

Método de Elementos Finitos

Pedro H A Konzen

11 de maio de 2021

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre o método de elementos finitos para a simulação de equações diferenciais. Como ferramenta computacional de apoio didático, apresentam-se códigos em [Python](#) com suporte da biblioteca [FEniCS](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Método de elementos finitos em 1D

1.1 Interpolação e projeção

Seja dado um intervalo $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$. O espaço vetorial das funções lineares em I é definido por

$$P_1(I) := \{v : v(x) = c_0 + c_1x, x \in I, c_0, c_1 \in \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Observamos que dado $v \in P_1(I)$, temos que v é unicamente determinada pelos valores $\alpha_0 = v(x_0)$ e $\alpha_1 = v(x_1)$. Como consequência, existe exatamente uma única função $v \in P_1(I)$ para quaisquer dados valores α_0 e α_1 . Desta observação, introduzimos a chamada base nodal $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ para $P_1(I)$, definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.2)$$

com $i, j = 0, 1$. Com esta base, toda função $v \in P_1(I)$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções φ_0 e φ_1 com coeficientes α_0 e α_1 (**graus de liberdade**), i.e.

$$v(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x). \quad (1.3)$$

Além disso, observamos que

$$\varphi_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (1.4)$$

Uma extensão do espaço $P_1(I)$ é o espaço das funções lineares por partes. Dado $I = [l_0, l_1]$, $l_0 \neq l_1$, consideremos uma partição (**malha**) de I com $n + 1$ pontos $\mathcal{I} = \{l_0 = x_0, x_1, \dots, x_n = l_1\}$ e, portanto, com n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na malha \mathcal{I} definimos o seguinte espaço das funções lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\mathcal{I}), v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.5)$$

Observamos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinadas por seus valores nodais $\{\alpha_i = v(x_i)\}_{i=0}^n$. Reciprocamente, todo conjunto de valores nodais $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ determina unicamente uma função $v \in V_h$. Desta observação, temos que os valores nodais determinam os graus de liberdade com a base nodal $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ para V_h definida por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad (1.6)$$

com $i, j = 0, 1, \dots, n$. Podemos verificar que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & , x \in I_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & , x \in I_{i+1}, \\ 0 & , \text{noutros casos} \end{cases} \quad (1.7)$$

veja, Figura ???. É notável que $\varphi_i(x)$ tem suporte compacto $I_i \cup I_{i+1}$.

1.1.1 Interpolação

A interpolação é uma das técnicas de aproximação de funções. Dada uma função contínua f em $I = [x_0, x_1]$, definimos o **operador de interpolação linear** $\pi : C^0(I) \rightarrow P_1(I)$ por

$$\pi f(x) = f(x_0)\varphi_0(x) + f(x_1)\varphi_1(x). \quad (1.8)$$

Observamos que πf é igual a f nos nodos x_0 e x_1 .

Exemplo 1.1.1. A Figura ??? ilustra a interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço $P_1([1/4, 3/4])$. Neste caso

$$\pi f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) \frac{3/4 - x}{1/2} + f\left(\frac{3}{4}\right) \frac{x - 1/4}{1/2}. \quad (1.9)$$

Com o [FEniCS](#), podemos computar a função interpolada πf com o seguinte código:

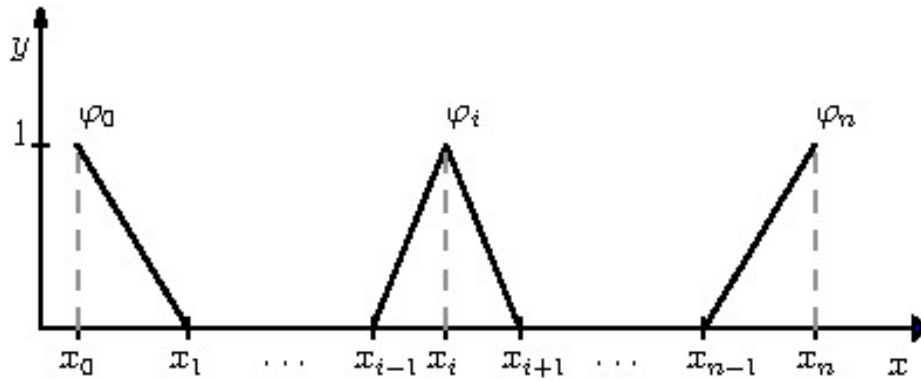


Figura 1.1: Base nodal para o espaço das funções lineares por parte.

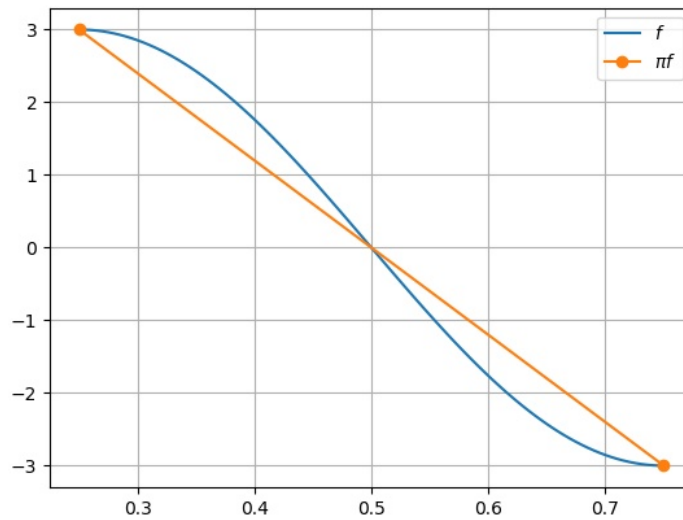


Figura 1.2: Interpolação linear de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço $P_1([1/4, 3/4])$.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
```

```

import matplotlib.pyplot as plt

# malha
mesh = IntervalMesh(1,0.25,0.75)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# funcao
f = Expression('3*sin(2*pi*x[0])',
               degree=10)

# interpolacao
pif = interpolate(f,V)

# grafico
xx = IntervalMesh(100,0.25,0.75)
plot(f,mesh=xx,label="$f$")
plot(pif,mesh=mesh,
     marker='o',label="$\pi f$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

```

Agora, vamos buscar medir o erro de interpolação, i.e. $f - \pi f$. Para tanto, podemos usar a norma L^2 definida por

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left(\int_I v^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Lembramos que valem a **desigualdade triangular**

$$\|v + w\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{L^2(I)} + \|w\|_{L^2(I)} \quad (1.11)$$

e a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**¹

$$\int_I vw dx \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}, \quad (1.12)$$

¹Também conhecida como desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz. Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857, matemático francês. Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804 - 1889, matemático Russo. Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921, matemático alemão.

para qualquer funções $v, w \in L^2(I)$.

Proposição 1.1.1. (Erro da interpolação linear) O interpolador πf satisfaz as estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.13)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}, \quad (1.14)$$

onde C é uma constante e $h = x_1 - x_0$.

Demonstração. Denotemos o erro de interpolação por $e = f - \pi f$. Do teorema fundamental do cálculo, temos

$$e(y) = e(x_0) + \int_{x_0}^y e'(x) dx, \quad (1.15)$$

onde $e(x_0) = f(x_0) - \pi f(x_0) = 0$. Daí, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (??), temos

$$e(y) = \int_{x_0}^y e' dx \quad (1.16)$$

$$\leq \int_{x_0}^y |e'| dx \quad (1.17)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e'| dx \quad (1.18)$$

$$\leq \left(\int_I 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_I e'^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

$$= h^{1/2} \left(\int_I e'^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.20)$$

donde

$$e(y)^2 \leq h \int_I e'^2 dx = h \|e'\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.21)$$

Então, integrando em I obtemos

$$\|e\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e^2(y) dy \leq \int_I h \|e'\|_{L^2(I)}^2 dy = h^2 \|e'\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.22)$$

ou seja, temos a seguinte desigualdade

$$\|e\|_{L^2(I)} \leq h \|e'\|_{L^2(I)}. \quad (1.23)$$

Agora, observando que $e(x_0) = e(x_1) = 0$, o **teorema de Rolle**² garante a existência de um ponto $\tilde{x} \in I$ tal que $e'(\tilde{x}) = 0$, donde do teorema fundamental do cálculo e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$e'(y) = e'(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.24)$$

$$= \int_{\tilde{x}}^y e'' dx \quad (1.25)$$

$$\leq \int_I 1 \cdot |e''| dx \quad (1.26)$$

$$\leq h^{1/2} \left(\int_I e''^2 \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

Então, integrando em I , obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq h^2 \|e''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.28)$$

a qual, observando que $e'' = f''$, equivale a segunda estimativa procurada, i.e.

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)} \leq Ch \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.29)$$

Por fim, de (??) e de (??), obtemos a primeira estimativa desejada

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)} \leq Ch^2 \|f''\|_{L^2(I)}. \quad (1.30)$$

□

Exemplo 1.1.2. A Figura ?? mostra a evolução do erro na norma L^2 da interpolação de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço $P_1([0, h])$ para $h = 10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^{-1}$.

Com o [FEniCS](#), podemos computar os erros de interpolação com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# funcao
f = Expression('3*sin(2*pi*x[0])',
```

²Michel Rolle, 1652 - 1719, matemático francês.

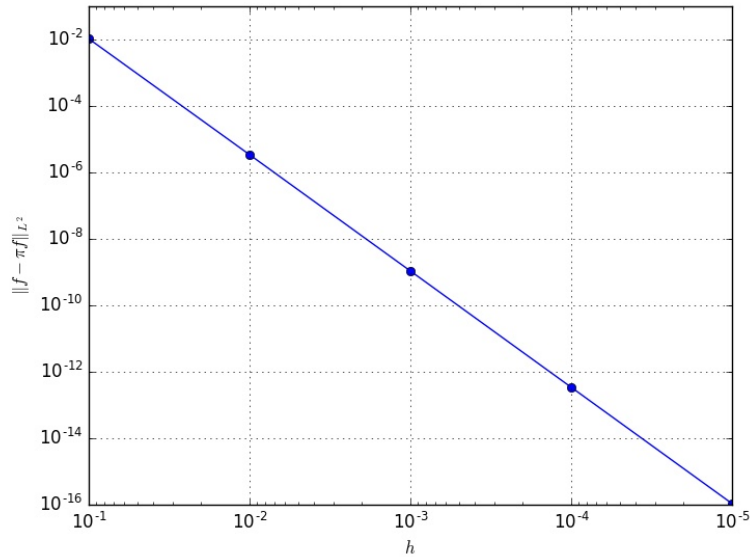


Figura 1.3: Erro de interpolação de $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ no espaço $P_1([0, h])$.

```

degree=10)

n=5
for k in np.arange(1,n+1):
    h = 10**-k
    mesh = IntervalMesh(1,0,h)
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
    pif = interpolate(f,V)
    e = errornorm(f,pif,'L2')
    print("%d %1.0E %1.1E" % (k,h,e))

```

Vamos, agora, generalizar o resultado da Proposição ?? para a interpolação no espaço V_h das funções lineares por parte. Dada uma função contínua f em $I = [l_0, l_1]$, definimos o operador interpolador $\pi : C^0(I) \rightarrow V_h$ na malha \mathcal{I} de I por

$$\pi f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x). \quad (1.31)$$

Exemplo 1.1.3. A Figura ?? ilustra a interpolação da função $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo $I = [1/4, 3/4]$ com $n = 4$ subintervalos (5 pontos).

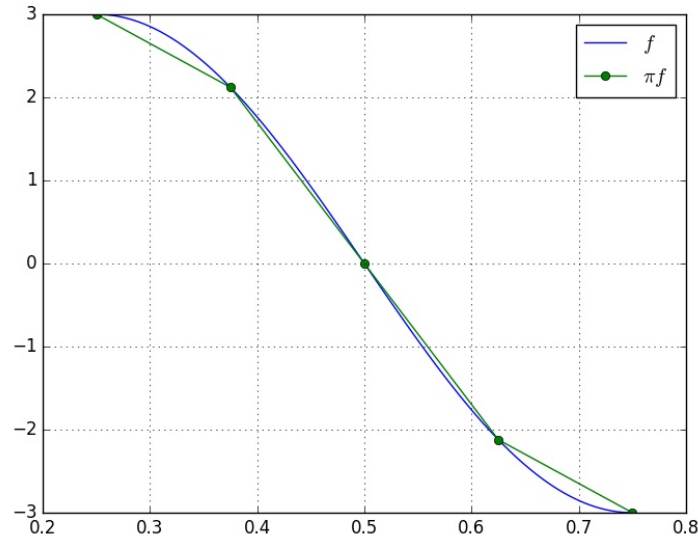


Figura 1.4: Interpolação linear de $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 pontos.

Com o [FEniCS](#), podemos computar a função interpolada πf com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
mesh = IntervalMesh(4, 0.25, 0.75)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# funcao
```

```

f = Expression('3*sin(2*pi*x[0])',
               degree=10)

# interpolacao
pif = interpolate(f,V)

# grafico
xx = IntervalMesh(100,0.25,0.75)
plot(f,mesh=xx,label="$f$")
plot(pif,mesh=mesh,
     marker='o',label="$\pi f$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

```

O seguinte resultado fornece uma estimativa do erro de interpolação em relação ao tamanho h_i de cada elemento da malha.

Proposição 1.1.2. *O interpolador πf satisfaz as estimativas*

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I)}^2, \quad (1.32)$$

$$\|(f - \pi f)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|f''\|_{L^2(I)}^2. \quad (1.33)$$

$$(1.34)$$

Demonstração. Ambas desigualdades seguem da desigualdade triangular e da Proposição ???. Por exemplo, para a primeira desigualdade, temos

$$\|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f - \pi f\|_{L^2(I_i)}^2 \quad (1.35)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n C h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.36)$$

□

1.1.2 Projeção L^2

Dada uma função $f \in L^2(I)$, definimos o **operador de projeção** L^2 $P_h : L^2(I) \rightarrow V_h$ por

$$\int_I (f - P_h f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.37)$$

Como V_h é um espaço de dimensão finita, a condição (??) é equivalente a

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i \, dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.38)$$

onde φ_i é a i -ésima função base de V_h . Além disso, como $P_h f \in V_h$, temos

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.39)$$

onde ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n$, são $n + 1$ incógnitas a determinar. Logo,

$$\int_I (f - P_h f) \varphi_i \, dx = 0 \Leftrightarrow \int_I f \varphi_i \, dx = \int_I P_h f \varphi_i \, dx \quad (1.40)$$

$$\Leftrightarrow \int_I f \varphi_i \, dx = \int_I \left(\sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j \right) \varphi_i \, dx \quad (1.41)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \xi_j \int_I \varphi_j \varphi_i \, dx = \int_I f \varphi_i \, dx, \quad (1.42)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$.

Observemos, agora, que (??) consiste em um sistema de $n + 1$ equações lineares para as $n + 1$ incógnitas ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n$. Este, por sua vez, pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$M\xi = b, \quad (1.43)$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n+1}$ é chamada de matriz de massa

$$m_{i,j} = \int_I \varphi_j \varphi_i \, dx \quad (1.44)$$

e $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ é chamado de vetor de carregamento

$$b_i = \int_I f \varphi_i \, dx. \quad (1.45)$$

Ou seja, a projeção L^2 de f no espaço V_h é

$$P_h f = \sum_{j=0}^n \xi_j \varphi_j, \quad (1.46)$$

onde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ é solução do sistema (??).

Exemplo 1.1.4. A Figura ?? ilustra a projeção L^2 da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha uniforme do intervalo $I = [1/4, 3/4]$ com $n = 4$ subintervalos (5 pontos).

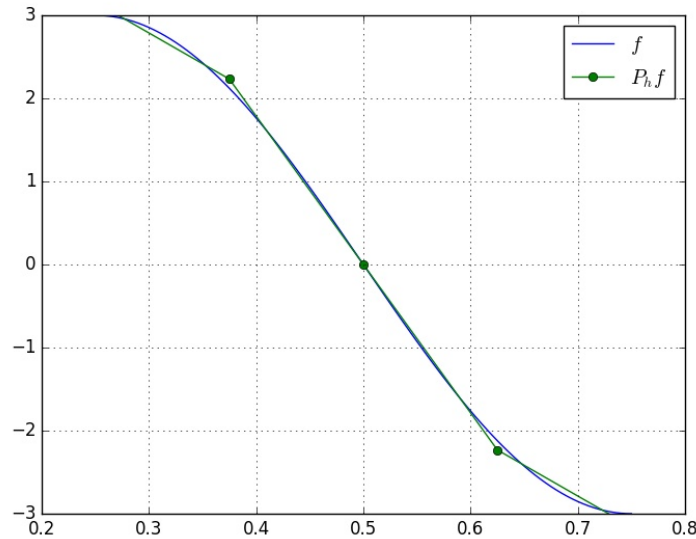


Figura 1.5: Projeção L^2 de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes sobre uma malha com 5 pontos.

Com o [FEniCS](#), podemos computar $P_h f$ com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
```

```

mesh = IntervalMesh(4,0.25,0.75)

# espacio
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# funcao
f = Expression('3*sin(2*pi*x[0])',
               degree=10)

# projecao
Phf = project(f, V)

# grafico
xx = IntervalMesh(100,0.25,0.75)
plot(f,mesh=xx,label="$f$")
plot(Phf,mesh=mesh,
     marker='o',label="$P_h f$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

```

O próximo teorema mostra que $P_h f$ é a função que melhor aproxima f dentre todas as funções do espaço V_h .

Teorema 1.1.1. (A melhor aproximação.) A projeção L^2 satisfaz

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)} \leq \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (1.47)$$

Demonstração. Dado $v \in V_h$, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 = \int_I |f - P_h f|^2 dx \quad (1.48)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v + v - P_h f) dx \quad (1.49)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx + \int_I (f - P_h f)(v - P_h f) dx \quad (1.50)$$

$$= \int_I (f - P_h f)(f - v) dx \quad (1.51)$$

$$\leq \|f - P_h f\|_{L^2(I)} \|f - v\|_{L^2(I)}, \quad (1.52)$$

donde segue o resultado. \square

O próximo teorema fornece uma estimativa *a-priori* do erro $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$ em relação ao tamanho da malha.

Teorema 1.1.2. *A projeção L^2 satisfaz*

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.53)$$

Demonstração. Tomando a interpolação $\pi f \in V_h$, temos do Teorema da melhor aproximação (Teorema ??) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição ??) que

$$\|f - P_h f\|_{L^2(I)}^2 \leq \|f - \pi f\|_{L^2(I)}^2 \quad (1.54)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i^4 \|f''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.55)$$

□

Exemplo 1.1.5. A Figura ?? mostra a evolução do erro na norma L^2 da projeção de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h em malhas uniformes de $h = 10^{-5}, 10^{-4}, \dots, 10^{-1}$ no intervalo $[1/4, 3/4]$.

Com o [FEniCS](#), podemos computar os erros de projeção com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# funcao
f = Expression('3*sin(2*pi*x[0])',
               degree=10)

n=5
for k in np.arange(0,n):
    mesh = IntervalMesh(5*10**k,0.25,0.75)
    h = mesh.hmax()
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
    Phf = project(f,V)
```

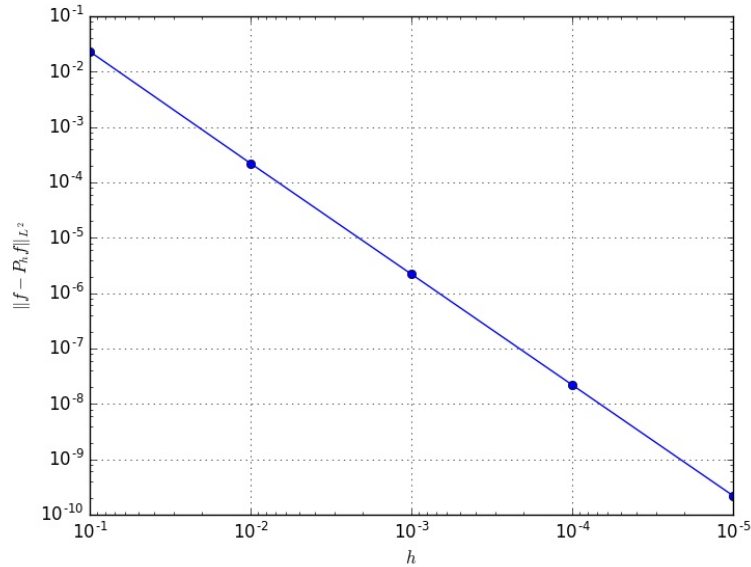


Figura 1.6: Erro de interpolação de $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h .

```
e = errornorm(f,Phf,'L2')

print("%d %1.0E %1.1E" % (k,h,e))
```

Exercícios

E 1.1.1. Faça um código para verificar a segunda estimativa da Proposição ?? no caso da interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço P_1 das funções lineares.

E 1.1.2. Faça um código para verificar as estimativas da Proposição ?? no caso da interpolação da função $f(x) = 3 \sin(2\pi x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes.

E 1.1.3. Faça um código para computar a projeção L^2 $P_h f$ da função $f(x) = x - \cos(x)$ no espaço V_h das funções lineares por partes em uma malha com 10 células no intervalo $I = [0, \pi]$. Faça o esboço dos gráficos de

f e $P_h f$ e compute o erro $\|f - P_h f\|_{L^2(I)}$.

1.2 Problema modelo

Nesta seção, discutiremos sobre a aplicação do método de elementos finitos para o seguinte problema de valor de contorno: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.56)$$

$$u(0) = u(L) = 0, \quad (1.57)$$

onde f é uma função dada.

1.2.1 Formulação fraca

A derivação de um método de elementos finitos inicia-se da formulação fraca do problema em um espaço de funções apropriado. No caso do problema (??)-(??), tomamos o espaço

$$V_0 = \{v \in H^1(I) : v(0) = v(L) = 0\}. \quad (1.58)$$

Ou seja, se $v \in H^1(I)$, então $\|v\|_{L^2(I)} < \infty$, $\|v'\|_{L^2(I)} < \infty$, bem como v satisfaz as condições de contorno do problema.

A formulação fraca é, então, obtida multiplicando-se a equação (??) por uma função teste $v \in V_0$ (arbitrária) e integrando-se por partes, i.e.

$$\int_I f v \, dx = - \int_I u'' v \, dx \quad (1.59)$$

$$= \int_I u' v' \, dx - u'(L)v(L) + u'(0)v(0) \quad (1.60)$$

$$(1.61)$$

Donde, das condições de contorno, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.62)$$

Desta forma, o problema fraco associado a (??)-(??) lê-se: encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.63)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx \quad (1.64)$$

$$L(v) = \int_I f v dx, \quad (1.65)$$

são chamadas de forma bilinear e forma linear, respectivamente.

1.2.2 Formulação de elementos finitos

Uma formulação de elementos finitos é uma aproximação do problema fraco (??) em um espaço de dimensão finita. Aqui, vamos usar o espaço $V_{h,0}$ das funções lineares por partes em I que satisfazem as condições de contorno, i.e.

$$V_{h,0} = \{v \in V_h : v(0) = v(L) = 0\}. \quad (1.66)$$

Então, substituindo o espaço V_0 pelo subespaço $V_{h,0} \subset V_0$ em (??), obtemos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{h,0}. \quad (1.67)$$

Observação 1.2.1. A formulação de elementos finitos não é única, podendo-se trabalhar com outros espaços de funções. No caso em que o espaço da solução é igual ao espaço das funções testes, a abordagem é chamada de método de Galerkin³.

Observemos que o problema (??) é equivalente a: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.68)$$

onde φ_i , $i = 1, \dots, n-1$, são as funções base de $V_{h,0}$. Então, como $u_h \in V_{h,0}$, temos

$$u_h = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \quad (1.69)$$

onde ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, são incógnitas a determinar. I.e., ao computarmos ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, temos obtido a solução u_h do problema de elementos finitos ??.

³Boris Grigoryevich Galerkin, matemático e engenheiro soviético. Fonte: [Wikipédia](#).

Agora, da forma bilinear (??), temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a \left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i \right) \quad (1.70)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (1.71)$$

Daí, o problema (??) é equivalente a resolvermos o seguinte sistema de equações lineares

$$A\xi = b, \quad (1.72)$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n-1}$ é a matriz de rigidez com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_I \varphi_j' \varphi_i' dx, \quad (1.73)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ é o vetor das incógnitas e $b = (b_i)_{i=1}^{n-1}$ é o vetor de carregamento com

$$b_i = L(\varphi_i) = \int_I \varphi_i dx. \quad (1.74)$$

Exemplo 1.2.1. Consideremos o problema (??)-(??) com $f \equiv 1$ e $L = 1$, i.e.

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.75)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.76)$$

Neste caso, a solução analítica $u(x) = -x^2/2 + x/2$ pode ser facilmente obtida por integração.

Agora, vamos computar uma aproximação de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ construído numa malha uniforme de 5 células no intervalo $I = [0, 1]$. Para tanto, consideramos o problema fraco: encontrar $u \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.77)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx, \quad L(v) = \int_I f v dx. \quad (1.78)$$

Então, a formulação de elementos finitos associada, lê-se: encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (1.79)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h .

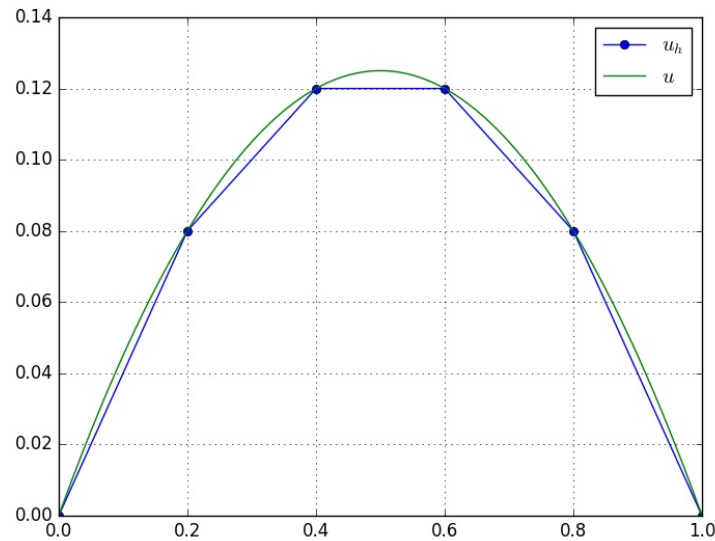


Figura 1.7: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
mesh = IntervalMesh(5,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```
# condicoes de contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(1.0)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#grafico
plot(u,marker="o",label="$u_h$")

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]/2',
                degree=2)
xx = IntervalMesh(100,0,1)
plot(ua,mesh=xx,label="$u$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()
```

1.2.3 Estimativa *a priori*

Existem dois tipos de estimativas do erro $e := u - u_h$. Estimativas *a priori*, são aqueles em que o erro é dado em relação da solução u , enquanto que nas estimativas *a posteriori* o erro é expresso em relação a solução de elementos finitos u_h .

Teorema 1.2.1. (Ortogonalidade de Galerkin) A solução de elementos fini-

tos u_h de (??) satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$a(u - u_h, v) := \int_I (u - u_h)' v' dx = 0, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.80)$$

onde u é a solução de (??).

Demonstração. De (??), (??) e lembrando que $V_{h,0} \subset V_0$, temos

$$a(u, v) = L(v) = a(u_h, v) \Rightarrow a(u - u_h, v) = 0, \quad (1.81)$$

para todo $v \in V_{h,0}$. \square

Teorema 1.2.2. (A melhor aproximação) A solução de elementos finitos u_h dada por (??) satisfaz a seguinte propriedade de melhor aproximação

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - v)'\|_{L^2(I)}, \quad v \in V_{h,0}, \quad (1.82)$$

onde u é a solução de (??).

Demonstração. Escrevendo $u - u_h = u - v + v - u_h$ para qualquer $v \in V_{h,0}$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema ??), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I (u - u_h)'(u - u_h)' dx \quad (1.83)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v + v - u_h)' dx \quad (1.84)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx + \int_I (u - u_h)'(v - u_h)' dx \quad (1.85)$$

$$= \int_I (u - u_h)'(u - v)' dx \quad (1.86)$$

$$\leq \|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \|(u - v)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.87)$$

\square

Teorema 1.2.3. (Estimativa *a priori*) O erro em se aproximar a solução u de (??) pela solução de elementos finitos u_h dada por (??) satisfaz a seguinte estimativa *a priori*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.88)$$

Demonstração. Tomando $v = \pi u$ no teorema da melhor aproximação (Teorema ??), obtemos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)} \leq \|(u - \pi u)'\|_{L^2(I)}. \quad (1.89)$$

Daí, da estimativa do erro de interpolação (Proposição ??), temos

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n h_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)}^2. \quad (1.90)$$

□

Exemplo 1.2.2. A Figura ?? apresenta o esboço da evolução do erro $\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}$ da solução de elementos finitos do problema (??)-(??) para malhas uniformes com $n = 2, 4, 8, \dots, 128$ células.

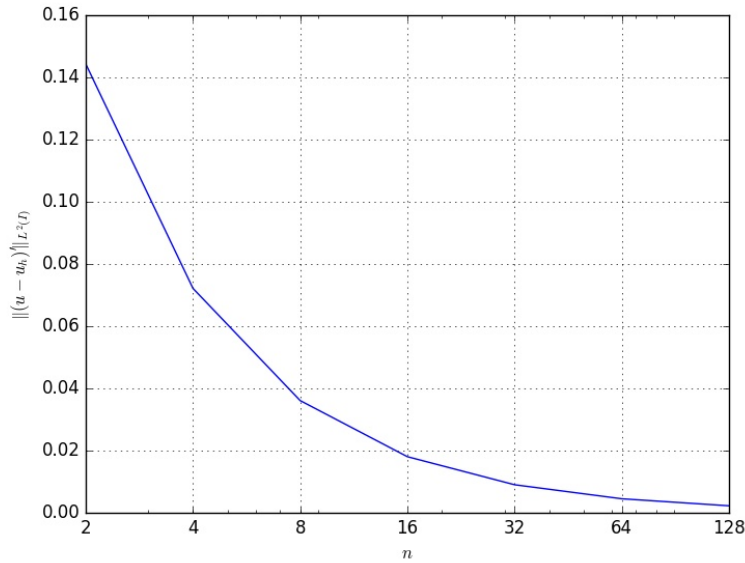


Figura 1.8: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
```

```
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

def solver(n):
    # malha
    mesh = IntervalMesh(n,0,1)

    # espaco
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

    #MEF problem
    u = TrialFunction(V)
    v = TestFunction(V)
    f = Constant(1.0)
    a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
    L = f*v*dx

    #computa a sol
    u = Function(V)
    solve(a == L, u, bc)

    return u, mesh

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]/2',
                degree=2)

lerrors=[]
for n in [2,4,8,16,32,64,128]:
    u, mesh = solver(n)
    e = errornorm(u,ua,norm_type='H10',mesh=mesh)
```

```

lerrors.append(e)

plt.plot([2,4,8,16,32,64,128],lerrors)
plt.xscale('log',base=2)
#plt.yscale('log',base=2)
plt.xlabel(r"$n$")
plt.ylabel(r"$|\!|\!|(u-u_h)|\!|\!|_{L^2(I)}$")
plt.xlim((2,128))
plt.xticks([2,4,8,16,32,64,128],[2,4,8,16,32,64,128])
plt.grid('on')
plt.show()

```

1.2.4 Estimativa *a posteriori*

Aqui, vamos obter uma estimativa *a posteriori* para o erro $e = u - u_h$ da solução de elementos finitos u_h do problema (??)-(??).

Teorema 1.2.4. *A solução de elementos finitos u_h satisfaz*

$$\|(u - u_h)'\|_{L^2(I)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \eta_i^2(u_h), \quad (1.91)$$

onde $\eta_i(u_h)$ é chamado de elemento residual e é dado por

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}. \quad (1.92)$$

Demonstração. Tomando $e = u - u_h$ e usando a ortogonalidade de Galerkin (Teorema ??) temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \int_I e'(e - \pi e)' dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} e'(e - \pi e)' dx. \quad (1.93)$$

Então, aplicando integração por partes

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (-e'')(e - \pi e) dx + [e'(e - \pi e)]_{x_{i-1}}^{x_i}. \quad (1.94)$$

Daí, observando que $e - \pi e = 0$ nos extremos dos intervalos I_i e que $-e'' = -(u - u_h)'' = -u'' + u_h'' = f + u_h''$, temos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (f + u_h'')(e - \pi e) dx. \quad (1.95)$$

Agora, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão de interpolação (??), obtemos

$$\|e'\|_{L^2(I)}^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e - \pi e\|_{L^2(I_i)} dx \quad (1.96)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n h_i \|f + u_h\|_{L^2(I_i)} \|e'\|_{L^2(I_i)} \quad (1.97)$$

$$\leq C \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e'\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.98)$$

$$= C \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \|f + u_h\|_{L^2(I_i)}^2 \right)^{1/2} \|e'\|_{L^2(I)}, \quad (1.99)$$

donde segue o resultado desejado. \square

Observação 1.2.2. No caso da solução de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes, temos $u_h'' = 0$. Logo, o elemento residual se resume em $\eta_i(u_h) = h_i \|f\|_{L^2(I_i)}$.

Exercícios

E 1.2.1. Obtenha uma aproximação por elementos finitos lineares por partes da solução de

$$-u'' + u = 2 \sin x, \quad \forall x \in (-\pi, \pi), \quad (1.100)$$

$$u(-\pi) = u(\pi) = 0. \quad (1.101)$$

1.3 Condições de contorno

Nesta seção, vamos discutir sobre soluções de elementos finitos para a equações diferencial

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.102)$$

com diferentes condições de contorno.

1.3.1 Condições de Dirichlet

Consideremos o seguinte problema com condições de contorno de Dirichlet⁴: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.103)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L, \quad (1.104)$$

com u_0 , u_L e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V_0 = H_0^1(I) := \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$ e multiplicando-a em (??), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.105)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.106)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0, v(L) = u_L\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.107)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.108)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx. \quad (1.109)$$

Exemplo 1.3.1. Consideremos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.110)$$

$$u(0) = 1/2, \quad u(1) = 1. \quad (1.111)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x + 1/2$.

⁴Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).

Para obtermos uma aproximação de elementos finitos, consideramos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.112)$$

para todo $v \in V_0 = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$, onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx, \quad L(v) = \int_I f v dx. \quad (1.113)$$

Então, o problema de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h \in V_h = \{v \in P_1(I); v(0) = 1/2, v(1) = 1\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad (1.114)$$

para todo $v_h \in V_{h,0} = \{v \in H^1(I); v(0) = v(1) = 0\}$.

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h , esta construída no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

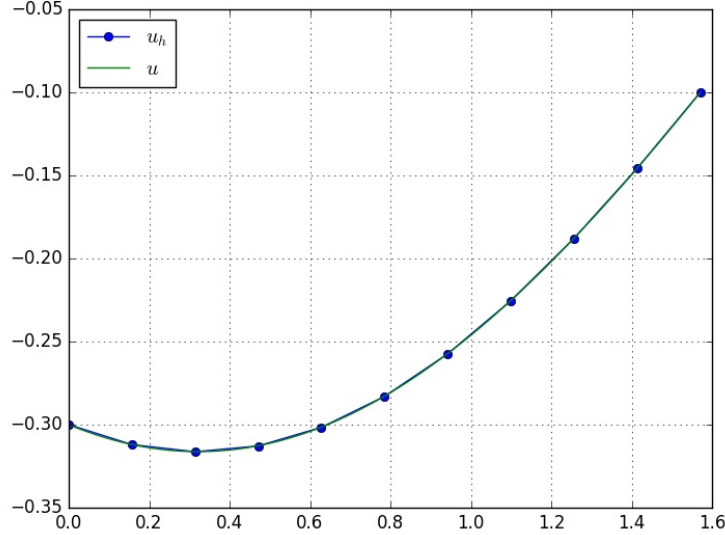


Figura 1.9: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(5,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

u_D = Expression('x[0]<0.5 ? 0.5 : 1',degree=1)

def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,u_D,boundary)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(1.0)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0]+0.5',
                degree=2)

#erro L2
print("Erro L2: %1.2E\n" % errornorm(u,ua,norm_type="L2"))
```

```

plot(u,mesh=mesh,marker='o',label=r"$u_h$")
mesh = IntervalMesh(100,0,1)
plot(ua,mesh=mesh,label=r"$u$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.show()

```

1.3.2 Condições de Neumann

Consideremos o seguinte problema com condições de contorno de Neumann⁵ homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.115)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = 0, \quad (1.116)$$

com u_0 e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (??), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.117)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{u'(L)=0} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{v(0)=0} = \int_I f v \, dx. \quad (1.118)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.119)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.120)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx. \quad (1.121)$$

⁵Carl Gottfried Neumann, 1832 - 1925, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).

Exemplo 1.3.2. Consideremos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0,1], \quad (1.122)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (1.123)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + x$.

Podemos construir uma aproximação por elementos finitos do seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad (1.124)$$

para todo $v \in V$, com as formas bilinear $a(\cdot, \cdot)$ e linear $L(\cdot)$ dadas em (??) e (??).

Então, considerando elementos lineares por partes, temos o seguinte problema de elementos finitos: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.125)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h , esta construída no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(5,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

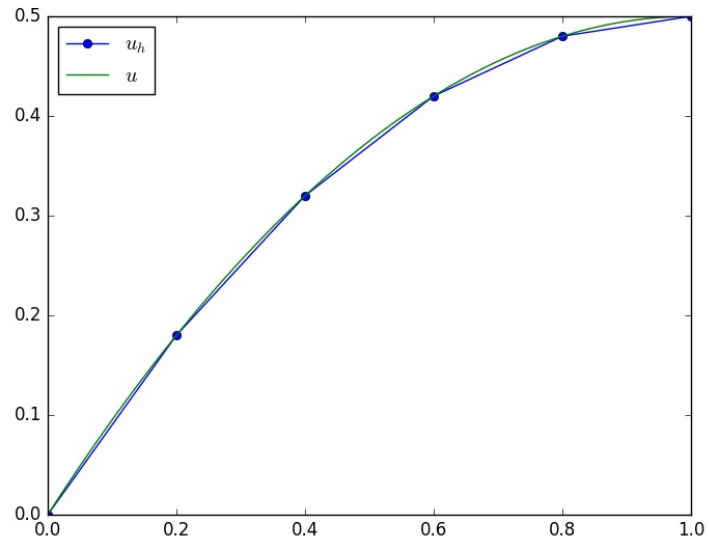


Figura 1.10: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

```

u_D = Constant(0.0)

def boundary(x,on_boundary):
    return near(x[0],0,tol)

bc = DirichletBC(V,u_D,boundary)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(1.0)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

```

```
#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+x[0] ',
                degree=2)

#erro L2
print("Erro L2: %1.2E\n" % errornorm(u,ua,norm_type="L2"))

plot(u,mesh=mesh,marker='o',label=r"$u_h$")
mesh = IntervalMesh(100,0,1)
plot(ua,mesh=mesh,label=r"$u$")
plt.legend(numpoints=1,loc='upper left')
plt.show()
```

Agora, consideremos o seguinte problema com condições de Neumann não-homogênea em $x = L$: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.126)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(L) = \alpha, \quad (1.127)$$

com u_0 , α e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V := \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ e multiplicando-a em (??), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.128)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \alpha v(L) = \int_I f v \, dx. \quad (1.129)$$

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in \tilde{V} := \{v \in H^1(I); v(0) = u_0\}$ tal que

$$a(u, v) - b(v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.130)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' \, dx \quad (1.131)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v \, dx + \alpha v(L). \quad (1.132)$$

Exemplo 1.3.3. Consideremos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0,1], \quad (1.133)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 1. \quad (1.134)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 2x$.

Agora, consideramos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in V = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.135)$$

com

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx \quad (1.136)$$

e

$$L(v) = \int_I f v dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.137)$$

Então, consideramos o seguinte problema de elementos finitos associado: encontrar $u_h \in V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = 0\}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.138)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h , esta construída no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(5,0,1)
```

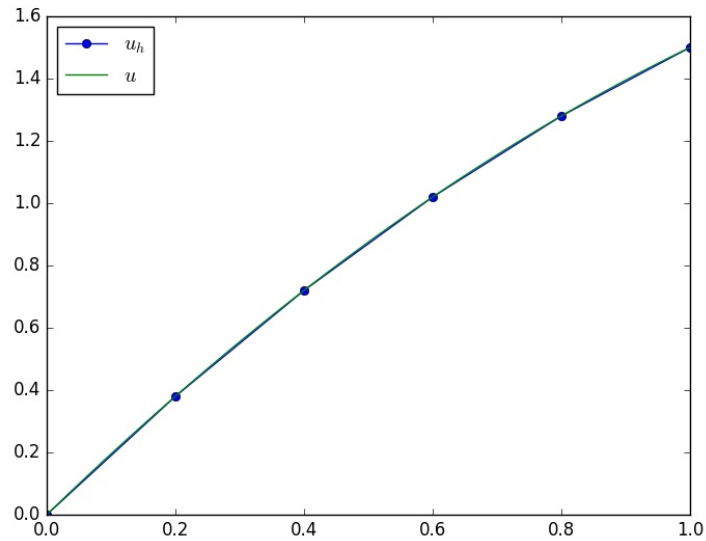


Figura 1.11: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

```
# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

u_D = Constant(0.0)

def boundary_D(x,on_boundary):
    return near(x[0],0,tol)

bc = DirichletBC(V,u_D,boundary_D)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(1.0)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx + 1*v*ds
```

```

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+2*x[0]',
                 degree=2)

#erro L2
print("Erro L2: %1.2E\n" % errornorm(u,ua,norm_type="L2"))

plot(u,mesh=mesh,marker='o',label=r"$u_h$")
mesh = IntervalMesh(100,0,1)
plot(ua,mesh=mesh,label=r"$u$")
plt.legend(numpoints=1,loc='upper left')
plt.show()

```

1.3.3 Condições de Robin

Consideremos o seguinte problema com condições de contorno de Robin⁶: encontrar u tal que

$$-u'' = f, \quad \forall x \in I = [0, L], \quad (1.139)$$

$$u'(0) = r_0(u(0) - s_0), \quad -u'(L) = r_L(u(L) - s_L), \quad (1.140)$$

com r_0, r_L, s_0, s_L e f dados.

Tomando uma função teste $v \in V = H^1(I)$ e multiplicando-a em (??), obtemos

$$-\int_I u'' v \, dx = \int_I f v \, dx. \quad (1.141)$$

Aplicando a integração por partes, temos

$$\int_I u' v' \, dx - \underbrace{u'(L)v(L)}_{-u'(L)=r_L(u(L)-s_L)} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{u'(0)=r_0(u(0)-s_0)} = \int_I f v \, dx. \quad (1.142)$$

ou, mais adequadamente,

$$\int_I u' v' \, dx + r_L u(L)v(L) + r_0 u(0)v(0) = \int_I f v \, dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.143)$$

⁶Victor Gustave Robin, 1855 - 1897, matemático francês. Fonte: [Wikipedia](#).

Desta forma, definimos o seguinte problema fraco associado: encontrar $u \in H^1(I)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.144)$$

onde $a(u, v)$ é a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx + r_L u(L) v(L) + r_0 u(0) v(0) \quad (1.145)$$

e $L(v)$ é a forma linear

$$L(v) = \int_I f v dx + r_L s_L v(L) + r_0 s_0 v(0). \quad (1.146)$$

Exemplo 1.3.4. Consideremos o problema

$$-u'' = 1, \quad x \in I = [0, 1], \quad (1.147)$$

$$u'(0) = u(0), \quad -u'(1) = u(1) - 1. \quad (1.148)$$

Sua solução analítica é $u(x) = -x^2/2 + 5x/6 + 5/6$.

Aqui, tomamos o seguinte problema fraco: encontrar $u \in V = H^1(I)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.149)$$

onde

$$a(u, v) = \int_I u' v' dx + u(1) v(1) + u(0) v(0) \quad (1.150)$$

e

$$L(v) = \int_I f v dx + 1 \cdot v(1). \quad (1.151)$$

Então, uma aproximação por elementos finitos lineares por partes pode ser obtida resolvendo o seguinte problema: encontrar $u_h \in V_h = P_1(I)$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.152)$$

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos da solução analítica u e da sua aproximação de elementos finitos u_h , esta construída no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

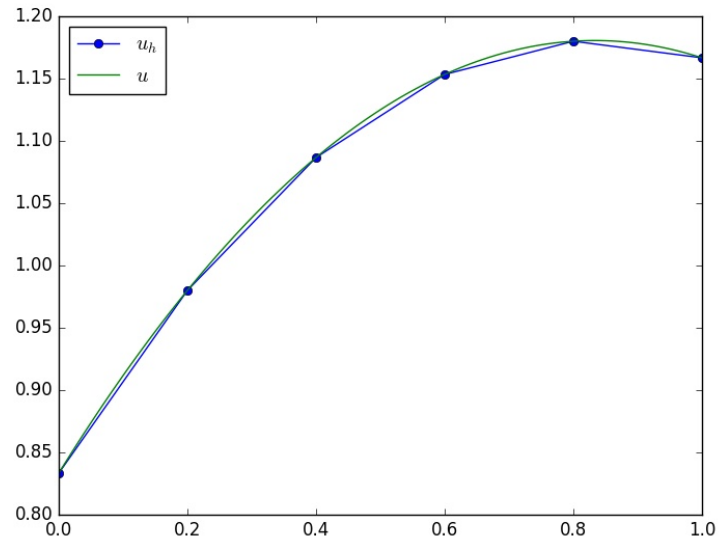


Figura 1.12: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(5,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

#marcadores de fronteiras
boundary_markers = FacetFunction('size_t', mesh)

class BoundaryX0(SubDomain):
```



```

    def inside(self, x, on_boundary):
        return on_boundary and near(x[0], 0, tol)
bx0 = BoundaryX0()
bx0.mark(boundary_markers, 0)

class BoundaryX1(SubDomain):
    def inside(self, x, on_boundary):
        return on_boundary and near(x[0], 1, tol)
bx1 = BoundaryX1()
bx1.mark(boundary_markers, 1)

ds = Measure('ds', domain=mesh, \
             subdomain_data=boundary_markers)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f = Constant(1.0)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx + u*v*ds(1) + u*v*ds(0)
L = f*v*dx + 1*v*ds(1)

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u)

#sol analitica
ua = Expression('-x[0]*x[0]/2+5*x[0]/6+5./6',
               degree=2)

#erro L2
print("Erro L2: %1.2E\n" % errornorm(u,ua,norm_type="L2"))

plot(u,mesh=mesh,marker='o',label=r"$u_h$")
mesh = IntervalMesh(100,0,1)
plot(ua,mesh=mesh,label=r"$u$")
plt.legend(numpoints=1,loc='upper left')
plt.show()

```

Exercícios

E 1.3.1. Considere o problema

$$-u'' + u' + 2u = -\cos(x), \quad x \in (0, \pi/2), \quad (1.153)$$

$$u(0) = -0,3, \quad u(\pi/2) = -0,1. \quad (1.154)$$

Obtenha uma aproximação por elementos finitos para a solução deste problema, empregando o espaço de elementos finitos linear sobre uma malha uniforme com 10 células. Então, compare a aproximação computada com sua solução analítica $u(x) = 0,1(\sin(x) + 3\cos(x))$, bem como, compute o erro $\|u - u_h\|_{L^2}$.

1.4 Malhas auto-adaptativas

Retornemos ao problema modelo (??)-(??)

$$-u'' = f, \quad x \in I = [0, L], \quad (1.155)$$

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (1.156)$$

A estimativa *a posteriori* dada no Teorema ??, indica que os elementos residuais $\eta_i(u_h)$ podem ser utilizados para estimarmos a precisão da aproximação por elementos finitos. Ou seja, espera-se que quanto menores forem os elementos residuais, mais precisa é a solução por elementos finitos. Além disso, como

$$\eta_i(u_h) = h_i \|f - u_h''\|_{L^2(I_i)}, \quad (1.157)$$

podemos reduzir $\eta_i(u_h)$ diminuindo o tamanho da célula I_i .

Do observado acima, motiva-se o seguinte algoritmo de elementos finitos com refinamento automático de malha:

1. Escolhemos uma malha inicial.
2. Iteramos:
 2. Resolvemos o problema de elementos finitos na malha corrente.
 2. Computamos $\eta_i(u_h)$ em cada célula da malha corrente.
 2. Com base na malha corrente, Construimos uma nova malha pelo refinamento das células com os maiores valores de $\eta_i(u_h)$.

2. Verificamos o critério de parada.

Uma estratégia clássica para a escolha das células a serem refinadas é a seguinte: refina-se a i -ésima célula se

$$\eta_i(u_h) > \alpha \max_{j=1,2,\dots,n} \eta_j(u_h), \quad (1.158)$$

onde escolhemos $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1.4.1. Consideremos o problema

$$-u'' = e^{-100|x-\frac{1}{2}|}, \quad x \in I = [0,1], \quad (1.159)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1.160)$$

Aqui, computamos aproximações de elementos finitos no espaço das funções lineares por partes $V_{h,0} = \{v \in P_1(I); v(0) = v(1) = 0\}$ com sucessivos refinamentos de malha. Utilizamos uma malha inicial uniforme com 10 células e fazemos, então, 5 refinamentos sucessivos utilizando como critério de refinamento a estratégia (??) com $\alpha = 0,5$. A Figura ?? apresenta o esboço do gráfico da solução de elementos finitos na malha mais refinada. Além disso, na Tabela ?? temos os o número de células e o $\eta_i(u_h)$ máximo respectivo.

#malha	#células	$\max_i \eta_i(u_h)$
0	10	5.0E-03
1	12	2.0E-03
2	14	8.6E-04
3	22	2.9E-04
4	30	1.4E-04
5	38	6.1E-05

Tabela 1.1: Resultados referente ao Exemplo ??.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

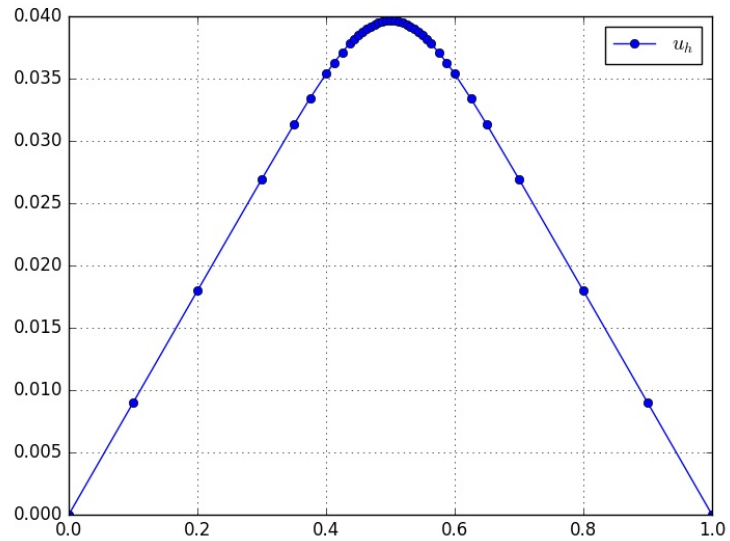


Figura 1.13: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

```
# malha
mesh = IntervalMesh(10,0,1)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# fonte
f = Expression('exp(-100*pow(fabs(x[0]-0.5),2))',degree=1)

# condicoes de contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

#iteracoes
for iter in np.arange(6):

    #problema
    bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)
```

```
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = u.dx(0)*v.dx(0)*dx
L = f*v*dx

#resolve
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#grafico
plt.close('all')
xx = mesh.coordinates()[ :,0]
sorted_indices = np.argsort(xx)
yy = u.compute_vertex_values()
plt.plot(xx[sorted_indices],yy[sorted_indices],
          marker="o",label=r"$u_h$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()

DG = FunctionSpace(mesh, "DG", 0)
v = TestFunction(DG)
a = CellVolume(mesh)
eta = assemble(f**2*v*a*dx)

# refinamento da malha
cell_markers = MeshFunction("bool", mesh, mesh.topology().dim(), False)
eta_max = np.amax(eta[:])
print(eta_max)
print("%d %d %1.1E\n" % (iter,mesh.num_cells(),eta_max))
alpha = 0.5
for i,cell in enumerate(cells(mesh)):
    if (eta[i] > alpha*eta_max):
        cell_markers[cell] = True

mesh = refine(mesh, cell_markers)
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

Exercícios

E 1.4.1. Use uma estratégia de sucessivos refinamentos globais para resolver o problema dado no Exemplo ???. Compare seus resultados com aqueles obtidos no exemplo.

1.5 Seleção de aplicações

1.5.1 Sistemas de equações

Consideremos o seguinte problema de equações diferenciais ordinárias com valores de contorno

$$-u_0'' + u_1 = f_0, \forall x \in (0, L) \quad (1.161)$$

$$-u_1'' + u_0 = f_1, \forall x \in (0, L) \quad (1.162)$$

$$u_0(0) = u_{00}, \quad u_0(L) = u_{0L}, \quad (1.163)$$

$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = u_{1L}, \quad (1.164)$$

onde $f_0, f_1, u_{00}, u_{0L}, u_{10}, u_{1L}$ são dados.

Para construirmos uma aproximação por elementos finitos podemos tomar o seguinte problema fraco associado: encontrar $u = (u_0, u_1) \in V_0 \times V_1$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v = (v_0, v_1) \in V \times V, \quad (1.165)$$

onde $V_0 = \{v \in H^1(I); v_0(0) = u_{00}, v_0(L) = u_{0L}\}$, $V_1 = \{v_1 \in H^1(I); v_1(0) = u_{10}, v_1(L) = u_{1L}\}$, $V = \{v \in H^1(I); v(0) = v(L) = 0\}$, a forma bilinear é

$$a(u, v) = \int_I u_0' v_0' dx + \int_I u_1' v_1' dx + \int_I u_0 v_0 dx + \int_I u_1 v_1 dx \quad (1.166)$$

e a forma linear é

$$L(v) = \int_I f_0 v_0 dx + \int_I f_1 v_1 dx. \quad (1.167)$$

Então, o problema de elemento finitos associado no espaço das funções lineares por partes lê-se: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.168)$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = u_{00}, v_{h0}(L) = u_{0L}\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = u_{10}, v_{h1}(L) = u_{1L}\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$.

Exemplo 1.5.1. Consideremos o seguinte problema de valor de contorno

$$-u_0'' + u_1 = \sin(x) + \cos(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.169)$$

$$-u_1'' + u_0 = \cos(x) - \sin(x), \forall x \in (-\pi, \pi) \quad (1.170)$$

$$u_0(-\pi) = 0, \quad u_0(\pi) = 0, \quad (1.171)$$

$$u_1(-\pi) = -1, \quad u_1(\pi) = -1. \quad (1.172)$$

Considerando elementos lineares por partes, temos a seguinte formulação de elementos finitos: encontrar $u_h = (u_{h0}, u_{h1}) \in V_{h0} \times V_{h1}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{h0}, v_{h1}) \in V_h \times V_h, \quad (1.173)$$

onde $V_{h0} = \{v_h \in P_1(I); v_{h0}(0) = v_{h0}(L) = 0\}$, $V_{h1} = \{v_{h1} \in P_1(I); v_{h1}(0) = v_{h1}(L) = -1\}$, $V_h = \{v_h \in P_1(I); v_h(0) = v_h(L) = 0\}$, com as formas bilinear e linear são dadas em (??) e (??), respectivamente.

A Figura ?? apresenta o esboço dos gráficos das soluções analíticas $u_0(x) = \sin(x)$ e $u_1(x) = \cos(x)$ e de suas aproximações de elementos finitos u_{h0} e u_{h1} , estas construídas no espaço dos polinômios lineares por partes sobre uma malha uniforme de 5 células.

Com o [FEniCS](#), a computação do problema de elementos finitos pode ser feita com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#tolerance
tol=1e-14

# malha
mesh = IntervalMesh(10,-pi,pi)

# espaco
P1 = FiniteElement('P',interval,1)
element = MixedElement([P1,P1])
V = FunctionSpace(mesh, element)
```

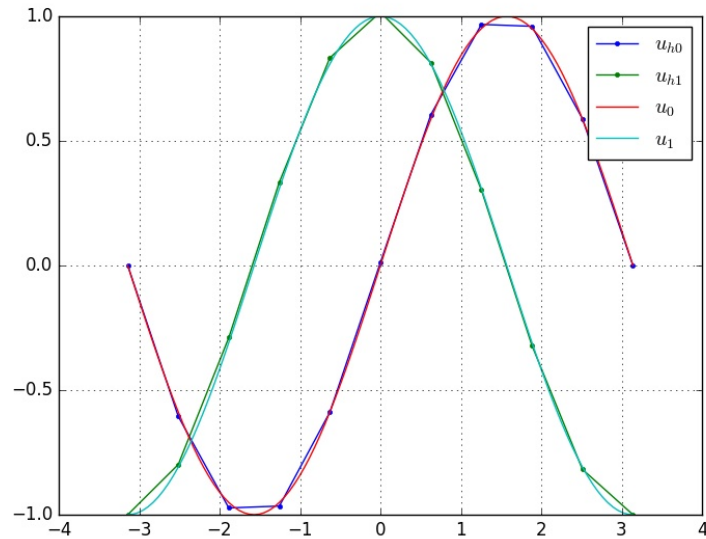


Figura 1.14: Esboço dos gráficos das soluções referentes ao Exemplo ??.

```
#C.C.
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = [DirichletBC(V.sub(0),Constant(0.0),boundary),
      DirichletBC(V.sub(1),Constant(-1.0),boundary)]
print(bc)

#MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
f0 = Expression('sin(x[0]) + cos(x[0])',
                degree=10)
f1 = Expression('cos(x[0]) - sin(x[0])',
                degree=10)
a = u[0].dx(0)*v[0].dx(0)*dx
a += u[1]*v[0]*dx
a += u[1].dx(0)*v[1].dx(0)*dx
```



```
a -= u[0]*v[1]*dx
L  = f0*v[0]*dx
L += f1*v[1]*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

#sol analitica
u0a = Expression('sin(x[0])',
                  degree=10)
u1a = Expression('cos(x[0])',
                  degree=10)

plot(u[0],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h0}$")
plot(u[1],mesh=mesh,marker='.',label=r"$u_{h1}$")
mesh = IntervalMesh(100,-pi,pi)
plot(u0a,mesh=mesh,label=r"$u_0$")
plot(u1a,mesh=mesh,label=r"$u_1$")
plt.legend(numpoints=1)
plt.grid('on')
plt.show()
```

Exercícios

Em construção ...

Capítulo 2

Método de elementos finitos em 2D

2.1 Malha e espaço

2.1.1 Malha

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e poligonal. Uma malha (ou triangularização) \mathcal{K} de Ω é um conjunto de $\{K\}$ células (ou elementos) K , tal que $\Omega = \cup_{K \in \mathcal{K}} K$ e tal que a interseção de duas células é ou um lado, um canto ou vazio.

Classicamente as células K são escolhidas como triângulos. O comprimento do maior lado do triângulo K define o chamado **tamanho local da malha** h_K . O tamanho global da malha é definida por $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$.

Uma malha é dita **regular** quando existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $c_K > c_0$ para todo $K \in \mathcal{K}$, sendo $c_K := h_K/d_K$ e d_K o diâmetro do círculo inscrito em K . Esta condição significa que os triângulo K da malha não podem ter ângulos muito grandes nem muito pequenos. Ao longo do texto, a menos que especificado o contrário, assumiremos trabalhar com malhas regulares.

2.1.2 Espaço dos polinômios lineares por partes

Seja K um triângulo e seja $P_1(K)$ o espaço das funções lineares em K , i.e.

$$P_1(K) = \{v; v = c_0 + c_1x_0 + c_2x_1, (x_0, x_1) \in K, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (2.1)$$

Observemos que toda função $v \in P_1(K)$ é unicamente determinada por seus valores nodais $\alpha_i = v(N_i)$, $i = 0, 1, 2$, onde $N_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)})$ é o i -ésimo nodo (vértice) do triângulo K . Isto segue do fato de que

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^{(0)} & x_1^{(0)} \\ 1 & x_0^{(1)} & x_1^{(1)} \\ 1 & x_0^{(2)} & x_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Computando o valor absoluto do determinante da matriz de coeficientes, obtemos $2|K|$, onde $|K|$ denota a área de K , a qual é não nula.

Afim de usarmos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), nós introduzimos a seguinte base nodal $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ com

$$\lambda_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (2.3)$$

Com esta base, toda função $v \in P_1(K)$ pode ser escrita como

$$v = \alpha_0\lambda_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2, \quad (2.4)$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$.

2.1.3 Espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

O espaço contínuo dos polinômios lineares por partes na malha \mathcal{K} é definido por

$$V_h = \{v; v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{K}\}. \quad (2.5)$$

Observemos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais $\{v(N_j)\}_{j=0}^{n_p-1}$, onde n_p é número de nodos da malha \mathcal{K} . De fato, os valores nodais determinam uma única função em $P_1(K)$ para cada $K \in \mathcal{K}$

e, portanto, uma função em V_h é unicamente determinada por seus valores nos nodos. Agora, consideremos dois triângulos K_1 e K_2 compartilhando um lado $E = K_1 \cap K_2$. Sejam v_1 e v_2 os dois únicos polinômios em $v_1 \in P_1(K_1)$ e $v_2 \in P_2(K_2)$, respectivamente determinados pelos valores nodais em K_1 e K_2 . Como v_1 e v_2 também são polinômios lineares em E e seus valores coincidem nos nodos de E , temos $v_1 = v_2$. Portanto, concluímos que toda função $v \in V_h$ é unicamente determinada por seus valores nodais.

Afim de termos os valores nodais como graus de liberdade (incógnitas), definimos a base nodal $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p} \subset V_h$ tal que

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n_p - 1. \quad (2.6)$$

Notemos que cada função base φ_j é contínua, linear por partes e com suporte somente em um pequeno conjunto de triângulos que compartilham o nodo N_j . Além disso, toda a função $v \in V_h$ pode, então, ser escrita como

$$v = \sum_{i=0}^{n_p-1} \alpha_i \varphi_i, \quad (2.7)$$

onde $\alpha_i = v(N_i)$, $i = 0, 1, \dots, n_p$, são os valores nodais de v .

Exemplo 2.1.1. A Figura ?? mostra o esboço de uma malha triangular no domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Com o [FEniCS](#), podemos gerar esta malha com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 5
Ny = 5
mesh = UnitSquareMesh(Nx, Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

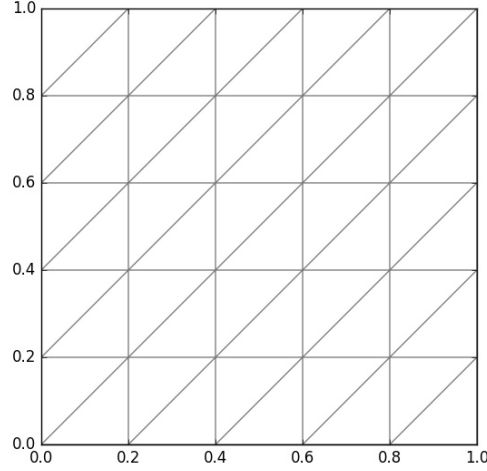


Figura 2.1: Esboço de uma malha triangular no domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

```
# esboço da malha
plot(V.mesh())
plt.show()
```

2.2 Interpolação e projeção

2.2.1 Interpolação

Dada uma função contínua f em um triângulo K com nodos N_i , $i = 0, 1, 2$, sua interpolação linear $\pi f \in P_1(K)$ é definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^3 f(N_i) \varphi_i. \quad (2.8)$$

Logo, temos $\pi f(N_i) = f(N_i)$ para todo $i = 0, 1, 2$.

Afim de determinarmos estimativas para o erro de interpolação, precisamos da chamada derivada total de primeira ordem

$$Df = \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.9)$$

e da derivada total de segunda ordem

$$D^2 f = \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Proposição 2.2.1. (Erro da interpolação no espaço linear) A interpolação πf satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}, \quad (2.11)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(K)} \leq Ch_K \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.12)$$

Demonstração. Veja [?, Capítulo 4]. □

Observação 2.2.1. A constante C depende do inverso de $\sin(\theta_K)$ onde θ_K é o menor ângulo de K . Desta forma, para um triângulo com θ_K muito pequeno, as estimativas (??) e (??) perdem sentido. Este fato indica a necessidade de se trabalhar com malhas regulares.

A interpolação no espaço V_h de uma dada função f no domínio Ω é denotada também por $\pi f \in V_h$ e definida por

$$\pi f = \sum_{i=0}^{n_p-1} f(N_i) \varphi_i. \quad (2.13)$$

Proposição 2.2.2. (Erro da interpolação no espaço contínuo linear por partes) O interpolador $\pi f \in V_h$ satisfaz as seguintes estimativas

$$\|f - \pi f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2, \quad (2.14)$$

$$\|D(f - \pi f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.15)$$

Demonstração. Demonstração análoga a Proposição ???. □

Exemplo 2.2.1. Consideremos a função $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ definida no domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$. O seguinte código computa a interpolação de f no espaço V_h sobre uma malha triangular uniforme.

```

from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 5
Ny = 5
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# funcao
f = Expression('sin(pi*x[0])*cos(pi*x[1])',degree=3)

# interpolacao
pif = interpolate(f,V)

# exportando em vtk
vtkfile = File('pif.pvd')
vtkfile << pif

```

2.2.2 Projeção L^2

A projeção L^2 no espaço V_h de uma dada uma função $f \in L^2(\Omega)$ é denotada por $P_h f \in V_h$ e definida por

$$\int_{\Omega} (f - P_h f) v \, dx = 0, \forall v \in V_h. \quad (2.16)$$

Analogamente a projeção em uma dimensão (veja Subseção ??), a projeção

$$P_h f = \sum_{j=0}^{n_p-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.17)$$

onde ξ_j satisfaz o sistema linear

$$M \boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}, \quad (2.18)$$

onde $M = [m_{i,j}]_{i,j=0}^{n_p-1}$ é a matriz de massa com

$$m_{i,j} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \quad (2.19)$$

e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n_p-1})$ é o vetor de carga com

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx. \quad (2.20)$$

Também, vale o resultado análogo da melhor aproximação (veja ??), i.e.

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.21)$$

E, portanto, também temos a estimativa análoga para o erro de projeção (veja ??)

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^4 \|D^2 f\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.22)$$

Tomando o tamanho global da malha, temos

$$\|f - P_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 f\|_{L^2(K)}. \quad (2.23)$$

Exemplo 2.2.2. Consideremos a função $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ definida no domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$. O seguinte código computa a projeção de f no espaço V_h sobre uma malha triangular uniforme.

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# malha
Nx = 5
Ny = 5
mesh = UnitSquareMesh(Nx, Ny)
```

```
# espaço
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```
# funcao
```



```
f = Expression('sin(pi*x[0])*cos(pi*x[1])',degree=3)

# interpolacao
pif = project(f,V)

# exportando em vtk
vtkfile = File('pif.pvd')
vtkfile << pif
```

Exercícios

E 2.2.1. Verifique computacionalmente a Proposição ?? no caso da função $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ interpolada sobre uma malha triangular uniforme sobre o domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

E 2.2.2. Verifique computacionalmente a estimativa (??) no caso da função $f(x_0, x_1) = \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)$ projetada sobre uma malha triangular uniforme sobre o domínio $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

2.3 Problema modelo

Nesta seção, apresentaremos a aplicação do método de elementos finitos para a equação de Poisson¹ com condições de Dirichlet², i.e.: encontrar u tal que

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.24)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.25)$$

onde $\Delta = \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2$ é o operador de Laplace³ e f é uma função dada.

¹Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840, matemático francês. Fonte: [Wikipedia](#).

²Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859, matemático alemão. Fonte: [Wikipedia](#).

³Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749 - 1827, matemático francês. Fonte: [Wikipedia](#).

2.3.1 Formulação variacional

A aplicação do método de elementos finitos é construída sobre a formulação fraca do problema (??)-(??). Para obtermos esta, multiplicamos (??) por uma função teste v em um espaço adequado V_0 e integramos no domínio Ω , i.e.

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.26)$$

Então, usando a fórmula de Green⁴, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla u v \, ds. \quad (2.27)$$

Então, observando critérios de regularidade e a condição de contorno (??), escolhemos

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.28)$$

Lembramos que $H^1(\Omega) = \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$.

Com isso, temos o seguinte problema fraco associado a (??)-(??): encontrar $u \in V_0$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V_0, \quad (2.29)$$

onde $a(u, v)$ é chamada de forma bilinear e definida por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.30)$$

e $L(v)$ é chamada de forma linear e definida por

$$L(v) := \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.31)$$

2.3.2 Formulação de elementos finitos

A formulação de elementos finitos é obtida da formulação fraca (??) pela aproximação do espaço teste V_0 por um espaço de dimensão finita. Tomando uma triangulação $\mathcal{K} \subset \Omega$ e considerando o espaço contínuo dos polinômios lineares por partes

$$V_h := \{v : v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K) \, \forall K \in \mathcal{K}\}, \quad (2.32)$$

⁴George Green, 1793 - 1841, matemático britânico. Fonte: [Wikipedia](#).

assumimos também o subconjunto $V_{h,0} := \{v \in V_h : v|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Com isso, temos o seguinte problema de elementos finitos associado (??): encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.33)$$

Observemos que (??) é equivalente ao problema de encontrar $u_h \in V_{h,0}$ tal que

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad (2.34)$$

com $i = 0, 1, \dots, n_p - 1$, onde $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n_i-1}$ é a base nodal de $V_{h,0}$ e n_i é o número de funções bases (igual ao número de nodos internos da triangulação \mathcal{K}). Ainda, como

$$u_h = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \quad (2.35)$$

temos

$$a(u_h, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j, \varphi_i\right) \quad (2.36)$$

$$= \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i). \quad (2.37)$$

Com isso, o problema de elementos finitos é equivalente a resolver o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad (2.38)$$

para as incógnitas ξ_j , $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$. Ou, equivalentemente, temos sua forma matricial

$$A\xi = b, \quad (2.39)$$

onde $A = [a_{i,j}]_{i,j=0}^{n_i-1}$ é chamada de **matriz de rigidez** com

$$a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad (2.40)$$

e $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n_i-1})$ é o vetor de carga com

$$b_i = L(\varphi_i). \quad (2.41)$$

Exemplo 2.3.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = 100x_0(1 - x_0)x_1(1 - x_1), x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2.42)$$

$$u = 0, x \in \partial\Omega. \quad (2.43)$$

Na Figura ?? temos um esboço da aproximação de elementos finitos obtida em uma malha uniforme com 20×20 nodos. As isolinhas correspondem aos pontos tais que $u = 3 \times 10^{-1}, 2 \times 10^{-1}, 10^{-1}, 5 \times 10^{-2}$.

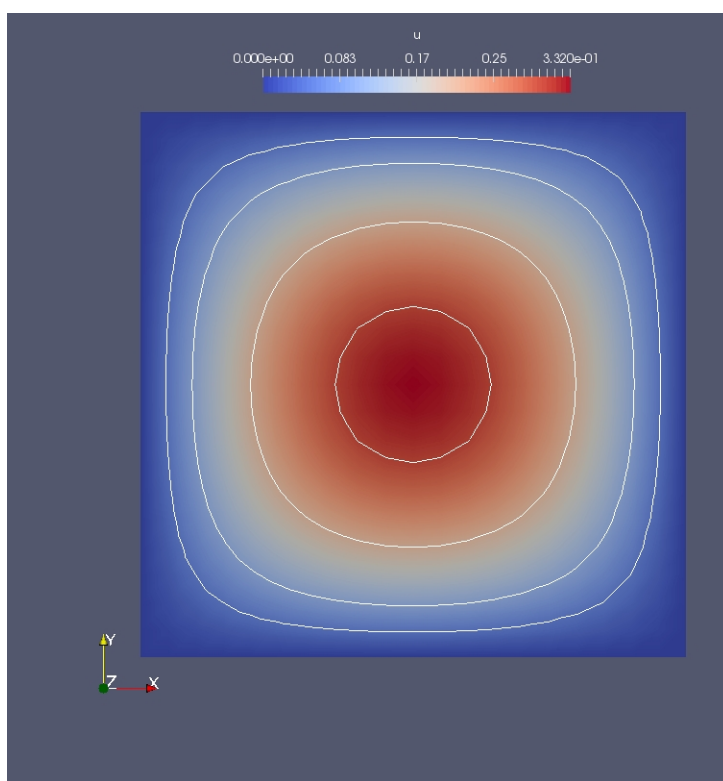


Figura 2.2: Esboço da solução de elementos finitos do problema discutido no Exemplo ??.

Com o [FEniCS](#), podemos computar a solução deste problema com o seguinte código:

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

# malha
Nx = 20
Ny = 20
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('100*x[0]*(1-x[0])*x[1]*(1-x[1])',degree=4)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

Exercícios

E 2.3.1. Compute uma aproximação de elementos finitos para o seguinte

problema

$$-\Delta u = 10, x \in (0, 1) \times (0, 1) \quad (2.44)$$

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (2.45)$$

$$u(1, y) = 0, 0 \leq y < 1, \quad (2.46)$$

$$u(x, 1) = 1, 0 \leq x \leq 1, \quad (2.47)$$

$$u(0, y) = 1, 0 < y \leq 1. \quad (2.48)$$

2.4 Fundamentos da análise de elementos finitos

2.4.1 Existência e unicidade

Teorema 2.4.1. (Matriz positiva definida) A matriz de rigidez é positiva definida.

Demonstração. A matriz de rigidez $A = [a(\varphi_j, \varphi_i)]_{i,j=0}^{n_i-1}$ é obviamente simétrica. Além disso, para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\xi \neq 0$, temos

$$\xi^T A \xi = \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_i \quad (2.49)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n_i-1} \xi_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx \xi_i \quad (2.50)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \cdot \nabla \left(\sum_{i=0}^{n_i-1} \xi_i \varphi_i \right) dx \quad (2.51)$$

$$= \left\| \nabla \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.52)$$

Portanto, $\xi^T A \xi \geq 0$ e é nulo se, e somente se, $v = \sum_{j=0}^{n_i-1} \xi_j \varphi_j$ for constante. Como $v \in V_{h,0}$, temos que v constante implica $v \equiv 0$, mas então $\xi = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\xi^T A \xi > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\xi \neq 0$. \square

Teorema 2.4.2. (Existência e unicidade) O problema de elementos finitos (??) tem solução única.

Demonstração. O problema de elementos finitos (??) se resume a resolver o sistema linear $A\mathbf{\xi} = \mathbf{b}$. Do Teorema ??, temos que A é uma matriz definida positiva e, portanto, invertível. Daí segue, imediatamente, que o problema (??) tem solução única. \square

2.4.2 Estimativa *a priori* do erro

Teorema 2.4.3. (Ortogonalidade de Galerkin) A solução u_h do problema de elementos finitos (??) satisfaz

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.53)$$

onde u é a solução do problema fraco (??).

Demonstração. Segue, imediatamente, do fato de que $V_{h,0} \subset V_0$ e, portanto,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}, \quad (2.54)$$

bem como

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.55)$$

\square

Definição 2.4.1. (Norma da energia.) Definimos a norma da energia por

$$|||v||| := \left(\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \right)^{1/2} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.56)$$

para todo $v \in V_0$.

Teorema 2.4.4. (Melhor aproximação.) A solução u_h do problema de elementos finitos satisfaz

$$|||u - u_h||| \leq |||u - v_h|||, \forall v_h \in V_{h,0}. \quad (2.57)$$

Demonstração. Observando que $u - u_h = u - v_h + v_h - u_h$ e usando a orto-

gonalidade de Galerkin (Teorema ??), temos:

$$\|u - u_h\|^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_h) dx \quad (2.58)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) dx + \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(v_h - u_h) dx \quad (2.59)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - v_h) dx \quad (2.60)$$

$$= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.61)$$

$$= \|u - u_h\|^2 \|u - v_h\|. \quad (2.62)$$

□

Teorema 2.4.5. (Estimativa *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (??) satisfaz

$$\|u - u_h\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.63)$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema da melhor aproximação (Teorema ??) e da estimativa do erro de interpolação (Proposição ??), pois

$$\|u - u_h\|^2 \leq \|u - \pi u\|^2 \quad (2.64)$$

$$= \|D(u - \pi u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.65)$$

$$\leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} h_K^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.66)$$

□

Para obtermos uma estimativa na norma $L^2(\Omega)$, podemos usar a desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.4.6. (Desigualdade de Poincaré.) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_0. \quad (2.67)$$

Demonstração. Se Ω tem contorno suficientemente suave, então existe ϕ tal que $-\Delta\phi = 1$ em Ω com $\sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi| < C$. Com isso, temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx \quad (2.68)$$

$$= - \int_{\Omega} v^2 \Delta\phi dx. \quad (2.69)$$

Agora, usando o Teorema de Green e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_{\partial\Omega} v^2 n \cdot \nabla\phi ds + \int_{\Omega} \nabla v^2 \cdot \nabla\phi dx \quad (2.70)$$

$$= \int_{\Omega} 2v \nabla v \cdot \nabla\phi dx \quad (2.71)$$

$$\leq \sup_{x \in \Omega} |\nabla\phi| \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.72)$$

□

Com a desigualdade de Poincaré e da estimativa *a priori* do erro (Teorema ??), temos

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u - u_h\| \leq Ch \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.73)$$

onde $h = \max_{K \in \mathcal{K}} h_K$. Entretanto, esta estimativa pode ser melhorada.

Teorema 2.4.7. (Estimativa ótima *a priori* do erro.) A solução u_h do problema de elementos finitos (??) satisfaz

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.74)$$

Demonstração. Seja $e = u - u_h$ o erro e ϕ a solução do problema dual (ou problema adjunto)

$$-\Delta\phi = e, \forall x \in \Omega \quad (2.75)$$

$$\phi = 0, \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.76)$$

Então, usando a fórmula de Green, a ortogonalidade de Galerkin e, então, a

desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|e^2\|_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} e \Delta \phi \, dx \quad (2.77)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\partial\Omega} e \, n \cdot \nabla \phi \, ds \quad (2.78)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (\phi - \pi \phi) \, dx \quad (2.79)$$

$$\leq \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla (\phi - \pi \phi)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.80)$$

Da estimativa *a priori* (??) (que segue do Teorema ??) temos

$$\|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.81)$$

Agora, da regularidade elíptica $\|D^2 \phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\Delta \phi\|_{L^2(\Omega)}$ [?] e da estimativa do erro de interpolação (Proposição ??), temos

$$\|\nabla (\phi - \pi \phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|D^2 \phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|\Delta \phi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.82)$$

Então, temos

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} Ch \|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.83)$$

□

Exemplo 2.4.1. Consideremos o seguinte problema de Poisson

$$-\Delta u = -2(x_0^2 - x_0) - 2(x_1^2 - x_1), \, x \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2.84)$$

$$u = 0, \, x \in \partial\Omega. \quad (2.85)$$

A solução analítica deste problema é $u(x) = (x_0^2 - x_0)(x_1^2 - x_1)$. Aqui, obtemos aproximações por elementos finitos u_h usando uma malha triangular uniforme $n \times n$ nodos, i.e. $h = 1/n$. A Tabela ?? mostra os valores dos erros $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ para diferentes valores de h .

Com o [FEniCS](#), podemos computar a solução deste problema e o erro na norma L^2 com o seguinte [código](#):

```
from __future__ import print_function, division
from fenics import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Tabela 2.1: Erros de aproximações por elementos finitos referente ao problema dado no Exemplo ??.

#nodos	h	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$
10×10	$1\text{E}-1$	$9.29\text{E}-4$
20×20	$5\text{E}-2$	$2.34\text{E}-4$
100×100	$1\text{E}-3$	$9.40\text{E}-6$

```

# malha
Nx = 100
Ny = 100
mesh = UnitSquareMesh(Nx,Ny)

# espaco
V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

# cond. contorno
def boundary(x,on_boundary):
    return on_boundary

bc = DirichletBC(V,Constant(0.0),boundary)

# f
f = Expression('-2*(x[1]*x[1]-x[1])-2*(x[0]*x[0]-x[0])',degree=2)

# MEF problem
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = dot(grad(u), grad(v))*dx
L = f*v*dx

#computa a sol
u = Function(V)
solve(a == L, u, bc)

# sol. analitica
ua = Expression('x[0]*(x[0]-1)*x[1]*(x[1]-1)',degree=4)

```

```
# erro norma L2
erro_L2 = errornorm(ua, u, 'L2')
print("||u-u_h||_L2 = %1.2E\n" % erro_L2)

# exportando em vtk
vtkfile = File('u.pvd')
vtkfile << u
```

2.4.3 Estimativa *a posteriori*

Para obtermos uma estimativa *a posteriori* vamos precisar da chamada desigualdade do traço.

Teorema 2.4.8. (Desigualdade do traço) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ convexa e suave. Então, existe uma constante $C = C(\Omega)$, tal que para qualquer $v \in V$ temos

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.86)$$

Demonstração. Veja [?]. □

Teorema 2.4.9. (Estimativa *a posteriori*) A solução u_h do problema de elementos finitos (??) satisfaz

$$|||u - u_h|||^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}} \eta_K^2(u_h), \quad (2.87)$$

onde o elemento residual $\eta_K(u_h)$ é definido por

$$\eta_K(u_h) = h_K \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} h_K^{1/2} \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K \setminus \partial\Omega)}. \quad (2.88)$$

Aqui, $[n \cdot \nabla u_h]_K$ denota o salto na derivada normal de u_h nos lados interiores dos elementos de \mathcal{K} . Além disso, lembremos que $\Delta u_h = 0$.

Demonstração. Denotando $e := u - u_h$ o erro entre a solução do problema forte e a solução de elementos finitos, temos

$$|||e|||^2 = \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.89)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla e \, dx \quad (2.90)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (e - \pi e) \, dx. \quad (2.91)$$

Nesta última equação, temos usado a ortogonalidade de Galerkin (Teorema ??). Daí, temos

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla(e - \pi e) dx = \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K \nabla e \cdot \nabla(e - \pi e) dx \quad (2.92)$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{K}} - \int_K \Delta e(e - \pi e) dx + \int_{\partial K} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds, \quad (2.93)$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e) dx + \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds, \quad (2.94)$$

uma vez que $-\Delta e|_K = f + \Delta u_h|_K$ e, ambos, e e πe se anulam em $\partial \Omega$.

Para computarmos o segundo termo do lado direito da ultima equação, observamos que o erro em lado E recebe contribuições dos dois elementos K^\pm que compartilham E . Com isso, temos

$$\int_{\partial K^+ \cap \partial K^-} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds = \int_E (n^+ \cdot \nabla e^+(e^+ - \pi e^+) + n^- \cdot \nabla e^-(e^- - \pi e^-)) ds, \quad (2.95)$$

onde utilizamos a notação $v^\pm = v|_{K^\pm}$. Lembremos que o erro e é contínuo e, portanto, $(e^+ - \pi e^+)|_E = (e^- - \pi e^-)|_E$. Ainda, ∇u é contínuo, logo $(n^+ \cdot \nabla u^+ + n^- \cdot \nabla u^-)|_E = 0$. Entretanto, $\nabla u_h|_E$ não é geralmente contínuo, sendo apenas constante por partes. Assim sendo e denotando o salto $[n \cdot \nabla u_h] := (n^+ \cdot \nabla u_h^+ + n^- \cdot \nabla u_h^-)$, temos

$$\begin{aligned} \int_E (n^+ \cdot \nabla e^+(e - \pi e) + n^- \cdot \nabla e^-(e - \pi e)) ds \\ = - \int_E [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Com isso, temos

$$\sum_{K \in \mathcal{K}} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} n \cdot \nabla e(e - \pi e) ds = - \sum_{E \in \mathcal{E}_I} \int_E [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds, \quad (2.97)$$

onde \mathcal{E}_I é o conjunto dos lados interiores na triangularização \mathcal{K} . Logo, retornando a (??), obtemos

$$\begin{aligned} |||e|||^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_K (f + \nabla u_h)(e - \pi e) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \omega} [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Nos resta, agora, estimarmos estes dois termos do lado direito.

A estimativa do primeiro, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da estimativa padrão do erro de interpolação, i.e.

$$\int_K (f + \Delta u_h)(e - \pi e) dx \leq \|f + \delta u_h\|_{L^2(\Omega)} \|e - \pi e\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.99)$$

$$\leq \|f + \Delta u_h\|_{L^2(\Omega)} Ch_K \|De\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.100)$$

Para estimarmos as contribuições dos lados, usamos a desigualdade do Traço [?]

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.101)$$

Com esta, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa padrão do erro de interpolação, temos

$$\int_{\partial K \setminus \partial \Omega} [n \cdot \nabla u_h](e - \pi e) ds \leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} \|e - \pi e\|_{L^2(\partial K)} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} C \left(h_K^{-1} \|e - \pi e\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ &\quad \left. + h_K \|D(e - \pi e)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\leq \|[n \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(\partial K)} Ch_K^{1/2} \|De\|_{L^2(K)}. \quad (2.104)$$

Daí, a estimativa segue das (??) e (??). \square

Resposta dos Exercícios

E 1.2.1. [Código](#) FENiCS.

E 1.3.1. [Código](#).

E 1.4.1. [Código](#).