a^b \frac{1}{h_t}uv\,dx, \tag{1.169}$$

$$L(v) := (1-\theta)\int_a^b \alpha u^{0'}v'\,dx + \int_a^b \frac{1}{h_t}u^0 v\,dx$$
$$\theta\int_a^b fv\,dx + (1-\theta)\int_a^b f^0 v\,dx \tag{1.170}$$

Então, assumindo uma malha com n_x células $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de tamanho $h_x = (b-a)/n_x$ e nodos $x_i = a + (i-1)h_x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$, escolhemos o espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in C^0([a,b]) :\ v|_{I_i} \in P_1(I_i),\ i = 0, 1, \dots, n_x, v(a) = v(b) = 0\}. \tag{1.171}$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.167) consiste em: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in V_{h,0}. \tag{1.172}$$

Exemplo 1.5.1. Consideramos o seguinte problema de calor

$$u_t = u_{xx} + (\pi^2 - 1)e^{-t}\,\text{sen}(\pi x),\ (t,x) \in (0,1] \times (0,1), \tag{1.173a}$$

$$u(0,x) = \text{sen}(\pi x),\ x \in [0,1], \tag{1.173b}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0. \tag{1.173c}$$

```python
from mpi4py import MPI
import ufl
from dolfinx import mesh
from dolfinx import fem
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem

# parâmetros
tf = 1.
alpha = 1.

# esquema theta
theta = 0.5

# discretização no tempo
nt = 10
ht = tf/nt

# malha
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                    nx = 5)
x = ufl.SpatialCoordinate(domain)

# espaço
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# fonte
f = fem.Function(V)
def f(t,x):
    return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.pi*x[0])

# condição de contorno
import numpy as np
uD = fem.Function(V)
```

```python
uD.interpolate(lambda x: np.full(x.shape[1], 0.))

def boundary_D(x):
    return np.logical_or(np.isclose(x[0], 0.),
                         np.isclose(x[0], 1.))

dofs_D = fem.locate_dofs_geometrical(V, boundary_D)
bc = fem.dirichletbc(uD, dofs_D)

# mef fun.s
u = ufl.TrialFunction(V)
v = ufl.TestFunction(V)

# condição inicial
t = 0.
u0 = fem.Function(V)
u0.interpolate(lambda x: np.sin(np.pi*x[0]))

# fonte
def f(t, x):
    return (ufl.pi**2-1.)*ufl.exp(-t)*ufl.sin(ufl.pi*x[0])

# visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)

# iteração no tempo
for k in range(nt):
    t += ht

    # forma bilinear
    a = theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
    a += u * v / ht * ufl.dx

    # forma linear
    L = (theta-1.) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.grad(v)) * ufl.dx
    L += u0 * v / ht * ufl.dx
    L += theta * f(t, x) * v * ufl.dx
```

```
    L += (1.-theta) * f(t-ht, x) * v * ufl.dx

    problem = LinearProblem(a, L, bcs=[bc])
    uh = problem.solve()

    # armazena para visualização (paraview)
    filename = results_folder / f"u_{k:0>6}"
    with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w")
        xdmf.write_mesh(domain)
        xdmf.write_function(uh, t)

    u0.x.array[:] = uh.x.array[:]
```

1.5.3 Exercícios

Em construção

1.6 Aplicação: EDP de Advecção-Difusão

Em construção

1.6.1 Exercícios

Em construção

1.7 Aplicação: EDP Não-Linear

Em construção

Como exemplo de aplicação do MEF na solução de **equações diferenciais parciais não-lineares**, consideramos a **equação de Fisher**[9] com dadas condição inicial e condições de contorno de Neumann[10]

$$u_t = u_{xx} + u(1-u),\ (t,x) \in (0,t_f] \times (0,1), \tag{1.174a}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [0,1], \tag{1.174b}$$

[9]Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962, biólogo inglês. Fonte: Wikipédia.

[10]Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: Wikipédia.

$$u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0,\ t \in [0, t_f]. \tag{1.174c}$$

1.7.1 Discretização do Tempo

Consideramos os $n_t + 1$ tempos discretos $t^{(k)} = kh_t$, passo no tempo $h_t = t_f/n_t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n_t$. Seguindo esquema θ denotando $u^{(k)} \approx u\left(t^{(k)}, x\right)$, o problema (1.174) pode ser aproximado pela iteração

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{h_t} = \theta\left[u_{xx}^{(k+1)} + u^{(k+1)}\left(1 - u^{(k+1)}\right)\right]$$

$$(1-\theta)\left[u_{xx}^{(k)} + +u^{(k)}\left(1 - u^{(k)}\right)\right], \tag{1.175a}$$

$$u_x^{(k+1)}(0) = u_x^{(k+1)}(1) = 0, \tag{1.175b}$$

onde $u^{(0)} = u_0$.

Observação 1.7.1. (Esquema θ.) O esquema θ e um forma robusta de escrever diferentes esquemas de discretização em uma única expressão:

- $\theta = 0.$: Euler explícito.
- $\theta = 1.$: Euler implícito.
- $\theta = 0.5$: Crank-Nicolson.

Por simplificação da notação, vamos suprimir o super-índice k, denotando $u^{(k+1)} := u$, $u^{(k)} = u^0$. Com isso e rearranjando os termos, cada iteração (1.175) se resume ao seguinte problema de valores de contorno

$$\frac{1}{h_t}u - \frac{1}{h_t}u^0 - \theta\left[u_x x + u(1-u)\right]$$

$$-(1-\theta)\left[u_x^0 x + u^0(1-u^0)\right], \tag{1.176a}$$

$$u_x(0) = u_x(1) = 0. \tag{1.176b}$$

1.7.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

A formulação fraca do problema (1.176) consiste em: encontrar $u \in V := H^1[0,1]$ tal que

$$F(u; v) = 0,\ \forall v \in V, \tag{1.177}$$

onde

$$\begin{aligned}F(u;v) := &\int_0^1 \frac{1}{h_t}u\,dx - \int_0^1 \frac{1}{h_t}u^0\,dx \\ &+ \theta\int_0^1 u_xv_x\,dx - \theta\int_0^1 u(1-u)v\,dx \\ &+ (1-\theta)\int_0^1 u_x^0v_x\,dx - (1-\theta)\int_0^1 u^0(1-u^0)v\,dx.\end{aligned} \tag{1.178}$$

Então, assumindo uma malha com n_x células $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de tamanho $h_x = 1/n_x$ e nodos $x_i = (i-1)h_x$, $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$, escolhemos o espaço de elementos finitos

$$V_h := \{v \in C^0([a,b]) : \ v|_{I_i} \in P_1(I_i),\ i = 0, 1, \dots, n_x\}. \tag{1.179}$$

Com isso, a formulação de elementos finitos do problema (1.176) consiste em: encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$F(u_h; v) = 0,\ \forall v_h \in V_h. \tag{1.180}$$

Observação 1.7.2. O problema (1.180) consiste em um sistema de equações não-lineares.

Exemplo 1.7.1. Consideramos a equação de Fisher com condições inicial e de contorno

$$u_t = u_{xx} + u(1-u),\ t \in (0, t_f) \times (0,1), \tag{1.181a}$$

$$u(0,x) = \cos^2(\pi x),\ x \in [0,1], \tag{1.181b}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0,\ t \in [0, t_f], \tag{1.181c}$$

com $tf = 5$.

Código 1.7: ex_mef1d_fisher.py

```
from mpi4py import MPI
import numpy as np
import ufl
from dolfinx import mesh
from dolfinx import fem
from dolfinx import default_scalar_type
from dolfinx.fem.petsc import NonlinearProblem
from dolfinx.nls.petsc import NewtonSolver
```

```python

# parâmetros
tf = 5.

# esquema theta
theta = 0.5

# discretização no tempo
nt = 100
ht = tf/nt

# malha
domain = mesh.create_unit_interval(MPI.COMM_WORLD,
                                   nx = 5)
x = ufl.SpatialCoordinate(domain)

# espaço
V = fem.functionspace(domain, ('P', 1))

# mef fun.s
v = ufl.TestFunction(V)
u = fem.Function(V)

# condição inicial
t = 0.
u0 = fem.Function(V)
u0.interpolate(lambda x: np.cos(np.pi*x[0])**2)

# inicialização
u.x.array[:] = u0.x.array[:]

# visualização (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)

# armazena para visualização (paraview)
filename = results_folder / f"u_{0:0>6}"
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as xdmf:
```

```python
    xdmf.write_mesh(domain)
    xdmf.write_function(u, 0.)


# iteração no tempo
for k in range(nt):

    t += ht
    print(f"{k+1}: t = {t:.4g}")

    # forma fraca
    ## time term
    F = 1./ht * u * v * ufl.dx
    F -= 1./ht * u0 * v * ufl.dx
    ## diffusion term
    F += theta * ufl.dot(ufl.grad(u), ufl.grad(v)) * ufl.dx
    F += (1.-theta) * ufl.dot(ufl.grad(u0), ufl.grad(v)) * ufl.dx
    ## reaction term
    F -= theta * u * (1. - u) * v * ufl.dx
    F -= (1.-theta) * u0 * (1. - u0) * v * ufl.dx

    problem = NonlinearProblem(F, u)
    solver = NewtonSolver(MPI.COMM_WORLD, problem)
    n, converged = solver.solve(u)
    print(f"\tNewton iterations: {n}")
    assert(converged)

    # armazena para visualização (paraview)
    filename = results_folder / f"u_{k+1:0>6}"
    with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w
        xdmf.write_mesh(domain)
        xdmf.write_function(u, t)

    u0.x.array[:] = u.x.array[:]
```

1.7.3 Exercícios

Em construção

1.8 Seleção de Aplicações

Em revisão

1.8.1 Sistemas de Equações

Em revisão

Consideramos o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias com valores de contorno

$$-u_0'' + u_1 = f_0, \forall x \in (0, L) \tag{1.182}$$
$$-u_1'' + u_0 = f_1, \forall x \in (0, L) \tag{1.183}$$
$$u_0(0) = u_{00}, \quad u_0(L) = u_{0L}, \tag{1.184}$$
$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = u_{1L}, \tag{1.185}$$

onde f_0, f_1, u_{00}, u_{0L}, u_{10}, u_{1L} são dados.

Para construirmos uma aproximação por elementos finitos podemos tomar o seguinte problema fraco associado: encontrar $u = (u_0, u_1) \in V_0 \times V_1$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v = (v_0, v_1) \in V \times V, \tag{1.186}$$

onde $V_0 = \{v \in H^1(I);\ v_0(0) = u_{00},\ v_0(L) = u_{0L}\}$, $V_1 = \{v_1 \in H^1(I);\ v_1(0) = u_{10},\ v_1(L) = u_{1L}\}$, $V = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(L) = 0\}$, a forma bilinear é

$$a(u, v) = \int_I u_0' v_0'\, dx + \int_I u_1' v_1'\, dx + \int_I u_0 v_0\, dx + \int_I u_1 v_1\, dx \tag{1.187}$$

e a forma linear é

$$L(v) = \int_I f_0 v_0\, dx + \int_I f_1 v_1\, dx. \tag{1.188}$$

Então, o problema de elemento finitos associado no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \tag{1.189}$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I);\ v_{h0}(0) = u_{00},\ v_{h0}(L) = u_{0L}\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I);\ v_{h1}(0) = u_{10},\ v_{h1}(L) = u_{1L}\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I);\ v_h(0) = v_h(L) = 0\}$.

Exemplo 1.8.1. Consideramos o seguinte problema de valor de contorno

$$-u_0'' + u_1 = \operatorname{sen}(x) + \cos(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \tag{1.190}$$

$$-u_1'' + u_0 = \cos(x) - \sin(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \tag{1.191}$$

$$u_0(-\pi) = 0, \quad u_0(\pi) = 0, \tag{1.192}$$

$$u_1(-\pi) = -1, \quad u_1(\pi) = -1. \tag{1.193}$$

Considerando elementos lineares por partes, temos a seguinte formulação de elementos finitos: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \tag{1.194}$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I);\ v_{h0}(0) = v_{h0}(L) = 0\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I);\ v_{h1}(0) = v_{h1}(L) = -1\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I);\ v_h(0) = v_h(L) = 0\}$, com as formas bilinear e linear são dadas em (1.187) e (1.188), respectivamente.

A Figura 1.8 apresenta o esboço dos gráficos das soluções analíticas $u_0(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $u_1(x) = \cos(x)$ e de suas aproximações de elementos finitos u_{h0} e u_{h1}, estas construídas no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

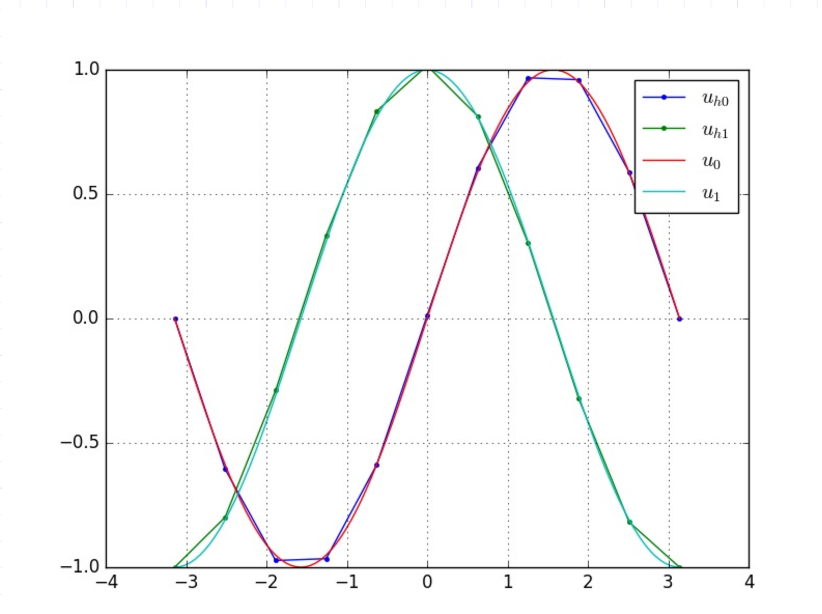

Figura 1.8: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo 1.8.1.

Com o FEniCS, a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(10,-pi,pi)

# espaco
P1 = FiniteElement('P',interval,1)
element = MixedElement([P1,P1])
V = FunctionSpace(mesh, element)

#C.C.
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = [DirichletBC(V.sub(0),Constant(0.0),boundary),
      DirichletBC(V.sub(1),Constant(-1.0),boundary)]
print(bc)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f0 = Expression('sin(x[0]) + cos(x[0])',
                degree=10)
f1 = Expression('cos(x[0]) - sin(x[0])',
                degree=10)
a  = u[0].dx(0)*v[0].dx(0)*dx
a += u[1]*v[0]*dx
a += u[1].dx(0)*v[1].dx(0)*dx
a -= u[0]*v[1]*dx
```

```
L  = f0*v[0]*dx
L += f1*v[1]*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
u0a = Expression('sin(x[0])',
                 degree=10)
u1a = Expression('cos(x[0])',
                 degree=10)

plot(u[0],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h0}$")
plot(u[1],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h1}$")
mesh = IntervalMesh(100,-pi,pi)
plot(u0a,mesh=mesh,label=r"$u_0$")
plot(u1a,mesh=mesh,label=r"$u_1$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()
```

1.8.2 Exercícios

[[tag:construcao]]

Capítulo 2

Problemas Bidimensionais

2.1 Malha e Espaço

Em revisão

2.1.1 Malha

Em revisão

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e poligonal. Uma **malha (ou triangularização) $\mathcal{K}$ de Ω é um conjunto de $\{K\}$ células (ou elementos) K, em que $\Omega = \cup_{K\in\mathcal{K}} K$ e tal que a interseção de duas células é ou um lado, um canto ou vazio**.

Classicamente as células K são escolhidas como triângulos. O comprimento do maior lado da célula K define o chamado **tamanho local da malha** h_K. O **tamanho global da malha** é definida por $h = \max_{K\in\mathcal{K}} h_K$.

Uma **malha** é dita **regular** quando existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $c_K > c_0$ para todo $K \in \mathcal{K}$, sendo $c_K := d_K/h_K$ e d_K o diâmetro do circulo inscrito em K. Esta condição significa que os triângulos K da malha não podem ter ângulos muito grandes nem muito pequenos. Ao longo do texto, a menos que especificado o contrário, assumiremos trabalhar com **malhas regulares**.

Exemplo 2.1.1. O seguinte código, gera uma malha uniforme no domínio $\Omega = [0, 1]^2$.

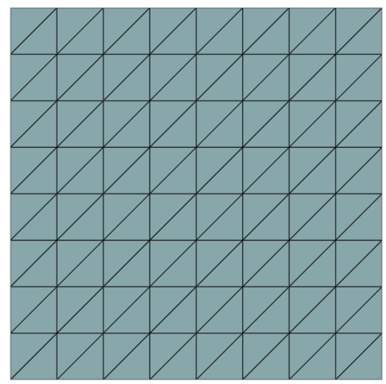

Figura 2.1: Esboço de uma malha triangular no domínio $D = [0, 1]^2$.

Código 2.1: ex_malha.py

```
from mpi4py import MPI
from dolfinx import mesh

# malha triangular
domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD,
                                  nx = 5, ny = 5)

# gráfico da malha
import pyvista
# pyvista.set_jupyter_backend('static')
print(pyvista.global_theme.jupyter_backend)

from dolfinx import plot
pyvista.start_xvfb()
tdim = domain.topology.dim
topology, cell_types, geometry = plot.vtk_mesh(domain, tdim)
grid = pyvista.UnstructuredGrid(topology, cell_types, geometry)

plotter = pyvista.Plotter()
plotter.add_mesh(grid, show_edges=True)
```

```
plotter.view_xy()
pyvista.OFF_SCREEN=True
if not pyvista.OFF_SCREEN:
    plotter.show()
else:
    figure = plotter.screenshot("malha.png")
```

2.1.2 Espaço de Polinômios Lineares

Em revisão

Seja K um triângulo e seja $P_1(K)$ o **espaço dos polinômios lineares em K**, i.e.

$$\begin{aligned} P_1(K) = \{v;\ & v = c_0 + c_1x_0 + c_2x_1, \\ & (x_0, x_1) \in K,\ c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observamos que toda função $v \in P_1(K)$ é unicamente determinada por seus valores nodais

$$\alpha_i = v(N_i), i = 0, 1, 2, \tag{2.2}$$

onde $N_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$ é o i-ésimo nodo (vértice) do triângulo K. Isto segue do fato de que o sistema (2.2) tem forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^{(0)} & x_1^{(0)} \\ 1 & x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ 1 & x_0^{(2)} & x_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Ainda, o valor absoluto do determinante da matriz de coeficientes é $2|K|$, onde $|K|$ denota a área de K, a qual é não nula.

Afim de usarmos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), nós introduzimos a seguinte base nodal $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ com

$$\lambda_j(N_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{array} \right. ,\ i, j = 0, 1, 2. \tag{2.4}$$

Com esta base, toda função $v \in P_1(K)$ pode ser escrita como

$$v = \alpha_0\lambda_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2, \tag{2.5}$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$.

2.1.3 Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

Em revisão

O **espaço contínuo dos polinômios lineares por partes** na malha $\mathcal{K}$ é definido por

$$V_h = \{v;\ v \in C^0(\Omega),\ v|_K \in P_1(K),\ \forall K \in \mathcal{K}\}. \tag{2.6}$$

Observamos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais $\{v(N_j)\}_{j=0}^{n_p-1}$, onde n_p é número de nodos da malha $\mathcal{K}$.

De fato, os valores nodais determinam uma única função em $P_1(K)$ para cada $K \in \mathcal{K}$ e, portanto, uma função em V_h é unicamente determinada por seus valores nos nodos. Agora, consideremos dois triângulos K_1 e K_2 compartilhando um lado $E = K_1 \cap K_2$. Sejam v_1 e v_2 os dois únicos polinômios em $v_1 \in P_1(K_1)$ e $v_2 \in P_1(K_2)$, respectivamente determinados pelos valores nodais em K_1 e K_2. Como v_1 e v_2 também são polinômios lineares em E e seus valores coincidem nos nodos de E, temos $v_1 = v_2$ em E. Portanto, concluímos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais.

Afim de termos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), definimos a **base nodal** $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p} \subset V_h$ tal que

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases},\quad i, j = 0, 1, \ldots, n_p - 1. \tag{2.7}$$

Notamos que cada função base φ_j é contínua, polinômio linear por partes e com suporte somente em um pequeno conjunto de triângulos que compartilham o nodo N_j. Além disso, toda a função $v \in V_h$ pode, então, ser escrita como

$$v = \sum_{i=0}^{n_p-1} \alpha_i \varphi_i, \tag{2.8}$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n_p$, são os valores nodais de v.

Exemplo 2.1.2. No seguinte código, alocamos um espaço de elementos finitos V_h sobre uma malha regular no domínio $\Omega = [0, 1]^2$. Ainda, uma função $u_h \in V_h$ é alocada com valores nodais

$$u(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sen}(\pi x_0) \operatorname{sen}(\pi x_1). \tag{2.9}$$

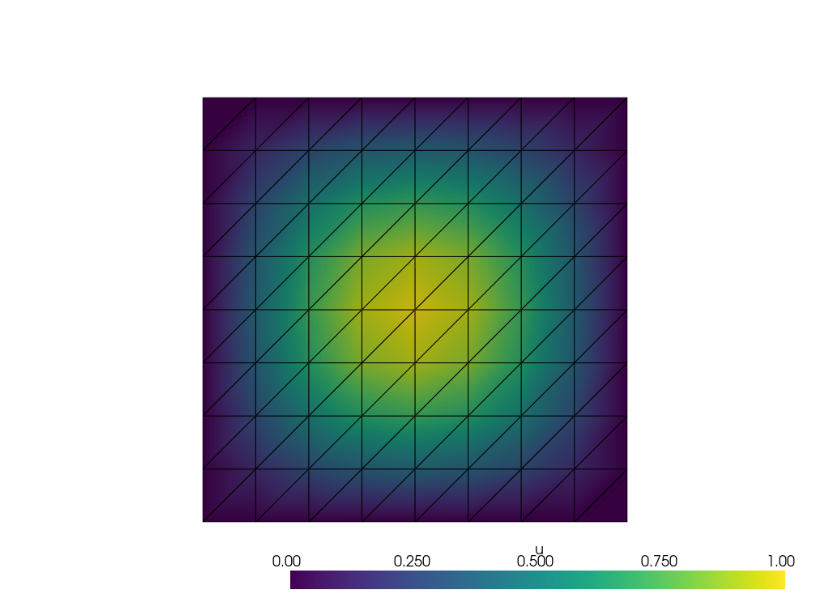

Figura 2.2: Esboço de uma função no espaço V_h com valores nodais $u(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sen}(\pi x_0)\operatorname{sen}(\pi x_1)$.

```
from mpi4py import MPI
from dolfinx import mesh

# malha
domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD, 5, 5)

from dolfinx import fem

# espaço de elementos finitos
V = fem.functionspace(domain, ("P",1))

# função do espaço V
uh = fem.Function(V)

# valor nodais
from numpy import sin, pi
for i,x in enumerate(domain.geometry.x):
  uh.x.array[i] = sin(pi*x[0])*sin(pi*x[1])
```

```python

# gráfico
u_topology, u_cell_types, u_geometry = plot.vtk_mesh(V)
u_grid = pyvista.UnstructuredGrid(u_topology, u_cell_types, u_geometry
u_grid.point_data["u"] = uh.x.array.real
u_grid.set_active_scalars("u")
u_plotter = pyvista.Plotter()
u_plotter.add_mesh(u_grid, show_edges=True)
u_plotter.view_xy()
if not pyvista.OFF_SCREEN:
  u_plotter.show()
else:
  figure = u_plotter.screenshot("u.png")
```

2.1.4 Exercícios

Em construção

Respostas

2.2 Interpolação

Em revisão

Dada uma função contínua f em um triângulo K com nodos N_i, $i = 0, 1, 2$, sua interpolação linear $\pi f \in P_1(K)$ é definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^{3} f(N_i)\varphi_i. \tag{2.10}$$

Logo, temos $\pi f(N_i) = f(N_i)$ para todo $i = 0, 1, 2$.

Exemplo 2.2.1. Consideramos a função

$$u(x_0, x_1) = \operatorname{sen}(\pi x_0)\cos(\pi x_1) \tag{2.11}$$

defina no domínio $D = [0, 1]^2$. O seguinte código computa a interpolação de f no espaço de elementos finitos V_h sobre uma malha uniforme de 16×16 triângulos. Com ele, graficamos a função interpolada $u_h \in V_h$ e a função u. Consulte a Fig. 2.3.

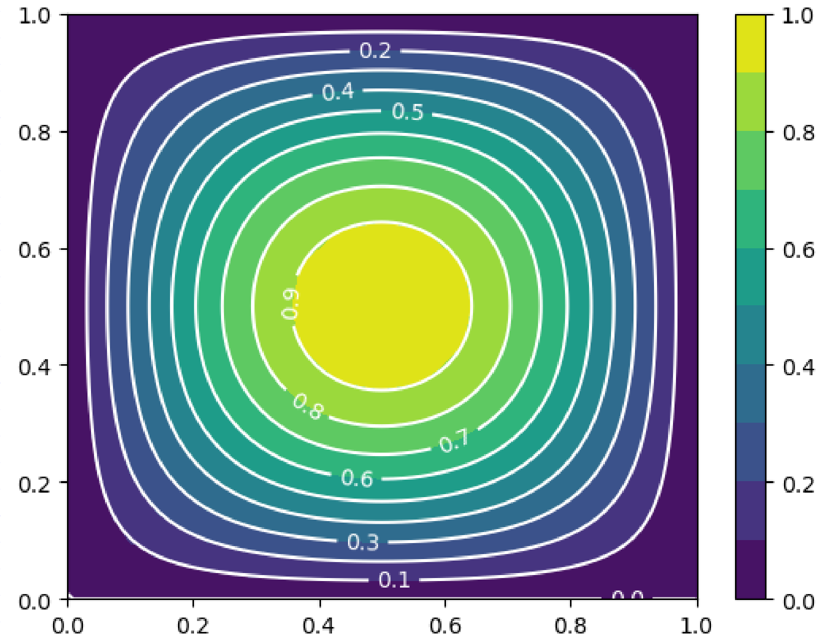

Figura 2.3: Gráfico de comparação função interpolada $u_h \in V_h$ (gráfico de contornos em cores) e da função original u (isolinhas) referentes ao Exemplo 2.2.1.

Código 2.2: interp2d.py

```
from mpi4py import MPI
from dolfinx import mesh

# malha
domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD, 16, 16)

from dolfinx import fem

# espaço de elementos finitos
V = fem.functionspace(domain, ("P",1))

# função do espaço V
uh = fem.Function(V)

# interpolate
import numpy as np
def u(x, mod=np):
    return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x[1])

uh.interpolate(lambda x: u(x))

# eval fun
from dolfinx import geometry

def fun_eval(u, points,
             domain=domain):
  u_values = []
  bb_tree = geometry.bb_tree(domain, domain.topology.dim)
  cells = []
  points_on_proc = []
  # Find cells whose bounding-box collide with the the points
  cell_candidates = geometry.compute_collisions_points(bb_tree,
                                                       points.T)
  # Choose one of the cells that contains the point
  colliding_cells = geometry.compute_colliding_cells(domain,
                                                     cell_candidates,
                                                     points.T)
  for i, point in enumerate(points.T):
    if len(colliding_cells.links(i)) > 0:
```

```
        points_on_proc.append(point)
        cells.append(colliding_cells.links(i)[0])

    points_on_proc = np.array(points_on_proc, dtype=np.float64)
    u_values = u.eval(points_on_proc, cells)
    return u_values

# gráfico
import numpy as np
nx = ny = 101
xx0 = np.linspace(0., 1., nx)
xx1 = np.linspace(0., 1., ny)
X0, X1 = np.meshgrid(xx0, xx1, indexing='ij')
points = np.zeros((3, nx*ny))
points[0] = X0.reshape(-1)
points[1] = X1.reshape(-1)

yh = fun_eval(uh, points)
Yh = yh.reshape((nx,ny))

import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot()
levels=10
cb = ax.contourf(X0, X1, Yh, levels = levels)
fig.colorbar(cb)
Y = u([X0, X1])
cl = ax.contour(X0, X1, Y, levels = levels, colors='w')
ax.clabel(cl)
plt.show()
```

Afim de determinarmos estimativas para o erro de interpolação, precisamos da chamada derivada total de primeira ordem

$$Df = \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_0}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

e da derivada total de segunda ordem

$$D^2 f = \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Proposição 2.2.1. (Erro da interpolação no espaço linear.) A interpolação πf satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}, \tag{2.14}$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(K)} \leq C h_K \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \tag{2.15}$$

Demonstração. Veja [1, Capítulo 4]. □

Observação 2.2.1. A constante C dependo do inverso de $\operatorname{sen}(\theta_K)$ onde θ_K é o menor angulo de K. Desta forma, para um triângulo com θ_K muito pequeno, as estimativas (2.14) e (2.15) perdem sentido. Este fato indica a necessidade de se trabalhar com malhas regulares.

A interpolação no espaço V_h de uma dada função f no domínio Ω é denotada também por $\pi f \in V_h$ e definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^{n_p - 1} f(N_i) \varphi_i. \tag{2.16}$$

Proposição 2.2.2. (Erro da interpolação no espaço contínuo linear por partes.) O interpolador $\pi f \in V_h$ satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2, \tag{2.17}$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2, . \tag{2.18}$$

Demonstração. Demonstração análoga a Proposição 1.1.2. □

Observação 2.2.2. (Taxa de convergência.) A taxa de convergência (ou ordem de truncamento) do erro de interpolação é definida como a potência do h na estimativa (2.17). Esta taxa pode ser computacionalmente estimada. De fato, o erro de interpolação para uma dada malha i tem a forma $\varepsilon_i \approx C h_i^r$. Conhecendo $\varepsilon_{i-1} \approx C h_{i-1}^r$ para uma outra malha $i-1$, podemos resolver para r, obtendo a estimativa

$$r \approx \frac{\ln \varepsilon_i / \varepsilon_{i-1}}{\ln h_i / h_{i-1}}. \tag{2.19}$$

Exemplo 2.2.2. Consideramos a interpolação feita no Exemplo 2.2.1. Aqui, computamos o erro de interpolação na norma L^2, i.e.

$$\varepsilon = \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.20}$$

para diferentes refinamentos de malha.

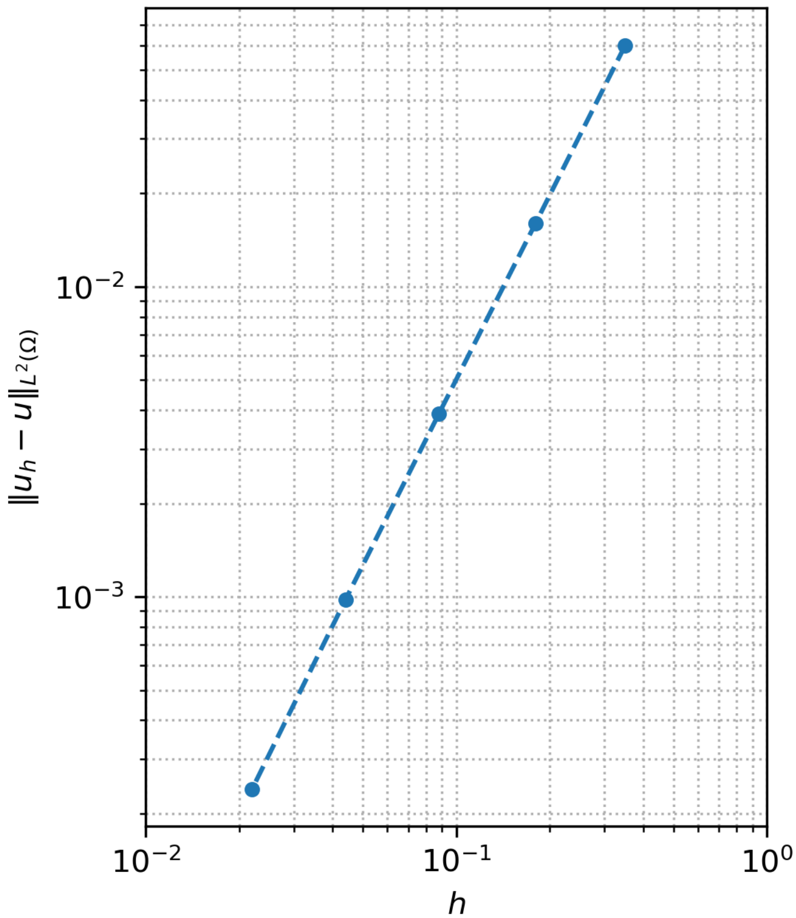

Figura 2.4: Tamanho da malha h *versus* erro de interpolação na norma L^2 referente ao Exemplo 2.2.2.

Na Tabela 2.1, temos o número de células e seu tamanho h, o erro de interpolação ε e a estimativa da taxa de convergência dada por (2.19).

Tabela 2.1: Erro de interpolação referente ao Exemplo 2.2.2.

#células	h	ϵ	r
4×4	3.5×10^{-1}	6.0×10^{-2}	-x-
8×8	1.8×10^{-1}	1.6×10^{-2}	1.91
16×16	8.8×10^{-2}	3.9×10^{-3}	2.04
32×32	4.4×10^{-2}	9.8×10^{-4}	1.99
64×64	2.2×10^{-2}	$2.4e \times 10^{-4}$	2.03

2.2.1 Exercícios

Em construção

2.3 Projeção

Em revisão

A **projeção** L^2 no espaço V_h de uma dada uma função $u \in L^2(\Omega)$ **é denotada por** $P_h u \in V_h$ **e definida por**

$$\int_\Omega (u - P_h u) v \, dx = 0, \ \forall v \in V_h. \tag{2.21}$$

Analogamente a projeção em uma dimensão (consulte Subseção 1.1.2), a projeção é dada por

$$P_h u = \sum_{j=0}^{n_p-1} \xi_j \varphi_j, \tag{2.22}$$

com $\boldsymbol{\xi} = (\xi_j)_{j=0}^{n_p-1}$ satisfazendo o sistema linear

$$M\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}, \tag{2.23}$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n_p-1}$ é a **matriz de massa** com

$$m_{i,j} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx \tag{2.24}$$

e $\boldsymbol{b} = (b_1, \ b_2, \ \dots, \ b_{n_p-1})$ é o **vetor de carga** com

$$b_i = \int_\Omega u \varphi_i \, dx. \tag{2.25}$$

Também, vale o resultado análogo da **melhor aproximação** (consulte Teorema 1.1.1), i.e.

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_h. \tag{2.26}$$

E, portanto, também temos a estimativa análoga para o **erro de projeção** (condulte Teorema 1.1.2)

$$\|u - P_h u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 u\|^2_{L^2(K)}. \tag{2.27}$$

Tomando o tamanho global da malha, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \tag{2.28}$$

Exemplo 2.3.1. Consideramos a função $u(x_0, x_1) = \text{sen}(\pi x_0)\cos(\pi x_1)$ definida no domínio $D = [0,1] \times [0,1]$. código computa a projeção de u no espaço V_h sobre uma malha triangular uniforme.

```python
from mpi4py import MPI
from dolfinx import mesh

# malha
domain = mesh.create_unit_square(MPI.COMM_WORLD, 16, 16)

from dolfinx import fem

# espaço de elementos finitos
Vh = fem.functionspace(domain, ("P",1))

# função do espaço V
uh = fem.Function(Vh)

# projeção
import ufl
from dolfinx.fem.petsc import LinearProblem
def uex(x, mod=ufl):
    return mod.sin(mod.pi*x[0])*mod.sin(mod.pi*x[1])

x = ufl.SpatialCoordinate(domain)
u = ufl.TrialFunction(Vh)
v = ufl.TestFunction(Vh)
```

```
a = ufl.dot(u,v)*ufl.dx
L = uex(x)*v*ufl.dx
problem = LinearProblem(a, L, bcs=[])
Phu = problem.solve()

# saída (paraview)
from dolfinx import io
from pathlib import Path
results_folder = Path("results")
results_folder.mkdir(exist_ok=True, parents=True)
filename = results_folder / "phu"
Phu.name = "Phu"
with io.VTXWriter(domain.comm, filename.with_suffix(".bp"), [Phu]) as
    vtx.write(0.0)
with io.XDMFFile(domain.comm, filename.with_suffix(".xdmf"), "w") as x
    xdmf.write_mesh(domain)
    xdmf.write_function(Phu, 0.0)
```

2.3.1 Exercícios

Em revisão

E.2.3.1. Verifique computacionalmente a estimativa (2.28) no caso da função $f(x_0, x_1) = \operatorname{sen}(\pi x_0)\cos(\pi x_1)$ projetada sobre uma malha triangular uniforme sobre o domínio $D = [0,1] \times [0,1]$.

2.4 Problema Modelo

Em revisão

Nesta seção, aplicamos do **método de elementos finitos para a equação de Poisson**[1] com condições de Dirichlet[2]. Mais precisamente, definimos o chamdo **problema forte**: encontrar u tal que

$$-\Delta u = f,\ x \in \Omega := [0,1]^2, \tag{2.29}$$

$$u = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{2.30}$$

[1]Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840, matemático francês. Fonte: Wikipédia.

[2]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: Wikipedia.

onde $\Delta = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2$ é o operador de Laplace[3] e f é uma função dada.

2.4.1 Formulação Fraca

Em revisão

A aplicação do método de elementos finitos é construída sobre a **formulação fraca** do problema (2.29)-(2.30). Para a obtermos, multiplicamos (2.29) por uma função teste v em um espaço adequado V_0 e integramos no domínio Ω, obtendo

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx. \tag{2.31}$$

Então, no lado esquerdo, aplicamos a fórmula de Green[4]

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \nabla u\, v\, ds. \tag{2.32}$$

donde temos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \nabla u v\, ds = \int_\Omega f v\, dx. \tag{2.33}$$

Então, observando critérios de regularidade e a condição de contorno (2.30), escolhemos o **espaço teste**

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega) :\ v|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{2.34}$$

Lembramos que $H^1(\Omega) = \{v :\ \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$.

Com isso, temos o seguinte **problema fraco** associado a (2.29)-(2.30): encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V_0, \tag{2.35}$$

onde $a(u,v)$ é chamada de **forma bilinear** e definida por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \tag{2.36}$$

e $L(v)$ é chamada de **forma linear** e definida por

$$L(v) := \int_\Omega f v\, dx. \tag{2.37}$$

[3]Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, matemático francês. Fonte: Wikipédia.
[4]George Green, 1793 - 1841, matemático britânico. Fonte: Wikipedia.

2.4.2 Formulação de Elementos Finitos

Em revisão

A **formulação de elementos finitos** é obtida da formulação fraca (2.35) pela aproximação do espaço teste V_0 por uma espaço de dimensão finita. Tomando uma triangulação $\mathcal{K} \subset \Omega$ e considerando o espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

$$V_h := \{v : \ v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K) \ \forall K \in \mathcal{K}\}, \tag{2.38}$$

assumimos o espaço de elementos finitos

$$V_{h,0} := \{v \in V_h : \ v|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{2.39}$$

Com isso, temos o seguinte problema de elementos finitos associado (2.35): encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_{h,0}. \tag{2.40}$$

Observemos que (2.40) é equivalente ao problema de encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \tag{2.41}$$

com $i = 0, 1, \cdots, n_p - 1$, onde $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n_i-1}$ é a base nodal de $V_{h,0}$ e n_i é o número de funções bases (igual ao número de nodos internos da triangulação $\mathcal{K}$). Ainda, como

$$u_h = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \tag{2.42}$$

temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \tag{2.43}$$

$$= \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \tag{2.44}$$

Com isso, o problema de elementos finitos é equivalente a resolver o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \ i = 0, 1, \cdots, n_i - 1, \tag{2.45}$$

para as incógnitas ξ_j, $j = 0, 1, \cdots, n_i - 1$. Ou, equivalentemente, temos sua forma matricial

$$A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}, \tag{2.46}$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=0}^{n_i-1}$ é chamada de **matriz de rigidez** com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \tag{2.47}$$

e $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \cdots, b_{n_i-1})$ é o vetor de carga com

$$b_i = L(\varphi_i). \tag{2.48}$$

Exemplo 2.4.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = 100x_0(1 - x_0)x_1(1 - x_1),\ x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \tag{2.49}$$
$$u = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{2.50}$$

Na Figura 2.5 temos um esboço da aproximação de elementos finitos obtida em uma malha uniforme com 20×20 nodos. As isolinhas correspondem aos ponto tais que $u = 3 \times 10^{-1}, 2 \times 10^{-1}$, 10^{-1}, 5×10^{-2}.

Com o FEniCS, podemos computar a solução deste problema com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 20
Ny = 20
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary
```

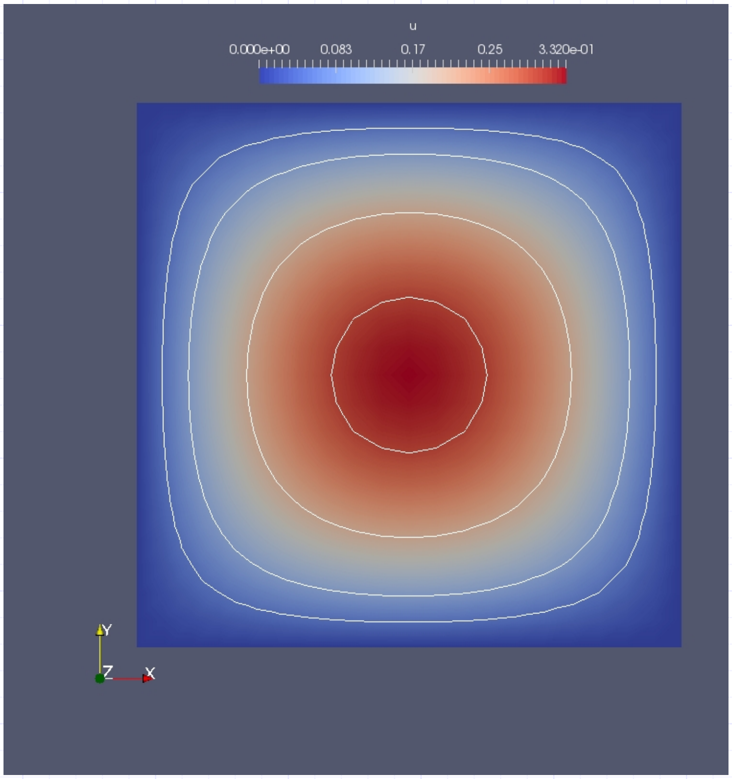

Figura 2.5: Esboço da solução de elementos finitos do problema discutido no Exemplo 2.4.1.

```
bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('100*x[0]*(1-x[0])*x[1]*(1-x[1])',degree=4)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
```

```
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# exportanto em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

2.4.3 Exercícios

Em revisão

E.2.4.1. Compute uma aproximação de elementos finitos para o seguinte problema

$$-\Delta u = 10,\ x \in (0,1)\times(0,1) \tag{2.51}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 1, \tag{2.52}$$

$$u(1,y) = 0,\ 0 \leq y < 1, \tag{2.53}$$

$$u(x,1) = 1,\ 0 \leq x \leq 1, \tag{2.54}$$

$$u(0,y) = 1,\ 0 < x \leq 1. \tag{2.55}$$

2.5 Fundamentos da análise de elementos finitos

Em revisão

2.5.1 Existência e unicidade

Em revisão

Teorema 2.5.1. (Matriz positiva definida) A matriz de rigidez é positiva definida.

Demonstração. A matriz de rigidez $A = [a(\varphi_j,\varphi_i)]_{ij=0}^{n_i-1}$ é obviamente simétrica. Além disso, para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, temos

$$\boldsymbol{\xi}^T A\boldsymbol{\xi} = \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j,\varphi_i)\xi_i \tag{2.56}$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx \, \xi_i \tag{2.57}$$

$$= \int_\Omega \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \cdot \nabla \left(\sum_{i=0}^{n_i-1} \xi_i \varphi_i \right) \, dx \tag{2.58}$$

$$= \left\| \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 . \tag{2.59}$$

Portanto, $\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} \geq 0$ e é nulo se, e somente se, $v = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j$ for constante. Como $v \in V_{h,0}$, temos que v constante implica $v \equiv 0$, mas então $\boldsymbol{\xi} = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} > 0$ para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. □

Teorema 2.5.2. (Existência e unicidade) O problema de elementos finitos (2.40) tem solução única.

Demonstração. O problema de elementos finitos (2.40) se resume a resolver o sistema linear $A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}$. Do Teorema 2.5.1, temos que A é uma matriz definida positiva e, portanto, invertível. Daí segue, imediatamente, que o problema (2.40) tem solução única. □

2.5.2 Estimativa *a priori* do erro

Em revisão

Teorema 2.5.3. (Ortogonalidade de Galerkin) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \ \forall v_h \in V_{h,0}, \tag{2.60}$$

onde u é a solução do problema fraco (2.35).

Demonstração. Segue, imediatamente, do fato de que $V_{h,0} \subset V_0$ e, portanto,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_{h,0}, \tag{2.61}$$

bem como

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_{h,0}. \tag{2.62}$$

□

Definição 2.5.1. (Norma da energia.) Definimos a norma da energia por

$$|||v||| := \left(\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v\,dx\right)^{1/2} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.63}$$

para todo $v \in V_0$.

Teorema 2.5.4. (Melhor aproximação.) A solução u_h do problema de elementos finitos satisfaz

$$|||u - u_h||| \leq |||u - v_h|||,\ \forall v_h \in V_{h,0}. \tag{2.64}$$

Demonstração. Observando que $u - u_h = u - v_h + v_h - u_h$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3), temos:

$$|||u - u_h|||^2 = \int_\Omega \nabla(u - u_h)\cdot\nabla(u - u_h)\,dx \tag{2.65}$$

$$= \int_\Omega \nabla(u - u_h)\cdot\nabla(u - v_h)\,dx + \int_\Omega \nabla(u - u_h)\cdot\nabla(v_h - u_h)\,dx \tag{2.66}$$

$$= \int_\Omega \nabla(u - u_h)\cdot\nabla(u - v_h)\,dx \tag{2.67}$$

$$= \|\nabla(u - u_h)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla(u - v_h)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.68}$$

$$= |||u - u_h|||^2|||u - v_h|||. \tag{2.69}$$

□

Teorema 2.5.5. (Estimativa *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$|||u - u_h|||^2 \leq C\sum_{K\in\mathcal{K}} h_K^2\|D^2u\|^2_{L^2(K)}. \tag{2.70}$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema da melhor aproximação (Teorema 2.5.4) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), pois

$$|||u - u_h|||^2 \leq |||u - \pi u|||^2 \tag{2.71}$$

$$= \|D(u - \pi u)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.72}$$

$$\leq C\sum_{K\in\mathcal{K}} h_K^2\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.73}$$

□

Para obtermos uma estimativa na norma $L^2(\Omega)$, podemos usar a desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.5.6. (Desigualdade de Poincaré.) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in V_0. \tag{2.74}$$

Demonstração. Se Ω tem contorno suficientemente suave, então existe ϕ tal que $-\Delta\phi = 1$ em Ω com $\sup_{x\in\Omega} |\nabla\phi| < C$. Com isso, temos

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v^2\,dx \tag{2.75}$$
$$= -\int_\Omega v^2\Delta\phi\,dx. \tag{2.76}$$

Agora, usando o Teorema de Green e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_{\partial\Omega} v^2 n\cdot\nabla\phi\,ds + \int_\Omega \nabla v^2\cdot\nabla\phi\,dx \tag{2.77}$$
$$= \int_\Omega 2v\nabla v\cdot\nabla\phi\,dx \tag{2.78}$$
$$\leq \sup_{x\in\Omega} |\nabla\phi|\|v\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.79}$$

□

Com a desigualdade de Poincaré e da estimativa *a priori* do erro (Teorema 2.5.5), temos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C|||u - u_h||| \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.80}$$

onde $h = \max_{K\in\mathcal{K}} h_K$. Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada.

Teorema 2.5.7. (Estimativa ótima *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.81}$$

Demonstração. Seja $e = u - u_h$ o erro e ϕ a solução do problema dual (ou problema adjunto)

$$-\Delta\phi = e, \ \forall x \in \Omega \tag{2.82}$$

$$\phi = 0, \ \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.83}$$

Então, usando a fórmula de Green, a ortogonalidade de Galerkin e, então, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\|e^2\|_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega e\Delta\phi\,dx && (2.84)\\
&= \int_\Omega \nabla e\cdot\nabla\phi\,dx - \int_{\partial\Omega} e\,n\cdot\nabla\phi\,ds && (2.85)\\
&= \int_\Omega \nabla e\cdot\nabla(\phi-\pi\phi)\,dx && (2.86)\\
&\leq \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\phi-\pi\phi)\|_{L^2(\Omega)}. && (2.87)
\end{aligned}$$

Da estimativa *a priori* (2.80) (que segue do Teorema 2.5.5) temos

$$\|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.88}$$

Agora, da regularidade elíptica $\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}$ [**?**] e da estimativa do erro de interpolação (Proposição 2.2.2), temos

$$\|\nabla(\phi-\pi\phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.89}$$

Então, temos

$$\|e\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}Ch\|e\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.90}$$

□

Exemplo 2.5.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= -2(x_0^2-x_0)-2(x_1^2-x_1),\ x\in\Omega := (0,1)\times(0,1), && (2.91)\\
u &= 0,\ x\in\partial\Omega. && (2.92)
\end{aligned}$$

A solução analítica deste problema é $u(x) = (x_0^2-x_0)(x_1^2-x_1)$. Aqui, obtemos aproximações por elementos finitos u_h usando uma malha triangular uniforme $n\times n$ nodos, i.e. $h = 1/n$. A Tabela 2.2 mostra os valores dos erros $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para diferentes valores de h.

Com o FEniCS, podemos computar a solução deste problema e o erro na norma L^2 com o seguinte código:

Tabela 2.2: Erros de aproximações por elementos finitos referente ao problema dado no Exemplo 2.5.1.

#nodos	h	$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$
10×10	1e−1	9.29e−4
20×20	5e−2	2.34e−4
100×100	1e−3	9.40e−6

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 100
Ny = 100
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('-2*(x[1]*x[1]-x[1])-2*(x[0]*x[0]-x[0])',degree=2)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
```

```
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# sol. analitica
ua = Expression('x[0]*(x[0]-1)*x[1]*(x[1]-1)',degree=4)

# erro norma L2
erro_L2 = errornorm(ua, u, 'L2')
print("||u-u_h||_L2 = %1.2E\n" % erro_L2)

# exportanto em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

2.5.3 Estimativa *a posteriori*

Em revisão

Para obtermos uma estimativa *a posteriori* vamos precisar da chamada desigualdade do traço.

Teorema 2.5.8. (Desigualdade do traço) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ convexa e suave. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que para qualquer $v \in V$ temos

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}. \tag{2.93}$$

Demonstração. Veja [?]. □

Teorema 2.5.9. (Estimativa *a posteriori*) A solução u_h do problema de elementos finitos (2.40) satisfaz

$$|||u - u_h|||^2 \leq C \sum_{K\in\mathcal{K}} \eta^2_K(u_h), \tag{2.94}$$

onde o elemento residual $\eta_K(u_h)$ é definido por

$$\eta_K(u_h) = h_K\|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2}h_K^{1/2}\|[n\cdot\nabla u_h]\|_{L^2(\partial K\setminus\partial\Omega)}. \tag{2.95}$$

Aqui, $[n\cdot\nabla u_h]|_K$ denota o salto na derivada normal de u_h nos lados interiores dos elementos de $\mathcal{K}$. Além disso, lembremos que $\Delta u_h = 0$.

Demonstração. Denotando $e := u - u_h$ o erro entre a solução do problema forte e a solução de elementos finitos, temos

$$\begin{align}
|||e|||^2 &= \|\nabla e\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.96}\\
&= \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla e \, dx \tag{2.97}\\
&= \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e) \, dx. \tag{2.98}
\end{align}$$

Nesta última equação, temos usado a ortogonalidade de Galerkin (Teorema 2.5.3). Daí, temos

$$\begin{align}
\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e)\, dx &= \sum_{K\in\mathcal{K}} \int_K \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e)\, dx \tag{2.99}\\
&= \sum_{K\in\mathcal{K}} -\int_K \Delta e (e - \pi e)\, dx \nonumber\\
&+ \int_{\partial K} n \cdot \nabla e (e - \pi e)\, ds, \tag{2.100}\\
&= \sum_{K\in\mathcal{K}} \int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e)\, dx \nonumber\\
&+ \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} n \cdot \nabla e (e - \pi e)\, ds, \tag{2.101}
\end{align}$$

uma vez que $-\Delta e|_K = f + \Delta u_h|_K$ e, ambos, e e πe se anulam em $\partial\Omega$.

Para computarmos o segundo termo do lado direito da ultima equação, observamos que o erro em lado E recebe contribuições dos dois elementos $K^\pm$ que compartilham E. Com isso, temos

$$\begin{align}
\int_{\partial K^+ \cap \partial K^-} n \cdot \nabla e (e - \pi e)\, ds = \int_E &(n^+ \cdot \nabla e^+ (e^+ - \pi e^+) \nonumber\\
&+ n^- \cdot \nabla e^- (e^- - \pi e^-))\, ds, \tag{2.102}
\end{align}$$

onde utilizamos a notação $v^\pm = v|_{K^\pm}$. Lembremos que o erro e é contínuo e, portanto, $(e^+ - \pi e^+)|_E = (e^- - \pi e^-)|_E$. Ainda, ∇u é contínuo, logo $(n^+ \cdot \nabla u^+ + n^- \cdot \nabla u^-)|_E = 0$. Entretanto, $\nabla u_h|_E$ não é geralmente contínuo, sendo apenas constante por partes. Assim sendo e denotando o salto $[n \cdot \nabla u_h] := (n^+ \cdot \nabla u_h^+ + n^- \cdot \nabla u_h^-)$, temos

$$\int_E (n^+ \cdot \nabla e^+ (e - \pi e) + n^- \cdot \nabla e^- (e - \pi e))\, ds$$

$$= -\int_E [n\cdot\nabla u_h](e-\pi e)\,ds. \tag{2.103}$$

Com isso, temos

$$\sum_{K\in\mathcal{K}}\int_{\partial K\setminus\partial\Omega} n\cdot\nabla e(e-\pi e)\,ds = -\sum_{E\in\mathcal{E}_I}\int_E [n\cdot\nabla u_h](e-\pi e)\,ds, \tag{2.104}$$

onde $\mathcal{E}_I$ é o conjunto dos lados interiores na triangularização $\mathcal{K}$. Logo, retornando a (2.101), obtemos

$$\begin{aligned}|||e|||^2 = &\sum_{K\in\mathcal{K}}\int_K (f+\nabla u_h)(e-\pi e)\,dx\\ &-\frac{1}{2}\int_{\partial K\setminus\partial\omega}[n\cdot\nabla u_h](e-\pi e)\,ds.\end{aligned} \tag{2.105}$$

Nos resta, agora, estimarmos estes dois termos do lado direito.

A estimativa do primeiro, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da estimativa padrão do erro de interpolação, i.e.

$$\int_K (f+\Delta u_h)(e-\pi e)\,dx \leq \|f+\delta u_h\|_{L^2(\Omega)}\|e-\pi e\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.106}$$

$$\leq \|f+\Delta u_h\|_{L^2(\Omega)} C h_K \|De\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.107}$$

Para estimarmos as contribuições dos lados, usamos a desigualdade do Traço [?]

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left(h_K^{-1}\|v\|^2_{L^2(K)} + h_K\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.108}$$

Com esta, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão do erro de interpolação, temos

$$\int_{\partial K\setminus\partial\Omega}[n\cdot\nabla u_h](e-\pi e)\,ds \leq \|[n\cdot\nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)}\|e-\pi e\|_{L^2(\partial K)} \tag{2.109}$$

$$\leq \|[n\cdot\nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} C\left(h_K^{-1}\|e-\pi e\|^2_{L^2(K)}\right.$$

$$\left.+h_K\|D(e-\pi e)\|^2_{L^2(K)}\right)^{1/2} \tag{2.110}$$

$$\leq \|[n\cdot\nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} C h_K^{1/2}\|De\|_{L^2(K)}. \tag{2.111}$$

Daí, a estimativa segue das (2.107) e (2.111). □

Bibliografia

[1] Brenner, S.C.; Scott, L.R.. The mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 2008.

[2] Evans, L.C.. Partial Differential Equations. 2. ed., AMS, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3

[3] Langtangen, H.P.; Logg, A.. Solving PDEs in Python. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-52461-0

[4] Larson, M.G.; Bengson, F.. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013.

[5] Tveito, A.; Winther, R.. Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach. Springer, 1998. ISBN 978-0-387-22773-3. https://doi-org.ez45.periodicos.capes.gov.br/10.1007/b98967.