

# Algoritmos e Programação I

Pedro H A Konzen

18 de julho de 2023

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Estas notas de aula fazem uma introdução a algoritmos e programação de computadores. Como ferramenta computacional de apoio, a linguagem computacional [Python](#) é utilizada.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

# Conteúdo

<b>Capa</b>	<b>i</b>
<b>Licença</b>	<b>ii</b>
<b>Prefácio</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Linguagem de Programação</b>	<b>3</b>
2.1 Computador . . . . .	3
2.1.1 Linguagem de programação . . . . .	6
2.1.2 Instalação e execução . . . . .	8
2.1.3 Exercícios . . . . .	10
2.2 Algoritmos e Programação . . . . .	11
2.2.1 Fluxograma . . . . .	12
2.2.2 Exercícios . . . . .	16
2.3 Dados . . . . .	18
2.3.1 Identificadores . . . . .	19
2.3.2 Alocação de dados . . . . .	21
2.3.3 Exercícios . . . . .	23
2.4 Dados Numéricos e Operações . . . . .	24
2.4.1 Números Inteiros . . . . .	27
2.4.2 Números Decimais . . . . .	28
2.4.3 Números Complexos . . . . .	30
2.4.4 Exercícios . . . . .	31

2.5	Dados Booleanos	33
2.5.1	Operadores de Comparação	34
2.5.2	Operadores Lógicos	36
2.5.3	Exercícios	39
2.6	Sequência de Caracteres	40
2.6.1	Formatação de <i>strings</i>	43
2.6.2	Operações com <i>strings</i>	43
2.6.3	Entrada de dados	44
2.6.4	Exercícios	45
2.7	Coleção de Dados	46
2.7.1	Conjuntos: <code>set</code>	46
2.7.2	<i>N</i> -uplas: <code>tuple</code>	50
2.7.3	Listas: <code>list</code>	52
2.7.4	Dicionários: <code>dict</code>	55
2.7.5	Exercícios	57
<b>3</b>	<b>Programação Estruturada</b>	<b>60</b>
3.1	Estruturas de um Programa	61
3.1.1	Sequência	61
3.1.2	Ramificação	63
3.1.3	Repetição	64
3.1.4	Exercícios	67
3.2	Instruções de Ramificação	68
3.2.1	Instrução <code>if</code>	69
3.2.2	Instrução <code>if-else</code>	70
3.2.3	Instrução <code>if-elif</code>	72
3.2.4	Instrução <code>if-elif-else</code>	74
3.2.5	Múltiplos Casos	76
3.2.6	Exercícios	77
3.3	Instruções de Repetição	79
3.3.1	Instrução <code>while</code>	80
3.3.2	Instrução <code>for</code>	82
3.3.3	Exercícios	84
<b>4</b>	<b>Funções</b>	<b>88</b>
4.1	Funções Predefinidas e Módulos	88
4.1.1	Funções Predefinidas	88
4.1.2	Módulos	91

<i>CONTEÚDO</i>	vi
4.1.3 Exercícios . . . . .	93
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Vamos começar executando nossas primeiras **linhas de código** na linguagem de programação **Python**. Em um **terminal Python** digitamos

```
1 >>> print('Olá, mundo!')
```

Observamos que `>>>` é o símbolo do **prompt de entrada** e digitamos nossa **instrução** logo após ele. Para executarmos a instrução digitada, teclamos `<ENTER>`. Uma vez executada, o terminal apresentará as seguintes informações

```
1 >>> print('Olá, mundo!')
2 Olá, mundo!
3 >>>
```

Pronto! O fato do símbolo de **prompt de entrada** ter aparecido novamente, indica que a instrução foi completamente executada e o terminal está pronto para executar uma nova instrução.

A **linha de comando** executada acima pede ao computador para imprimir no **prompt de saída** a frase `Olá, mundo!`. O **método** `print` contém instruções para imprimir **objetos** em um dispositivo de saída, no caso, imprime a frase na tela do computador.

Bem! Talvez imprimir no **prompt de saída** uma frase que digitamos no **prompt de entrada** possa parecer um pouco redundante no momento. Vamos

considerar um outro exemplo, vamos computar a soma dos números ímpares entre 0 e 100. Podemos fazer isso como segue

```
1 >>> sum([i for i in range(100) if i%2 != 0])
2 2500
```

Oh! No momento, não se preocupe se não tenha entendido a linha de comando de entrada, ao longo dessas notas de aula isso vai ficando natural. A linha de comando de entrada usa o método `sum` para computar a soma dos elementos da **lista** de números ímpares desejada. A lista é construída de forma **iterada** e **indexada** pela **variável** `i`, para `i` no intervalo/faixa de 0 a 99, se o resto da divisão de `i` por 2 não for igual a 0. Ok! O resultado computado for de 2500.

De fato, a soma dos números ímpares de 0 a 100

$$(1, 3, 5, \dots, 99) \quad (1.1)$$

é a soma dos 50 primeiros elementos da progressão aritmética  $a_i = 1 + 2i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , i.e.

$$\sum_{i=0}^{49} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_{49} \quad (1.2)$$

$$= 1 + 3 + \dots + 99 \quad (1.3)$$

$$= \frac{50(1 + 99)}{2} \quad (1.4)$$

$$= 2500 \quad (1.5)$$

como já esperado! Em [Python](#), esta última conta pode ser computada como segue

```
1 >>> 50*(1+99)/2
2 2500.0
```



## Capítulo 2

# Linguagem de Programação

### 2.1 Computador

[YouTube] | [Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Um computador<sup>1</sup> é um **sistema computacional** de elementos físicos (**hardware**) e elementos lógicos (**software**).

O **hardware** são suas partes mecânicas, elétricas e eletrônicas como: fonte de energia, teclado, mouse/painel tátil, monitor/tela, dispositivos de armazenagem de dados (HDD, *hard disk drive*; SSD, *solid-state drive*; RAM, *random-access memory*; etc.), dispositivos de processamento (CPU, *central processing unit*, GPU, *graphics processing unit*), conectores de dispositivos externos (microfone, caixa de som, fone de ouvido, USB, etc.), placa mãe, etc..

O **software** é toda a informação processada pelo computador, qualquer código executado e qualquer dado usado nas computações.

<sup>1</sup>Consulte [Wikipédia: Computador](#) para uma introdução sobre a história e outras questões sobre computadores.

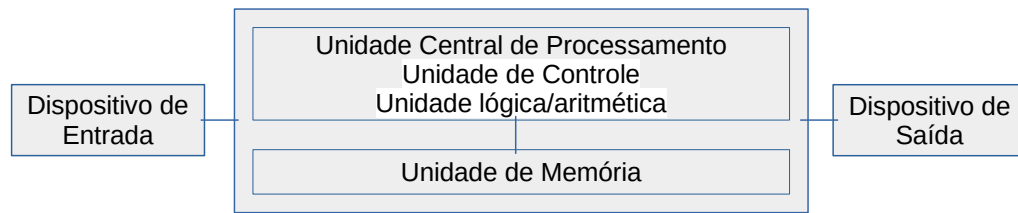


Figura 2.1: Arquitetura de computador de von Neumann.

Os computadores que comumente utilizamos seguem a arquitetura de John von Neumann<sup>2</sup>, que consiste em dispositivo(s) de entrada de dados, unidade(s) de processamento, unidade(s) de memória e dispositivo(s) de saída de dados (Figura 2.1).

- **Dispositivos de entrada e saída**

São elementos do computador que permitem a comunicação humana (usuária(o)) com a máquina.

- **Dispositivos de entrada**

São elementos que permitem o fluxo de informação da(o) usuária(o) para a máquina. Exemplos são: teclado, mouse/painel tátil, microfone, etc.

- **Dispositivos de saída**

São elementos que permitem o fluxo de informação da máquina para a(o) usuária(o). Exemplos são: monitor/tela, alto-falantes, luzes espia, etc.

- **Unidade central de processamento**

A CPU (do inglês, *Central Processing Unit*) é o elemento de processa as informações e é composta de **unidade de controle**, **unidade lógica e aritmética** e de **memória cache**.

- **Unidade de controle**

<sup>2</sup>John von Neumann, 1903 - 1957, matemático húngaro, naturalizado estadunidense. Fonte: [Wikipédia](#).

Coordena as execuções do processador: busca e decodifica instruções, lê e escreve no *cache* e controla o fluxo de dados.

- **Unidade lógica/aritmética**

Executa as instruções operações lógicas e aritméticas, por exemplo: executar a adição, multiplicação, testar se dois objetos são iguais, etc.

- **Memória cache**

Memória interna da CPU muito mais rápida que as memórias RAM e dispositivos e armazenamento HDD/SSD. É um dispositivo de memória de pequena capacidade e é utilizada como memória de curto prazo e diretamente acessada.

- **Unidades de memória**

As unidades de memória são elementos que permitem o armazenamento de dados/objetos. Como memória principal tem-se a **ROM** (do inglês, *Read Only Memory*) e a **RAM** (do inglês, *Random Access Memory*) e como memória de massa/secundária tem-se HDD, SSD, entre outras.

- **Memória ROM**

A memória ROM é utilizada para armazenamento de dados/objetos necessários para dar início ao funcionamento do computador. Por exemplo, é onde a BIOS (dos inglês, *Basic Input/Output System*, Sistema Básico de Entrada e Saída) é armazenada. Ao ligarmos o computador este programa é iniciado e é responsável por fazer o gerenciamento inicial dos diversos dispositivos do computador e carregar o **sistema operacional** (conjunto de programas cuja função é de gerenciar os recursos do computador e controlar a execução de programas).

- **Memória RAM**

Memória de acesso rápido utilizada para dados/objetos de uso frequente durante a execução de programas. É uma memória volátil, i.e. toda a informação guardada nela é perdida quando o computador é desligado.

- **Memória de massa/secundária**

Memória de massa ou secundária são usadas para armazenar dados/objetos por período longo. Normalmente, são dispositivos HDD ou SSD,

os dados/objetos são guardados mesmo que o computador seja desligado e contém grande capacidade de armazenagem.

Os **software** são os elementos lógicos de um sistema computacional, são programas de computadores que contém as instruções que gerenciam o **hardware** para a execução de tarefas específicas, por exemplo, imprimir um texto, gravar áudio/vídeo, resolver um problema matemático, etc. Programar é o ato de criar programas de computadores.

### 2.1.1 Linguagem de programação

As informações fluem no computador codificadas como registros de *bits*<sup>3</sup> (sequência de zeros ou uns). Há registros de instrução e de dados. Programar diretamente por registros é uma tarefa muito difícil, o que levou ao surgimento de linguagens de programação. Uma **linguagem de programação**<sup>4</sup> é um método padronizado para escrever instruções para execução de tarefas no computador. As instruções escritas em uma linguagem são interpretadas e/ou compiladas por um software (interpretador ou compilador) da linguagem que decodifica as instruções em registros de instruções e dados, os quais são efetivamente executados na máquina.

Existem várias linguagens de programação disponíveis e elas são classificadas por diferentes características. Uma **linguagem de baixo nível** (por exemplo, *Assembly*) é aquela que se restringe às instruções executadas diretamente pelo processador, enquanto que uma **linguagem de alto nível** contém instruções mais complexas e abstratas. Estas contém sintaxe mais próxima da linguagem humana natural e permitem a manipulação de objetos mais abstratos. Exemplos de linguagens de alto nível são: *Basic*, *Java*, *Javascript*, *MATLAB*, *PHP*, *R*, *C/C++*, *Python*, etc.

Em geral, não existe uma melhor linguagem, cada uma tem suas características que podem ser mais ou menos adequadas conforme o programa que se deseja desenvolver. Por exemplo, para um site de internet, linguagens como *Javascript* e *PHP* são bastante úteis, mas não no desenvolvimento de modelagem matemática e computacional. Nestes casos, *C/C++* é uma linguagem mais apropriada por conter várias estruturas de programação que facilitam a modelagem computacional de problemas científicos. Agora, *R*

<sup>3</sup>Usualmente de tamanho 64-*bits*.

<sup>4</sup>Código de programação, código de máquina ou linguagem de máquina.

é uma linguagem de alto nível com diversos recursos dedicados às áreas de ciências de dados e estatística. Usualmente, utiliza-se mais de uma linguagem no desenvolvimento de programas mais avançados. A ideia é de explorar o melhor de cada linguagem na criação de programas eficientes na resolução dos problemas de interesse.

Nestas notas de aula, **Python** é a linguagem escolhida para estudarmos algoritmos e programação. Trata-se de uma **linguagem de alto nível, interpretada, dinâmica e mutiparadigma**. Foi lançada por Guido van Rossum<sup>5</sup> em 1991 e, atualmente, é desenvolvida de forma comunitária, aberta e gerenciada pela ONG **Python Software Foundation**. A linguagem foi projetada para priorizar a legibilidade do código. Parte da filosofia da linguagem é descrita pelo poema **The Zen of Python**. Pode-se lê-lo pelo *easter egg* **Python**:

```
1 >>> import this
```

- **Linguagem interpretada**

**Python** é uma linguagem interpretada. Isso significa que o **código-fonte** escrito em linguagem **Python** é interpretado por um programa (interpretador **Python**). Ao executar-se um código, o interpretador lê uma linha do código, decodifica-a como registros para o processador que os executa. Executada uma linha, o interpretador segue para a próxima até o código ter sido completamente executado.

- **Linguagem compilada**

Em uma linguagem compilada, como **C/C++**, há um programa chamado de **compilador** (em inglês, *compiler*) e outro de **ligador** (em inglês, *linker*). O primeiro, cria um programa-objeto a partir do código e o segundo gerencia sua ligação com eventuais bibliotecas computacionais que ele possa depender. O programa-objeto (também chamado de executável) pode então ser executado pela máquina.

Em geral, a execução de um programa compilado é mais rápida que a de um código interpretado. De forma simples, isso se deve ao fato de que nessa interpretação é feita toda de uma vez e não precisa ser refeita na execução de cada linha de código, como no segundo caso. Por outro lado, a compilação de códigos-fonte grandes pode ser bastante demorada fazendo mais sentido

---

<sup>5</sup>Guido van Rossum, 1956-, matemático e programador de computadores holandês. Fonte: [Wikipédia](#).

quando ele é compilado uma vez e o programa-objeto executado várias vezes. Além disso, linguagens interpretadas podem usar bibliotecas de programas pré-compiladas. Com isso, pode-se alcançar um bom balanceamento entre tempo de desenvolvimento e de execução do código.

O interpretador **Python** também pode ser usado para compilar o código para um arquivo **bytecode**, este é executado muito mais rápido do que o código-fonte em si, pois as interpretações necessárias já foram feitas. Mais adiante, vamos estudar isso de forma mais detalhada.

- **Linguagem de tipagem dinâmica**

**Python** é uma linguagem de tipagem dinâmica. Nela, os dados não precisam ser explicitamente tipificados no código-fonte e o interpretador os tipifica com base em regras da própria linguagem. Ao executar operações com os dados, o interpretador pode alterar seus tipos de forma dinâmica.

- **Linguagem de tipagem estática**

**C/C++** é um exemplo de uma linguagem de tipagem estática. Em tais linguagens, os dados devem ser explicitamente tipificados no código-fonte com base nos tipos disponíveis. A retipificação pode ocorrer, mas precisa estar explicitamente definida no código.

Existem vários **paradigmas de programação** e a **linguagem Python é multiparadigma**, i.e. permite a utilização de mais de um no código-fonte. Exemplos de paradigmas de programação são: **estruturada**, **orientada a objetos**, **orientada a eventos**, etc.. Na maior parte destas notas de aulas, vamos estudar algoritmos para linguagens de programação estruturada. Mais ao final, vamos introduzir aspectos de linguagens orientada a objetos. Estes são paradigmas de programação fundamentais e suas estruturas são importantes na programação com demais paradigmas disponíveis em programação de computadores.

## 2.1.2 Instalação e execução

**Python é um software aberto**<sup>6</sup> e está disponível para vários sistemas operacionais (**Linux**, macOS, Windows, etc.) no seu site oficial

<sup>6</sup>Consulte a licença de uso em <https://docs.python.org/3/license.html>.

<https://www.python.org/>

Também, está disponível (gratuitamente) na loja de aplicativos dos sistemas operacionais mais usados. Esta costuma ser a forma mais fácil de instalá-lo na sua máquina, consulte a loja de seu sistema operacional. Ainda, há plataformas e IDEs<sup>7</sup> **Python** disponíveis, consulte, como por exemplo, **Anaconda**.

A execução de um código **Python** pode ser feita de várias formas.

- **Execução iterativa via terminal**

Em terminal **Python** pode-se executar instruções/comandos de forma iterativa. Por exemplo:

```
1 >>> print('Olá, mundo!')
2 Olá, mundo!
3 >>>
```

O símbolo `>>>` denota o **prompt de entrada**, onde uma instrução **Python** pode ser digitada. Após digitar, o comando é executado teclando `<ENTER>`. Caso o comando tenha alguma **saída de dados**, como no caso acima, esta aparecerá, por padrão, **no prompt de saída**, logo abaixo a linha de comando executada. Um novo símbolo de **prompt de entrada** aparece ao término da execução anterior.

- **Execução de um *script***

Para códigos com várias linhas de instruções é mais adequado utilizar um arquivo de *script* **Python**. Usando-se um editor de texto ou um IDE ditam-se as linhas de comando em um arquivo `.py`. Então, *script* pode ser executado em um terminal de seu sistema operacional utilizando-se o interpretador **Python**. Por exemplo, assumindo que o código for salvo do arquivo `path_to_arq/arq.py`, pode-se executá-lo em um terminal do sistema com

```
1 $ python3 path_to_arq/arq.py
```

IDEs para **Python** fornecem uma ambiente integrado, contendo um campo para escrita do código e terminal **Python** integrado. Consulte, por exemplo, o IDE **Spyder**:

---

<sup>7</sup>IDE, do inglês, *Integrated Development enviroment*, ambiente de desenvolvimento integrado



<https://www.spyder-ide.org/>

- **Execução em um *notebook***

*Notebooks* Python são uma boa alternativa para a execução de códigos em um ambiente colaborativo/educativo. Por exemplo, *Jupyter* é um *notebook* que roda em navegadores de internet. Sua estrutura e soluções também são encontradas em *notebooks* online (de uso gratuito limitado) como *Google Colab* e *Kaggle*.

### 2.1.3 Exercícios

**Exercício 2.1.1.** Verifique qual a versão do sistema operacional que está utilizado em seu computador.

**Exercício 2.1.2.** Verifique os seguintes elementos de seu computador:

- a) CPUs
- b) Placa(s) gráfica(s)
- c) Memória RAM
- d) Armazenamento HDD/SSD.

**Exercício 2.1.3.** Verifique como entrar na BIOS de seu computador. Atenção! Não faça e salve nenhuma alteração, caso não saiba o que está fazendo. Modificações na BIOS podem impedir que seu computador funcione normalmente, inclusive, impedir que você inicialize seu sistema operacional.

**Exercício 2.1.4.** Instale Python no seu computador (caso ainda não tenha feito) e abra um terminal Python. Nele, escreva uma linha de comando que imprima no prompt de saída a frase “Olá, meu Python!”.

**Exercício 2.1.5.** Instale o Spyder no seu computador (caso ainda não tenha feito) e use-o para escrever o seguinte *script*

```
1 import math as m
2 print(f'Número pi = {m.pi}')
3 print(f'Número de Euler e = {m.e}')
```

Notas de Aula - Pedro Konzen \*/\* Licença CC-BY-SA 4.0



Também, execute o *script* diretamente em um terminal de seu sistema operacional.

**Exercício 2.1.6.** Use um *notebook* [Python](#) para escrever e executar o código do exercício anterior.

## 2.2 Algoritmos e Programação

**Programar** é criar um programa (um *software*) para ser executado em computador. Para isso, escreve-se um código em uma linguagem computacional (por exemplo, em [Python](#)), o qual é interpretado/compilado para gerar o programa final. Linguagens computacionais são técnicas, utilizam uma sintaxe simples, precisa e sem ambiguidades. Ou seja, para criarmos um programa com um determinado objetivo, precisamos escrever um código computacional técnico, que siga a sintaxe da linguagem escolhida e sem ambiguidades.

Um **algoritmo** pode ser definido uma sequência ordenada e sem ambiguidade de passos para a resolução de um problema.

**Exemplo 2.2.1.** O cálculo da área de um triângulo de base e altura dadas por ser feito com o seguinte algoritmo:

1. Informe o valor da base  $b$ .
2. Informe o valor da altura  $h$ .
3.  $a \leftarrow \frac{b \cdot h}{2}$ .
4. Imprima o valor de  $a$ .

Algoritmos para a programação são pensados para serem facilmente transformados em códigos computacionais. Por exemplo, o algoritmo acima pode ser escrito em [Python](#) como segue:

```
1 b = float(input('Informe o valor da base.\n'))
2 h = float(input('Informe o valor da altura.\n'))
3 # cálculo da área
4 a = b*h/2
5 print(f'Área = {a}')
```

Para criar um programa para resolver um dado problema, começamos desenvolvendo um algoritmo para resolvê-lo, este algoritmo é implementado na linguagem computacional escolhida, a qual gera o programa final. Aqui, o passo mais difícil costuma ser o desenvolvimento do algoritmo. Precisamos pensar em como podemos resolver o problema de interesse em uma sequência de passos ordenada e sem ambiguidades para que possamos implementá-los em computador.

Um algoritmo deve ter as seguintes propriedades:

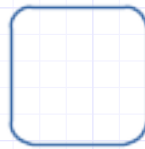
- Cada passo deve estar bem definido, i.e. não pode conter ambiguidades.
- Cada passo deve contribuir de forma efetiva na solução do problema.
- Deve ter número finito de passos que podem ser computados em um tempo finito.

**Observação 2.2.1.** A primeira pessoa a publicar um algoritmo para programação foi Augusta Ada King<sup>8</sup>. O algoritmo foi criado para computar os números de Bernoulli<sup>9</sup>.

### 2.2.1 Fluxograma

Fluxograma é uma representação gráfica de um algoritmo. Entre outras, usam-se as seguintes formas para representar tipos de ações a serem executadas:

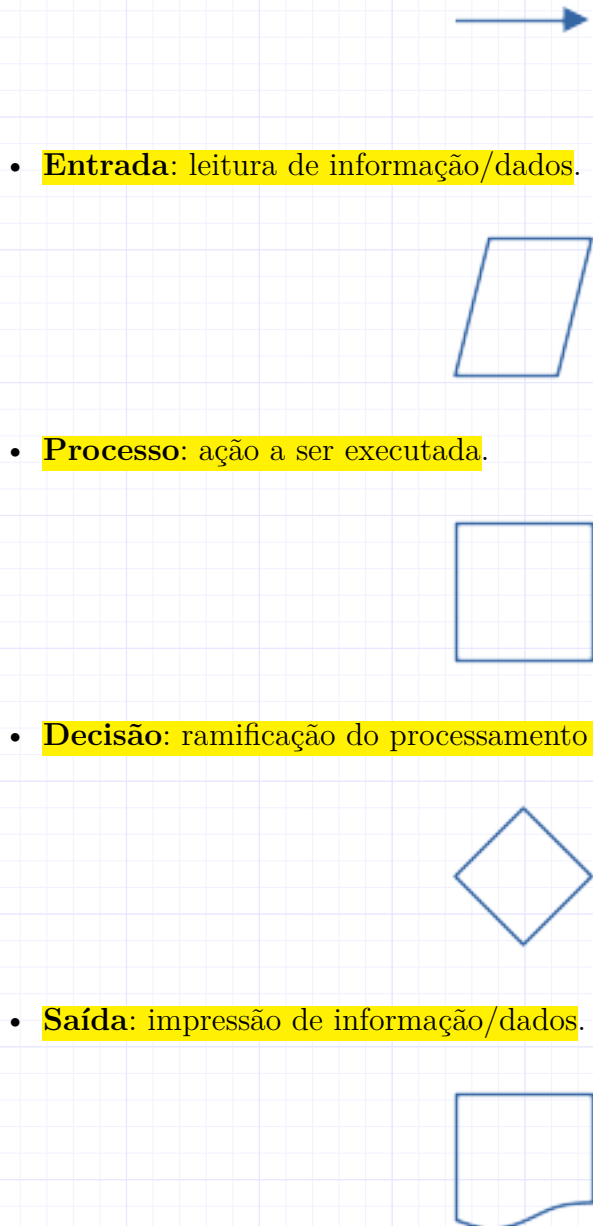
- **Terminal:** início ou final do algoritmo.



- **Linha de fluxo:** direciona para a próxima execução.

<sup>8</sup>Augusta Ada King, 1815 - 1852, matemática e escritora inglesa. Fonte: [Wikipédia](#).

<sup>9</sup>Jacob Bernoulli, 1655-1705, matemático suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

- 
- **Entrada:** leitura de informação/dados.

- **Processo:** ação a ser executada.

- **Decisão:** ramificação do processamento baseada em uma condição.

- **Saída:** impressão de informação/dados.

**Exemplo 2.2.2.** O **método de Heron**<sup>10</sup> é um algoritmo para o cálculo aproxi-

<sup>10</sup>Heron de Alexandria, 10 - 80, matemático e inventor grego. Fonte: [Wikipédia](#).

mado da raiz quadrada de um dado número  $x$ , i.e.  $\sqrt{x}$ . Consiste na iteração

$$s^{(0)} = \text{approx. inicial}, \quad (2.1)$$

$$s^{(i+1)} = \frac{1}{2} \left( s^{(i)} + \frac{x}{s^{(i)}} \right), \quad (2.2)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de iterações calculadas.

Na sequência, temos um algoritmo e seus fluxograma e código [Python](#) para computar a quarta aproximação de  $\sqrt{x}$ , assumindo  $s^{(0)} = x/2$  como aproximação inicial.

- **Algoritmo**

1. Entre o valor de  $x$ .

2. Se  $x \geq 0$ , faça:

- (a)  $s \leftarrow x/2$

- (b) Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , faça:

- i.  $s \leftarrow (s + x/s)/2$ .

- (c) Imprime o valor de  $s$ .

3. Senão, faça:

- (a) Imprime mensagem “Não existe!”.

- **Fluxograma**



- Código Python

Código 2.1: metHeron.py

```
1 x = float(input('Entre com o valor de x: '))
2 if (x >= 0.):
3     s = x/2
4     for i in range(4):
5         s = (s + x/s)/2
6     print(f'Raiz aprox. de x = {s}')
7 else:
8     print(f'Não existe!')
```

O algoritmo apresentado acima tem um *bug* (um erro)! Consulte o Exercício 2.2.9.

Algoritmos escritos em uma forma próxima de uma linguagem computacional são, também, chamados de **pseudocódigos**. Na prática, pseudocódigos e fluxogramas são usados para apresentar uma forma mais geral e menos detalhada de um algoritmo. Usualmente, sua forma detalhada é escrita diretamente em uma linguagem computacional escolhida.

## 2.2.2 Exercícios

**Exercício 2.2.1.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular a média aritmética entre dois números  $x$  e  $y$  dados. Como desafio, tente escrever um código Python baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.2.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular a área de um quadrado de lado  $l$  dado. Como desafio, tente escrever um código Python baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.3.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular a área de um retângulo de lados  $a, b$  dados. Como desafio, tente escrever um código Python baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.4.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular triângulo retângulo de hipotenusa  $h$  e um dos

dados  $l$  dados. Como desafio, tente escrever um código [Python](#) baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.5.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular o zero de uma função afim

$$f(x) = ax + b \quad (2.3)$$

dados, os coeficientes  $a$  e  $b$ . Como desafio, tente escrever um código [Python](#) baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.6.** Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para o calcular as raízes reais de um polinômio quadráticos

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.4)$$

dados, os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Como desafio, tente escrever um código [Python](#) baseado em seu algoritmo.

**Exercício 2.2.7.** A [Série Harmônica](#) é definida por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad (2.5)$$

Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma correspondente para calcular o valor da série harmônica truncada em  $k = n$ , com  $n$  dado. Ou seja, dado  $n$ , o objetivo é calcular

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (2.6)$$

**Exercício 2.2.8.** O [número de Euler](#)<sup>11</sup> pode ser definido pela série

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad (2.8)$$

<sup>11</sup>Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

Escreva um algoritmo/pseudocódigo e um fluxograma corresponde para calcular o valor aproximado de  $e$  dado pelo truncamento da série em  $k = 4$ , i.e. o objetivo é de calcular

$$e \approx \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}. \quad (2.11)$$

**Exercício 2.2.9.** O algoritmo construído no Exemplo 2.2.2 tem um *bug* (um erro). Identifique o *bug* e proponha uma nova versão para corrigir o problema. Então, apresente o fluxograma da nova versão do algoritmos. Como desafio, busque implementá-lo em [Python](#).

## 2.3 Dados

Informação é resultante do processamento, manipulação e organização de **dados** (altura, quantidade, volume, intensidade, densidade, etc.). **Programas de computadores processam, manipulam e organizam dados computacionais**. Os dados computacionais são representações em máquina de dados “reais”. De certa forma, todo dado é uma abstração e, para ser utilizado em um programa de computador, precisa ser representado em máquina.

**Cada dado manipulado em um programa é identificado por um nome**, chamado de **identificador**. Podem ser variáveis, constantes, funções/métodos, entre outros.

- **Variável**

Objetos de um programa que armazenam dados que podem mudar de valor durante a sua execução.

- **Constantes**

Objetos de um programa que não mudam de valor durante a sua execução.



- **Funções e métodos**

Subprogramas definidos e executados em um programa.

### 2.3.1 Identificadores

Um identificador é um nome atribuído para a identificação inequívoca de dados que são manipulados em um programa.

**Exemplo 2.3.1.** Vamos desenvolver um programa que computa o ponto de interseção da reta de equação

$$y = ax + b \quad (2.12)$$

com o eixo  $x$  (consulte a Figura 2.2).

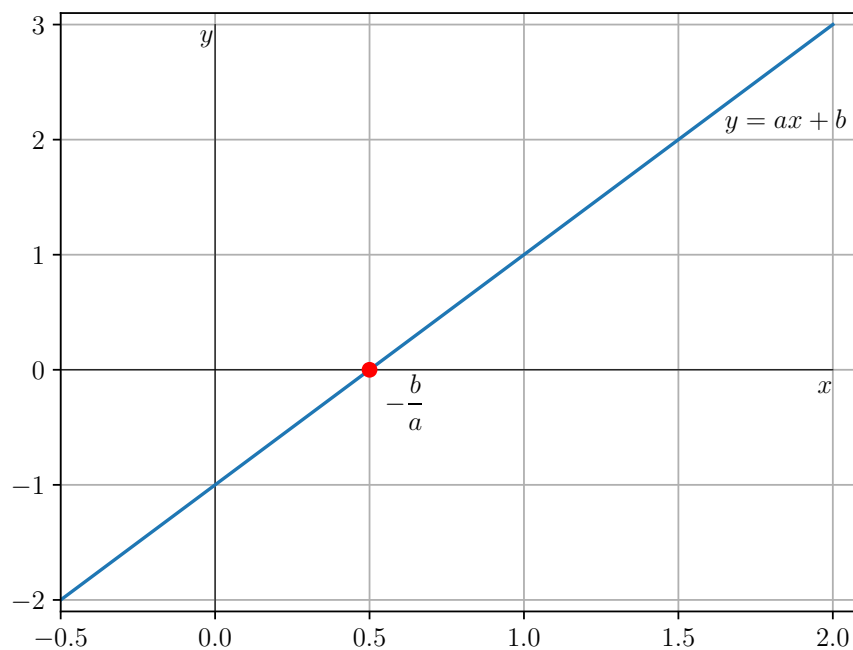


Figura 2.2: Esboço da reta de equação  $y = ax + b$ , com  $a = 2$  e  $b = -1$ .

O ponto  $x$  em que a reta intercepta o eixo das abscissas é

$$x = -\frac{b}{a} \quad (2.13)$$

Assumindo que  $a = 2$  e  $b = -1$ , segue um algoritmo para a computação.

1. Atribui o valor do **coeficiente angular**:

$$a \leftarrow 2. \quad (2.14)$$

2. Atribui o valor do **coeficiente linear**:

$$b \leftarrow -1. \quad (2.15)$$

3. Computa e armazena o valor do **ponto de interseção com o eixo  $x$** :

$$x \leftarrow -\frac{b}{a}. \quad (2.16)$$

4. Imprime o valor de  $x$ .

No algoritmo acima, os identificadores utilizados foram:  $a$  para o **coeficiente angular**,  $b$  para o **coeficiente linear** e  $x$  para o **ponto de interseção com o eixo  $x$** .

Em Python, os identificadores são sensíveis a letras maiúsculas e minúsculas (em inglês, *case sensitive*), i.e. o identificador nome é diferente dos Nome, NoMe e NOME. Por exemplo:

```
1 >>> a = 7
2 >>> print(A)
3 Traceback (most recent call last):
4   File "<stdin>", line 1, in <module>
5 NameError: name 'A' is not defined. Did you mean: 'a'?
```

Para melhorar a legibilidade de seus códigos, recomenda-se utilizar identificadores com nomes compostos que ajudem a lembrar o significado do dado a que se referem. No exemplo acima (Exemplo 2.3.1),  $a$  representa o **coeficiente angular** da reta e um identificar apropriado seria `coefAngular` ou `coef_angular`.

Identificadores não podem conter caracteres especiais (\*, &, %, ç, acentuações, etc.), espaços em branco e começar com número. As seguintes convenções para identificadores com nomes compostos são recomendadas:

- **lowerCamelCase:** nomeComposto
- **UpperCamelCase:** NomeComposto
- **snake:** nome\_composto

Alguns identificadores são palavras reservadas pela linguagem, pois representam dados pré-definidos nela. Veja a lista de identificadores reservados em [Python Docs: Lexical Analysis: Keywords](#).

**Exemplo 2.3.2.** O algoritmo construído no Exemplo 2.3.1 pode ser implementado como segue:

```
1 coefAngular = 2
2 coefLinear = -1
3 intercepEixoX = -coefLinear/coefAngular
4 print(intercepEixoX)
```

### 2.3.2 Alocação de dados

Como estudamos acima, alocamos e referenciamos dados na memória do computador usando identificadores. Em [Python](#), ao executarmos a instrução

```
1 >>> x = 1
```

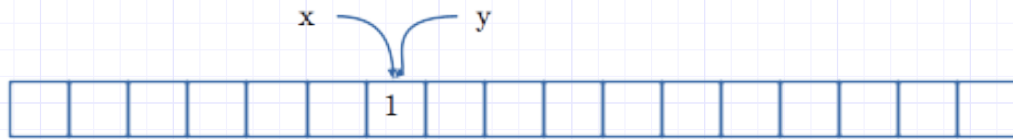
estamos criando um **objeto** na memória com valor 1 e **x** é uma referência para este dado alocado na memória. Pode-se imaginar a memória computacional como um sequência de caixinhas, de forma que **x** será a identificação da caixinha onde o valor 1 foi alocado.



Agora, quando executamos a instrução

```
1 >>> y = x
```

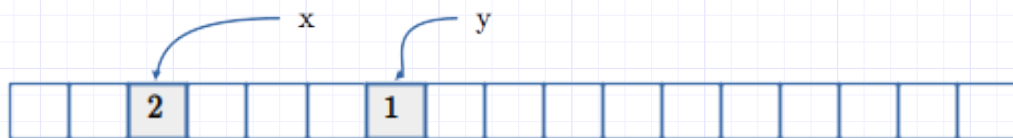
o identificador `y` passa a referenciar o mesmo local de memória de `x`.



Na sequência, se atribuirmos um novo valor para `x`

```
1 >>> x = 2
```

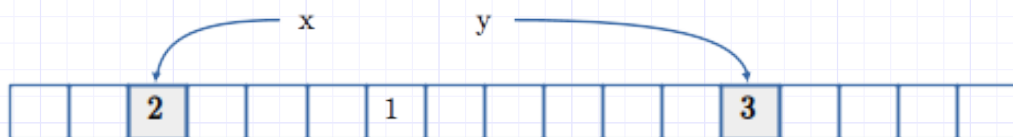
este será alocado em um novo local na memória e `x` passa a referenciar este novo local.



Ainda, se atribuirmos um novo valor para `y`

```
1 >>> y = 3
```

este será alocado em um novo local na memória e `y` passa a referenciar este novo local. O local de memória antigo, em que o valor 2 está alocado, passa a ficar novamente disponível para o sistema operacional.



**Observação 2.3.1.** O método `Python id` retorna a identidade (endereço da caixinha) de um objeto. Essa identidade deve ser única e constante para cada objeto.

```
1 >>> x = 1
2 >>> id(x)
3 139779845161200
4 >>> y = x
```

```
5 >>> id(y)
6 139779845161200
7 >>> x = 2
8 >>> id(x)
9 139779845161232
10 >>> id(y)
11 139779845161200
12 >>> y = 3
13 >>> id(y)
14 139779845161264
```

**Exemplo 2.3.3.** (*Troca de Variáveis/Identificadores.*) Em várias situações, faz-se necessário permutar dados entre dois identificadores. Sejam

```
1 x = 1
2 y = 2
```

Agora, queremos permutar os dados, ou seja, queremos que  $y$  tenha o valor 1 e  $x$  o valor 2. Podemos fazer isso utilizando uma variável auxiliar (em inglês, *buffer*).

```
1 z = x
2 x = y
3 y = z
```

Verifique!

### 2.3.3 Exercícios

**Exercício 2.3.1.** Proponha identificadores adequados à linguagem *Python* baseados nos seguintes nomes:

- a) Área
- b) Perímetro do quadrado
- c) Cateto+Cateto
- d) Número de elementos do conjunto A
- e) 77 lados
- f)  $f(x)$

g)  $x^2$

h)  $13x$

**Exercício 2.3.2.** No Exemplo 2.2.1, apresentamos um código Python para o cálculo da área de um triângulo. Reescreva o código trocando seus identificadores por nomes mais adequados.

**Exercício 2.3.3.** O seguinte código Python tem um erro:

```
1 x = 1
2 y = X + 1
```

Identifique-o e apresente uma nova versão código corrigido.

**Exercício 2.3.4.** Faça uma representação gráfica da alocação de memória que ocorre para cada uma das instruções Python do Exemplo 2.3.3 na troca de variáveis. Ou seja, para a seguinte sequência de instruções:

```
1 x = 1
2 y = 2
3 z = x
4 x = y
5 y = z
```

**Exercício 2.3.5.** No Exemplo 2.3.3 fazemos a permutação entre as variáveis  $x$  e  $y$  usando um *buffer*  $z$  para guardar o valor de  $x$ . Se, ao contrário, usarmos o *buffer* para guardar o valor de  $y$ , como fica o código de permutação entre as variáveis?

## 2.4 Dados Numéricos e Operações

Números são tipos de dados comumente manipulados em programas de computador. Números inteiros e não inteiros são tratados de forma diferente. Mas, antes de discorrermos sobre essas diferenças, vamos estudar operadores numéricos básicos.

## Operações Numéricas Básicas

As seguintes operações numéricas estão disponíveis na linguagem [Python](#):

- **+** : **adição**

```
1 >>> 1 + 2
2 3
```

- **-** : **subtração**

```
1 >>> 1 - 2
2 -1
```

- **\*** : **multiplicação**

```
1 >>> 2*3
2 6
```

- **/** : **divisão**

```
1 >>> 5/2
2 2.5
```

- **//** : **divisão inteira**

```
1 >>> 5//2
2 2
```

- **%** : **resto da divisão**

```
1 >>> 5 % 2
2 1
```

A **ordem de precedência das operações** deve ser observada em [Python](#). Uma expressão é executada da esquerda para a direita, mas os operadores tem a seguinte precedência<sup>12</sup>:

1. **\*\***
2. **lstinline\*-x\*** : **oposto de  $x$**
3. **\*, /, //, %**

---

<sup>12</sup>Consulte a lista completa de operadores e suas precedências em [Python Docs: Expressions: Operator precedence](#).

4. +, -

Utilizamos parênteses para impor uma precedência diferente, i.e. expressões entre parênteses () são executadas antes das demais.

**Exemplo 2.4.1.** Estudamos a seguinte computação:

```
1 >>> 2+8*3/2**2-1
2 7.0
```

Uma pessoa desavisada poderia pensar que o resultado está errado, pois

$$2 + 8 = 10, \quad (2.17)$$

$$10 \cdot 3 = 30, \quad (2.18)$$

$$30 \div 2 = 15, \quad (2.19)$$

$$15^2 = 225, \quad (2.20)$$

$$225 - 1 = 224. \quad (2.21)$$

Ou seja, o resultado não deveria ser 224? Não, em [Python](#), a operação de potenciação \*\* tem a maior precedência, depois vem as de multiplicação \* e divisão / (com a mesma precedência, sendo que a mais a esquerda é executada primeiro) e, por fim, vem as de adição + e subtração - (também com a mesma precedência entre si). Ou seja, a instrução acima é computada na seguinte ordem:

$$2^2 = 4, \quad (2.22)$$

$$8 \cdot 3 = 24, \quad (2.23)$$

$$24 \div 4 = 6, \quad (2.24)$$

$$2 + 6 = 8, \quad (2.25)$$

$$8 - 1 = 7. \quad (2.26)$$

Para impormos um ordem diferente de precedência, usamos parêntese. No caso acima, escrevemos

```
1 >>> ((2 + 8)*3/2)**2 - 1
2 224.0
```

O uso de espaços entre os operandos, em geral, é arbitrário, mas conforme utilizados podem dificultar a legibilidade do código.



**Exemplo 2.4.2.** Consideramos a seguinte expressão

```
1 >>> 2 * - 3 + 2
2 -4
```

Essa expressão é computada na seguinte ordem:

$$- 3 = -3 \quad (2.27)$$

$$2 \cdot (-3) = -6 \quad (2.28)$$

$$-6 + 2 = -4 \quad (2.29)$$

Observamos que ela seria melhor escrita da seguinte forma:

```
1 >>> 2*-3 + 2
2 -4
```

## 2.4.1 Números Inteiros

Em Python, números inteiros são alocados por registros com um número arbitrário de *bits*. Com isso, os maior e menor números inteiros que podem ser alocados dependem da capacidade de memória da máquina. Quanto maior ou menor o número inteiro, mais *bits* são necessários para alocá-lo.

**Exemplo 2.4.3.** O método Python `sys.getsizeof()` retorna o tamanho de um objeto medido em *bytes* ( $1 \text{ byte} = 8 \text{ bits}$ ).

```
1 >>> import sys
2 >>> sys.getsizeof(0)
3 24
4 >>> sys.getsizeof(1)
5 28
6 >>> sys.getsizeof(100)
7 28
8 >>> sys.getsizeof(10**9)
9 28
10 >>> sys.getsizeof(10**10)
11 32
12 >>> sys.getsizeof(10**100) #googol
13 72
```

O número [googol](#)  $10^{100}$  é um número grande<sup>13</sup>, mas 72 *bytes* não necessariamente. Um computador com 4 Gbytes<sup>14</sup> livres de memória, poderia armazenar um número inteiro que requer um registro de até  $4,3 \times 10^9$  *bytes*.

**Observação 2.4.1.** O método `Python type()` retorna o tipo de objeto alocado. Números inteiros são objetos da classe `int`.

```
1 >>> type(10)
2 <class 'int'>
```

## 2.4.2 Números Decimais

No `Python`, **números decimais são alocados** pelo padrão [IEEE 774](#) de aritmética **em ponto flutuante**. Em geral, são usados 64 *bits* = 8 *bytes* para alocar um número decimal. Um ponto flutuante tem a forma

$$x = \pm m \cdot 2^{c-1023}, \quad (2.30)$$

onde  $m$  é chamada de mantissa (e é um número no intervalo  $[1,2)$ ) e  $c \in [0, 2047]$  é um número inteiro chamado de característica do ponto flutuante. A mantissa usa 52 *bits*, a característica 11 *bits* e 1 *bit* é usado para o sinal do número.

```
1 >>> import sys
2 >>> sys.float_info
3 sys.float_info(max=1.7976931348623157e+308,
4                 max_exp=1024,
5                 max_10_exp=308,
6                 min=2.2250738585072014e-308,
7                 min_exp=-1021,
8                 min_10_exp=-307,
9                 dig=15,
10                mant_dig=53,
11                epsilon=2.220446049250313e-16,
12                radix=2,
13                rounds=1)
```

<sup>13</sup>Por exemplo, o número total de partículas elementares em todo o universo observável é estimado em  $10^{80}$ . Fonte: [Wikipédia: Eddington number](#).

<sup>14</sup>1 Gbytes = 1024 Mbytes, 1 Mbytes = 1024 Kbytes, 1 Kbytes = 1024 bytes.

Vamos denotar  $\text{fl}(x)$  o número em ponto flutuante mais próximo do número decimal  $x$  dado. Quando digitamos

```
1 >>> x = 0.1
```

O valor alocado na memória da máquina não é 0.1, mas, sim, o  $\text{fl}(x)$ . Normalmente, o **épsilon de máquina**  $\varepsilon = 2,22 \times 10^{-16}$  é uma boa aproximação para o erro (de arredondamento) entre  $x$  e  $\text{fl}(x)$ .

### Notação Científica

A **notação científica** é a representação de um dado número na forma

$$d_n \dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots \times 10^E, \quad (2.31)$$

onde  $d_i, i = n, \dots, 1, 0, -1, \dots$ , são algarismos da base 10. A parte à esquerda do sinal  $\times$  é chamada de mantissa do número e  $E$  é chamado de expoente (ou ordem de grandeza).

**Exemplo 2.4.4.** O número 31,415 pode ser representado em notação científica das seguintes formas

$$31,415 \times 10^0 = 3,1415 \times 10^1 \quad (2.32)$$

$$= 314,15 \times 10^{-1} \quad (2.33)$$

$$= 0,031415 \times 10^3, \quad (2.34)$$

entre outras tantas possibilidades.

Em Python, usa-se a letra **e** para separar a mantissa do expoente na notação científica. Por exemplo

```
1 >>> # 31.415 X 10^0
2 >>> 31.415e0
3 31.515
4 >>> # 3.1415 X 10^1
5 >>> 3.1415e1
6 31.515
7 >>> # 314.15 X 10^-1
8 >>> 314.15e-1
9 31.515
10 >>> # 0.031415 X 10^3
11 >>> 0.031415e3
12 31.415
```

No exemplo anterior (Exemplo 2.4.4), podemos observar que a representação em notação científica de um dado número não é única. Para contornar isto, introduzimos a **notação científica normalizada**, a qual tem a forma

$$d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots \times 10^E, \quad (2.35)$$

com  $d_0 \neq 0$ <sup>15</sup>.

**Exemplo 2.4.5.** O número 31,415 representado em notação científica normalizada é  $3,1415 \times 10^1$ .

Em **Python**, podemos usar de especificação de formatação<sup>16</sup> para imprimir um número em notação científica normalizada. Por exemplo, temos

```
1 >>> x = 31.415
2 >>> print(f"{x:e}")
3 3.141500e+01
```

### 2.4.3 Números Complexos

**Python** tem números complexos como um tipo básico da linguagem. O número imaginário  $i := \sqrt{-1}$  é representado por `1j`. Temos

```
1 >>> 1j**2
2 (-1+0j)
```

Ou seja,  $i^2 = -1 + 0i$ . **Aritmética de números completos está diretamente disponível na linguagem.**

**Exemplo 2.4.6.** Estudamos os seguintes casos:

a)  $-3i + 2i = -i$

```
1 >>> -3j + 2j
2 -1j
```

b)  $(2 - 3i) + (4 + i) = 6 - 2i$

```
1 >>> 2-3j + 4+1j
2 (6-2j)
```

<sup>15</sup>No caso do número zero, temos  $d_0 = 0$ .

<sup>16</sup>Consulte Subseção 2.6.1 para mais informações.

$$c) (2 - 3i) \cdot (4 + i) = 11 - 10i$$

```
1 >>> (2-3j)*(4+1j)
2 (11-10j)
```

#### 2.4.4 Exercícios

**Exercício 2.4.1.** Desenvolva um código [Python](#) para computar a interseção com o eixo das abscissas da reta de equação

$$y = 2ax - b. \quad (2.36)$$

Em seu código, aloque  $a = 2$  e  $b = 8$  e então compute o ponto de interseção  $x$ .

**Exercício 2.4.2.** Assuma que o seguinte código [Python](#)

```
1 a = 2
2 b = 8
3 x = b/2*a
4 print("x = ", x)
```

tenha sido desenvolvido para computar o ponto de interseção com o eixo das abscissas da reta de equação

$$y = 2ax - b \quad (2.37)$$

com  $a = 2$  e  $b = 8$ . O código acima contém um erro, qual é? Identifique-o, corrija-o e justifique sua resposta.

**Exercício 2.4.3.** Desenvolva um código [Python](#) para computar a média aritmética entre dois números  $x$  e  $y$  dados.

**Exercício 2.4.4.** Uma disciplina tem o seguinte critério de avaliação:

1. Trabalho: nota com peso 3.
2. Prova: nota com peso 7.

Desenvolva um código [Python](#) que compute a nota final, dadas as notas do trabalho e da prova (em escala de 0 – 10) de um estudante.

**Exercício 2.4.5.** Desenvolva um código [Python](#) para computar as raízes reais de uma equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2.38)$$

Assuma dados os parâmetros  $a = 2$ ,  $b = -2$  e  $c = -12$ .

**Exercício 2.4.6.** Encontre a quantidade de memória disponível em seu computador. Quantos *bytes* seu programa poderia alocar de dados caso conseguisse usar toda a memória disponível no momento?

**Exercício 2.4.7.** Escreva os seguintes números em notação científica normalizada e entre com eles em um terminal [Python](#):

- a) 700
- b) 0,07
- c) 2800000
- d) 0,000019

**Exercício 2.4.8.** Escreva os seguintes números em notação decimal:

- 1.  $2,8 \times 10^{-3}$
- 2.  $8,712 \times 10^4$
- 3.  $3,\bar{3} \times 10^{-1}$

**Exercício 2.4.9.** Faça os seguintes cálculos e então verifique os resultados computando-os em [Python](#):

- 1.  $5 \times 10^3 + 3 \times 10^2$
- 2.  $8,1 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-3}$
- 3.  $(7 \times 10^4) \cdot (2 \times 10^{-2})$
- 4.  $(7 \times 10^{-4}) \div (2 \times 10^2)$

**Exercício 2.4.10.** Faça os seguintes cálculos e verifique seus resultados computando-os em [Python](#):

1.  $(2 - 3i) + (2 - i)$
2.  $(1 + 2i) - (1 - 3i)$
3.  $(2 - 3i) \cdot (-4 + 2i)$
4.  $(1 - i)^3$

**Exercício 2.4.11.** Desenvolva um código [Python](#) que computa a área de um quadrado de lado  $l$  dado. Teste-o com  $l = 0,575$  e assegure que seu código forneça o resultado usando notação decimal.

**Exercício 2.4.12.** Desenvolva um código [Python](#) que computa o comprimento da diagonal de um quadrado de lado  $l$  dado. Teste-o com  $l = 2$  e assegure que seu código forneça o resultado em notação científica normalizada.

**Exercício 2.4.13.** Assumindo que  $a_1 \neq a_2$ , desenvolva um código [Python](#) que compute o ponto  $(x_i, y_i)$  que corresponde a interseção das retas de equações

$$y = a_1x + b_1 \tag{2.39}$$

$$y = a_2x + b_2, \tag{2.40}$$

para  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  parâmetros dados. Teste-o para o caso em que  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = -1$ . Garanta que seu código forneça a solução usando notação científica normalizada.

## 2.5 Dados Booleanos

Em [Python](#), os valores lógicos são o `True` (verdadeiro) e o `False` (falso). Pertencem a uma subclasse dos números inteiros, com 1 correspondendo a `True` e 0 a `False`. Em referência ao matemático George Boole<sup>17</sup>, estes dados são chamados de **booleanos**.

Normalmente, eles aparecem como resultado de expressões lógicas. Por exemplo:

<sup>17</sup>George Boole, 1815 - 1864, matemático britânico. Fonte: [Wikipédia](#).

```
1 >>> 2/3 < 3/4
2 True
3 >>> 7/5 > 13/9
4 False
```

### 2.5.1 Operadores de Comparação

Python possui **operadores de comparação** que **retornam valores lógicos**, são eles:

- **< : menor que**

```
1 >>> 2 < 3
2 True
```

- **<= : menor ou igual que**

```
1 >>> 4 <= 2**2
2 True
```

- **> : maior que**

```
1 >>> 5 > 7
2 False
```

- **>= : maior ou igual que**

```
1 >>> 2*5 >= 10
2 True
```

- **== : igual a**

```
1 >>> 9**2 == 81
2 True
```

- **!= : diferente de**

```
1 >>> 81 != 9**2
2 False
```

**Observação 2.5.1.** Os operadores de comparação <, <=, >, >=, ==, != tem a mesma ordem de precedência e estão abaixo da precedência dos operadores numéricos básicos.



**Exemplo 2.5.1.** A equação da circunferência de centro no ponto  $(a, b)$  e raio  $r$  é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (2.41)$$

Um ponto  $(x, y)$  está no disco determinado pela circunferência, quando

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \quad (2.42)$$

e está fora do disco, noutro caso.

O seguinte código verifica se o ponto dado  $(x, y) = (1, 1)$  está no disco determinado pela circunferência de centro  $(a, b) = (0, 0)$  e raio  $r = 1$ .

```

1  # ponto
2  x = 1
3  y = 1
4
5  # centro circunferência
6  a = 0
7  b = 0
8  # raio circunferência
9  raio = 1
10
11 # verifica se está no disco
12 v = (x-a)**2 + (y-b)**2 <= raio**2
13
14 # imprime resposta
15 print('O ponto está no disco?', v)
```

### Comparação entre pontos flutuantes

Números decimais são arredondados para o número `float` (ponto flutuante) mais próximo na máquina<sup>18</sup>. Com isso, a comparação direta entre pontos flutuantes não é recomendada, em geral. Por exemplo,

```

1 >>> 0.1 + 0.2 == 0.3
2 False
```

<sup>18</sup>Consulte a Subseção 2.4.2.

Inesperadamente, este resultado é esperado na aritmética de ponto flutuante! :)

O que ocorre acima, é que ao menos um dos números (na verdade todos) não tem representação exata como ponto flutuante. Isso faz com que a soma  $0.1 + 0.2$  não seja exatamente computada igual a  $0.3$ .

O erro de arredondamento é de aproximadamente<sup>19</sup>  $10^{-16}$  para cada entrada. Conforme operamos sobre pontos flutuantes este erro pode crescer. Desta forma, o mais apropriado para comparar se dois pontos flutuantes são iguais (dentro do erro de arredondamento de máquina) é verificando se a distância entre eles é menor que uma precisão desejada, por exemplo,  $10^{-15}$ . No caso acima, podemos usar<sup>20</sup>:

```
1 >>> abs(x - 0.3) <= 1e-15
2 True
```

## 2.5.2 Operadores Lógicos

Python tem os operadores lógicos (ou **operadores booleanos**):

- **and : e lógico**

```
1 >>> 3 > 4 and 3 <= 4
2 False
```

Tabela 2.1: Tabela verdade do **and**.

A	B	A <b>and</b> B
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

- **or : ou lógico**

<sup>19</sup>Épsilon de máquina  $\varepsilon \approx 2,22 \times 10^{-16}$ .

<sup>20</sup>**abs()** é um método Python para computar o valor absoluto de um número. Consulte [Python Docs: Built-in Functions](#).

```

1 >>> 3 > 4 or 3 <= 4
2 True

```

Tabela 2.2: Tabela verdade do `or`.

A	B	A or B
True	True	True
True	False	True
False	True	True
False	False	False

- `not` : negação lógica

```

1 >>> not (3 < 2)
2 True

```

Tabela 2.3: Tabela verdade do `not`.

A	not A
True	False
False	True

**Observação 2.5.2.** (Ordem de precedência de operações.) Os operadores booleanos tem a seguinte ordem de precedência:

1. `not`
2. `and`
3. `or`

São executados em ordem de precedência menor que os operadores de comparação.

**Exemplo 2.5.2.** Sejam os discos determinados pelas circunferências

$$c_1 : (x - a_1)^2 + (y + b_1)^2 = r_1^2, \quad (2.43)$$

$$c_2 : (x - a_2)^2 + (y + b_2)^2 = r_2^2, \quad (2.44)$$

onde  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  são seus centros e  $r_1$  e  $r_2$  seus raios, respectivamente.

Assumindo, que a circunferência  $c_1$  tem

$$c_1 : (a_1, b_1) = (0, 0), r_1 = 1 \quad (2.45)$$

e a circunferência  $c_2$  tem

$$c_2 : (a_2, b_2) = (1, 1), r_2 = 1, \quad (2.46)$$

o seguinte código verifica se o ponto  $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pertence a interseção dos discos determinados por  $c_1$  e  $c_2$ .

```
1  # circunferência c1
2  a1 = 0
3  b1 = 0
4  r1 = 1
5
6  # circunferência c2
7  a2 = 1
8  b2 = 1
9  r2 = 1
10
11 # ponto obj
12 x = 0.5
13 y = 0.5
14
15 # está em c1?
16 em_c1 = (x-a1)**2 + (y-b1)**2 <= r1**2
17
18 # está em c2?
19 em_c2 = (x-a2)**2 + (y-b2)**2 <= r2**2
20
21 # está em c1 e c2?
22 resp = em_c1 and em_c2
23 print('O ponto está na interseção de c1 e c2?', resp)
```

**Observação 2.5.3.** (**Ou exclusivo.**) Presente em algumas linguagens, **Python** não tem um operador **xor** (ou exclusivo). A tabela verdade do ou exclusivo é

A	B	A xor B
True	True	False
True	False	True
False	True	True
False	False	False

A operação **xor** pode ser obtida através de expressões lógicas usando-se apenas os operadores **and**, **or** e **not**. Consulte o Exercício 2.5.6.

### 2.5.3 Exercícios

**Exercício 2.5.1.** Compute as seguintes expressões:

a)  $1 - 6 > -6$

b)  $\frac{3}{2} < \frac{4}{3}$

c)  $31,415 \times 10^{-1} == 3.1415$

d)  $2,7128 \geq 2 + \frac{2}{3}$

e)  $\frac{3}{2} + \frac{7}{8} \leq \frac{24 + 14}{16}$

**Exercício 2.5.2.** Desenvolva um código que verifica se um número inteiro  $x$  dado é par. Teste-o para diferentes valores de  $x$ .

**Exercício 2.5.3.** Considere um quadrado de lado  $l$  dado e uma circunferência de raio  $r$  dado. Desenvolva um código que verifique se a área do quadrado é menor que a da circunferência. Teste o seu código para diferentes valores de  $l$  e  $r$ .

**Exercício 2.5.4.** Considere o plano cartesiano  $x - y$ . Desenvolva um código que verifique se um ponto  $(x, y)$  dado está entre as curvas  $y = (x - 1)^3$  e o eixo das abscissas<sup>21</sup>. Verifique seu código para diferentes pontos  $(x, y)$ .

---

<sup>21</sup>Eixo  $x$ .

**Exercício 2.5.5.** Sejam  $A$  e  $B$  valores booleanos. Verifique se as seguintes expressões são verdadeiras (V) ou falsas (F):

- a)  $A \text{ or } A == A$
- b)  $A \text{ and not}(A) == \text{True}$
- c)  $A \text{ or } (A \text{ and } B) == A$
- d)  $\text{not}(A \text{ and } B) == \text{not}(A) \text{ or } \text{not}(B)$
- e)  $\text{not}(A \text{ or } B) == \text{not}(A) \text{ or } \text{not}(B)$

**Exercício 2.5.6.** Sejam  $A$  e  $B$  valores booleanos dados. Escreva uma expressão lógica que emule a operação `xor` (ou exclusivo) usando apenas os operadores `and`, `or` e `not`. Dica: consulte a Observação 2.5.3.

## 2.6 Sequência de Caracteres

Dados em formato texto também são comumente manipulados em programação. Um texto é interpretado como uma cadeia/sequência de caracteres, chamada de *string*. Para entrarmos com uma letra, palavra ou texto (um *string*), precisamos usar aspas (simples ' ' ou duplas " "). Por exemplo,

```
1 >>> s = 'Olá, mundo!'
2 >>> print(s)
3 Olá, mundo!
4 >>> type(s)
5 <class 'str'>
```

Uma *string* é um conjunto indexado e imutável de caracteres. O primeiro caractere está na posição 0, o segundo na posição 1 e assim por diante. Por exemplo,

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ O & l & á & , & _ & m & u & n & d & o & ! \end{array} \quad (2.47)$$

Observamos que o espaço também é um caractere. O tamanho da *string* (número total de caracteres) pode ser obtido com o método Python `len()`, por exemplo

```
1 >>> len(s)
2 11
```

A referência a um caractere de uma dada *string* é feito usando-se seu identificador seguido do índice de sua posição entre colchetes. Por exemplo,

```
1 >>> s[6]
2 'u'
```

Podemos, ainda, acessar fatias<sup>22</sup> da sequência usando o operador :,<sup>23</sup> por exemplo,

```
1 >>> s[:3]
2 'Olá'
```

ou seja, os caracteres da posição 0 à posição 2 (um antes do índice 3). Também podemos tomar uma fatia entre posições, por exemplo,

```
1 >>> s[5:10]
2 'mundo'
```

o que nos fornece a fatia de caracteres que inicia na posição 5 e termina na posição 9. Ou ainda,

```
1 >>> s[6:]
2 'undo!'
```

Também, pode-se controlar o passo do fatiamento, por exemplo

```
1 >>> 'laura'[::-2]
2 'lua'
```

Em Python, existem diversas formas de escrever *strings*:

- **aspas simples**

```
1 >>> 'permitem aspas "duplas" embutidas '
2 'permitem aspas "duplas" embutidas '
```

- **aspas duplas**

```
1 >>> "permitem aspas 'simples' embutidas "
2 "permitem aspas 'simples' embutidas "
```

---

<sup>22</sup>Em inglês, *slice*.

<sup>23</sup>`x[start:stop:step]`, padrão `start=0`, `stop=len(x)`, `step=1`.

- **aspas triplas**<sup>24</sup>

```
1 >>> '''
2 ...   permitem
3 ...   "diversas"
4 ...   linhas
5 ...   '''
6 '\npermitem\n  "diversas"\nlinhas\n'
7 >>> """
8 ...   permitem
9 ...   'diversas '
10 ...   linhas
11 ...   """
12 "\npermitem\n  'diversas'\nlinhas\n"
```

*Strings* em [Python](#) usam o padrão [Unicode](#), que nos permite manipular textos de forma muito próxima da linguagem natural. Alguns caracteres especiais úteis são:

- **'n' : nova linha**

```
1 >>> print('Uma nova\nlinha')
2 Uma nova
3 linha
```

- **'t' : tabulação**

```
1 >>> print('Uma nova\n\t linha com tabulação')
2 Uma nova
3         linha com tabulação
```

**Observação 2.6.1.** (*Raw string.*) Caso seja necessário imprimir os caracteres unicode especiais '\\n', '\\t', entre outros, pode-se usar *raw strings*. Por exemplo,

```
1 >>> print(r'Aqui, o \n não quebra a linha!')
2 Aqui, o \n não quebra a linha!
```

---

<sup>24</sup>'n' é o caractere que indica uma nova linha (em inglês, *newline*).



### 2.6.1 Formatação de *strings*

Em [Python](#), *strings* formatadas são identificadas com a letra `f` no início. Elas aceitam o uso de identificadores com valores predefinidos. Os identificadores são embutidos com o uso de chaves `{}` (*placeholder*). Por exemplo,

```
1 >>> nome = 'Fulane'
2 >>> f'Olá, {nome}!'
3 'Olá, Fulane!'
```

Há várias especificações de formatação disponíveis<sup>25</sup>:

- **'d' : número inteiro**

```
1 >>> print(f'10/3 é igual a {10//3:d} e \
2 ... resta {10%3:d}.')
3 10/3 é igual a 3 e resta 1.
```

- **'f' : número decimal**

```
1 >>> print(f'13/7 é aproximadamente {13/7:.3f}')
2 13/7 é aproximadamente 1.857
```

- **'e' : notação científica normalizada**

```
1 >>> print(f'103/7 é aproximadamente {103/7:.3e}')
2 103/7 é aproximadamente 1.471e+01
```

### 2.6.2 Operações com *strings*

Há uma grande variedade disponível de métodos para a manipulação de *strings* em [Python](#) (consulte [Python Docs: String Methods](#)). Alguns operadores básicos são:

- **+ : concatenação**

```
1 >>> s = 'Olá, mundo!'
2 >>> s[:5] + 'Fulane!'
3 'Olá, Fulane!'
```

- **\* : repetição**

<sup>25</sup>Consulte [Python Docs:String:Format Specification Mini-Language](#) para uma lista completa.

```
1 >>> 'ha'*3
2 'hahaha'
```

- **in : pertence**

```
1 >>> 'mar' in 'amarelo'
2 True
```

### 2.6.3 Entrada de dados

O método `Python input()` pode ser usado para a **entrada de *string*** via teclado. Por exemplo,

```
1 >>> s = input('Digite seu nome.\n')
2 Digite seu nome.
3 Fulane
4 >>> s
5 'Fulane'
```

A instrução da linha 1 pede para que a variável `s` receba a *string* a ser digitada pela(o) usuária(o). A *string* entre parênteses é informativa, o comando `input`, imprime esta mensagem e fica aguardado que uma nova *string* seja digitada. Quando o usuário pressiona <ENTER>, a *string* digitada é alocada na variável `s`.

### Conversão de classes de dados

A **conversão entre classes de dados** é possível e é feita por métodos próprios de cada classe. Por exemplo,

```
1 >>> # int -> str
2 >>> str(101)
3 '101'
4 >>> # str -> int
5 >>> int('23')
6 23
7 >>> # int -> float
8 >>> float(1)
9 1.0
10 >>> # float -> int
11 >>> int(-2.9)
```

12 -2

Atenção! Na conversão de `float` para `int`, fica-se apenas com a parte inteiro do número.

**Observação 2.6.2.** O método Python `input()` permite a entrada de *strings*, que podem ser convertidas para outras classes de dados. Com isso, pode-se obter a entrada via teclado destes dados.

**Exemplo 2.6.1.** O seguinte código, computa a área de um triângulo com base e altura fornecidas por usuário(o).

```
1 # entrada de dados
2 base = float(input('Entre com o valor da base:\n\t'))
3 altura = float(input('Entre com o valor da altura:\n\t'))
4
5 # cálculo da área
6 area = base*altura/2
7
8 # imprime a área
9 print(f'Área do triangulo de ')
10 print(f'\t base = {base:e}')
11 print(f'\t altura = {altura:e}')
12 print(f'é igual a {area:e}')
```

## 2.6.4 Exercícios

**Exercício 2.6.1.** Aloque a palavra *traitor* em uma variável *x*. Use de indexação por referência para:

- Extrair a quarta letra da palavra.
- Extrair a *substring*<sup>26</sup> formada pelas quatro primeiras letras da palavra.
- Extrair a *string* formadas pelas segunda, quarta e sexta letras (nesta ordem) da palavra.
- Extrair a *string* formadas pelas penúltima e quarta letras (nesta ordem) da palavra.

<sup>26</sup>Uma subsequência contínua de caracteres de uma *string*.

**Exercício 2.6.2.** Considere o seguinte código

```
1 s = 'traitor'
2 print(s[:3] + s[4:])
```

Sem implementá-lo, o que é impresso?

**Exercício 2.6.3.** Desenvolva um contador de letras de palavras. Ou seja, crie um código que forneça o número de letras de uma palavra fornecida por um(a) usuário(a).

**Exercício 2.6.4.** Desenvolva um código que compute a área de um quadrado de lado fornecido pela(o) usuária(o). Assuma que o lado é dado em centímetros e a área deve ser impressa em metros, usando notação decimal com 2 dígitos depois da vírgula.

**Exercício 2.6.5.** Desenvolva um código que verifica se um número é divisível por outro. Ou seja, a(o) usuária entra com dois números inteiros e o código imprime verdadeiro (`True`) ou (`False`) conforme a divisibilidade de  $x$  por  $y$ .

## 2.7 Coleção de Dados

Objetos da classe de dados `int` e `float` permitem a alocação de um valor numérico por variável. Já, `string` é um coleção (sequência) de caracteres. Nesta seção, vamos estudar sobre classes de dados básicos que permitem a alocação de uma coleção de dados em uma única variável.

### 2.7.1 Conjuntos: `set`

Em `Python`, `set` é uma classe de dados para a alocação de um conjunto de objetos. Assim como na matemática, um `set` é uma coleção de itens não indexada, imutável e não admite itens duplicados.

A alocação de um `set` pode ser feita como no seguinte exemplo:

```
1 >>> a = {1, -3.7, 'amarelo'}
2 >>> type(a)
```

```
3 <class 'set'>
4 >>> a
5 {'amarelo', 1, -3.7}
```

Observamos que a **ordem dos elementos é arbitrária**, uma vez que `set` é uma coleção de itens não indexada.

O método `set()` também pode ser usado para criar um conjunto. Por exemplo, o conjunto vazio pode ser criado como segue:

```
1 >>> b = set()
2 >>> type(b)
3 <class 'set'>
4 >>> b
5 set()
```

O método `len()` pode ser usado para obtermos o tamanho (número de elementos) de um `set`:

```
1 >>> len(a)
2 3
3 >>> len(b)
4 0
```

## Operadores de comparação

Os seguintes operadores de comparação estão disponíveis para `sets`:

- **`x in a` : pertence**

Verifica se  $x \in a$ .

```
1 >>> a = {1, -3.7, 'amarelo'}
2 >>> 1 in a
3 True
4 >>> 'mar' in a
5 False
```

- **`a == b` : igualdade**

Verifica se  $a = b$ .

```
1 >>> a == a
2 True
```

- **`a != b` : diferente**

Verifica se  $a \neq b$ .

```
1 >>> b = {'amarelo', -3.7}
2 >>> a != b
3 True
```

- **`a <= b` : contido em ou igual a (subconjunto)**

Verifica se  $a \subseteq b$ .

```
1 >>> b <= a
2 True
```

- **`<` : contido em e não igual a (subconjunto próprio)**

Verifica se  $a \subsetneq b$ .

```
1 >>> a < a
2 False
3 >>> b < a
4 True
```

- **`>=` : contém ou é igual a (subconjunto)**

Verifica se  $a \supseteq b$ .

```
1 >>> a >= b
2 True
```

- **`>` : contém e não é igual a (subconjunto próprio)**

Verifica se  $a \supsetneq b$ .

```
1 >>> a > b
2 True
3 >>> b > b
4 False
```

## Operações com conjuntos

Em [Python](#), as seguintes operações com conjuntos estão disponíveis:

- **a | b : união**

Retorna o **set** equivalente a

$$a \cup b := \{x : x \in a \vee x \in b\} \quad (2.48)$$

```
1 >>> a = {1, -3.7, 'amarelo'}
2 >>> b = {'mar', -5}
3 >>> a | b
4 {1, 'amarelo', 'mar', -5, -3.7}
```

- **a & b : interseção**

Retorna o **set** equivalente a

$$a \cap b := \{x : x \in a \wedge x \in b\} \quad (2.49)$$

```
1 >>> a = {1, -3.7, 'amarelo'}
2 >>> b = {'mar', 1, -3.7, -5}
3 >>> a & b
4 {1, -3.7}
```

- **- : diferença**

Retorna o **set** equivalente a

$$a \setminus b := \{x : x \in a \wedge x \notin b\} \quad (2.50)$$

```
1 >>> a - b
2 {'amarelo'}
```

- **^ : diferença simétrica**

Retorna o **set** equivalente a

$$a \Delta b := (a \setminus b) \cup (b \setminus a) \quad (2.51)$$

```
1 >>> a ^ b
2 {'amarelo', 'mar', -5}
```

### 2.7.2 *N*-uplas: `tuple`

Em `Python`, `tuple` é uma sequência de objetos, indexada e imutável. São similares as *n*-uplas<sup>27</sup> em matemática. A alocação é feita com uso de parênteses e os elementos separados por vírgula, por exemplo,

```
1 >>> a = (1, -3.7, 'amarelo', -5)
2 >>> type(a)
3 <class 'tuple'>
```

#### Indexação e fatiamento

O tamanho de um `tuple` é sua quantidade de objetos e pode ser obtido com o método `len()`, por exemplo,

```
1 >>> a = (1, -3.7, 'amarelo', -5, {-3,1})
2 >>> len(a)
3 5
```

Os itens são indexados como segue

$$\begin{pmatrix} 1, -3.7, 'amarelo', -5, \{-3, 1\} \\ \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

A referência a um objeto do `tuple` pode ser feita com

```
1 >>> a[2]
2 'amarelo'
3 >>> a[-1]
4 {1, -3}
```

Analogamente a `strings`, pode-se fazer o fatiamento de `tuples` usando-se o operador `:`. Por exemplo,

```
1 >>> a[:2]
2 (1, -3.7)
3 >>> a[1:5:2]
4 (-3.7, -5)
5 >>> a[::-1]
6 ({1, -3}, -5, 'amarelo', -3.7, 1)
```

<sup>27</sup>Pares (duplas), triplas, quadruplas ordenadas, etc.



### Operações com `tuples`

Os mesmos operadores de comparação para `sets` estão disponíveis para `tuples` (consulte a Subseção 2.7.1). Por exemplo,

```
1 >>> -5 in a
2 True
3 >>> a[::-1] == a[-1:-6:-1]
4 True
5 >>> a != a[::-1]
6 True
7 >>> a[:2] < a
8 True
```

**Observação 2.7.1. (Igualdade entre `tuples`.)** Dois `tuples` são iguais quando contém os mesmos elementos e na mesma ordem.

Há, também, operadores para a concatenação e repetição:

- **`+` : concatenação**

```
1 >>> a = (1,2)
2 >>> b = (3,4,5)
3 >>> a+b
4 (1, 2, 3, 4, 5)
```

- **`*` : repetição**

```
1 >>> a*3
2 (1, 2, 1, 2, 1, 2)
```

**Observação 2.7.2. (Permutação de variáveis.)** Dizemos que um código é **pythônico** quando explora a linguagem para escrevê-lo de forma sucinta e de fácil compreensão. Por exemplo, a permutação de variáveis é classicamente feita como segue

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = 2
3 >>> z = x
4 >>> x = y
5 >>> y = z
6 >>> x, y
7 (2, 1)
```

Note que na última linha, um `tuple` foi criado. Ou seja, a criação de `tuples` não requer o uso de parênteses, basta colocar os objetos separados por vírgulas. Podemos explorar isso e escrevermos o seguinte código pythônico para a permutação de variáveis:

```
1 >>> x, y = y, x
2 >>> x, y
3 (1, 2)
```

### 2.7.3 Listas: `list`

Em `Python`, `list` é uma classe de objetos do tipo lista, é uma coleção de objetos indexada e mutável. Para a criação de uma lista, usamos colchetes `[]`:

```
1 >>> a = [1, -3.7, 'amarelo', -5, (-3,1)]
2 >>> type(a)
3 <class 'list'>
4 >>> a[2]
5 'amarelo'
6 >>> a[1:2]
7 [-3.7, -5]
```

**Exemplo 2.7.1.** (Vetores alocados como `lists`.) Sejam dados dois vetores

$$v = (v_1, v_2, v_3), \quad (2.53)$$

$$w = (w_1, w_2, w_3). \quad (2.54)$$

O produto interno  $v \cdot w$  é calculado por

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \quad (2.55)$$

O seguinte código, aloca os vetores

$$v = (-1, 2, 1), \quad (2.56)$$

$$w = (3, -1, 4) \quad (2.57)$$

usando `lists`, computa o produto interno  $v \cdot w$  e imprime o resultado.

```
1 v = [-1, 2, 1]
2 w = [3, -1, 4]
3 p = v[0]*w[0] \
4     + v[1]*w[1] \
5     + v[2]*w[2]
6 print(f'v.w = {p}')
```

**Exemplo 2.7.2.** (Matrizes e listas encadeadas.) Consideramos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Podemos alocá-la por linhas pelo encadeamento de `lists`, i.e.

```
1 >>> A = [[-1, 1], [1, 3]]
2 >>> A
3 [[-1, 1], [1, 3]]
```

Com isso, podemos obter a segunda linha da matriz com

```
1 >>> A[1]
2 [1, 3]
```

Ou ainda, podemos obter o elemento da segunda linha e primeira coluna com

```
1 >>> A[1][0]
2 1
```

**Observação 2.7.3.** (Operadores.) Os operadores envolvendo `tuples` são análogos para `lists`. Por exemplo,

```
1 >>> a = [1, 2]
2 >>> b = [3, 4]
3 >>> a + b
4 [1, 2, 3, 4]
5 >>> 2*a
6 [1, 2, 1, 2]
7 >>> a <= a
8 True
```

### Modificações em `lists`

`list` é uma classe de objetos mutável, i.e. permite que a coleção de objetos que a constituem seja alterada. Pode-se fazer a alteração de itens usando-se suas posições, por exemplo

```
1 >>> a = [1, -3.7, 'amarelo', -5, (-3,1)]
2 >>> a[1] = 7.5
3 >>> a
4 [1, 7.5, 'amarelo', -5, (-3, 1)]
5 >>> a[1:3] = ['mar', -2.47]
6 >>> a
7 [1, 'mar', -2.47, -5, (-3, 1)]
8 >>> a[:2] = 7
```

Tem-se disponíveis os seguintes métodos para a modificação de `lists`:

- `del : deleta elemento(s)`

```
1 >>> del a[:2]
2 >>> a
3 [-2.47, -5, (-3, 1)]
```

- `.insert(i, x) : inserção de elemento(s)`

```
1 >>> a.insert(1, 'azul')
2 >>> a
3 [-2.47, 'azul', -5, (-3, 1)]
```

- `.append(x) : anexa um novo elemento`

```
1 >>> a.append([2,1])
2 >>> a
3 [-2.47, 'azul', -5, (-3, 1), [2, 1]]
```

- `.extend(x) : estende com novos elementos dados`

```
1 >>> del a[-1]
2 >>> a.extend([2,1])
3 >>> a
4 [-2.47, 'azul', -5, (-3, 1), 2, 1]
5 >>> a += [3]
6 >>> a
7 [-2.47, 'azul', -5, (-3, 1), 2, 1, 3]
```

**Observação 2.7.4.** (Cópia de objetos.) Em `Python`, dados têm um único identificador, por isso temos

```
1 >>> a = [1, 2, 3]
2 >>> b = a
3 >>> b[1] = 4
4 >>> a
5 [1, 4, 3]
```

Para fazermos uma cópia de uma `list`, podemos usar o método `.copy()`. Com isso, temos

```
1 >>> a = [1, 2, 3]
2 >>> b = a.copy()
3 >>> b[1] = 4
4 >>> a
5 [1, 2, 3]
6 >>> b
7 [1, 4, 3]
```

## 2.7.4 Dicionários: `dict`

Em `Python`, um dicionário `dict` é uma coleção de objetos em que cada elemento está associado a uma **chave**. Como chave podemos usar qualquer dado imutável (`int`, `float`, `str`, etc.). Criamos um `dict` ao alocarmos um conjunto de chaves:valores:

```
1 >>> x = {'nome': 'Fulane', 'idade': 19}
2 >>> x
3 {'nome': 'Fulane', 'idade': 19}
4 >>> y = {3: 'número inteiro', 3.14: 'pi', 2.71: 2}
5 >>> y
6 {3: 'número inteiro', 3.14: 'pi', 2.71: 2}
7 >>> d = {}
8 >>> type(d)
9 <class 'dict'>
```

Observamos que `{}` cria um dicionário vazio. Acessamos um valor no `dict` referenciando-se sua **chave**, por exemplo

```
1 >>> x['idade']
```

```
2 19
3 >>> y[3]
4 'número inteiro'
```

Podemos obter a lista de chaves de um `dict` da seguinte forma

```
1 >>> list(x)
2 ['nome', 'idade']
3 >>> list(y)
4 [3, 3.14, 2.71]
```

**Exemplo 2.7.3.** Consideramos o triângulo de vértices  $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ . Alocamos um dicionário contendo os vértices do triângulo

```
1 >>> tria = {'A': (0,0), 'B': (1,0), 'C': (0,1)}
2 >>> tria
3 {'A': (0, 0), 'B': (1, 0), 'C': (0, 1)}
```

Para recuperarmos o valor do segundo vértice, por exemplo, digitamos

```
1 >>> tria['B']
2 (1, 0)
```

Em um `dict`, valores podem ser modificados, por exemplo,

```
1 >>> x['nome'] = 'Fulana'
2 >>> x
3 {'nome': 'Fulana', 'idade': 19}
```

Podemos estender um `dict` pela inserção de uma nova associação chave:valor, por exemplo

```
1 >>> x['altura'] = 171
2 >>> x
3 {'nome': 'Fulana', 'idade': 19, 'altura': 171}
```

**Exemplo 2.7.4.** No Exemplo 2.7.3, alocamos o dicionário `tria` contendo os vértices de um dado triângulo. Agora, vamos computar o comprimento de cada uma de suas arestas e alocar o resultado no próprio `dict`. A distância entre dois pontos  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$  pode ser calculada por

$$d(A, b) := \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (2.59)$$

Segue nosso código:

```

1  # vértices do triangulo
2  tria = {'A': (0,0), 'B': (1,0), 'C': (0,1)}
3  # aresta AB
4  tria['AB'] = ((tria['B'][0] - tria['A'][0])**2 \
5              + (tria['B'][1] - tria['A'][1])**2)**0.5
6  # aresta BC
7  tria['BC'] = ((tria['C'][0] - tria['B'][0])**2 \
8              + (tria['C'][1] - tria['B'][1])**2)**0.5
9  # aresta AC
10 tria['AC'] = ((tria['C'][0] - tria['A'][0])**2 \
11              + (tria['C'][1] - tria['A'][1])**2)**0.5
12 # novo dicionário
13 print(tria)

```

### 2.7.5 Exercícios

**Exercício 2.7.1.** Crie um código que aloque os seguintes conjuntos

$$A = \{1,4,7\} \quad (2.60)$$

$$B = \{1,3,4,5,7,8\} \quad (2.61)$$

e verifique as seguintes afirmações:

a)  $A \supset B$

b)  $A \subset B$

c)  $B \not\supset A$

d)  $A \subsetneq B$

**Exercício 2.7.2.** Crie um código que aloque os seguintes conjuntos

$$A = \{-3, -1, 0, 1, 6, 7\} \quad (2.62)$$

$$B = \{-4, 1, 3, 5, 6, 7\} \quad (2.63)$$

$$C = \{-5, -3, 1, 2, 3, 5\} \quad (2.64)$$

e, então, compute as seguintes operações:

a)  $A \cap B$

b)  $C \cup B$

c)  $C \setminus A$

d)  $B \cap (A \cup C)$

**Exercício 2.7.3.** O produto cartesiano<sup>28</sup> de um conjunto  $X$  com um conjunto  $Y$  é o seguinte conjunto de pares ordenados

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}. \quad (2.65)$$

Crie um código que aloque os conjuntos

$$X = \{-2, 1, 3\}, Y = \{5, -1, 2\} \quad (2.66)$$

e  $X \times Y$ . Por fim, fornece a quantidade de elementos de  $X \times Y$ .

**Exercício 2.7.4.** A sequência de Fibonacci<sup>29</sup>  $(f_n)_{n \in \mathcal{N}}$  é definida por

$$f_n := \begin{cases} 0 & , n = 0, \\ 1 & , n = 1, \\ f_{n-2} + f_{n-1} & , n \geq 2 \end{cases} \quad (2.67)$$

Crie um código que aloque os 6 primeiros elementos da sequência em um `list` e imprima-o.

**Exercício 2.7.5.** Crie um código que usa de `lists` para alocar os seguintes vetores

$$\mathbf{v} = (-1, 0, 2), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{w} = (3, 1, 2) \quad (2.69)$$

e computar:

a)  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

<sup>28</sup>René Descartes, 1596 - 1650, matemático e filósofo francês. Fonte: [Wikipédia](#).

<sup>29</sup>Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).



b)  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

c)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

d)  $\|\mathbf{v}\|$

e)  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$

**Exercício 2.7.6.** Crie um código que usa de listas encadeadas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

e imprima o determinante de  $A$ , i.e.

$$|A| := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}. \quad (2.71)$$

**Exercício 2.7.7.** Crie um código que use de listas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

e o vetor

$$\mathbf{x} = (-1, 2, 1). \quad (2.73)$$

Na sequência, compute  $A\mathbf{x}$  e imprime o resultado.

## Capítulo 3

# Programação Estruturada

No paradigma de programação estruturada, o programa é organizado em blocos de códigos. Cada bloco tem uma entrada de dados, um processamento (execução de uma tarefa) e produz uma saída.

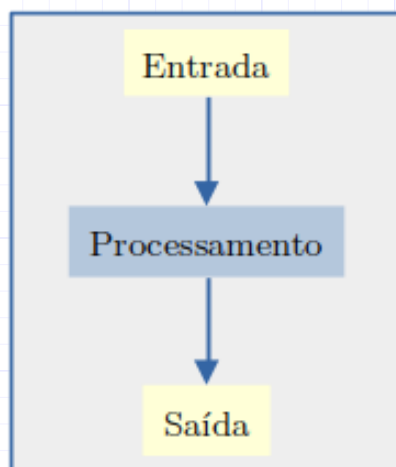


Figura 3.1: Bloco de processamento.

Blocos podem ser colocados em sequência, selecionados com base em condições lógicas, iterados ou colocados dentro de outros blocos (sub-blocos).

## 3.1 Estruturas de um Programa

Para escrever qualquer programa, apenas três estruturas são necessárias: **sequência, seleção/ramificação e iteração.**

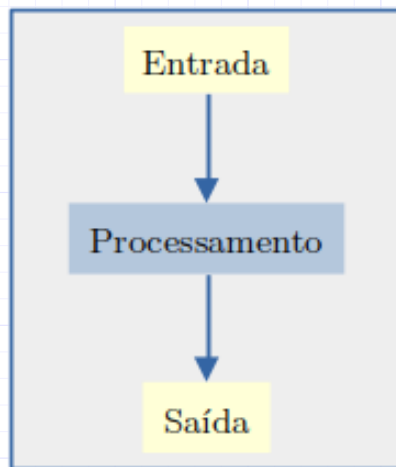


Figura 3.2: Bloco de processamento.

### 3.1.1 Sequência

A estrutura de **sequência** apenas significa que **os blocos de programação são executados em sequência.** Ou seja, a execução de um bloco começa somente após a finalização do bloco anterior.

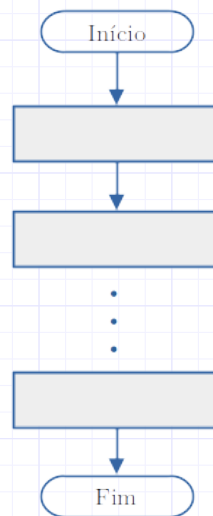


Figura 3.3: Estrutura de sequência de blocos.

**Exemplo 3.1.1.** O seguinte código computa a área do triângulo de base e altura informadas pela(o) usuária(o).

```
1  #início
2
3  # bloco: entrada de dados
4  base = float(input('Digite a base:\n'))
5  altura = float(input('Digite a altura\n'))
6
7  # bloco: computação da área
8  area = base*altura/2
9
10 # bloco: saída de dados
11 print(f'Área = {area}')
```

O código acima está estruturado em três blocos. O primeiro bloco (linhas 3-5) processa a entrada de dados, seu término ocorre somente após a(o) usuária(o) digitar os valores da base e da altura. Na sequência, o bloco (linhas 7-8) faz a computação da área do triângulo e aloca o resultado na

variável `area`. No que este bloco termina seu processamento, é executado o último bloco (linhas 10-11), que imprime o resultado na tela.

### 3.1.2 Ramificação

Estruturas de ramificação permitem a seleção de um mais blocos com base em condições lógicas.

**Exemplo 3.1.2.** O seguinte código lê um número inteiro digitado pela(o) usuária(o) e imprime uma mensagem no caso do número digitado ser par.

```
1  #início
2
3  # entrada de dados
4  n = int(input('Digite um número inteiro:\n'))
5
6  # ramificação
7  if (n%2 == 0):
8      print(f'{n} é par.')
9
10 #término
```

Observamos que, no caso do número digitado não ser par, o programa termina sem nenhuma mensagem ser impressa. Esse é um exemplo de um bloco de ramificação, a instrução de ramificação (linha 7) testa a condição de `n` ser par. Somente no caso de ser verdadeiro, a instrução de impressão (linha 8) é executada. Após a impressão o programa é encerrado. No caso de `n` não ser par, o programa é encerrado sem que a instrução da linha 8 seja executada, i.e. a mensagem não é impressa.

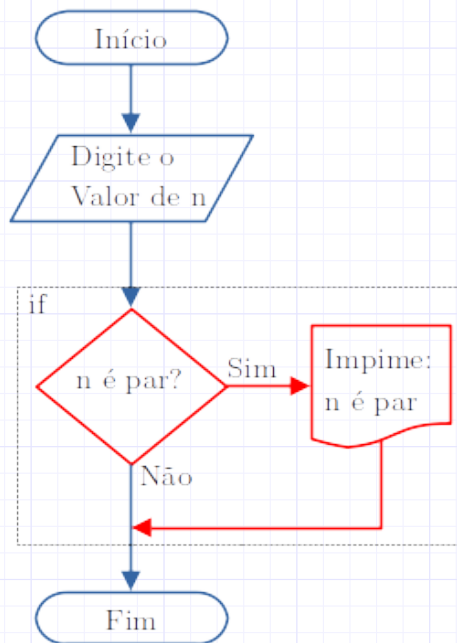


Figura 3.4: Fluxograma de uma estrutura de ramificação.

**Observação 3.1.1.** (Escopo e indentação.) Na linguagem `Python`, a `indentação` indica o **escopo**, i.e. o início e fim do bloco de instruções que pertencem a ramificação. No Exemplo 3.1.2, o escopo da instrução `if` é apenas a linha 8.

### 3.1.3 Repetição

Instruções de repetição permitem que um mesmo bloco seja processado várias vezes em sequência. Em `Python`, há duas instruções de repetição disponíveis: `for` e `while`.

#### `for`

A instrução `for` permite que um bloco seja iterado para cada elemento de uma dada coleção de dados.

**Exemplo 3.1.3.** O seguinte código testa a paridade de cada um dos elementos do conjunto  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .

```
1 #início
2
3 # repetição for
4 for n in {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}:
5     res = (n%2 == 0)
6     print(f'{n} é par? ', res)
7
8 #término
```

A instrução de repetição `for` (linha 4), aloca em `n` um dos elementos do conjunto. Então, executa em sequência o bloco de comandos das linhas 5 e 6. De forma iterada, `n` recebe um novo elemento do conjunto e o bloco das linhas 5 e 6 é novamente executado. A repetição termina quando todos os elementos do conjunto já tiverem sido iterados. O código segue, então, para a linha 7. Não havendo mais instruções, o programa é encerrado.

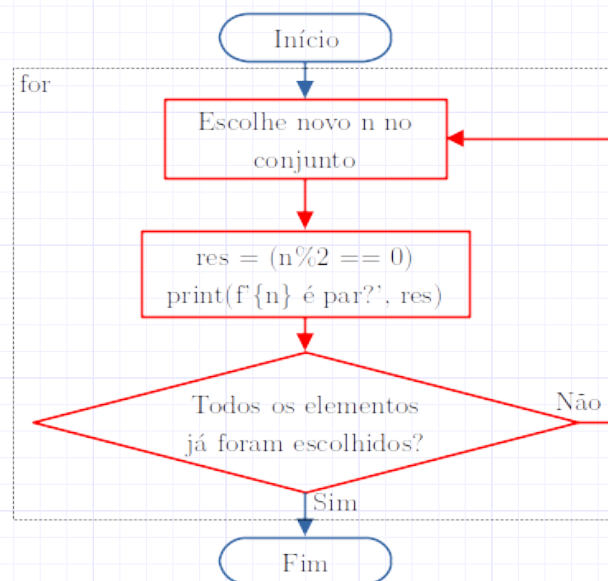


Figura 3.5: Fluxograma de uma estrutura de repetição do tipo `for`.

Assim como no caso de uma instrução de ramificação, o escopo do `for` é definido pela indentação do código. Neste exemplo, o escopo são as linhas 5 e 6.

**while**

A instrução **while**, permite a repetição de um bloco enquanto uma dada condição lógica é satisfeita.

**Exemplo 3.1.4.** O seguinte código testa a paridade dos números inteiros compreendidos de  $-3$  a  $3$ .

```
1  #início
2
3  n = -3
4
5  # repetição: while
6  while (n <= 3):
7      res = (n%2 == 0)
8      print(f'{n} é par?', res)
9      n += 1
10
11 #término
```

A instrução de repetição **while** faz com que o bloco de processamento definido pelas linhas 7-9 seja executado de forma sequencial enquanto o valor de **n** for menor ou igual a 3. No caso dessa condição ser verdadeira, o bloco (linhas 7-9) é executado e, então a condição é novamente verificada. No caso da condição ser falsa, esse bloco não é executado e o código segue para a linha 10. Não havendo mais nenhuma instrução, o programa é encerrado.



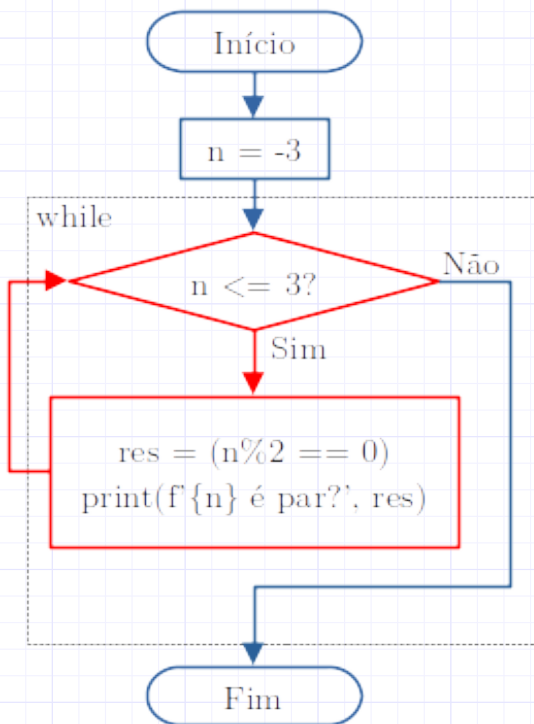


Figura 3.6: Fluxograma da estrutura de repetição do tipo `while` para o Exemplo 3.1.4.

Observamos que, neste exemplo, o escopo da instrução `while` são as linhas 7-9, determinado indentação do código.

### 3.1.4 Exercícios

**Exercício 3.1.1.** Seja a reta de equação

$$y = ax + b. \quad (3.1)$$

Assumindo  $a = 2$  e  $b = -3$ , o seguinte código foi desenvolvido para computar o ponto  $x$  de interseção da desta reta com o eixo das abscissas.

```

1 x = -b/2*a
2 a = 2
  
```

```
3 b = -3
4 print(x)
```

Identifique e explique os erros desse código. Então, apresente uma versão corrigida.

**Exercício 3.1.2.** Seja a reta de equação

$$y = ax + b. \quad (3.2)$$

Faça um fluxograma de um programa em que a(o) usuá(ri)a entra com os valores de  $a$  e  $b$ . No caso de  $a \neq 0$ , o programa computa e imprime o ponto  $x$  da interseção dessa reta com o eixo das abscissas.

**Exercício 3.1.3.** Implemente o código referente ao fluxograma criado no Exercício 3.1.2.

**Exercício 3.1.4.** Faça o fluxograma de um programa que usa de um bloco de repetição `for` para percorrer o conjunto

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (3.3)$$

A cada iteração, o programa imprime `True` ou `False` conforme o elemento seja ímpar ou não.

**Exercício 3.1.5.** Implemente o código referente ao fluxograma criado no Exercício 3.1.4.

**Exercício 3.1.6.** Faça um fluxograma análogo ao do Exercício 3.1.4 que use a instrução de repetição `while` no lugar de `for`.

**Exercício 3.1.7.** Implemente um código referente ao fluxograma criado no Exercício 3.1.6.

## 3.2 Instruções de Ramificação

Instruções de ramificação permitem a seleção de blocos de processamento com base em condições lógicas.

### 3.2.1 Instrução `if`

A instrução de ramificação `if` permite a seleção de um bloco de processamento com base em uma condição lógica.

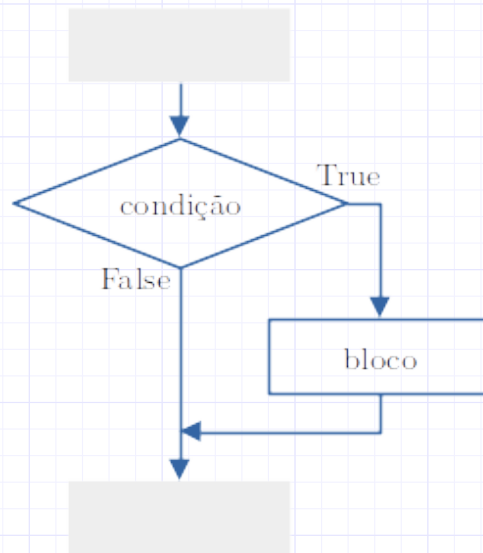


Figura 3.7: Fluxograma de uma ramificação `if`.

Em `Python`, a instrução `if` tem a seguinte sintaxe:

```
1 bloco_anterior
2 if (condição):
3     bloco_0
4 bloco_posterior
```

Se a condição é verdadeira (`True`), o bloco (linha 3) é executado. Caso contrário, este bloco não é executado e o fluxo de processamento salta da linha 2 para a linha 6. O escopo do bloco `if` é determinado pela indentação do código.

**Exemplo 3.2.1.** Seja o polinômio de segundo grau

$$p(x) = ax^2 + bx + c. \quad (3.4)$$

No caso de existirem, o seguinte código computa as raízes distintas de  $p(x)$  para os coeficientes informados pela(o) usuária(o).

```
1  # entrada de dados
2  a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
3  b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
4  c = float(input('Digite o valor de c:\n'))
5
6  # discriminante
7  delta = b**2 - 4*a*c
8
9  # raízes
10 if (delta > 0):
11     # raízes distintas
12     x1 = (-b - delta**0.5)/(2*a)
13     x2 = (-b + delta**0.5)/(2*a)
14     print(f'x_1 = {x1}')
15     print(f'x_2 = {x2}')
```

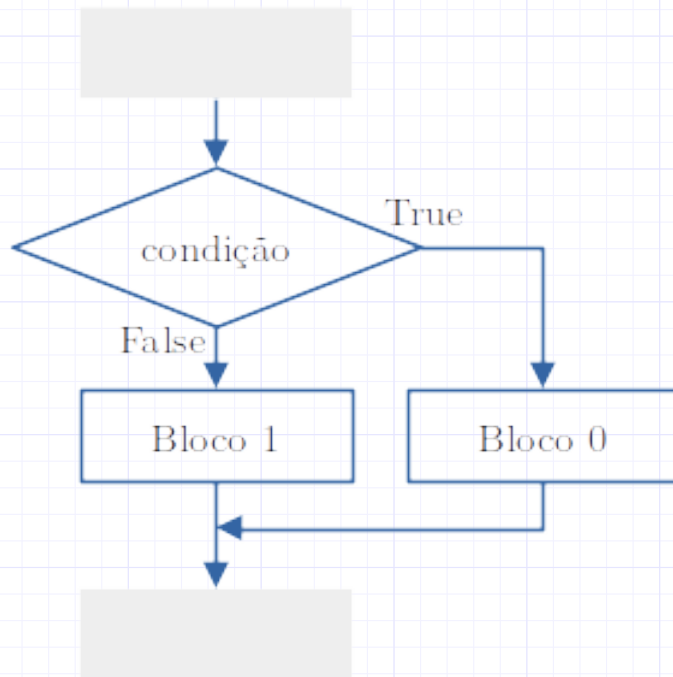
### Escopo de variáveis

O **escopo** de uma variável é a região em que ela permanece alocada. O escopo de variáveis alocadas fora do bloco **if** inclui este bloco, mas variáveis alocadas no bloco **if** não permanecem alocadas fora deste.

**Exemplo 3.2.2.** No Exemplo 3.2.1, o escopo da variável **delta** inicia-se na linha 7 e permanece válido ao longo do resto do programa. Já, o escopo da variável **x1** compreende somente as linhas 12-15 e, análogo para a variável **x2**.

### 3.2.2 Instrução **if-else**

A instrução **if-else** permite a escolha de um bloco ou outro, exclusivamente, com base em uma condição lógica.

Figura 3.8: Fluxograma de uma ramificação `if-else`.

Em `Python`, a instrução `if-else` tem a seguinte sintaxe:

```
1 bloco_anterior
2 if (condição):
3     bloco_0
4 else:
5     bloco_1
6 bloco_posterior
```

Se a condição for verdadeira (`True`) o bloco 0 é executado, senão o bloco 1 é executado.

**Exemplo 3.2.3.** Seja o polinômio de segundo grau

$$p(x) = ax^2 + bx + c. \quad (3.5)$$

Se existirem, o seguinte código computa as raízes reais do polinômio, senão imprime mensagem informado que elas não são reais.

```

1  # entrada de dados
2  a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
3  b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
4  c = float(input('Digite o valor de c:\n'))
5
6  # discriminante
7  delta = b**2 - 4*a*c
8
9  # raízes
10 if (delta >= 0):
11     x1 = (-b - delta**0.5)/(2*a)
12     x2 = (-b + delta**0.5)/(2*a)
13     print(f'x_1 = {x1}')
14     print(f'x_2 = {x2}')
15 else:
16     print('Não tem raízes reais.')
```

### Instrução **if-else** em linha

Por praticidade, **Python** também tem a sintaxe **if-else** em linha:

```
1 x = valor if True else outro_valor
```

**Exemplo 3.2.4.** O valor absoluto de um número real  $x$  é

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

O seguinte código, computa o valor absoluto<sup>1</sup> de um número dado pela(o) usuária(o).

```

1 x = float(input('Digite o valor de x:\n'))
2 abs_x = x if (x>=0) else -x
3 print(f'|x| = {abs_x}')
```

### 3.2.3 Instrução **if-elif**

A instrução **if-elif** permite a seleção condicional de blocos, sem impor a necessidade da execução de um deles.

<sup>1</sup>**Python** tem a função **abs()** que computa o valor absoluto de um número.

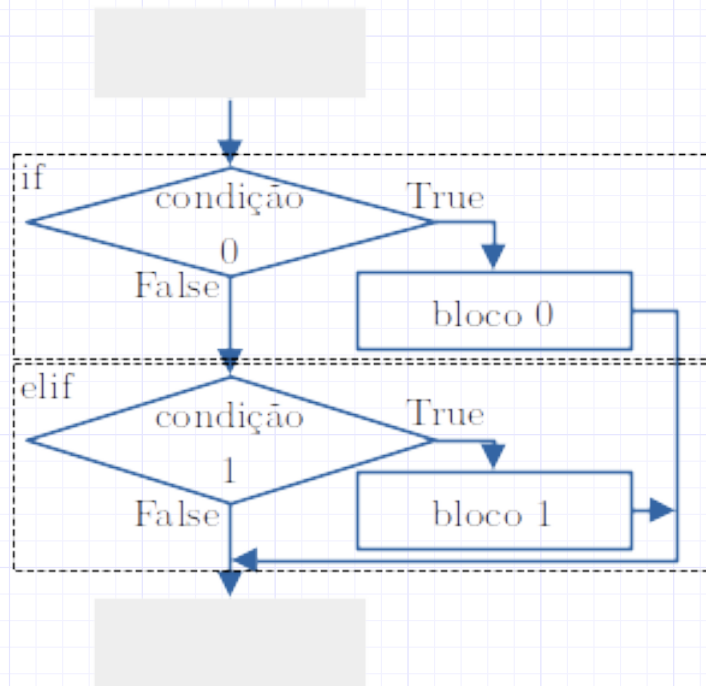


Figura 3.9: Fluxograma de uma ramificação `if-elif`.

Em `Python`, a instrução `if-elif` tem a seguinte sintaxe:

```

1 bloco_anterior
2 if (condição_0):
3     bloco_0
4 elif (condição 1):
5     bloco_1
6 bloco_posterior
  
```

Se a `condição_0` for verdadeira (l`istinline`+`True`+), o `bloco_0` é executado. Senão, se a `condição_1` for verdadeira (`True`) o `bloco_1` é executado. No caso de ambas as condições serem falsas (`False`), os blocos `bloco_0` e `bloco_1` não são executados e o fluxo de processamento segue a partir da linha 6.

**Exemplo 3.2.5.** Seja o polinômio de segundo grau

$$p(x) = ax^2 + bx + c. \quad (3.7)$$

Conforme o caso, o seguinte código computa a raiz dupla do polinômio ou suas raízes reais distintas, a partir dos coeficientes informados pela(o) usuária(o).

```
1 # entrada de dados
2 a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
3 b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
4 c = float(input('Digite o valor de c:\n'))
5
6 # discriminante
7 delta = b**2 - 4*a*c
8
9 # raízes
10 if (delta > 0):
11     x1 = (-b - delta**0.5)/(2*a)
12     x2 = (-b + delta**0.5)/(2*a)
13     print('Raízes reais distintas:')
14     print(f'x_1 = {x1}')
15     print(f'x_2 = {x2}')
16 elif (delta == 0):
17     print('Raiz dupla:')
18     x = -b/(2*a)
19     print(f'x_1 = x_2 = {x}')
```

### 3.2.4 Instrução `if-elif-else`

A instrução `if-elif-else` permite a seleção condicional de blocos, sendo que ao menos um bloco será executado. Em [Python](#), sua sintaxe é:

```
1 bloco_anterior
2 if (condição_0):
3     bloco_0
4 elif (condição_1):
5     bloco_1
6 else:
7     bloco_2
8 bloco_posterior
```

Se a `condição_0` for verdadeira (`True`), então o `bloco_0` é executado. Senão, se a `condição_1` for verdadeira (`True`), então o `bloco_1` é executado. Senão, o `bloco_2` é executado.



**Exemplo 3.2.6.** Seja o polinômio de segundo grau

$$p(x) = ax^2 + bx + c. \quad (3.8)$$

Conforme o caso (raízes reais distintas, raiz dupla ou raízes complexas), o seguinte código computa as raízes desse polinômio, a partir dos coeficientes informados pela(o) usuária(o).

```
1  # entrada de dados
2  a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
3  b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
4  c = float(input('Digite o valor de c:\n'))
5
6  # discriminante
7  delta = b**2 - 4*a*c
8
9  # raízes
10 if (delta > 0):
11     # raízes distintas
12     x1 = (-b - delta**0.5)/(2*a)
13     x2 = (-b + delta**0.5)/(2*a)
14     print('Raízes reais distintas:')
15     print(f'x_1 = {x1}')
16     print(f'x_2 = {x2}')
17 elif (delta == 0):
18     # raiz dupla
19     x = -b/(2*a)
20     print('Raiz dupla:')
21     print(f'x_1 = x_2 = {x}')
22 else:
23     # raízes complexas
24     # parte real
25     rea = -b/(2*a)
26     # parte imaginária
27     img = (-delta)**0.5/(2*a)
28     x1 = rea - img*1j
29     x2 = rea + img*1j
30     print('Raízes complexas:')
31     print(f'x_1 = {x1}')
32     print(f'x_2 = {x2}')
```

### 3.2.5 Múltiplos Casos

Pode-se encadear instruções `if-elif-elif-...-elif[-else]` para a seleção condicional entre múltiplos blocos.

**Exemplo 3.2.7.** Sejam as circunferências de equações:

$$c_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1, \quad (3.9)$$

$$c_2 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_2. \quad (3.10)$$

Conforme entradas dadas por usuá(ri)a, o seguinte código informa se um dado ponto  $(x, y)$  pertence: à interseção dos discos determinados por  $c_1$  e  $c_2$ , apenas ao disco determinado por  $c_1$ , apenas ao disco determinado por  $c_2$  ou a nenhum desses discos.

```
1 # entrada de dados
2 print('c1: (x-a1)**2 + (y-b1)**2 = r1')
3 a1 = float(input('Digite o valor de a1:\n'))
4 b1 = float(input('Digite o valor de b1:\n'))
5 r1 = float(input('Digite o valor de r1:\n'))
6 print('c2: (x-a2)**2 + (y-b2)**2 = r1')
7 a2 = float(input('Digite o valor de a2:\n'))
8 b2 = float(input('Digite o valor de b2:\n'))
9 r2 = float(input('Digite o valor de r2:\n'))
10 print('Ponto de interesse (x,y).')
11 x = float(input('Digite o valor de x:\n'))
12 y = float(input('Digite o valor de y:\n'))
13
14 # pertence ao disco c1?
15 c1 = (x-a1)**2 + (y-b1)**2 <= r1
16 # pertence ao disco c2?
17 c2 = (x-a2)**2 + (y-b2)**2 <= r2
18
19 # imprime resultado
20 if (c1 and c2):
21     print(f'({x}, {y}) pertence à interseção dos discos.')
22 elif (c1):
23     print(f'({x},{y}) pertence ao disco c1.')
24 elif (c2):
25     print(f'({x},{y}) pertence ao disco c2.')
26 else:
27     print(f'({x},{y}) não pertence aos discos.')
```

### 3.2.6 Exercícios

**Exercício 3.2.1.** Seja a equação de reta

$$ax + b = 0. \quad (3.11)$$

Dados coeficientes  $a \neq 0$  e  $b$  informados por usuário(o), crie um código que imprime o ponto de interseção dessa reta com o eixo das abscissas. O código não deve tentar computar o ponto no caso de  $a = 0$ .

**Exercício 3.2.2.** Considere o seguinte código.

```
1 n = int(input('Digite um número inteiro:\n'))
2 if (n % 2 == 0):
3     m = 1
4 n = n + m
5 print(n)
```

A ideia é que, se  $n$  for ímpar, o código imprime  $n$ , caso contrário, imprime  $n + 1$ . Este código contém erro. Identifique e explique-o, então proponha uma versão funcional.

**Exercício 3.2.3.** Considere o seguinte algoritmo/pseudocódigo para verificar se um dado número inteiro  $n$  é par ou ímpar.

0. Início.
1. Usuário(o) informa o valor inteiro  $n$ .
2. Se o resto da divisão de  $n$  por 2 for igual a zero, então faça:
  - 2.1. Imprime a mensagem: “ $n$  é par.”.
3. Senão, faça:
  - 3.1 Imprime a mensagem: “ $n$  é ímpar”.
4. Fim.

Faça um fluxograma para esse algoritmo e implemente-o.

**Exercício 3.2.4.** Considere a equação da circunferência

$$c : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (3.12)$$

Com dados informados por usuária(o), desenvolva um código que informe se um dado ponto  $(x, y)$  pertence ou não ao disco determinado por  $c$ .

**Exercício 3.2.5.** Sejam informadas por usuária(o) os coeficientes das retas

$$r_1 : a_1x + b_1 = 0, \quad (3.13)$$

$$r_2 : a_2x + b_2 = 0. \quad (3.14)$$

Crie um código que informe se as retas são paralelas. Caso contrário, o código imprime o ponto de interseção delas.

**Exercício 3.2.6.** Refaça o código do Exercício 3.2.5 de forma a incluir o caso em que as retas sejam coincidentes. Ou seja, o código deve informar os seguintes casos: retas paralelas não coincidentes, retas coincidentes ou, caso contrário, ponto de interseção das retas.

**Exercício 3.2.7.** Sejam a parábola de equação

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (3.15)$$

e a reta

$$b_1x + b_2 = 0. \quad (3.16)$$

Conforme os coeficientes dados por usuária(o), desenvolva um código que imprime o(s) ponto(s) de interseção da reta com a parábola. O código deve avisar os casos em que: há apenas um ponto, há dois pontos ou não há ponto de interseção.

**Exercício 3.2.8.** Com dados informados por usuária(o), sejam as circunferências de equações

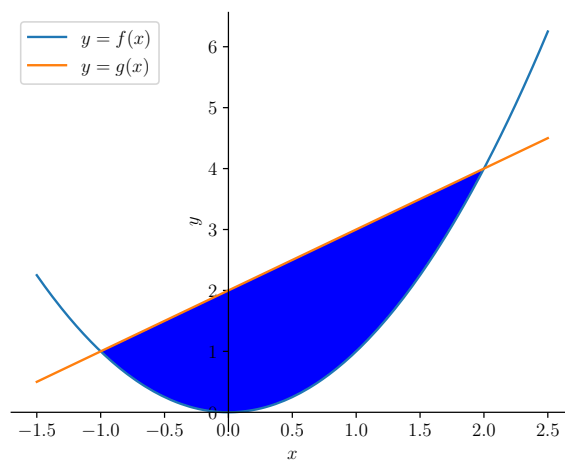
$$c_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2, \quad (3.17)$$

$$c_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2. \quad (3.18)$$

Desenvolva um código que informe a(o) usuária(o) dos seguintes casos:  $c_1$  e  $c_2$  são coincidentes,  $c_1 \cap c_2$  tem dois pontos,  $c_1 \cap c_2$  tem somente um ponto,  $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ .

**Exercício 3.2.9.** Crie uma calculadora simples. A(o) usuária(o) entra com dois números decimais  $x$  e  $y$  e uma das seguintes operações:  $+$ ,  $-$ ,  $*$  ou  $/$ . Então, o código imprime o resultado da operação.

**Exercício 3.2.10.** Informado um ponto  $P = (x, y)$  por usuária(o), desenvolva um código que verifique se  $P$  está entre as curvas  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$  e  $y = x + 2$ . Consulte a figura abaixo.



**Exercício 3.2.11.** Considere um polinômio da forma

$$p(x) = (x - a)(bx^2 + cx + d). \quad (3.19)$$

Desenvolva um código para a computação das raízes de  $p(x)$ , sendo os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  (números decimais) informados por usuária(o).

### 3.3 Instruções de Repetição

Estruturas de repetição permitem a execução de um bloco de código várias vezes. O número de vezes que o bloco é repetido pode depender de uma condição lógica (instrução `while`) ou do número de itens de um objeto iterável (instrução `for`).

### 3.3.1 Instrução `while`

A instrução `while` permite a repetição condicional de um bloco de código.

Em `Python`, sua sintaxe é

```
1 bloco_anterior
2 while condição:
3     bloco
4 bloco_posterior
```

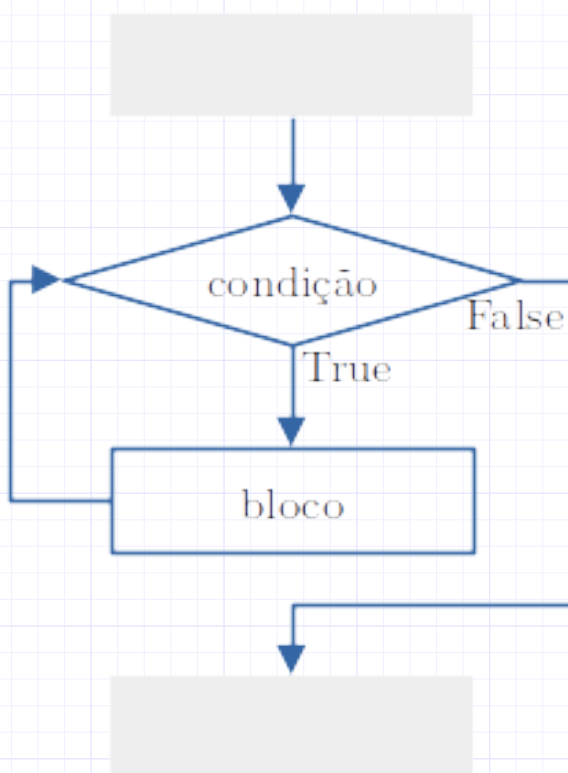


Figura 3.10: Fluxograma da estrutura de repetição `while`.

**Exemplo 3.3.1.** (Somatório com `while`.) O seguinte código, computa o somatório

$$s = \sum_{i=1}^n i \quad (3.20)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n. \quad (3.21)$$

```

1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2
3 soma = 0
4 i = 1
5 while (i <= n):
6     soma = soma + i
7     i = i + 1
8
9 print(f'1 + ... + {n} = {soma}')
```

**Exemplo 3.3.2.** (Aproximando a  $\sqrt{x}$ .) O método de Heron<sup>2</sup> é um algoritmo para o cálculo aproximado da raiz quadrada de um dado número  $x$ , i.e.  $\sqrt{x}$ . Consiste na iteração<sup>3</sup>

$$r^{(0)} = 1, \quad (3.22)$$

$$r^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left( r^{(k)} + \frac{x}{r^{(k)}} \right), \quad (3.23)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , onde  $n$  é o número de iterações calculadas. Para  $x \geq 0$  fornecido por usuá(ri)a(o), o seguinte código computa a aproximação  $r^{(5)} \approx \sqrt{x}$ .

```

1 x = float(input('Digite um número não negativo para x:\n'))
2 r = 1
3 k = 0
4 print(f'{k}: {r}')
5 while (k < 5):
6     r = 0.5*(r + x/r)
7     k = k + 1
8     print(f'{k}: {r}')
9 print(f'sqrt({x}) = {r}')
```

**break**

A instrução **break** permite interromper um bloco de repetição e sair dele no momento em que ela é alcançada.

<sup>2</sup>Heron de Alexandria, 10 - 80, matemático e inventor grego. Fonte: [Wikipédia](#).

<sup>3</sup>Aqui, assumimos a aproximação inicial  $s^{(0)} = 1$ , mas qualquer outro número não negativo pode ser usado.

**Exemplo 3.3.3.** No Exemplo 3.3.2, podemos observar que as aproximações  $s^{(k)} \approx \sqrt{x}$  vão se tornando muito próximas umas das outras conforme as iterações convergem. Dessa observação, faz sentido que interrompamos as computações no momento em que a  $k + 1$ -ésima iterada satisfaça

$$|r^{(k+1)} - r^{(k)}| < \text{tol} \quad (3.24)$$

para alguma tolerância `tol` desejada.

```
1 max_iter = 50
2 tol = 1e-15
3
4 x = float(input('Digite um número não negativo para x:\n'))
5
6 r0 = 1
7 k = 0
8 print(f'{k}: {r}')
9 while (k < max_iter):
10     k = k + 1
11     r = 0.5*(r0 + x/r0)
12     print(f'{k}: {r}')
13     if (abs(r-r0) < tol):
14         break
15     r0 = r
16 print(f'sqrt({x}) = {r}')
```

### 3.3.2 Instrução `for`

A instrução `for` iteração de um bloco de código para todos os itens de um dado objeto. Em `Python`, sua sintaxe é

```
1 bloco_anterior
2 for x in Iterável:
3     bloco
4 bloco_posterior
```

Pode-se percorrer qualquer objeto iterável (`set`, `tuple`, `list`, `dict`, etc.). Em cada iteração, o índice `x` toma um novo item do objeto. A repetição termina quando todos os itens do objeto tiverem sido escolhidos. No caso de iteráveis ordenados (`tuple`, `list`, `dict`, etc.), os itens são iterados na mesma ordem em que estão alocados no objeto.



**Exemplo 3.3.4.** O seguinte código, computa a média aritmética do conjunto de números

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad (3.25)$$

```
1 soma = 0
2 for x in {1,3,5,7,9}:
3     soma = soma + x
4 media = soma/5
5 print(f'média = {media}')
```

### range

A função `range([start], stop, [step])`, retorna uma sequência iterável de números inteiros, com início em `start` (padrão `start=0`), passo `step` (padrão `step=1`) e limite em `stop`.

**Exemplo 3.3.5.** Estudamos os seguinte casos:

a) Imprime, em ordem crescente, os primeiros 11 números naturais.

```
1 for i in range(11):
2     print(i)
```

b) Imprime, em ordem crescente, os números naturais contidos de 3 a 13, inclusive.

```
1 for i in range(3,14):
2     print(i)
```

c) Imprime, em ordem crescente, os números naturais ímpares contidos de 3 a 13, inclusive.

```
1 for i in range(3,14,2):
2     print(i)
```

d) Imprime, em ordem decrescente, os números naturais contidos de 13 a 3, inclusive.

```
1 for i in range(13,2,-1):
2     print(i)
```

**Exemplo 3.3.6.** (Somatório com `for`.) No Exemplo 3.3.1, computados

$$s = \sum_{i=1}^n i \quad (3.26)$$

usando um laço `while`. Aqui, apresentamos uma nova versão do código com a instrução `for`.

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 soma = 0
3 for i in range(1,n+1):
4     soma = soma + i
5 print(f'1 + ... + {n} = {soma}')
```

**Exemplo 3.3.7.** No Exemplo 3.3.3, apresentamos um código para o cálculo aproximado de  $\sqrt{x}$  pelo Método de Heron. Aqui, temos uma nova versão com a instrução `for` no lugar do laço `while`.

```
1 max_iter = 50
2 tol = 1e-15
3
4 x = float(input('Digite um número não negativo para x:\n'))
5
6 r0 = 1
7 k = 0
8 print(f'{k}: {r}')
9 for k in range(max_iter):
10     r = 0.5*(r0 + x/r0)
11     print(f'{k+1}: {r}')
12     if (abs(r-r0) < tol):
13         break
14     r0 = r
15 print(f'sqrt({x}) = {r}')
```

### 3.3.3 Exercícios

**Exercício 3.3.1.** Faça o fluxograma do código apresentado no Exemplo 3.3.1. Também, desenvolva uma versão melhorada do código, que verifica se o valor de  $n$  digitado pela(o) usuária(o) é não negativa. Caso afirmativo, computa o somatório, noutro caso apenas imprime mensagem de que  $n$  deve ser não negativo.

**Exercício 3.3.2.** Faça um fluxograma para o código apresentado no Exemplo 3.3.4.

**Exercício 3.3.3.** Crie um objeto do tipo `range` para cada uma das seguintes sequências:

1. Sequência crescente de todos os números inteiros de 0 até 99, inclusive.
2. Sequência crescente de todos os números pares de  $-5$  até 15.
3. Sequência decrescente de todos os números de 100 a 0, inclusive.
4. Sequência decrescente de todos os números múltiplos de 3 entre 17 e  $-3$ .

**Exercício 3.3.4.** Considere o somatório entre dois números inteiros  $n \leq m$

$$s = \sum_{i=n}^m i \quad (3.27)$$

$$= n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + m \quad (3.28)$$

Com números informados pela(o) usuária(o), escreva duas versões de códigos para a computação desse somatório:

- a) Usando a instrução `while`.
- b) Usando a instrução `for`.

**Exercício 3.3.5.** A *série harmônica* é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (3.29)$$

Com  $n$  fornecido por usuária(o), crie códigos que computem o valor da soma harmônica

$$s = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (3.30)$$

- a) Use uma estrutura de repetição `while`.
- b) Use uma estrutura de repetição `for`.

**Exercício 3.3.6.** O cálculo do logaritmo natural pode ser feito pela seguinte série de potências

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (3.31)$$

Desenvolva um código que compute a aproximação do  $\ln(2)$  dada por

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (3.32)$$

com  $n \geq 1$  número inteiro fornecido por `usuária(o)`.

- Use uma estrutura de repetição **while**.
- Use uma estrutura de repetição **for**.

**Exercício 3.3.7.** O **fatorial** de um número natural é definido pelo **produtório**

$$n! := \prod_{k=1}^n k \quad (3.33)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n \quad (3.34)$$

e  $0! := 1$ . Com  $n$  informado por `usuária(o)`, crie códigos para computar  $n!$  usando:

- uma estrutura de repetição **while**.
- uma estrutura de repetição **for**.

**Exercício 3.3.8.** O **número de Euler**<sup>4</sup> é tal que

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (3.36)$$

Com  $n$  fornecido por `usuária(o)`, desenvolva um código que computa a aproximação

$$e \approx e^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}. \quad (3.37)$$

<sup>4</sup>Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

Qual o número  $n$  tal que  $|e^{(n)} - e^{(n-1)}| < 10^{-15}$ ?

**Exercício 3.3.9.** Com  $n \geq 1$  número natural fornecido por usuá(ri)a, crie um código que verifique se  $n$  é um **número primo**.

# Capítulo 4

## Funções

Uma **função** (ou método) é um **subprograma** (ou subalgoritmo), um bloco de programação para o processamento de uma tarefa e que pode ser chamado à execução, sempre que necessário, pelo programa a que pertence.

### 4.1 Funções Predefinidas e Módulos

#### 4.1.1 Funções Predefinidas

Como o nome indica, **funções predefinidas** são aquelas disponíveis por padrão na linguagem de programação, i.e. sem a necessidade de serem explicitamente definidas no código. As **funções predefinidas do Python** podem ser consultadas em

<https://docs.python.org/3/library/functions.html>

Nós já vínhamos utilizando várias dessas funções.

#### Entrada e Saída de Dados

Na entrada e saída de dados, utilizamos

- **input()**

Essa função lê uma linha digitada no *prompt*, converte-a em uma *string* e a retorna. Admite como entrada uma *string* que é impressa no *prompt*

Notas de Aula - Pedro Konzen \*/\* Licença CC-BY-SA 4.0

antes da leitura.

- `print()`

Essa função recebe um objeto e o imprime em formato texto, por padrão, no *prompt* de saída.

```
1 >>> s = input('Olá, qual o seu nome? ')
2 Olá, qual o seu nome? Fulane
3 >>> print(f'Bem vinde, {s}!')
4 Bem vinde, Fulane!
```

## Construtores de Dados

Temos as funções que constroem objetos de classes de números:

- `bool()`

Recebe um objeto e retorna outro da classe `bool`.

```
1 >>> bool(0)
2 False
3 >>> bool(1)
4 True
5 >>> bool('')
6 False
7 >>> bool('0')
8 True
```

- `int()`

Recebe um número ou *string* `x` e retorna um objeto da classe `int`.

```
1 >>> int(-2.1)
2 -2
3 >>> int(3.9)
4 3
5 >>> int(5.5)
6 5
7 >>> int('51')
8 51
```

- `float()`

Recebe um número ou *string* *x* e retorna um objeto da classe `float`.

```
1 >>> float(1)
2 1.0
3 >>> float('-2.7')
4 -2.7
```

- `complex()`

Recebe as partes real e imaginária de um número complexo ou uma *string* e retorna um objeto da classe `complex`.

```
1 >>> complex(2,-3)
2 (2-3j)
3 >>> complex('-7+5j')
4 (-7+5j)
```

Para a construção de objetos de classes de coleção de dados, temos:

- `dict()`

Recebe um mapeamento ou um iterável e retorna um objeto da classe `dict`.

- `list()`

Recebe um iterável e retorna um objeto da classe `list`.

- `set()`

Recebe um iterável e retorna um objeto da classe `set`.

- `str()`

Recebe um objeto e retorna um outro da classe `str`

- `tuple`

Recebe um iterável e retorna um objeto da classe `tuple`.

Alguns construtores de iteráveis especiais são:

- `range()`

Recebe até três inteiros `start`, `stop`, `step` e retorna um objeto iterável com início em `start` (incluído) e término em `stop` (excluído).



```
1 >>> list(range(5))
2 [0, 1, 2, 3, 4]
3 >>> tuple(range(-10,1,2))
4 (-10, -8, -6, -4, -2, 0)
```

- `enumerator()`

Recebe um iterável e retorna um objeto `enumerate`, um iterável de tuples que enumera os objetos do iterável de entrada.

```
1 >>> cores = ['amarelo', 'azul', 'vermelho', ]
2 >>> list(enumerate(cores))
3 [(0, 'amarelo'), (1, 'azul'), (2, 'vermelho')]
```

## 4.1.2 Módulos

Módulos são bibliotecas computacionais, i.e. um arquivo contendo funções (e/ou constantes) que podem ser incorporadas e usadas em outros programas. Existem vários módulos disponíveis na linguagem `Python`, para citar alguns:

- `math`: módulo de matemática elementar.
- `random`: módulo de números randômicos.
- `numpy`: módulo de computação matricial.
- `matplotlib`: módulo de visualização gráfica.
- `sympy`: módulo de matemática simbólica.
- `torch`: módulo de aprendizagem de máquina.

Nesta seção vamos apenas introduzir o módulo `math`. Mais a frente, também fazemos uma introdução aos módulos `numpy` e `matplotlib`.

### Módulo `math`

O módulo `math` fornece acesso a constantes e funções matemáticas elementares para números reais. Para **importar o módulo** em nosso código, podemos usar a instrução `import`. Por exemplo,

```
1 >>> import math
2 >>> help(math)
```

Então, para usar algum recurso do módulo usamos `math.` seguido do nome do recurso que queremos. Por exemplo,

```
1 >>> math.e
2 2.718281828459045
```

retorna o número de Euler<sup>1</sup> em ponto flutuante.

Alternativamente, podemos importar o módulo com o nome que quisermos. Por padrão, usa-se

```
1 >>> import math as m
2 >>> m.pi
3 3.141592653589793
```

Ainda, pode-se importar apenas um ou mais recursos específicos, por exemplo<sup>2</sup>

```
1 >>> from math import pi, sin, cos
2 >>> sin(pi)**2 + cos(pi) == 1
3 False
```

**Exemplo 4.1.1.** Considere um polinômio de segundo grau da forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c. \quad (4.1)$$

O seguinte código, computa as raízes de  $p$  para valores dos coeficientes fornecidos por usuário(o).

```
1 import math as m
2
3 # entrada de dados
4 a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
5 b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
6 c = float(input('Digite o valor de c:\n'))
7
8 # discriminante
9 delta = b**2 - 4*a*c
10
11 # raízes
```

---

<sup>1</sup>Leonhard Paul Euler, 1707-1783, matemático e físico suíço. Fonte: [Wikipédia](#).

<sup>2</sup>☺

```
12 # raízes distintas
13 if (delta > 0):
14     x1 = (-b + m.sqrt(delta))/(2*a)
15     x2 = (-b - m.sqrt(delta))/(2*a)
16 # raiz dupla
17 elif (delta == 0):
18     x1 = -b/(2*a)
19     x2 = x1
20 # raízes complexas
21 else:
22     real = -b/(2*a)
23     img = m.sqrt(-delta)/(2*a)
24     x1 = complex(real, img)
25     x2 = x1.conjugate()
26
27 print(f'x1 = {x1}')
28 print(f'x2 = {x2}')
```

### 4.1.3 Exercícios

**Exercício 4.1.1.** Desenvolva um código que computa e imprime a hipotenusa  $h$  de um triângulo retângulo com catetos  $a$  e  $b$  fornecidos por usuário(o).

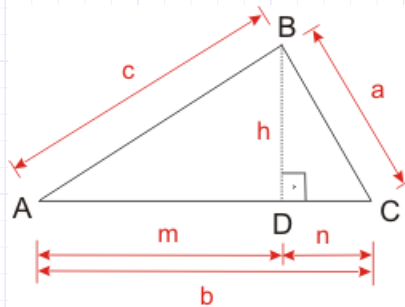
**Exercício 4.1.2.** Um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , existe se

$$|b - c| < a < b + c. \quad (4.2)$$

Desenvolva um código que verifica e informa a existência de um triângulo de lados fornecidos por usuário(o).

**Exercício 4.1.3.** Considere um triângulo com as seguintes medidas

Notas de Aula - Pedro Konzen \*/\* Licença CC-BY-SA 4.0



Desenvolva um código que computa e imprime o valor da área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  fornecidos por usuá(ri)a(o).

**Exercício 4.1.4.** Desenvolva um código em que a(ri)o usuá(ri)a forneça um ângulo  $\theta$  em graus e seja computado e impresso os  $\sin(\theta)$  e  $\cos(\theta)$ .

**Exercício 4.1.5.** Desenvolva um jogo em que a(ri)o usuá(ri)a(o) tenha três tentativas para adivinhar um número inteiro entre 0 a 51 (incluídos).

# Resposta dos Exercícios

**Exercício 2.1.1.** Dica: Em [Linux](#), \$ `uname --all` ou \$ `cat /etc/version`.

**Exercício 2.1.2.** Dica: Em [Linux](#): \$ `lshw`

**Exercício 2.1.3.** Dica: cada computador tem sua forma de acessar a BIOS. Verifique o manual ou busque na internet pela marca e modelo de seu computador.

**Exercício 2.1.4.**

```
1 >>> print('Olá, meu Python!')
2 Olá, meu Python!
3 >>>
```

**Exercício 2.1.6.** Dica: use um notebook online [Google Colab](#), [Kaggle](#) ou [Jupyter](#).

**Exercício 2.2.9.** Dica: o *bug* ocorre quando  $x = 0$ .

**Exercício 2.3.1.** a) `area`; b) `perimetroQuad`; c) `somaCatetos`; d) `numElemA`; e) `lados77`; f) `fx`; g) `x2`; h) `xv13`

**Exercício 2.3.2.**

```
1 base = float(input('Informe o valor da base.\n'))
2 altura = float(input('Informe o valor da altura.\n'))
```

```
3 # cálculo da área
4 area = base * altura / 2
5 print(f'Área = {area}')
```

**Exercício 2.3.3.** Erro: variável  $X$  não foi definida.

```
1 x = 1
2 y = x + 1
```

**Exercício 2.3.5.**

```
1 x = 1
2 y = 2
3 z = y
4 y = x
5 x = z
6 print(x, y)
7 2 1
```

**Exercício 2.4.1.**

```
1 a = 2
2 b = 8
3 x = b/(2*a)
4 print("x = ", x)
```

**Exercício 2.4.2.** Erro na linha 3. As operações não estão ocorrendo na precedência correta para fazer a computação desejada. Correção:  $x = b/(2*a)$ .

**Exercício 2.4.3.**

```
1 x = 3
2 y = 9
3 media = (x + y)/2
4 print('média = ', media)
```

**Exercício 2.4.4.**

```
1 notaTrabalho = 8.5
2 notaProva = 7
3 notaFinal = (notaTrabalho*3 + notaProva*7)/10
4 print('Nota final = ', notaFinal)
```

**Exercício 2.4.5.**

```
1 a = 2
2 b = -2
3 c = -12
4 delta = b**2 - 4*a*c
5 x1 = (-b - delta**(1/2))/(2*a)
6 print('x1 = ', x1)
7 x2 = (-b + delta**(1/2))/(2*a)
8 print('x2 = ', x2)
```

**Exercício 2.4.6.** Dica: seu sistema operacional deve ter um gerenciador de tarefas, um *software* que nos permite controlar a execução dos programas em execução. Este gerenciador muitas vezes também informa o estado de utilização da memória computacional. No Linux, pode-se usar o programa `top` ou o `htop`.

**Exercício 2.4.7.** a)  $7 \times 10^2$ , `>>> 7e2`; b)  $7 \times 10^{-2}$ , `7e-2`; c)  $2,8 \times 10^6$ , `2.8e6`; d)  $1.9 \times 10^{-5}$ , `1.9e-5`

**Exercício 2.4.8.** a) 0.0028; b) 87120; c)  $0,\bar{3}$

**Exercício 2.4.9.** a)  $5,3 \times 10^3$ ;

```
1 >>> x = 5e3 + 3e2
2 >>> print(f'{x:e}')
3 5.300000e+03
```

b)  $8 \times 10^{-2}$

```
1 >>> x = 8.1e-2 - 1e-3
2 >>> print(f'{x:e}')
```

c)  $1,4 \times 10^3$

```
1 >>> x = 7e4 * 2e-2
2 >>> print(f'{x:e}')
3 1.400000e+03
```

d)  $3,5 \times 10^{-6}$

```
1 >>> x = 7e-4 / 2e2
2 >>> print(f'{x:e}')
3 3.500000e-06
```

**Exercício 2.4.10.** a)  $3 + 7i$

```
1 >>> (1+8j) + (2-1j)
2 (3+7j)
```

b)  $5i$

```
1 >>> (1+2j) - (1-3j)
2 5j
```

c)  $-2 + 16i$

```
1 >>> (2-3j) * (-4+2j)
2 (-2+16j)
```

d)  $-2 - 2i$

```
1 >>> (1-1j)**3
2 (-2-2j)
```

**Exercício 2.4.11.**

```
1 lado = 0.575
2 area = lado**2
3 print(f'área = {area:f}')
```

**Exercício 2.4.12.**

```
1 lado = 2
2 diag = lado*2**(1/2)
3 print(f'diagonal = {diag:e}')
```



**Exercício 2.4.13.**

```
1 # parametros
2 a1 = 1
3 a2 = -1
4 b1 = 1
5 b2 = -1
6 # ponto x de interseção
7 x_intercep = (b2-b1)/(a1-a2)
8 # ponto y de interseção
9 y_intercep = a1*x_intercep + b1
10 # imprime o resultado
11 print(f'x_i = {x_intercep:e}')
12 print(f'y_i = {y_intercep:e}')
```

**Exercício 2.5.1.** a)  $1 - 6 > -6$  b)  $3/2 < 4/3$  c)  $31.415e-1 == 3.1415$  d)  $2.7128 >= 2$   $2/3 + e) 3/2$   $7/8 <= (24 + 14)/16 +$

**Exercício 2.5.2.**

```
1 x = 3
2 print('É par?')
3 print(x % 2 == 0)
```

**Exercício 2.5.3.**

```
1 # quadrado
2 ladoQuad = 1
3 areaQuad = ladoQuad**2
4
5 # aprox pi
6 pi = 3.14159
7
8 # circunferência
9 raioCirc = 1
10 areaCirc = pi * raioCirc**2
11
12 # verifica
13 resp = areaQuad < areaCirc
14 print('Área do quadrado é menor que da circunferência?')
```

```
15 print(resp)
```

**Exercício 2.5.4.**

```
1 # ponto
2 x = 2
3 y = 0.5
4
5 # y >= 0 e y <= f(x) ?
6 resp1 = y >= 0 and y <= (x-1)**3
7 # y >= f(x) e y <= 0 ?
8 resp2 = y >= (x-1)**3 and y <= 0
9
10 # conclusão
11 print("O ponto está entre as curvas?")
12 print(resp1 or resp2)
```

**Exercício 2.5.5.** a) V; b) F; c) V; d) V; e) F

**Exercício 2.5.6.** (A or B) and not(A and B)

**Exercício 2.6.1.** a) x[3]; b) x[:4]; c) x[1::2]; d) [-2:2:-2]

**Exercício 2.6.2.** trator

**Exercício 2.6.3.**

```
1 s = input('Digite uma palavra:\n\t')
2 print(f'A palavra {s} tem {len(s)} letras.')
```

**Exercício 2.6.4.**

```
1 lado = float(input('Digite o lado (em cm) do quadrado:\n\t'))
2 area = lado**2/100**2
3 print(f'O quadrado de lado {lado:e} cm tem área {area:.2f} m.')
```

**Exercício 2.6.5.**

```
1 x = int(input('Digite um número inteiro:\n'))
2 y = int(input('Digite outro número inteiro:\n'))
3 print(f'{x} é divisível por {y}?')
4 print(f'{x%y==0}')
```

**Exercício 2.7.1.**

```
1 A = {1,4,7}
2 B = {1,3,4,5,7,8}
3 # a)
4 a = A >= B
5 print(f"a) A>=B: {a}")
6 # b)
7 b = A <= B
8 print(f"b) A<=B: {b}")
9 # c)
10 c = not(B >= A)
11 print(f"c) not(A>=B): {c}")
12 # d)
13 d = A < B
14 print(f"d) A<B: {d}")
```

**Exercício 2.7.2.**

```
1 A = {-3,-1,0,1,6,7}
2 B = {-4,1,3,5,6,7}
3 C = {-5,-3,1,2,3,5}
4 # a)
5 a = A & B
6 print(f"a)\n A&B = {a}")
7 # b)
8 b = C | B
9 print(f"b)\n A|B = {b}")
10 # c)
11 c = C - A
12 print(f"c)\n C-A = {c}")
13 # d)
14 d = B & (A | C)
15 print(f"d)\n B&(A|C) = {d}")
```

**Exercício 2.7.3.**

```
1 X = {-2,1,3}
2 Y = {5,-1,2}
3 XxY = {(-2,5), (-2,-1), (-2,2), \
4       (1,5), (1,-1), (1,2), \
5       (3,5), (3,-1), (3,2)}
6 print(f'#(X x Y) = {len(XxY)}')
```

**Exercício 2.7.4.**

```
1 a = [0,1]
2 a.append(a[0]+a[1])
3 a.append(a[1]+a[2])
4 a.append(a[2]+a[3])
5 a.append(a[3]+a[4])
6 print(a)
```

**Exercício 2.7.5.**

```
1 v = [-1, 0, 2]
2 w = [3, 1, 2]
3 # a)
4 vpw = [v[0] + w[0],
5        v[1] + w[1],
6        v[2] + w[2]]
7 print(f'a) v+w = {vpw}')
8 # b)
9 vmw = [v[0] - w[0],
10        v[1] - w[1],
11        v[2] - w[2]]
12 print(f'b) v-w = {vmw}')
13 # c)
14 vdw = v[0]*w[0] + \
15        v[1]*w[1] + \
16        v[2]*w[2]
17 print(f'c) v.w = {vdw}')
18 # d)
19 norm_v = (v[0]**2 + \
20           v[1]**2 + \
```

```
21         v[2]**2)**0.5
22 print(f'd) ||v|| = {norm_v:.2f}')
23 # e)
24 norm_vmw = (vmw[0]**2 + \
25             vmw[1]**2 + \
26             vmw[2]**2)**0.5
27 print(f'e) ||v-w|| = {norm_vmw:.2f}')
```

**Exercício 2.7.6.**

```
1 A = [[1, -1],
2       [2, 3]]
3 detA = A[0][0]*A[1][1] \
4        - A[0][1]*A[1][0]
5 print(f'|A| = {detA}')
```

**Exercício 2.7.7.**

```
1 A = [[1, -1, 2],
2       [2, 0, -3],
3       [3, 1, -2]]
4 x = [-1, 2, 1]
5 Ax = [A[0][0]*x[0] + A[0][1]*x[1] + A[0][2]*x[2],
6        A[1][0]*x[0] + A[1][1]*x[1] + A[1][2]*x[2],
7        A[2][0]*x[0] + A[2][1]*x[1] + A[2][2]*x[2]]
8 print(f'Ax = {Ax}')
```

**Exercício 3.1.1.**

```
1 a = 2
2 b = -3
3 x = -b/a
4 print(x)
```

**Exercício 3.1.2.** Dica: consulte o Exemplo 3.1.2.**Exercício 3.1.3.**

```
1 a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
2 b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
3 if (a != 0):
4     x = -b/(2*a)
5     print(f'Ponto de interseção com o eixo x = {x}')
```

**Exercício 3.1.4.** Dica: consulte o Exemplo 3.1.3.

**Exercício 3.1.5.**

```
1 A = {-4, -3, -2, -1, \
2     0, 1, 2, 3, 4}
3 for x in A:
4     res = (x % 2 != 0)
5     print(f'{x} é ímpar? {res}')
```

**Exercício 3.1.6.** Dica: consulte o Exemplo 3.1.4.

**Exercício 3.1.7.**

```
1 A = {-4, -3, -2, -1, \
2     0, 1, 2, 3, 4}
3 n = -4
4 while (n <= 4):
5     res = (n % 2 != 0)
6     print(f'{n} é ímpar? {res}')
```

**Exercício 3.2.1.**

```
1 # entrada de dados
2 a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
3 b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
4
5 # computação
6 if (a != 0):
7     x = -b/a
8     y = a*x + b
9     print(f'Intercepta eixo-x em: ({x}, {y}).')
```

**Exercício 3.2.2.**

```
1 n = int(input('Digite um número inteiro:\n'))
2 m = 0
3 if (n % 2 == 0):
4     m = 1
5 n = n + m
6 print(n)
```

**Exercício 3.2.4.**

```
1 # entrada de dados
2 print('Circunferência c:')
3 a = float(input('Digite o valor de a:\n'))
4 b = float(input('Digite o valor de b:\n'))
5 r = float(input('Digite o valor de r:\n'))
6 print('Ponto (x, y):')
7 x = float(input('Digite o valor de x:\n'))
8 y = float(input('Digite o valor de y:\n'))
9
10 # resultado
11 if ((x-a)**2 + (y-b)**2 <= r**2):
12     print(f'({x}, {y}) pertence ao disco.')
13 else:
14     print(f'({x}, {y}) não pertence ao disco.')
```

**Exercício 3.2.5.**

```
1 # entrada de dados
2 print('r1: a1*x + b1 = 0')
3 a1 = float(input('Digite o valor de a1:\n'))
4 b1 = float(input('Digite o valor de b1:\n'))
5 print('r2: a2*x + b2 = 0')
6 a2 = float(input('Digite o valor de a2:\n'))
7 b2 = float(input('Digite o valor de b2:\n'))
8
9 # resultado
10 if (a1 == a2):
11     print('r1 // r2')
12 else:
```

```
13     x = (b1-b2)/(a2-a1)
14     y = a1*x + b1
15     print('Ponto de interseção: ({x}, {y}).')
```

### Exercício 3.2.6.

```
1  # entrada de dados
2  print('r1: a1*x + b1 = 0')
3  a1 = float(input('Digite o valor de a1:\n'))
4  b1 = float(input('Digite o valor de b1:\n'))
5  print('r2: a2*x + b2 = 0')
6  a2 = float(input('Digite o valor de a2:\n'))
7  b2 = float(input('Digite o valor de b2:\n'))
8
9  # resultado
10 if (a1 == a2):
11     if (b1 == b2):
12         print('r1 = r2')
13     else:
14         print('r1 // r2 e r1 != r2')
15 else:
16     x = (b1-b2)/(a2-a1)
17     y = a1*x + b1
18     print('Ponto de interseção: ({x}, {y}).')
```

### Exercício 3.2.7.

```
1  # entrada de dados
2  print('Coeficientes da parábola')
3  print('a1*x**2 + a2*x + a3 = 0')
4  a1 = float(input('Digite o valor de a1:\n'))
5  a2 = float(input('Digite o valor de a2:\n'))
6  a3 = float(input('Digite o valor de a3:\n'))
7
8  print('Coeficientes da reta')
9  print('b1*x + b2 = 0')
10 b1 = float(input('Digite o valor de b1:\n'))
11 b2 = float(input('Digite o valor de b2:\n'))
12
13 # discriminante da equação
```



```
14 #  $a_1x^2 + (a_2-b_1)x + (a_3-b_2) = 0$ 
15 delta = (a2-b1)**2 - 4*a1*(a3-b2)
16
17 # ponto(s) de interseção
18 if (delta == 0):
19     x = (b1-a2)/(2*a1)
20     y = b1*x + b2
21     print('Ponto de interseção:')
22     print(f'({x}, {y})')
23 elif (delta > 0):
24     x1 = ((b1-a2) - delta**2)/(2*a1)
25     y1 = b1*x1 + b2
26     x2 = ((b1-a2) + delta**2)/(2*a1)
27     y2 = b1*x2 + b2
28     print('Pontos de interseção:')
29     print(f'({x1}, {y1}), ({x2}, {y2})')
30 else:
31     print('Não há ponto de interseção.')
```

### Exercício 3.2.8.

```
1 # entrada de dados
2 print('c1:  $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$ ')
3 a1 = float(input('Digite o valor de a1:\n'))
4 b1 = float(input('Digite o valor de b1:\n'))
5 r1 = float(input('Digite o valor de r1:\n'))
6 print('c2:  $(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$ ')
7 a2 = float(input('Digite o valor de a2:\n'))
8 b2 = float(input('Digite o valor de b2:\n'))
9 r2 = float(input('Digite o valor de r2:\n'))
10
11 # verificações
12 if (((a1==a2) and (b1==b2)) and (r1==r2)):
13     print('c1 = c2')
14 else:
15     # distância entre os centros
16     dist = ((a2-a1)**2 + (b2-b1)**2)**0.5
17     if (abs(dist - (r1+r2)) < 1e-15):
18         print('c1 & c2 têm um único ponto de interseção.')
19     elif (dist < r1+r2):
```

```
20         print('c1 & c2 têm dois pontos de interseção.')
21     else:
22         print('c1 & c2 não tem ponto de interseção.')
```

### Exercício 3.2.9.

```
1  # entrada de dados
2  x = float(input('Digite o valor de x:\n'))
3  op = input('Digite uma das operações +, -, * ou /:\n')
4  y = float(input('Digite o valor de y:\n'))
5
6  # calcula
7  if (op == '+'):
8      print(f'{x} ' + op + f' {y} = {x+y}')
9  elif (op == '-'):
10     print(f'{x} ' + op + f' {y} = {x-y}')
11 elif (op == '*'):
12     print(f'{x} ' + op + f' {y} = {x*y}')
13 elif (op == '/'):
14     print(f'{x} ' + op + f' {y} = {x/y}')
15 else:
16     print('Desculpa, não entendi!')
```

### Exercício 3.2.10.

```
1  print('P = (x,y)')
2  x = float(input('Digite o valor de x: '))
3  y = float(input('Digite o valor de y: '))
4
5  if (((x >= -1.) and (x <= 2)) and
6      (y >= x**2) and (y <= x+2)):
7      print(f'P = ({x}, {y}) está entre as curvas.')
8  else:
9      print(f'P = ({x}, {y}) não está entre as curvas.')
```

### Exercício 3.2.11.

```
1  print('p(x) = (x-a)(bx^2 + cx + d)')
2  # entrada de dados
```

```
3 a = float(input('Digite o valor de a: '))
4 b = float(input('Digite o valor de b: '))
5 c = float(input('Digite o valor de c: '))
6 d = float(input('Digite o valor de d: '))
7
8 # cálculo das raízes
9 x1 = a
10 print(f'x1 = {x1}')
11 if (b != 0.):
12     delta = c**2 - 4*b*d
13     x2 = (-c - delta**0.5)/(2*b)
14     x3 = (-c + delta**0.5)/(2*b)
15     print(f'x2 = {x2}')
16     print(f'x3 = {x3}')
17 elif (c != 0.):
18     x2 = -d/c
19     print(f'x2 = {x2}')
```

### Exercício 3.3.1.

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 if (n >= 0):
3     soma = 0
4     i = 1
5     while (i <= n):
6         soma = soma + i
7         i = i + 1
8
9     print(f'1 + ... + {n} = {soma}')
10 else:
11     print('ERRO: n deve ser não negativo.')
```

**Exercício 3.3.2.** Dica: consulte o fluxograma apresentado no Exemplo 3.1.3.

### Exercício 3.3.3.

- a) `range(100)`
- b) `range(-4,15,2)`

c) `range(100,-1,-1)`

d) `range(15,-4,-3)`

#### Exercício 3.3.4. a)

```
1 n = int(input('Digite um número inteiro n:\n'))
2 m = int(input('Digite um número inteiro m>n:\n'))
3 soma = 0
4 i = n
5 while (i<=m):
6     soma = soma + i
7     i = i + 1
8 print(f'n+...+m = {soma}')
```

b)

```
1 n = int(input('Digite um número inteiro n:\n'))
2 m = int(input('Digite um número inteiro m>n:\n'))
3 soma = 0
4 for i in range(n,m+1):
5     soma = soma + i
6 print(f'n+...+m = {soma}')
```

#### Exercício 3.3.5. a)

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 s = 0
3 k = 1
4 while (k <= n):
5     s = s + 1/k
6     k = k + 1
7 print(s)
```

b)

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 s = 0
3 for k in range(n):
4     s = s + 1/(k+1)
5 print(s)
```

**Exercício 3.3.6. a)**

```
1 n = int(input('Digite um número natural n >= 1: '))
2
3 s = 0
4 k = 1
5 while (k <= n):
6     s += (-1)**(k+1)/k
7     k += 1
8 print(f'ln(2) approx. {s}')
```

b)

```
1 n = int(input('Digite um número natural n >= 1: '))
2
3 s = 0
4 for k in range(1, n+1):
5     s += (-1)**(k+1)/k
6     k += 1
7 print(f'ln(2) approx. {s}')
```

**Exercício 3.3.7. a)**

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 fat = 1
3 k = 1
4 while (k < n):
5     k = k + 1
6     fat = fat * k
7 print(f'{n}! = {fat}')
```

b)

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 fat = 1
3 for k in range(1, n+1):
4     fat = fat * k
5 print(f'{n}! = {fat}')
```

**Exercício 3.3.8.**

```
1 n = int(input('Digite um número natural n:\n'))
2 fat = 1
3 e = 1
4 for k in range(1,n+1):
5     fat = fat * k
6     e = e + 1/fat
7 print(f'e = {e}')
```

**Exercício 3.3.9.**

```
1 n = int(input('Digite um número natural n>=1:\n'))
2 primo = True
3 for i in range(2, n//2+1):
4     if (n % i == 0):
5         primo = False
6         break
7 print(f'{n} é primo? {primo}')
```

**Exercício 4.1.1.** Dica: use `h = math.sqrt(a**2 + b**2)`.

**Exercício 4.1.2.** Dica: verifique a condição `(m.fabs(b-c) < a) and (a < bc)`.

**Exercício 4.1.3.** Dica: use a [lei dos cossenos](#) e relações fundamentais de triângulo retângulo para obter o valor da altura  $h$ .

**Exercício 4.1.4.** Dica: consulte as funções `math.sin`, `math.cos`.

**Exercício 4.1.5.** Dica: O módulo `random` fornece a função `random.randint(a, b)` que retorna um inteiro  $a \leq x \leq b$ .

# Bibliografia

- [1] Banin, S.L.. Python 3 - Conceitos e Aplicações - Uma Abordagem Didática, Saraiva: São Paulo, 2021. ISBN: 978-8536530253.
- [2] Cormen, T.. Desmitificando Algoritmos, Grupo GEN: São Paulo, 2021. ISBN: 978-8595153929.
- [3] Cormen, T.. Algoritmos - Teoria e Prática, Grupo GEN: São Paulo, 2012. ISBN: 978-8595158092.
- [4] Grus, J.. Data Science do Zero, Alta Books: Rio de Janeiro, 2021. ISBN: 978-8550816463.
- [5] Ribeiro, J.A.. Introdução à Programação e aos Algoritmos, LTC: São Paulo, 2021. ISBN: 978-8521636410. Acesso pelo SABi+UFRGS: <https://bit.ly/42Z4VFC>
- [6] Wazlawick, R.. Introdução a Algoritmos e Programação com Python - Uma Abordagem Dirigida por Testes, Grupo GEN: São Paulo, 2021. ISBN 978-8595156968.