Pré-Cálculo

Pedro H A Konzen

22 de junho de 2022

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos de matemática fundamental, pré-requisitos importante para uma disciplina de cálculo diferencial e integral. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Números reais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

1.1 Conjuntos numéricos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

1.1.1 Definição de conjunto

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Um **conjunto** A é uma coleção de elementos ou objetos. Quando x é um **elemento** do conjunto A, denotamos

$$x \in A, \tag{1.1}$$

lê-se **x pertence ao conjunto A**. Já, a notação

$$x \notin A \tag{1.2}$$

é usada para denotar que x **não pertence ao** A.

Usualmente, um conjunto é descrito usando a notação

$$A = \{x : \text{ condição para } x\}, \tag{1.3}$$

lê-se A é o conjunto dos elementos x tais que x satisfaz a condição.

Exemplo 1.1.1. O conjunto A formado por números positivos pode ser denotado por

$$A = \{x : x > 0\}. \tag{1.4}$$

Ainda, observamos que $2 \in A$, $\sqrt{2} \in A$, mas $-1 \notin A$. Você saberia escolher mais elementos que pertençam ou que não pertençam a A?

No Python, podemos definir este conjunto com

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
A = ConditionSet(x, x>0)
```

o que nos fornece

```
In : 2 in A
Out: True
In : sqrt(2) in A
Out: True
In : -1 in A
Out: False
```

Conjunto finito

Conjunto finito é todo aquele que contém um número finito de elementos. Tais conjuntos podem ser descritos de forma simplificada como segue

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \tag{1.5}$$

neste caso, temos um conjunto com n elementos. Analogamente, um conjunto que contenha infinitos elementos é chamado de **conjunto infinito**.

Observação 1.1.1.

$$A = \{-1,3,2\} \tag{1.6}$$

é o conjunto que contém apenas os números -1, 3 e 2.

No Python, podemos definir tal conjunto com o seguinte código

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-1, 3, 2)
```

Com este, obtemos

```
In : -1 in A
Out: True
In : sqrt(2) in A
Out: False
```

Conjunto vazio

O conjunto que não contém elemento algum é chamado de **conjunto vazio** e é denotado por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

Exemplo 1.1.2. O conjunto A de todos os números negativos e positivos é vazio, i.e.

$$A = \{x : x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset \tag{1.7}$$

No Python, podemos definir o conjunto vazio com

```
>>> from sympy import *
>>> A = EmptySet
```

Igualdade de conjuntos

Dois **conjuntos** A e B são **iguais**, quando todos os elementos A pertencem a B e vice-versa. Em notação matemática, escrevemos $A = B$ quando

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B, \tag{1.8}$$

lê-se $x \in A$ se, e somente se, $x \in B$.

Exemplo 1.1.3. a) São iguais os conjuntos

$$A = \{-1, 3, 2\} \tag{1.9}$$
$$B = \{3, 2, -1\}, \tag{1.10}$$

i.e. $A = B$.

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-1, 3, 2)
B = FiniteSet(3, 2, -1)
```

Com este, obtemos

```
In : A == B
Out: True
```

b) São diferentes os conjuntos

$$C = \{-3, -2, -1, 0\} \tag{1.11}$$
$$D = \{-3, -1, 0, 2\}, \tag{1.12}$$

i.e. $C \neq D$.

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-3, -2, -1, 0)
B = FiniteSet(-33, -1, 0, 2)
```

Com este, obtemos

```
In : C != D
Out: True
```

Subconjuntos

Dizemos que A é subconjunto de B, quando todos os elementos de A pertencem a B. Neste caso, denotamos

$$A \subset B. \tag{1.13}$$

Mais precisamente, $A \subset B$ quando

$$x \in A \Rightarrow x \in B, \tag{1.14}$$

lê-se $x \in A$ implica $x \in B$. O mesmo pode ser denotado por $B \supset A$.

Exemplo 1.1.4. Sejam os seguintes conjuntos

$$A = \{-1, 3, 2\} \tag{1.15}$$
$$B = \{2, 3\}. \tag{1.16}$$

Temos que B é subconjunto de A, i.e. $A \subset B$.

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-1, 3, 2)
B = FiniteSet(2, 3)
```

Com este, obtemos

```
In : B.is_subset(A)
Out: True
```

1.1.2 Operações entre conjuntos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

União de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos dados. A união do conjunto A com o conjunto B é o conjunto $A \cup B$ que contém todos os elementos de A e todos os elementos de B. Mais precisamente, temos

$$A \cup B = \{x : \; x \in A \text{ ou } x \in B\}, \tag{1.17}$$

lê-se o conjunto dos elementos x tais que $x \in A$ ou $x \in B$.

Exemplo 1.1.5. Se

$$A = \{-1, 3, 2\} \tag{1.18}$$
$$B = \{-2, 0\}, \tag{1.19}$$

então

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}. \tag{1.20}$$

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-1, 3, 2)
B = FiniteSet(-2, 0)
```

```
In : Union(A, B)
Out: FiniteSet(-2, -1, 0, 2, 3)
```

Interseção de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos dados. A interseção do conjunto A com o conjunto B é o conjunto $A \cap B$ que contém os elementos que pertencem simultaneamente a ambos os conjuntos A e B. Mais precisamente, temos

$$A \cap B = \{x : \; x \in A \text{ e } x \in B\}, \tag{1.21}$$

lê-se o conjunto dos elementos x tais que $x \in A$ e $x \in B$.

Exemplo 1.1.6. Se

$$A = \{-1, 3, 2\} B = \{3, 0\}, \tag{1.22}$$

então

$$A \cap B = \{3\}. \tag{1.23}$$

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-1, 3, 2)
B = FiniteSet(3, 0)
```

```
In : Intersection(A, B)
Out: FiniteSet(3)
```

Diferença entre conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos dados. A diferença (ou complemento relativo) do conjunto A com o conjunto B é o conjunto $A \setminus B$ que contém os elementos que pertencem ao A e não pertencem ao conjunto B. Mais precisamente, temos

$$A \setminus B = \{x : \; x \in A \text{ e } x \notin B\}, \tag{1.24}$$

lê-se o conjunto dos elementos x tais que $x \in A$ e $x \notin B$.

Exemplo 1.1.7. Se

$$C = \{-3, -2, -1, 0\} \tag{1.25}$$

$$D = \{-3, -1, 0, 2, 4\}, \tag{1.26}$$

então

$$C \setminus D = \{-2\}. \tag{1.27}$$

No Python, temos

```
from sympy import *
C = FiniteSet(-3,-2,-1,0)
D = FiniteSet(-3,-1,0,2,4)
```

```
In : C - D
Out: FiniteSet(-2)
```

Produto cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A com B é o conjunto $A \times B$, cujos elementos são os **pares ordenados** (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$. Mais precisamente, temos

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A \text{ e } y \in B\}, \tag{1.28}$$

lê-se o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $x \in B$.

Observação 1.1.2. Um par ordenado (x, y) é um conjunto formado por x e y, no qual a posição dos elementos importa. Por exemplo, temos

$$(3, -1) \neq (-1, 3), \tag{1.29}$$

enquanto que

$$\{3, -1\} = \{-1, 3\}. \tag{1.30}$$

No Python, escrevemos

```
from sympy import *
A = (3, -1)
B = (-1, 3)
```

então

```
In : A = (3, -1)
In : B = (-1, 3)
In : A == B
Out: False
```

Exemplo 1.1.8. Se

$$A = \{-3, -2, -1\} \tag{1.31}$$

$$B = \{0, 1\}, \tag{1.32}$$

então

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(-3{,}0), (-2, 0), (-1, 0),\\ &(-3, 1), (-2, 1), (-1, 1)\}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

No Python, temos

```
from sympy import *
A = FiniteSet(-3,-2,-1)
B = FiniteSet(0, 1)
C = ProductSet(A, B)
```

então

```
In : (-3, 1) in C
Out: True
```

Ainda, podemos imprimir todos os pares ordenados de C com o seguinte código

```
for i,p in enumerate(C):
    print(p)
```

Verifique!

Exercícios

Exercício 1.1.1. Considere o seguinte conjunto

$$D = \{..., -3, -2, -1{,}0{,}1{,}2{,}3{,}...\}. \tag{1.34}$$

Em cada item, diga se é verdadeira ou falsa a afirmação. Justifique cada resposta.

a) $-1 \in D$

b) $1 \notin D$

c) $-5 \notin D$

d) $\sqrt{100} \notin D$

e) D é um conjunto finito

Exercício 1.1.2. Sejam os seguintes conjuntos

$$C = \{-4,2,-1,0,3\} \tag{1.35}$$
$$D = \{5,-3,2,-4\} \tag{1.36}$$

Determine os seguintes conjuntos:

a) $C \cup D$

b) $C \cap D$

c) $C - D$

d) $D - C$

e) $C \cup \emptyset$

f) $D \cap \emptyset$

Exercício 1.1.3. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) $A \subset A \cup B$

b) $A \cap B \supset A$

c) $A \cup B \supset B$

d) $A \cap B \subset A$

e) $A \cup B \subset B$

f) $(A \cup B) \cap A = \emptyset$

Exercício 1.1.4. Sejam os seguintes conjuntos

$$C = \{-4,2\} \tag{1.37}$$
$$D = \{5,-3,2,-4\}. \tag{1.38}$$

Determine o conjunto $C \times D$.

Exercício 1.1.5. Justificando sua resposta, diga se é verdadeira a seguinte afirmação. Se $x \in A$ e $y \in B$, então $(y,x) \in A \times B$.

1.2 Conjunto dos números racionais

Nesta seção, vamos estudar alguns aspectos fundamentais sobre o conjunto dos números racionais.

1.2.1 Números naturais

Os números naturais são os números de contagem

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \tag{1.39}$$

onde as reticências denotam a sequência dos números.

O conjunto dos números naturais pode ser construído dos axiomas de Peano[1]

a) todo número natural m tem um sucessor $m + 1$;

b) números que têm o mesmo sucessor são iguais;

c) 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro;

d) Se um subconjunto A de números naturais contém o 0 e contém o sucessor de cada um de seus elementos, então $A = \mathbb{N}$[2].

Observação 1.2.1. No Python, o conjunto dos números naturais é definido por `S.Naturals0`. Por exemplo,

```
In : from sympy import *
In : 10 in S.Naturals0
Out: True
In : -1 in S.Naturals0
Out: False
```

Operações de adição e multiplicação

Nos números naturais $m,n \in \mathbb{N}$ estão bem definidas as operações usuais de:

[1] Giuseppe Peano, 1858 - 1932, matemático italiano. Fonte: Giuseppe Peano
[2] Axioma do Princípio da Indução.

a) **adição**

$$m + n = m + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} \tag{1.40}$$

b) **multiplicação**

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ vezes}} \tag{1.41}$$

Exemplo 1.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $2 + 1 = 3$

b) $1 + 2 = 3$

c) $10 + 5 = 15$

d) $3 \cdot 2 = 6$

e) $2 \cdot 3 = 6$

No Python, `+` é o operador de adição e `*` é o operador de multiplicação. Nos casos acima, temos

```
In : 2 + 1
Out: 3
In : 1 + 2
Out: 3
In : 10 + 5
Out: 15
In : 3 * 2
Out: 6
In : 2 * 3
Out: 6
```

Observação 1.2.2. No Python, podemos definir uma variável simbólica no conjunto dos números naturais como, por exemplo

```
from sympy import *
m = Symbol('m', natural0=True)
```

Propriedades das operações

Sendo $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos ainda as seguintes propriedades fundamentais:

- 0 é o **elemento neutro da adição**

$$m + 0 = m. \tag{1.42}$$

- **comutatividade da adição**

$$m + n = n + m \tag{1.43}$$

- **associatividade da adição**

$$m + (n + p) = (m + n) + p \tag{1.44}$$

- 1 é o **elemento neutro da multiplicação**

$$m \cdot 1 = m. \tag{1.45}$$

- **comutatividade da multiplicação**

$$m \cdot n = n \cdot m \tag{1.46}$$

- **associatividade da multiplicação**

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p \tag{1.47}$$

Observação 1.2.3. No Python, podemos checar as propriedades acima. Por exemplo,

```
from sympy import *
m, n, p = symbols('m, n, p', naturals0=True)
```

com o que obtemos

```
In : m + (n + p) == (m + n) + p
Out: True
```

Exemplo 1.2.2. Verificamos as propriedades acima para casos específicos.

a) Elemento neutro da adição

$$5 + 0 = 5 \tag{1.48}$$

b) Comutatividade da adição

$$2 + 3 = 3 + 2 \tag{1.49}$$

c) Associatividade da adição

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9 \tag{1.50}$$
$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9 \tag{1.51}$$

d) Elemento neutro da multiplicação

$$3 \cdot 1 = 3 \tag{1.52}$$

e) Comutatividade da multiplicação

$$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 = 10 \tag{1.53}$$

f) Associatividade da multiplicação

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24 \tag{1.54}$$
$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \tag{1.55}$$

1.2.2 Números inteiros

O conjuntos dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.56}$$

Os números com sinal negativo "$-$" são definidos como sendo opostos aos respectivos números naturais. Mais precisamente, o **oposto de um número** m é denotado por $-m$ e é tal que

$$m + (-m) = 0. \tag{1.57}$$

Os números inteiros podem ser representados geometricamente como pontos sobre uma reta. No centro, coloca-se o zero, à direita colocam-se os números positivos em ordem e igualmente espaçados. À esquerda do zero, colocam-se os números negativos, opostos aos respectivos números positivos. Consulte a Figura 1.1.

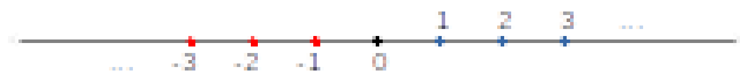

Figura 1.1: Representação geométrica dos números inteiros.

Exemplo 1.2.3. Consideramos os seguintes casos:

a) -1 é o oposto de 1:

$$1 + (-1) = 0 \tag{1.58}$$

b) 2 é o oposto de -2:

$$-2 + 2 = 0 \tag{1.59}$$

Os números inteiros contém os números naturais, i.e.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}. \tag{1.60}$$

Ainda, as operações de **adição** e **multiplicação** podem ser imediatamente estendidas para os números inteiros, assim como suas **propriedades** de **elemento neutro**, **comutatividade** e **associatividade**.

Operação de Subtração

Com a definição de oposto, podemos definir a **operação de subtração** de dois números inteiros da seguinte forma

$$\begin{align} m - n &= m + (-n) \tag{1.61}\\ &= -n + m, \tag{1.62}\end{align}$$

sendo a operação de adição definida usualmente.

Exemplo 1.2.4.

$$\begin{align} 2 - 3 &= 2 + (-3) \tag{1.63}\\ &= -3 + 2 = -1 \tag{1.64}\end{align}$$

No Python, esta operação pode ser feita de forma usual

```
In : 2 - 3
Out: -1
```

Observação 1.2.4. No SymPy, o conjunto dos números inteiros é definido por `S.Integers` e uma variável simbólica inteira pode ser definida com

```
from sympy import *
m = Symbols('m', integer=True)
```

Valor absoluto

Dada um número $p \in \mathbb{Z}$, definimos o seu **valor absoluto**[3] pelo número inteiro

$$|p| = \begin{cases} p & , p \geq 0, \\ -p & , p < 0. \end{cases} \tag{1.65}$$

Exemplo 1.2.5. Estudemos os seguintes casos:

a) $|3| = 3$

b) $|-2| = -(-2) = 2$

c) $|0| = 0$

Com o SymPy, podemos computar estes casos como segue:

```
>>> from sympy import *
>>> Abs(-3)
3
>>> Abs(3)
3
>>> Abs(0)
0
```

Para qualquer $p \in \mathbb{Z}$, a operação de tomar o valor absoluto de um número tem as seguintes propriedades:

a) $|p| \geq 0$

b) $|p| = 0 \Leftrightarrow p = 0$

c) $|p| = |-p|$

[3] Também, chamado de **módulo** ou **norma**.

d) $|p| < q \Leftrightarrow -q < p < q$

e) $|p| > q \Leftrightarrow -p < -q$ ou $p > q$

1.2.3 Números racionais

O conjunto dos números racionais é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}, \tag{1.66}$$

sendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. O **quociente** p/q é definido como sendo o resultado da operação de **divisão** de p por q. Mais precisamente,

$$\frac{p}{q} = x \Leftrightarrow p = x \cdot q. \tag{1.67}$$

Observação 1.2.5. Não está definida a **divisão por zero**! Note que não existe x tal que

$$\frac{p}{0} = x \Leftrightarrow p = 0 \cdot x. \tag{1.68}$$

Mesmo, $0/0$ não está bem definido. Neste caso, temos uma **indeterminação matemática**, de fato não existe um único número x tal que

$$\frac{0}{0} = x \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot x. \tag{1.69}$$

A operação de **adição** fica assim definida

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.70}$$

Exemplo 1.2.6.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} \tag{1.71}$$

$$= \frac{8 + 15}{20} \tag{1.72}$$

$$= \frac{23}{20} \tag{1.73}$$

No Python, as operações são realizadas no conjunto dos números reais[4][5], por padrão. Por exemplo,

```
In : 2/3
Out: 1.5
```

Com o SymPy, podemos restringir a aritmética aos números racionais, com

```
In : from sympy import S
In : S(2)/3
Out: 2/3
```

No caso do exemplo acima, temos

```
In : S(2)/5 + S(3)/4
Out: 23/20
```

A operação de **multiplicação** fica definida por

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \tag{1.74}$$

Exemplo 1.2.7.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 3}{5 \cdot \cancel{2}} \tag{1.75}$$

$$= \frac{3}{5} \tag{1.76}$$

No Python, temos

```
In : from sympy import S
In : S(2)/5 * S(3)/2
Out: 3/5
```

Observação 1.2.6.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.77}$$

Isso segue do fato de que se $m \in \mathbb{Z}$, então

$$m = \frac{m}{1}. \tag{1.78}$$

[4]Introduziremos os números reais na sequência.

[5]Mais precisamente, as operações são realizadas em ponto flutuante. Para mais informações, consulte aritmética de máquina.

Os números racionais também herdam as **propriedades** de **elemento neutro**, **comutatividade** e **associatividade** nas operações de adição e multiplicação.

Operação de Potenciação

Outra operação fundamental é a operação de **potenciação**. A potenciação de um número racional $p/q \neq 0$ por um número natural n é definida por

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \cdots \cdot \frac{p}{q}}_{n \text{ vezes}}, \tag{1.79}$$

sendo $(p/q)^0 = 1$. Ainda, definimos o **inverso de um número** racional p/q por

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}. \tag{1.80}$$

Mais precisamente, o inverso de um número $x \neq 0$ é denotado por x^{-1} e é tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1. \tag{1.81}$$

Com a escolha acima, vemos que $(p/q)^{-1} = q/p$, pois

$$\begin{align}
\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} &= \frac{p \cdot q}{q \cdot p} \tag{1.82}\\
&= \frac{q \cdot p}{q \cdot p} \tag{1.83}\\
&= \frac{q}{q} \cdot \frac{p}{p} \tag{1.84}\\
&= 1 \cdot 1 = 1. \tag{1.85}
\end{align}$$

Exemplo 1.2.8. Verifiquemos os seguintes casos:

a)

$$\begin{align}
\left(\frac{3}{2}\right)^3 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \tag{1.86}\\
&= \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} \tag{1.87}\\
&= \frac{27}{8} \tag{1.88}
\end{align}$$

b)

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \tag{1.89}$$
$$= 4 \cdot 2 \tag{1.90}$$
$$= 8 \tag{1.91}$$

c)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \tag{1.92}$$

No Python, o operador de potenciação é `**`. Os casos acima podem ser computados como segue

```
In : from sympy import S
In : (S(3)/2)**3
Out: 27/8
In : 2**3
Out: 8
In : (S(3)/2)**-1
Out: 2/3
```

Observação 1.2.7. Enquanto que para $x \neq 0$ temos $x^0 = 1$, 0^0 não está bem definida! Trata-se de uma **indeterminação**, conceito normalmente introduzido em um curso de Cálculo. Por outro lado, há situações em que se adota-se a convenção de que $0^0 = 1$. Este é o caso da linguagem Python e várias outras. Em Python, temos

```
>>> 0**0
1
```

Sendo $a,b \in \mathbb{Q}$ e $n, m \in \mathbb{N}$, temos as seguintes **propriedades** fundamentais da operação de potenciação[6]:

- $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
- $a^{-m} = (a^m)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^m$
- $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$

[6]Estas propriedades são válidas desde que as operações estejam bem definidas. Por exemplo, a segunda propriedade elencada somente é válida no caso de $a \neq 0$.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Observação 1.2.8. As seguintes potenciações não estão bem definidas:

- $\nexists\ 0^{-1}$

$$0^{-1} = \cancelto{\nexists}{\frac{1}{0}} \tag{1.93}$$

  O símbolo $\exists$ lê-se existe e o $\nexists$ lê-se não existe.

- $\nexists\ 0^0$

$$\begin{aligned} 0^0 &= 0^{1-1} && (1.94)\\ &= 0^1 \cdot 0^{-1} && (1.95)\\ &= 0 \cdot \cancelto{\nexists}{\frac{1}{0}} && (1.96) \end{aligned}$$

Sobre este último caso, lembre-se da Observação 1.2.7.

Observação 1.2.9. No SymPy, o conjunto dos números racionais é definido por `S.Rationals` e uma variável simbólica racional pode ser definida com

```
from sympy import *
a = Symbols('a', rational=True)
```

Observação 1.2.10. A representatividade de números racionais não é única. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \cdots \tag{1.97}$$

Isto nos motiva a introduzir o conceito de **razão irredutível**. Dizemos que p/q é uma razão irredutível, quando p e q não têm divisor comum[7]. Por exemplo, $2/3$ é uma razão irredutível, enquanto $4/6$ não é, pois 4 e 6 têm 2 como divisor comum.

[7]Um número $m \in \mathbb{N}^*$ é divisor de $n \in \mathbb{Z}$, quando $m/n \in \mathbb{Z}$.

Exercícios

Exercício 1.2.1. Sejam $m,n,p,q \in \mathbb{N}$. Argumente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $m = 0 + m$

b) $m + (n + p) = (n + p) + m$

c) $m + n + p = (n + m) + p$

d) $(m + n) + (q + p) = (m + p) + (q + n)$

e) $1 \cdot m \neq m \cdot 1$

f) $(m \cdot n) \cdot p = (n \cdot p) \cdot m$

Exercício 1.2.2. Sejam $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$. Argumente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $n - p = p - n$

b) $(m - n) + p = (m + p) - n$

c) $-(-m) = m$

Exercício 1.2.3. O **mínimo múltiplo comum** dos números de dois números inteiros c,d é denotado por $\text{mmc}(c,d)$ e é o menor inteiro positivo que é múltiplo simultaneamente de c e d. Sendo, ainda, $a,b \in \mathbb{Z}$ e $c,d \neq 0$, Mostre que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{mmc}(c,d)}{c} + b \cdot \frac{\text{mmc}(c,d)}{d}}{\text{mmc}(c,d)}. \tag{1.98}$$

Qual a vantagem em usar o mmc para calcular a soma de frações? No SymPy, pode-se utilizar o método `sympy.ilcm`. Verifique!

Exercício 1.2.4. Sejam $p,q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, $m,n \in \mathbb{Z}$. Argumente sobre a veracidade das seguintes afirmações.

a) $q^{m-n} = \frac{q^m}{q^n}$

b) $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q}$

c) $q^{-m\cdot n} = \frac{q^n}{q^m}$

Exercício 1.2.5. $1+1=1$? Encontre o erro nos seguintes cálculos:

$$a = b \tag{1.99}$$
$$a^2 = ab \tag{1.100}$$
$$a^b - b^2 = ab - b^2 \tag{1.101}$$
$$(a+b)(a-b) = b(a-b) \tag{1.102}$$
$$a + b = b \tag{1.103}$$

Escolhendo, por exemplo, $a = 1$ e $b = 1$, esta última fornece $1 + 1 = 1$!

Exercício 1.2.6. Seja $p,q \in \mathbb{Q}$. Mostre as seguintes propriedades:

a) $|p| \geq 0$

b) $|p| = |-p|$

c) $|p| < q \Leftrightarrow -q < p < q$

d) $|p| > q \Leftrightarrow -p < -q$ ou $p > q$

1.3 Conjunto dos números reais

1.3.1 Existência de números irracionais

Para introduzirmos os números reais, vamos fazer a tentativa de estender a operação de potenciação para potências racionais. Mais especificamente, vamos tentar determinar $\sqrt{2}$, a qual é definida por

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}. \tag{1.104}$$

Assumindo válidas as propriedades de potenciação vista para números racionais, teríamos

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2} \tag{1.105}$$
$$= 2^1 = 2. \tag{1.106}$$

Será que $2^{\frac{1}{2}}$ é um número racional? Se fosse, então existiria uma **razão irredutível**[8] p/q tal que $2^{\frac{1}{2}} = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \tag{1.107}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \tag{1.108}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p^2 = 2 \cdot q^2. \tag{1.109}$$

Logo, p^2 é um número par[9] e, portanto, p é um número par[10]. Ou seja, existiria $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2m$. Mas, então

$$(2 \cdot m)^2 = 2 \cdot q^2 \tag{1.110}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4 \cdot m^2 = 2 \cdot q^2 \tag{1.111}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2 \cdot m^2 = q^2. \tag{1.112}$$

Com isso, q^2 seria par e, portanto, q deveria ser par. Isso é uma contradição, por p/q é uma razão irredutível. Logo, concluímos que

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \tag{1.113}$$

Assim sendo, dizemos que $\sqrt{2}$ é um **número irracional**. Ou seja, não é racional! :D

Observação 1.3.1. Uma aplicação em geometria. Observamos que $\sqrt{2}$ é o comprimento do lado do quadrado de área 1. Ou ainda, $\sqrt{2}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos com comprimento igual a 1!

[8] Sobre razão irredutível, consulte a Observação 1.2.10.

[9] Número múltiplo inteiro de 2.

[10] O quadrado de um número ímpar é um número ímpar. Número ímpar é um número inteiro não divisível por 2.

1.3.2 Fecho dos números racionais

Mas então, como podemos calcular o número $\sqrt{2}$? Bem, podemos aproximá-lo usando o método babilônico. Observamos que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2, exclusivamente. Vamos, então, escolher como aproximação inicial

$$x_0 = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{1.114}$$

Daí, calculamos uma nova aproximação como

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) \tag{1.115}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) \tag{1.116}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) \tag{1.117}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{6}\right) \tag{1.118}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6} \tag{1.119}$$
$$= \frac{17}{12} = 1{,}41\bar{6} \tag{1.120}$$

Então, analogamente podemos calcular uma melhor aproximação com

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) \tag{1.121}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) \tag{1.122}$$
$$= \frac{577}{408} = 1{,}41421\overline{5686274509803921} \tag{1.123}$$

e assim sucessivamente. Estes números racionais estão de fato se aproximando do valor de $\sqrt{2}$. Notamos que

$$x_0^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25 \tag{1.124}$$
$$x_1^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2{,}0069\bar{4} \tag{1.125}$$
$$x_2^2 = \left(\frac{577}{408}\right)^2 = 2{,}000006\ldots \tag{1.126}$$

O método babilônico, nos mostra que $\sqrt{2}$ pode ser calculado como o **limite** de uma **sequência** de números racionais. Ou seja, é sempre possível escolher um número racional que aproxime do valor de $\sqrt{2}$ tão bem quanto se queira. No caso, basta iterarmos o método babilônico um número suficiente de vezes.

Neste caso, ainda dizemos que $\sqrt{2}$ pertence ao **fecho** dos números racionais, escrevemos

$$\sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}. \tag{1.127}$$

Mais precisamente, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ quando sempre é possível escolher um número racional $p/q \in \mathbb{Q}$ que aproxima o valor de x tão bem quanto se queira.

O **conjunto dos números reais** é denotado por $\mathbb{R}$ e é tal que

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}. \tag{1.128}$$

Ou seja, é a união dos números racionais com os números irracionais que podem ser arbitrariamente aproximados por números racionais.

Observação 1.3.2.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{1.129}$$

Além disso, os números reais herdam as operações e suas propriedades dos números racionais.

Exemplo 1.3.1. Consideramos os seguintes casos:

a) todo número inteiro é um número real.

b) todo número racional é um número real.

c) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots$ são números reais.

d) $\pi = 3{,}141592\ldots$ é um número real.

   O π é a área da circunferência de raio 1.

No Python, estes exemplos podem ser verificados com

```
>>> from sympy import *
>>> S.Integers.is_subset(S.Reals)
True
>>> S.Rationals.is_subset(S.Reals)
True
>>> sqrt(3) in S.Reals
```

```
True
>>> sqrt(5) in S.Reals
True
>>> sqrt(7) in S.Reals
True
>>> pi in S.Reals
True
```

De posse dos números reais, vamos definir m-ésima raiz de um número $x \in \mathbb{R}$ por

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}, \tag{1.130}$$

sendo que quando $m = 2$, escrevermos simplesmente $\sqrt{x}$.

Observação 1.3.3.

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \tag{1.131}$$

De fato, seja

$$x = \sqrt{-1}, \tag{1.132}$$

então

$$x^2 = -1. \tag{1.133}$$

Entretanto, o quadrado que qualquer número real é um número não negativo! Ou seja, $x \notin \mathbb{R}$.

Mais geralmente, não é número real a raiz de índice par de qualquer número negativo.

1.3.3 Reta real

A reta real é uma representação geométrica do conjunto dos números reais (Figura 1.2).

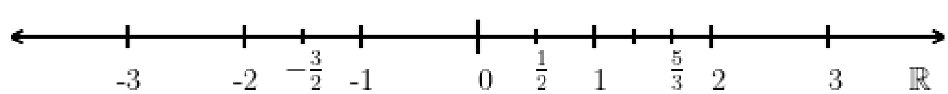

Figura 1.2: Reta real.

Traçamos uma reta horizontal e escolhemos um ponto como sendo a origem. Neste ponto, marcamos a posição do número zero. Usando um espaçamento fixo, posicionamos os números naturais a direita do zero e de forma sucessiva. Os números inteiros negativos são posicionados à esquerda do zero, também em posições sucessivas. Os números racionais são posicionados tomando as frações do espaçamento escolhido. A Figura 1.2 é um esboço da reta real.

Uma das propriedades notáveis dos números reais é a chamada **tricotomia**, i.e. um número real x é

- positivo (posicionado à direita da origem),
- zero (posicionado na origem), ou
- negativo (posicionado à esquerda da origem),

exclusivamente.

1.3.4 Infinito

O infinito é denotado por ∞ e representa a noção daquilo que não tem fim. Quando sem sinal, é interpretado na direção positiva (direita) da reta real. Quando escrito $-\infty$ (lê-se menos infinito) é interpretado na direção negativa (esquerda) da reta real. Nesta reta (Fig. 1.3), ∞ é representado por sua seta à direta e $-\infty$ por sua seta à esquerda.

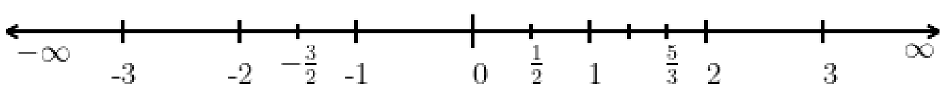

Figura 1.3: Reta real.

Observação 1.3.4. ∞ não é um número!

Sendo x é um número real, podemos inferir as seguintes propriedades para qualquer dado $x \in \mathbb{R}$:

- $\pm\infty \pm x = \pm\infty$

- $\pm\infty \mp x = \pm\infty$

- $-\infty = -1 \cdot \infty$

- $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, $x > 0$
- $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, $x < 0$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$

- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty$

- $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$

Exemplo 1.3.2. Estudamos os seguintes casos:

a) $\infty + \infty = \infty$

b) $-1 \cdot (-\infty) = \infty$

c) $2 \cdot (-\infty) = -\infty$

d) $\infty \cdot \infty = \infty$

e) $-\infty \cdot \infty = -\infty$

No Python, podemos verificar estas contas com os seguintes comandos:

```
>>> from sympy import *
>>> oo + oo
oo
>>> -1 * -oo
oo
>>> 2 * -oo
-oo
>>> oo * oo
oo
>>> -oo * oo
-oo
```

No entanto, são consideradas **indeterminações matemáticas** as seguintes operações:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- ∞^0
- 1^∞
- 0^0
- $\dfrac{0}{0}$

Observação 1.3.5. Com o SymPy, as indeterminações são marcadas como `nan`[11] ou retornam erro. Por exemplo:

```
>>> from sympy import *
>>> oo - oo
nan
>>> 0/0
Traceback (most recent call last):
File "<stdin>", line 1, in <module>
ZeroDivisionError: division by zero
```

Atenção! Exceções são os casos envolvendo potências de expoente 0, por exemplo:

```
>>> 0**0
1
>>> oo**0
1
```

1.3.5 Intervalos de números reais

Intervalos de números reais são conjuntos especiais e muito utilizados. Por simplicidade, recebem uma notação própria. Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos os seguintes tipos de intervalos:

- Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \tag{1.134}$$

[11] Do inglês, *not a number*.

Figura 1.4: Representação geométrica de um intervalo $[a,b]$.

- Intervalo semi-aberto à esquerda (semi-fechado à direita)

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \leq b\} \tag{1.135}$$

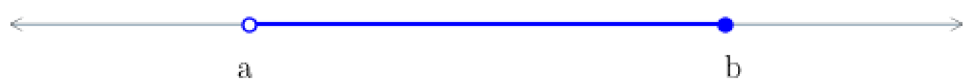

Figura 1.5: Representação geométrica de um intervalo $(a,b]$.

- Intervalo semi-aberto à direita (semi-fechado à esquerda)

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\} \tag{1.136}$$

Figura 1.6: Representação geométrica de um intervalo $[a,b)$.

- Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\} \tag{1.137}$$

Figura 1.7: Representação geométrica de um intervalo (a,b).

Exemplo 1.3.3. Vamos estudar os seguintes casos:

a) $-2 \in [-3, 1]$

b) $\sqrt{2} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

c) $2 \notin [-3, 2)$

d) $\pi \in (3, 4]$

e) $[a, a] = \{a\}$

f) $[3, 2] = \emptyset$

g) $(1, 1) = \emptyset$

Com o SymPy, podemos checar os casos acima usando o comando `Interval`. Vejamos alguns dos casos acima:

```
>>> from sympy import *
>>> -2 in Interval(-3, 1)
True
>>> sqrt(2) in Interval(1,3/2,
... left_open=True, right_open=True)
True
>>> 2 in Interval(-3,2,right_open=True)
False
>>> Interval(3,2)
EmptySet
```

Ainda, temos os seguintes casos especiais

- Intervalos semi-limitados à esquerda

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\}(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\} \tag{1.138}$$

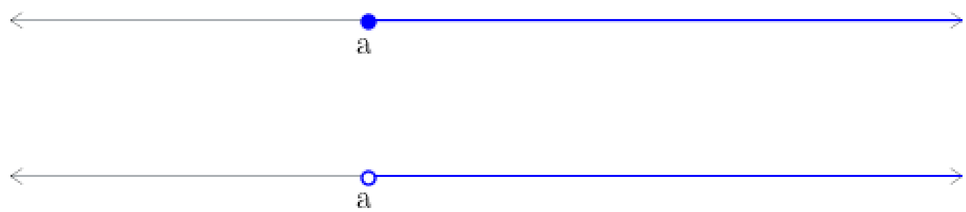

Figura 1.8: Representação geométrica dos intervalos $[a,\infty)$ (acima) e (a,∞) (abaixo).

- Intervalos semi-limitados à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; x \leq b\}(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; x < b\} \tag{1.139}$$

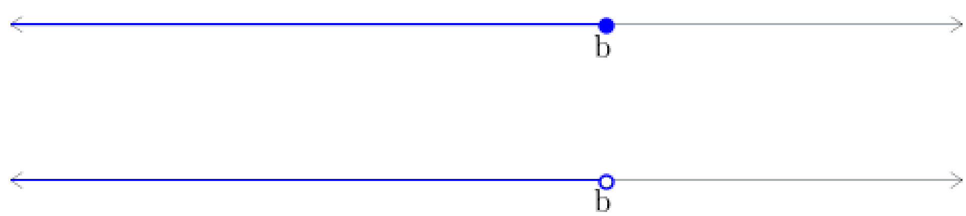

Figura 1.9: Representação geométrica dos intervalos $(-\infty, b]$ (acima) e $(-\infty, b)$ (abaixo).

- Intervalo ilimitado

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \tag{1.140}$$

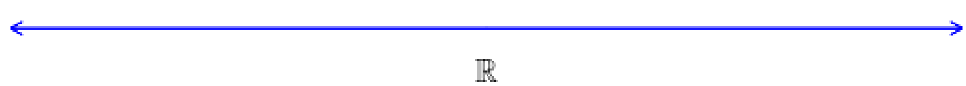

Figura 1.10: Representação geométrica dos intervalos $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 1.3.4. Estudamos os seguintes casos:

a) $2 \in [2, \infty)$

b) $10^6 \in (2, \infty)$

c) $1 \notin (-\infty, 1)$

d) $-10^{308} \in (-\infty, 1]$

e) $\pi \in (-\infty, \infty)$

Com o Python, podemos fazer estas verificações com os seguintes comandos:

```
>>> from sympy import *
>>> oo in Interval(2,oo)
False
>>> from sympy import *
>>> 2 in Interval(2,oo)
True
>>> 10**6 in Interval(2,oo,
... left_open=True)
True
>>> 1 in Interval(-oo, 1,
... right_open=True)
False
>>> -10**308 in Interval(-oo, 1)
True
>>> pi in Interval(-oo, oo)
True
```

Exercícios

Exercício 1.3.1. Verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) Se p,q são números pares, então $p + q$ é um número par.

b) Se p,q são números ímpares, então $p + 1$ é um número ímpar.

c) Se p é número par e q é número ímpar, então $p + q$ é número ímpar.

d) Se p é número par e q é número ímpar, então $p \cdot q$ é número ímpar.

e) Se p,q são números ímpares, então $p \cdot q$ é número ímpar.

Exercício 1.3.2. Mostre que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 1.3.3. Um número primo p tem somente quatro divisores ± 1, $\pm p$ e é tal que $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$. Faça a **decomposição em fatores primos** dos seguintes números[12].

a) 14

b) 24

c) 36

d) 2205

Exercício 1.3.4. Encontre o resultado e faça a representação gráfica em cada um dos seguintes itens.

1. $(-1,2] \cup [-1,0]$
2. $[2,4) \cap [4,5)$
3. $(-2,2) \cap [-1,1)$
4. $(-\infty, 1) \cup [0,\infty)$
5. $(-1,1) \cup \{1\}$

Exercício 1.3.5. Verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

b) $\sqrt{4} + 2 = 4$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = 2\sqrt{7}$

d) $\left(\sqrt{2})^3\right) = \sqrt{2^3}$

e) $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[2]{2^3}$

[12]Dica: consulte o método `sympy.factorint`.

Exercício 1.3.6. Mostre que[13] $\sqrt{x^2} = |x|$.

[13] $|x| = x$, $x \geq 0$ e $|x| = -x$, caso contrário.

Capítulo 2

Equações e inequações

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

2.1 Equações

Uma equação é uma declaração de que duas expressões são iguais. Escrevemos

$$E_{\text{esq}} = E_{\text{dir}} \tag{2.1}$$

para estabelecer que a expressão à esquerda E_{esq} é igual a expressão à direita E_{dir}.

Exemplo 2.1.1. Estudemos os seguintes casos:

a) $2^2 = 4$

b) $2x - 1 = 0$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$

No Python, podemos declarar as equações com a função `https://docs.sympy.org/latest/mod`
Os casos são implementados como segue:

```
>>> from sympy import *
>>> Eq(2**2, 4)
```

```
True
>>> x = Symbol('x')
>>> Eq(2*x - 1, 0)
Eq(2*x - 1, 0)
>>> y = Symbol('y')
>>> Eq(exp(x+y), exp(x)*exp(y))
Eq(exp(x + y), exp(x)*exp(y))
>>> Eq((x**2-1)/(x+1), x-1)
Eq((x**2 - 1)/(x + 1), x - 1)
```

2.1.1 Solução de uma equação

Equação é uma poderosa ferramenta matemática para impor uma condição sobre uma ou mais **incógnitas** (ou **variáveis**). Por exemplo, quando escrevemos

$$2^x = 4 \tag{2.2}$$

estamos impondo que a incógnita x seja aquela a satisfazer esta equação. No caso, $x = 2$ satisfaz a equação, pois ao substituirmos x por 2 nela, obtemos

$$2^2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4. \tag{2.3}$$

Usualmente, dizemos que $x = 2$ é **solução** da equação. O procedimento de encontrar a(s) solução(ões) de uma equação é chamado de **resolução** da equação, i.e. o procedimento de resolver a equação.

Observação 2.1.1. Uma equação pode ter uma única solução, várias soluções, infinitas soluções ou nenhuma solução.

Exemplo 2.1.2. Estudemos os seguintes casos:

a) $x - 1 = 0$ tem solução única $x = 1$.

b) $y^2 - 1 = 0$ têm soluções $y = -1$ ou $y = 1$.

c) $x^2 = -1$ não tem solução.

d) $(u + 1)^2 = u^2 + 2u + 1$, qualquer $u \in \mathbb{R}$ é solução.

No Python, podemos resolver estas equações com o comando solve ou solveset. Estudemos as seguintes entradas e saídas:

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x', real=True)
>>> solve(x-1, domain=S.Reals)
[1]
>>> solveset(x-1, domain=S.Reals)
FiniteSet(1)
>>> y,u = symbols('y,u', real=True)
>>> solve(y**2-1, domain=S.Reals)
[-1, 1]
>>> solve(Eq(x**2, -1), domain=S.Reals)
[]
>>> solveset(Eq(x**2, -1), domain=S.Reals)
EmptySet
>>> solveset(Eq((u+1)**2, u**2 + 2*u + 1), domain=S.Reals)
Reals
```

Não existe um procedimento único para a resolução de equações em geral. Em síntese, a resolução, quando possível, é obtida da aplicação das seguintes propriedades. Sendo E_1, E_2 e E_3 expressões matemáticas, temos

- Simetria

$$\begin{gathered} E_1 = E_2 \\ \Leftrightarrow \\ E_2 = E_1 \end{gathered} \tag{2.4}$$

- Cancelamento por adição

$$\begin{gathered} E_1 = E_2 \\ \Leftrightarrow \\ E_1 + E_3 = E_2 + E_3 \end{gathered} \tag{2.5}$$

- Cancelamento por multiplicação[1]

$$\begin{gathered} E_1 = E_2 \\ \Leftrightarrow \\ E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_3 \end{gathered} \tag{2.6}$$

[1]Somente no caso de $E_3 \in \mathbb{R}^*$

As operações acima reescrevem a equação original $E_1 = E_2$ em **equações equivalentes**, i.e. equações que têm as mesmas soluções.

Exemplo 2.1.3. Estudemos os casos a seguir.

a)

$$-1 = x \tag{2.7}$$
$$x = -1 \tag{2.8}$$

b)

$$x - 2 = 1 \tag{2.9}$$
$$x - 2 + 2 = 1 + 2 \tag{2.10}$$
$$x = 3 \tag{2.11}$$

c)

$$2x = 4 \tag{2.12}$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 4 \tag{2.13}$$
$$1 \cdot x = 2 \tag{2.14}$$
$$x = 2 \tag{2.15}$$

2.1.2 Equações lineares

Equação algébricas lineares de uma incógnita são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$ax + b = 0, \tag{2.16}$$

onde, são conhecidos (dados) os **coeficientes** $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Sua resolução pode ser feita da seguinte forma

$$ax + b = 0 \tag{2.17}$$
$$ax + b - b = 0 - b \tag{2.18}$$
$$ax = -b \tag{2.19}$$
$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b) \tag{2.20}$$
$$1 \cdot x = -\frac{b}{a} \tag{2.21}$$
$$x = -\frac{b}{a} \tag{2.22}$$

Exemplo 2.1.4. Vamos resolver

$$2x - 4 = 5 - x \tag{2.23}$$

Esta é uma equação linear, pois

$$2x - 4 - 5 = 5 - x - 5 \tag{2.24}$$
$$2x - 9 = -x \tag{2.25}$$
$$x + 2x - 9 = x - x \tag{2.26}$$
$$3x - 9 = 0 \tag{2.27}$$
$$\tag{2.28}$$

Logo, a solução é

$$x = \frac{9}{3} = 3. \tag{2.29}$$

No Python, podemos resolver esta equação com

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x', real=True)
>>> solve(Eq(2*x - 4, 5 - x), domain=S.Reals)
[3]
```

2.1.3 Equação quadrática

Uma equação algébrica quadrática de um incógnita é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.30}$$

com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b,c \in \mathbb{R}$.

Para resolver tal equação, vamos, primeiro, lembrar que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{2.31}$$

para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}$. A ideia é usar desta **identidade**[2] para reduzirmos a equação em duas equações lineares.

Começamos reescrevendo (2.30) da seguinte forma

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c \tag{2.32}$$

$$ax^2 + bx = -c \tag{2.33}$$

$$\left(ax^2 + bx\right) \cdot \frac{1}{a} = -c \cdot \frac{1}{a} \tag{2.34}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \tag{2.35}$$

Agora, vamos **completar os quadrados** do lado direito para usarmos a identida (2.31). Fazemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{2.36}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \tag{2.37}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{2.38}$$

[2] Identidade é o nome dado a uma equação que é satisfeita para todos os possíveis valores de sua(s) incógnita(s).

Agora, extraímos a raiz quadrada de ambos os lados da equação[3]

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \tag{2.39}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right| \tag{2.40}$$

Daí, seguem as seguintes equações lineares

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.41}$$

ou

$$x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.42}$$

$$\tag{2.43}$$

Equivalentemente, escrevemos

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.44}$$

Por fim, isolamos x co

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.45}$$

donde temos a chamada **Fórumla de Bhaskara**[4]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2.46}$$

Exemplo 2.1.5. Vamos resolver

$$x^2 = x+2. \tag{2.47}$$

Esta é uma equação quadrática, pois

$$x^2 - x - 2 = x + 2 - x - 2 \tag{2.48}$$

$$x^2 - x - 2 = 0. \tag{2.49}$$

[3] $\sqrt{x^2} = |x|$.

[4] Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático indiano. Fonte: Wikipédia.

Logo, da Fórmula da Bhaskara (2.46), obtemos

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \tag{2.50}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \tag{2.51}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \tag{2.52}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \tag{2.53}$$

Donde,

$$x = \frac{1 - 3}{2} \tag{2.54}$$

$$x = \frac{-2}{2} \tag{2.55}$$

$$x = -1 \tag{2.56}$$

ou

$$x = \frac{1 + 3}{2} \tag{2.57}$$

$$x = \frac{4}{2} \tag{2.58}$$

$$x = 2 \tag{2.59}$$

Concluímos que a equação tem soluções $x = -1$ ou $x = 2$.

No Python, podemos resolver esta equação com

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x', real=True)
>>> solve(Eq(x**2, x + 2), domain=S.Reals)
[-1, 2]
```

2.1.4 Equações exponenciais

Um equação exponencial é aquela em que a incógnita aparece como expoente em um ou mais termos. Tais equações não tem formato único, nem procedimento geral de resolução. Quando possível, a ideia é reescrever todos os termos da equação em uma base comum.

Observação 2.1.2. Lembramos que[5]:

- $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$
- $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$
- $b^{xy} = (b^x)^y$
- $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
- $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x}$

Exemplo 2.1.6. Vamos resolver

$$5^{x+3} = 25. \tag{2.60}$$

Para resolver esta equação, vamos escrever 25 como potência de 5, i.e.

$$25 = 5^2. \tag{2.61}$$

Logo, a equação é equivalente a

$$5^{x+3} = 5^2 \tag{2.62}$$

donde

$$x + 3 = 2 \tag{2.63}$$

$$x = -1. \tag{2.64}$$

Ou seja, a solução é $x = -1$.

No Python:

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x', real=True)
>>> solve(Eq(5**(x+3), 25), domain=S.Reals)
[-1]
```

Exemplo 2.1.7. Vamos resolver

$$5^{x+3} = 5^{-x} + 20. \tag{2.65}$$

[5]Quando bem definido.

Notamos que esta equação é equivalente a

$$5^x \cdot 5^3 = \left(5^x\right)^{-1} + 20. \tag{2.66}$$

Fazemos, então, a seguinte **mudança de variável**

$$y = 5^x. \tag{2.67}$$

Com isso, a equação se resume a

$$y \cdot 5^3 = y^{-1} + 20 \tag{2.68}$$

Resolvemos esta equação como segue

$$125y = \frac{1}{y} + 20 \tag{2.69}$$

$$125y^2 = 1 + 20y \tag{2.70}$$

$$125y^2 - 20y - 1 = 0 \tag{2.71}$$

Usando a fórmula de Bhaskara, obtemos

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 125 \cdot (-1)}}{2 \cdot 125} \tag{2.72}$$

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{900}}{250} \tag{2.73}$$

$$y = \frac{20 - \pm 30}{250} \tag{2.74}$$

Ou seja, $y = -1/25$ ou $y = 1/5$. Observando que $y = 5^x$ e, portanto positivo, temos

$$5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1}. \tag{2.75}$$

Concluímos que $x = -1$.

No Python:

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x', real=True)
>>> solveset(Eq(5**(x+3), 5**(-x) + 20), domain=S.Reals)
[-1]
```

Exercícios

Exercício 2.1.1. Calcule a solução das seguintes equações:

a) $x - 2 = 0$

b) $3 - x = 1$

c) $0 = -1 + x$

d) $\sqrt{2} \cdot x = 0$

Exercício 2.1.2. Calcule a solução das seguintes equações:

a) $2x - 3 = 2$

b) $2x - 3 = 2 - x$

c) $x - 3 = 2 + 2x$

Exercício 2.1.3. Calcule a solução das seguintes equações:

1. $x^2 = 0$
2. $x^2 + 4 = 0$
3. $x^2 + 4x + 4 = 0$
4. $x^2 - 16 = 0$
5. $x^2 + x - 2 = 0$
6. $2x - 6 + x^2 = -x^2 - 2$

Exercício 2.1.4. Calcule a solução das seguintes equações:

1. $3^x = 27$
2. $2^x = 2 \cdot 2^x - 1$
3. $4^x = 2 - 2^x$

Exercício 2.1.5. Calcule a solução da seguinte equação

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \tag{2.76}$$

2.2 Inequações

Uma inequação é uma sentença matemática que expressa uma relação de desigualdade entre duas expressões matemáticas. São exemplos de inequações

$$E_{\text{esq}} \neq E_{\text{dir}} \tag{2.77}$$
$$E_{\text{esq}} < E_{\text{dir}} \tag{2.78}$$
$$E_{\text{esq}} \leq E_{\text{dir}} \tag{2.79}$$
$$E_{\text{esq}} > E_{\text{dir}} \tag{2.80}$$
$$E_{\text{esq}} \geq E_{\text{dir}} \tag{2.81}$$

Assim como equações, inequações são usadas para descrever propriedades ou restrições sobre uma ou mais incógnitas. Neste caso, a **solução** é o conjunto de valores que a incógnita pode assumir de forma a satisfazer a inequação.

Exemplo 2.2.1. São exemplos de inequações envolvendo incógnitas:

a) Inequação de primeiro grau

$$2x + 3 > 5 \tag{2.82}$$

b) Inequação de segundo grau

$$x^2 \leq x - 3 \tag{2.83}$$

c) Inequação racional

$$\frac{2x+3}{x^2} \geq \frac{5}{x-3} \tag{2.84}$$

Não existe um procedimento geral para calcular a solução de uma inequação, mas o chamado estudo de sinal pode ser uma estratégia adequada em várias situações. Na sequência, vamos aplicá-la na resolução de algumas inequações.

2.2.1 Inequações de primeiro grau

Inequações de primeiro grau são aquelas em que a incógnita aparece apenas na potência 1. Ou seja, qualquer inequação que possa ser escrita na seguinte forma

$$ax + b \gtreqless 0, \tag{2.85}$$

onde $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, são coeficientes/parâmetros dados e x é a incógnita.

Para resolvê-la, podemos usar o **estudo de sinal** da expressão[6] $ax + b$. Para que seja nula, temos

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \tag{2.86}$$

Com isso, observamos que no caso de $a > 0$, temos que

$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b > 0 \tag{2.87}$$

e

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b < 0. \tag{2.88}$$

Consultemos a Figura 2.1.

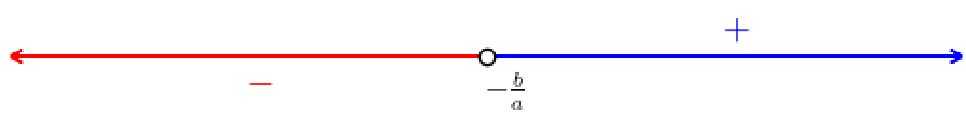

Figura 2.1: Representação geométrica do estudo do sinal de $ax + b$, com $a > 0$.

Agora, no caso de $a < 0$, temos

$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b < 0 \tag{2.89}$$

e

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow ax + b > 0. \tag{2.90}$$

Consultemos a Figura 2.2.

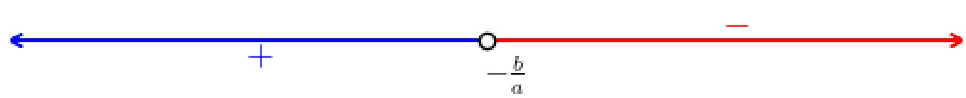

Figura 2.2: Representação geométrica do estudo do sinal de $ax + b$, com $a < 0$.

[6]Lembremos a tricotomia dos números reais. Consulte a Subseção 1.3.3.

Exemplo 2.2.2. Vamos resolver

$$4 + x \geq -x \tag{2.91}$$

Primeiramente, vamos reescrever a inequação no formato da (2.85). Para tanto, calculamos

$$4 + x\boldsymbol{+x} \geq -x\boldsymbol{+x} \tag{2.92}$$
$$4 + 2x \geq 0 \tag{2.93}$$
$$2x + 4 \geq 0 \tag{2.94}$$

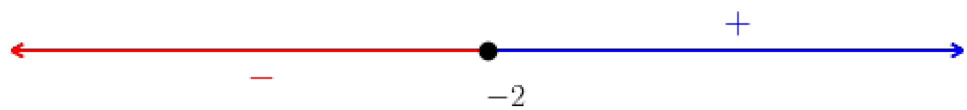

Figura 2.3: Estudo do sinal de $2x + 4$.

Agora, fazemos o estudo de sinal de $2x + 3$. Temos

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2. \tag{2.95}$$

Daí, segue que

$$x > -2 \Rightarrow 2x + 4 > 0 \tag{2.96}$$

e

$$x < -2 \Rightarrow 2x + 4 < 0 \tag{2.97}$$

Consulte a Figura 2.3. Logo, concluímos que a solução é $x \in [-2, \infty)$.

Com o SymPy, podemos computar a solução deste problema com os seguintes comandos

```
>>> from sympy import *
>>> x = symbols('x')
>>> solve_univariate_inequality(4 + x >= -x, x)
(-2 <= x) & (x < oo)
```

Em alguns casos, é possível calcular a solução apenas a partir de manipulações algébricas.

Exemplo 2.2.3. Vamos resolver

$$-2x < 4 \tag{2.98}$$

Começamos multiplicando ambos os lados da inequação por -1 para obtermos[7]

$$2x > -4 \tag{2.99}$$

Agora, multiplicamos por $\frac{1}{2}$, como segue

$$\frac{1}{2}\cdot 2x > \frac{1}{2}\cdot(-4) \tag{2.100}$$

$$x > -2 \tag{2.101}$$

Donde, temos a solução $x \in (-2, \infty)$.

Verifique usando o SymPy!

2.2.2 Produtos ou quocientes

Inequações envolvendo produtos ou quocientes de expressões de primeiro grau podemos ser resolvidas fazendo-se o **estudo de sinal**.

Exemplo 2.2.4. Vamos resolver

$$(x-1)(2-x) < 0. \tag{2.102}$$

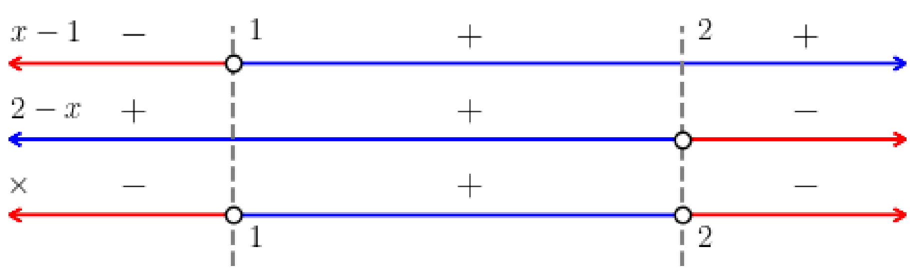

Figura 2.4: Estudo do sinal de $(x-1)(2-x)$.

[7]Notemos que a desigualdade se inverte ao multiplicarmos a inequação por um número negativo.

Para tanto, fazemos os estudos de sinais do primeiro fator $(x-1)$ e do segundo fator $(x+1)$. Em seguida, fazemos o estudo de sinal do produto $(x-1)(x+1)$. Neste caso, obtemos a Figura 2.4. Com isso, temos que a solução é $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

Verifique usando o SymPy!

No caso de quocientes, devemos nos atentar para o fato de que o denominador não seja nulo.

Exemplo 2.2.5. Vamos resolver

$$\frac{x-1}{2-x} \geq 0. \tag{2.103}$$

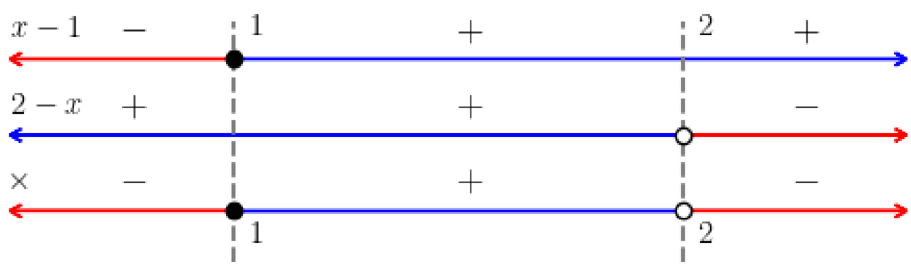

Figura 2.5: Estudo do sinal de $(x-1)/(2-x)$.

Para tanto, fazemos os estudos de sinais do primeiro fator $(x-1)$ e do segundo fator $(x+1)$. Em seguida, fazemos o estudo de sinal do quociente $(x-1)(x+1)$. Neste caso, obtemos a Figura 2.5. Com isso, temos que a solução é $x \in [1, 2)$.

Verifique usando o SymPy!

Exercícios

Exercício 2.2.1. Resolva as seguintes inequações

a) $x - 1 < 0$

b) $2 - x \geq 0$

c) $2 - 2x > 5$

d) $3x + 2 \leq 3 - x$

Exercício 2.2.2. Resolva as seguintes inequações

1. $(x - 2)(x + 1) > 0$
2. $(x - 2)(1 - x) \geq 0$
3. $(x - 2)(1 - x) < 0$
4. $(5x - 2)(1 - 3x) \leq 0$

Exercício 2.2.3. Resolva as seguintes inequações

1. $(x - 2)/(x + 1) > 0$
2. $(x - 2)/(1 - x) \geq 0$
3. $(x - 2)/(1 - x) < 0$
4. $(5x - 2)/(1 - 3x) \leq 0$

Exercício 2.2.4. Resolva a seguinte inequação

$$x^2 - 4 < 0 \tag{2.104}$$

Exercício 2.2.5. Resolve a seguinte inequação

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \geq 0 \tag{2.105}$$

Capítulo 3

Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

3.1 Definição e Gráfico de Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

3.1.1 Definição

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função** de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $y \in Y$ a cada dado elemento $x \in D$. Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo, f e escrevemos

$$f : D \mapsto Y, y = f(x) \tag{3.1}$$

para denotar que a função recebe **valor de entrada** em D e fornece **valor de saída** em Y, seguindo uma **regra de associação** preestabelecida $y = f(x)$. Usualmente, D é chamado é **conjunto de entrada** e Y de **conjunto de saída**.

Observação 3.1.1. No Python, podemos definir uma função abstrata f com o seguinte código

```
from sympy import *
f = Function('f')
```

Para restringirmos o conjunto de saída aos números reais, usamos

```
f = Function('f', real=True)
```

Exemplo 3.1.1. Consultemos os seguintes exemplos:

a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $y = 2x - 1$

A função f toma valor de entrada x no conjunto dos números reais $D = \mathbb{R}$ e fornece o valor de saída $y = 2x - 1$, também no conjunto dos números reais $Y = \mathbb{R}$. A regra de associação é $y = 2x - 1$. Seguem alguns exemplos de aplicação:

$$f(x) = 2x - 1 \tag{3.2}$$
$$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3 \tag{3.3}$$
$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 \tag{3.4}$$
$$f(z) = 2z - 1, \quad \forall z \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

No Python, podemos definir esta função com o seguinte código

```
from sympy import *
x = Symbol('x', real=True)
f = Lambda(x, 2*x-1)
```

Com isso, temos

```
In : f(x)
Out: 2*x - 1

In : f(-1)
Out: -3

In : f(sqrt(2))
Out: -1 + 2*sqrt(2)

In : z = Symbol('z', real=True)
In : f(z)
Out: 2*z - 1
```

b) $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$, $y = \dfrac{1}{x}$

A função g toma um valor de entrada em $D = \mathbb{Z}$ e fornece o valor de saída $y = \dfrac{1}{x}$ no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. A regra de associação é $y = \dfrac{1}{x}$. Segue alguns exemplos de aplicação:

$$g(2) = \frac{1}{2} \tag{3.6}$$

$$g(-5) = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \tag{3.7}$$

$$g(u) = \frac{1}{u}, \quad \forall u \in \mathbb{Z}^* \tag{3.8}$$

No Python, podemos definir esta função com o seguinte código

```
from sympy import *
x = Symbol('x', integer=True)
g = Lambda(x, 1/x)
```

Com isso, temos

```
In : g(x)
Out: 1/x

In : g(2)
Out: 1/2

In : g(-5)
Out: -1/5

In : u = Symbol('u', integer=True)
In : g(u)
Out: 1/u
```

Observação 3.1.2. Ao longo do texto, vamos assumir que as funções são definidas de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, salvo explicitamente escrito diferente. Assim sendo, vamos passar a usar a notação simplificada

$$f : x \mapsto f(x). \tag{3.9}$$

Mais ainda, as funções serão descritas diretamente de suas regras associação.

Observação 3.1.3. No SymPy, as computações são realizadas no conjunto dos números complexos. Portanto, deve-se tomar alguns cuidados na interpretação dos resultados. Por exemplo, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ e com o SymPy, temos

```
In : from sympy import *
In : sqrt(-1)
Out: I
```

onde, `I` denota o número imaginário $i = \sqrt{-1}$.

3.1.2 Domínio e Imagem

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

O conjunto D de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. Em notação de conjunto, escrevemos

$$D_f := \{x \in D : \; f(x) \in Y\}, \tag{3.10}$$

i.e. o domínio de f, denotado por D_f, é o conjunto de todos os valores $x \in D$, tal que $f(x) \in Y$[1].

Exemplo 3.1.2. Estudemos os seguintes casos.

a) $f : x \mapsto f(x), y = x^2$

Observamos que, dado qualquer valor de entrada $x \in \mathbb{R}$, x^2 está definido e é, também, um número real. Desta forma, a função f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$D_f = \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Neste caso, dizemos que f está **definida em toda parte**.

b) $g : x \mapsto g(x), y = \dfrac{1}{x}$:

Lembramos que a divisão por zero não está definida. A expressão $1/x$ está definida para todo número real não nulo, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, o domínio de g é

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.12}$$

Equivalentemente, escrevemos que g está definida para todo $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, ou ainda, simplesmente para todo $x \neq 0$.

[1] O valor de saída $f(x)$ pertence ao conjunto Y.

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$

A partir da regra, entendemos que y é função de x, i.e. $y \mapsto y(x)$. Aqui, observamos que a raiz quadrada está definida apenas para números reais não negativos. Logo, esta função está definida para x tal que

$$1 - x^2 \geq 0 \tag{3.13}$$
$$-x^2 \geq -1 \tag{3.14}$$
$$x^2 \leq 1 \tag{3.15}$$
$$-1 \leq x \leq 1 \tag{3.16}$$

Concluímos que seu domínio é $x \in (-1, 1)$.

Dada uma função $f : D \mapsto Y$, o conjunto de todos os valores $f(x) \in Y$ tal que $x \in D$ é chamado de **imagem** da função. Em notação de conjunto, temos

$$I_f = \{y \in Y : \; y = f(x) \wedge x \in D\}, \tag{3.17}$$

i.e. o conjunto de todos os valores $y \in Y$ tal que $y = f(x)$ e $x \in D$.

Exemplo 3.1.3. Estudemos os seguintes casos.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = x^2$:

Observamos que para qualquer número real x, temos $y = x^2 \geq 0$. Além disso, para cada número real não negativo y, temos que

$$x = \sqrt{y} \tag{3.18}$$
$$x^2 = (\sqrt{y})^2 \tag{3.19}$$
$$y = x^2 \tag{3.20}$$

Logo, concluímos que a imagem de f é

$$I_f = \mathbb{R}_+, \tag{3.21}$$

i.e. o conjunto de todos os $y \geq 0$.

b) $y = 1/x$:

Primeiramente, observemos que se $y = 0$, então não existe número real tal que $0 = 1/x$. Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número $y \neq 0$, temos que

$$x = \frac{1}{y} \tag{3.22}$$

$$y = \frac{1}{x}. \tag{3.23}$$

Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$:

No Exemplo 3.1.2, vimos que esta função está definida apenas para $-1 \leq x \leq 1$. Desta forma, temos que

$$0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \tag{3.24}$$

$$0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \tag{3.25}$$

Ou seja, a imagem desta função é o intervalo $[0, 1]$.

Observação 3.1.4. Em aplicações, o domínio e imagem de funções também ficam restritos à modelagem do problema. Por exemplo, pela Lei geral dos gases, o produto da pressão P pelo volume V de uma gás é função da temperatura T como segue

$$P = \frac{K}{V_0} \cdot T, \tag{3.26}$$

onde V_0 é o volume dado do gás e $K > 0$ é uma constante que depende do gás. A temperatura é dada em Kelvin, logo $T \geq 0$. Entendendo a pressão P como função de T, temos que o domínio é $T_0 < T < T_1$, onde T_0 é a menor temperatura que o gás admite e T_1 é a maior temperatura que o gás admite. A imagem é, então, $\frac{K}{V_0}T_0 < P < \frac{K}{V_0}T_1$.

3.1.3 Gráfico

O **gráfico** de uma função f é o conjunto dos **pontos** ou **pares ordenados** $(x, f(x))$ tal que x pertence ao domínio da função. Mais precisamente, para uma função $f : D \to \mathbb{R}$, o gráfico é o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{D} \times \mathbb{Y} : \ x \in D_f\}. \tag{3.27}$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um **plano cartesiano**.

Exemplo 3.1.4. Na sequência, temos os esboços dos gráficos de funções selecionadas.

a) $f(x) = x^2$

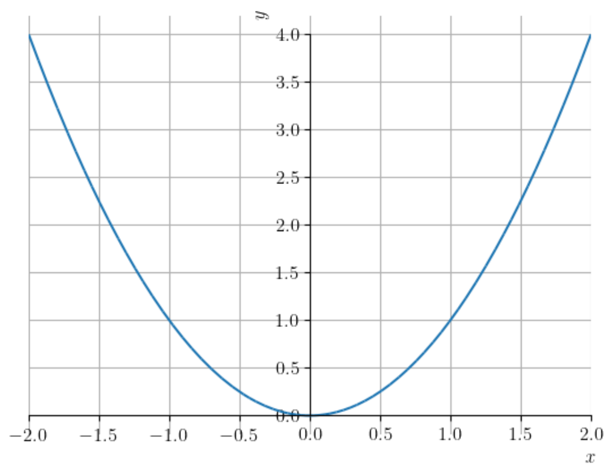

Figura 3.1: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$.

Com o SymPy, podemos plotar este gráfico com o seguinte código.

```
from sympy import *
x = Symbol('x', real=True)
plot(x**2, (x,-2, 2))
```

b) $y = \dfrac{1}{x}$

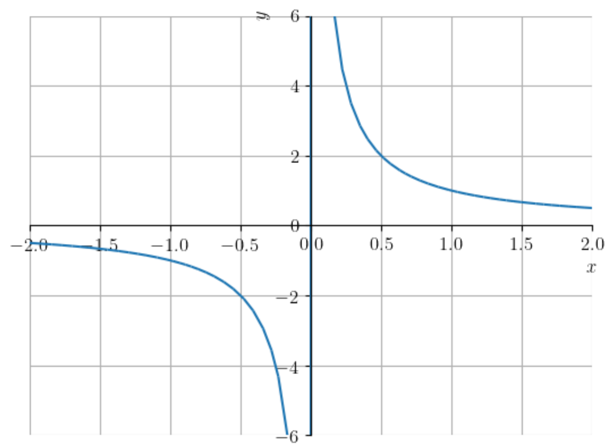

Figura 3.2: Esboço do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

Com o SymPy, podemos plotar este gráfico com o seguinte código

```
from sympy import *
x = Symbols('x', real=True)
plot(1/x, (x,-2, 2), ylim=[-6, 6])
```

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$

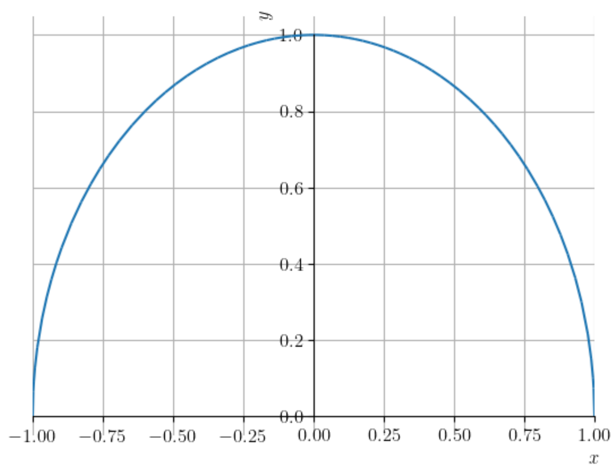

Figura 3.3: Esboço do gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Com o SymPy, podemos plotar este gráfico com o seguinte código

```
from sympy import *
x = Symbols('x', real=True)
plot(sqrt(1 - x**2), (x, -1, 1))
```

3.1.4 Categorias de Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Funções Algébricas

Funções algébricas são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Funções polinomiais e as funções algébricas derivadas são estudas nas próximas seções.

Exemplo 3.1.5. São exemplos de funções algébrigas:

a) $f(x) = 2$

b) $g(x) = 2x - 1$

c) $h(x) = 2 - x^3 + x$

d) $f_1(u) = \dfrac{u^2 + 2u + 1}{u - 1}$

e) $y = 2^z - \sqrt{z - 1}$

Funções Transcendentes

Funções transcendentes são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais são introduzidas nas próximas seções.

Exemplo 3.1.6. São exemplos de funções transcendentes:

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $y = \log_2(2x - 1)$

c) $g(v) = \operatorname{sen}(v) - \cos(v)$

d) $h(u) = \operatorname{arctg}(u)$

Funções Definidas por Partes

Funções definidas por partes são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**[2]

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 3.4.

[2] Esta função também pode ser definida por $|x| = \sqrt{x^2}$.

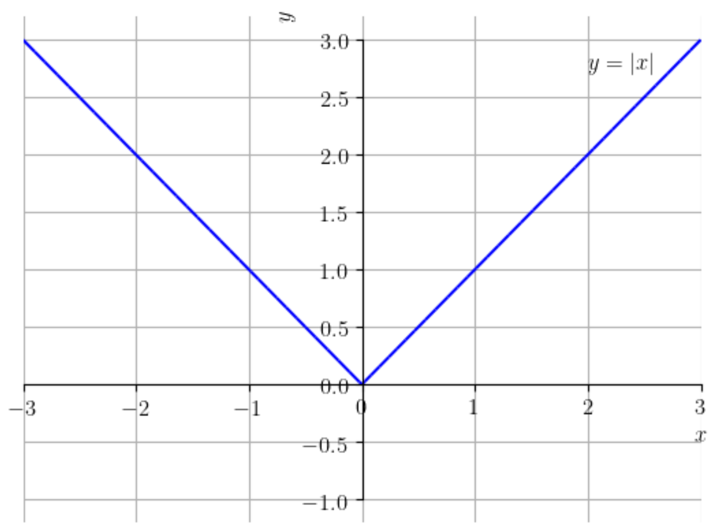

Figura 3.4: Esboço do gráfico da função valor absoluto $y = |x|$.

Com o SymPy, a função valor absoluto é definida por **`abs()`** ou `Abs()`. Por exemplo, temos

```
In : from sympy import *
In : abs(-1)
Out: 1
```

Use o SymPy para plotar o gráfico da função valor absoluto! Verifique com a Figura 3.4.

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.1.1. Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e. $f(x) = x$. Então, faça o esboço de seu gráfico.

Exercício 3.1.2. Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2 + 1$. Então, faça o esboço de seu gráfico.

Exercício 3.1.3. Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = 1 - x^2$. Então, faça o esboço de seu gráfico.

Exercício 3.1.4. Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \tag{3.29}$$

Então, faça o esboço de seu gráfico.

Exercício 3.1.5. Determine o domínio e a imagem da função valor absoluto.

3.2 Função Afim

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \tag{3.30}$$

sendo m e b parâmetros[3] dados. O parâmetro m é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro b é chamado de **coeficiente constante**[4].

Quando $m = 0$, temos uma **função constante** $f(x) = b$. Esta tem domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $\{b\}$. Quando $b = 0$, temos uma **função linear** $f(x) = mx$, cujo domínio é $(-\infty, \infty)$ e imagem é $(-\infty, \infty)$.

De forma geral, toda função linear com $m \neq 0$ tem $(-\infty, \infty)$ como domínio e imagem.

Exemplo 3.2.1. A Figura 3.5 mostra esboços dos gráficos das funções afins $f(x) = -5/2$, $f(x) = 2$ e $f(x) = 2x - 1$.

[3]números reais.
[4]Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

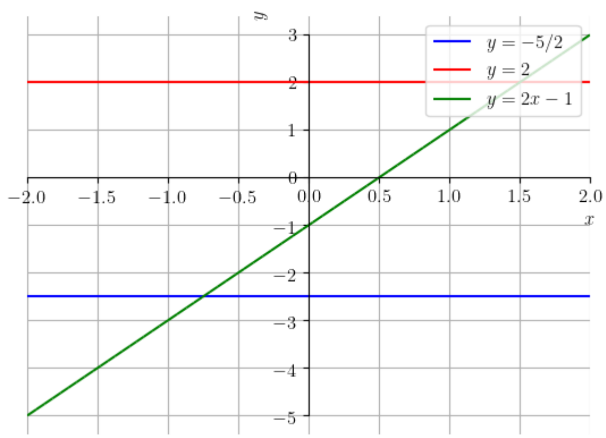

Figura 3.5: Esboços dos gráficos das funções afins $y = -5/2$, $y = 2$ e $y = 2x - 1$ discutidas no Exemplo 3.2.1.

Com o SymPy, podemos plotar o gráfico mostrado na Figura 3.5 com o seguinte código:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
p = plot(-5/2, (x,-2,2), line_color="blue", show=False)
q = plot(2, (x,-2,2), line_color="red", show=False)
p.extend(q)
q = plot(2*x-1, (x,-2,2), line_color="green", show=False)
p.extend(q)
p[0].label = "$y=-5/2$"
p[1].label = "$y=2$"
p[2].label = "$y=$"
p.legend = True
p.show()
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular m controla a **inclinação da reta** em relação ao eixo x[5]. Quando $m = 0$, temos uma reta horizontal. Quando $m > 0$ temos uma

[5] eixo das abscissas

reta com inclinação positiva (crescente) e, quando $m < 0$ temos uma reta com inclinação negativa.

Exemplo 3.2.2. A Figura 3.6 mostra esboços dos gráficos das funções lineares $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = -2x$, $f_5(x) = -x$ e $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$.

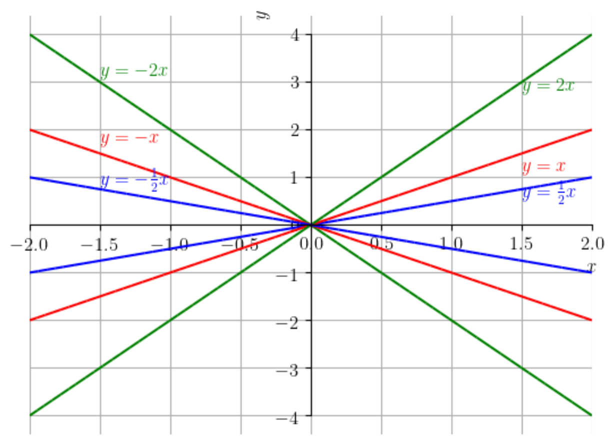

Figura 3.6: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo 3.2.2.

Verifique, plotando os gráficos com o SymPy!

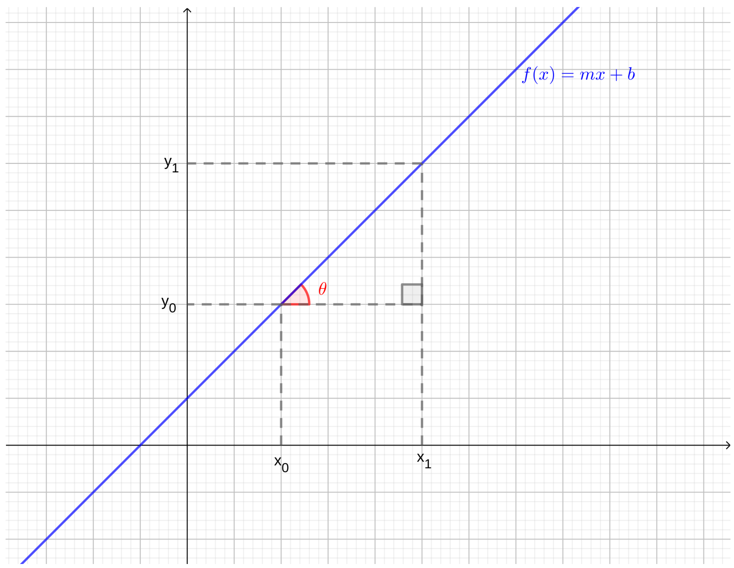

Figura 3.7: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo **ângulo de declividade** (veja a Figura 3.7). Para definirmos este ângulo, sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1), $x_0 < x_1$, pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim $f(x) = mx + b$. O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_0) e o segmento que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_1). Denotando este ângulo por θ, temos

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \tag{3.31}$$
$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{3.32}$$
$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \tag{3.33}$$
$$= m, \tag{3.34}$$

o que justifica chamar m de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), com $x_0 \neq x_1$, determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \tag{3.35}$$
$$mx_1 + b = y_1 \tag{3.36}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \tag{3.37}$$
$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \tag{3.38}$$

Daí, substituindo o valor de m na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \tag{3.39}$$
$$b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0 \tag{3.40}$$

Ou seja, a expressão da função linear (**equação da reta**) que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_{m}(x - x_0) + y_0. \tag{3.41}$$

Exemplo 3.2.3. Vamos traçar o esboço da reta que representa o gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$. Para tanto, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função $f(x) = -x - 1$, temos

x	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, -2)$ em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura 3.8.

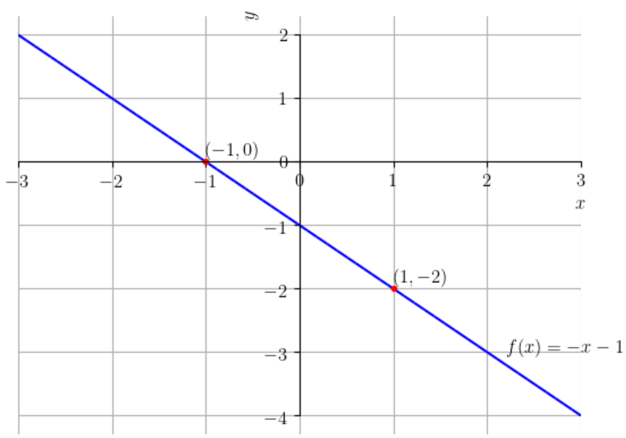

Figura 3.8: Esboço do gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$.

Plote o gráfico com o SymPy e compare com o seu esboço!

Exemplo 3.2.4. Vamos determinar a função afim $f(x) = mx+b$, cujo gráfico contém os pontos $(1, -1)$ e $(2, 1)$. Para tanto, vamos usar (3.41). Tomamos

$$(x_0, y_0) = (1, -1) \tag{3.42}$$
$$(x_1, y_1) = (2, 1) \tag{3.43}$$

Então, substituindo em (3.41) temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \tag{3.44}$$

De (3.41), temos

$$\begin{align} f(x) &= m(x - x_0) + y_0 \tag{3.45}\\ &= 2(x - 1) + (-1) \tag{3.46}\\ &= 2x - 3. \tag{3.47}\end{align}$$

Ou seja, a função afim desejada é $f(x) = 2x - 3$.

Com o SymPy, podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
x0 = 1
y0 = -1
x1 = 2
y1 = 1
m = (y1-y0)/(x1-x0)
f = Lambda(x, m*(x-x0) + y0)
print(f"f(x) = {f(x)}")
```

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.2.1. Determine o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções afins:

a) $f(x) = -100x + 1$

b) $y = -\pi$

c) $h(v) = 2 + x$

Exercício 3.2.2. Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f_1(x) = x$

b) $f_2(x) = -x$

c) $f_3(x) = x - 1$

d) $f_4(x) = -x + 1$

Exercício 3.2.3. Determine a função afim $f(x) = mx + b$, cujo gráfico contém os pontos $(-2, 1)$ e $(0, -2)$.

Exercício 3.2.4. Verifique se as retas $y = -x - 1$ e $y = 2x - 3$ se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

Exercício 3.2.5. Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$.

3.3 Função Potência

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \neq 0$ é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potência têm comportamentos característicos conforme o valor de n. Quando n é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são $(-\infty, \infty)$. Veja a Figura 3.9.

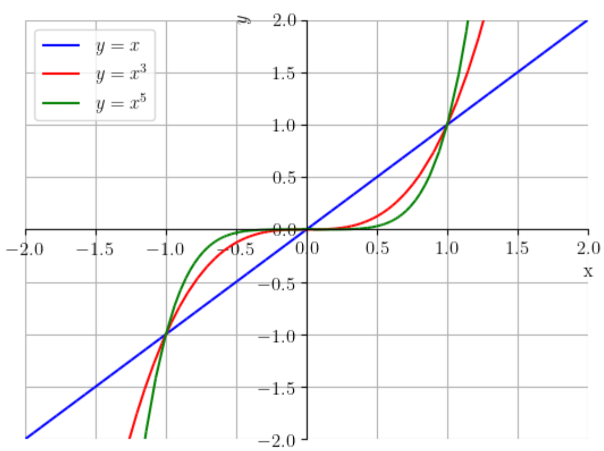

Figura 3.9: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$.

Funções potência com n positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem $[0, \infty)$. Veja a Figura 3.10.

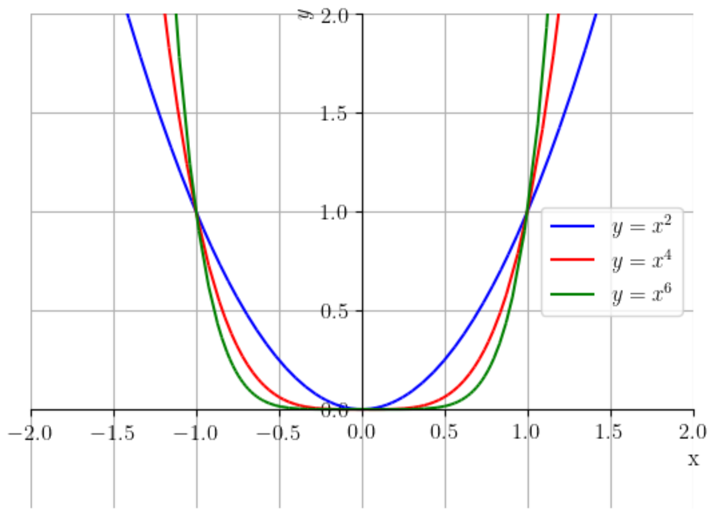

Figura 3.10: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$.

Funções potência com n inteiro negativo ímpar não são definidas em $x = 0$, tendo domínio e imagem igual a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Também, quando n inteiro negativo par, a função potência não está definida em $x = 0$, tem domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mas imagem $(0, \infty)$. Veja a Figura 3.11.

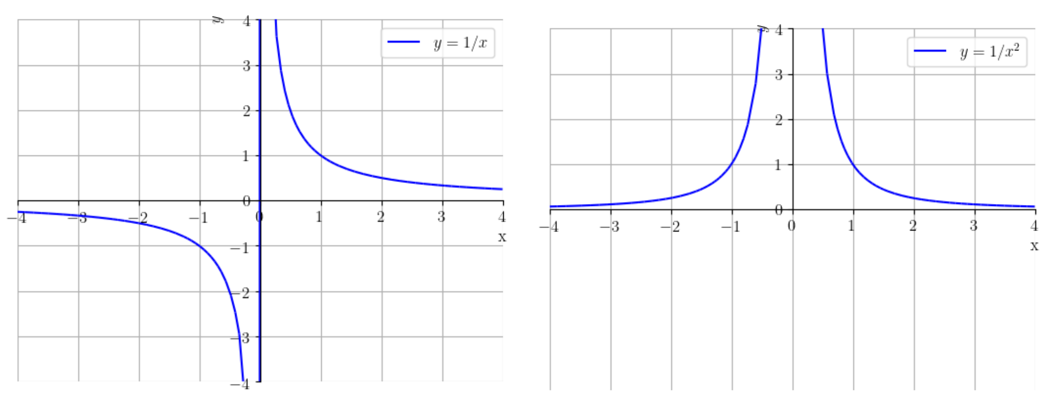

Figura 3.11: Esboços dos gráficos das funções potências $y = 1/x$ (esquerda), $y = 1/x^2$ (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando $n = 1/2,\ 1/3,\ 3/2$ e $2/3$. Veja a Figura 3.12.

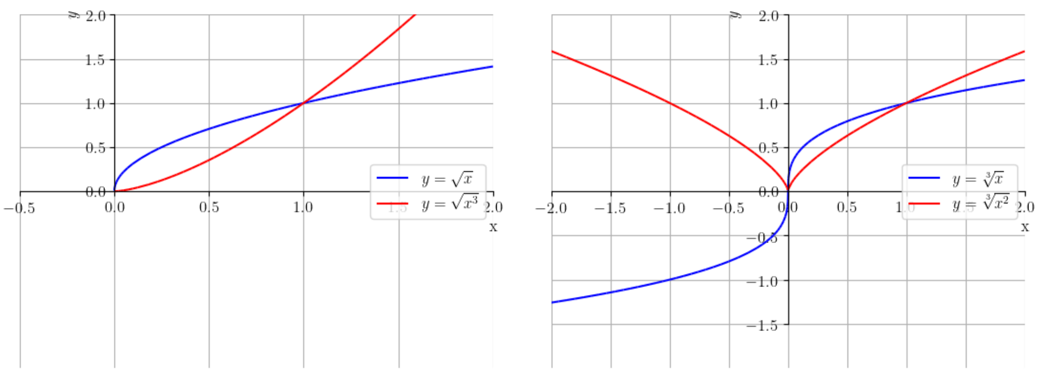

Figura 3.12: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x^3}$. Direita: $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.3.1. Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{5/2}$;

b) $g(x) = x^{5/3}$.

Solução.

a) Vamos analisar a função $f(x) = x^{5/2}$. Como $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$ e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que x^5 deve ser não negativo. Daí, x deve ser não negativo. Logo, o domínio de $f(x) = x^{5/2}$ é $[0, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 3.13.

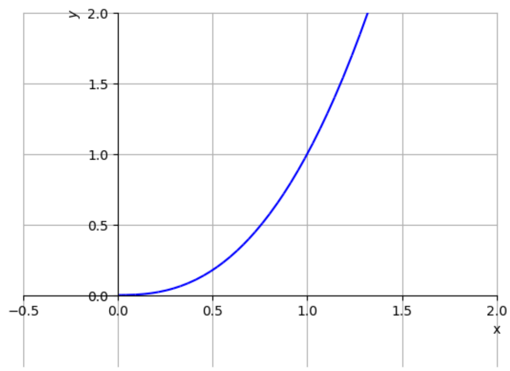

Figura 3.13: Esboço do gráfico de $f(x) = x^{5/2}$.

Verifique o gráfico plotando-o com o SymPy!

b) Vamos analisar a função $g(x) = x^{5/3}$. Como $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$, não temos restrição sobre os valores de x. Logo, o domínio da função g é $(-\infty, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 3.14.

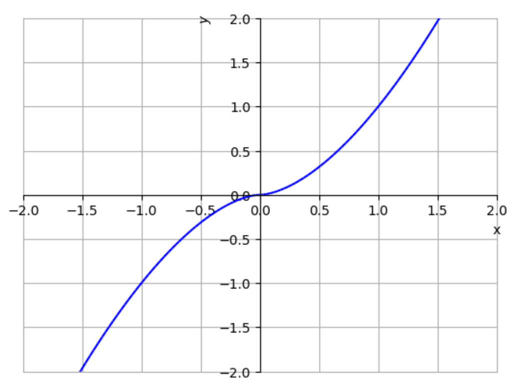

Figura 3.14: Esboço do gráfico de $g(x) = x^{5/3}$.

Para plotar o gráfico de $g(x)$ com o SymPy, digitamos:

```
from sympy import *
p = plot(real_root(x**5,3),(x,-2,2))
```

◊

ER 3.3.2. Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução. Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de interseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa x tais que

$$
\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} && (3.48)\\
&\Rightarrow 1 = x\sqrt[3]{x} && (3.49)\\
&\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} && (3.50)\\
&\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 && (3.51)\\
&\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 && (3.52)\\
&\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} && (3.53)\\
&\Rightarrow x^4 = 1 && (3.54)\\
&\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. && (3.55)
\end{aligned}
$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura 3.15. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando $f(x)$, temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \tag{3.56}$$

e

$$(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1) \tag{3.57}$$

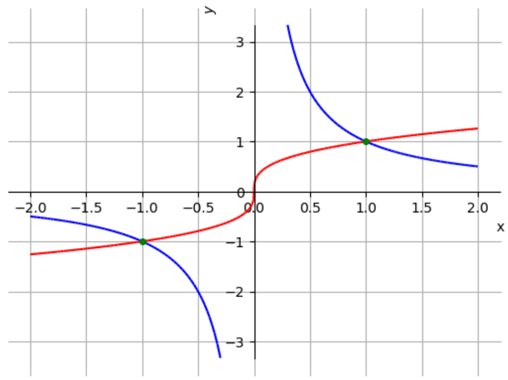

Figura 3.15: Interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ (azul) e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (vermelho).

Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1)$. De (3.41), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \tag{3.58}$$

$$y = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) + (-1) \tag{3.59}$$

$$y = x + 1 - 1 \tag{3.60}$$

$$y = x. \tag{3.61}$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ tem equação $y = x$.

Usando o SymPy, podemos resolver o problema com o seguinte código.

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
f = Lambda(x, 1/x)
g = Lambda(x, real_root(x,3))
# x positivo
x = Symbol('x', negative=True)
x0 = solve(f(x)-g(x))[0]
y0 = f(x0)
# x negativo
```

```
    x = Symbol('x', positive=True)
    x1 = solve(f(x)-g(x))[0]
    y1 = f(x1)

    print(f"y = {(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0}")
```

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.3.1. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^7$;

b) $g(x) = x^8$.

Exercício 3.3.2. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x^7}$;

b) $g(x) = \frac{1}{x^8}$.

Exercício 3.3.3. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$;

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

Exercício 3.3.4. Determine o(s) ponto(s) de interseção entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = 1/x$.

Exercício 3.3.5. Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção entre as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1/x^2$.

3.4 Função Polinomial

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{3.62}$$

onde a_i são coeficientes reais, $a_n \neq 0$ e n é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte[6]. Polinômios de grau ímpar tem imagem $(-\infty, \infty)$. Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 3.16.

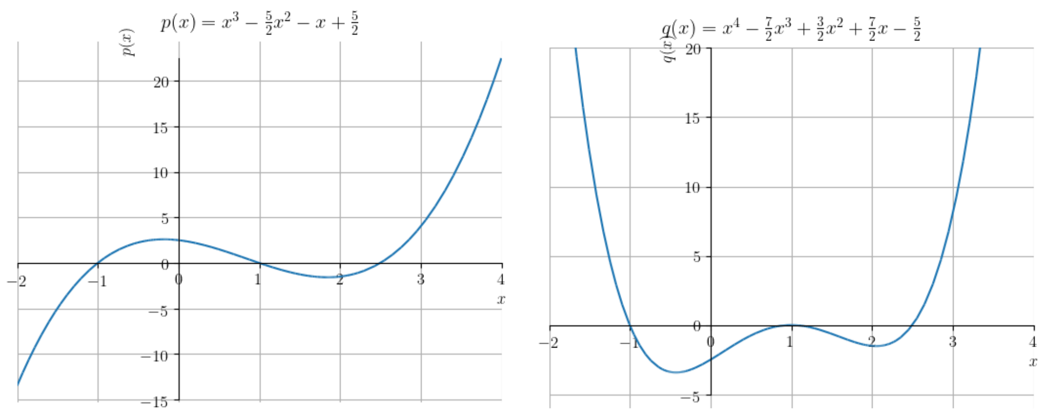

Figura 3.16: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda: $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$. Direita: $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$.

Quando $n = 0$, temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando $n = 1$, temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando $n = 2$ temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando $n = 3$, temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

3.4.1 Função Quadrática

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

[6]Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é (∞, ∞)

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{3.63}$$

onde a é chamado de **coeficiente do termo quadrático**, b o **coeficiente do termo linear** e c o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3.64}$$

O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando $a > 0$ e, **côncava para baixo** quando $x < 0$. Veja a Figura 3.17.

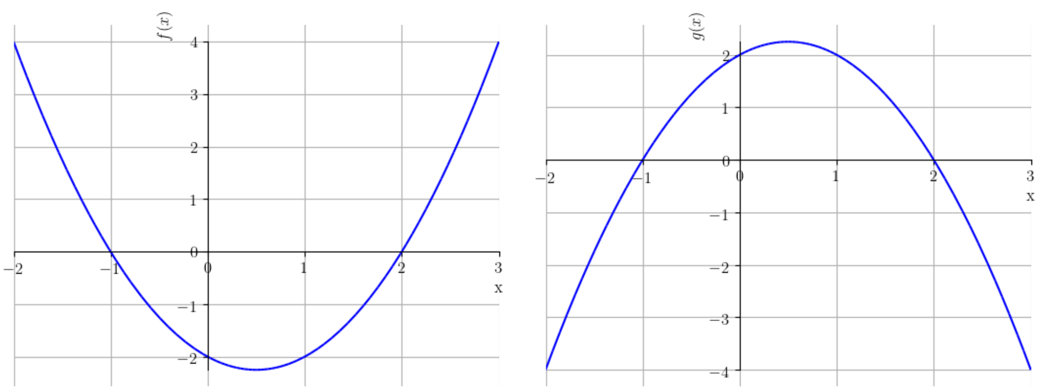

Figura 3.17: Esboço dos gráficos das funções quadráticas: $f(x) = x^2 - x - 2$ (esquerda) e $g(x) = -x^2 + x + 2$ (direita).

O **vértice** da parábola que representa uma função quadrática $f(x)$ com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor mínimo (máximo)** em todo o seu domínio natural. Quando f têm zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros x_0 e x_1 da função, i.e. o vértice $V = (x_v, y_v)$ é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \tag{3.65}$$

O valor x_v é a abscissa do ponto em que a função quadrática f atinge o **valor máximo (valor mínimo)** y_v. Em geral, o vértice é dado por

$$(x_v,y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \tag{3.66}$$

Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.4.1. Determine os zeros do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Solução. Determinar os zeros da função f significa encontrar todos os valores de x tais que $f(x) = 0$ (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de f intercepta o eixo das abscissas). Temos

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && (3.67)\\ x^3 - x^2 - 2x &= 0 && (3.68)\\ x(x^2 - x - 2) &= 0 && (3.69)\\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 &= 0. && (3.70) \end{aligned}$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (3.64) na equação $x^2 - x - 2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (3.71)\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} && (3.72)\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} && (3.73)\\ &= \frac{1 \pm 3}{2} && (3.74)\\ &= -1 \quad \text{ou} \quad 2 && (3.75) \end{aligned}$$

Com isso, temos que os zeros da função f ocorrem nos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Com o SymPy, podemos calcular os zeros da função f com o seguinte comando:

```
from sympy import *
solve(x**3-x**2-2*x)
```

◊

ER 3.4.2. Determine o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - x - 2$.

Solução. Como f é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo, f atinge seu valor mínimo no seu vértice, que tem abscissa

$$x_v = -\frac{b}{2a} \tag{3.76}$$
$$= -\frac{-1}{2 \cdot 1} \tag{3.77}$$
$$= \frac{1}{2}. \tag{3.78}$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de f é $x_v = 1/2$ e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 \tag{3.79}$$
$$= \frac{1 - 2 - 8}{4} \tag{3.80}$$
$$= -\frac{9}{4}. \tag{3.81}$$

Usando SymPy, podemos resolver este exercício com o seguinte código:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
a = 1
b = -1
c = -2
f = Lambda(x, a*x**2 + b*x + c)
xv = -b/(2*a)
print(f"Valor mínimo = {f(xv)}")
```

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.4.1. Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções polinomiais:

1. $f(x) = 1$
2. $g(x) = -x + 1$
3. $h(x) = x^2 - 1$
4. $f_1(x) = x^3$

Exercício 3.4.2. Determine os zeros do polinômio $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$.

Exercício 3.4.3. Determine o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + x + 2$.

Exercício 3.4.4. Faça um esboço da região determinada entre os gráficos de $y = 0$ e $y = x^2 - 1$, com $-1 \leq x \leq 1$.

3.5 Função Racional

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{3.82}$$

onde $p(x)$ e $q(x) \not\equiv 0$ são polinômios.

Funções racionais não estão definidas nos zeros de $q(x)$. Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura 3.18 para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \tag{3.83}$$

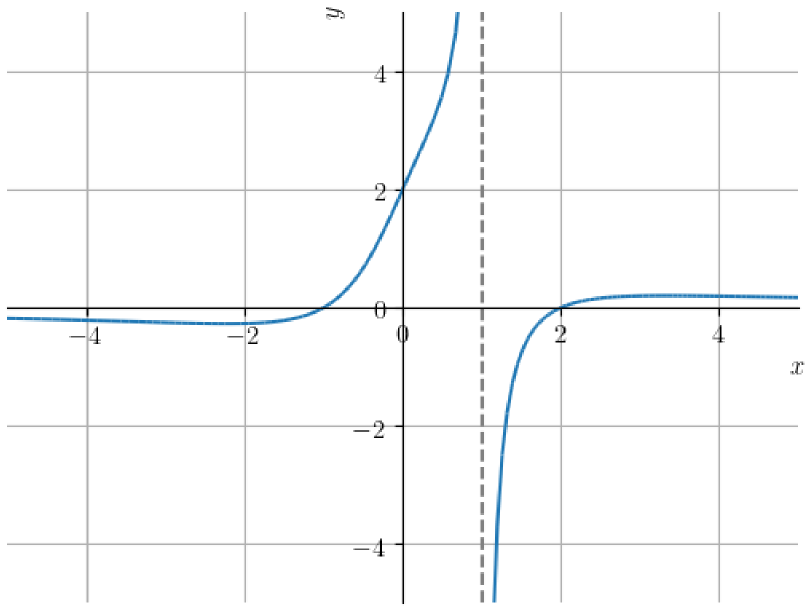

Figura 3.18: Esboço do gráfico da função racional $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

Com o estudo do **cálculo de limites**, veremos que a reta $y = 0$ (eixo das abscissas) é uma **assíntota horizontal** e a reta $x = 1$ (reta tracejada) é uma **assíntota vertical** ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto $x = 1$ está relacionada ao fato de que o denominador se anula em $x = 1$. Ainda, para $x \neq 1$ temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \tag{3.84}$$

Com isso, podemos concluir que o domínio da função $f(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.5.1. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \tag{3.85}$$

Solução. Como $f(x)$ é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \tag{3.86}$$

Logo, o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

◊

ER 3.5.2. Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x-1}. \tag{3.87}$$

Solução. Tendo em vista que o denominador se anula em $x = 1$, o domínio de g é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que $g(x) = 1$ para $x \neq 1$. I.e., g é uma função constante para valores de $x \neq 1$ e não está definida em $x = 1$. Veja a Figura 3.19 para o esboço do gráfico da função g.

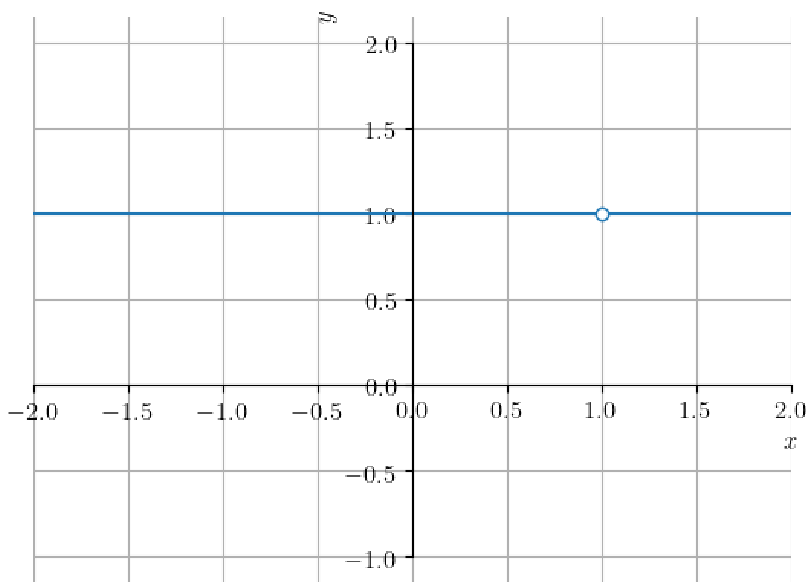

Figura 3.19: Esboço do gráfico da função $g(x) = (x-1)/(x-1)$.

Usando o SymPy, os comandos

```
from sympy import *
plot((x-1)/(x-1),(x,-2,2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em $x = 1$. Isto ocorre, pois os gráficos com o SymPy são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.

Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.5.1. Determine o domínio e faça um esboço do gráfico da função racional

$$y = \frac{1}{x-1} \tag{3.88}$$

Exercício 3.5.2. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} \tag{3.89}$$

Exercício 3.5.3. Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-x}. \tag{3.90}$$

Exercício 3.5.4. Encontre o(s) ponto(s) de interseção entre os gráficos das funções

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \tag{3.91}$$

e

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - x^3} \tag{3.92}$$

Exercício 3.5.5. Determine os zeros da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \tag{3.93}$$

3.6 Funções Trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Funções trigonométricas são funções transcendentes e são construídas a partir do estudo trigonométrico de triângulos retângulos.

3.6.1 Seno e Cosseno

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

As funções trigonométricas seno $y = \operatorname{sen}(x)$ e cosseno $y = \cos(x)$ podem ser definidas a partir do **círculo trigonométrico** (veja a Figura 3.20). Seja x o ângulo[7] de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta r na Figura 3.20). Seja, então, (a,b) o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária[8]. Então, definimos:

$$\operatorname{sen}(x) = b, \qquad \cos(x) = a. \tag{3.94}$$

A partir da definição, notamos que ambas funções têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $[-1, 1]$.

[7]Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.
[8]Circunferência do círculo de raio 1.

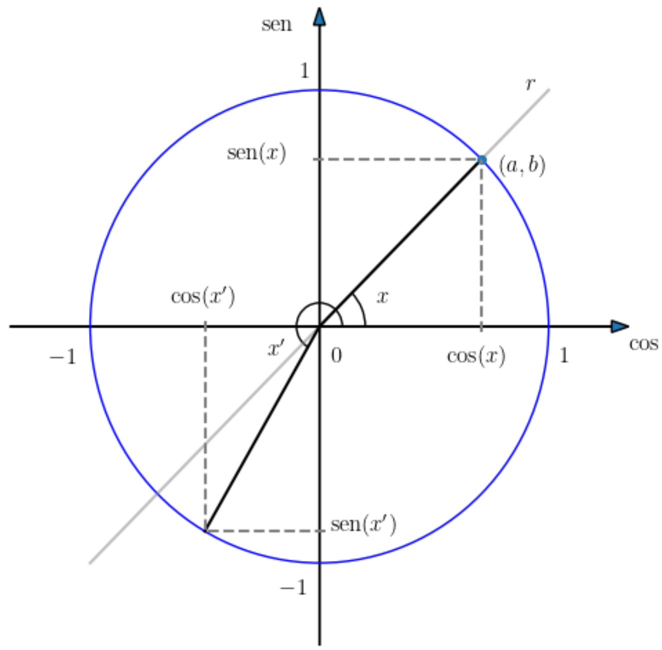

Figura 3.20: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 3.21 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.95}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{3.96}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \tag{3.97}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.98}$$

$$\tag{3.99}$$

As funções seno e cosseno estão definidas no SymPy como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de $\pi/6$, digitamos:

```
from sympy import *
sin(pi/6)
```

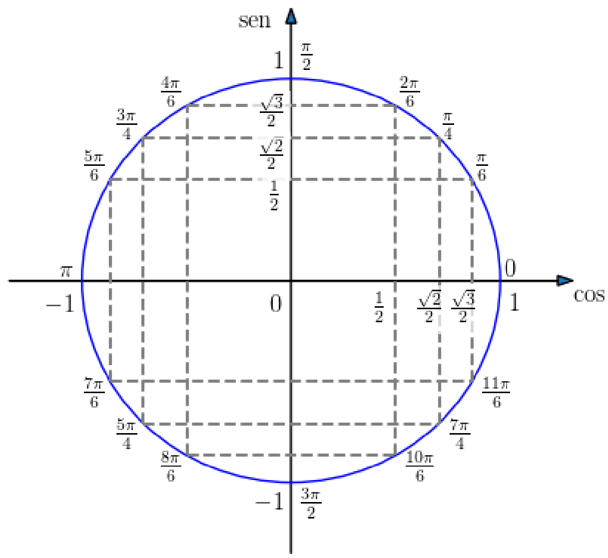

Figura 3.21: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função** $f(x)$ é dita **periódica** quando existe um número p, chamado de **período** da função, tal que

$$f(x+p) = f(x) \tag{3.100}$$

para qualquer valor de x no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, observamos que ambas são periódicas com período 2π, i.e.

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x) \tag{3.101}$$

e

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \tag{3.102}$$

para qualquer valor de x.

Na Figura 3.22, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

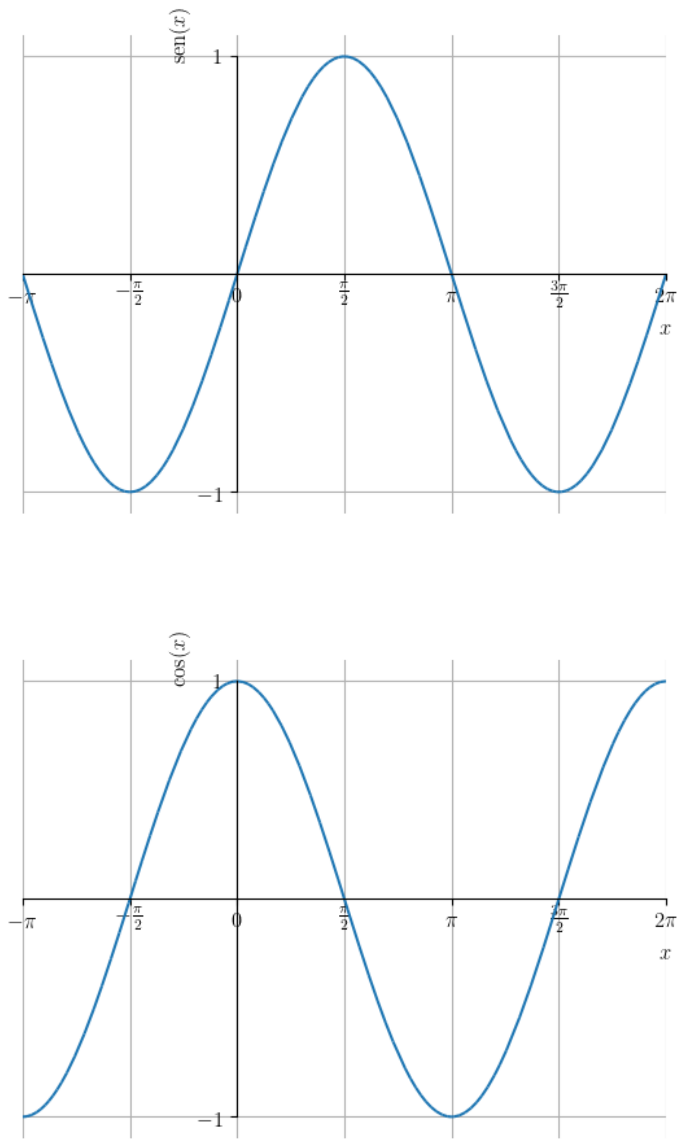

Figura 3.22: Esboços dos gráficos das funções seno (acima) e cosseno (abaixo).

3.6.2 Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \tag{3.103}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \tag{3.104}$$

No SymPy, as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções `tan`, `cot`, `sec` e `csc`, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de $\operatorname{cosec}(\pi/4)$ com o comando

```
from sympy import *
csc(pi/4)
```

Na Figura 3.23, temos os esboços dos gráficos das funções **tangente** e **cotangente**. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, \infty)$ e período π.

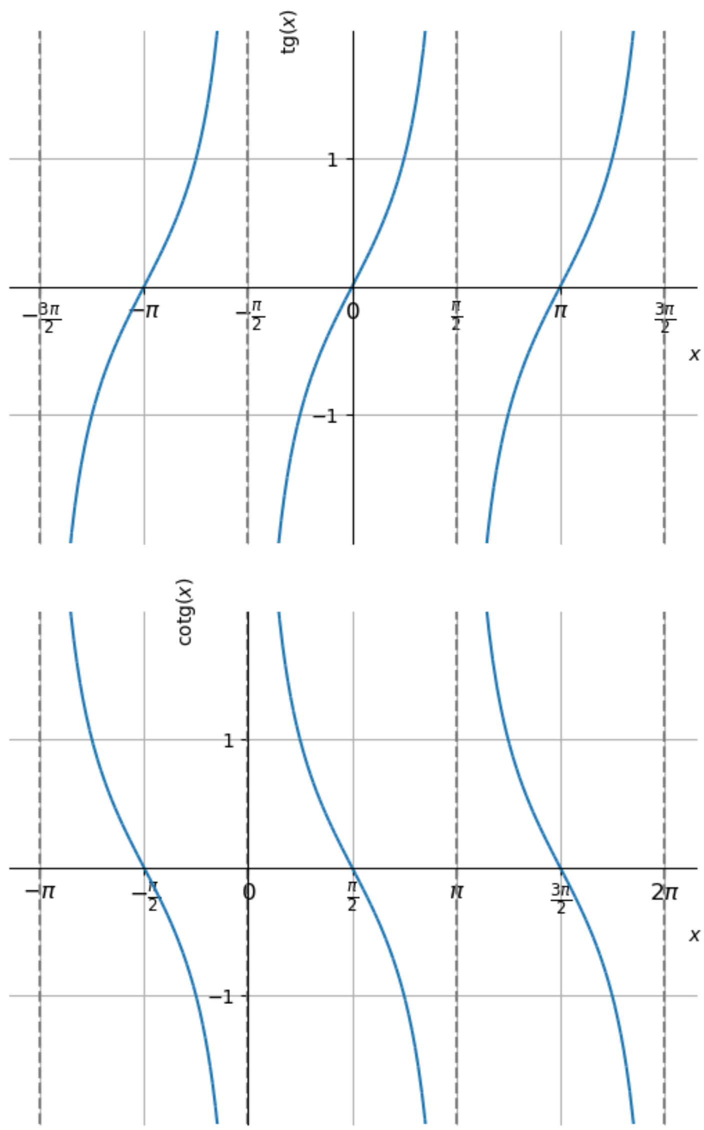

Figura 3.23: Esboços dos gráficos das funções tangente (acima) e cotangente(abaixo).

Na Figura 3.24, temos os esboços dos gráficos das funções **secante** e **cossecante**. Observemos que a função secante não está definida nos pontos $(2k+1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ e período π.

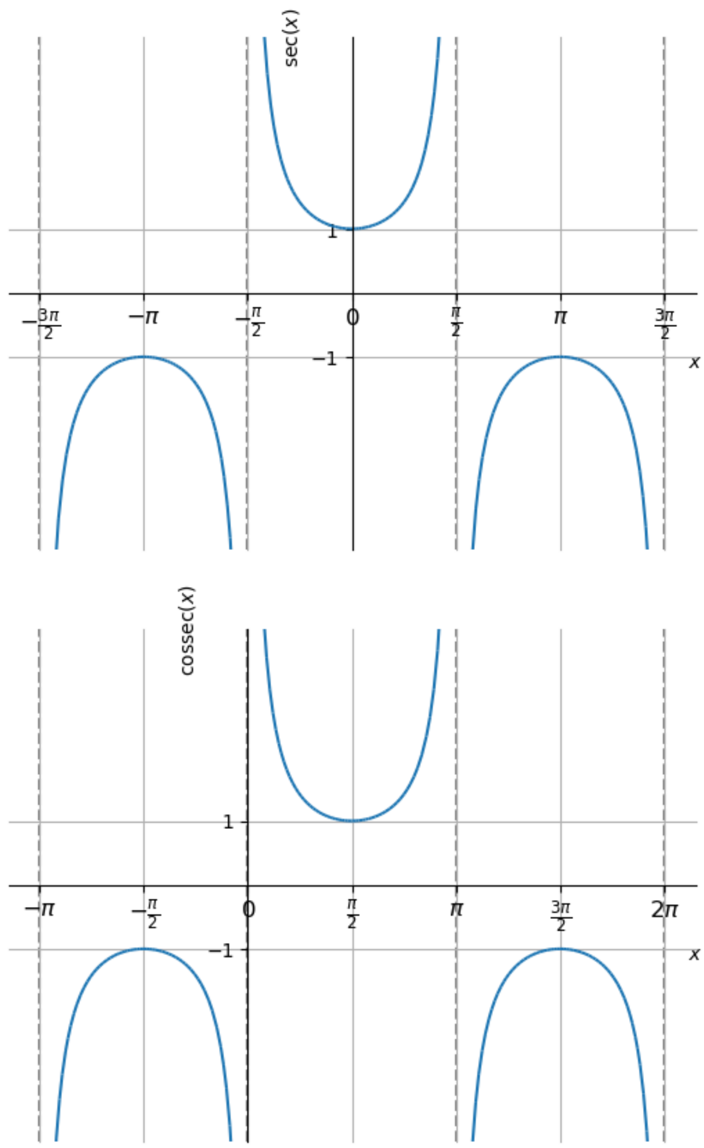

Figura 3.24: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

3.6.3 Identidades Trigonométricas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Comecemos pela **identidade fundamental**

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3.105}$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \tag{3.106}$$
$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \tag{3.107}$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \tag{3.108}$$
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y), \tag{3.109}$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \tag{3.110}$$
$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x. \tag{3.111}$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{3.112}$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \tag{3.113}$$

Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.6.1. Mostre que

$$\cos x - 1 = -2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{3.114}$$

Solução. A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{3.115}$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}. \tag{3.116}$$

Então, isolando $\cos x$, obtemos

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{3.117}$$

$$1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \tag{3.118}$$

$$\cos x - 1 = -2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{3.119}$$

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.6.1. Calcule os seguintes valores

a) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$

b) $\cos(7\pi/6)$

c) $\operatorname{tg}(7\pi/6)$

d) $\operatorname{cotg}(7\pi/6)$

e) $\sec(7\pi/6)$

f) $\operatorname{cosec}(7\pi/6)$

Exercício 3.6.2. Calcule os seguintes valores

a) $\operatorname{sen}(-pi/3)$

b) $tg(-3\pi/4)$

c) $\cos(19\pi/6)$

Exercício 3.6.3. Mostre que $\operatorname{sen} x$ é uma **função ímpar**[9], i.e.

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \tag{3.120}$$

para todo número real x.

Exercício 3.6.4. Mostre que $\cos x$ é uma **função par**[10], i.e.

$$\cos x = \cos(-x) \tag{3.121}$$

para todo número real x.

Exercício 3.6.5. Determine os pontos de interseção entre as funções $f(x) = 2x/\pi$ e $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

3.7 Operações com Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

3.7.1 Soma , Diferença , Produto e Quociente

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dadas as funções f e g com domínio em comum D. Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ para todo $x \in D$;
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in D$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 3.7.1. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$. Temos:

a) $(f + g)(x) = x^2 + x$ e está definida em toda parte.

[9]Por definição, $f(x)$ é função ímpar quando $f(x) = -f(-x)$.
[10]Por definição, $f(x)$ é uma função par quando $f(x) = f(-x)$.

b) $(g-f)(x) = x - x^2$ e está definida em toda parte.

c) $(f \cdot g)(x) = x^3$ e está definida em toda parte.

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$ e tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$[11].

3.7.2 Função Composta

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dadas as funções f e g. Definimos a **função composta** de f com g por

$$(f \circ g)(x) := f\left(g(x)\right). \tag{3.122}$$

Seu domínio consiste dos valores de x que pertençam ao domínio da g e tal que $g(x)$ pertença ao domínio da f. Em notação matemática

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : \; g(x) \in D_f\} \tag{3.123}$$

Exemplo 3.7.2. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x+1$. A função composta de f com g é

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) \tag{3.124}$$

$$= f(x+1) = (x+1)^2 \tag{3.125}$$

3.7.3 Translação, Contração, Dilatação e Reflexão de Gráficos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característicos no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

[11] Observemos que não podemos simplificar o x, pois a função $y = x$ é diferente da função $y = x^2/x$.

3.7.4 Translação

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que a o gráfico de $y = f(x) + k$ é uma **translação vertical** do gráfico de f. Se $k > 0$, observamos uma **translação vertical para cima**. Se $k < 0$, observamos uma **translação vertical para baixo**.

Exemplo 3.7.3. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 3.25, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k = x^2 + k$ para $k = 1$.

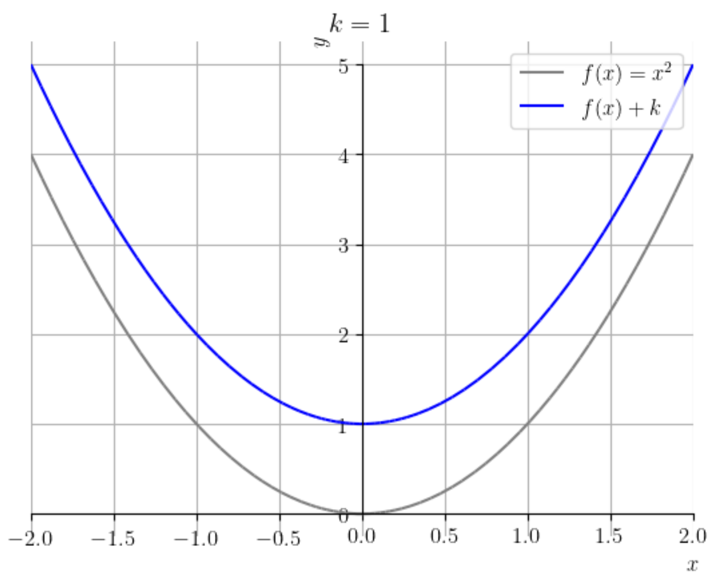

Figura 3.25: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $y = f(x) + k$ com $k = 1$.

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
k = 1
f = Lambda(x, x**2)
p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x)+k,(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
```

```
    p.extend(q)
    p.title = (f"$k = {k}$")
    p.xlabel = '$x$'
    p.ylabel = '$y$'
    p[0].label = "$f(x) = x^2$"
    p[1].label = "$f(x)+k$"
    p.legend = True
    p.show()
```

Alterare o valor de `k` e a função `f` para analisar outros casos!

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que o gráfico de $y = f(x+k)$ é uma translação horizontal do gráfico de f em k unidades. Se $k > 0$, observamos uma **translação horizontal para a esquerda**. Se $k < 0$, observamos uma **translação horizontal para a direita**.

Exemplo 3.7.4. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 3.26, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x+k) = (x+k)^2$ para $k = 1$.

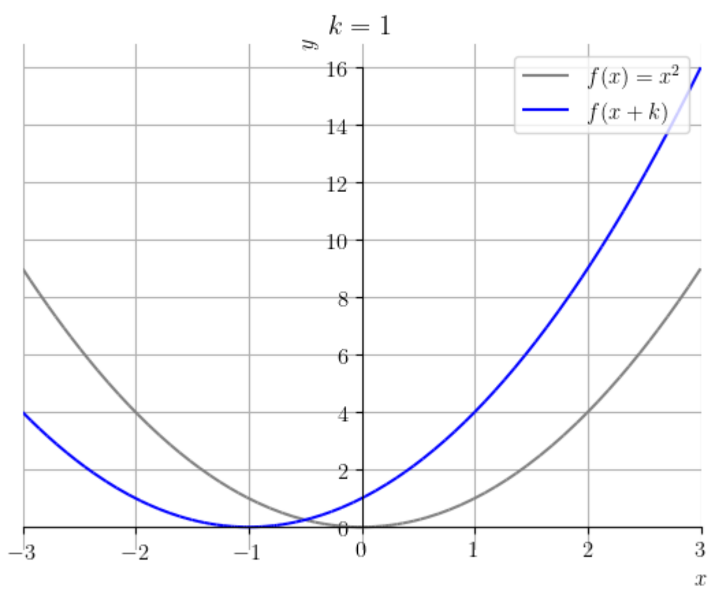

Figura 3.26: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $f(x+k)$ com $k = 1$.

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x+k)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
k = 1
f = Lambda(x, x**2)
p = plot(f(x),(x,-3,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x+k),(x,-3,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = (f"$k = {k}$")
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x)+k$"
p.legend = True
p.show()
```

Altere o valor de `k` e a função `f` para analisar outros casos!

3.7.5 Dilatação e Contração

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Sejam dadas uma função f e uma constante α. Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$ é uma **dilatação vertical** do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = \alpha f(x)$ é uma **contração vertical** do gráfico de f, quando $0 < \alpha < 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma **contração horizontal** do gráfico de f, quando $\alpha > 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma **dilatação horizontal** do gráfico de f, quando $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 3.7.5. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 3.27, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot x^2$ para $\alpha = 2$.

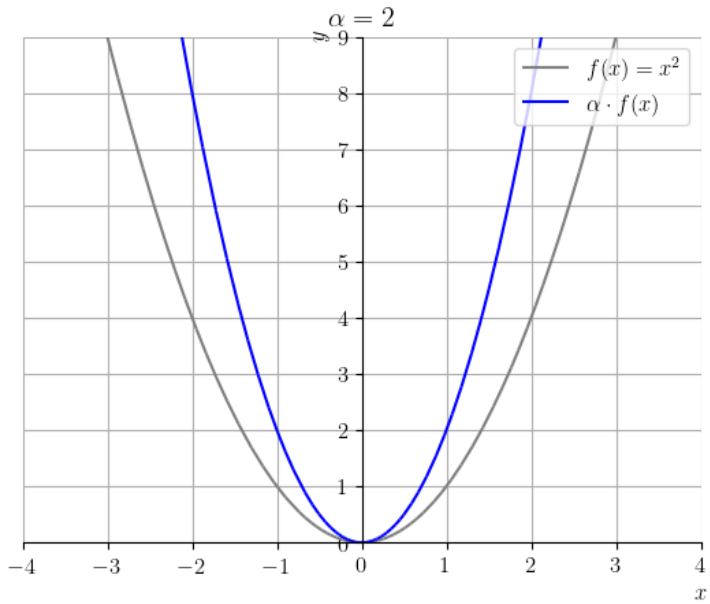

Figura 3.27: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $(\alpha \cdot f)(x)$ com $\alpha = 2$.

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $(\alpha \cdot f)(x)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
alpha = 2
f = Lambda(x, x**2)
p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(alpha * f(x),(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = (f"$\\alpha = {alpha}$")
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$(\\alpha\\cdot f)(x)$"
p.legend=True
p.show()
```

Alterare o valor de `alpha` e a função `f` para estudar outros casos!

Exemplo 3.7.6. Seja $f(x) = x^3$. A Figura 3.28, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^3$ para $\alpha = \frac{1}{2}$.

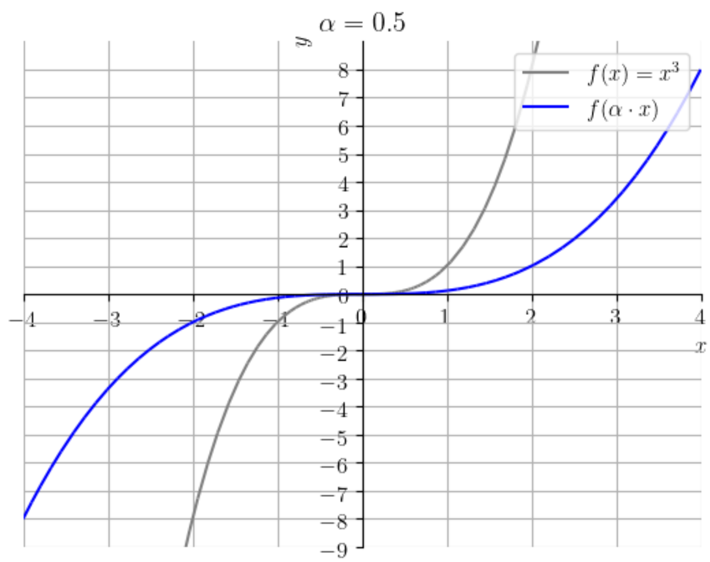

Figura 3.28: Esboço do gráfico de $f(x) = x^3$ e $f(\alpha \cdot x)$ com $\alpha = \frac{1}{2}$.

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
alpha = 0.5
f = Lambda(x, x**3)
p = plot(f(x),(x,-4,4),ylim=[-9,9],line_color="gray",show=False)
q = plot(f(alpha*x),(x,-4,4),ylim=[-9,9],line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = (f"$\\alpha = {alpha}$")
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^3$"
p[1].label = "$f(\\alpha\\cdot x)$"
p.legend=True
p.show()
```

Altere o valor de `alpha` e a função `f` para estudarmos outros casos!

3.7.6 Reflexão

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Seja dada uma função f. O gráfico da função $y = -f(x)$ é uma **reflexão em torno do eixo das abscissas** do gráfico da função f. Já, o gráfico da função $y = f(-x)$ é uma **reflexão em torno do eixo das ordenadas** do gráfico da função f.

Exemplo 3.7.7. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura 3.30, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

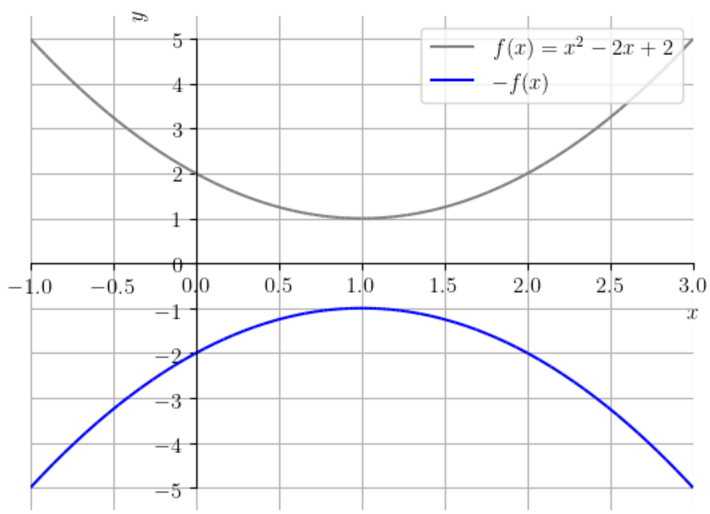

Figura 3.29: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $-f(x)$.

O seguinte código Python, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
f = Lambda(x, x**2-2*x+2)
p = plot(f(x),(x,-1,3),ylim=[-5,5],line_color="gray",show=False)
q = plot(-f(x),(x,-1,3),ylim=[-5,5],line_color="blue",show=False)
```

```
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x)$"
p[1].label = "$-f(x)$"
p.legend=True
p.show()
```

Altere a função `f` para estudar outros casos!

Exemplo 3.7.8. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura **??**, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x) = x^2 + 2x + 2$.

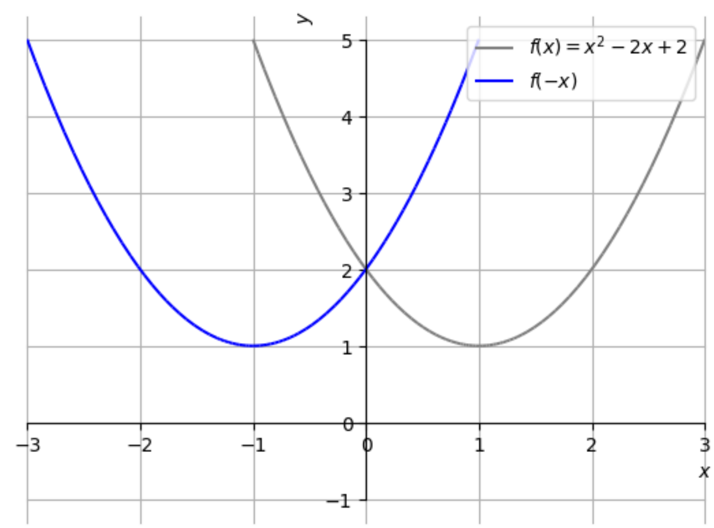

Figura 3.30: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $f(-x)$.

O seguinte código `Python`, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
plt.style.use('bmh')
x = Symbol('x')
f = Lambda(x, x**2-2*x+2)
p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)
```

```
    p.extend(q)
    q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="",show=False)
    p.extend(q)
    p.xlabel = '$x$'
    p.ylabel = '$y$'
    p[0].label = "$f(x)$"
    p[1].label = "$f(-x)$"
    p.legend=True
    p.show()
```

Altere a função `f` para estudar outros casos!

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.7.1. Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \tag{3.126}$$

Determine a função composta $(f \circ g)$ e seu domínio.

Solução. Começamos determinando a função composta

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &:= f(g(x)) && (3.127)\\
&= f(x^2+1) && (3.128)\\
&= \frac{(x^2+1)^2 - \sqrt{x^2+1-1}}{x^2+1} && (3.129)\\
&= \frac{x^4+2x^2+1-\sqrt{x^2}}{x^2+1} && (3.130)\\
&= \frac{x^4+2x^2+1-|x|}{x^2+1}. && (3.131)
\end{aligned}$$

Agora, observamos que g está definida em toda parte e tem imagem $[1,\infty)$. Como o domínio da f é $[1,\infty)$, temos que $(f \circ g)$ está definida em toda parte.

◊

ER 3.7.2. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$.

Solução. Começamos trançando o gráfico de $f_1(x) = x^3$. Então, obtemos o gráfico de $f_2(x) = (x-1)^3$ por translação de uma unidade à direita. O gráfico de $f_3(x) = 2(x-1)^3$ é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de $f_4(x) = 2(x-1)^3+1$ é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura 3.31.

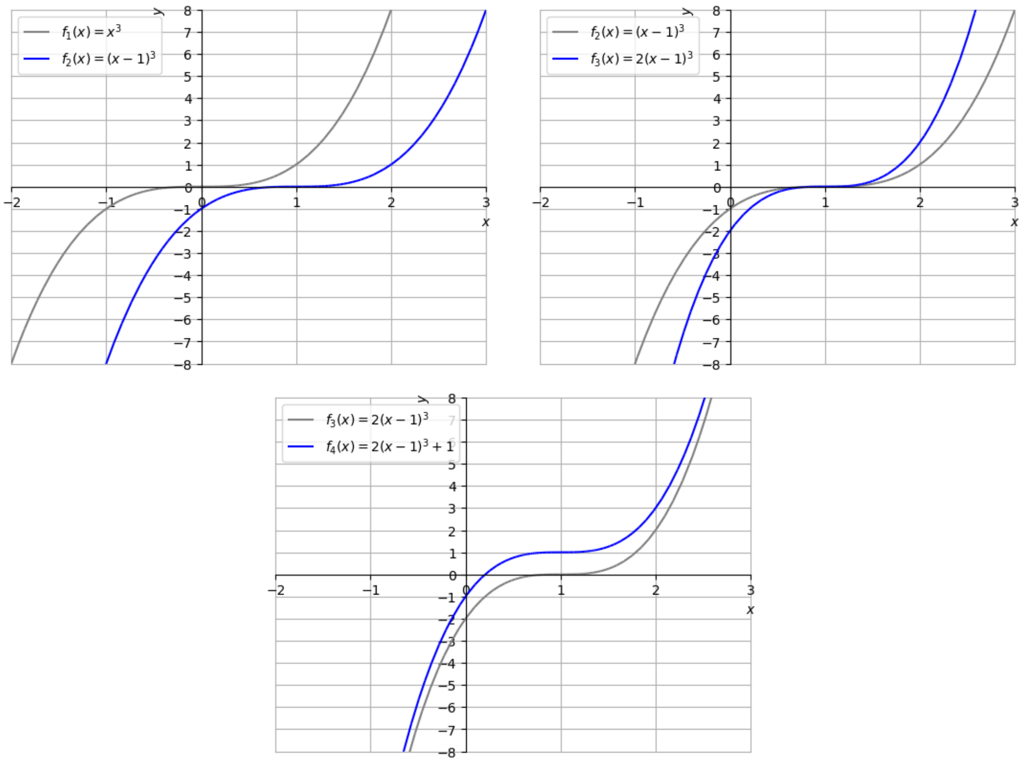

Figura 3.31: Construção do esboço do gráfico de $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$.

♢

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.7.1. Dadas as funções $f(x) = x^2+2x$ e $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Determine as seguintes funções e forneça seus respectivos domínios.

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

d) $(f \div g)(x)$

Exercício 3.7.2. Seja $f(x) = 2^x - \sqrt{x-1} + x^3$. Escreva a regra e determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) + 1$

b) $2 \cdot f(x)$

c) $f(2x)$

d) $f(-x)$

Exercício 3.7.3. Sejam $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine a função $(f \circ g)$ e seu domínio.

Exercício 3.7.4. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = 2x^3 - 1$.

Exercício 3.7.5. Faça um esboço do gráfico de $h(x) = -1/(x^2 + 2x + 1)$.

3.8 Propriedades de Funções

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

3.8.1 Funções Crescentes ou Decrescentes

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma da função f é dita ser **crescente** quando $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ no seu domínio. É dita **não decrescente** quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos os $x_1 < x_2$ no seu domínio. Analogamente, é dita **decrescente** quando $f(x_1) > f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$. E, por fim, é dita **não crescente** quando $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, sempre no seu domínio. Em todos estes casos, diz que f é uma **função monótona**.

Exemplo 3.8.1. Estudemos os seguintes casos:

a) A **função identidade** $f(x) = x$ é crescente.

b) A função valor absoluto $y = |x|$ não é monótona.

c) A função $h(x) = -x^3$ é uma função decrescente.

d) A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \leq 0, \\ 2 & ,0 < x \leq 1, \\ (x-1)^2 + 2 & ,x > 1 \end{cases} \tag{3.132}$$

é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

Exemplo 3.8.2. A função $f(x) = x^2$ é uma função decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

3.8.2 Funções Pares ou Ímpares

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma dada **função** f é dita **par** quando $f(x) = f(-x)$ para todo x no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x no seu domínio.

Exemplo 3.8.3. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ é uma função par.
- $f(x) = x^3$ é uma função ímpar.
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$ é uma função par.
- $f(x) = x + 1$ não é par nem ímpar.

3.8.3 Funções Injetoras

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma função f é dita ser **injetora** quando $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todos $x_1 \neq x_2$ no seu domínio.

Exemplo 3.8.4. Estudemos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$ é uma função injetora.
- $f(x) = x - 1$ é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora $y = f(x)$, existe uma única função g tal que

$$g(f(x)) = x, \tag{3.133}$$

para todo x no domínio da f. Tal função g é chamada de **função inversa** de f é comumente denotada por f^{-1}.[12]

Exemplo 3.8.5. Vamos calcular a função a função inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Para tando, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \tag{3.134}$$

Então, isolando x, temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \tag{3.135}$$

Desta forma, concluímos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f!

Observação 3.8.1. Os gráficos de uma dada função injetora f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação a **reta identidade** $y = x$. Use Python e SymPy para verificar esta afirmação plotando os gráficos de f, f^{-1} e da função identidade!

Exercícios Resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.8.1. Defina os intervalos em que a função $f(x) = -|x+1|$ é crescente ou decrescente.

[12]Atenção! Não confundamos com a função $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$.

Solução. A função f é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função $f(x) = |x|$. Veja a Figura 3.32.

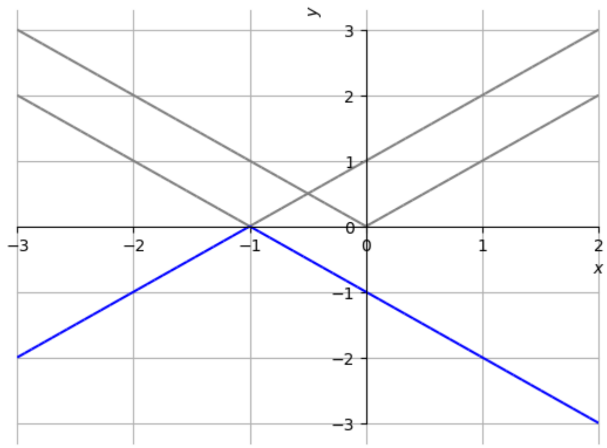

Figura 3.32: Esboço do gráfico de $f(x) = -|x+1|$.

Do esboço do gráfico de f, podemos inferir que f é crescente no intervalo $(-\infty, -1]$ e decrescente no intervalo $[-1, \infty)$.

◊

ER 3.8.2. Analise a paridade da função $tg(x)$.

Solução. Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x. \tag{3.136}$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

◊

ER 3.8.3. Calcule a função inversa de $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solução. Para obtermos a função inversa de uma função f, resolvemos $y = f(x)$ para x. Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x+1} \tag{3.137}$$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \tag{3.138}$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \tag{3.139}$$

Logo, temos $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ restrita ao conjunto imagem da f, i.e. o domínio de f^{-1} é $[0, \infty)$.

$\lozenge$

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.8.1. Determine a monotonicidade das seguintes funções:

1. $f(x) = 1 - x$
2. $g(x) = x^2 - 2x + 1$
3. $h(x) = x^5 - 1$
4. $f_1(x) = \sqrt{-x}$
5. $f_2(x) = \operatorname{tg}(x)$

Exercício 3.8.2. Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x + 5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \tag{3.140}$$

Exercício 3.8.3. Analise a paridade da função $\operatorname{cosec} x$.

Exercício 3.8.4. Seja $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$. Calcule f^{-1} e determine seu domínio.

Exercício 3.8.5. Mostre que toda função crescente (ou decrescente) é uma função injetora.

3.9 Funções exponenciais

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \tag{3.141}$$

onde $a \neq 1$ é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem $(0, \infty)$. O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos $(-1,1/a)$, $(0,1)$ e $(1,a)$. Veja a Figura 3.33.

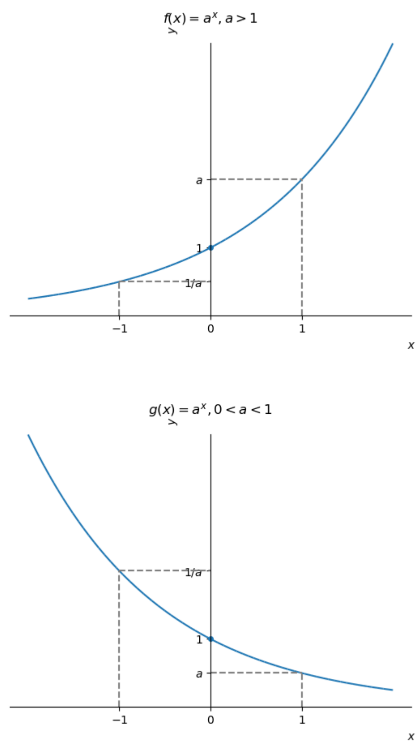

Figura 3.33: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (acima) $f(x) = a^x$, $a > 1$; (abaixo) $g(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Observação 3.9.1. Quando a base é o **Número de Euler**[13]

$$e \approx 2{,}718281828459045 \tag{3.142}$$

[13] Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783, matemático e físico suíço. Fonte: Wikipédia.

chamamos $f(x) = e^x$ de função exponencial (natural).

No SymPy[14], o número de Euler é obtido com a constante `E`:

```
In : from sympy import *
In : N(E,25)
Out: 2.718281828459045235360287
```

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.9.1. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

Solução. Primeiramente, observamos que

$$f(x) = e^{-2x+1} - 1 \tag{3.143}$$
$$= e^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 1 \tag{3.144}$$

Então, partindo do gráfico de e^{-x}, fazemos uma translação de $\frac{1}{2}$ unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de $\frac{1}{2}$ vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura 3.34.

[14]Veja a Observação **??**

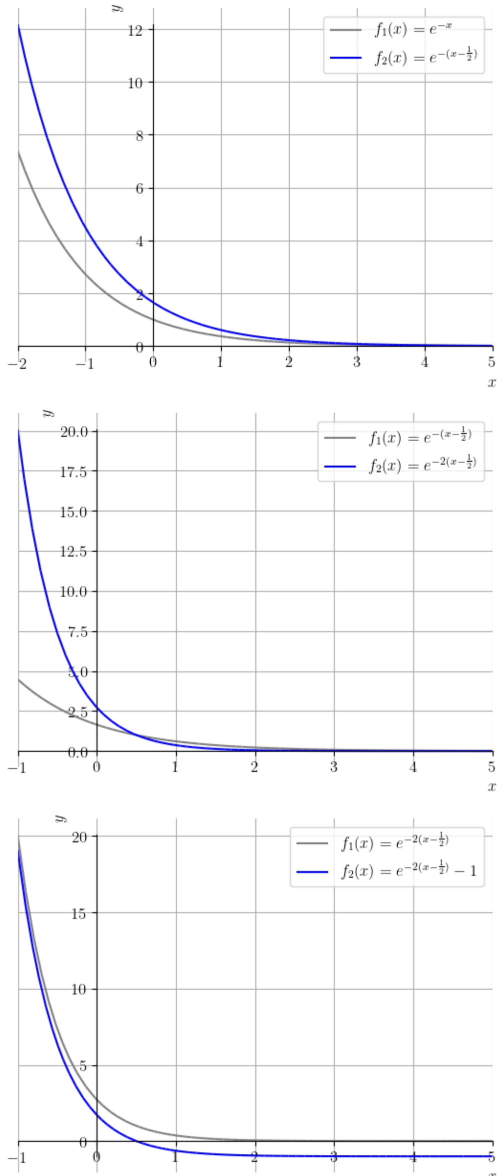

Figura 3.34: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

$\Diamond$

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.9.1. Justificando, determine a veracidade das seguintes afirmações:

a) $y = e^x$ é uma função crescente;

b) $y = e^{-x}$ é uma função decrescente;

c) $y = e^{-x^2}$ é uma função decrescente;

d) $e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.9.2. Calcule o zero da função

$$f(x) = 2^{x-1} - 1 \tag{3.145}$$

Exercício 3.9.3. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = 2e^{x-1} + 2$.

3.10 Funções logarítmicas

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

A **função logarítmica** $y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função inversa da função exponencial $y = a^x$. Veja a Figura 3.35. O domínio da função logarítmica é $(0,\infty)$ e a imagem $(-\infty, \infty)$.

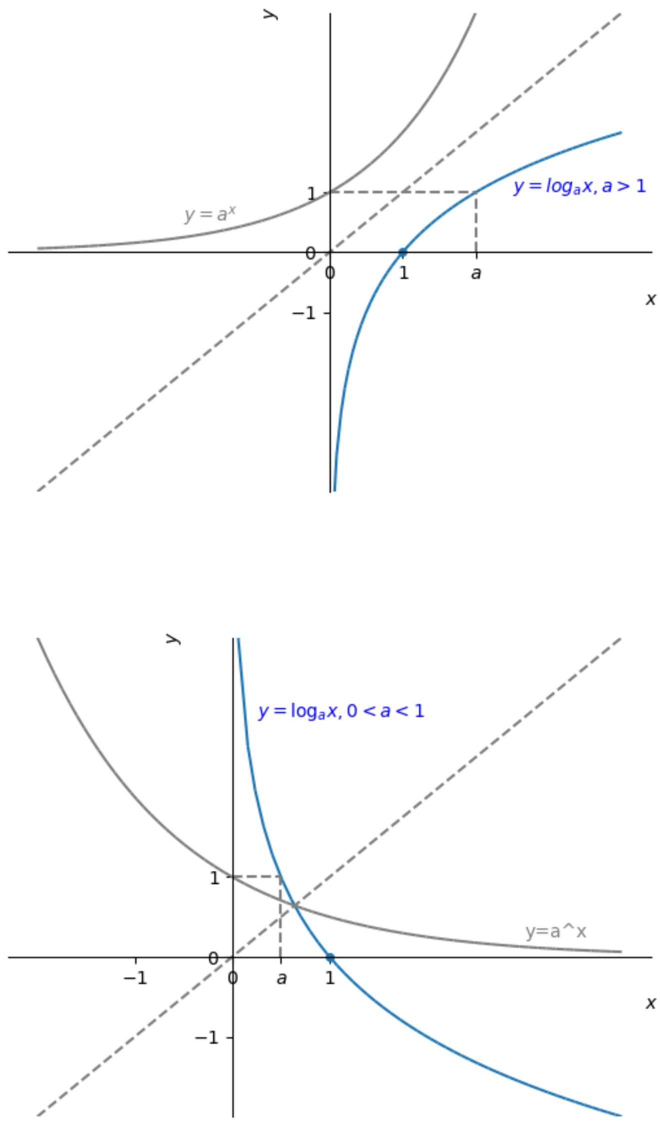

Figura 3.35: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (acima) $y = \log_a x$, $a > 1$; (abaixo) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Observação 3.10.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2{,}718281828459045$, chamamos $y = \log_e x$ de **função logarítmica natural** e denotamo-la por $y = \ln x$.

No SymPy, podemos computar $\log_a x$ com a função `log(x,a)`. O $\ln x$ é computado com `log(x)`.

Observação 3.10.2. Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a a^x = x$;
- $a^{\log_a^x} = x$;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exercícios resolvidos

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

ER 3.10.1. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x+2) + 1$ e determine seu domínio.

Solução. Para fazermos o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x+2) + 1$, podemos começar com o gráfico de $f_1(x) = \ln x$. Então, podemos transladá-lo 2 unidades à esquerda, de forma a obtermos $f_2(x) = \ln(x+2) = f_1(x+2)$. Por fim, transladamos o gráfico de $f_2(x)$ uma unidade para cima, obtendo o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x+2) + 1 = f_2(x) + 1$. Veja a Figura 3.36.

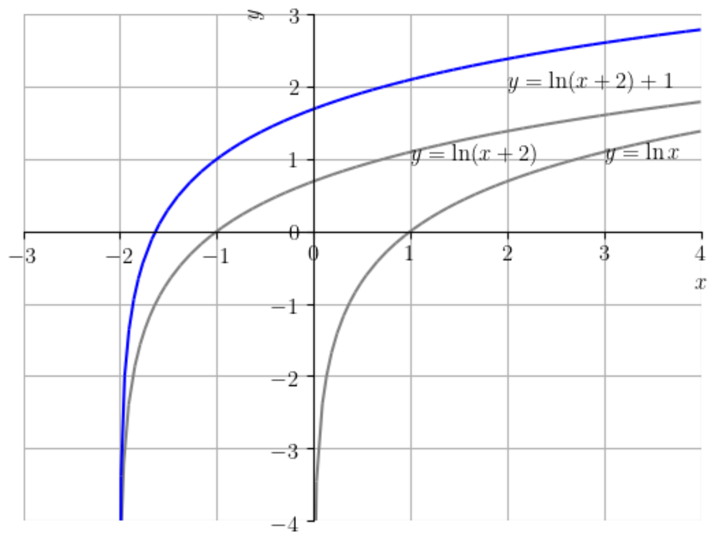

Figura 3.36: Esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x+2)+1$.

Ainda, o domínio de $\ln x$ é $(0, \infty)$. Como, $f(x) = \ln(x+2)+1$ é uma translação de duas unidades à esquerda e uma para cima de $\ln x$, temos que o domínio de $f(x)$ é $(-2, \infty)$.

$\lozenge$

ER 3.10.2. Resolva a seguinte equação para x

$$\ln(x+2)+1 = 1. \tag{3.146}$$

Solução. Podemos calcular a solução pelos seguintes passos:

$$\ln(x+2)+1 = 1 \tag{3.147}$$
$$\ln(x+2) = 0 \tag{3.148}$$
$$e^{\ln(x+2)} = e^0 \tag{3.149}$$
$$x+2 = e^0 \tag{3.150}$$
$$x = 1-2 = -1. \tag{3.151}$$
$$\tag{3.152}$$

Com o SymPy, podemos computar a solução com os seguintes comandos:

```
from sympy import *
solve(Eq(log(x+2)+1,1),x)
```

◊

Exercícios

[Vídeo] | [Áudio] | [Contatar]

Exercício 3.10.1. Calcule o valor de:

a) $2\ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{3}{4}$

b) $\log_{10} 50 - \log_{10} 5$

Exercício 3.10.2. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \log(x-2) - 1$ e determine seu domínio.

Exercício 3.10.3. Resolva para x:

a) $\ln x^2 = 4$

b) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 0$

Resposta dos Exercícios

Exercício 1.1.1. a) V; b) V; c) F; d) V; e) F

Exercício 1.1.2. a) $\{-4, -3, -1,0,2,3,5\}$; b) $\{-4,2\}$; c) $\{-1,0,3\}$, d) $\{-3,5\}$; e) C; f) $\emptyset$

Exercício 1.1.3. a) V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) F

Exercício 1.1.4. $C \times D = \{(-4,5),(-4,-3),(-4,2),(-4,-4),(2,5),(2,-3),(2,2),(2,-4)\}$

Exercício 1.1.5. F

Exercício 1.2.1. a) V; b) V; c) V; d) V; e) F; f) V

Exercício 1.2.2. a) F; b) V; c) V

Exercício 1.2.3. Dica: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$

Exercício 1.2.4. a) V; b) F; c) V

Exercício 1.2.6. Dica: Por definição, para $p \geq 0$ tem-se $|p| = p$ e, para $p < 0$ tem-se $|p| = -1$. Consulte (1.65).

Exercício 1.3.1. a) V; b) F; c) V; d) F; e) V

Exercício 1.3.3. a) $14 = 2{\cdot}7$; b) $24 = 2^3{\cdot}3$; c) $36 = 2^2{\cdot}3^2$; d) $2205 = 3^2{\cdot}5{\cdot}7^2$

Exercício 1.3.4. a) $[-1,2]$, b) $\emptyset$; c) $[-1,1)$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-1,1]$

Exercício 1.3.5. a) F; b) V; c) V; d) V; e) F

Exercício 2.1.1. a) 2; b) 2; c) 1; d) 0

Exercício 2.1.2. a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{5}{3}$; c) 5

Exercício 2.1.3. a) 0; b) $\nexists$; c) 2; d) $\{-4,4\}$; e) $\{-2,1\}$; f) $\{-2,1\}$

Exercício 2.1.4. a) 3; b) 0; c) 0

Exercício 2.1.5. $\{-1,1\}$

Exercício 2.2.1. a) $(-\infty, 1)$; b) $(-\infty, 2]$; c) $(-3/2, \infty)$; d) $(-\infty, 1/4]$

Exercício 2.2.2. a) $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$; b) $[1,2]$; c) $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$; d) $(-\infty,1/3] \cup [2/5,\infty)$

Exercício 2.2.3. a) $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$; b) $(1,2]$; c) $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$; d) $(-\infty,1/3) \cup [2/5,\infty)$

Exercício 2.2.4. $(-2,2)$

Exercício 2.2.5. $(-\infty, -2) \cup (-2, 1]$

Exercício 3.1.1. Domínio: $\mathbb{R}$; Imagem: $\mathbb{R}$

Exercício 3.1.2. Domínio: $\mathbb{R}$; Imagem: $[1, \infty)$.

Exercício 3.1.3. Domínio: $\mathbb{R}$; Imagem: $(-\infty, 1]$.

Exercício 3.1.4. Domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; Imagem: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

Exercício 3.1.5. Domínio: $\mathbb{R}$; Imagem: $[0, \infty)$.

Exercício 3.2.1. a) $D = \mathbb{R}$; $I = \mathbb{R}$; b) $D = \mathbb{R}$, $I = \{\pi\}$; c) $D = \mathbb{R}$; $I = \mathbb{R}$

Exercício 3.2.3. $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

Exercício 3.2.4. $(2/3, -5/3)$

Exercício 3.2.5. não há

Exercício 3.3.1. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

Exercício 3.3.2. a) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$. b) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(0, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

Exercício 3.3.3. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. Dica: use o SymPy Gamma para verificar os esboços de seus gráficos.

Exercício 3.3.4. $(-1, -1)$, (1,1)

Exercício 3.3.5. $y = 1$

Exercício 3.4.2. -1, 0, 2

Exercício 3.4.3. $9/4$

Exercício 3.5.1. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exercício 3.5.2. $D = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

Exercício 3.5.3. $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$

Exercício 3.5.4. $x = \frac{1}{2}$

Exercício 3.5.5. $\{-1,1\}$

Exercício 3.6.1. a) $-1/2$; b) $-\sqrt{3}/2$; c) $\sqrt{3}/3$; d) $\sqrt{3}$; e) $-2\sqrt{3}/3$; f) -2

Exercício 3.6.2. a) $-\sqrt{3}/2$; b) 1; c) $-\sqrt{3}/2$

Exercício 3.6.3. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

Exercício 3.6.4. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

Exercício 3.6.5. $(-\pi/2, -1)$, $(0,0)$, $(\pi/2, 1)$

Exercício 3.7.1. a) $(f+g)(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R}\setminus -1,1$; b) $(f+g)(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R} \setminus -1,1$; c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R} \setminus -1,1$; d) $(f \div g)(x) = x^4 - x^2 + 2x^3 - 2x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

Exercício 3.7.2. a) $f(x) + 1 = 2^x - \sqrt{x-1} + x^3 + 1$, $D = [1,\infty)$; b) $2f(x) = 2^{x+1} - 2\sqrt{x-1} + 2x^3$, $D = [1,\infty)$; c) $f(2x) = 4^x - \sqrt{2x-1} + 2^3x^3$, $D = [\frac{1}{2},\infty)$; d) $f(-x) = 2^{-x} - \sqrt{-x-1} - x^3$, $D = (-\infty, -1]$

Exercício 3.7.3. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$; domínio: $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

Exercício 3.7.4. Dica: verifique sua resposta usando Python e SymPy.

Exercício 3.7.5. Dica: verifique sua resposta usando Python e SymPy.

Exercício 3.8.1. a) função decrescente; b) função não monótona; c) função crescente; d) função crescente; e) função não monótona

Exercício 3.8.2. decrescente: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; crescente: $[-1,1]$.

Exercício 3.8.3. função ímpar

Exercício 3.8.4. $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$; domínio $[-1,\infty)$

Exercício 3.9.1. a) V; b) V; c) F; d) V

Exercício 3.9.2. $x=1$

Exercício 3.9.3. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

Exercício 3.10.1. a) 0; b) 1

Exercício 3.10.2. Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar o esboço de seu gráfico. Domínio: $(2,\infty)$.

Exercício 3.10.3. a) $x=e^2$; b) $x=0$

Referências Bibliográficas

[1] S. Axler. *Pré-Cálculo: uma preparação para o cálculo.* LTC, Rio de Janeiro, 2. edition, 2016.

[2] A.M. Caldeira, L.M.O da Silva, M.A.S. Machado, and V.Z. Medeiros. *Pré-Cálculo.* Cengage Learning, 3. edition, 2014.

[3] F.M. Gomes. *Pré-Cálculo: operações, equações, funções e trigonometria.* Cengage Learning Brasil, São Paulo, 2018.

[4] F. Safier. *Pré-Cálculo.* Bookman, Porto Alegre, 2011.