

# Cálculo I

Pedro H A Konzen

26 de março de 2019

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre cálculo de funções de uma variável.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
<b>1 Fundamentos sobre funções</b>	<b>1</b>
1.1 Definição e gráfico . . . . .	1
1.2 Tipos de funções . . . . .	4
1.2.1 Funções lineares . . . . .	4
1.2.2 Funções potência . . . . .	5
1.2.3 Funções polinomiais . . . . .	8
1.2.4 Funções racionais . . . . .	9
1.2.5 Funções algébricas . . . . .	9
1.2.6 Funções transcendentais . . . . .	10
1.2.7 Funções definidas por partes . . . . .	10
1.3 Funções trigonométricas . . . . .	11
1.3.1 Seno e cosseno . . . . .	11
1.3.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante . . . . .	14
1.3.3 Identidades trigonométricas . . . . .	16
1.4 Operações com funções . . . . .	17
1.4.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes . . . . .	17
1.4.2 Funções compostas . . . . .	17
1.4.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos . . . . .	18
1.4.4 Translações . . . . .	18
1.4.5 Dilatações e contrações . . . . .	18

1.4.6	Reflexões . . . . .	18
1.5	Propriedades de funções . . . . .	19
1.5.1	Funções crescentes ou decrescentes . . . . .	19
1.5.2	Funções pares ou ímpares . . . . .	19
1.5.3	Funções injetoras . . . . .	20
1.6	Funções exponenciais . . . . .	21
1.7	Funções logarítmicas . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Limites</b>	<b>24</b>
2.1	Noção de limites . . . . .	24
2.1.1	Limites da função constante e da função identidade . . . . .	25
2.2	Regras para o cálculo de limites . . . . .	28
2.2.1	Indeterminação $0/0$ . . . . .	31
2.3	Limites laterais . . . . .	33
2.4	Limites e desigualdades . . . . .	36
2.4.1	Teorema do confronto . . . . .	36
2.4.2	Limites envolvendo $(\sin x)/x$ . . . . .	38
2.5	Limites no infinito . . . . .	40
2.6	Limites infinitos . . . . .	40
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>41</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>42</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1

## Fundamentos sobre funções

Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos Python com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_session()
```

### 1.1 Definição e gráfico

Uma **função** de um conjunto  $D$  em um conjunto  $Y$  é uma regra que associa um único elemento  $y \in Y$ <sup>1</sup> a cada elemento  $x \in D$ . Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo,  $f$  e escrevemos  $f : D \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ , para denotar que a função  $f$  toma valores de entrada em  $D$  e de saída em  $Y$ .

O conjunto  $D$  de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores  $f(x)$  tal que  $x \in D$  é chamado de **imagem** da função.

Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

**Exemplo 1.1.1.** Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

---

<sup>1</sup> $y \in Y$  denota que  $y$  é um elemento do conjunto  $Y$ .

- $y = x^2$ :
  - Para qualquer número real  $x$ , temos que  $x^2$  também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)<sup>2</sup> é o conjunto  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .
  - Para cada número real  $x$ , temos  $y = x^2 \geq 0$ . Além disso, para cada número real não negativo  $y$ , temos que  $x = \sqrt{y}$  é tal que  $y = x^2$ . Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e.  $[0, \infty)$ .
- $y = 1/x$ :
  - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
  - Primeiramente, observemos que se  $y = 0$ , então não existe número real tal que  $0 = 1/x$ . Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número  $y \neq 0$ , temos que  $x = 1/y$  é tal que  $y = 1/x$ . Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e.  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
- $y = \sqrt{1 - x^2}$ :
  - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \quad (1.2)$$

Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$  (ou, equivalentemente, o intervalo  $[-1, 1]$ ).

Com o SymPy, podemos usar o comando

```
reduce_inequalities(1-x**2>=0, [x])
```

para resolvermos a inequação  $1 - x^2 \geq 0$ .

---

<sup>2</sup>O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.

- Uma vez que  $-1 \leq x \leq 1$ , temos que  $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$  e, portanto,  $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ . Ou seja, a imagem desta função é o intervalo  $[0, 1]$ .

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$  tal que  $x$  pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \quad (1.3)$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

**Exemplo 1.1.2.** A Figura 1.1 mostra os esboços dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

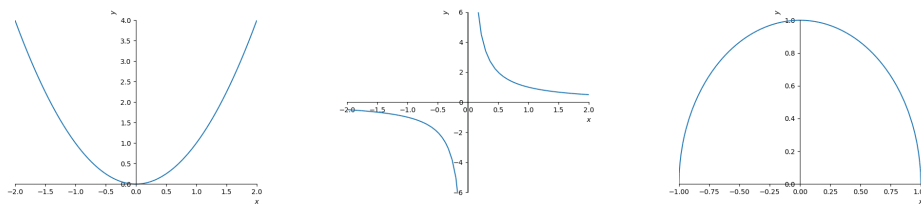


Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1/x$  e  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$  dadas no Exemplo 1.1.2.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando **SymPy** podemos usar os seguintes comandos:

```
plot(x**2, (x, -2, 2))
plot(1/x, (x, -1, 1), ylim=(-10, 10))
plot(sqrt(1-x**2), (x, -1, 1))
```

## Exercícios

Em construção ...



## 1.2 Tipos de funções

Nesta seção, vamos ressaltar alguns tipos de funções que aparecerem com frequência nos estudos de cálculo.

### 1.2.1 Funções lineares

Uma **função linear** é uma função da forma  $f(x) = mx + b$ , sendo  $m$  e  $b$  parâmetros<sup>3</sup> dados. Recebe este nome, pois seu gráfico é uma linha (uma reta)<sup>4</sup>.

Quando  $m = 0$ , temos uma **função constante**  $f(x) = b$ . Esta tem domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $\{b\}$ . Por outro lado, toda função linear com  $m \neq 0$  tem  $(-\infty, \infty)$  como domínio e imagem.

**Exemplo 1.2.1.** A Figura 1.2 mostra esboços dos gráficos das funções lineares  $f(x) = -5/2$ ,  $f(x) = 2$  e  $f(x) = 2x - 1$ .

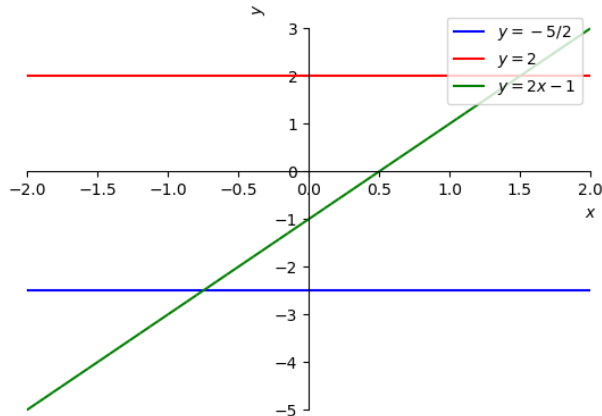


Figura 1.2: Esboços dos gráficos das funções lineares  $y = -5/2$ ,  $y = 2$  e  $y = 2x - 1$  discutidas no Exemplo 1.2.1.

<sup>3</sup>números reais.

<sup>4</sup>Não confundir com o conceito de linearidade de operadores.

**Observação 1.2.1.** O lugar geométrico do gráfico de uma função linear é uma reta (ou linha). O parâmetro  $m$  controla a inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ <sup>5</sup>. Quando  $m = 0$ , temos uma reta horizontal. Quando  $m > 0$  temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando  $m < 0$  temos uma reta com inclinação negativa. Verifique!

Quaisquer dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , com  $x_0 \neq x_1$ , determinam uma única função linear (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \quad (1.4)$$

$$mx_1 + b = y_1 \quad (1.5)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \quad (1.6)$$

Daí, substituindo o valor de  $m$  na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0. \quad (1.7)$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_m (x - x_0) + y_0. \quad (1.8)$$

## 1.2.2 Funções potência

Uma função da forma  $f(x) = x^n$ , onde  $n \neq 0$  é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de  $n$ . Quando  $n$  é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são  $(-\infty, \infty)$ . Veja a Figura 1.3.

---

<sup>5</sup>eixo das abscissas

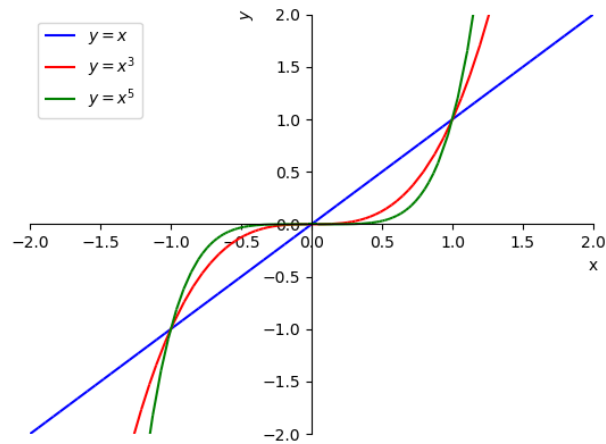


Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x$ ,  $y = x^3$  e  $y = x^5$ .

Funções potências com  $n$  positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem  $[0, \infty)$ . Veja a Figura 1.4.

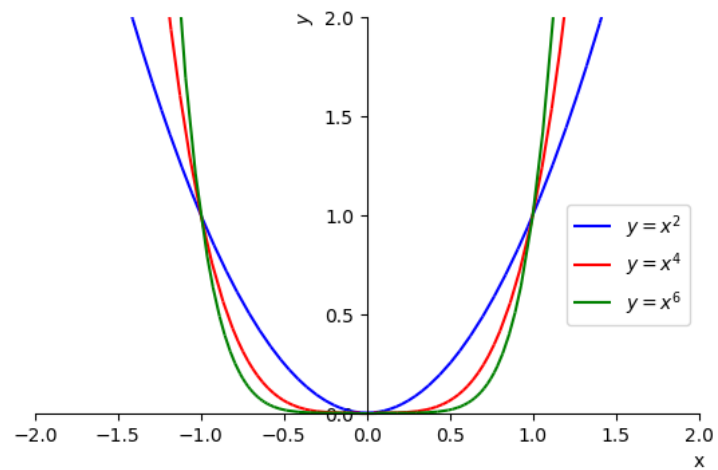


Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = x^2$ ,  $y = x^4$  e  $y = x^6$ .

Funções potências com  $n$  inteiro negativo ímpar não são definidas em  $x = 0$ , tendo domínio e imagem igual a  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Também, quando  $n$  inteiro negativo par, a função potência não está definida em  $x = 0$ , tem domínio  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , mas imagem  $(0, \infty)$ . Veja a Figura 1.5.

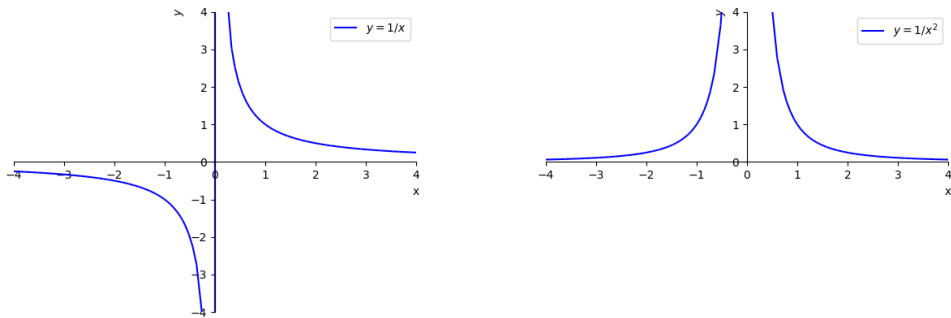


Figura 1.5: Esboços dos gráficos das funções potências  $y = 1/x$  (esquerda),  $y = 1/x^2$  (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando  $n = 1/2$ ,  $1/3$ ,  $3/2$  e  $2/3$ . Veja a Figura 1.6.

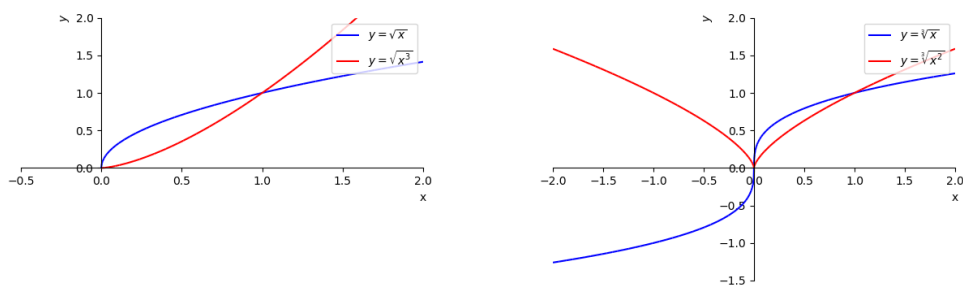


Figura 1.6: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda  $y = \sqrt{x}$  e  $y = \sqrt{x^3}$ . Direita:  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

### 1.2.3 Funções polinomiais

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.9)$$

onde  $a_i$  são coeficientes reais,  $a_n \neq 0$  e  $n$  é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte<sup>6</sup>. Polinômios de grau ímpar tem imagem  $(-\infty, \infty)$ . Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.7.

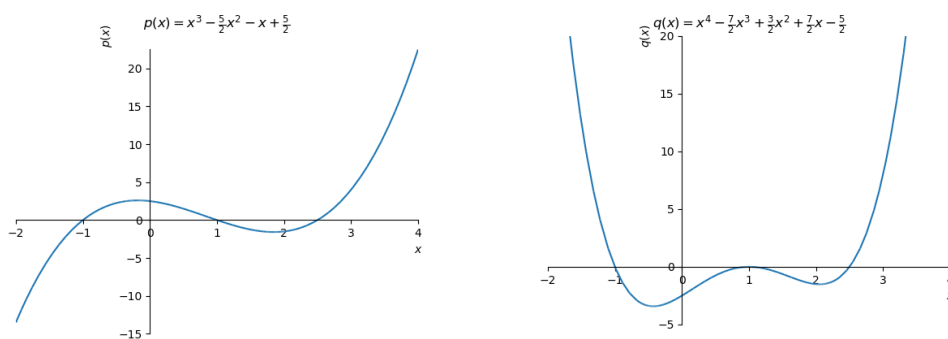


Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda  $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$ . Direita:  $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$ .

Quando  $n = 0$ , temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando  $n = 1$ , temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função linear). Ainda, quando  $n = 2$  temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando  $n = 3$ , temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

---

<sup>6</sup>Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é  $(\infty, \infty)$

### 1.2.4 Funções racionais

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (1.10)$$

onde  $p(x)$  e  $q(x) \neq 0$  são polinômios.

Funções racionais não estão definidas nos zeros de  $q(x)$ . Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.8.

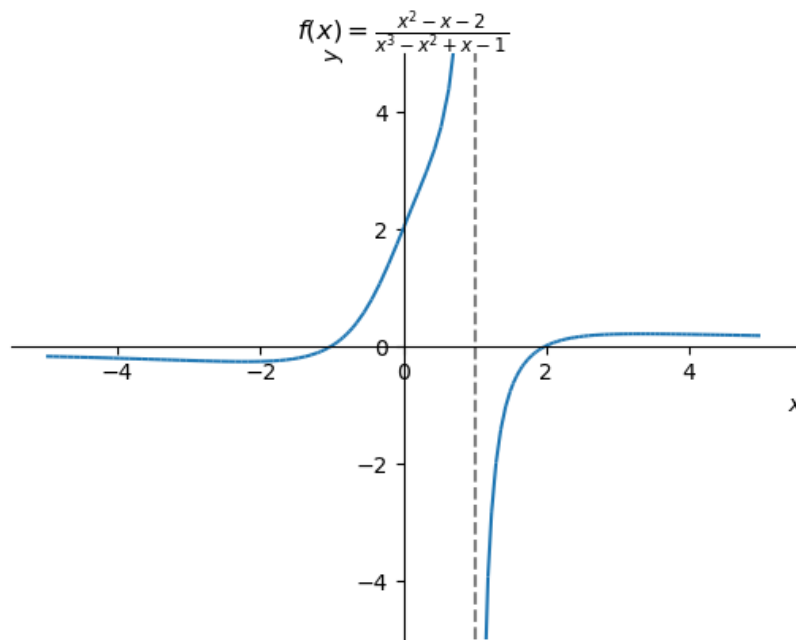


Figura 1.8: Esboço do gráfico da função racional  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$ .

### 1.2.5 Funções algébricas

**Funções algébricas** são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

## 1.2.6 Funções transcendentas

**Funções transcendentas** são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

## 1.2.7 Funções definidas por partes

**Funções definidas por partes** são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

**Exemplo 1.2.2.** Consideremos a seguinte função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0, \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Observemos que tanto o domínio como a imagem desta função são  $(-\infty, \infty)$ . A Figura 1.9 mostra o esboço do gráfico desta função.

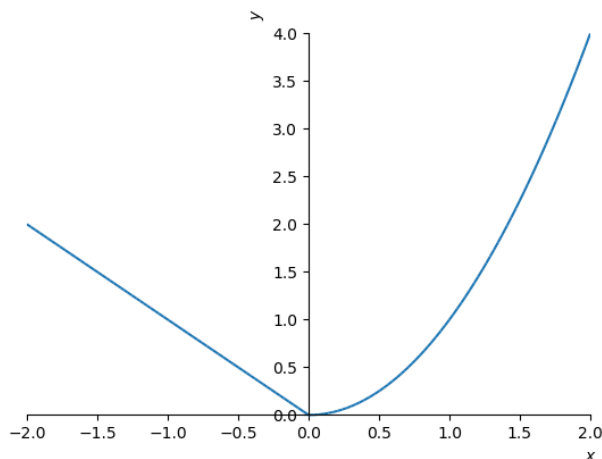


Figura 1.9: Esboço do gráfico da função definida por partes  $f(x)$  dada no Exemplo 1.2.2.

Um exemplo de função definida por partes fundamental é a **função valor absoluto**<sup>7</sup>

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 1.10.

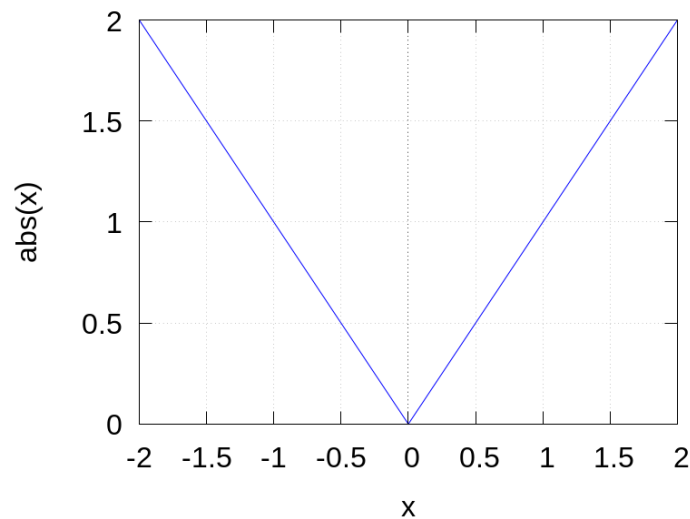


Figura 1.10: Esboço do gráfico da função valor absoluto  $y = |x|$ .

## Exercícios

Em construção ...

## 1.3 Funções trigonométricas

### 1.3.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno  $y = \text{sen}(x)$  e cosseno  $y = \text{cos}(x)$  podem ser definidas a a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura 1.11). Seja  $x$  o ângulo<sup>8</sup> de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano

---

<sup>7</sup>Esta função também pode ser definida por  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

<sup>8</sup>Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.



(reta  $r$  na Figura 1.11). Seja, então,  $(a,b)$  o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária<sup>9</sup>. Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = a, \quad \cos(x) = b. \quad (1.13)$$

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio  $(-\infty, \infty)$  e imagem  $[-1, 1]$ .

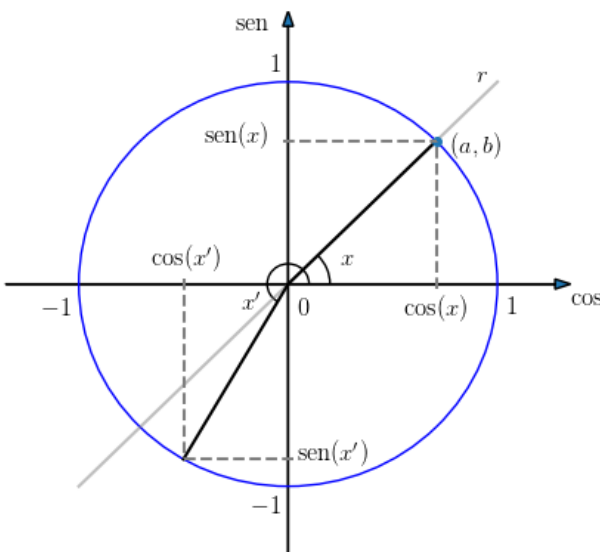


Figura 1.11: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 1.12 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para

---

<sup>9</sup>Circunferência do círculo de raio 1.

os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (1.16)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

As funções seno e cosseno estão definidas no **SymPy** como **sin** e **cos**, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de  $\pi/6$ , digitamos:

`sin(pi/6)`

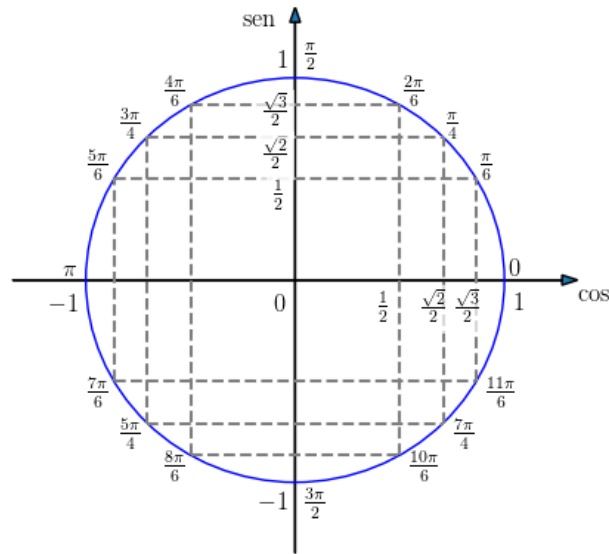


Figura 1.12: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função**  $f(x)$  é dita **periódica** quando existe um número  $p$ , chamado de período da função, tal que

$$f(x + p) = f(x) \quad (1.19)$$

para qualquer valor de  $x$  no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período  $2\pi$ , i.e.

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (1.20)$$

para qualquer valor de  $x$ .

Na Figura 1.13, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

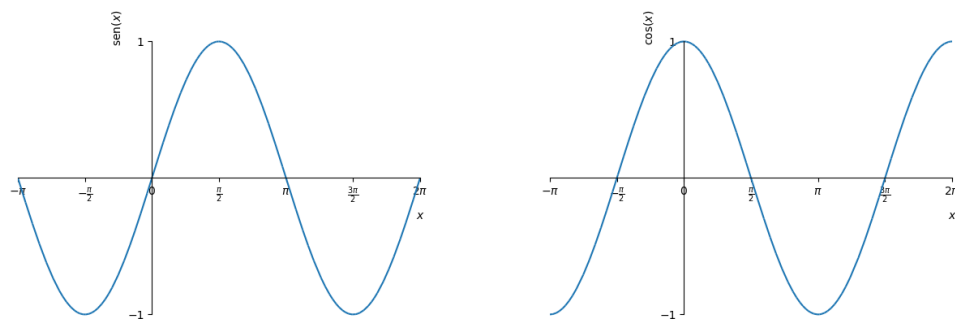


Figura 1.13: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

### 1.3.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad (1.21)$$

$$\operatorname{sec}(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \quad (1.22)$$

No `SymPy`, as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções `tan`, `cot`, `sec` e `csc`, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de  $\operatorname{cosec}(\pi/4)$  com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura 1.14, temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, \infty)$  e período  $\pi$ .

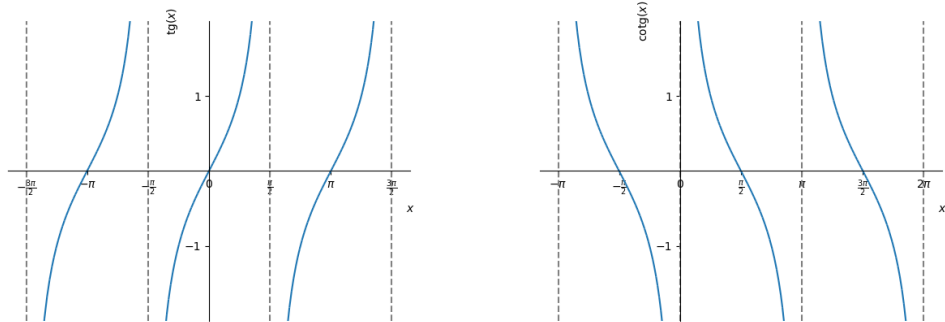


Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura 1.15, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos  $(2k + 1)\pi/2$ , para todo  $k$  inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos  $k\pi$ , para todo  $k$  inteiro. Ambas estas funções têm imagem  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  e período  $\pi$ .

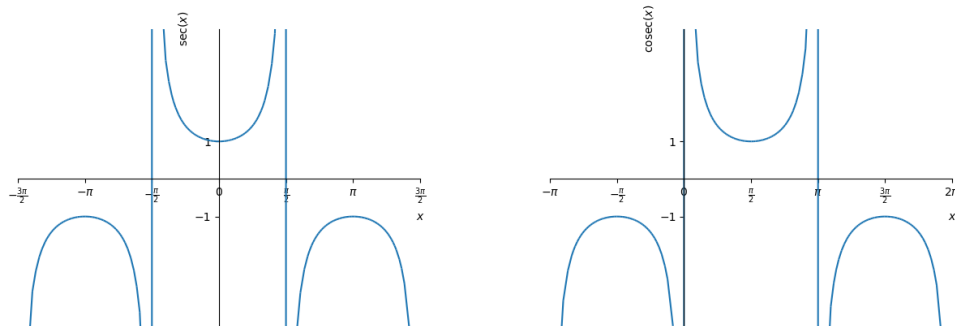


Figura 1.15: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

### 1.3.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Começemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1.23)$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \quad (1.24)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \quad (1.25)$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.26)$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.27)$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (1.28)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (1.29)$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (1.31)$$

## Exercícios

Em construção ...

## 1.4 Operações com funções

### 1.4.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$  com domínio em comum  $D$ . Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$  para todo  $x \in D$ ;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$  para todo  $x \in D$  tal que  $g(x) \neq 0$ .

**Exemplo 1.4.1.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x$ . Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$  e está definida em toda parte.
- $(g - f)(x) = x - x^2$  e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$  e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$  e tem domínio  $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ <sup>10</sup>.

### 1.4.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções  $f$  e  $g$ . Definimos a **função composta** de  $f$  com  $g$  por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \quad (1.32)$$

Seu domínio consiste dos valores de  $x$  que pertençam ao domínio da  $g$  e tal que  $g(x)$  pertença ao domínio da  $f$ .

**Exemplo 1.4.2.** Sejam  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ . A função composta  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ .

---

<sup>10</sup>Observemos que não podemos simplificar o  $x$ , pois a função  $y = x$  é diferente da função  $y = x^2/x$ .

### 1.4.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

### 1.4.4 Translações

Dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que a o gráfico de  $y = f(x) + k$  é uma translação vertical do gráfico de  $f$ . Se  $k > 0$ , observamos uma translação vertical para cima. Se  $k < 0$ , observamos uma translação vertical para baixo.

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função  $f$  e uma constante  $k \neq 0$ , temos que o gráfico de  $y = f(x + k)$  é uma translação horizontal do gráfico de  $f$  em  $k$  unidades. Se  $k > 0$ , observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se  $k < 0$ , observamos uma translação horizontal para a direita.

### 1.4.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função  $f$  e uma constante  $\alpha$ . Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$  é uma dilatação vertical do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = \alpha f(x)$  é uma contração vertical do gráfico de  $f$ , quando  $0 < \alpha < 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma contração horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha > 1$ ;
- $y = f(\alpha x)$  é uma dilatação horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $\alpha < 1$ .

### 1.4.6 Reflexões

Seja dada uma função  $f$ . O gráfico da função  $y = -f(x)$  é uma reflexão em torno do eixo  $x$  do gráfico da função  $f$ . Já, o gráfico da função  $y = f(-x)$  é uma reflexão em torno do eixo  $y$  do gráfico da função  $f$ .

## Exercícios

Em construção ...

## 1.5 Propriedades de funções

### 1.5.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma função  $f$  é dita crescente quando  $f(x_1) < f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$  no seu domínio. É dita não decrescente quando  $f(x_1) \leq f(x_2)$  para todos os  $x_1 < x_2$  no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando  $f(x_1) > f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ . E, por fim, é dita não crescente quando  $f(x_1) \geq f(x_2)$  para todos  $x_1 < x_2$ , sempre no seu domínio.

**Exemplo 1.5.1.** Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade**  $f(x) = x$  é crescente.
- A função exponencial  $f(x) = e^{-x}$  é decrescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0, \\ 2 & , 0 < x \leq 1, \\ (x - 1)^2 + 2 & , x > 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

é não decrescente.

### 1.5.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função**  $f$  é dita **par** quando  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x$  no seu domínio.

**Exemplo 1.5.2.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  é uma função par.
- $f(x) = x^3$  é uma função ímpar.



- $f(x) = \sin x$  é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$  é uma função par.
- $f(x) = x + 1$  não é par nem ímpar.

### 1.5.3 Funções injetoras

Uma dada **função**  $f$  é dita **injetora** quando  $f(x_1) \neq f(x_2)$  para todos  $x_1 \neq x_2$  no seu domínio.

**Exemplo 1.5.3.** Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$  não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$  é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$  é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora  $y = f(x)$ , existe uma única função  $g$  tal que

$$g(f(x)) = x, \quad (1.34)$$

para todo  $x$  no domínio da  $f$ . Tal função  $g$  é chamada de **função inversa** de  $f$  é comumente denotada por  $f^{-1}$ .<sup>11</sup>

**Exemplo 1.5.4.** Vamos calcular a função a função inversa de  $f(x) = x^3 + 1$ . Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \quad (1.35)$$

Então, isolando  $x$ , temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \quad (1.36)$$

Desta forma, concluímos que  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ . Verifique que  $f^{-1}(f(x)) = x$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ !

**Observação 1.5.1.** Os gráficos de uma dada função injetora  $f$  e de sua inversa  $f^{-1}$  são simétricos em relação a **reta identidade**  $y = x$ .

---

<sup>11</sup>Observe que, em geral,  $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ .

## Exercícios

Em construção ...

## 1.6 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \quad (1.37)$$

onde  $a \neq 1$  é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem  $(0, \infty)$ . O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos  $(-1, 1/a)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, a)$ . Veja a Figura 1.16.

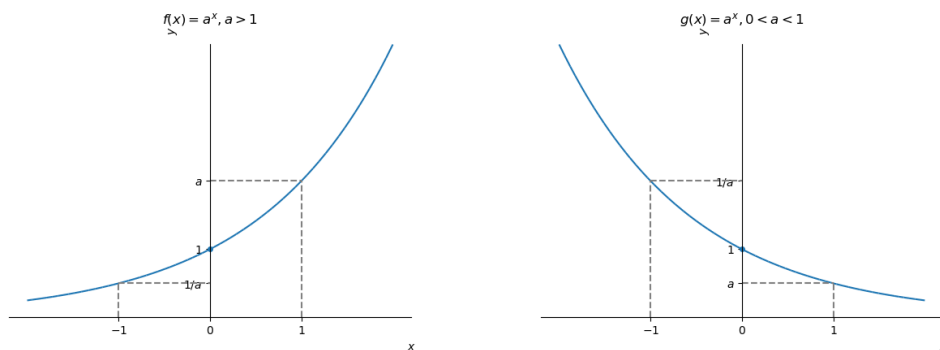


Figura 1.16: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $g(x) = a^x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.6.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $f(x) = e^x$  de função exponencial natural.

No SymPy, o número de Euler é obtido com a constante E:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

## Exercícios

Em construção ...

## 1.7 Funções logarítmicas

A **função logarítmica**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , é a função inversa da função exponencial  $y = a^x$ . Veja a Figura 1.17. O domínio da função logarítmica é  $(0, \infty)$  e a imagem  $(-\infty, \infty)$ .

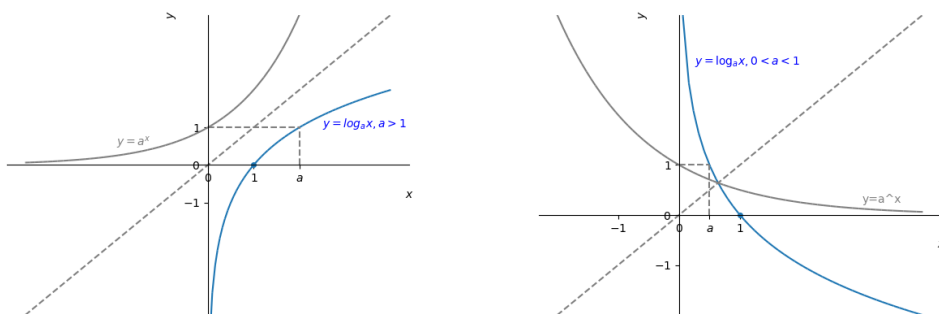


Figura 1.17: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda)  $y = \log_a x$ ,  $a > 1$ ; (direita)  $y = \log_a x$ ,  $0 < a < 1$ .

**Observação 1.7.1.** Quando a base é o número de Euler  $e \approx 2,718281828459045$ , chamamos  $y = \log_e x$  de função exponencial natural e denotamo-la por  $y = \ln x$ .

No SymPy, podemos computar  $\log_a x$  com a função `log(x,a)`. O  $\ln x$  é computado com `log(x)`.

**Observação 1.7.2.** Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ ;
- $\log_a 1 = 0$ ;
- $\log_a a = 1$ ;

- $\log_a a^x = x$ ;
- $a^{\log_a x} = x$ ;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ .

## Exercícios

Em construção ...

# Capítulo 2

## Limites

### 2.1 Noção de limites

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto  $x_0$ , exceto talvez em  $x_0$ . Quando o valor de  $f(x)$  é arbitrariamente próximo de um número  $L$  para  $x$  suficientemente próximo de  $x_0$ , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (2.1)$$

e dizemos que o limite da função  $f$  é  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$ .

**Exemplo 2.1.1.** Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (2.2)$$

Na Figura [2.1](#), temos um esboço do gráfico desta função.



Figura 2.1: Esboço do gráfico da função  $f(x)$  dada no Exemplo 2.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

$x$	-0,01	-0,001	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01

No SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , embora  $f(1)$  não esteja definido.

$x$	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , embora  $f(2)$  também não esteja definido. Verifique!

### 2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

Da noção de limite, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (2.3)$$

seja qual for a constante  $k$ . Vejamos a Figura 2.2.

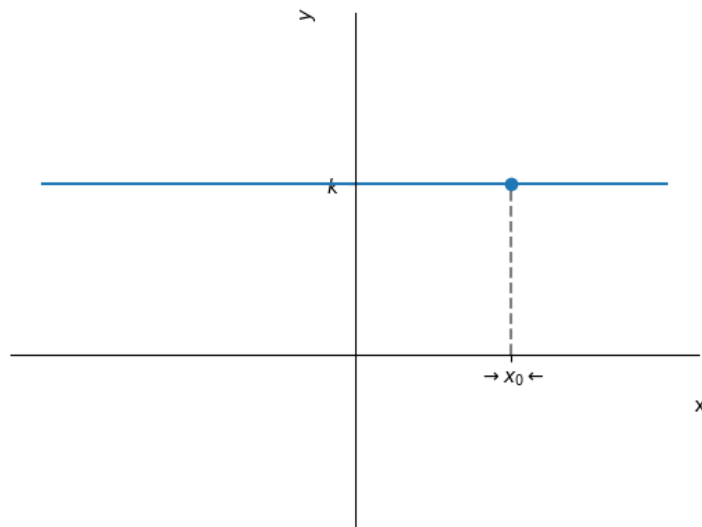


Figura 2.2: Esboço do gráfico de uma função constante  $f(x) = k$ .

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (2.4)$$

seja qual for o ponto  $x_0$ . Vejamos a Figura 2.3.

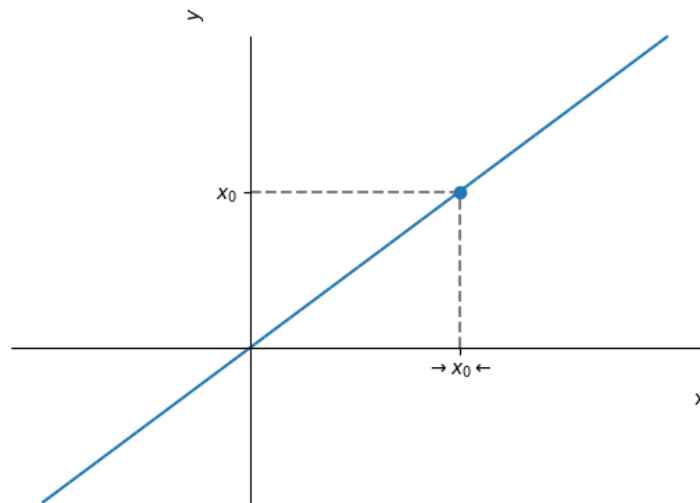


Figura 2.3: Esboço do gráfico da função identidade  $f(x) = x$ .

## Exercícios

**E 2.1.1.** Considere que uma dada função  $f$  tenha o seguinte esboço de

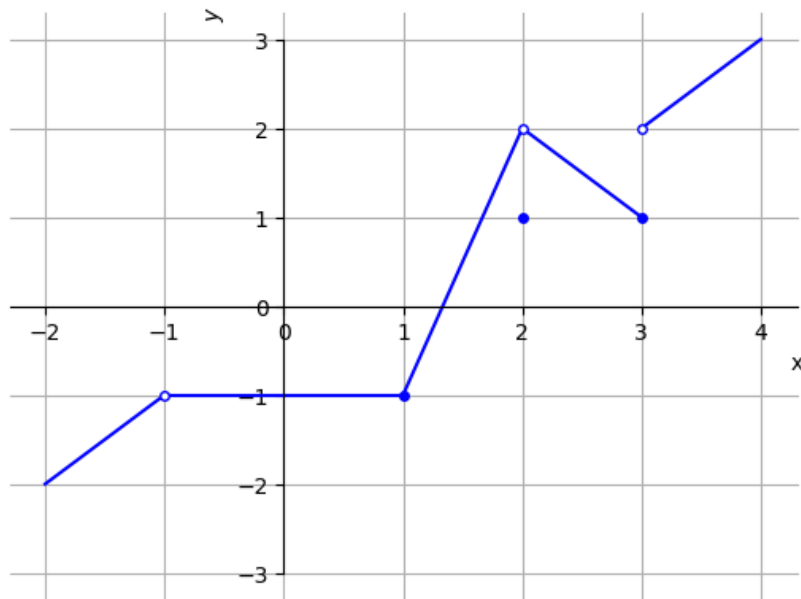


gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**E 2.1.2.** Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercícios 2.1.1), forneça

1.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

Em construção ...

## 2.2 Regras para o cálculo de limites

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2, \quad (2.5)$$

com  $x_0, L_1, L_2$  números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL_1, \quad (2.6)$$

para qualquer número real  $k$ .

- Regra da soma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2 \quad (2.7)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.8)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.9)$$

desde que  $L_2 \neq 0$ .

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = L_1^s, \quad (2.10)$$

se  $L_1^s$  é um número real.

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (2.11)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (2.12)$$

No **SymPy**, podemos computar este limite com

```
limit(2*x,x,-1)
```

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.13)$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.14)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (2.15)$$

No **SymPy**, podemos computar este limite com

`limit(x**2-1,x,-1)`

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2}.$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} 1-x^2} \quad (2.16)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow -1} x\right)^2} \quad (2.17)$$

$$= \sqrt{1 - (-1)^2} \quad (2.18)$$

$$= 0. \quad (2.19)$$

No SymPy, podemos computar este limite com

`limit(sqrt(1-x**2),x,-1)`

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1)(x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)} \quad (2.21)$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1. \quad (2.22)$$

**Proposição 2.2.1.** (Limites de polinômios) Se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.23)$$

para qualquer número real  $b$  dado.

*Demonstração.* Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação. Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.24)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (2.25)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.26)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = p(b). \quad (2.27)$$

□

**Exemplo 2.2.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}. \quad (2.28)$$

No SymPy, podemos computar este limite com o comando

```
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

**Proposição 2.2.2.** (Limite de funções racionais) Sejam  $r(x) = p(x)/q(x)$  é uma função racional e  $b$  um número real tal que  $q(b) \neq 0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.29)$$

*Demonstração.* Segue da regra do limite do quociente e da Proposição 2.2.1:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (2.30)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.31)$$

□

**Exemplo 2.2.3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = 1. \quad (2.32)$$

**2.2.1 Indeterminação 0/0**

Quando  $f(a) = 0$  e  $g(a) = 0$ , dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.33)$$

é uma indeterminação do tipo 0/0. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum  $(x - a)$ .

**Exemplo 2.2.4.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3. \quad (2.34)$$

No SymPy, podemos computar o limite acima com

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

**Exemplo 2.2.5.** No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (2.35)$$

temos que o denominador  $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  se anula em  $x = 1$ , assim como o denominador  $q(x) = x^2 + x - 2$ . Assim sendo,  $(x - 1)$  é um fator em comum entre  $p(x)$  e  $q(x)$ . Para explicitá-lo,

$$\frac{p(x)}{x - 1} = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad \frac{q(x)}{x - 1} = x + 2. \quad (2.36)$$

No SymPy, podemos computar estas divisões com os seguintes comandos

```
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad \text{e} \quad q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (2.37)$$

Com isso, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (2.38)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (2.39)$$

**Exemplo 2.2.6.** No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (2.40)$$

temos uma indeterminação do tipo  $0/0$  envolvendo uma raiz. Neste caso,

podemos calcular o limite usando de racionalização

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (2.41)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.42)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.43)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.44)$$

Com o SymPy, podemos computar este limite com

```
limit((sqrt(1-x)-1)/x,x,0)
```

## Exercícios

**E 2.2.1.** Assumindo que o  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$  e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (2.45)$$

forneça o valor de  $L$ .

Em construção ...

## 2.3 Limites laterais

Seja dada uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(L, a)$ , sendo  $a$  um número real com  $L < a$  podendo ser  $L = -\infty$ . O **limite lateral à esquerda** de  $f$  no ponto  $a$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (2.46)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x < a$ . Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (2.47)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x < a$  suficientemente próximo de  $a$ .

Para uma função  $f$  definida para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(a, L)$ , sendo  $a$  um número real com  $L > a$  podendo ser  $L = \infty$ , o **limite lateral à direita** de  $f$  no ponto  $a$  é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (2.48)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos  $x > a$ . Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad (2.49)$$

quando  $f(x)$  pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $L$ , desde que tomemos  $x > a$  suficientemente próximo de  $a$ .

**Observação 2.3.1.** Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} x = a^\pm, \quad (2.50)$$

onde  $a$  e  $k$  são quaisquer números reais.

**E 2.3.1.** Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (2.51)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de  $x = 0$ , trabalhamos com  $x < 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (2.53)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (2.54)$$

Verifique!

Usando o **SymPy**, podemos computar os limites acima com os seguintes comandos:

```
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

**Teorema 2.3.1.** *Existe o limite de uma dada função  $f$  no ponto  $x = a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e somente se, existem e são iguais a  $L$  os limites laterais à esquerda e à direita de  $f$  no ponto  $x = a$ .*

**E 2.3.2.** No exemplo anterior (Exemplo 2.3.1), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (2.55)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema 2.3.1), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (2.56)$$

**E 2.3.3.** Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (2.57)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (2.58)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (2.59)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (2.60)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (2.61)$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, concluímos que não existe o limite de  $|x|/x$  no ponto  $x = 0$ .

No **Sympy**, por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

```
limit(abs(x)/x,x,0)
```

fornece o valor 1 como saída.



## Exercícios

Em construção ...

## 2.4 Limites e desigualdades

Se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x$  em um certo intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e existem os limites de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (2.62)$$

Observe que a tomada do limite não preserva a desigualdade estrita.

**E 2.4.1.** As funções  $f(x) = x^2/3$  e  $g(x) = x^2/2$  são tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \neq 0$ . Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (2.63)$$

**Observação 2.4.1.** A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se  $f$  e  $g$  são funções tais que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x < a$  e existem os limites lateral à esquerda de  $f$  e  $g$  no ponto  $x = a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x). \quad (2.64)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita. Escreva-o!

### 2.4.1 Teorema do confronto

**Teorema 2.4.1.** (Teorema do confronto) Se  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  em um intervalo aberto contendo  $a$ , exceto possivelmente em  $x = a$ , e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (2.65)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (2.66)$$

*Demonstração.* Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (2.67)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (2.68)$$

□

**E 2.4.2.** Toda função  $f(x)$  tal que  $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$ , para todo  $x \neq 0$ , tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (2.69)$$

**Observação 2.4.2.** O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

**Exemplo 2.4.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2.70)$$

De fato, começamos assumindo  $0 < x < \pi/2$ . Tomando  $O = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ , observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (2.71)$$

i.e.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x, \quad (2.72)$$

para todo  $0 < x < \pi/2$ .

É certo que  $\operatorname{sen} x < -x$  para  $-\pi/2 < x < 0$ . Com isso e o resultado acima, temos

$$\operatorname{sen} x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.73)$$

Lembrando que  $\operatorname{sen} x$  é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.74)$$

Logo, de (2.73) e (2.74), temos

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|. \quad (2.75)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (2.76)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0. \quad (2.77)$$

**Observação 2.4.3.** Do exemplo anterior (Exemplo 2.4.1), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.78)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade (1.31)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (2.79)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (2.80)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right] \quad (2.81)$$

$$= 1 + 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2. \quad (2.82)$$

Agora, fazemos a mudança de variável  $y = x/2$ . Neste caso, temos  $y \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$  e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} y = 0. \quad (2.83)$$

Então, retornando a equação (2.82), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.84)$$

## 2.4.2 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.85)$$

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos  $0 < x < \pi/2$ . Sendo os pontos  $O = (0,0)$ ,  $P = (\cos x, \sin x)$ ,  $A = (1,0)$  e  $T = (1, \tan x)$ , observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (2.86)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}. \quad (2.87)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por  $\sin x$ <sup>1</sup>, obtemos

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2.88)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (2.89)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (2.90)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.91)$$

Agora, usando o fato de que  $\sin x/x$  é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} \quad (2.92)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.93)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

**Exemplo 2.4.2.** Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (2.94)$$

Veja o Exercício 2.4.5.

---

<sup>1</sup> $\sin x > 0$  para todo  $0 < x < \pi/2$ .

## Exercícios

**E 2.4.3.** Supondo que  $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$  para todo  $x \neq 0$ , determine o  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ .

**E 2.4.4.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}. \quad (2.95)$$

**E 2.4.5.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (2.96)$$

**E 2.4.6.** Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (2.97)$$

Em construção ...

## 2.5 Limites no infinito

Em construção ...

## Exercícios

## 2.6 Limites infinitos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 2.1.1.** a)  $-1$ ; b)  $-1$ ; c)  $2$ ; d)  $\nexists$

**E 2.2.1.**  $6$

**E 2.4.3.**  $1$

**E 2.4.4.**  $0$

**E 2.4.5.**  $0$

**E 2.4.6.**  $\frac{1}{2}$

# Referências Bibliográficas

- [1] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

# Índice Remissivo

- base, [21](#)
- domínio, [1](#)
  - natural, [2](#)
- função, [1](#)
  - ímpar, [19](#)
  - algébrica, [9](#)
  - cúbica, [8](#)
  - composta, [17](#)
  - constante, [4](#)
  - cossecante, [14](#)
  - cotangente, [14](#)
  - definida por partes, [10](#)
  - exponencial, [21](#)
  - identidade, [19](#)
  - inversa, [20](#)
  - linear, [4](#)
  - logarítmica, [22](#)
  - par, [19](#)
  - periódica, [13](#)
  - potência, [5](#)
  - quadrática, [8](#)
  - racional, [9](#)
  - secante, [14](#)
  - tangente, [14](#)
  - transcendente, [10](#)
  - valor absoluto, [11](#)
- função polinomial, [8](#)
- gráfico, [3](#)
- grau do polinômio, [8](#)
- imagem, [1](#)
- polinômio, [8](#)
  - quadrático, [8](#)
- polinômio cúbico, [8](#)
- reta
  - identidade, [20](#)