Vetores

Pedro H A Konzen

13 de maio de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores.
Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB.

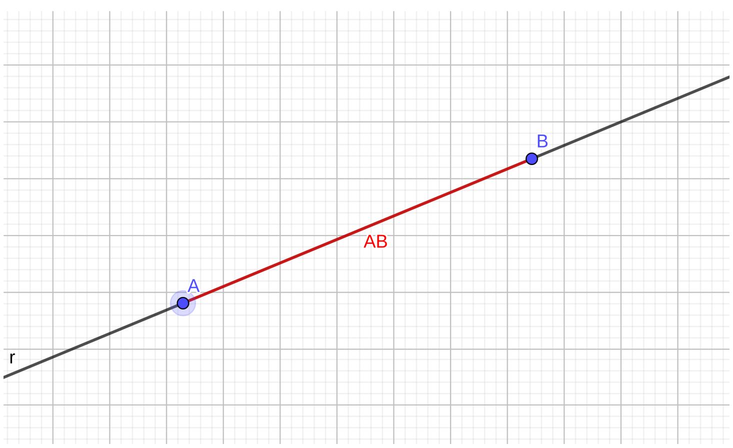


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB.

Associado a um segmento AB, temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B. A distância entre os ponto A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.
A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B.

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

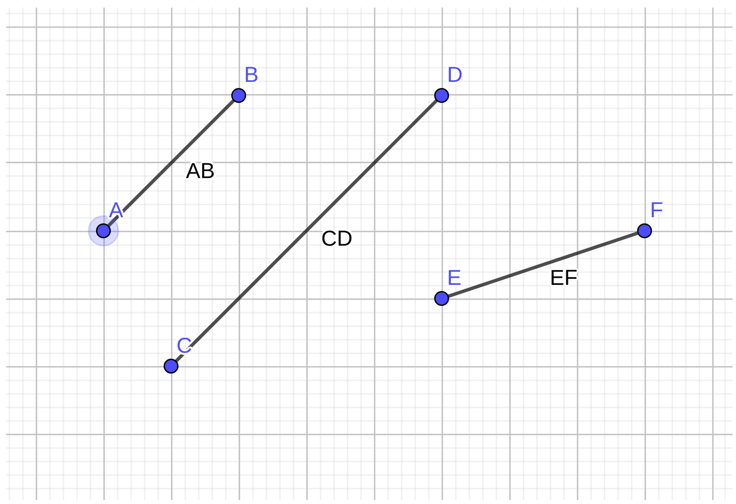


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.
Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA. Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B, sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.
Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

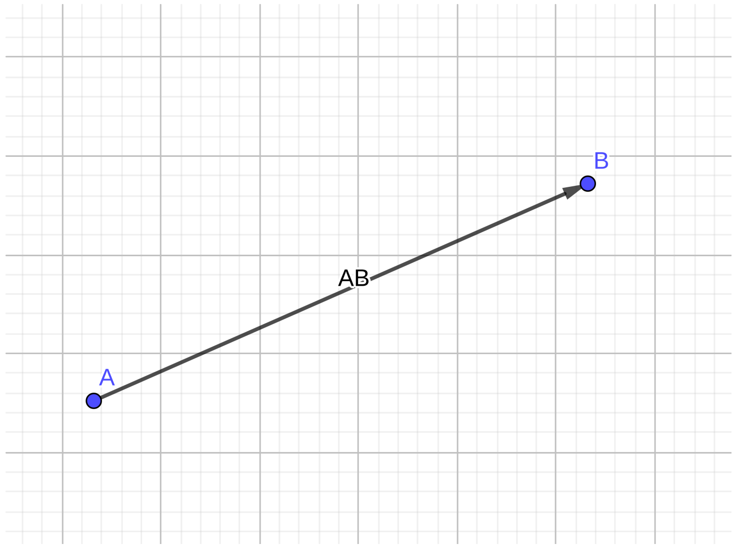


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB.

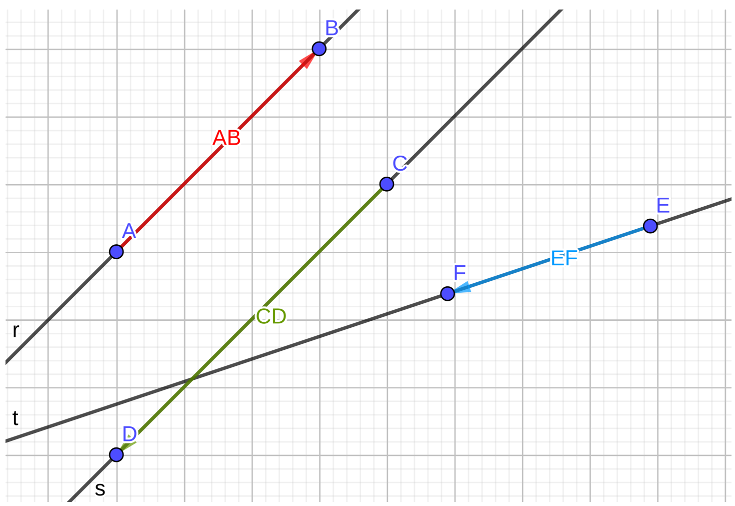


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

1.5). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.
Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

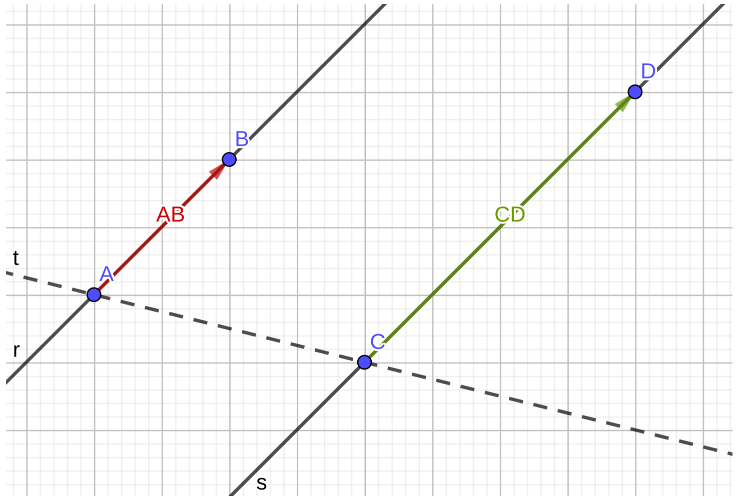


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.
Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6. Segmentos nulos também são considerados equipolentes entre si. Quando AB é equipolente a CD, escrevemos $AB \sim CD$.

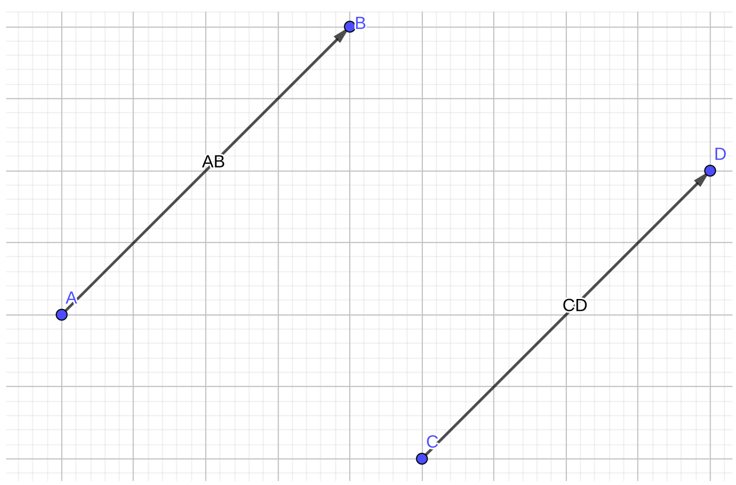


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

A relação de equipolência é uma **relação de equivalência**. De fato, temos:

- **relação reflexiva**: $AB \sim AB$;
- **relação simétrica**: $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$;
- **relação transitiva**: $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim CD$.

Com isso, dado um segmento AB, definimos a **classe de equipolência** de AB como o conjunto de todos os segmentos equipolentes a AB. O segmento AB é um **representante** desta classe.

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

Solução. Começamos mostrando a implicação. Por hipótese, temos que AB e CD são equipolentes. A tese é clara no caso de AB e CD serem coincidentes. Vejamos, então, o caso em que AB e CD não são coincidentes. Desta forma, $ABCD$ determina um paralelogramo de diagonais AD e BC. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios, temos demonstrado a implicação.
Agora, mostramos a recíproca. Por hipótese, temos que os pontos médios de AD e BC são coincidentes. Novamente, se AD e BD são coincidentes a conclusão é direta. Consideremos o caso em que AD e BD não são coincidentes. Daí, segue que AB e CD têm o mesmo tamanho e mesma direção. Seja M o ponto médio de AD e BC e π o plano determinado pelos segmentos AB e CD. Notando que M, B e D estão no mesmo semiplano de π determinado pela reta AC, concluímos que AB e CD são equipolentes.

$\Diamond$

ER 1.1.2. Mostre que $AB \sim CD$, então $BA \sim DC$.

Solução. AB e BA têm o mesmo tamanho e direção. CD e DC têm o mesmo tamanho e direção. Como $AB \sim CD$, temos que BA e DC têm o mesmo tamanho e direção. Por fim, observa-se que BA e DC têm ambos o mesmo sentido oposto de AB e DC.

$\Diamond$

Exercícios

E 1.1.1. Faça o esboço de dois segmentos AB e CD com $|AB| \neq |CD|$ e cujas retas determinadas por eles sejam coincidentes.

E 1.1.2. Faça o esboço de dois segmentos orientados $AB \not\sim CD$ e de mesmo sentido.

E 1.1.3. Faça o esboço de dois segmentos orientados colineares, de tamanhos iguais e sentidos opostos.

E 1.1.4. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: é quadrado todo trapézio retângulo $ABCD$ com segmentos orientados AD e BC equipolentes. Justifique sua afirmação.

E 1.1.5. Mostre que $AB \sim CD$, então $AC \sim BD$.

E 1.1.6. Mostre que se $AC \sim CB$, então C é ponto médio do segmento AB.

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB, chama-se **vetor** AB e denota-se $\overrightarrow{AB}$, qualquer segmento orientado equipolente a AB. Em outras palavras, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é a classe de equipolência que tem o segmento orientado AB como um representante. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor $\overrightarrow{AB}$.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

O **vetor nulo** é aquele que tem como seu representante um segmento orientado nulo. É denotado por $\vec{0}$.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor $\vec{v}$ é denotado(a) por $|\vec{v}|$ e é definido como o valor do comprimento de qualquer uma de suas representações. Mais precisamente, se $\overrightarrow{AB}$ é uma representação de $\vec{v}$, então $|\vec{v}| := |\overrightarrow{AB}|$.

Observação 1.2.1. $|\vec{v}| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Lembrando que $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$, i.e. a distância entre os pontos A e B, segue que se $\vec{v} = \vec{0}$, então A e B são dois pontos sobrepostos e,

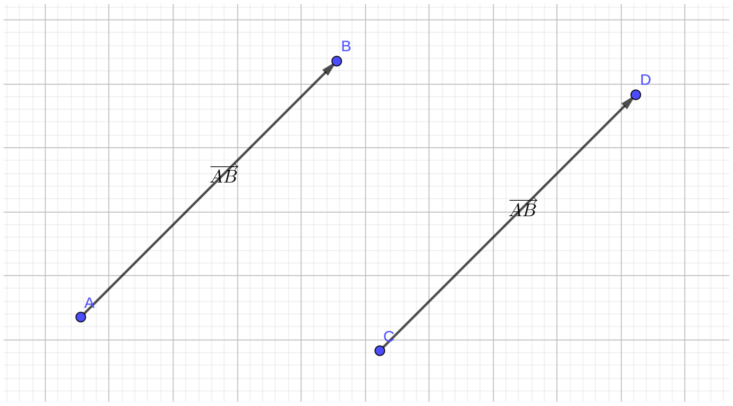


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

portanto, $|\vec{v}| = |AB| = 0$. Reciprocamente, se $|AB| = 0$, então A e B são sobrepostos e $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

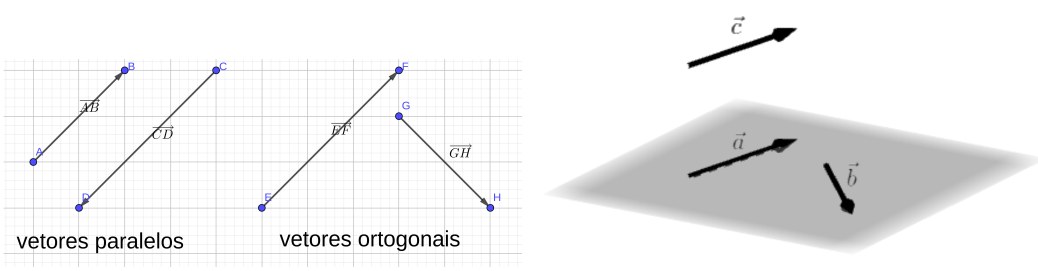


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

▶ Vídeo disponível!

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sejam, ainda, uma representação $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ e uma representação $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$. Então, define-se o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ como o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$. Veja a Figura 1.9.

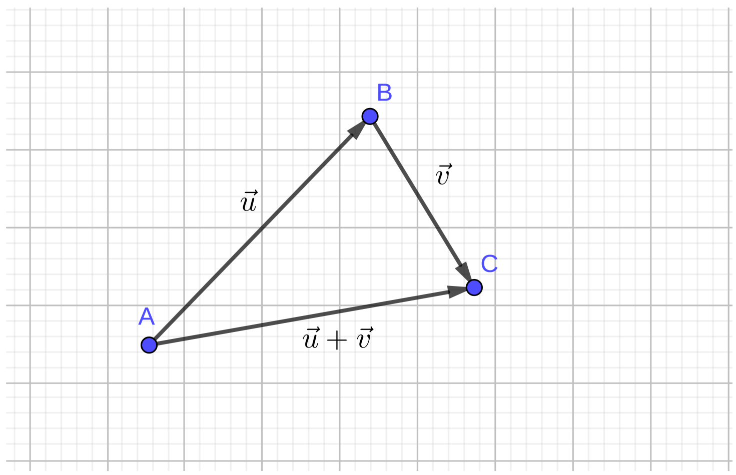


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

Observação 1.2.2. Vejamos as seguintes propriedades:

a) Elemento neutro na adição:

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \tag{1.1}$$

De fato, seja $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. Observamos que podemos representar $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$. Logo, temos $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

b) Associatividade na adição:

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}). \tag{1.2}$$

De fato, sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$. Então, segue

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD} &(1.3)\\ &=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} &(1.4)\\ &=\overrightarrow{AD}, &(1.5)\end{aligned}$$

bem como,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \tag{1.6}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \tag{1.7}$$
$$= \overrightarrow{AD}. \tag{1.8}$$

c) Comutatividade da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}. \tag{1.9}$$

Esta propriedade pode ser demonstrada usando a regra do paralelogramo que veremos mais adiante. Veja, também, o Exercício Resolvido 1.2.1.

1.2.2 Vetor oposto

▶ Vídeo disponível!

Um **vetor** $\vec{v}$ é dito ser **oposto** a um dado vetor $\vec{u}$, quando quaisquer representações de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a $\vec{u}$. Veja a Figura 1.10.

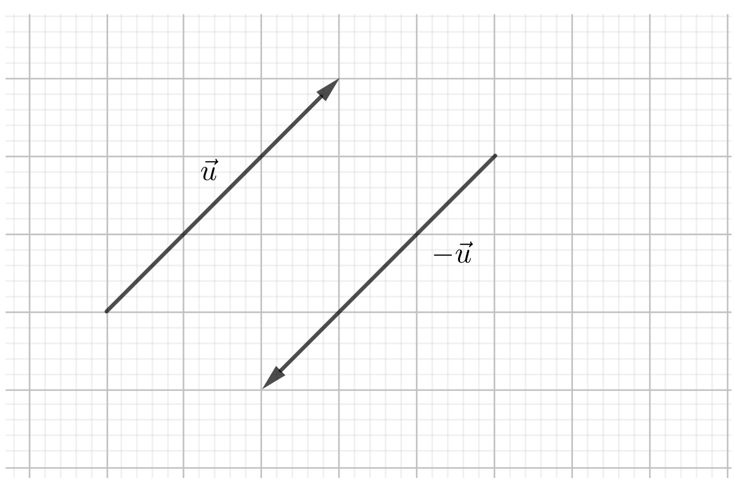


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

Observação 1.2.3. $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$.
De fato, seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Então, $|\vec{v}| = |AB| = |BA| = |-\vec{v}|$.

Observação 1.2.4. (Existência do oposto)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \tag{1.10}$$

De fato, seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Então, $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Segue que

$$\begin{align}
\vec{u} + (-\vec{u}) &= \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) \tag{1.11}\\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \tag{1.12}\\
&= \overrightarrow{AA} \tag{1.13}\\
&= \vec{0}. \tag{1.14}
\end{align}$$

1.2.3 Subtração de vetores

▶ **Vídeo disponível!**

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é denotada por $\vec{u}-\vec{v}$ e é definida pela adição de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

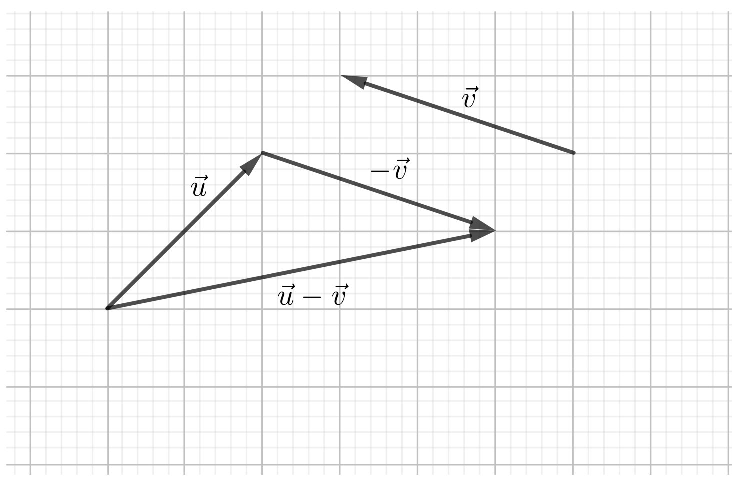


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

Observação 1.2.5. (Regra do paralelogramo)

▶ Vídeo disponível!

Sejam vetores não nulos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Seja, ainda, C o vértice oposto ao A no paralelogramo determinado pelos lados formados pelos segmentos AB e AD. Então, temos $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$. Veja a Figura 1.12.

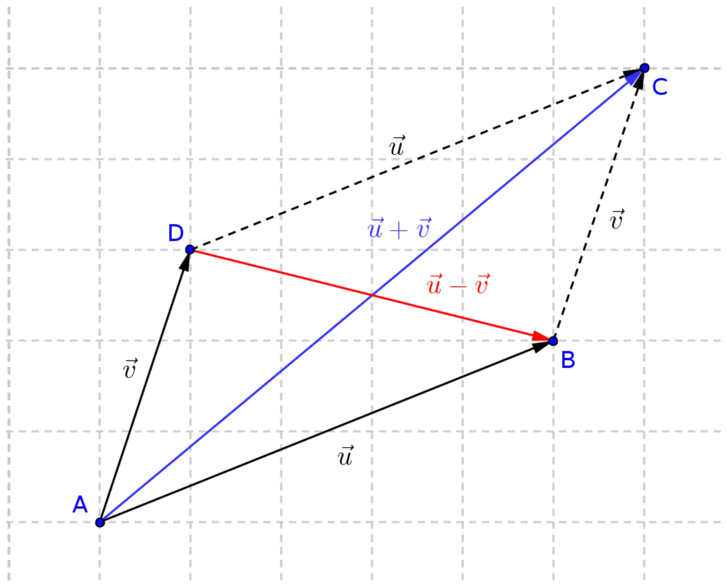


Figura 1.12: Regra do paralelogramo para a presentação geométrica da soma e da diferença de vetores.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

▶ Vídeo disponível!

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor $\vec{u}$ é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$ com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.6.

- Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.
- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

Observação 1.2.7. As seguintes propriedades são válidas:

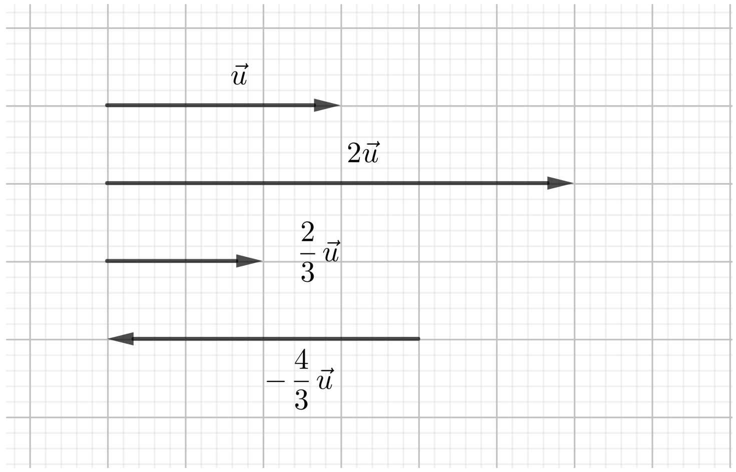


Figura 1.13: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

a) Associatividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \tag{1.15}$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que $\alpha\,(\beta\vec{u})$ e $(\alpha\beta)\vec{u}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido. Por fim, temos

$$\begin{aligned} |\alpha\,(\beta\vec{u})\,| &= |\alpha||\beta\vec{u}| && (1.16)\\ &= |\alpha|\,(|\beta||\vec{u}|) && (1.17)\\ &= (|\alpha||\beta|)\,|\vec{u}| && (1.18)\\ &= |\alpha\beta||\vec{u}| && (1.19)\\ &= |(\alpha\beta)\vec{u}|. && (1.20) \end{aligned}$$

b) Distributividade:

$$(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \tag{1.21}$$
$$\alpha\,(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \tag{1.22}$$

1.2.5 Resumo das propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e quaisquer escalares α

e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \tag{1.23}$$
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \tag{1.24}$$

- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Mostre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

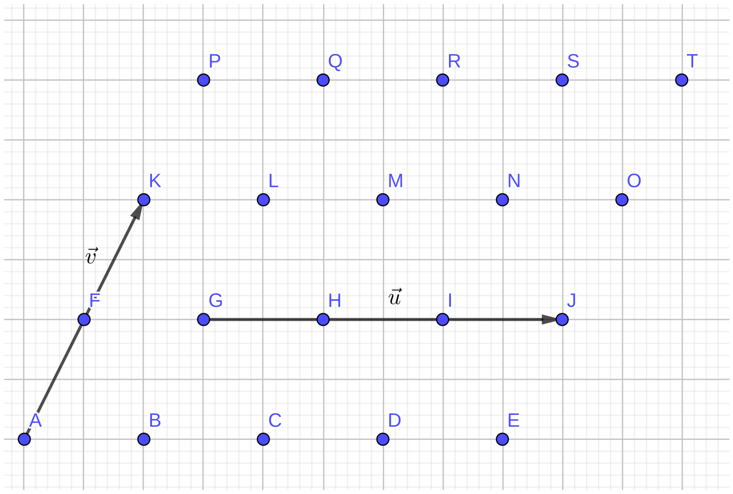
Solução. Seja $ABCD$ o paralelogramo com $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Logo, pela regra do paralelogramo temos

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} && (1.25)\\
&= \overrightarrow{AC} && (1.26)\\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} && (1.27)\\
&= \vec{v} + \vec{u}. && (1.28)
\end{aligned}$$

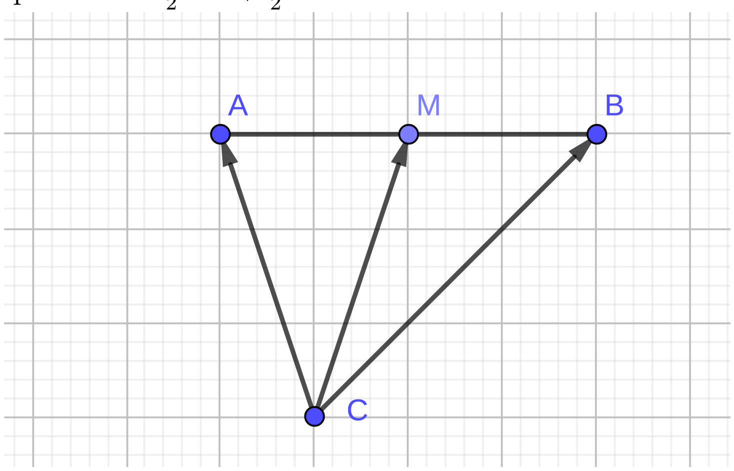
◊

Exercícios

E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u} = \overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{PE}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



E 1.2.2. Sejam $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{CB}$ os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



E 1.2.3. Seja dado um vetor $\vec{u} \neq 0$. Calcule a norma do vetor $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$[1].

E 1.2.4. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

1. $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$
2. $\vec{u} = -\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

[1] $\vec{u}/|\vec{u}|$ é chamado de vetor $\vec{u}$ normalizado, ou a normalização do vetor $\vec{u}$.

Capítulo 2

Bases e coordenadas

Observação 2.0.1. Neste capítulo, vamos computar a solução de alguns problemas usando `Python`. Para tanto, utilizaremos a biblioteca de matemática simbólica `SymPy`.
Nos códigos `Python` apresentados ao longo deste capítulo, assumiremos que os seguintes comandos já estejam executados:

```
form sympy import *
```

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, $\ldots$, c_n, com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n \tag{2.1}$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que $\vec{u}$ é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor $\vec{u}$.

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Então, temos:

a) $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

b) $\vec{u_2} = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

c) $\vec{u_3} = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$.

d) $\vec{u_4} = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor $\vec{z}$.

Observação 2.1.1. (Interpretação geométrica)

a) Uma combinação linear não nula envolvendo um único vetor $\vec{u}$ é um vetor paralelo a $\vec{u}$. De fato, seja

$$\vec{v} = c\vec{u}, \quad c \neq 0, \tag{2.2}$$

i.e. $\vec{v}$ é combinação linear não nula de $\vec{u}$. Então, $\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$.

b) Uma combinação linear não nula envolvendo dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é coplanar a estes vetores. De fato, seja

$$\vec{w} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}, \quad c_1 \cdot c_2 \neq 0, \tag{2.3}$$

e π o plano determinado pelas representações de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Logo, seguindo a regra do paralelogramo, vemos que $\vec{w}$ tem uma representação no plano determinado pelos segmentos AB e AC.

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

a) $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ dependem linearmente dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{z}$.

b) $\vec{u_3}$ depende linearmente dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$.

c) Os vetores $\vec{u_4}$ e $\vec{z}$ são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (l.i.) quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguinte condições é satisfeita:

a) um deles é combinação linear do outro, i.e.

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta\vec{u}; \tag{2.4}$$

b) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção;

c) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

De fato, a afirmação a) é a definição de dependência linear. A b) é consequência imediata da a), bem como a c) é equivalente a b). Por fim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos, então um é multiplo por escalar do outro. Ou seja, c) implica a).

Observação 2.1.2. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor $\vec{u}$. De fato, temos

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \tag{2.5}$$

i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor $\vec{u}$.

Observação 2.1.3. Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{2.6}$$

De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}, \tag{2.7}$$

i.e. o vetor $\vec{u}$ é combinação linear do vetor $\vec{v}$ e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u} \tag{2.8}$$

e, então, teríamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \tag{2.9}$$

Afirmamos que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d., então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Por fim, observamos que se $\alpha,\beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de $\vec{w}$. Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π. Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A, B e C pertencem a π, assim como o segmento AC. Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.
Reciprocamente, **se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..** De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}$ pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.10}$$

Neste caso, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.11}$$

E, então, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Agora, suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π. Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC, respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B. Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B. Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, i.e. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

Observação 2.1.4. Três vetores dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2.12}$$

De fato, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \tag{2.13}$$

e teríamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$. Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

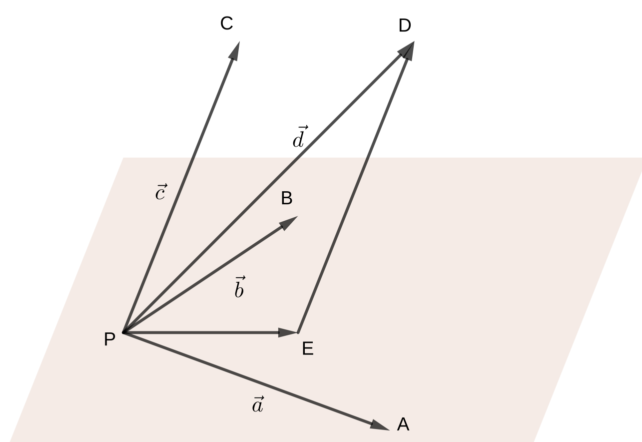


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a $\overrightarrow{PC}$ que passa pelo ponto D. Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π. Vejamos a Figura 2.1. Observamos que o vetor $\overrightarrow{PE}$ é coplanar aos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ e, portanto, exitem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB}. \tag{2.14}$$

Além disso, como $\overrightarrow{ED}$ tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma\overrightarrow{PC} \tag{2.15}$$

para algum número real γ. Por fim, observamos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED}\\ &= \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}\\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.\end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}, \tag{2.16}$$
$$\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v}, \tag{2.17}$$

então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.d.?

Solução. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{2.18}$$

Observemos que

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (2\alpha + \beta)\vec{u} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{v} \tag{2.19}$$
$$= \vec{0} \tag{2.20}$$

implica

$$2\alpha + \beta = 0 \tag{2.21}$$
$$-3\alpha + 2\beta = 0 \tag{2.22}$$

Resolvendo este sistema, vemos que $\alpha = \beta = 0$. Logo, concluímos que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i..

$\Diamond$

ER 2.1.2. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores. Verifique a seguinte afirmação de que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Justifique sua resposta.

Solução. A afirmação é verdadeira. De fato, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então existe um escalar α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}. \tag{2.23}$$

Segue que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.24}$$

Isto é, $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Então, por definição, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

$\Diamond$

ER 2.1.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Mostre que A, B e C são colineares se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d..

Solução. Primeiramente, vamos verificar a implicação. Se A, B e C são colineares, então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Logo, são l.d. os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Agora, verificamos a recíproca. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são l.d., então os segmentos AB e AC têm a mesma direção. Como eles são concorrentes, segue que A, B e C são colineares.

$\Diamond$

Exercícios

E 2.1.1. Sendo $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, mostre que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são l.d. para qualquer ponto P.

E 2.1.2. Sejam dados três vetores quaisquer $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Mostre que os vetores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$ são l.d..

E 2.1.3. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Mostre que A, B, C e D são coplanares se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

E 2.1.4. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. e

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}, \tag{2.25}$$

$$\vec{b} = 2\vec{v} - 4\vec{u}, \tag{2.26}$$

então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são l.i.? Justifique sua resposta.

E 2.1.5. Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.d. $\Rightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.d..

b) $\vec{u}$, $\vec{0}$, $\vec{w}$ são l.d..

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.i. $\Rightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.i..

d) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ l.d. $\Rightarrow$ $-\vec{u}$, $2\vec{v}$, $-3\vec{w}$ l.d..

2.2 Bases e coordenadas

Seja V o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Subseção 2.1.2, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., então qualquer vetor $\vec{u} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais α, β e γ tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.27}$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de V é uma sequência de três vetores l.i. de V.
Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma dada base de V. Então, dado qualquer $\vec{v} \in V$, existe um único terno de números reais α, β e γ tais que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.28}$$

De fato, a existência de $alpha$, β e γ segue imediatamente do fato de que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e, portanto, $\vec{v}$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de $alpha$, β e γ, tomamos α', β' e γ' tais que

$$\vec{v} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}. \tag{2.29}$$

Subtraindo (2.29) de (2.28), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}. \tag{2.30}$$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., segue que[1]

$$\alpha - \alpha' = 0,\ \beta - \beta' = 0,\ \gamma - \gamma' = 0, \tag{2.31}$$

i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

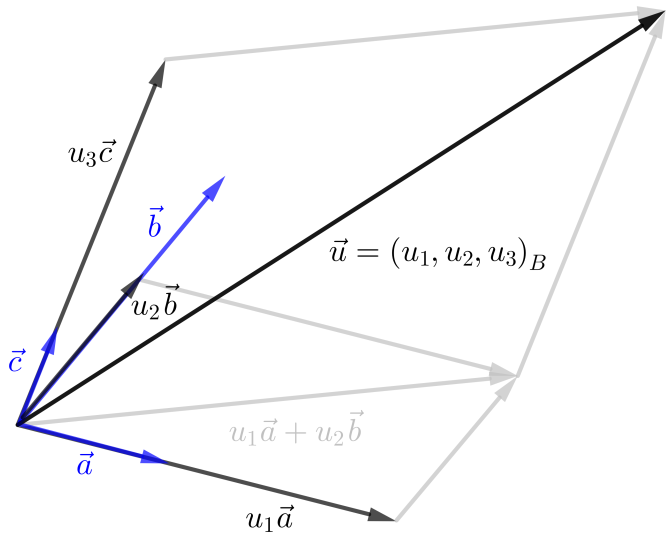


Figura 2.2: Representação de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ em uma dada base $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Com isso, fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, cada vetor $\vec{u}$ é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.32}$$

onde u_1, u_2 e u_3 são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do $\vec{u}$ na base B. Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \tag{2.33}$$

para expressar o vetor $\vec{u}$ nas suas coordenadas na base B. Vejamos a Figura 2.2.

[1]Lembre-se da Observação 2.1.4.

Exemplo 2.2.1. Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)$ é o vetor $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

2.2.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operação são definidas a partir das coordenadas de vetores.
Sejam $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.34}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \tag{2.35}$$

Então, a **adição** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \tag{2.36}$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \tag{2.37}$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \tag{2.38}$$

Exemplo 2.2.2. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1, 3, -8)_B. \tag{2.39}$$

Podemos usar o `SymPy` para manipularmos vetores em coordenadas. Para computarmos a soma neste exemplo, podemos usar os seguintes comandos[2]:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u+v
```

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor $\vec{u}$ é

$$-\vec{u} = -(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.40}$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \tag{2.41}$$

[2] Veja a Observação 2.0.1.

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \tag{2.42}$$

Exemplo 2.2.3. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B\,. \tag{2.43}$$

Usando o `Sympy`, podemos computar o oposto do vetor $\vec{v}$ com os seguintes comandos:[3]:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
-v
```

Lembrando que **subtração** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$, segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \tag{2.44}$$

Exemplo 2.2.4. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5, 2)_B. \tag{2.45}$$

Usando o `Sympy`, podemos computar $\vec{u} - \vec{v}$ com os seguintes comandos:[4]:

```
u = Matrix([2,-1,-3])
v = Matrix([-1,4,-5])
u-v
```

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número** α pelo **vetor** $\vec{u}$. Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.46}$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \tag{2.47}$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \tag{2.48}$$

[3]Veja a Observação 2.0.1 no ínicio deste capítulo.
[4]Veja a Observação 2.0.1 no ínicio deste capítulo.

Exemplo 2.2.5. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \tag{2.49}$$

Usando o Sympy, podemos computar o oposto do vetor $\frac{1}{3}\vec{v}$ com os seguintes comandos:[5]:

```
v = Matrix([2,-1,-3])
1/3*v
```

2.2.2 Dependência linear

Dois vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}, \tag{2.50}$$

sem perda de generalidade[6].
Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, temos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Com isso, a equação (2.50) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \tag{2.51}$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1,\ u_2 = \alpha v_2,\ u_3 = \alpha v_3. \tag{2.52}$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

Exemplo 2.2.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.d., pois

$$2 = 2\cdot\frac{1}{2},\ -1 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),\ -3 = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right). \tag{2.53}$$

b) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.i., pois $u_1 = 1\cdot v_1$, enquanto $u_2 = 2v_2$.

[5] Veja a Observação 2.0.1 no ínicio deste capítulo.
[6] Formalmente, pode ocorrer $\vec{v} = \beta\vec{u}$.

Três vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \tag{2.54}$$

Seja, então, $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V. Então, temos que a equação

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \tag{2.55}$$

é equivalente a

$$\alpha(u_1,u_2,u_3)_B + \beta(v_1,v_2,v_3)_B + \gamma(w_1,w_2,w_3)_B = (0,0,0)_B. \tag{2.56}$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.58}$$

Exemplo 2.2.7. Fixada uma base B de V, sejam os vetores $\vec{u} = (2,1,-3)_B$, $\vec{v} = (1,-1,2)_B$ e $\vec{w} = (-2,1,1)_B$. Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.59}$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \tag{2.60}$$

Exercícios

Em construção ...

2.3 Mudança de base

Sejam $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ e $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ bases do espaço V. Conhecendo as coordenadas de um vetor na base C, queremos determinar suas coordenadas na base B. Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C = z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \tag{2.61}$$

Agora, tendo $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$ e $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$, então

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3)_C &= z_1(r_1, r_2, r_3)_B + z_2(s_1, s_2, s_3)_B + z_3(t_1, t_2, t_3)_B && (2.62)\\
&= \underbrace{(r_1z_1 + s_1z_2 + t_1z_3)}_{z_1'}\vec{u} && (2.63)\\
&+ \underbrace{(r_2z_1 + s_2z_2 + t_2z_3)}_{z_2'}\vec{v} && (2.64)\\
&+ \underbrace{(r_3z_1 + s_3z_2 + t_3z_3)}_{z_3'}\vec{w} && (2.65)
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \tag{2.66}$$

onde $\vec{z} = (z_1', z_2', z_3')_B$.
A matriz M_{CB} é chamada de matriz de mudança de base de C para B. Como os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{t}$ são l.i., temos que a matriz de mudança de base M_{BC} tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Além disso, observamos que

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \tag{2.67}$$

Exemplo 2.3.1. Sejam dadas as bases $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ e $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, com $\vec{u} = (1,2,0)_B$, $\vec{v} = (2,0,-1)_B$ e $\vec{w} = (-1,-3,1)_B$. Seja, ainda, o vetor $\vec{z} = (1,-2,1)_B$. Vamos encontrar as coordenadas de $\vec{z}$ na base C.
Há duas formas de proceder. A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$\vec{z} = (-1,-3,1)_B = (x,y,z)_C. \tag{2.68}$$

Esta é equivalente a

$$
\begin{aligned}
-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} &= x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} && (2.69)\\
&= x(\vec{a} + 2\vec{b}) + y(2\vec{a} - \vec{c}) + z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) && (2.70)\\
&= (x + 2y - z)\vec{a} + (2x - 3z)\vec{b} + (-y + z)\vec{c}. && (2.71)
\end{aligned}
$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$
\begin{cases}
x + 2y - z = -1\\
2x - 3z = -3\\
-y + z = 1
\end{cases} \tag{2.72}
$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = 6/5$, $y = 4/5$ e $z = 9/5$, i.e.

$$
\vec{z} = \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)_C. \tag{2.73}
$$

Outra maneira de se obter as coordenadas de $\vec{z}$ na base C é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base C para a base B é

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & 2-1 & \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.74}
$$

Então, a matriz de mudança da base B para a base C é $M_{BC} = M^{-1}$. Logo, $(x,y,z)_C = M_{BC}(-1,-3,1)_B$.

Exercícios

Em construção ...

2.4 Bases ortonormais

Uma **base** $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Observação 2.4.1. (Teorema de Pitágoras) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Proposição 2.4.1. *Seja* $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *uma base ortonormal e* $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)_B$. *Então,* $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Demonstração. Temos $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}|^2$. Seja π um plano determinado por dadas representações de $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortogonais, temos que $\vec{k}$ é ortogonal ao plano π. Além disso, o vetor $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ também admite uma representação em π, logo $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{k}$. Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.4.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \tag{2.75}$$

Analogamente, como $\vec{i} \perp \vec{j}$, do Teorema de Pitágoras segue

$$\begin{align}|\vec{u}|^2 &= |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 \tag{2.76}\\ &= |u_1|^2|\vec{i}| + |u_2|^2|\vec{j}| + |u_3||\vec{k}|^2 \tag{2.77}\\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \tag{2.78}\end{align}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado. □

Exemplo 2.4.1. Se $\vec{u} = (-1,2,-\sqrt{2})_B$ e B é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \tag{2.79}$$

Exercícios

E 2.4.1. Seja $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uma base ortogonal, i.e. $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que $C = (\vec{a}/|\vec{a}|,\vec{b}/|\vec{b}|,\vec{c}/|\vec{c}|)$ é uma base ortonormal.

Em construção ...

Capítulo 3

Produto escalar

3.1 Produto escalar

Ao longo desta seção, assumiremos $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal no espaço. O **produto escalar** dos vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ é o número real

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1.1. Se $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{v} = (-3,-4,2)$, então

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot(-3) + (-1)\cdot(-4) + 3\cdot 2 = 4. \tag{3.2}$$

3.1.1 Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e qualquer número real α, temos:

- Comutatividade: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

  Dem.:

$$\begin{align}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) \tag{3.3}\\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3.4}\\
&= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \tag{3.5}\\
&= \vec{v}\cdot\vec{u}. \tag{3.6}
\end{align}$$

- Distributividade com multiplicação por escalar:

$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}). \tag{3.7}$$

Dem.:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} &= (\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) && (3.8)\\
&= (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 && (3.9)\\
&= \alpha(u_1v_1) + \alpha(u_2v_2) + \alpha(u_3v_3) && (3.10)\\
&= \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) && (3.11)\\
&= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) && (3.12)\\
&= (u_1,u_2,u_3)\cdot(\alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3) && (3.13)\\
&= \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}). && (3.14)
\end{aligned}
$$

- Distributividade com a adição: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

  Dem.:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= (u_1,u_2,u_3)\cdot((v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)) && (3.15)\\
&= (u_1,u_2,u_3)\cdot[(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3)] && (3.16)\\
&= u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) + u_2(v_2+w_2) && (3.17)\\
&= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 && (3.18)\\
&= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 && (3.19)\\
&= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}. && (3.20)
\end{aligned}
$$

- Sinal: $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$ e $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

  Dem.:

$$
\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2+u_2^2+u_3^2 \geq 0. \tag{3.21}
$$

  Além disso, observamos que a soma de números não negativos é nula se, e somente se, os números forem zeros.

- Norma: $|u|^2 = \vec{u}\vec{u}$.

  Dem.: Como fixamos uma base ortonormal B, a Proposição 2.4.1 nos garante que

$$
|u|^2 = u_1^2+u_2^2+u_3^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}. \tag{3.22}
$$

Exemplo 3.1.2. Sejam $\vec{u}=(-1,2,1)$, $\vec{v}=(2,-1,3)$ e $\vec{w}=(1,0,-1)$. Vejamos os seguintes casos:

- Comutatividade:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -1, \tag{3.23}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1. \tag{3.24}$$

- Distributividade com a multiplicação por escalar:

$$(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2{,}4{,}2) \cdot (2, -1{,}3) = -4 - 4 + 6 = -2, \tag{3.25}$$
$$2(\vec{u}\vec{v}) = 2(-2 - 2 + 3) = -2, \tag{3.26}$$
$$\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = (-1{,}2{,}1) \cdot (4, -2{,}6) = -2. \tag{3.27}$$

- Distributividade com a adição:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})) = (-1{,}2{,}1) \cdot (3, -1{,}2) = -3 - 2 + 2 = -3, \tag{3.28}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (-2 - 2 + 3) + (-1 + 0 - 1) = -3. \tag{3.29}$$

- Sinal:

$$\vec{w}\vec{w} = 1 + 0 + 1 = 2 \geq 0. \tag{3.30}$$

- Norma:

$$|u|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \tag{3.31}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6. \tag{3.32}$$

Exercícios

Em construção ...

3.2 Ângulo entre dois vetores

O **ângulo formado entre dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, é definido como o menor ângulo determinado entre quaisquer representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Proposição 3.2.1. *Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha, \tag{3.33}$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Demonstração. Tomamos as representações $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Observamos que $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Então, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\triangle OAB$, obtemos

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\alpha, \tag{3.34}$$

ou, equivalentemente,

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \tag{3.35}$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \tag{3.36}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \tag{3.37}$$

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \tag{3.38}$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha. \tag{3.39}$$

□

Exemplo 3.2.1. Vamos determinar ângulo entre os vetores $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Da Proposição 3.2.1, temos

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| \cdot |v|} \tag{3.40}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.41}$$

Portanto, temos $\alpha = \pi/6$.

Observação 3.2.1. O ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

- agudo se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- obtuso se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, então:

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3.2.1 Desigualdade triangular

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos

$$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|, \tag{3.42}$$

esta é conhecida como a **desigualdade triangular**. Para demonstrá-la, começamos observando que

$$\begin{aligned} |\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) && (3.43)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u} && (3.44)\\ &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}. && (3.45)\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Pela Proposição 3.2.1, temos

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha, \tag{3.46}$$

onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mas, então:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}||\cos\alpha|. \tag{3.47}$$

Daí, como $|\cos\alpha| \leq 1$, temos

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|, \tag{3.48}$$

a qual é chamada de **desigualdade de Cauchy-Schwarz**[1].

Exercícios

E 3.2.1. Verifique que (**??**) é equivalente a (3.1) no caso de bases ortonormais.

Em construção ...

[1]Augustin-Louis Cauchy, 1798-1857, matemático francês. Fonte: Wikipeida. Hermann Schwarz, 1843-1921, matemático alemão. Fonte: Wikipedia.

3.3 Projeção ortogonal

Sejam dados os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. Seja, ainda, P a interseção da reta perpendicular a OB que passa pelo ponto A. Observemos a Figura 3.1. Com isso, definimos a **projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$** por $\overrightarrow{OP}$. Denotamos

$$\overrightarrow{OP} = \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}. \quad (3.49)$$

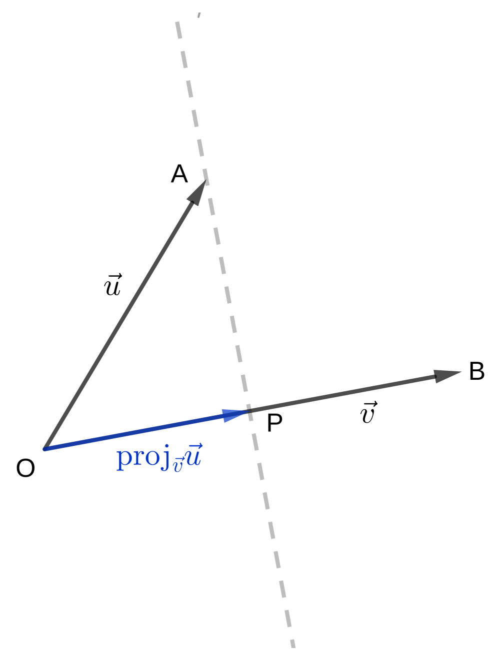


Figura 3.1: Ilustração da definição da projeção ortogonal.

Da definição, temos que

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \alpha\vec{v} \quad (3.50)$$

para algum número real α. Além disso, temos

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.51)$$

Portanto

$$\alpha\vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{AP}. \quad (3.52)$$

Tomando o produto escalar com $\vec{v}$ em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (3.53)$$

pois $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v} = 0$, uma vez que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$. Daí, lembrando que $\vec{v}\cdot\vec{v} = |v|^2$, temos

$$\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \tag{3.54}$$

e concluímos que

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}. \tag{3.55}$$

Exemplo 3.3.1. Sejam $\vec{u} = (-1{,}1,-1)$ e $\vec{v} = (2{,}1,-2)$. Usando a equação (3.55), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} &= \frac{(-1{,}1,-1)\cdot(2{,}1,-2)}{|(2{,}1,-2)|^2}(2{,}1,-2) && (3.56)\\
&= \frac{-2+1+2}{4+1+4}(2{,}1,-2) && (3.57)\\
&= \left(\frac{2}{9},\frac{1}{9},\frac{-2}{9}\right). && (3.58)
\end{aligned}$$

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 4

Produto vetorial

De agora em diante, vamos trabalhar com um base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dita com orientação positiva, i.e. os vetores $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ estão dispostos em sentido anti-horário, veja Figura 4.2.

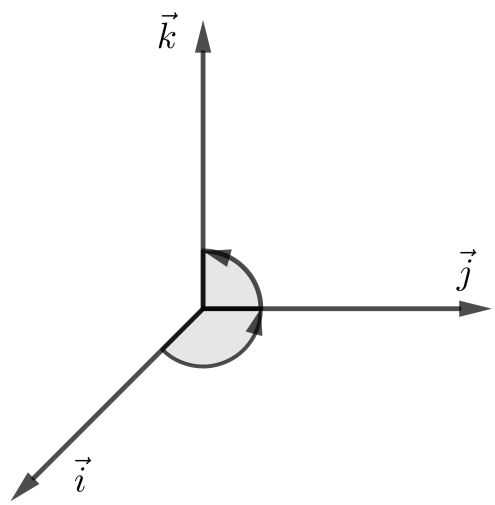


Figura 4.1: Base ortonormal positiva.

4.1 Definição

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos o produto vetorial de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, como o vetor:

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.d., então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., então

  - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$, onde α é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e
  - $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ formam uma base positiva.

4.1.1 Interpretação geométrica

Sejam dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.i.. Estes vetores determinam um paralelogramo, veja Figura **??**. Seja, então, h a altura deste paralelogramo tendo $\vec{u}$ como sua base. Logo, a área do paralelogramo é o produto do comprimento da base com sua altura, neste caso

$$|\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha. \tag{4.1}$$

Ou seja, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tem norma igual à área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

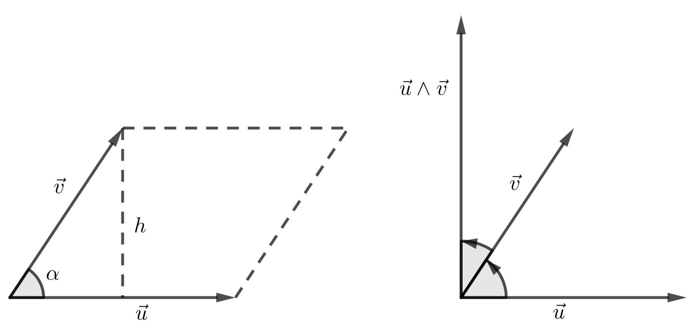


Figura 4.2: Base ortonormal positiva.

4.1.2 Produto vetorial via coordenadas

Dados $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ em uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{4.2}$$

Observação 4.1.1. Uma regra mnemônica, é

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{4.3}$$

Exemplo 4.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1,-2,1)$ e $\vec{v} = (0,2,-1)$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && (4.4)\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} && (4.5)\\
&= 0\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} && (4.6)\\
&= (0,1,2). && (4.7)
\end{aligned}$$

4.1.3 Exercícios

Em construção ...

4.2 Propriedades do produto vetorial

Nesta seção, discutiremos sobre algumas propriedades do produto vetorial. Para tanto, sejam dados os vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$ e o número real γ.
Da definição do produto vetorial, temos $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ e $\vec{v} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$, logo

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0. \tag{4.8}$$

Em relação à multiplicação por escalar, temos

$$\gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\gamma\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}). \tag{4.9}$$

De fato,

$$\begin{align}
(\gamma\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \gamma u_1 & \gamma u_2 & \gamma u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.10}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \gamma v_1 & \gamma v_2 & \gamma v_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \wedge (\gamma\vec{v}) \tag{4.11}\\
&= \gamma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \gamma(\vec{u} \wedge \vec{v}). \tag{4.12}\\
& \tag{4.13}
\end{align}$$

Também, vale a propriedade distributiva com a operação de soma, i.e.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \tag{4.14}$$

De fato, temos

$$\begin{align}
\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & u_3 + w_3 \end{vmatrix} \tag{4.15}\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.16}\\
&= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \tag{4.17}
\end{align}$$

Observamos que o produto vetorial não é comutativo, entretanto

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{4.18}$$

De fato, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{4.19}$$

$$= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

$$= -\vec{v} \wedge \vec{u}. \tag{4.21}$$

Também, o produto vetorial não é associativo sendo $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, em geral, diferente de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. Com efeito, temos

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}, \tag{4.22}$$

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}. \tag{4.23}$$

Por outro lado, suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. e seja π um plano determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a π. Como $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e a $\vec{w}$, temos que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ também pertence a π. Logo, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ são l.d. e existem α e β tais que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}. \tag{4.24}$$

Vamos determinar α e β. Para tanto, consideremos uma base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j} \in \pi$. Nesta base, temos

$$\vec{u} = (u_1,0,0) \tag{4.25}$$

$$\vec{v} = (v_1,v_2,0) \tag{4.26}$$

$$\vec{w} = (w_1,w_2,w_3). \tag{4.27}$$

Também, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.28}$$

$$= (0,0,u_1v_2) \tag{4.29}$$

e

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & u_1v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{4.30}$$

$$= (-u_1v_2w_2, u_1v_2w_1, 0). \tag{4.31}$$

Daí, temos

$$\alpha(u_1,0,0) + \beta(v_1,v_2,0) = (-u_1v_2w_2, u_1v_2w_1, 0), \tag{4.32}$$

donde

$$-u_1v_2w_2 = \alpha u_1 + \beta v_1, \tag{4.33}$$

$$u_1w_1v_2 = \beta v_2. \tag{4.34}$$

Resolvendo, obtemos

$$\alpha = -v_1w_1 - v_2w_2 = -\vec{v} \cdot \vec{w} \tag{4.35}$$

$$\beta = \vec{u}\vec{w}. \tag{4.36}$$

Portanto, temos

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}. \tag{4.37}$$

Usando a identidade acima, obtemos

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} \tag{4.38}$$

$$= (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} \tag{4.39}$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \tag{4.40}$$

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 5

Produto misto

Ao longo deste capítulo, assumiremos trabalhar com uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5.1 Definição

O **produto misto** de três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nesta ordem, é definido por

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] := \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}. \tag{5.1}$$

Em coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &:= \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} &(5.2)\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{w} &(5.3)\\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} \right. &(5.4)\\
&+ \left. \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (w_1,w_2,w_3) &(5.5)\\
&= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 &(5.6)\\
&= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} &(5.7)\\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &(5.8)
\end{aligned}
$$

Exemplo 5.1.1. Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (1,0,2)$ e $\vec{w} = (1,-1,1)$, temos

$$
\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &(5.9)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. &(5.10)
\end{aligned}
$$

5.1.1 Propriedades

Valem as seguintes propriedades:

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$

c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

d) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$

e) $[\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

f) $[\vec{u} + \vec{u}',\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.4. Verdadeira.

E 1.1.5. Dica: $ABCD$ determina um paralelogramo.

E 1.2.2. Dica: M é o ponto médio do segmento orientado $AB = CB - AC$.

E 1.2.3. $|\vec{v}| = 1$.

E 1.2.4. a) verdadeira; b) verdadeira.

E 2.1.1. Dica: os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são l.d..

E 2.1.2. Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

E 2.1.3. Três vetores são l.d. se, e somente se, eles são coplanares.

E 2.1.4. Não.

E 2.1.5. a) falsa; b) verdadeira; c) falsa; d) verdadeira.

Referências Bibliográficas

[1] I. Camargo and P. Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. Pearson, 3. edition, 2005.

[2] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo