

Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

31 de março de 2020

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica. Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Estudo de retas

Observação 1.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos Python têm o seguinte preambulo:

```
from sympy import *  
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

Um sistema de coordenadas no espaço é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x, y, z) .

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenados) e tem coordenadas $(0, 0, 0)$. Dado um ponto $P = (x, y, z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contêm O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

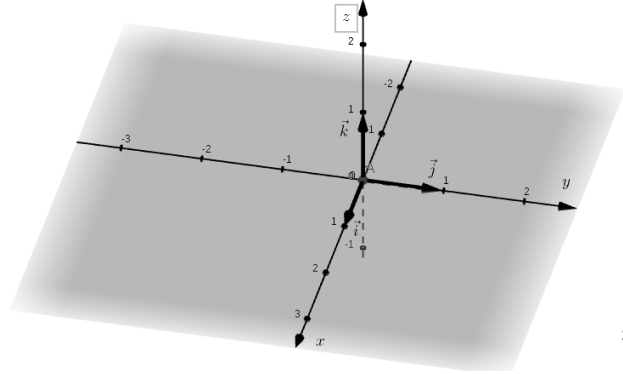


Figura 1.1: Sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado ao contrário, trabalharemos com **sistemas de coordenadas ortogonais**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura ??.

Observação 1.1.1. (Relação entre pontos e vetores) Seja dado um vetor \overrightarrow{AB} . Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, temos que as coordenadas do vetor \overrightarrow{AB} são:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad (1.1)$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad (1.2)$$

$$= -(x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B) \quad (1.3)$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (1.4)$$

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o vetor \overrightarrow{AB} tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \quad (1.5)$$

Observação 1.1.2. (Ponto médio de um segmento) Dados os pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M, y_M, z_M)$ do segmento AB , do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Portanto

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \quad (1.6)$$

donde

$$2x_M = x_A + x_B \quad (1.7)$$

$$2y_M = y_A + y_B \quad (1.8)$$

$$2z_M = z_A + z_B. \quad (1.9)$$

Logo, temos $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1, 1, 2)$ e $B = (3, -1, 0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{1 + (-1)}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (1, 0, 1). \quad (1.10)$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e $C = (x, 2, 2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x .

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de \overrightarrow{AC} são

$$\overrightarrow{AC} = (x - (-1), 2 - 2, 2 - 1) = (x + 1, 0, 1) \quad (1.11)$$

e as coordenadas de \overrightarrow{BC} são

$$\overrightarrow{BC} = (x - 1, 2 - (-2), 2 - 0) = (x - 1, 4, 2). \quad (1.12)$$

Então, temos

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 4^2 + 2^2} \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + 0^2 + 1^2 = (x - 1)^2 + 4^2 + 2^2 \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 16 + 4 \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow 4x = 19 \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow x = \frac{19}{4}. \quad (1.17)$$

◇

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1, 2, 1)$, $B = (1, -2, 0)$ e M o ponto médio do intervalo AB . Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right). \quad (1.18)$$

Agora, denotando $P = (x_P, y_P, z_P)$, temos

$$2AP = AM \Rightarrow 2(x_P - (-1), y_P - 2, z_P - 1) = \left(0 - (-1), 0 - 2, \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow (2x_P + 2, 2y_P - 4, 2z_P - 2) = \left(1, -2, -\frac{1}{2} \right). \quad (1.20)$$

Portanto

$$2x_P + 2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} \quad (1.21)$$

$$2y_P - 4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 \quad (1.22)$$

$$2z_P - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. \quad (1.23)$$

Logo, $P = (-1/2, 1, 3/4)$.

◇

Exercícios

Em construção ...

1.2 Equações da reta

1.2.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, \vec{v} um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura ??). Assim sendo, P é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.24)$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r .

Figura 1.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor \vec{v} escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 1.2.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2, 1, 3)$ (veja a Figura ??). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3, 2, 5) \quad (1.25)$$

é um vetor diretor de r . Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.26)$$

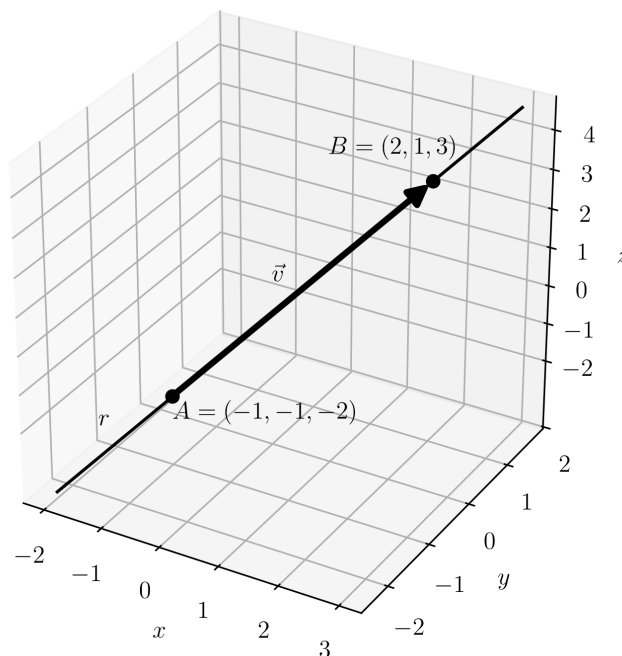


Figura 1.3: Esboço da reta discutida no Exemplo ??.

1.2.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Assim, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \quad (1.27)$$

Equivalentemente,

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(v_1, v_2, v_3). \quad (1.28)$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \quad (1.29)$$

$$y - y_A = \lambda v_2, \quad (1.30)$$

$$z - z_A = \lambda v_3, \quad (1.31)$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \quad (1.32)$$

$$y = y_A + \lambda v_2, \quad (1.33)$$

$$z = z_A + \lambda v_3, \quad (1.34)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r .

Exemplo 1.2.2. A reta r discutida no Exemplo ?? tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (1.35)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (1.36)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (1.37)$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x, y, z) = (-1, -1, -2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x, y, z) = (-1 + 3, -1 + 2, -2 + 5) = (2, 1, 3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B .

Com o **Sympy**, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código¹:

```
var('lbda', real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda, -1+2*lbda, -2+5*lbda, (lbda, -1, 2))
```

¹Veja a Observação ??.

1.2.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \quad (1.38)$$

$$y = y_A + v_2\lambda, \quad (1.39)$$

$$z = z_A + v_3\lambda. \quad (1.40)$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \quad (1.41)$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

Exemplo 1.2.3. No Exemplo ??, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \quad (1.42)$$

$$y = -1 + 2\lambda, \quad (1.43)$$

$$z = -2 + 5\lambda. \quad (1.44)$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{5}. \quad (1.45)$$

1.2.4 Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3, 2, 5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = (x, 0, 1/2)$ seja um ponto de r .

Solução. $P = (x, 0, 1/2)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \quad (1.46)$$

Ou seja,

$$\left(x - (-1), 0 - (-1), \frac{1}{2} - (-2) \right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (1.47)$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x + 1, 1, \frac{5}{2}\right) = \lambda(3, 2, 5). \quad (1.48)$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \quad (1.49)$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x + 1 = \lambda 3 \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{2} \quad (1.50)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \quad (1.51)$$

◇

ER 1.2.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x = 1 - \lambda, \quad (1.52)$$

$$y = \lambda, \quad (1.53)$$

$$z = -3. \quad (1.54)$$

Determine uma equação vetorial de r .

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes de λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r , temos que $A = (1, 0, -3) \in r$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}, \quad (1.55)$$

com $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

◇

ER 1.2.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A = (2, -3, 1)$ e $B = (-1, 1, 0)$, determine o valor de t tal que

$$x = 2 + t\lambda, \quad (1.56)$$

$$y = -2 + 4\lambda, \quad (1.57)$$

$$z = 1 - \lambda, \quad (1.58)$$

sejam equação paramétricas de r .

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r , é necessário que $\vec{v} = (t, 4, -1)$ seja um vetor diretor de r . Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(t, 4, -1) = \beta(-1 - 2, 1 - (-3), 0 - 1) = \beta(-3, 4, -1). \quad (1.59)$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \Rightarrow t = -3. \quad (1.60)$$

◇

ER 1.2.4. Seja r uma reta, cujas equações na forma simétrica são

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \quad (1.61)$$

Determine equações paramétricas desta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \quad (1.62)$$

$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \quad (1.63)$$

$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \quad (1.64)$$

Daí, isolando x , y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \quad (1.65)$$

$$y = 2 + 3\lambda, \quad (1.66)$$

$$z = 1 - 2\lambda. \quad (1.67)$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1, 2, 1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1, 5, -1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura ??.

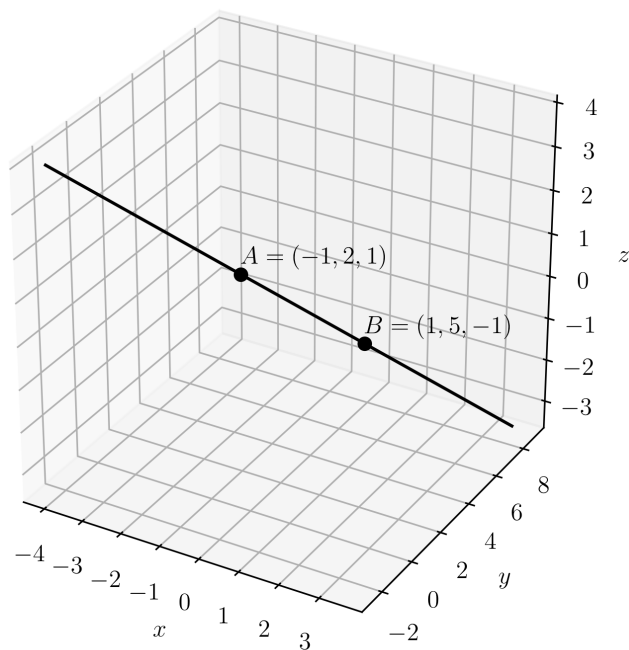


Figura 1.4: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido ??.

◇

Capítulo 2

Estudo de planos

Observação 2.0.1. Neste capítulo, assumimos que os códigos Python têm o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line
```

2.1 Equações do plano

Um plano π fica unicamente determinado por um ponto $A \in \pi$ e dois vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$ ¹.

2.1.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano π determinado pelo ponto A e os vetores \vec{u} e \vec{v} . Então, um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, \overrightarrow{AP} é coplanar a \vec{u} e \vec{v} , i.e. \overrightarrow{AP} , \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes. Ou seja,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

esta última é chamada de **equação vetorial do plano**.

Exemplo 2.1.1. Consideremos o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e pelos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$ (Veja a Figura ??). Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (2.2)$$

¹No sentido que \vec{u} e \vec{v} têm representantes no plano π .

para $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

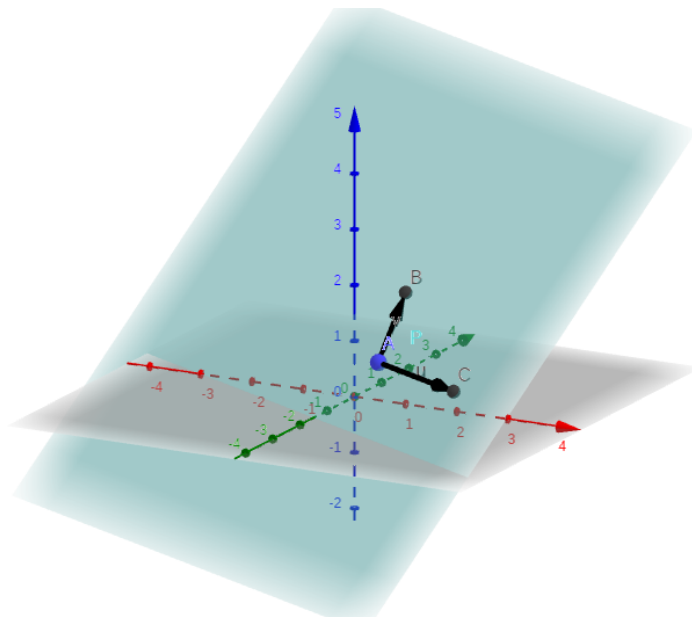


Figura 2.1: Esboço do plano π discutido no Exemplo ??.

Tomando, por exemplo, $\lambda = -1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \quad (2.3)$$

$$= -(2, -1, 0) + (0, 1, 1) \quad (2.4)$$

$$= (-2, 2, 1). \quad (2.5)$$

Observando que as coordenadas do ponto P são iguais às coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} , temos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \quad (2.6)$$

$$= (1, -1, 1) + (-2, 2, 1) \quad (2.7)$$

$$= (-1, 1, 2). \quad (2.8)$$

Ou seja, $P = (-1, 1, 2) \in \pi$.

2.1.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano π com $A = (x_A, y_A, z_A) \in \pi$ e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \pi$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \pi$ linearmente independentes. Então, todo o ponto $P =$

(x,y,z) do plano π satisfaz

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (2.9)$$

para dados parâmetros $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad (2.10)$$

$$= (\lambda u_1 + \beta v_1, \lambda u_2 + \beta v_2, \lambda u_3 + \beta v_3). \quad (2.11)$$

Portanto, temos

$$x - x_A = \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (2.12)$$

$$y - y_A = \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (2.13)$$

$$z - z_A = \lambda u_3 + \beta v_3. \quad (2.14)$$

Ou, equivalentemente,

$$x = x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \quad (2.15)$$

$$y = y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \quad (2.16)$$

$$z = z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \quad (2.17)$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 2.1.2. No Exemplo ??, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Do que vimos acima, temos que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad (2.18)$$

$$y = -1 - \lambda + \beta, \quad (2.19)$$

$$z = 1 + \beta, \quad (2.20)$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o Sympy. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                           (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                           xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

2.1.3 Equação geral do plano

Seja π o plano determinado pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e pelos vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Sabemos que $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, \vec{AP} , \vec{u} e \vec{v} são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto $[\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Logo,

$$0 = [\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (2.21)$$

$$= \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

$$= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A \quad (2.23)$$

$$- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A \quad (2.24)$$

$$+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). \quad (2.25)$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (2.26)$$

com a, b, c, d não todos nulos ou, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Esta última é chamada **equação geral do plano**.

Exemplo 2.1.3. No Exemplo ??, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos $P = (x, y, z)$ e calculamos

$$0 = [\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] \quad (2.27)$$

$$= \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

$$= -x - 2y + 2z - 3. \quad (2.29)$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \quad (2.30)$$

2.1.4 Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Seja π um plano tal que $A = (2, 0, -1) \in \pi$, $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \pi$. Determine uma equação vetorial para π .

Solução. Para obtermos uma equação vetorial do plano π , precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em π . Do enunciado, temos o ponto $A = (2, 0, -1) \in \pi$ e o vetor \vec{u} . Portanto, precisamos encontrar um vetor $\vec{v} \in \pi$ tal que \vec{u} e \vec{v} sejam l.i.. Por sorte, temos $P = (0, 1, -1) \in \pi$ e, portanto $\overrightarrow{AP} \in \pi$. Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \quad (2.31)$$

$$= (-2, 1, 0), \quad (2.32)$$

pois \vec{v} e \vec{u} são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano π é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}, \quad (2.33)$$

$$= \lambda(1, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0), \quad (2.34)$$

com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

◇

ER 2.1.2. Seja π o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \quad (2.35)$$

$$y = \beta, \quad (2.36)$$

$$z = 1 - \lambda + \beta. \quad (2.37)$$

Determine o valor de z_P de forma que $P = (-1, 2, z_P) \in \pi$.

Solução. Para que $P = (-1, 2, z_P)$ pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \quad (2.38)$$

$$2 = \beta, \quad (2.39)$$

$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \quad (2.40)$$

Das duas primeiras equações, obtemos $\lambda = 0$ e $\beta = 2$. Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \quad (2.41)$$

◇

Em construção ...

Capítulo 3

Cônicas

3.1 Elipse

Sejam F_1, F_2 pontos sobre um plano π , c a distância entre c_1 e c_2 e $a > c$. Chama-se **elipse** de **focos** F_1 e F_2 ao conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (3.1)$$

Veja a Figura ??.

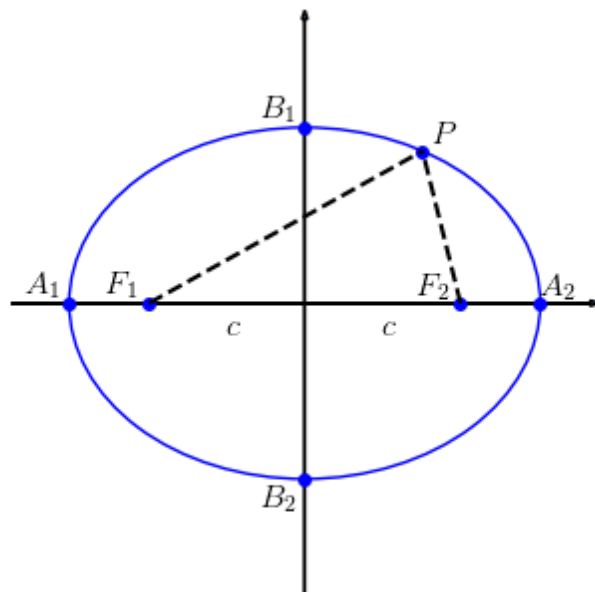


Figura 3.1: Ilustração de uma elipse de focos F_1 e F_2 .

Dada uma tal elipse, identificamos $2c = |F_1F_2|$ como a **distância focal**. Os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento A_1A_2 é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \quad (3.2)$$

O ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado de **centro** da elipse. Sejam B_1 e B_2 os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento A_1A_2 . Assim sendo, o segmento B_1B_2 é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \quad (3.3)$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \quad (3.4)$$

Notemos que $0 \leq e < 1$. Para $e = 0$, temos $c = 0$ e, portanto $F_1 = F_2$. Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em F_1 (ou F_2) e diâmetro $2a$. No que e tende a 1, a elipse tende ao segmento A_1A_2 .

Por fim, notemos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, $|OF_2| = c$, $|F_2B_1| = a$ e $|OB_1| = b$. Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (3.5)$$

3.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c \geq 0$, os focos de uma dada elipse (veja a Figura ??). Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \quad (3.6)$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad (3.7)$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (3.8)$$

temos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad (3.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (3.10)$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2. \quad (3.11)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (3.12)$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \quad (3.13)$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \quad (3.14)$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (3.15)$$

Como $a > c$, dividimos por $a^2 - c^2$ e depois por a^2 para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (3.16)$$

Por fim, da equação (??), temos $a^2 - c^2 = b^2$, o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.17)$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

3.2 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos sobre um plano π e. Sejam, também, c tal que $|F_1F_2| = 2c$ e $a < c$. O lugar geométrico dos pontos P tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \quad (3.18)$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura ??.

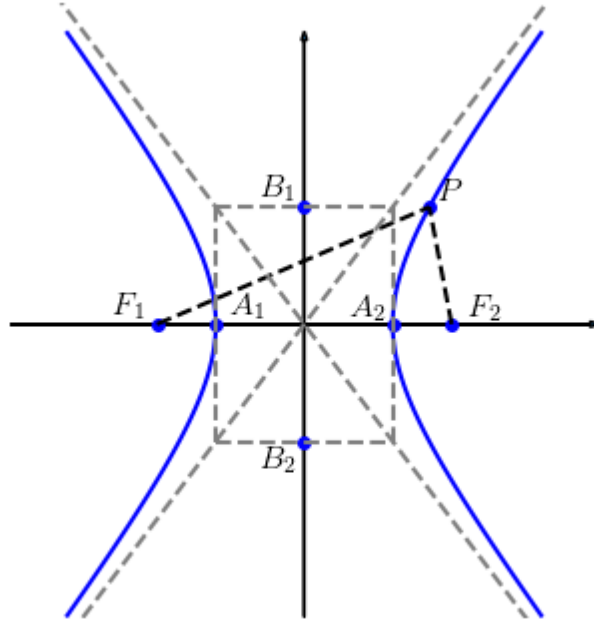


Figura 3.2: Ilustração de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da hipérbole e $2c = |F_1F_2|$ é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos A_1 e A_2 , sendo que o segmento A_1A_2 é chamado de **eixo real** (ou transverso) da hipérbole. O comprimento deste eixo é $|A_1A_2| = 2a$.

Sejam B_1 e B_2 pontos c distantes de A_1 e A_2 e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento B_1B_2 é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando $2b = |B_1B_2|$, temos do triângulo retângulo B_1OA_1 que

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (3.19)$$

3.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da

hipérbole. Desta forma, temos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Então, $P = (x,y)$ é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \quad (3.20)$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (3.22)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad (3.23)$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \quad (3.24)$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (3.25)$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (3.26)$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (3.27)$$

Lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (3.28)$$

Dividindo por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.29)$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Em construção ...

3.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta d e um ponto F não pertencente a d . Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos P do plano que são equidistantes de F e de d , i.e.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (3.30)$$

Veja a Figura ??.

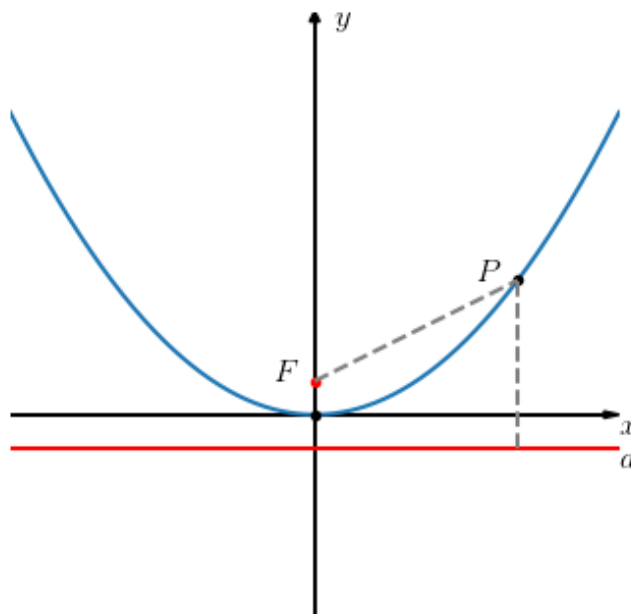


Figura 3.3: Ilustração de uma parábola.

O ponto F é chamado de **foco** da parábola. A reta d é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a d e que passa pelo ponto F é chamada de **eixo** da parábola. O ponto V de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

3.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja p tal que

$$F = (0, p/2). \quad (3.31)$$

Logo, a diretriz tem equação $y = -p/2$. Da definição de parábola, $P = (x, y)$ pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d). \quad (3.32)$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \quad (3.33)$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \quad (3.34)$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \quad (3.35)$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

Observação 3.3.1. Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco $F = (p/2, 0)$, tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \quad (3.36)$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios