

Python para Matemática

Pedro H A Konzen

28 de março de 2024

Conteúdo

1	Licença	2
2	Sobre a Linguagem	2
2.1	Instalação e Execução	3
2.1.1	Online Notebook	3
2.1.2	IDE	3
2.2	Utilização	4
3	Elementos da Linguagem	5
3.1	Classes de Objetos Básicos	5
3.2	Operações Aritméticas Elementares	7
3.3	Funções e Constantes Elementares	9
3.4	Operadores de Comparação Elementares	10
3.5	Operadores Lógicos Elementares	11
3.6	<code>set</code>	12
3.7	<code>tuple</code>	14
3.8	Listas	16
3.9	Dicionários	19
4	Função, ramificação e repetição	20
4.1	Definindo funções	20
4.2	Ramificação	22
4.3	Repetição	23

4.3.1	while	23
4.3.2	for	24
4.3.3	range	24
5	Elementos da computação matricial	25
5.1	NumPy array	26
5.1.1	Inicialização de um array	27
5.1.2	Manipulação de arrays	28
5.1.3	Operadores elemento-a-elemento	29
5.2	Elementos da álgebra linear	30
5.2.1	Vetores	30
5.2.2	Produto escalar e norma	31
5.2.3	Matrizes	32
5.2.4	Inicialização de matrizes	33
5.2.5	Multiplicação de matrizes	34
5.2.6	Traço e Determinante de uma matriz	35
5.2.7	Rank e inversa de uma matriz	35
5.2.8	Autovalores e autovetores de uma matriz	36
6	Gráficos	37

1 Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

2 Sobre a Linguagem

Python é uma **linguagem de programação de alto nível e multiparadigma**. Ou seja, é relativamente próxima das linguagens humanas naturais, é desenvolvida para aplicações diversas e permite a utilização de diferentes paradigmas de programação (programação estruturada, orientada a objetos, orientada a eventos, paralelização, etc.).

- **Site oficial**

<https://www.python.org/>

2.1 Instalação e Execução

Para executar um código **Python** em seu computador é necessário instalar um **interpretador**. No **site oficial**, estão disponíveis para *download* interpretadores gratuitos e com licença livre para uso. Neste minicurso, vamos utilizar **Python 3**.

2.1.1 Online Notebook

Usar um **Notebook Python online** é uma forma rápida e prática de iniciar os estudos na linguagem. Rodam diretamente em nuvem e vários permitem o uso gratuito por tempo limitado. Algumas opções são:

- Deepnote - <https://deepnote.com>
- Google Colab - <https://colab.research.google.com/>
- Kaggle - <https://www.kaggle.com/>
- Paperspace Gradient - <https://www.paperspace.com/notebooks>
- SageMaker - <https://aws.amazon.com/sagemaker>

2.1.2 IDE

Usar um **ambiente integrado de desenvolvimento** (IDE, em inglês, *integrated development environment*) é a melhor forma de capturar o todo o potencial da linguagem **Python**. Algumas alternativas são:

- IDLE - <https://docs.python.org/3/library/idle.html>
- GNU Emacs - <https://www.gnu.org/software/emacs/>
- Spyder - <https://www.spyder-ide.org/>
- VS Code - <https://code.visualstudio.com/>

2.2 Utilização

A execução de códigos Python pode ser feita de três formas básicas:

- em modo interativo em um console/*notebook* Python;
- por execução de um código `arqnome.py` em um console/*notebook* Python;
- por execução de um código `arqnome.py` em um terminal do sistema operacional.

Exemplo 2.1. Consideramos o seguinte pseudocódigo.

```
s = "Ola, mundo!".  
imprime(s). (imprime a string s)
```

Vamos escrevê-lo em Python e executá-lo:

a) Em um *notebook*.

Iniciamos um *notebook* Python e digitamos o seguinte código em uma célula de entrada.

```
1 s = "Olá, Mundo!"  
2 #imprime a string s  
3 print(s)
```

Ao executarmos a célula, obtemos a saída

Olá, Mundo!

b) Em modo iterativo no console.

Iniciamos um console Python em terminal do sistema e digitamos

```
$ python3
```

Aqui, \$ é o símbolo de *prompt* de entrada que pode ser diferente a depender do seu sistema operacional. Então, digitamos

```
1 >>> s = "Olá, Mundo!"  
2 >>> print(s) #imprime a string s
```

Observamos que `>>>` é o símbolo de *prompt* de entrada do console [Python](#).

A saída

```
1 Olá, Mundo!
```

aparece logo abaixo da última linha de *prompt* executada. Para encerrar o console, digitamos

```
1 >>> quit()
```

- c) Escrevendo o código `ola.py` e executando-o em um console/*notebook* [Python](#).

Primeiramente, escrevemos o código

```
1 s = "Olá, Mundo!"
2 print(s) # imprime a string s
```

em um IDE (ou em um simples editor de texto) e salvamo-lo no caminho `/caminho/ola.py`. Então, o executamos no console/*notebook* [Python](#) com

```
1 exec(open('/pasta/codigo.py').read())
```

A saída é impressa logo abaixo do *prompt*/célula de entrada.

- d) Escrevendo o código `ola.py` e executando-o em terminal do sistema.

Assumindo que o código já esteja salvo no arquivo `/caminho/ola.py`, podemos executá-lo em um terminal digitando

```
1 $ python3 /caminho/ola.py
```

A saída é impressa logo abaixo do *prompt* de entrada do sistema.

3 Elementos da Linguagem

3.1 Classes de Objetos Básicos

[Python](#) é uma **linguagem** de programação **dinâmica** em que as variáveis/objetos são declaradas/os automaticamente ao receberem um valor/-dado. Por exemplo, consideramos as seguintes instruções

```
1 x = 2
```

```
2 y = x * 3.0
```

Na primeira instrução, a variável `x` recebe o valor inteiro 2 e, então, é armazenado na memória do computador como um objeto da **classe `int`** (número inteiro). Na segunda instrução, `y` recebe o valor decimal 6.0 (resultado de 2×3.0) e é armazenado como um objeto da **classe `float`** (ponto flutuante de 64-*bits*). Podemos verificar isso, com as seguintes instruções

```
1 print(x)

2

1 print(y)

6.0

1 print(type(x), type(y))

<class 'int'> <class 'float'>
```

Observação 3.1. (**Comentários e Continuação de Linha.**) Códigos **Python** admitem **comentários** e **continuação de linha** como no seguinte exemplo

```
1 # isto é um comentário
2 s = "isto é uma \
3 string"
4 print(s)

isto é uma string

1 type(s)

<class 'str'>
```

Observação 3.2. (**Notação científica.**) O **Python** aceita **notação científica**. Por exemplo 5.2×10^{-2} é digitado da seguinte forma

```
1 5.2e-2
```

0.052

Observação 3.3. (**Casting.**) Quando não há ambiguidade, pode-se fazer a conversão entre objetos de classes diferentes (*casting*). Por exemplo,

```
1 x = 1
2 print(x, type(x))
```

```
1 <class 'int'>
```

```
1 y = float(x)
2 print(y, type(y))
```

```
1.0 <class 'float'>
```

Além de objetos numéricos e *string*, Python também conta com objetos **list** (lista), **tuple** (*n*-upla) e **dict** (dicionário). Estudaremos essas classes de objetos mais adiante no minicurso.

Exercício 3.1.1. Antes de implementar, diga qual o valor de **x** após as seguintes instruções.

```
1 x = 1
2 y = x
3 y = 0
```

Justifique sua resposta e verifique-a.

Exercício 3.1.2. Implemente um código em que a(o) usuá(ri)a entra com valores para as variáveis **x** e **y**. Então, os valores das variáveis são permutados entre si. Dica: use **input** para a entrada de dados.

3.2 Operações Aritméticas Elementares

Os operadores aritméticos elementares são:

+ **adição**

- **subtração**

* **multiplicação**

/ **divisão**

** **potenciação**

`\%` **módulo**

`//` **divisão inteira**

Exemplo 3.1. Estudamos a seguinte computação

```
1 2+8*3/2**2-1
```

7.0

Observamos que as operações `**` tem precedência sobre as operações `*`, `/`, `\%`, `//`, as quais têm precedência sobre as operações `+`, `-`. Operações de mesma precedência seguem a ordem da esquerda para direita, conforme escritas na linha de comando. Usa-se parênteses para alterar a precedência entre as operações, por exemplo

```
1 (2+8*3)/2**2-1
```

5.5

Observação 3.4. (**Precedência das Operações.**) Consulte mais informações sobre a precedência de operadores em [Python Docs: Operator Precedence](#).

Exercício 3.2.1. Compute as raízes do seguinte polinômio quadrático

$$p(x) = 2x^2 - 2x - 4 \quad (1)$$

usando a fórmula de Bhaskara¹.

O operador `\%` módulo computa o **resto da divisão** e o operador `//` a **divisão inteira**, por exemplo

```
1 >>> 5 % 2
```

1

```
1 5 // 2
```

2

Exercício 3.2.2. Use o [Python](#) para computar os inteiros não negativos q e r tais que

$$25 = q \cdot 3 + r, \quad (2)$$

sendo r o menor possível.

3.3 Funções e Constantes Elementares

O módulo Python `math` disponibiliza várias funções e constantes elementares. Para usá-las, precisamos importar o módulo em nosso código

```
1 import math
```

Com isso, temos acesso a todas as definições e declarações contidas neste módulo. Por exemplo

```
1 math.pi
```

3.141592653589793

```
1 math.cos(math.pi)
```

-1.0

```
1 math.sqrt(2)
```

1.4142135623730951

```
1 math.log(math.e)
```

1.0

Observação 3.5. (**Função Logaritmo.**) Notamos que `math.log` é a função logaritmo natural, i.e. $\ln(x) = \log_e(x)$. A implementação Python para o logaritmo de base 10 é `math.log(x, 10)` ou, mais acurado, `math.log10`.

Exercício 3.3.1. Compute

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $e^{\log_3(\pi)}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

Exercício 3.3.2. Refaça o Exercício 3.2.1 usando a função `math.sqrt` para computar a raiz quadrada do discriminante.

3.4 Operadores de Comparação Elementares

Os **operadores de comparação** elementares são

`==` igual a

`!=` diferente de

`>` maior que

`<` menor que

`>=` maior ou igual que

`<=` menor ou igual que

Estes operadores retornam os **valores lógicos** **`True`** (verdadeiro) ou **`False`** (falso).

Por exemplo, temos

```
1 x = 2
2 x + x == 4
```

True

Exercício 3.4.1. Considere a circunferência de equação

$$c : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1. \quad (3)$$

Escreva um código em que a(o) usuá(ri)a entra com as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ e o código verifica se P pertence ao disco determinado por c .

Exercício 3.4.2. Antes de implementar, diga qual é o valor lógico da instrução

```
1 math.sqrt(3)**2 == 3
```

Justifique sua resposta e verifique!

3.5 Operadores Lógicos Elementares

Os **operadores lógicos** elementares são:

and **e lógico**

or **ou lógico**

not **não lógico**

Exemplo 3.2. (**Tabela Booleana do and.**) A tabela booleana² do and é

A	B	A and B
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

Por exemplo, temos

```
1 x = 2
2 (x > 1) and (x < 2)
```

False

Exercício 3.5.1. Construa as tabelas booleanas do operador or e do not.

Exercício 3.5.2. Use **Python** para verificar se $1.4 \leq \sqrt{2} < 1.5$.

Exercício 3.5.3. Considere um retângulo $r : ABDC$ de vértices $A = (1, 1)$ e $D = (2, 3)$. Crie um código em que a(o) usuá(ri)a informa as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ e o código imprime **True** ou **False** para cada um dos seguintes itens:

1. $P \in r$.
2. $P \in \partial r$.
3. $P \notin \bar{r}$.

Exercício 3.5.4. Implemente uma instrução para computar o operador xor

(ou exclusivo). Dadas duas afirmações A e B, A xor B é **True** no caso de uma, e somente uma, das afirmações ser **False**, caso contrário é **False**.

3.6 set

Um **set** em **Python** é uma coleção de objetos não ordenada, imutável e não admite itens duplicados. Por exemplo,

```
1 a = {1, 2, 3}
2 type(a)

<class 'set'>

1 b = set((2, 1, 3, 3))
2 print(b)

{1, 2, 3}

1 a == b
```

True

```
1 # conjunto vazio
2 e = set()
```

Acima, alocamos o conjunto $a = \{1, 2, 3\}$. Note que o conjunto b é igual a a . Observamos que o conjunto vazio deve ser construído com a instrução `set()` e não com `{}`¹.

Observação 3.6. (Tamanho de uma Coleção de Objetos.) A função `len` retorna o número de elementos de uma coleção de objetos. Por exemplo,

```
1 len(a)
```

3

Operadores envolvendo conjuntos:

- diferença entre conjuntos
- | união de conjuntos

¹Isso constrói um dicionário vazio, como estudaremos logo mais.

& interseção de conjuntos

^ diferença simétrica

Exemplo 3.3. Os conjuntos

$$A = \{2, \pi, -0.25, 3, \text{'banana'}\}, \quad (4)$$

$$B = \{\text{'laranja'}, 3, \arccos(-1), -1\} \quad (5)$$

podem ser alocados como sets

```
1 import math
2 A = {2, math.pi, -0.25, 3, 'banana'}
3 B = {'laranja', 3, math.acos(-1), -1}
```

e, então, podemos computar:

a) $A \setminus B$

```
1 a = A - B
2 print(a)

{-0.25, 2, 'banana'}
```

b) $A \cup B$

```
1 b = A | B
2 print(b)

{-0.25, 2, 3, 3.141592653589793, 'laranja', 'banana', -1}
```

c) $A \cap B$

```
1 c = A & B
2 print(c)

{3, 3.141592653589793}
```

d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

```
1 d = A ^ B
2 print(d)

{-0.25, 2, 'laranja', 'banana', -1}
```

Exercício 3.6.1. Aloque como `set` cada um dos seguintes conjuntos:

- a) O conjunto A dos números $-12 \leq n \leq 6$ e que são divisíveis pares.
- b) O conjunto B dos números $-12 < n \leq 6$ e que são divisíveis por 3.

Então, compute o subconjunto de A e B que contém apenas os números divisíveis por 2 e 3.

Observação 3.7. (**Compreensão de sets.**) `Python` disponibiliza a sintaxe de compreensão de `sets`. Por exemplo,

```
1 C = {x for x in A if type(x) == str}
2 print(C)
```

```
{'banana'}
```

Exercício 3.6.2. Considere o conjunto

$$Z = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (6)$$

Faça um código `Python` para extrair o subconjunto \mathcal{P} dos números pares do conjunto Z . Depois, modifique-o para extrair o subconjunto \mathcal{I} dos números ímpares. Dica: use de compreensão de `sets`.

3.7 tuple

Em `Python`, `tuple` é uma coleção ordenada e imutável de objetos. Por exemplo, na sequência alocamos um par, uma tripla e uma quadrupla ordenada usando `tuples`.

```
1 a = (1, 2)
2 print(a, type(a))
```

```
(1, 2) <class 'tuple'>
```

```
1 b = -1, 1, 0
2 print(b, len(b))
```

```
(-1, 1, 0) 3
```

```
1 c = (0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
2 print(c)
```

```
(0.5, 'laranja', {2, -1}, 2)
```

Os elementos de um **tuple** são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de um **tuple** usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 print(c[2])
```

```
{2, -1}
```

Pode-se também extrair uma fatia (um subconjunto) usando-se a notação `:`. Por exemplo,

```
1 d = c[1:3]
2 print(d)
```

```
('laranja', {2, -1})
```

Operadores básicos:

+ **concatenação**

```
1 a = (1, 2) + (3, 4, 5)
2 print(a)
```

```
(1, 2, 3, 4, 5)
```

* **repetição**

```
1 b = (1, 2) * 2
```

```
(1, 2, 1, 2)
```

in **pertencimento**

```
1 c = 1 in (-1, 0, 1, 2)
```

```
True
```

Exercício 3.7.1. Use **sets** para alocar os conjuntos

$$A = \{-1, 0, 2\}, \quad (7)$$

$$B = \{2, 3, 5\}. \quad (8)$$

Então, compute o produto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Qual o número de elementos da $A \times B$? Dica: use a sintaxe de compreensão de `sets` (consulte a Observação 3.7).

Exercício 3.7.2. Aloque o gráfico discreto da função² $f(x) = x^2$ para $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$. Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 3.7).

3.8 Listas

O tipo `Python list` permite alocar em uma única variável uma lista de itens ordenada. Por exemplo, observemos as seguintes listas

```
1 >>> x = [-1, 2, -3, -5]
2 >>> type(x)
3 <class 'list'>
4 >>> y = ['a', 'b', 'a']
5 >>> y
6 ['a', 'b', 'a']
7 >>> vazia = []
8 >>> len(x)
9 4
```

Os elementos de uma lista são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de uma lista usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 >>> x[0]
2 -1
3 >>> y[2] = 'c'
4 >>> y
5 ['a', 'b', 'c']
```

Pode-se fazer um corte de elementos de uma lista usando o operador `:`. Por exemplo,

²O gráfico de uma função restrita a um conjunto A é o conjunto $G(f)|_A = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$.


```
1 >>> x = [1, 2, -1, 3, -2]
2 >>> x[2:5]
3 [-1, 3, -2]
```

Operadores básicos:

+: concatenação

```
1 >>> [1, 2] + [3, 4, 5]
2 [1, 2, 3, 4, 5]
```

*****: repetição

```
1 >>> [1, 2] * 2
2 [1, 2, 1, 2]
```

in: pertencimento

```
1 >>> 1 in [-1, 0, 1, 2]
2 True
```

Observação 3.8. Listas contam com várias funções prontas para a execução de diversas tarefas práticas como, por exemplo, inserir/deletar itens, contar ocorrências, ordenar itens, etc. Consulte [Python Docs](#).

Observação 3.9. (Alocação *versus* cópia) Estude o seguinte exemplo

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 0, 1]
```

Notamos que `y` aponta para o mesmo endereço de memória de `x`. Para copiar uma lista e alocá-la em um novo endereço de memória, deve-se usar a função [list.copy\(\)](#), como segue

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x.copy()
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 3, 1]
```

```
6 >>> y
7 [2, 0, 1]
```

Exercício 3.8.1. Implemente uma lista para alocar os primeiros 5 elementos da sequência de Fibonacci³.

Exercício 3.8.2. Uma aplicação do Método Babilônico⁴ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \tag{9}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

Implemente uma lista para alocar as quatro primeiras aproximações da solução, i.e. x_0, x_1, x_2, x_3 .

Exercício 3.8.3. Aloque os seguintes vetores como listas no [Python](#)

$$x = (-1, 3, -2), \tag{11}$$

$$y = (4, -2, 0). \tag{12}$$

Então, compute

a) $x + y$

b) $x \cdot y$

Dica: use uma compreensão de lista e os métodos [Python zip](#) e [sum](#).

Exercício 3.8.4. Uma matriz pode ser alocada como uma lista de listas [Python](#), alocando cada linha como uma lista e a matriz como a lista destas listas. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

pode ser alocada como a seguinte lista de listas

³Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

⁴Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

```

1 >>> M = [[1, -2], [2, 3]]
2 >>> M
3 [[1, -2], [2, 3]]

```

Use listas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

e o vetor coluna

$$x = (2, -3, 1), \quad (15)$$

então compute Ax .

3.9 Dicionários

Em [Python](#) um dicionário é um mapeamento objeto a objeto, cada par (chave:valor) é separado por uma vírgula. Por exemplo,

```

1 >>> a = {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
2 >>> a
3 {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
4 >>> b = {1: 2.71, (1,2): 2, 'a': {1,0,-1}}
5 >>> b
6 {1: 2.71, (1, 2): 2, 'a': {0, 1, -1}}
7 >>> d = {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
8 >>> d
9 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}

```

O acesso a um item do dicionário é feito usando-se sua **chave**. Por exemplo,

```

1 >>> d['b']
2 2
3 >>> d[1.4] = 1
4 >>> d
5 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b'}

```

Pode-se adicionar um novo par, simplesmente, atribuindo valor a uma nova chave. Por exemplo,

```

1 >>> d[1.5] = 0
2 >>> d
3 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b', 1.5: 0}

```

Observação 3.10. Consulte sobre mais sobre dicionários em [Python Docs](#).

Exercício 3.9.1. Considere a função afim

$$f(x) = 3 - x. \quad (16)$$

Implemente um dicionário para alocar a raiz da função, a interseção com o eixo y e seu coeficiente angular.

Exercício 3.9.2. Considere a função quadrática

$$g(x) = x^2 - x - 2 \quad (17)$$

Implemente um dicionário para alocar suas raízes, vértice e interseção com o eixo y .

4 Função, ramificação e repetição

Nesta seção, vamos introduzir funções e estruturas de ramificação e de repetição. Estes são procedimentos fundamentais na programação estruturada.

4.1 Definindo funções

Em [Python](#), uma função é definida com a palavra-chave `def` seguida de seu nome e seus parâmetros encapsulados entre parênteses e por dois-pontos : . Suas instruções formam o corpo da função, iniciam-se na linha abaixo e devem estar indentadas. A indentação define o escopo da função. Por exemplo, a seguinte função imprime o valor da função

$$f(x) = 2x - 3 \quad (18)$$

```

1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     print(y)
4 ...
5 >>> f(2)
6 1

```

Você pode protestar que `f` não é uma função e, sim, um procedimento, pois não retorna valor. Para uma função retornar um objeto, usamos a instrução `return`. Por exemplo,

```
1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     return y
4 ...
5 >>> z = f(2)
6 >>> z
7 1
```

Observação 4.1. Para funções pequenas, pode-se utilizar a instrução `lambda` de funções anônimas. Por exemplo,

```
1 >>> f = lambda x: 2*x - 3
2 >>> f(3)
3 3
```

Observação 4.2. Consulte mais informações sobre a definição de funções em [Python Docs](#).

Exercício 4.1.1. Implemente uma função para computar as raízes de um polinômio de grau 1 $p(x) = ax + b$.

Exercício 4.1.2. Implemente uma função para computar as raízes de um polinômio de grau 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercício 4.1.3. Implemente uma função que computa o produto escalar de dois vetores

$$x = (x_0, x_1, x_2), \tag{19}$$

$$y = (y_0, y_1, y_2). \tag{20}$$

Use listas para representar os vetores no [Python](#).

Exercício 4.1.4. Implemente uma função que computa o determinante de matrizes 2×2 . Use lista de listas para representar as matrizes.

Exercício 4.1.5. Implemente uma função que computa a multiplicação matrix-vetor Ax , com A 2×2 e x um vetor coluna de dois elementos.

Exercício 4.1.6. (Recursividade) Implemente uma função recursiva para computar o fatorial de um número natural n , i.e. $n!$.

4.2 Ramificação

Uma estrutura de ramificação é uma instrução para a tomada de decisões durante a execução de um programa. No [Python](#), está disponível a instrução [if](#). Consultemos o seguinte exemplo.

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('par')
```

Aqui, a função `paridade` recebe o valor `n`. Se ([if](#)) o resto da divisão de `n` por 2 é igual a zero (condição), então (`:`) imprime a *string* `par`.

Observação 4.3. A indentação determina o escopo de cada instrução [if](#).

Também está disponível a instrução [if-else](#). Por exemplo,

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('par')  
4     else:  
5         print('impar')
```

Agora, se ([if](#)) a condição (`n%2 == 0`) for verdadeira (`True`), então imprime `par`, senão ([else](#)) imprime `impar`.

Ainda, é possível ter instruções [if-else](#) encadeadas. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('eh divisivel por 2')  
4     elif (n%3 == 0):  
5         print('eh divisivel por 3')  
6     else:  
7         print('nao eh divisivel por 2 e 3')
```

Observe que [elif](#) deve ser utilizado no lugar de [else if](#).

Exercício 4.2.1. Implemente uma função que recebe dois números n e m e imprime o maior deles.

Exercício 4.2.2. Implemente uma função que recebe os coeficientes de um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (21)$$

e classifique-o como um polinômio de grau 0, 1 ou 2.

4.3 Repetição

Estruturas de repetição são instruções que permitem que a execução repetida de uma região do código. São duas instruções disponíveis `while` e `for`.

4.3.1 while

A sintaxe da instrução `while` é

```
1 while expressao:
2     comando 0
3     .
4     .
5     .
6     comando n
```

Isto é, enquanto (`while`) a expressão (`expressao`) for verdadeira, os comandos `comando 0` a `comando n` serão repetidamente executados em ordem. Por exemplo, o seguinte código computa a soma dos 10 primeiros números naturais e, então imprime-a.

```
1 n = 0
2 s = 0
3 while (n < 10):
4     s += n
5     n += 1
6 print(s)
```

Observação 4.4. As instruções de controle `break`, `continue` são bastante úteis em várias situações. A primeira, encerra as repetições e, a segunda, pula para uma nova repetição. Consulte mais em [Python Docs](#).

Exercício 4.3.1. Use `while` para imprimir os dez primeiros números ímpares.

Exercício 4.3.2. Uma aplicação do Método Babilônico⁵ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \tag{22}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{23}$$

Faça um código com `while` para computar aproximação x_i , tal que $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$.

4.3.2 for

A estrutura `for` tem a sintaxe

```
1  for i in iteravel:
2      escopo
```

onde, `iteravel` pode ser qualquer objeto de uma classe iterável (conjunto, *n*-upla, lista, dicionário, *string*). Os comandos dentro do escopo (determinado pela indentação) são repetidos para cada iterada *i*. Por exemplo,

```
1 >>> for i in [0,1,2]:
2 ...     print(i)
3 ...
4 0
5 1
6 2
```

4.3.3 range

A função `Python range([start,]stop[,sep])` é particularmente útil na construção de instruções `for`. Ela cria um objeto de classe iterável de `start` (incluído) a `stop` (excluído), de elementos igualmente separados por `sep`. Por padrão, `start=0`, `sep=1` caso omitidos. Por exemplo,

⁵Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).


```
1 >>> for i in range(1,6,2):
2 ...     print(i)
3 ...
4 1
5 3
6 5
```

ou

```
1 >>> for i in range(3):
2 ...     print(i)
3 ...
4 0
5 1
6 2
```

Exercício 4.3.3. Escreva uma função que retorne o n -ésimo termo da função de Fibonacci⁶, $n \geq 1$.

Exercício 4.3.4. Implemente uma função para computar o produto escalar de dois vetores de n elementos. Assuma que os vetores estão alocados em listas.

Exercício 4.3.5. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times n$ por um vetor coluna x de n elementos. Assuma que o vetor está alocada como uma lista e a matriz como uma lista de listas por linhas.

Exercício 4.3.6. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times m$ por uma matriz B de $m \times n$. Assuma que as matrizes estão alocadas como listas de listas por linhas de cada matriz.

5 Elementos da computação matricial

Nesta seção, vamos explorar a [NumPy](#) (Numerical Python), biblioteca para tratamento numérico de dados. Ela é extensivamente utilizada nos mais diversos campos da ciência e da engenharia. Aqui, vamos nos restringir a

⁶Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

introduzir algumas de suas ferramentas para a computação matricial.

Usualmente, a biblioteca é importada como segue

```
1 >>> import numpy as np
```

5.1 NumPy array

Um **array** é uma tabela de valores (vetor, matriz ou multidimensional) e contém informação sobre os dados brutos, indexação e como interpretá-los. **Os elementos são todos do mesmo tipo** (diferente de uma lista Python), referenciados pela propriedade **dtype**. A indexação dos elementos pode ser feita por um **tuple** de inteiros não negativos, por booleanos, por outro **array** ou por números inteiros. O **rank** de um **array** é seu número de dimensões (chamadas de **axes**⁷). O **shape** é um **tuple** de inteiros que fornece seu tamanho (número de elementos) em cada dimensão. Sua inicialização pode ser feita usando-se listas simples ou encadeadas. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1, 3, -1, 2])
2 >>> print(a)
3 [ 1  3 -1  2]
4 >>> a.dtype
5 dtype('int64')
6 >>> a.shape
7 (4,)
8 >>> a[2]
9 -1
10 >>> a[1:3]
11 array([ 3, -1])
```

temos um **array** de números inteiros com quatro elementos dispostos em um único **axis** (eixo). Podemos interpretá-lo como uma representação de um vetor linha ou coluna, i.e.

$$a = (1, 3, -1, 2) \tag{24}$$

vetor coluna ou a^T vetor linha.

Outro exemplo,

⁷Do inglês, plural de *axis*, eixo.

```
1 >>> a = np.array([[1.0, 2, 3], [-3, -2, -1]])
2 >>> a.dtype
3 dtype('float64')
4 >>> a.shape
5 (2, 3)
6 >>> a[1, 1]
7 -2.0
```

temos um `array` de números decimais (`float`) dispostos em um arranjo com dois `axes` (eixos). O primeiro `axis` tem tamanho 2 e o segundo tem tamanho 3. Ou seja, podemos interpretá-lo como uma matriz de duas linhas e três colunas. Podemos fazer sua representação algébrica como

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

5.1.1 Inicialização de um array

O `NumPy` conta com úteis funções de inicialização de `array`. Vejam algumas das mais frequentes:

- `np.zeros()`: inicializa um `array` com todos seus elementos iguais a zero.

```
1 >>> np.zeros(2)
2 array([0., 0.])
```

- `np.ones()`: inicializa um `array` com todos seus elementos iguais a 1.

```
1 >>> np.ones((3, 2), dtype='int')
2 array([[1, 1],
3        [1, 1],
4        [1, 1]])
```

- `np.empty()`: inicializa um `array` sem alocar valores para seus elementos⁸.

```
1 >>> np.empty(3)
2 array([4.9e-324, 1.5e-323, 2.5e-323])
```

⁸Atenção! Os valores dos elementos serão dinâmicos conforme “lixo” da memória.

- `np.arange()`: inicializa um `array` com uma sequência de elementos⁹.

```
1 >>> np.arange(1,6,2)
2 array([1, 3, 5])
```

- `np.linspace(a, b[, num=n])`: inicializa um `array` como uma sequência de elementos que começa em `a`, termina em `b` (incluídos) e contém `n` elementos igualmente espaçados.

```
1 >>> np.linspace(0, 1, num=5)
2 array([0.    , 0.25, 0.5  , 0.75, 1.    ])
```

5.1.2 Manipulação de arrays

Outras duas funções importantes no tratamento de `arrays` são:

- `arr.reshape()`: permite a alteração da forma de um `array`.

```
1 >>> a = np.array([-2,-1])
2 >>> a
3 array([-2, -1])
4 >>> a.reshape(2,1)
5 array([[ -2],
6        [ -1]])
```

O `arr.reshape()` também permite a utilização de um coringa `-1` que será dinamicamente determinado de forma obter-se uma estrutura adequada. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.reshape((-1,1))
6 array([[1],
7        [2],
8        [3],
9        [4]])
```

- `arr.transpose()`: computa a transposta de uma matriz.

⁹Similar a função Python [range](#).

```
1 >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2 >>> a
3 array([[1, 2],
4        [3, 4]])
5 >>> a.transpose()
6 array([[1, 3],
7        [2, 4]])
```

- `np.concatenate()`: concatena arrays.

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> c = np.concatenate((a,b))
4 >>> c
5 array([1, 2, 2, 3])
6 >>> a = a.reshape((1,-1))
7 >>> a.ndim
8 2
9 >>> b = b.reshape((1,-1))
10 >>> b
11 array([[2, 3]])
12 >>> d = np.concatenate((a,b), axis=0)
13 >>> d
14 array([[1, 2],
15        [2, 3]])
```

5.1.3 Operadores elemento-a-elemento

Os operadores aritméticos disponível no Python atuam elemento-a-elemento nos arrays. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> a+b
4 array([3, 5])
5 >>> a-b
6 array([-1, -1])
7 >>> b*a
8 array([2, 6])
9 >>> a**b
```

```
10 array([1, 8])
11 >>> 2*b
12 array([4, 6])
```

O [NumPy](#) também conta com várias funções matemáticas elementares que operam elemento-a-elemento em `arrays`. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([np.pi, np.sqrt(2)])
2 >>> a
3 array([3.14159265, 1.41421356])
4 >>> np.sin(a)
5 array([1.22464680e-16, 9.87765946e-01])
6 >>> np.exp(a)
7 array([23.14069263,  4.11325038])
```

Observação 5.1. O [NumPy](#) contém um série de outras funções práticas para a manipulação de `arrays`. Consulte [NumPy: the absolute basics for beginners](#).

5.2 Elementos da álgebra linear

O [NumPy](#) conta com um módulo de álgebra linear

```
1 >>> from numpy import linalg
```

5.2.1 Vetores

Um vetor podem ser representado usando um `array` de um eixo (dimensão) ou um com dois eixos, caso se queira diferenciá-lo entre um vetor linha ou coluna. Por exemplo, os vetores

$$a = (2, -1, 7), \quad (26)$$

$$b = (3, 1, 0)^T \quad (27)$$

podem ser alocados com

```
1 >>> x = np.array([2, -1, 7])
2 >>> y = np.array([3, 1, 0])
```

Caso queira-se que x siga um arranjo em coluna, pode-se modificar como segue

```

1 >>> a = a.reshape((-1,1))
2 >>> a
3 array([[ 2],
4        [-1],
5        [ 7]])

```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a vetores (consulte a Subseção 5.1.3). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 5.2.1. Aloque cada um dos seguintes vetores como um [NumPy array](#):

a) $x = (1.2, -3.1, 4)$

b) $y = x^T$

c) $z = (\pi, \sqrt{2}, e^{-2})^T$

5.2.2 Produto escalar e norma

Dados dois vetores,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (28)$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (29)$$

define-se o **produto escalar** por

$$x \cdot y = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} \quad (30)$$

Com o [NumPy](#), podemos computá-lo com a função `np.dot()`. Por exemplo,

```

1 >>> x = np.array([-1, 0, 2, 4])
2 >>> y = np.array([0, 1, 1, -1])
3 >>> np.dot(x,y)
4 -2

```

A norma (euclidiana) de um vetor é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}. \quad (31)$$

O [NumPy](#) conta com a função `np.linalg.norm()` para computá-la. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.norm(y)
2 1.7320508075688772
```

Exercício 5.2.2. Faça um código para computar o produto escalar $x \cdot y$ sendo

$$x = (1.2, \ln(2), 4), \quad (32)$$

$$y = (\pi^2, \sqrt{3}, e) \quad (33)$$

5.2.3 Matrizes

Uma matriz pode ser alocada como um [NumPy array](#) de dois eixos (dimensões). Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \quad (35)$$

podem ser alocadas como segue

```
1 >>> A = np.array([[2,-1,7],[3,1,0]])
2 >>> A
3 array([[ 2, -1,  7],
4         [ 3,  1,  0]])
5 >>> B = np.array([[4,0],[2,1],[-8,6]])
6 >>> B
7 array([[ 4,  0],
8         [ 2,  1],
9         [-8,  6]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo **arrays**, logo também aplicáveis a matrizes (consulte a Subseção 5.1.3). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 5.2.3. Aloque cada uma das seguintes matrizes como um Numpy array:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

b) $B = A^T$

Exercício 5.2.4. Seja

```
1 >>> A = np.array([[2,1],[1,1],[-3,-2]])
```

Determine o formato (**shape**) dos seguintes arrays:

a) `A[:,0]`

b) `A[:,0:1]`

c) `A[1:3,0]`

d) `A[1:3,0:1]`

e) `A[1:3,0:2]`

5.2.4 Inicialização de matrizes

Além das inicializações de **arrays** já estudadas na Subseção 5.1.1, temos mais algumas que são particularmente úteis no caso de matrizes.

- `np.eye(n)`: retorna a matriz identidade $n \times n$.

```
1 >>> np.eye(3)
2 array([[1., 0., 0.],
3        [0., 1., 0.],
4        [0., 0., 1.]])
```

- `np.diag(v)`: retorna uma matriz diagonal formada pela **list** `v`.

```

1 >>> np.diag([1,2,3])
2 array([[1, 0, 0],
3        [0, 2, 0],
4        [0, 0, 3]])

```

Exercício 5.2.5. Aloque a matriz escalar $C = [c_{ij}]_{i,j=0}^{99}$, sendo $c_{ii} = \pi$ e $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

5.2.5 Multiplicação de matrizes

A multiplicação da matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,l-1}$ pela matriz $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^{l-1,m-1}$ é a matriz $C = AB = [c_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,m-1}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{l-1} a_{ik} b_{k,j} \quad (37)$$

O [NumPy](#) tem a função `np.matmul()` para computar a multiplicação de matrizes. Por exemplo, a multiplicação das matrizes dadas em (34) e (35), computamos

```

1 >>> C = np.matmul(A,B)
2 >>> C
3 array([[ -50,   41],
4        [  14,    1]])

```

Observação 5.2. É importante notar que `np.matmul(A,B)` é a multiplicação de matrizes, enquanto que `*` consiste na multiplicação elemento a elemento. Alternativamente a `np.matmul(A,B)` pode-se usar `A @ B`.

Exercício 5.2.6. Aloque as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Então, se existirem, compute e forneça as dimensões das seguintes matrizes

- a) CD
- b) $D^T E$
- c) $D^T C$
- d) DE

5.2.6 Traço e Determinante de uma matriz

O **NumPy** tem a função `arr.trace()` para computar o **traço** de uma matriz (soma dos elementos de sua diagonal). Por exemplo,

```
1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> A.trace()
3 -1
```

Já, o **determinante** é fornecido no módulo `np.linalg`. Por exemplo,

```
1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> np.linalg.det(A)
3 25.000000000000007
```

Exercício 5.2.7. Compute e verifique os traços e os determinantes das seguintes matrizes

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

5.2.7 Rank e inversa de uma matriz

O **rank** de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes. O **NumPy** conta com a função `matrix_rank()` para computá-lo. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.matrix_rank(np.eye(3))
```

```

2 3
3 >>> A = np.array([[1,2,3],[-1,1,-1],[0,3,2]])
4 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
5 2

```

A inversa de uma matriz **full rank** pode ser computada com a função `np.linalg.inv()`. Por exemplo,

```

1 >>> A = np.array([[1,2,3],[-1,1,-1],[1,3,2]])
2 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
3 3
4 >>> Ainv = np.linalg.inv(A)
5 >>> np.matmul(A,Ainv)
6 array([[ 1.00000000e+00,  0.00000000e+00,
7          0.00000000e+00],
8          [ 1.11022302e-16,  1.00000000e+00,
9          2.22044605e-16],
          [-2.22044605e-16,  0.00000000e+00,
          1.00000000e+00]])

```

Exercício 5.2.8. Compute, se possível, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Verifique suas respostas.

5.2.8 Autovalores e autovetores de uma matriz

Um auto-par (λ, v) , λ um escalar chamado de autovalor e $v \neq 0$ é um vetor chamado de autovetor, é tal que

$$A\lambda = \lambda v. \quad (45)$$

O NumPy tem a função `np.linalg.eig()` para computar os auto-pares de uma matriz. Por exemplo,

```

1 >>> np.linalg.eig(np.eye(3))
2 (array([1., 1., 1.]), array([[1., 0., 0.],
3         [0., 1., 0.],
4         [0., 0., 1.])))

```

Observamos que a função retorna uma tupla, sendo o primeiro item um `array` contendo os autovalores (repetidos conforme suas multiplicidades) e o segundo item é a matriz dos autovetores, onde estas são suas colunas.

Exercício 5.2.9. Compute os auto-pares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Então, verifique se, de fato, $Av = \lambda v$ para cada auto-par (λ, v) computado.

6 Gráficos

[Matplotlib](#) é uma biblioteca [Python](#) livre e gratuita para a visualização de dados. É muito utilizada para a criação de gráficos estáticos, animados ou interativos. Aqui, vamos introduzir alguma de suas ferramentas básicas para gráficos.

Para utilizá-la, é necessário instalá-la. Pacotes de instalação estão disponíveis para os principais sistemas operacionais, consulte a sua loja de *apps* ou [Matplotlib Installation](#). Para importá-la, usamos

```

1 >>> import matplotlib.pyplot as plt

```

Observação 6.1. Se você está usando um console [Python](#) remoto, você pode querer adicionar a seguinte linha de comando para que os gráficos sejam visualizados no próprio console.

```

1 >>> %matplotlib inline

```

Gráficos bidimensionais podem ser criados com a função `plt.plot(x,y)`, onde `x` e `y` são `arrays` que fornecem os pontos cartesianos (x_i, y_i) a serem plotados. Por exemplo,

```

1 >>> import matplotlib.pyplot as plt

```

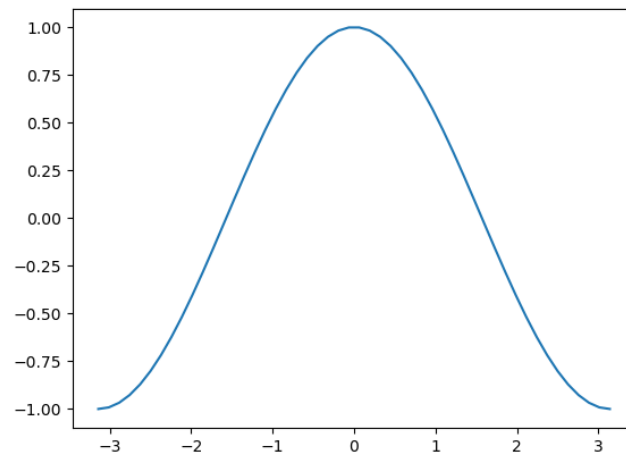


Figura 1: Esboço do gráfico da função $y = \cos(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

```
2 >>> x = np.linspace(-np.pi, np.pi)
3 >>> y = np.cos(x)
4 >>> plt.plot(x,y)
5 [<matplotlib.lines.Line2D object at 0x7f99f578a370
>]
6 >>> plt.show()
```

produz o seguinte esboço do gráfico da função $y = \cos(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Consulte a Figura 1.

Observação 6.2. Matplotlib é uma poderosa ferramenta para a visualização de gráficos. Consulte a galeria de exemplos no seu site oficial

<https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html>

Exercício 6.0.1. Crie um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções no intervalo indicado:

a) $y = \cos(x)$, $[0, 2\pi]$

b) $y = x^2 - x + 1$, $[-2, 2]$

c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right), (-1, 1)$

Referências

- [1] Banin, S.L.. Python 3 - Conceitos e Aplicações - Uma Abordagem Didática, Saraiva: São Paulo, 2021. ISBN: 978-8536530253.
- [2] NumPy Developers. NumPy documentation, versão 1.26, disponível em <https://numpy.org/doc/stable/>.
- [3] Ribeiro, J.A.. Introdução à Programação e aos Algoritmos, LTC: São Paulo, 2021. ISBN: 978-8521636410.
- [4] Hunter, J.; Dale, D.; Firing, E.; Droettboom, M. & Matplotlib development team. NumPy documentation, versão 3.8.3, disponível em <https://matplotlib.org/stable/>.
- [5] Python Software Foundation. Python documentation, versão 3.12.2, disponível em <https://docs.python.org/3/>.
- [6] Wazlawick, R.. Introdução a Algoritmos e Programação com Python - Uma Abordagem Dirigida por Testes, Grupo GEN: São Paulo, 2021. ISBN 978-8595156968.