

Minicurso de Python para Matemática

Pedro H A Konzen

19 de outubro de 2021

Sumário

1	Sobre a linguagem	2
1.1	Instalação e execução	3
1.1.1	Console online	3
1.2	Utilização	3
2	Elementos da linguagem	4
2.1	Operações aritméticas elementares	6
2.2	Funções e constantes elementares	7
2.3	Operadores de comparação elementares	7
2.4	Operadores lógicos elementares	8
2.5	Conjuntos	9
2.6	n -uplas	11
2.7	Listas	12
2.8	Dicionários	15
3	Função, ramificação e repetição	17
3.1	Definindo funções	17
3.2	Ramificação	18
3.3	Repetição	19
3.3.1	while	19
3.3.2	for	20
3.3.3	range	21
4	Elementos da computação matricial	22

4.1	NumPy array	22
4.1.1	Inicialização de um array	23
4.1.2	Manipulação de arrays	24
4.1.3	Operadores elemento-a-elemento	26
4.2	Elementos da álgebra linear	26
4.3	Vetores	27
4.3.1	Produto escalar e norma	27
4.4	Matrizes	28
4.4.1	Inicialização de matrizes	30
4.4.2	Multiplicação de matrizes	30
4.4.3	Traço e Determinante de uma matriz	31
4.4.4	Rank e inversa de uma matriz	32
4.4.5	Autovalores e autovetores de uma matriz	33
5	Gráficos	33
	Referências Bibliográficas	35

Licença

Este trabalho é uma adaptação livre a partir está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1 Sobre a linguagem

Python é uma linguagem de programação de alto nível e multi-paradigma. Ou seja, é relativamente próxima das linguagens humanas naturais, é desenvolvida para aplicações diversas e permite a utilização de diferentes paradigmas de programação (programação estruturada, orientada a objetos, orientada a eventos, paralelização, etc.).

- Site oficial: <https://www.python.org/>

1.1 Instalação e execução

Para executar um código [Python](#) é necessário instalar um interpretador. No [site oficial do Python](#) estão disponíveis para *download* interpretadores gratuitos e com licença livre para uso. Neste minicurso, vamos utilizar [Python 3](#) instalado em um sistema [Linux](#). Para outros sistemas, pode ser necessário fazer algumas pequenas adequações.

1.1.1 Console online

Alternativamente, há consoles online [Python](#) disponíveis na web. Para quem tem conta [Google](#), o [Google Colab](#) disponibiliza um **notebook** [Python](#) gratuito.

1.2 Utilização

A execução de códigos [Python](#) pode ser feita de três formas básicas:

- em modo iterativa em um console [Python](#);
- por execução de um código `.py` em um console [Python](#);
- por execução de um código `.py` em um terminal;

Exemplo 1.1. Implemente o seguinte pseudocódigo.

```
s = "Ola, mundo!".  
imprime(s). (imprime a string s)
```

- a) em modo iterativo no console;
- b) escrevendo o código `.py` e executando-o no console;
- c) escrevendo o código `.py` e executando-o no terminal.

Resolução. Seguem as implementações em cada caso.

- a) Em modo iterativo.

Iniciamos um console [Python](#) em terminal digitando

```
$ python3
```

Então, digitamos

```
1 >>> s = "Ola, Mundo!"
2 >>> print(s) #imprime a string s
3 Ola, Mundo!
```

Para encerrar o console, digitamos

```
1 >>> quit()
```

b) Executando *script* .py no console.

Primeiramente, escrevemos o código

```
1 s = "Ola, Mundo!"
2 print(s) # imprime a string s
```

em um editor de texto (ou no seu IDE de preferência) e salvamo-lo em /pasta/codigo.py. Então, executamo-lo no console [Python](#) com

```
1 >>> exec(open('/pasta/codigo.py').read())
2 Ola, mundo!
```

c) Executando o código em terminal.

Considerando que já temos o código salvo em /pasta/codigo.py, executamo-lo com

```
$ python3 /pasta/codigo.py
Olá, mundo!
```

2 Elementos da linguagem

[Python](#) é uma linguagem de programação dinâmica em que as variáveis são declaradas automaticamente ao receberem um valor. Por exemplo, consideremos as seguintes instruções

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x * 2.0
```

Na primeira instrução, a variável `x` é recebe o valor inteiro 1 e, então, é armazenado na memória do computador como um objeto da classe `int`. Na segunda instrução, `y` recebe o valor decimal 2.0 (resultado de 1×2.0) e é armazenado como um objeto da classe `float` (ponto flutuante de 64-bits). Podemos verificar isso, com as seguintes instruções

```
1 >>> print(x, y)
2 1 2.0
3 >>> print(type(x), type(y))
4 <class 'int'> <class 'float'>
```

Códigos [Python](#) admitem comentários e continuação de linha como no seguinte exemplo

```
1 >>> # isso eh um comentario
2 >>> s = "isso eh uma \
3 ... string"
4 >>> print(s)
5 isso eh uma string
6 >>> type(s)
7 <class 'str'>
```

Observação 2.1. (Notação científica) O [Python](#) aceita notação científica, por exemplo 5.2×10^{-2} é digitado como

```
1 >>> 5.2e-2
2 0.052
```

Observação 2.2. Além dos tipos numéricos e *string*, [Python](#) também conta com os tipos de dados **list** (lista), **tuple** (*n*-upla) e **dict** (dicionário). Estudaremos estes tipos mais adiante neste minicurso.

Exercício 2.1. Antes de implementar, diga qual o valor **x** após as seguintes instruções.

```
1 >>> x = 1
2 >>> y = x
3 >>> y = 0
```

Justifique sua resposta e verifique-a.

Exercício 2.2. Implemente um código em que o usuário entre com valores para as variáveis **x** e **y**¹. Então, os valores das variáveis são permutados entre si.

¹A entrada de valores via console pode ser feita com a função [Python input](#). Consulte [Python Docs](#).

2.1 Operações aritméticas elementares

Os operadores aritméticos elementares são:

`+`: adição

`-`: subtração

`*`: multiplicação

`/`: divisão

`**`: potenciação

`%`: módulo

`//`: divisão inteira

Consideremos o seguinte exemplo

```
1 >>> 2+8*3/2**2-1
2 7.0
```

Observamos que as operações `**` tem precedência sobre as operações `*`, `/`, as quais têm precedência sobre as operações `+`, `-`. Operações de mesma precedência seguem a ordem da esquerda para direita, conforme escritas na linha de comando. Usa-se parênteses para alterar a precedência entre as operações, por exemplo

```
1 >>> (2+8*3)/2**2-1
2 5.5
```

Consulte mais informações sobre a precedência de operadores em [Python Docs](#).

Exercício 2.3. Compute as raízes do seguinte polinômio quadrático

$$x^2 - x - 2 \tag{1}$$

usando a fórmula de Bhaskara²

O operador `%` módulo computa o resto da divisão e o operador `//` a divisão inteira, por exemplo

²Bhaskara Akaria, 1114 - 1185, matemático e astrônomo indiano. Fonte: [Wikipédia](#).

```
1 >>> 5 % 2
2 1
3 >>> 5 // 2
4 2
```

Exercício 2.4. Use o [Python](#) para verificar se $14/21$ é menor que $15/23$. Então, compute o resto da divisão do maior quociente.

2.2 Funções e constantes elementares

O módulo Python [math](#) disponibiliza várias funções e constantes elementares. Para usá-las, precisamos importar o módulo para nossa seção. Fazemos isso com a instrução

```
1 >>> import math
```

Com isso, temos acesso a todas as definições e declarações contidas neste módulo. Por exemplo

```
1 >>> math.pi
2 3.141592653589793
3 >>> math.cos(math.pi)
4 -1.0
5 >>> math.sqrt(2)
6 1.4142135623730951
7 >>> math.log(math.e)
8 1.0
```

Observação 2.3. Notemos que `math.log` é a função logaritmo natural, i.e. $\ln(x) = \log_e(x)$. A implementação [Python](#) para o logaritmo de base 10 é `math.log(x,10)` ou, mais acurado, `math.log10`.

Exercício 2.5. Compute $e^{\log_3(\pi)}$.

2.3 Operadores de comparação elementares

Os operadores de comparação elementares são

`==`: igual a

`!=`: diferente de

>: maior que

<: menor que

>=: maior ou igual que

<=: menor ou igual que

Estes operadores retornam os valores lógicos `True` (verdadeiro) ou `False` (falso).

Por exemplo, temos

```
1 >>> x = 2
2 >>> x + x == 4
3 True
```

Exercício 2.6. Atribua a variável `x` o valor $\sqrt{3}$. Então, verifique se o valor computado de x^2 é maior que 3. Em caso negativo, verifique se x^2 é menor que 3. Comente o resultado obtido.

2.4 Operadores lógicos elementares

Os operadores lógicos elementares são:

and: e lógico

or: ou lógico

not: não lógico

A tabela booleana³ do “e” lógico é

Valor	Valor	Resultado
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

Podemos verificar isso no [Python](#) como segue

```
1 >>> True and True
2 True
```

³George Boole, 1815 - 1864, matemático e filósofo britânico. Fonte: [Wikipédia](#).


```
3 >>> True and False
4 False
5 >>> False and True
6 False
7 >>> False and False
8 False
```

Exercício 2.7. Construa as tabelas booleanas do operador **or** e do **not**.

Exercício 2.8. Use [Python](#) para verificar se $1.4 \leq \sqrt{2} < 1.5$. E, também, verifique se $\sqrt{3} > 1.7$ ou $\sqrt{3} \geq 1.7321$.

Exercício 2.9. Implemente uma instrução para computar o operador **xor** (ou exclusivo). Dadas duas afirmações A e B, **A xor B** é **True** no caso de uma, e somente uma, das afirmações ser **True**, caso contrário é **False**.

2.5 Conjuntos

[Python](#) tem conjuntos finitos como um tipo básico de variável. Um conjunto é uma coleção de itens **não ordenada** e **imutável** e **não admite itens duplicados**. Por exemplo,

```
1 >>> a = {1, 2, 3}
2 >>> type(a)
3 <class 'set'>
4 >>> b = set((2, 1, 3, 3))
5 >>> b
6 {1, 2, 3}
7 >>> a == b
8 True
9 >>> # conjunto vazio
10 >>> e = set()
```

aloca o conjunto $a = 1,23$. Note que o conjunto b é igual a a . Observamos que o conjunto vazio deve ser construído com a instrução **set()** e não com **{}**⁴.

Observação 2.4. A função [Python](#) **len** retorna o número de elementos de um conjunto. Por exemplo,

⁴Isso constrói um dicionário vazio, como introduziremos logo mais.

```
1 >>> len(a)
2 3
```

- Operadores envolvendo conjuntos:

-: diferença entre conjuntos;

|: união de conjuntos;

&: interseção de conjuntos;

^: diferença simétrica;

Exemplo 2.1. Sejam os conjuntos

$$A = \{2, \pi, -0.25, 3, \text{'banana'}\}, \quad (2)$$

$$B = \{\text{'laranja'}, 3, \arccos(-1), -1\} \quad (3)$$

Compute

a) $A \setminus B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap B$

d) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Resolução. Começamos alocando os conjuntos como segue

```
1 >>> import math
2 >>> A = {2, math.pi, -0.25, 3, 'banana'}
3 >>> B = {'laranja', 3, math.acos(-1), -1}
```

a) $A \setminus B$

```
1 >>> A - B
2 {-0.25, 2, 'banana'}
```

b) $A \cup B$

```
1 >>> A | B
2 {-0.25, 2, 3, 3.141592653589793, \
3 'laranja', 'banana', -1}
```

c) $A \cap B$

```

1      >>> A & B
2      {3, 3.141592653589793}

```

d) $A \Delta B$

```

1      >>> A ^ B
2      {-0.25, 2, 'laranja', 'banana', -1}

```

Observação 2.5. [Python](#) disponibiliza a sintaxe de compreensão de conjuntos. Por exemplo,

```

1      >>> {x for x in A if type(x) == type('')}
2      {'banana'}

```

Exercício 2.10. Considere o conjunto

$$Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}. \quad (4)$$

Faça um código [Python](#) para extrair o subconjunto dos números pares do conjunto Z .

2.6 *n*-uplas

Em [Python](#) *n*-uplas (*tuples*) é uma sequência de objetos, i.e. uma coleção ordenada, indexada e imutável. Por exemplo, na sequência temos um par, uma tripla e uma quadrupla

```

1 >>> a = (1, 2)
2 >>> a
3 (1, 2)
4 >>> b = -1, 1, 0
5 (-1, 1, 0)
6 >>> c = (0.5, 'laranja', {2, -1}, ['t', 0])
7 >>> c
8 (0.5, 'laranja', {2, -1}, ['t', 0])
9 >>> len(c)
10 4

```

A função `len` retorna o número de objetos da *n*-upla. Pode acessar um elemento, usando sua indexação. Por exemplo,

```

1 >>> c[2]
2 {2, -1}

```

Pode-se também extrair uma fatia (um subconjunto) usando-se a notação $:$. Por exemplo,

```
1 >>> c[1:3]
2 ('laranja', {2, -1})
```

- Operadores básicos:

$+$: concatenação

```
1 >>> (1, 2) + (3, 4, 5)
2 (1, 2, 3, 4, 5)
```

$*$: repetição

```
1 >>> (1, 2) * 2
2 (1, 2, 1, 2)
```

in: pertencimento

```
1 >>> 1 in (-1, 0, 1, 2)
2 True
```

Exercício 2.11. Aloque os conjuntos

$$A = \{-1, 0, 2\}, \quad (5)$$

$$B = \{2, 3, 5\}. \quad (6)$$

Então, compute o produto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Qual o número de elementos da $A \times B$? Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 2.5).

Exercício 2.12. Aloque o gráfico discreto da função⁵ $f(x) = x^2$ para $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$. Dica: use a sintaxe de compreensão de conjuntos (consulte a Observação 2.5).

2.7 Listas

O tipo **Python list** permite alocar em uma única variável uma lista de itens ordenada. Por exemplo, observemos as seguintes listas

⁵O gráfico de uma função restrito a um conjunto A é o conjunto $G(f)|_A = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$.

```
1 >>> x = [-1, 2, -3, -5]
2 >>> type(x)
3 <class 'list'>
4 >>> y = ['a', 'b', 'a']
5 >>> y
6 ['a', 'b', 'a']
7 >>> vazia = []
8 >>> len(x)
9 4
```

Os elementos de uma lista são indexados, o índice 0 corresponde ao primeiro elemento, o índice 1 ao segundo elemento e assim por diante. Desta forma é possível o acesso direto a um elemento de uma lista usando-se sua posição. Por exemplo,

```
1 >>> x[0]
2 -1
3 >>> y[2] = 'c'
4 >>> y
5 ['a', 'b', 'c']
```

Pode-se fazer um corte de elementos de uma lista usando o operador `:`. Por exemplo,

```
1 >>> x = [1, 2, -1, 3, -2]
2 >>> x[1:3]
3 [2, -1]
```

- Operadores básicos:

`+`: concatenação

```
1 >>> [1, 2] + [3, 4, 5]
2 [1, 2, 3, 4, 5]
```

`*`: repetição

```
1 >>> [1, 2] * 2
2 [1, 2, 1, 2]
```

`in`: pertencimento

```
1 >>> 1 in [-1, 0, 1, 2]
2 True
```

Observação 2.6. Listas contam com várias funções prontas para a execução de diversas tarefas práticas como, por exemplo, inserir/deletar itens, contar ocorrências, ordenar itens, etc. Consulte [Python Docs](#).

Observação 2.7. (Alocação *versus* cópia) Estude o seguinte exemplo

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 0, 1]
```

Notamos que `y` aponta para o mesmo endereço de memória de `x`. Para copiar uma lista e alocá-la em um novo endereço de memória, deve-se usar a função `list.copy()`, como segue

```
1 >>> x = [2, 3, 1]
2 >>> y = x.copy()
3 >>> y[1] = 0
4 >>> x
5 [2, 3, 1]
6 >>> y
7 [2, 0, 1]
```

Exercício 2.13. Implemente uma lista para alocar os primeiros 5 elementos da sequência de Fibonacci⁶.

Exercício 2.14. Uma aplicação do Método Babilônico⁷ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \tag{7}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

Implemente uma lista para alocar as quatro primeiras aproximações da solução, i.e. x_0, x_1, x_2, x_3 .

⁶Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

⁷Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

Exercício 2.15. Aloque os seguintes vetores como listas no [Python](#)

$$x = (-1, 3, -2), \quad (9)$$

$$y = (4, -2, 0). \quad (10)$$

Então, compute

a) $x + y$

b) $x \cdot y$

Dica: use uma compreensão de lista e os métodos [Python zip](#) e [sum](#). Consulte também o método [math.prod](#).

Exercício 2.16. Uma matriz pode ser alocada como uma lista de listas [Python](#), alocando cada linha como uma lista e a matriz como a lista destas listas. Por exemplo, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

pode ser alocada como a seguinte lista de listas

```
1 >>> M = [[1, -2], [2, 3]]
2 >>> M
3 [[1, -2], [2, 3]]
```

Use listas para alocar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

e o vetor coluna

$$x = (2, -3, 1), \quad (13)$$

então compute Ax e $x^T A$.

2.8 Dicionários

Em [Python](#) um dicionário é um mapeamento objeto a objeto, cada par (chave:valor) é separado por uma vírgula. Por exemplo,

```
1 >>> a = {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
2 >>> a
3 {'nome': 'triangulo', 'perimetro': 3.2}
4 >>> b = {1: 2.71, (1,2): 2, 'a': {1,0,-1}}
5 >>> b
6 {1: 2.71, (1, 2): 2, 'a': {0, 1, -1}}
7 >>> d = {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
8 >>> d
9 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: -1, 2: 'b'}
```

O acesso a um item do dicionário é feito usando-se sua **chave**. Por exemplo,

```
1 >>> d['b']
2 2
3 >>> d[1.4] = 1
4 >>> d
5 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b'}
```

Pode-se adicionar um novo par, simplesmente, atribuindo valor a uma nova chave. Por exemplo,

```
1 >>> d[1.5] = 0
2 >>> d
3 {1: 'a', 'b': 2, 1.4: 1, 2: 'b', 1.5: 0}
```

Observação 2.8. Consulte sobre mais sobre dicionários em [Python Docs](#).

Exercício 2.17. Considere a função afim

$$f(x) = 3 - x. \quad (14)$$

Implemente um dicionário para alocar a raiz da função, a interseção com o eixo y e seu coeficiente angular.

Exercício 2.18. Considere a função quadrática

$$g(x) = x^2 - x - 2 \quad (15)$$

Implemente um dicionário para alocar suas raízes, vértice e interseção com o eixo y .

3 Função, ramificação e repetição

Nesta seção, vamos introduzir funções e estruturas de ramificação e de repetição. Estes são procedimentos fundamentais na programação estruturada.

3.1 Definindo funções

Em [Python](#), uma função é definida com a palavra-chave **def** seguida de seu nome e seus parâmetros encapsulados entre parênteses e por dois-pontos **:**. Suas instruções formam o corpo da função, iniciam-se na linha abaixo e devem estar indentadas. A indentação define o escopo da função. Por exemplo, a seguinte função imprime o valor da função

$$f(x) = 2x - 3 \quad (16)$$

```
1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     print(y)
4 ...
5 >>> f(2)
6 1
```

Você pode protestar que **f** não é uma função e, sim, um procedimento, pois não retorna valor. Para uma função retornar um objeto, usamos a instrução **return**. Por exemplo,

```
1 >>> def f(x):
2 ...     y = 2*x - 3
3 ...     return y
4 ...
5 >>> z = f(2)
6 >>> z
7 1
```

Observação 3.1. Para funções pequenas, pode-se utilizar a instrução **lambda** de funções anônimas. Por exemplo,

```
1 >>> f = lambda x: 2*x - 3
2 >>> f(3)
3 3
```

Observação 3.2. Consulte mais informações sobre a definição de funções em [Python Docs](#).

Exercício 3.1. Implemente uma função para computar as raízes de uma polinômio de grau 1 $p(x) = ax + b$.

Exercício 3.2. Implemente uma função para computar as raízes de uma polinômio de grau 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercício 3.3. Implemente uma função que computa o produto escalar de dois vetores

$$x = (x_0, x_1, x_2), \quad (17)$$

$$y = (y_0, y_1, y_2). \quad (18)$$

Use listas para representar os vetores no [Python](#).

Exercício 3.4. Implemente uma função que computa o determinante de matrizes 2×2 . Use lista de listas para representar as matrizes.

Exercício 3.5. Implemente uma função que computa a multiplicação matrix-vetor Ax , com A 2×2 e x um vetor coluna de dois elementos.

Exercício 3.6. (Recursividade) Implemente uma função recursiva para computar o fatorial de um número natural n , i.e. $n!$.

3.2 Ramificação

Uma estrutura de ramificação é uma instrução para a tomada de decisões durante a execução de um programa. No [Python](#), está disponível a instrução **if**. Consultemos o seguinte exemplo.

```
1 def paridade(n):  
2     if (n%2 == 0):  
3         print('par')
```

Aqui, a função **paridade** recebe o valor **n**. Se (**if**) o resto da divisão de **n** por 2 é igual a zero (condição), então (**:**) imprime a *string* **par**.

Observação 3.3. A indentação determina o escopo de cada instrução **if**.

Também está disponível a instrução **if-else**. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):
2     if (n%2 == 0):
3         print('par')
4     else:
5         print('impar')
```

Agora, se (**if**) a condição ($n\%2 == 0$) for verdadeira (**True**), então imprime **par**, senão (**else**) imprime **impar**.

Ainda, é possível ter instruções **if-else** encadeadas. Por exemplo,

```
1 def paridade(n):
2     if (n%2 == 0):
3         print('eh divisivel por 2')
4     elif (n%3 == 0):
5         print('eh divisivel por 3')
6     else:
7         print('nao eh divisivel por 2 e 3')
```

Observe que **elif** deve ser utilizado no lugar de **else if**.

Exercício 3.7. Implemente uma função que recebe dois números n e m e imprime o maior deles.

Exercício 3.8. Implemente uma função que recebe os coeficientes de um polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (19)$$

e classifique-o como um polinômio de grau 0, 1 ou 2.

3.3 Repetição

Estruturas de repetição são instruções que permitem que a execução repetida de uma região do código. São duas instruções disponíveis **while** e **for**.

3.3.1 while

A sintaxe da instrução **while** é

```
1 while expressao:
2     comando 0
3     .
```

```
4      .  
5      .  
6      comando n
```

Isto é, enquanto (**while**) a expressão (**expressao**) for verdadeira, os comandos **comando 0** a **comando n** serão repetidamente executados em ordem. Por exemplo, o seguinte código computa a soma dos 10 primeiros números naturais e, então imprime-a.

```
1 n = 0  
2 s = 0  
3 while (n < 10):  
4     s += n  
5     n += 1  
6 print(s)
```

Observação 3.4. As instruções de controle **break**, **continue** são bastante úteis em várias situações. A primeira, encerra as repetições e, a segunda, pula para uma nova repetição. Consulte mais em [Python Docs](#).

Exercício 3.9. Use **while** para imprimir os dez primeiros números ímpares.

Exercício 3.10. Uma aplicação do Método Babilônico⁸ para a aproximação da solução da equação $x^2 - 2 = 0$, consiste na iteração

$$x_0 = 1, \quad (20)$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Faça um código com **while** para computar aproximação x_i , tal que $|x_i - x_{i-1}| < 10^{-5}$.

3.3.2 for

A estrutura **for** tem a sintaxe

```
1 for i in iteravel:  
2     escopo
```

⁸Matemática Babilônica, matemática desenvolvida na Mesopotâmia, desde os Sumérios até a queda da Babilônia em 539 a.C.. Fonte: [Wikipédia](#).

onde, `iteravel` pode ser qualquer objeto de uma classe iterável (conjunto, *n*-upla, lista, dicionário, *string*). Os comandos dentro do escopo (determinado pela indentação) são repetidos para cada iterada *i*. Por exemplo,

```
1 >>> for i in [0,1,2]:
2 ...     print(i)
3 ...
4 0
5 1
6 2
```

3.3.3 range

A função `Python range([start,]stop[,sep])` é particularmente útil na construção de instruções `for`. Ela cria um objeto de classe iterável de `start` (incluído) a `stop` (excluído), de elementos igualmente separados por `sep`. Por padrão, `start=0`, `sep=1` caso omitidos. Por exemplo,

```
1 >>> for i in range(1,6,2):
2 ...     print(i)
3 ...
4 1
5 3
6 5
```

ou

```
1 >>> for i in range(3):
2 ...     print(i)
3 ...
4 0
5 1
6 2
```

Exercício 3.11. Escreva uma função que retorne o *n*-ésimo termo da função de Fibonacci⁹, $n \geq 1$.

Exercício 3.12. Implemente uma função para computar o produto escalar de dois vetores de *n* elementos. Assuma que os vetores estão alocados em listas.

⁹Leonardo Fibonacci, 1170 - 1250, matemático italiano. Fonte: [Wikipédia](#).

E 3.1. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times n$ por um vetor coluna x de n elementos. Assuma que o vetor está alocada como uma lista e a matriz como uma lista de listas por linhas.

E 3.2. Implemente uma função para computar a multiplicação de uma matriz A $n \times m$ por uma matriz B de $m \times n$. Assuma que as matrizes estão alocadas como listas de listas por linhas de cada matriz.

4 Elementos da computação matricial

Nesta seção, vamos explorar a **NumPy** (Numerical Python), biblioteca para tratamento numérico de dados. Ela é extensivamente utilizada nos mais diversos campos da ciência e da engenharia. Aqui, vamos nos restringir a introduzir algumas de suas ferramentas para a computação matricial.

Usualmente, a biblioteca é importada como segue

```
1 >>> import numpy as np
```

4.1 NumPy array

Um **array** é uma tabela de valores (vetor, matriz ou multidimensional) e contém informação sobre os dados brutos, indexação e como interpretá-los. **Os elementos são todos do mesmo tipo** (diferente de uma lista Python), referenciados pela propriedade **dtype**. A indexação dos elementos pode ser feita por um **tuple** de inteiros não negativos, por booleanos, por outro **array** ou por números inteiros. O **rank** de um **array** é seu número de dimensões (chamadas de **axes**¹⁰). O **shape** é um **tuple** de inteiros que fornece seu tamanho (número de elementos) em cada dimensão. Sua inicialização pode ser feita usando-se listas simples ou encadeadas. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,3,-1,2])
2 >>> print(a)
3 [ 1  3 -1  2]
4 >>> a.dtype
5 dtype('int64')
6 >>> a.shape
```

¹⁰Do inglês, plural de *axis*, eixo.

```
7 (4,)
8 >>> a[2]
9 -1
10 >>> a[1:3]
11 array([ 3, -1])
```

temos um **array** de números inteiros com quatro elementos dispostos em um único **axis** (eixo). Podemos interpretá-lo como uma representação de um vetor linha ou coluna, i.e.

$$a = (1, 3, -1, 2) \quad (22)$$

vetor coluna ou a^T vetor linha.

Outro exemplo,

```
1 >>> a = np.array([[1.0, 2, 3], [-3, -2, -1]])
2 >>> a.dtype
3 dtype('float64')
4 >>> a.shape
5 (2, 3)
6 >>> a[1,1]
7 -2.0
```

temos um **array** de números decimais (**float**) dispostos em um arranjo com dois **axes** (eixos). O primeiro **axis** tem tamanho 2 e o segundo tem tamanho 3. Ou seja, podemos interpretá-lo como uma matriz de duas linhas e três colunas. Podemos fazer sua representação algébrica como

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

4.1.1 Inicialização de um array

O **NumPy** conta com úteis funções de inicialização de **array**. Vejam algumas das mais frequentes:

- **np.zeros()**: inicializa um **array** com todos seus elementos iguais a zero.

```
1 >>> np.zeros(2)
2 array([0., 0.] )
```

- **np.ones()**: inicializa um **array** com todos seus elementos iguais a 1.

```
1 >>> np.ones((3,2), dtype='int')
2 array([[1, 1],
3        [1, 1],
4        [1, 1]])
```

- `np.empty()`: inicializa um array sem alocar valores para seus elementos¹¹.

```
1 >>> np.empty(3)
2 array([4.9e-324, 1.5e-323, 2.5e-323])
```

- `np.arange()`: inicializa um array com uma sequência de elementos¹².

```
1 >>> np.arange(1,6,2)
2 array([1, 3, 5])
```

- `np.linspace(a, b[, num=n])`: inicializa um array como uma sequência de elementos que começa em `a`, termina em `b` (incluídos) e contém `n` elementos igualmente espaçados.

```
1 >>> np.linspace(0, 1, num=5)
2 array([0.   , 0.25, 0.5  , 0.75, 1.   ])
```

4.1.2 Manipulação de arrays

Outras duas funções importantes no tratamento de arrays são:

- `arr.reshape()`: permite a alteração da forma de um array.

```
1 >>> a = np.array([-2,-1])
2 >>> a
3 array([-2, -1])
4 >>> a.reshape(2,1)
5 array([[ -2],
6        [ -1]])
```

O `arr.reshape()` também permite a utilização de um coringa `-1` que será dinamicamente determinado de forma obter-se uma estrutura adequada. Por exemplo,

¹¹Atenção! Os valores dos elementos serão dinâmicos conforme “lixo” da memória.

¹²Similar a função Python **range**.


```
1     >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2     >>> a
3     array([[1, 2],
4            [3, 4]])
5     >>> a.reshape((-1,1))
6     array([[1],
7            [2],
8            [3],
9            [4]])
```

- `arr.transpose()`: computa a transposta de uma matriz.

```
1     >>> a = np.array([[1,2],[3,4]])
2     >>> a
3     array([[1, 2],
4            [3, 4]])
5     >>> a.transpose()
6     array([[1, 3],
7            [2, 4]])
```

- `np.concatenate()`: concatena arrays.

```
1     >>> a = np.array([1,2])
2     >>> b = np.array([2,3])
3     >>> c = np.concatenate((a,b))
4     >>> c
5     array([1, 2, 2, 3])
6     >>> a = a.reshape((1,-1))
7     >>> a.ndim
8     2
9     >>> b = b.reshape((1,-1))
10    >>> b
11    array([[2, 3]])
12    >>> d = np.concatenate((a,b), axis=0)
13    >>> d
14    array([[1, 2],
15           [2, 3]])
```

4.1.3 Operadores elemento-a-elemento

Os operadores aritméticos disponível no Python atuam elemento-a-elemento nos `arrays`. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([1,2])
2 >>> b = np.array([2,3])
3 >>> a+b
4 array([3, 5])
5 >>> a-b
6 array([-1, -1])
7 >>> b*a
8 array([2, 6])
9 >>> a**b
10 array([1, 8])
11 >>> 2*b
12 array([4, 6])
```

O `NumPy` também conta com várias funções matemáticas elementares que operam elemento-a-elemento em `arrays`. Por exemplo,

```
1 >>> a = np.array([np.pi, np.sqrt(2)])
2 >>> a
3 array([3.14159265, 1.41421356])
4 >>> np.sin(a)
5 array([1.22464680e-16, 9.87765946e-01])
6 >>> np.exp(a)
7 array([23.14069263, 4.11325038])
```

Observação 4.1. O `NumPy` contém um série de outras funções práticas para a manipulação de `arrays`. Consulte [NumPy: the absolute basics for beginners](#).

4.2 Elementos da álgebra linear

O `NumPy` conta com um módulo de álgebra linear

```
1 >>> from numpy import linalg
```

4.3 Vetores

Um vetor podem ser representado usando um `array` de um eixo (dimensão) ou um com dois eixos, caso se queira diferenciá-lo entre um vetor linha ou coluna. Por exemplo, os vetores

$$a = (2, -1, 7), b = (3, 1, 0)^T \quad (24)$$

podem ser alocados com

```
1 >>> x = np.array([2, -1, 7])
2 >>> y = np.array([3, 1, 0])
```

Caso queira-se que x siga um arranjo em coluna, pode-se modificar como segue

```
1 >>> a = a.reshape((-1, 1))
2 >>> a
3 array([[ 2],
4        [-1],
5        [ 7]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo `arrays`, logo também aplicáveis a vetores (consulte a Subseção [4.1.3](#)). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 4.1. Aloque cada um dos seguintes vetores como um [NumPy array](#):

a) $x = (1.2, -3.1, 4)$

b) $y = x^T$

c) $z = (\pi, \sqrt{2}, e^{-2})^T$

4.3.1 Produto escalar e norma

Dados dois vetores,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (25)$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (26)$$

define-se o **produto escalar** por

$$x \cdot y = x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} \quad (27)$$

Com o [NumPy](#), podemos computá-lo com a função `np.dot()`. Por exemplo,

```
1 >>> x = np.array([-1, 0, 2, 4])
2 >>> y = np.array([0, 1, 1, -1])
3 >>> np.dot(x, y)
4 -2
```

A norma (euclidiana) de um vetor é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}. \quad (28)$$

O [NumPy](#) conta com a função `np.linalg.norm()` para computá-la. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.norm(y)
2 1.7320508075688772
```

Exercício 4.2. Faça um código para computar o produto escalar $x \cdot y$ sendo

$$x = (1.2, \ln(2), 4), \quad (29)$$

$$y = (\pi^2, \sqrt{3}, e) \quad (30)$$

4.4 Matrizes

Uma matriz pode ser alocada como um [NumPy](#) array de dois eixos (dimensões). Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \quad (32)$$

podem ser alocadas como segue

```
1 >>> A = np.array([[2,-1,7],[3,1,0]])
2 >>> A
3 array([[ 2, -1,  7],
4        [ 3,  1,  0]])
5 >>> B = np.array([[4,0],[2,1],[-8,6]])
6 >>> B
7 array([[ 4,  0],
8        [ 2,  1],
9        [-8,  6]])
```

Como já vimos, o [NumPy](#) conta com operadores elemento-a-elemento que podem ser utilizados na álgebra envolvendo **arrays**, logo também aplicáveis a matrizes (consulte a Subseção [4.1.3](#)). Vamos, aqui, introduzir outras operações próprias deste tipo de objeto.

Exercício 4.3. Aloque cada uma das seguintes matrizes como um Numpy array:

Exercício 4.4.

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

b) $B = A^T$

Exercício 4.5. Seja

```
1 >>> A = np.array([[2,1],[1,1],[-3,-2]])
```

Determine o formato (**shape**) dos seguintes **arrays**:

a) $A[:,0]$

b) $A[:,0:1]$

c) $A[1:3,0]$

d) $A[1:3,0:1]$

e) $A[1:3,0:2]$

4.4.1 Inicialização de matrizes

Além das inicializações de `arrays` já estudadas na Subseção 4.1.1, temos mais algumas que são particularmente úteis no caso de matrizes.

- `np.eye(n)`: retorna a matriz identidade $n \times n$.

```
1 >>> np.eye(3)
2 array([[1., 0., 0.],
3        [0., 1., 0.],
4        [0., 0., 1.]])
```

- `np.diag(v)`: retorna uma matriz diagonal formada pela `list` `v`.

```
1 >>> np.diag([1,2,3])
2 array([[1, 0, 0],
3        [0, 2, 0],
4        [0, 0, 3]])
```

Exercício 4.6. Aloque a matriz escalar $C = [c_{ij}]_{i,j=0}^{99}$, sendo $c_{ii} = \pi$ e $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

4.4.2 Multiplicação de matrizes

A multiplicação da matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,l-1}$ pela matriz $B = [b_{ij}]_{i,j=0}^{l-1,m-1}$ e a matriz $C = AB = [c_{ij}]_{i,j=0}^{n-1,m-1}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{l-1} a_{ik} b_{k,j} \quad (34)$$

O `NumPy` tem a função `np.matmul()` para computar a multiplicação de matrizes. Por exemplo,

```
1 >>> C = np.matmul(A,B)
2 >>> C
3 array([[ -50,   41],
4        [  14,    1]])
```

Observação 4.2. É importante notar que `np.matmul(A,B)` é a multiplicação de matrizes, enquanto que `*` consiste na multiplicação elemento a elemento.

Exercício 4.7. Aloque as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Então, se existirem, compute e forneça as dimensões das seguintes matrizes

- a) CD
- b) $D^T E$
- c) $D^T C$
- d) DE

4.4.3 Traço e Determinante de uma matriz

O [NumPy](#) tem a função `arr.trace()` para computar o **traço** de uma matriz (soma dos elementos de sua diagonal). Por exemplo,

```
1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> A.trace()
3 -1
```

Já, o **determinante** é fornecido no módulo `np.linalg`. Por exemplo,

```
1 >>> A = np.array([[ -1, 2, 0], [2, 3, 1], [1, 2, -3]])
2 >>> np.linalg.det(A)
3 25.000000000000007
```

Exercício 4.8. Compute e verifique os traços e os determinantes das seguin-

tes matrizes

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

4.4.4 Rank e inversa de uma matriz

O **rank** de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes. O **NumPy** conta com a função `matrix_rank()` para computá-lo. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.matrix_rank(np.eye(3))
2 3
3 >>> A = np.array([[1,2,3],[-1,1,-1],[0,3,2]])
4 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
5 2
```

A inversa de uma matriz **full rank** pode ser computada com a função `np.linalg.inv()`. Por exemplo,

```
1 >>> A = np.array([[1,2,3],[-1,1,-1],[1,3,2]])
2 >>> np.linalg.matrix_rank(A)
3 3
4 >>> Ainv = np.linalg.inv(A)
5 >>> np.matmul(A,Ainv)
6 array([[ 1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
7        [ 1.11022302e-16,  1.00000000e+00,  2.22044605e-16],
8        [-2.22044605e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])
```

Exercício 4.9. Compute, se possível, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Verifique suas respostas.

4.4.5 Autovalores e autovetores de uma matriz

Um auto-par (λ, v) , λ um escalar chamado de autovalor e $v \neq 0$ é um vetor chamado de autovetor, é tal que

$$A\lambda = \lambda v. \quad (42)$$

O [NumPy](#) tem a função `np.linalg.eig()` para computar os auto-pares de uma matriz. Por exemplo,

```
1 >>> np.linalg.eig(np.eye(3))
2 (array([1., 1., 1.]), array([[1., 0., 0.],
3      [0., 1., 0.],
4      [0., 0., 1.])))
```

Observamos que a função uma dupla, sendo o primeiro item um `array` contendo os autovalores (repetidos conforme suas multiplicidades) e o segundo item é a matriz dos autovetores, onde estes são suas colunas.

Exercício 4.10. Compute os auto-pares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Então, verifique se, de fato, $A\lambda = \lambda v$ para cada auto-par (λ, v) computado.

5 Gráficos

[Matplotlib](#) é uma biblioteca [Python](#) livre e gratuita para a visualização de dados. É muito utilizada para a criação de gráficos estáticos, animados ou iterativos. Aqui, vamos introduzir alguma de suas ferramentas básicas para gráficos.

Para utilizá-la, é necessário instalá-la. Pacotes de instalação estão disponíveis para os principais sistemas operacionais, consulte a sua loja de *apps* ou [Matplotlib Installation](#). Para importá-la, usamos

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
```

Observação 5.1. Se você está usando um console [Python](#) remoto, você pode querer adicionar a seguinte linha de comando para que os gráficos sejam visualizados no próprio console.

```
1 >>> %matplotlib inline
```

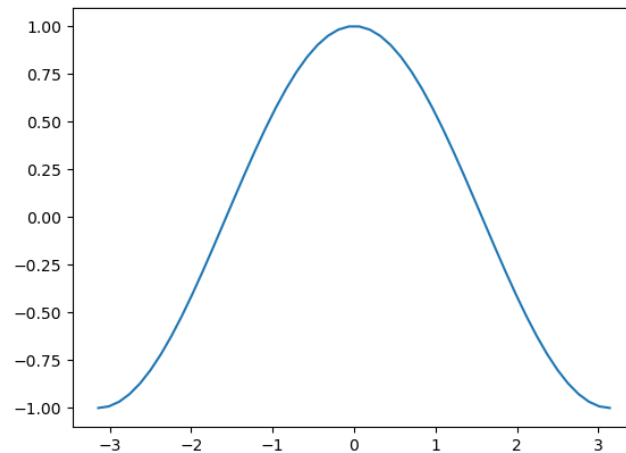


Figura 1: Esboço do gráfico da função $y = \text{sen}(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Gráficos bidimensionais podem ser criados com a função `plt.plot(x,y)`, onde `x` e `y` são `arrays` que fornecem os pontos cartesianos (x_i, y_i) a serem plotados. Por exemplo,

```
1 >>> import matplotlib.pyplot as plt
2 >>> x = np.linspace(-np.pi, np.pi)
3 >>> y = np.cos(x)
4 >>> plt.plot(x,y)
5 [<matplotlib.lines.Line2D object at 0x7f99f578a370>]
6 >>> plt.show()
```

produz o seguinte esboço do gráfico da função $y = \text{sen}(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Consulte a [Figura 1](#).

Observação 5.2. Matplotlib é uma poderosa ferramenta para a visualização de gráficos. Consulte a galeria de exemplos no seu site oficial

<https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html>

Exercício 5.1. Crie um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções no intervalo indicado:

a) $y = \cos(x)$, $[0, 2\pi]$

b) $y = x^2 - x + 1$, $[-2, 2]$

c) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $(-1, 1)$

Referências

- [1] **NumPy**. <https://numpy.org/>, 2021.
- [2] **The Python Tutorial**. <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>, 2021.
- [3] **Learn Python: simply easy learning**. <https://www.tutorialspoint.com/python/index.htm>, 2021.
- [4] **SciPy**. <https://www.scipy.org/>, 2021.