

Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

13 de março de 2019

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
1 Vetores	1
1.1 Segmentos orientados	1
1.1.1 Exercícios	5
1.2 Vetores	5
1.2.1 Adição de vetores	6
1.2.2 Vetor oposto	7
1.2.3 Subtração de vetores	7
1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar	7
1.2.5 Propriedades das operações com vetores	8
Respostas dos Exercícios	10
Referências Bibliográficas	11
Índice Remissivo	12

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r . O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB .

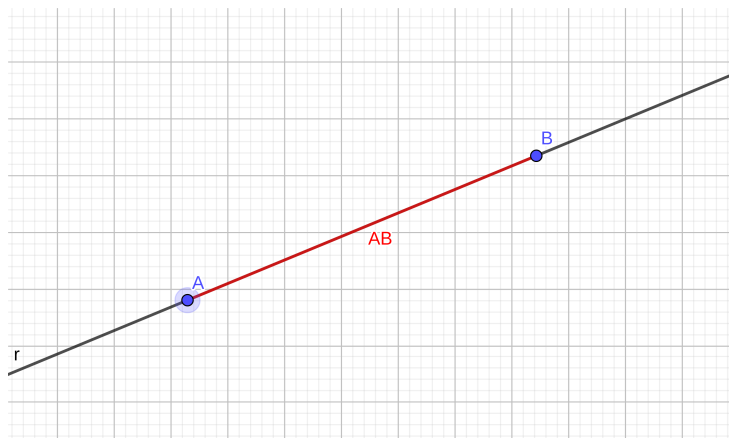


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB .

Associado a um segmento AB , temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B . A distância entre os pontos A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.

A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B .

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

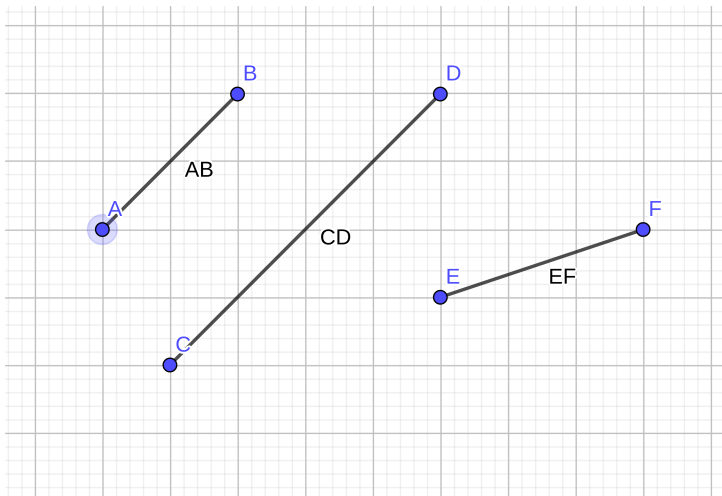


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.

Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA . Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B , sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.

Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD .

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

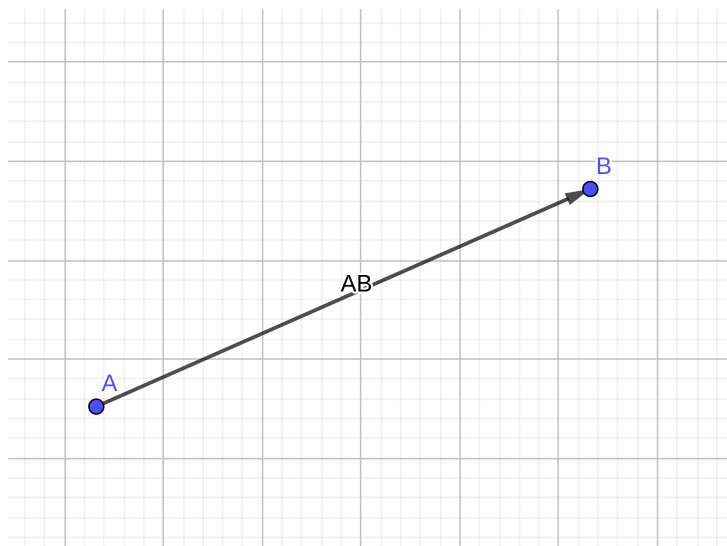


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB .

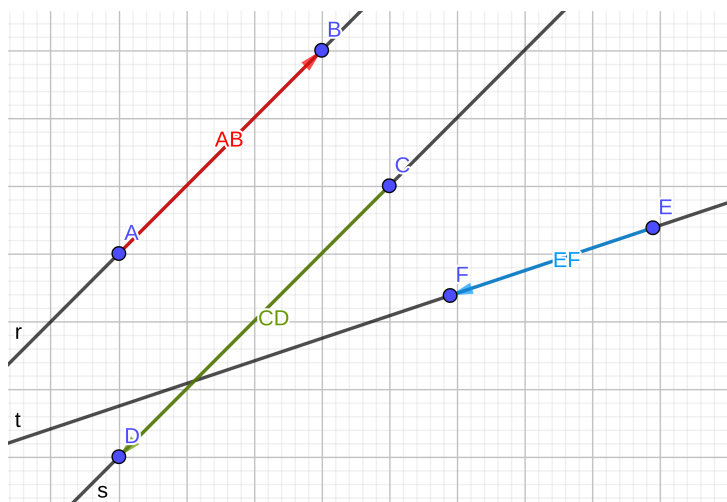


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

??). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

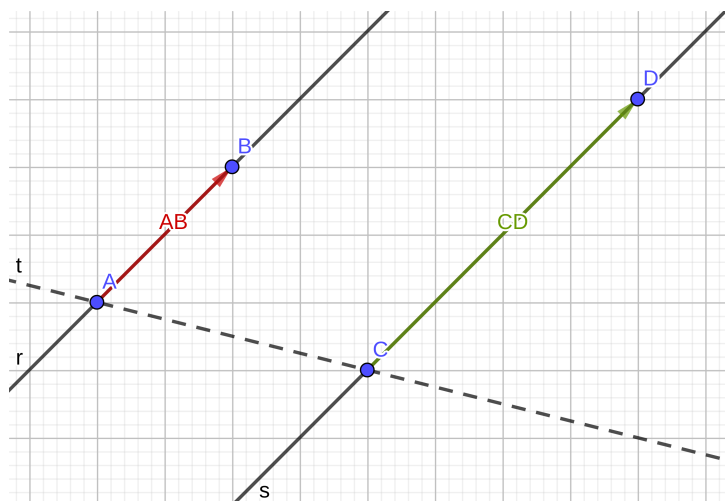


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

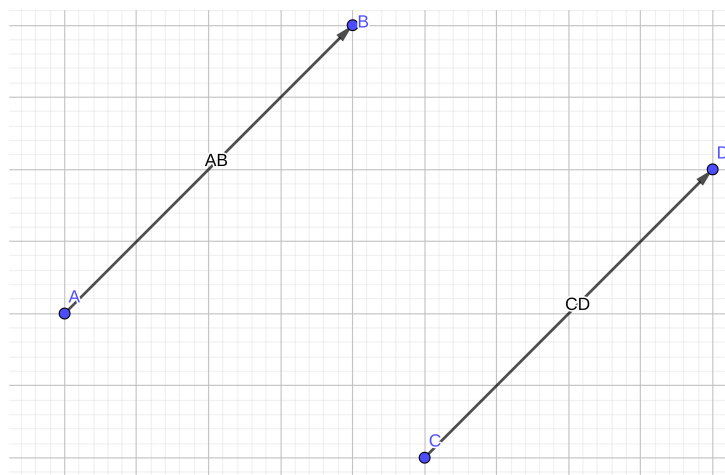


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

1.1.1 Exercícios

E 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

Em construção ...

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB , chama-se **vetor** AB e denota-se \overrightarrow{AB} , qualquer segmento orientado equipolente a AB . Cada segmento orientado equipolente a AB é um representado de \overrightarrow{AB} . A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor \overrightarrow{AB} .

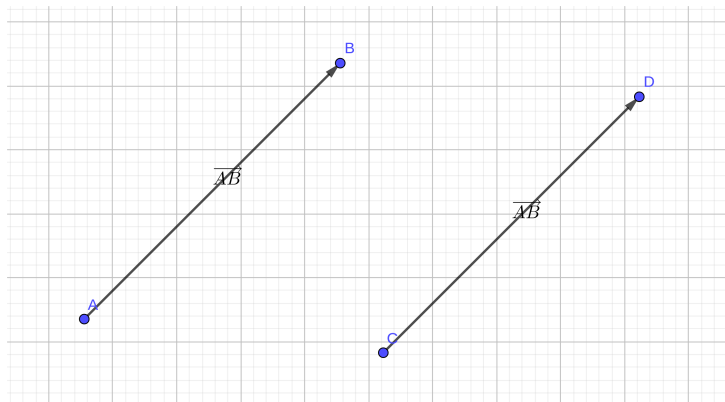


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor \overrightarrow{AB} é o valor de seu comprimento e é denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

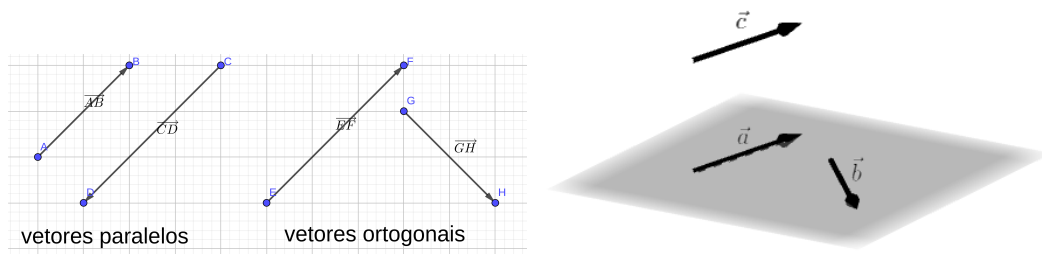


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . Sejam, ainda, uma representação \overrightarrow{AB} qualquer de u e a representação \overrightarrow{BC} do vetor \vec{v} . Então, define-se o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o vetor dado por \overrightarrow{AC} . Veja a Figura 1.9.

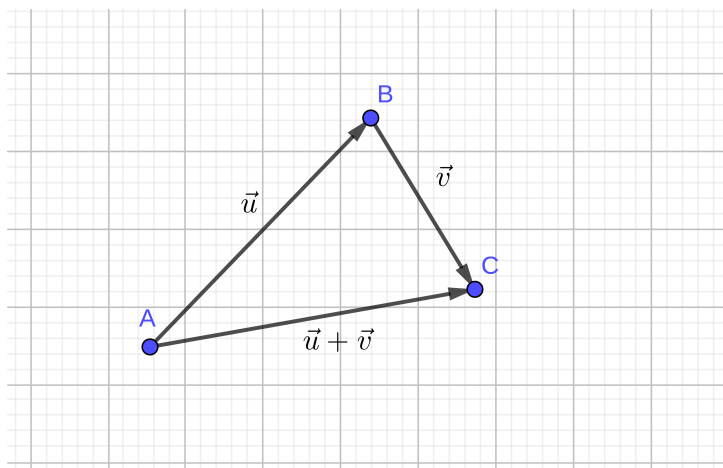


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor** \vec{v} é dito ser **oposto** a um dado vetor \vec{u} , quando quaisquer representações de \vec{u} e \vec{v} são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a \vec{u} . Veja a Figura 1.10.

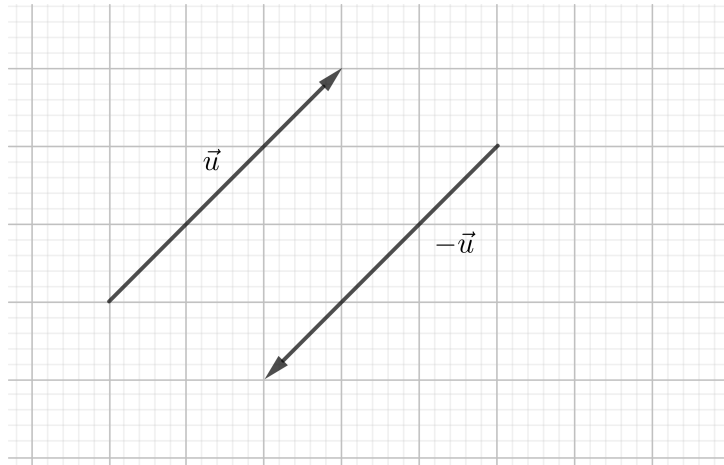


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} . A subtração de \vec{u} com \vec{v} é denotada por $\vec{u} - \vec{v}$ e é definida pela adição de \vec{u} com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor \vec{u} é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de \vec{u} com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.1. • Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.

- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

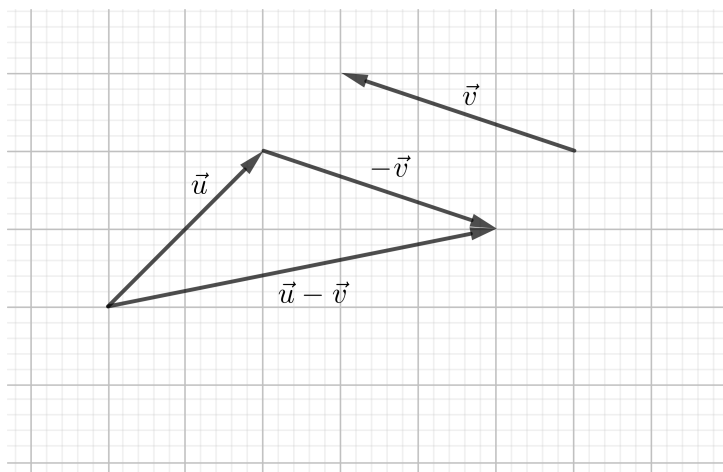


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de \vec{u} com \vec{v} , i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

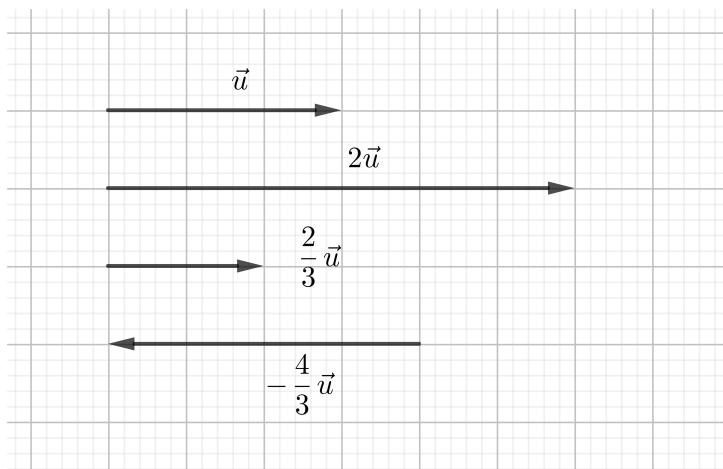


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

- associatividade da adição: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad (1.1)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.2)$$

- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

Referências Bibliográficas

- [1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo

ângulo

entre vetores, 5

comprimento, 1

distância, 1

equipolentes, 4

extremidade, 2

módulo, 5

mesmo sentido, 3

norma, 5

origem, 2

segmento, 1

segmento nulo, 2

segmento orientado, 2

vetor

oposto, 7

vetores

coplanares, 5

não coplanares, 5

ortogonais, 5

paralelos, 5