Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

23 de abril de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica.
Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Estudo de retas

Observação 1.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos `Python` têm o seguinte preambulo:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x,y,z).

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenados) e tem coordenadas $(0,0,0)$. Dado um ponto $P = (x,y,z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

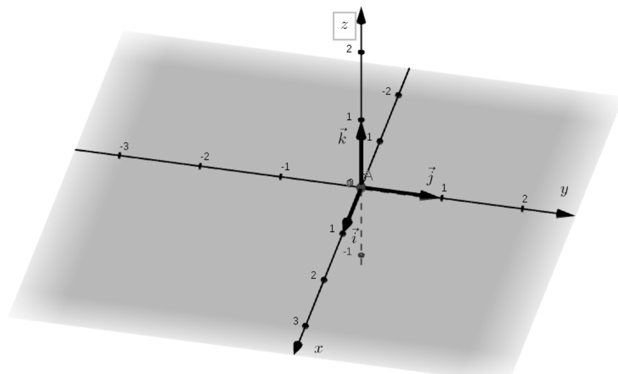

Figura 1.1: Sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com **sistemas de coordenadas ortogonais**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura **??**.

Observação 1.1.1. (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor $\overrightarrow{AB}$. Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, temos que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} && (1.1)\\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} && (1.2)\\
&= -(x_A,y_A,z_A) + (x_B,y_B,z_B) && (1.3)\\
&= (x_B - x_A,y_B - y_A,z_B - z_A). && (1.4)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3-(-1),-1-1,0-2) = (4,-2,-2). \tag{1.5}$$

Observação 1.1.2. (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M,y_M,z_M)$ do segmento AB, do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Portanto

$$(x_M - x_A,y_M - y_A,z_M - z_A) = (x_B - x_M,y_B - y_M,z_B - z_M), \tag{1.6}$$

donde

$$2x_M = x_A + x_B \tag{1.7}$$
$$2y_M = y_A + y_B \tag{1.8}$$
$$2z_M = z_A + z_B. \tag{1.9}$$

Logo, temos $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (1,0,1). \tag{1.10}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e $C = (x,2,2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x.

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são

$$\overrightarrow{AC} = (x-(-1), 2-2, 2-1) = (x+1,0,1) \tag{1.11}$$

e as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são

$$\overrightarrow{BC} = (x-1, 2-(-2), 2-0) = (x-1,4,2). \tag{1.12}$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4^2 + 2^2} \tag{1.13}$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 2^2 \tag{1.14}$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \tag{1.15}$$
$$\Rightarrow 4x = 19 \tag{1.16}$$
$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \tag{1.17}$$

◊

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e M o ponto médio do intervalo AB. Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+(-2)}{2},\frac{1+0}{2}\right) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right). \tag{1.18}$$

Agora, denotando $P = (x_P,y_P,z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P-(-1),y_P-2,z_P-1) = \left(0-(-1),0-2,\frac{1}{2}-1\right) \tag{1.19}$$

$$\Rightarrow (2x_p+2,2y_P-4,2z_P-2) = \left(1,-2,-\frac{1}{2}\right). \tag{1.20}$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \tag{1.21}$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \tag{1.22}$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \tag{1.23}$$

Logo, $P = (-1/2,1,3/4)$.

◊

Exercícios

Em construção ...

1.2 Equações da reta

1.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, $\vec{v}$ um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura **??**). Assim sendo, P é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.24}$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r.

Figura 1.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{v}$ escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 1.2.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2{,}1{,}3)$ (veja a Figura **??**). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3{,}2{,}5) \tag{1.25}$$

é um vetor diretor de r. Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.26}$$

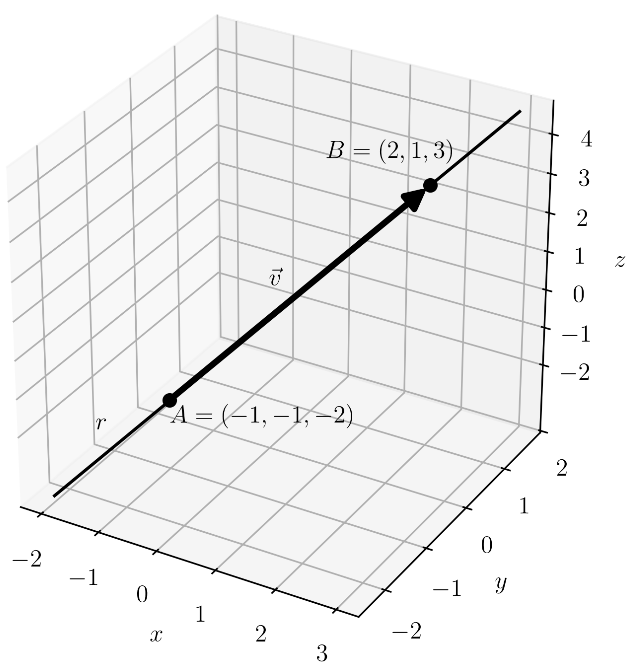

Figura 1.3: Esboço da reta discutida no Exemplo **??**.

1.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Assim, $P = (x,y,z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.27}$$

Equivalentemente,

$$(x - x_A,y - y_A,z - z_A) = \lambda(v_1,v_2,v_3). \tag{1.28}$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \tag{1.29}$$
$$y - y_A = \lambda v_2, \tag{1.30}$$
$$z - z_A = \lambda v_3, \tag{1.31}$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \tag{1.32}$$
$$y = y_A + \lambda v_2, \tag{1.33}$$
$$z = z_A + \lambda v_3, \tag{1.34}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 1.2.2. A reta r discutida no Exemplo **??** tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.35}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.36}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.37}$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x,y,z) = (-1,-1,-2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x,y,z) = (-1+3,-1+2,-2+5) = (2,1,3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B.
Com o `Sympy`, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código[1]:

```
var('lbda',real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda,-1+2*lbda,-2+5*lbda,(lbda,-1,2))
```

[1]Veja a Observação **??**.

1.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \tag{1.38}$$
$$y = y_A + v_2\lambda, \tag{1.39}$$
$$z = z_A + v_3\lambda. \tag{1.40}$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \tag{1.41}$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

Exemplo 1.2.3. No Exemplo **??**, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{1.42}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{1.43}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{1.44}$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{5}. \tag{1.45}$$

1.2.4 Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3,2,5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = (x,0,1/2)$ seja um ponto de r.

Solução. $P = (x,0,1/2)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{1.46}$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2)\right) = \lambda(3,2,5). \tag{1.47}$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x+1,1,\frac{5}{2}\right)=\lambda(3,2,5). \tag{1.48}$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1=\lambda\cdot 2\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}. \tag{1.49}$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x+1=\lambda 3\Rightarrow x+1=\frac{3}{2} \tag{1.50}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}. \tag{1.51}$$

◊

ER 1.2.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x=1-\lambda, \tag{1.52}$$

$$y=\lambda, \tag{1.53}$$

$$z=-3. \tag{1.54}$$

Determine uma equação vetorial de r.

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes de λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r, temos que $A=(1,0,-3)\in r$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$ é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}, \tag{1.55}$$

com $A=(1,0,3)$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$.

◊

ER 1.2.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A=(2,-3,1)$ e $B=(-1,1,0)$, determine o valor de t tal que

$$x=2+t\lambda, \tag{1.56}$$

$$y=-2+4\lambda, \tag{1.57}$$

$$z=1-\lambda, \tag{1.58}$$

sejam equação paramétricas de r.

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r, é necessário que $\vec{v} = (t,4,-1)$ seja um vetor diretor de r. Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(t,4,-1) = \beta(-1-2,1-(-3),0-1) = \beta(-3,4,-1). \tag{1.59}$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \Rightarrow t = -3. \tag{1.60}$$

◊

ER 1.2.4. Seja r uma reta, cujas equações na forma simétrica são

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \tag{1.61}$$

Determine equações paramétricas desta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \tag{1.62}$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \tag{1.63}$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \tag{1.64}$$

Daí, isolando x, y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \tag{1.65}$$

$$y = 2 + 3\lambda, \tag{1.66}$$

$$z = 1 - 2\lambda. \tag{1.67}$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1,2,1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1,5,-1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura **??**.

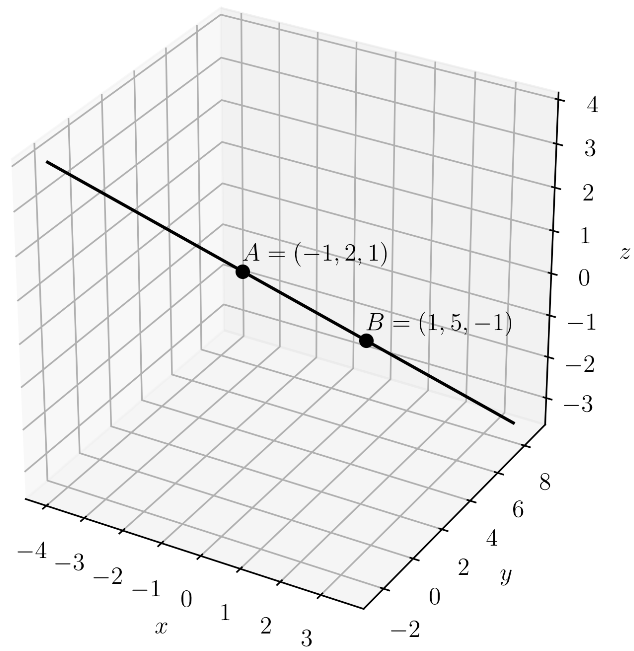

Figura 1.4: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido **??**.

$\Diamond$

Capítulo 2

Estudo de planos

Observação 2.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos `Python` têm o seguinte preambulo:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

2.1 Equações do plano

Um plano π fica unicamente determinado por um ponto $A \in \pi$ e dois vetores linearmente independentes $\vec{u},\vec{v} \in \pi$[1].

2.1.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano π determinado pelo ponto A e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, i.e. $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou seja,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad \lambda,\beta \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

esta última é chamada de **equação vetorial do plano**.

Exemplo 2.1.1. Consideremos o plano π determinado pelo ponto $A = (1,-1,1)$ e pelos vetores $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$ (Veja a Figura **??**. Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{2.2}$$

[1] No sentido que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm representantes no plano π.

para $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

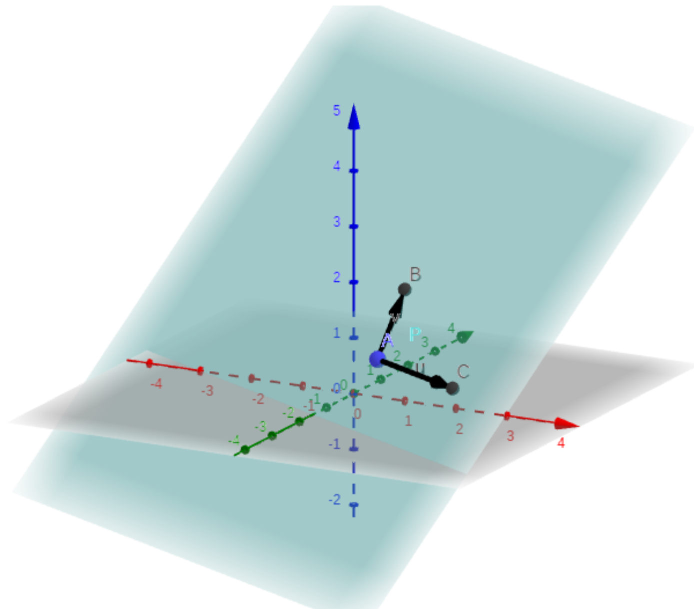

Figura 2.1: Esboço do plano π discutido no Exemplo **??**.

Tomando, por exemplo, $\lambda = -1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} && (2.3)\\ &= -(2,-1,0) + (0,1,1) && (2.4)\\ &= (-2,2,1). && (2.5) \end{aligned}$$

Observando que as coordenadas do ponto P são iguais as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} && (2.6)\\ &= (1,-1,1) + (-2,2,1) && (2.7)\\ &= (-1,1,2). && (2.8) \end{aligned}$$

Ou seja, $P = (-1,1,2) \in \pi$.

2.1.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano π com $A = (x_A,y_A,z_A) \in \pi$ e os vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \pi$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in \pi$ linearmente independentes. Então, todo o ponto $P =$

(x,y,z) do plano π satisfaz

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{2.9}$$

para dados parâmetros $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(u_1,u_2,u_3) + \beta(v_1,v_2,v_3) \tag{2.10}$$
$$= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). \tag{2.11}$$

Portanto, temos

$$x - x_A = \lambda u_1 + \beta v_1, \tag{2.12}$$
$$y - y_A = \lambda u_2 + \beta v_2, \tag{2.13}$$
$$z - z_A = \lambda u_3 + \beta v_3. \tag{2.14}$$

Ou, equivalentemente,

$$x = x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \tag{2.15}$$
$$y = y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \tag{2.16}$$
$$z = z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \tag{2.17}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 2.1.2. No Exemplo **??**, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1,-1,1)$ e os vetores $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$. Do que vimos acima, temos que

$$x = 1 + 2\lambda, \tag{2.18}$$
$$y = -1 - \lambda + \beta, \tag{2.19}$$
$$z = 1 + \beta, \tag{2.20}$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o `Sympy`. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                          (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                          xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

2.1.3 Equação geral do plano

Seja π o plano determinado pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e pelos vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Sabemos que $P = (x,y,z) \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto $[\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] = 0$. Logo,

$$\begin{align}
0 &= [\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] \tag{2.21}\\
&= \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{2.22}\\
&= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \tag{2.23}\\
&- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \tag{2.24}\\
&+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \tag{2.25}
\end{align}$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2.26}$$

com a,b,c,d não todos nulos ou, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Esta última é chamada **equação geral do plano**.

Exemplo 2.1.3. No Exemplo **??**, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1,-1,1)$ e os vetores $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$. Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos $P = (x,y,z)$ e calculamos

$$\begin{align}
0 &= [\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] \tag{2.27}\\
&= \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.28}\\
&= -x - 2y + 2z - 3. \tag{2.29}
\end{align}$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \tag{2.30}$$

2.1.4 Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Seja π um plano tal que $A = (2,0,-1) \in \pi$, $P = (0,1,-1) \in \pi$ e $\vec{u} = (1,0,1) \in \pi$. Determine uma equação vetorial para π.

Solução. Para obtermos uma equação vetorial do plano π, precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em π. Do enunciado, temos o ponto $A = (2,0,-1) \in \pi$ e o vetor $\vec{u}$. Portanto, precisamos encontrar um vetor $\vec{v} \in \pi$ tal que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam l.i.. Por sorte, temos $P = (0,1,-1) \in \pi$ e, portanto $\overrightarrow{AP} \in \pi$. Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \tag{2.31}$$
$$= (-2,1,0), \tag{2.32}$$

pois $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano *pi* é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{2.33}$$
$$= \lambda(1,0,1) + \beta(-2,1,0), \tag{2.34}$$

com $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

$\Diamond$

ER 2.1.2. Seja π o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \tag{2.35}$$
$$y = \beta, \tag{2.36}$$
$$z = 1 - \lambda + \beta. \tag{2.37}$$

Determine o valor de z_P de forma que $P = (-1,2,z_P) \in \pi$.

Solução. Para que $P = (-1,2,z_P)$ pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \tag{2.38}$$
$$2 = \beta, \tag{2.39}$$
$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \tag{2.40}$$

Das duas primeiras equações, obtemos $\lambda = 0$ e $\beta = 2$. Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \tag{2.41}$$

$\Diamond$

Em construção ...

Capítulo 3

Cônicas

3.1 Elipse

Sejam F_1,F_2 pontos sobre um plano π, c a distância entre c_1 e c_2 e $a > c$. Chama-se **elipse** de **focos** F_1 e F_2 ao conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{3.1}$$

Veja a Figura **??**.

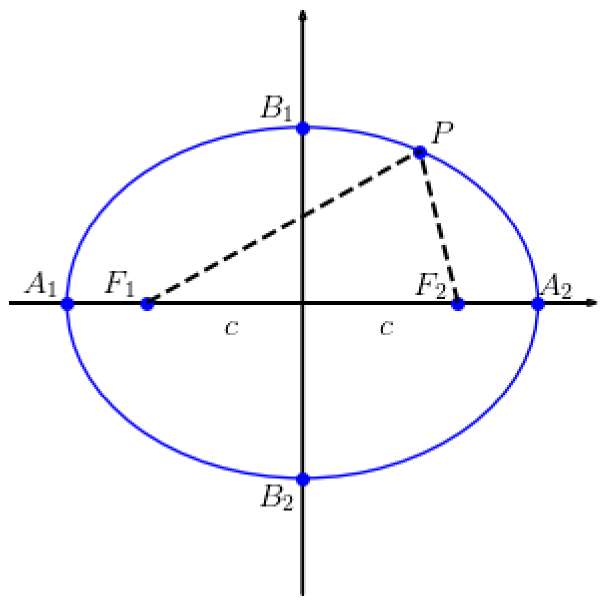

Figura 3.1: Ilustração de uma elipse de focos F_1 e F_2.

Dada uma tal elipse, identificamos $2c = |F_1F_2|$ como a **distância focal**. Os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento A_1A_2 é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \tag{3.2}$$

O ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado de **centro** da elipse. Sejam B_1 e B_2 os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento A_1A_2. Assim sendo, o segmento B_1B_2 é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \tag{3.3}$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \tag{3.4}$$

Notemos que $0 \leq e < 1$. Para $e = 0$, temos $c = 0$ e, portanto $F_1 = F_2$. Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em F_1 (ou F_2) e diâmetro $2a$. No que e tende a 1, a elipse tende ao segmento A_1A_2.
Por fim, notemos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, $|OF_2| = c$, $|F_2B_1| = a$ e $|OB_1| = b$. Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{3.5}$$

3.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$, $c \geq 0$, os focos de uma dada elipse (veja a Figura **??**). Se $P = (x,y)$ é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{3.6}$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \tag{3.7}$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{3.8}$$

temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \tag{3.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.10}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \tag{3.11}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{3.12}$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{3.13}$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \tag{3.14}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3.15}$$

Como $a > c$, dividimos por $a^2 - c^2$ e depois por a^2 para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{3.16}$$

Por fim, da equação (**??**), temos $a^2 - c^2 = b^2$, o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.17}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

3.2 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos sobre um plano π e. Sejam, também, c tal que $|F_1F_2| = 2c$ e $a < c$. O lugar geométrico dos pontos P tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \tag{3.18}$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura **??**.

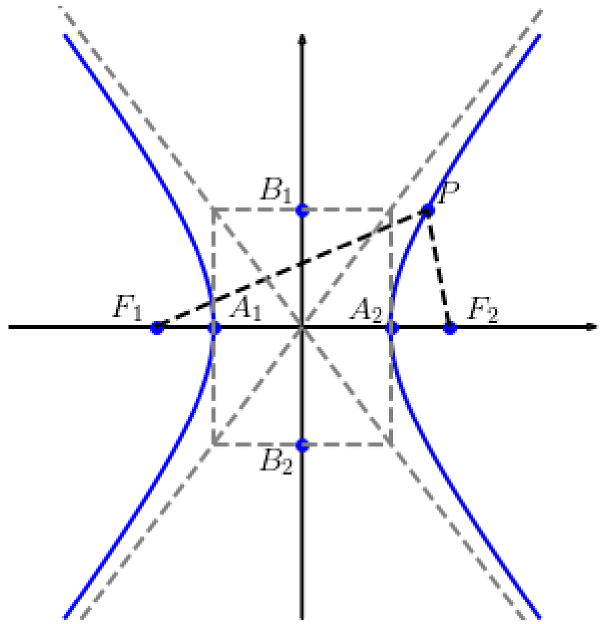

Figura 3.2: Ilustração de uma hipérbole de focos F_1 e F_2.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da hipérbole e $2c = |F_1F_2|$ é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos A_1 e A_2, sendo que o segmento A_1A_2 é chamado de **eixo real** (ou transverso) da hipérbole. O comprimento deste eixo é $|A_1A_2| = 2a$.
Sejam B_1 e B_2 pontos c distantes de A_1 e A_2 e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento B_1B_2 é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando $2b = |B_1B_2|$, temos do triângulo retângulo B_1OA_1 que

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3.19}$$

3.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da hipérbole. Desta forma, temos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Então, $P = (x,y)$ é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \tag{3.20}$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{3.21}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.22}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \tag{3.23}$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \tag{3.24}$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2)}. \tag{3.25}$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \tag{3.26}$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3.27}$$

Lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{3.28}$$

Dividindo por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.29}$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Em construção ...

3.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos P do plano que são equidistantes de F e de d, i.e.

$$\text{dist}(P,F) = \text{dist}(P,d). \tag{3.30}$$

Veja a Figura **??**.

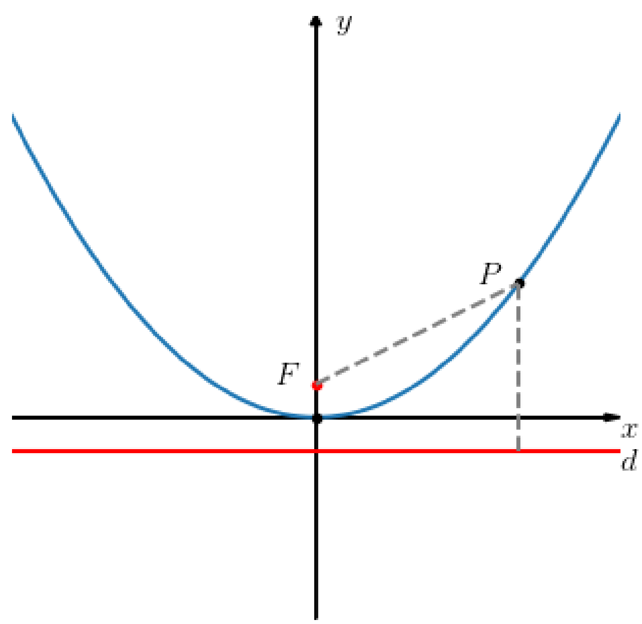

Figura 3.3: Ilustração de uma parábola.

O ponto F é chamado de **foco** da parábola. A reta d é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a d e que passa pelo ponto F é chamada de **eixo** da parábola. O ponto V de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

3.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja p tal que

$$F = (0,p/2). \tag{3.31}$$

Logo, a diretriz tem equação $y = -p/2$. Da definição de parábola, $P = (x,y)$ pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P,F) = \text{dist}(P,d). \tag{3.32}$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \tag{3.33}$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \tag{3.34}$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \tag{3.35}$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

Observação 3.3.1. Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco $F = (p/2, 0)$, tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \tag{3.36}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios