Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

27 de março de 2019

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.
Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa **i**

Licença **ii**

Prefácio **iii**

Sumário **v**

1 Vetores **1**
- 1.1 Segmentos orientados 1
  - 1.1.1 Exercícios 5
- 1.2 Vetores 5
  - 1.2.1 Adição de vetores 6
  - 1.2.2 Vetor oposto 7
  - 1.2.3 Subtração de vetores 7
  - 1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar 7
  - 1.2.5 Propriedades das operações com vetores 8

2 Bases e coordenadas **11**
- 2.1 Dependência linear 11
  - 2.1.1 Combinação linear 11
  - 2.1.2 Dependência linear 11
  - 2.1.3 Observações 12
- 2.2 Bases e coordenadas 15
  - 2.2.1 Operações de vetores com coordenadas 17
  - 2.2.2 Dependência linear 19
- 2.3 Mudança de base 20
- 2.4 Bases ortonormais 22

Respostas dos Exercícios **24**

Referências Bibliográficas **25**

Índice Remissivo **26**

Licença CC-BY-SA 4.0

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB.

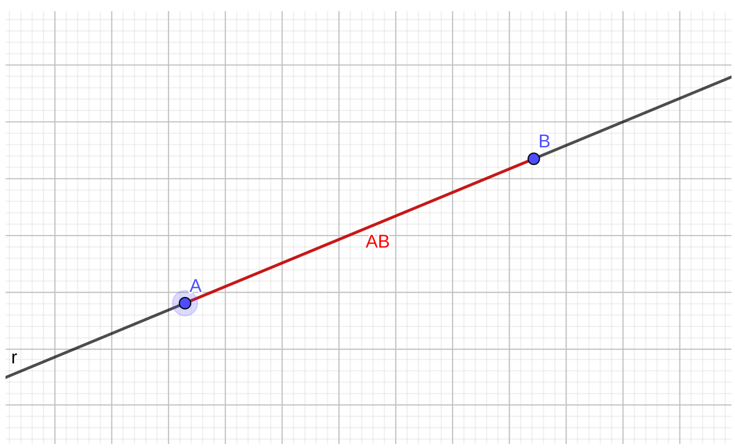


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB.

Associado a um segmento AB, temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B. A distância entre os ponto A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.

A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B.

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

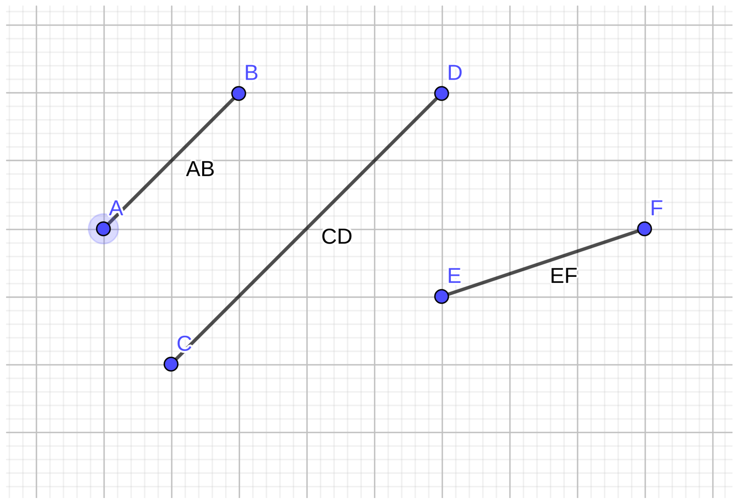


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.
Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA. Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B, sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.
Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

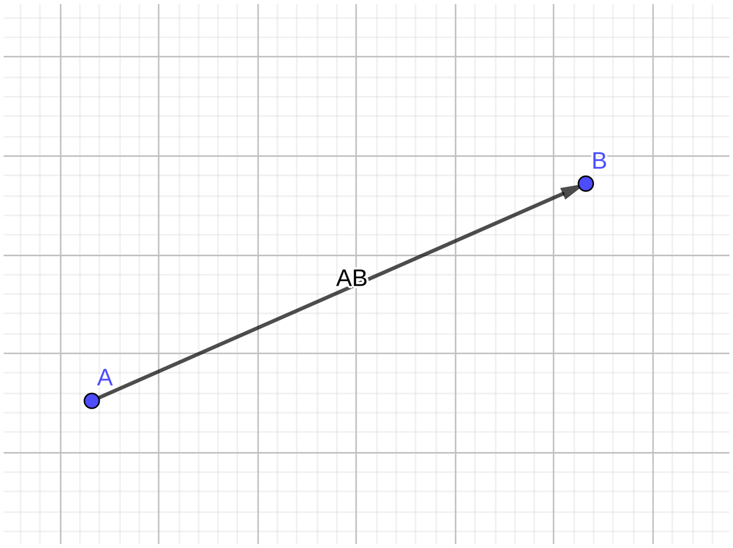


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB.

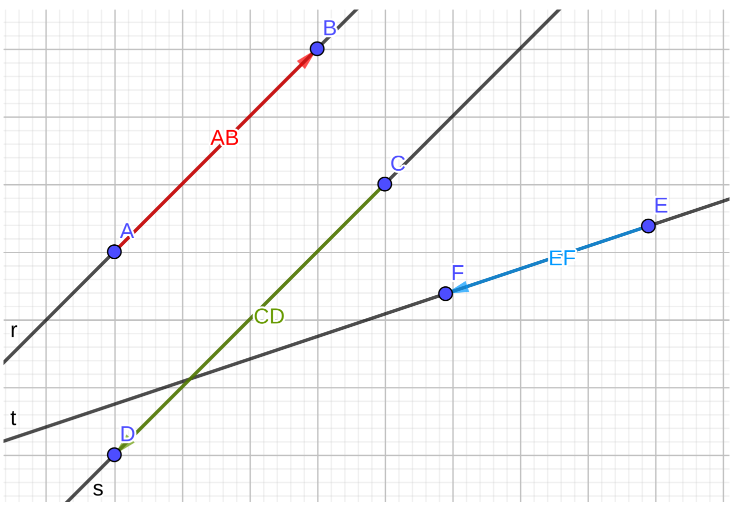


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

1.5). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.
Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

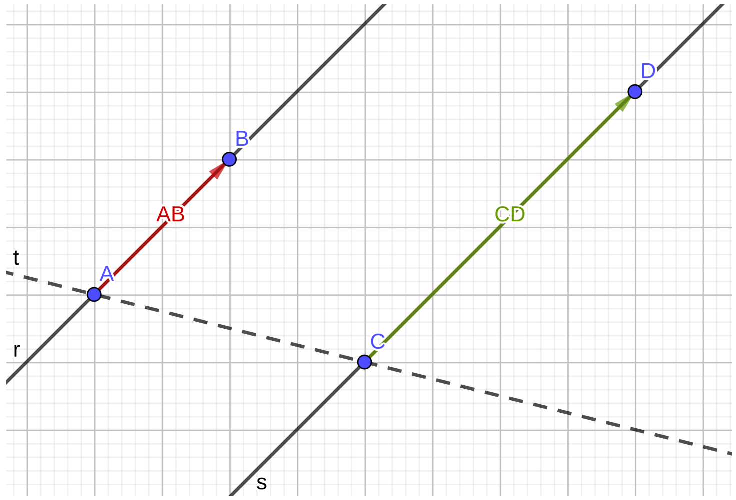


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

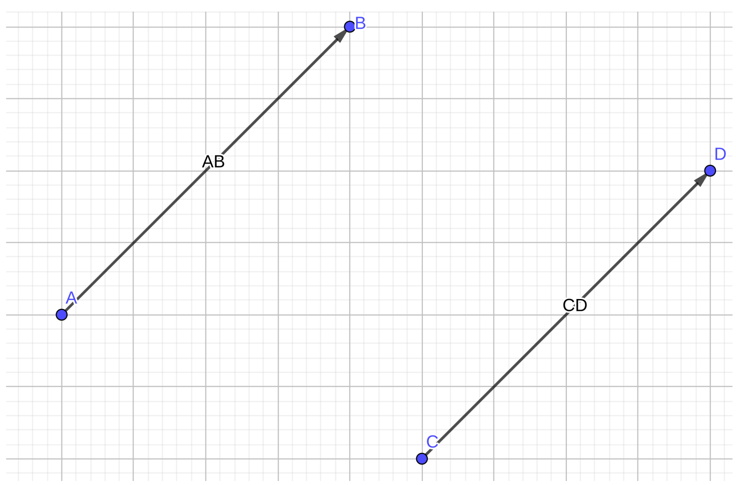


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

Licença CC-BY-SA 4.0

1.1.1 Exercícios

E 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB, chama-se **vetor** AB e denota-se $\overrightarrow{AB}$, qualquer segmento orientado equipolente a AB. Cada segmento orientado equipolente a AB é um representado de $\overrightarrow{AB}$. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor $\overrightarrow{AB}$.

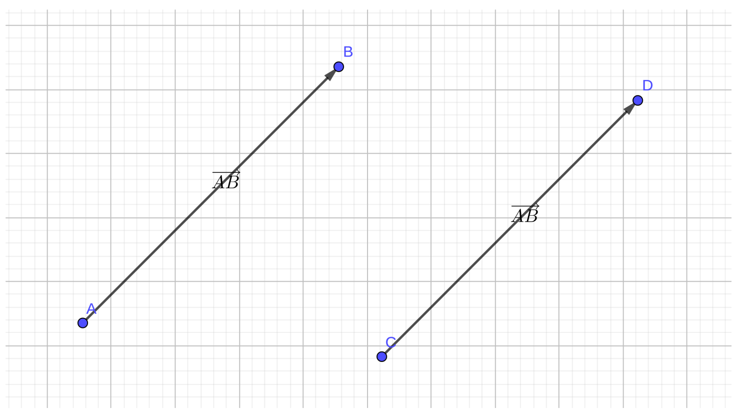


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o valor de seu comprimento e é denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

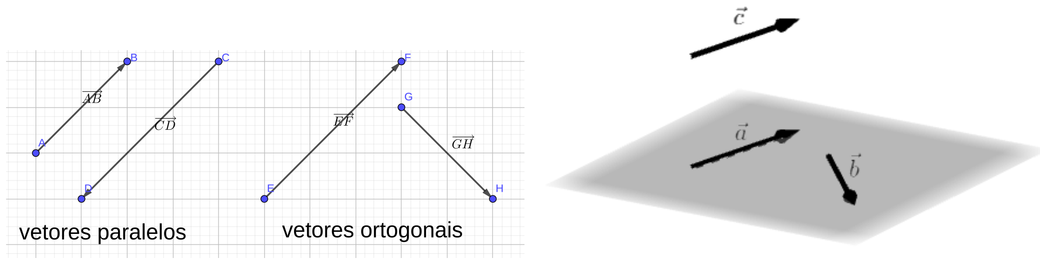


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sejam, ainda, uma representação $\overrightarrow{AB}$ qualquer de u e a representação $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$. Então, define-se o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ como o vetor dado por $\overrightarrow{AC}$. Veja a Figura 1.9.

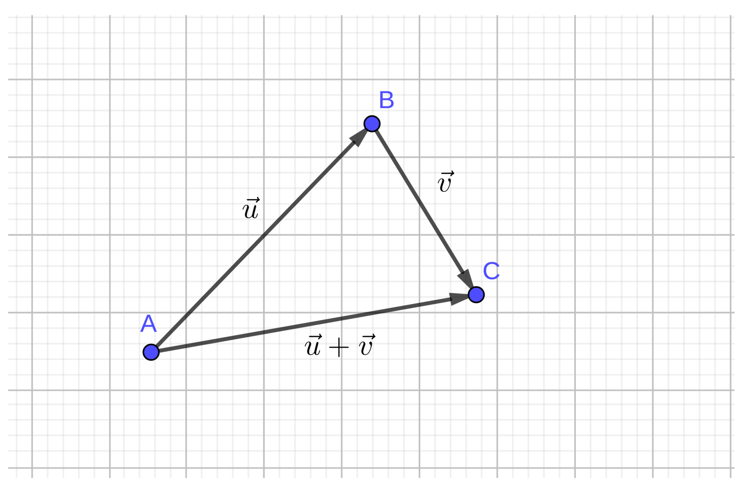


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

Licença CC-BY-SA 4.0

1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor** $\vec{v}$ é dito ser **oposto** a um dado vetor $\vec{u}$, quando quaisquer representações de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a $\vec{u}$. Veja a Figura 1.10.

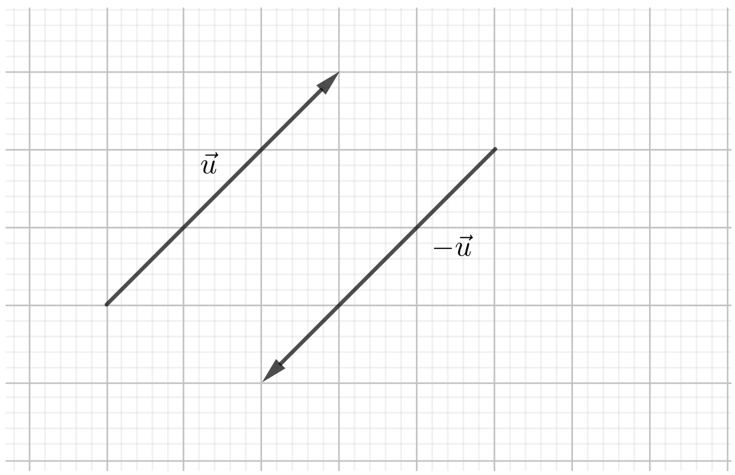


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é denotada por $\vec{u}-\vec{v}$ e é definida pela adição de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor $\vec{u}$ é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$ com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.1.
- Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.
- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

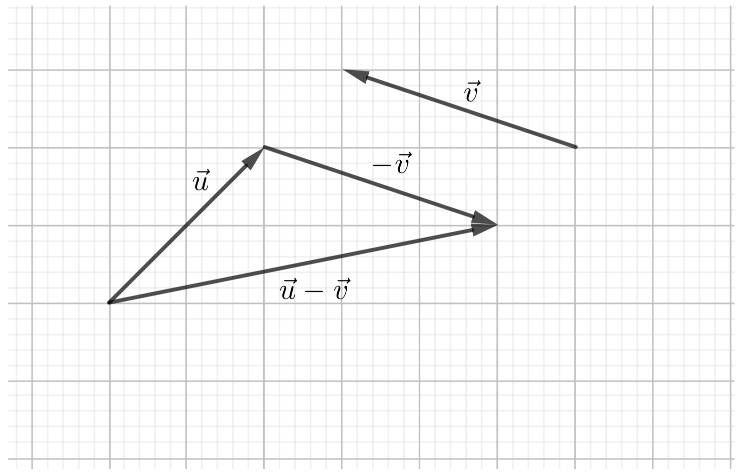


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, i.e. $\vec{u}-\vec{v}$.

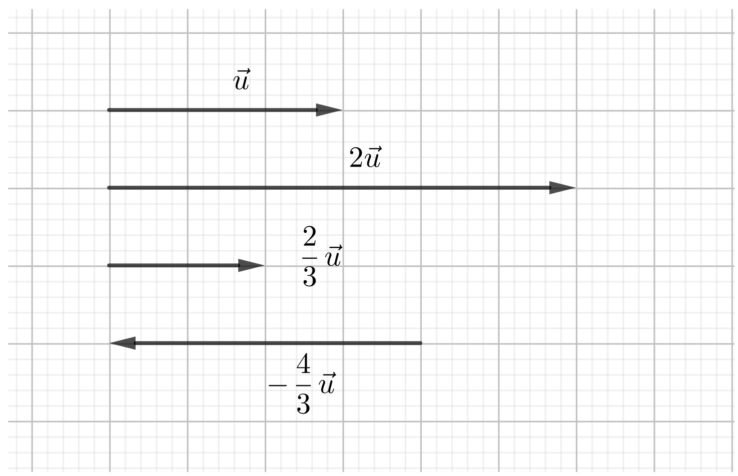


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

Licença CC-BY-SA 4.0

- associatividade da adição: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

- elemento neutro da adição: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

- existência do oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$;

- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$;

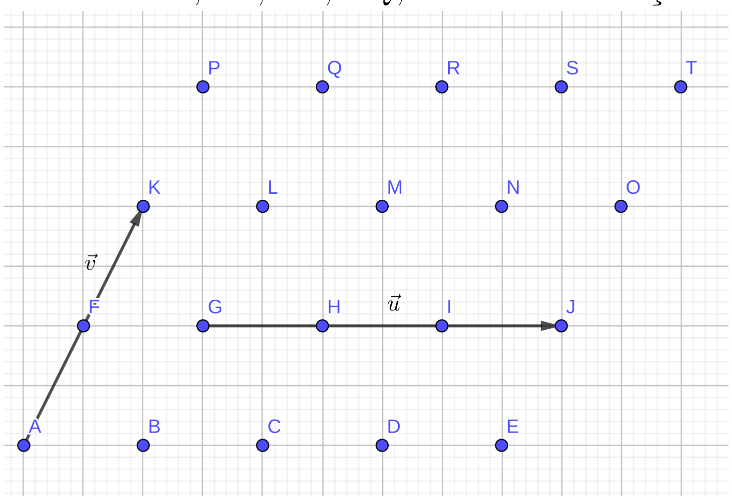
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}, \tag{1.1}$$
$$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}; \tag{1.2}$$

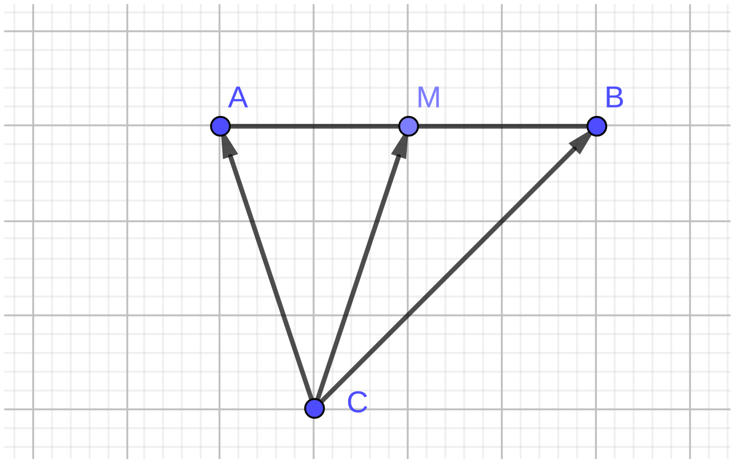
- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u}=\vec{u}$.

Exercícios

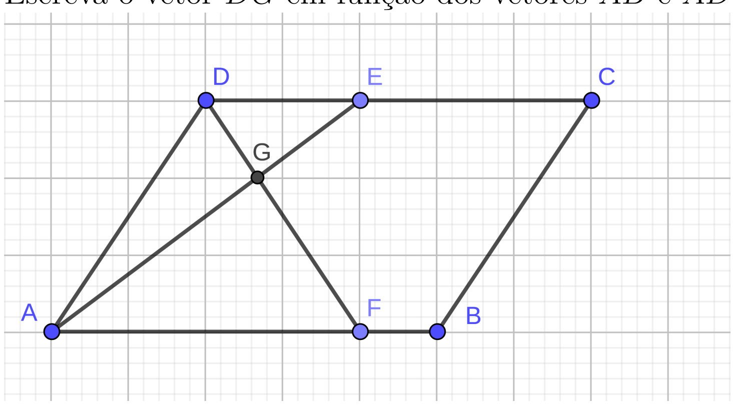
E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u}=\overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{PE}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



E 1.2.2. Sejam $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{CB}$ os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



E 1.2.3. Sejam A, B, C, D, E e G os pontos dados na figura abaixo. Escreva o vetor $\overrightarrow{DG}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



E 1.2.4. Seja dado um vetor $\vec{u} \neq 0$. Calcule a norma do vetor $\vec{v} = \vec{u}/|\vec{u}|$[1].

[1] $\vec{u}/|\vec{u}|$ é chamado de vetor $\vec{u}$ normalizado, ou a normalização do vetor $\vec{u}$.

Licença CC-BY-SA 4.0

Capítulo 2

Bases e coordenadas

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, $\ldots$, c_n, com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n \tag{2.1}$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que $\vec{u}$ é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\ldots$, $\vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor $\vec{u}$.

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Então, temos:

- $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_2} = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_3} = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_4} = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor $\vec{z}$.

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** (abreviação, l.d.) quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo 2.1.1), temos:

- $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ dependem linearmente dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_3}$ depende linearmente dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- Os vetores $\vec{u_4}$ e $\vec{z}$ são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** (abreviação, l.i.)quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Dois vetores

Dois vetores quaisquer $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são l.d. se, e somente se, qualquer uma das seguinte condições é satisfeita:

- um deles é combinação linear do outro, i.e.
$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \beta\vec{u}; \tag{2.2}$$
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção;
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Observação 2.1.1. O vetor nulo $\vec{0}$ é l.d. a qualquer vetor $\vec{u}$. De fato, temos
$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}, \tag{2.3}$$
i.e. o vetor nulo é combinação linear do vetor $\vec{u}$.

Observação 2.1.2. Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i. se, e somente se,
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{2.4}$$
De fato, se $\alpha \neq 0$, então podemos escrever
$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}, \tag{2.5}$$
i.e. o vetor $\vec{u}$ é combinação linear do vetor $\vec{v}$ e, portanto, estes vetores são l.d.. Isto contradiz a hipótese de eles serem l.i.. Analogamente, se $\beta \neq 0$, então podemos escrever
$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u} \tag{2.6}$$
e, então, teríamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ l.d..

Três vetores

Três vetores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d. quando um deles pode ser escrito como combinação linear dois outros dois. Sem perda de generalidade, isto significa que existem constantes α e β tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}. \tag{2.7}$$

Afirmamos que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d., então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares. Do fato de que dois vetores quaisquer são sempre coplanares, temos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares caso qualquer um deles seja o vetor nulo. Suponhamos, agora, que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e seja π o plano determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\alpha = 0$, então $\vec{u} = \beta\vec{w}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Analogamente, se $\beta = 0$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ e teríamos uma representação de $\vec{u}$ no plano π. Por fim, observemos que se $\alpha,\beta \neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ tem a mesma direção de $\vec{w}$. Isto é, $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$ admitem representações no plano π. Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ representações dos vetores $\alpha\vec{v}$ e $\beta\vec{w}$, respectivamente. Os pontos A, B e C pertencem a π, assim como o segmento AC. Como $\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, concluímos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Reciprocamente, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. De fato, se um deles for nulo, por exemplo, $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}$ pode ser escrito como a seguinte combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.8}$$

Neste caso, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Também, se dois dos vetores forem paralelos, por exemplo, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então temos a combinação linear

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}. \tag{2.9}$$

E, então, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d.. Agora, suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e dois a dois concorrentes. Sejam, então $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{PC} = \vec{w}$ representações sobre um plano π. Sejam r e s as retas determinadas por PA e PC, respectivamente. Seja, então, D o ponto de interseção da reta s com a reta paralela a r que passa pelo ponto B. Seja, também, E o ponto de interseção da reta r com a reta paralela a s que passa pelo ponto B. Sejam, então, α e β tais que $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{PE}$ e $\beta\vec{w} = \overrightarrow{PD}$. Como $\vec{v} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$, temos que $\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$, i.e. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.d..

Licença CC-BY-SA 4.0

Observação 2.1.3. Três vetores dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2.10}$$

De fator, sem perda de generalidade, se $\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}, \tag{2.11}$$

e teríamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores l.d..

Quatro ou mais vetores

Quatro ou mais vetores são sempre l.d.. De fato, sejam dados quatro vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$. Se dois ou três destes forem l.d. entre si, então, por definição, os quatro são l.d.. Assim sendo, suponhamos que três dos vetores sejam l.i. e provaremos que, então, o outro vetor é combinação linear desses três.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i.. Logo, eles não são coplanares. Seja, ainda, π o plano determinado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e as representações $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$.

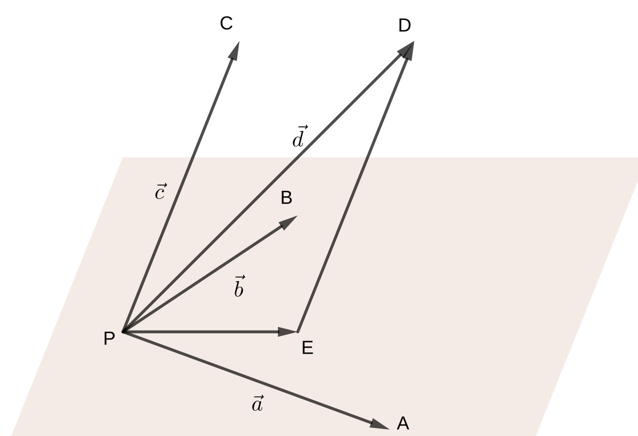


Figura 2.1: Quatro vetores são l.d..

Consideremos a reta r paralela a $\overrightarrow{PC}$ que passa pelo ponto D. Então, seja E o ponto de interseção de r com o plano π. Vejamos a Figura 2.1. Observamos que o vetor $\overrightarrow{PE}$ é coplanar aos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ e, portanto, exitem números reais α e β tal que

$$\overrightarrow{PE} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB}. \tag{2.12}$$

Além disso, como $\overrightarrow{ED}$ tem a mesma direção e sentido de $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, temos que

$$\overrightarrow{ED} = \gamma\overrightarrow{PC} \tag{2.13}$$

para algum número real γ. Por fim, observamos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{ED}\\ &= \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}\\ &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.\end{aligned}$$

Exercícios

E 2.1.1. Sendo $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, mostre que $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são l.d. para qualquer ponto P.

E 2.1.2. Sejam dados três vetores quaisquer $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Mostre que os vetores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{b} + 4\vec{c}$ são l.d..

Em construção ...

2.2 Bases e coordenadas

Seja V o conjunto de todos os vetores no espaço tridimensional. Conforme discutido na Subseção 2.1.2, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., então qualquer vetor $\vec{u} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores, i.e. existem números reais α, β e γ tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.14}$$

A observação acima motiva a seguinte definição: uma **base** de V é uma sequência de três vetores l.i. de V.

Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma dada base de V. Então, dado qualquer $\vec{v} \in V$, existe um único terno de números reais α, β e γ tais que

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{2.15}$$

De fato, a existência de *alpha*, β e γ segue imediatamente do fato de que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e, portanto, $\vec{v}$ pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Agora, para verificar a unicidade de *alpha*, β e γ, tomamos α', β' e γ' tais que

$$\vec{v} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}. \tag{2.16}$$

Subtraindo (2.16) de (2.15), obtemos

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c}. \tag{2.17}$$

Como $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i., segue que[1]

$$\alpha - \alpha' = 0,\ \beta - \beta' = 0,\ \gamma - \gamma' = 0, \tag{2.18}$$

i.e. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.

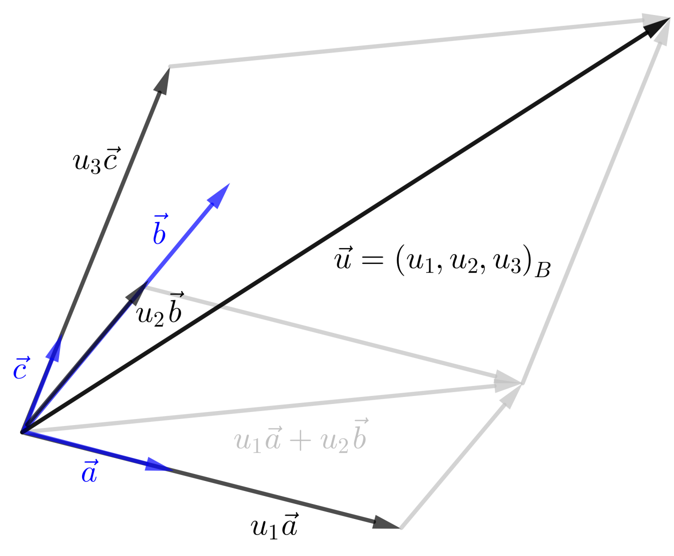


Figura 2.2: Representação de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ em uma dada base $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

[1] Lembre-se da Observação 2.1.3.

Com isso, fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, cada vetor $\vec{u}$ é representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, digamos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.19}$$

onde u_1, u_2 e u_3 são números reais fixos, chamados de **coordenadas** do $\vec{u}$ na base B. Ainda, usamos a notação

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B, \tag{2.20}$$

para expressar o vetor $\vec{u}$ nas suas coordenadas na base B. Vejamos a Figura 2.2.

Exemplo 2.2.1. Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, o vetor $\vec{u}$ de coordenadas $\vec{u} = (-2, \sqrt{2}, -3)$ é o vetor $\vec{u} = -2\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

2.2.1 Operações de vetores com coordenadas

Na Seção 1.2, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar do ponto de vista geométrico. Aqui, veremos como estas operação são definidas a partir das coordenadas de vetores.

Sejam $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V e os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Isto é, temos

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}, \tag{2.21}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}. \tag{2.22}$$

Então, a **adição** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é a soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}} + \underbrace{v_1\vec{a} + v_2\vec{b} + v_3\vec{c}}_{\vec{v}} \tag{2.23}$$

$$= (u_1 + v_1)\vec{a} + (u_2 + v_2)\vec{b} + (u_3 + v_3)\vec{c}, \tag{2.24}$$

ou seja

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_B. \tag{2.25}$$

Exemplo 2.2.2. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), -1 + 4, -3 + (-5))_B = (1,3, -8)_B. \tag{2.26}$$

De forma, análoga, o **vetor oposto** ao vetor $\vec{u}$ é

$$-\vec{u} = -(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.27}$$

$$= (-u_1)\vec{a} + (-u_2)\vec{b} + (-u_3)\vec{c}, \tag{2.28}$$

ou seja,

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)_B. \tag{2.29}$$

Exemplo 2.2.3. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$-\vec{v} = (-2, 1, 3)_B\,. \tag{2.30}$$

Lembrando que **subtração** de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é $\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$, segue

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)_B. \tag{2.31}$$

Exemplo 2.2.4. Fixada uma base qualquer B e dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, -3)_B$ e $\vec{v} = (-1, 4, -5)_B$, temos

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), -1 - 4, -3 - (-5))_B = (3, -5{,}2)_B. \tag{2.32}$$

Com o mesmo raciocínio, fazemos a **multiplicação de** um dado **número** α pelo **vetor** $\vec{u}$. Vejamos, por definição,

$$\alpha\vec{u} = \alpha(\underbrace{u_1\vec{a} + u_2\vec{b} + u_3\vec{c}}_{\vec{u}}) \tag{2.33}$$

$$= (\alpha u_1)\vec{a} + (\alpha u_2)\vec{b} + (\alpha u_3)\vec{c}, \tag{2.34}$$

ou seja,

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \tag{2.35}$$

Exemplo 2.2.5. Fixada uma base qualquer B e dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)_B$, temos

$$\frac{1}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)_B. \tag{2.36}$$

2.2.2 Dependência linear

Dois vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ são l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro, i.e. existe um número real α tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}, \tag{2.37}$$

sem perda de generalidade[2].
Fixada uma base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, temos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_B$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_B$. Com isso, a equação (2.37) pode ser reescrita como

$$(u_1, u_2, u_3)_B = \alpha(v_1, v_2, v_3)_B = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)_B, \tag{2.38}$$

donde

$$u_1 = \alpha v_1,\ u_2 = \alpha v_2,\ u_3 = \alpha v_3. \tag{2.39}$$

Ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, as coordenadas de um deles forem, respectivamente, múltiplas (de mesmo fator) das coordenadas do outro.

Exemplo 2.2.6. Vejamos os seguintes casos:

a) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.d., pois

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{2},\ -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),\ -3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right). \tag{2.40}$$

b) $\vec{u} = (2, -1, -3)$ e $\vec{v} = \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ são l.i., pois $u_1 = 1 \cdot v_1$, enquanto $u_2 = 2v_2$.

Três vetores

Na Subseção 2.1.3, discutimos que três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i. se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma. \tag{2.41}$$

Seja, então, $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base de V. Então, temos que a equação

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \tag{2.42}$$

[2] Formalmente, pode ocorrer $\vec{v} = \beta\vec{u}$.

é equivalente a

$$\alpha(u_1,u_2,u_3)_B + \beta(v_1,v_2,v_3)_B + \gamma(w_1,w_2,w_3)_B = (0,0,0)_B. \tag{2.43}$$

Esta por sua vez, nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \\ u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma = 0 \\ u_3\alpha + v_3\beta + w_3\gamma = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

Lembremos que um tal sistema tem solução única (trivial) se, e somente se, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo, i.e.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.45}$$

Exemplo 2.2.7. Fixada uma base B de V, sejam os vetores $\vec{u} = (2,1,-3)_B$, $\vec{v} = (1,-1,2)_B$ e $\vec{w} = (-2,1,1)_B$. Como

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.46}$$

$$= -2 - 4 - 3 + 6 - 4 - 1 = -8 \neq 0. \tag{2.47}$$

Exercícios

Em construção ...

2.3 Mudança de base

Sejam $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ e $C = (\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ bases do espaço V. Conhecendo as coordenadas de um vetor na base C, queremos determinar suas coordenadas na base B. Mais especificamente, seja

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)_C = z_1\vec{r} + z_2\vec{s} + z_3\vec{t}. \tag{2.48}$$

Licença CC-BY-SA 4.0

Agora, tendo $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)_B$, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)_B$ e $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)_B$, então

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3)_C &= z_1(r_1, r_2, r_3)_B + z_2(s_1, s_2, s_3)_B + z_3(t_1, t_2, t_3)_B && (2.49)\\
&= \underbrace{(r_1z_1 + s_1z_2 + t_1z_3)}_{z_1'}\vec{u} && (2.50)\\
&+ \underbrace{(r_2z_1 + s_2z_2 + t_2z_3)}_{z_2'}\vec{v} && (2.51)\\
&+ \underbrace{(r_3z_1 + s_3z_2 + t_3z_3)}_{z_3'}\vec{w} && (2.52)
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}}_{M_{CB}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \tag{2.53}$$

onde $\vec{z} = (z_1', z_2', z_3')_B$.
A matriz M_{CB} é chamada de matriz de mudança de base de C para B. Como os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{t}$ são l.i., temos que a matriz de mudança de base M_{BC} tem determinante não nulo e, portanto é invertível. Além disso, observamos que

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1}. \tag{2.54}$$

Exemplo 2.3.1. Sejam dadas as bases $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ e $C = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, com $\vec{u} = (1,2,0)_B$, $\vec{v} = (2,0,-1)_B$ e $\vec{w} = (-1,-3,1)_B$. Seja, ainda, o vetor $\vec{z} = (1,-2,1)_B$. Vamos encontrar as coordenadas de $\vec{z}$ na base C.
Há duas formas de proceder. A primeira consiste em resolver, de forma direta, a seguinte equação

$$\vec{z} = (-1,-3,1)_B = (x,y,z)_C. \tag{2.55}$$

Esta é equivalente a

$$\begin{aligned}
-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} &= x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} && (2.56)\\
&= x(\vec{a} + 2\vec{b}) + y(2\vec{a} - \vec{c}) + z(-\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) && (2.57)\\
&= (x + 2y - z)\vec{a} + (2x - 3z)\vec{b} + (-y + z)\vec{c}. && (2.58)
\end{aligned}$$

Isto nos leva ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - 3z = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \tag{2.59}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = 6/5$, $y = 4/5$ e $z = 9/5$, i.e.

$$\vec{z} = \left(\frac{6}{5},\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)_C. \tag{2.60}$$

Outra maneira de se obter as coordenadas de $\vec{z}$ na base C é usando a matriz de mudança de base. A matriz de mudança da base C para a base B é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2-1 & \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Então, a matriz de mudança da base B para a base C é $M_{BC} = M^{-1}$. Logo, $(x,y,z)_C = M_{BC}(-1,-3,1)_B$.

Exercícios

Em construção ...

2.4 Bases ortonormais

Uma **base** $B = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é dita ser **ortonormal** se, e somente se,

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são dois a dois ortogonais;
- $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Observação 2.4.1. (Teorema de Pitágoras) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

Proposição 2.4.1. *Seja* $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *uma base ortonormal e* $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)_B$. *Então,* $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Demonstração. Temos $|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}|^2$. Seja π um plano determinado por dadas representações de $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Como $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortogonais, temos que $\vec{k}$ é ortogonal ao plano π. Além disso, o vetor $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ também admite uma representação em π, logo $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{k}$. Do Teorema de Pitágoras (Observação 2.4.1), temos

$$|\vec{u}|^2 = |u_1\vec{i} + u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2. \tag{2.62}$$

Analogamente, como $\vec{i} \perp \vec{j}$, do Teorema de Pitágoras segue

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 &= |u_1\vec{i}|^2 + |u_2\vec{j}|^2 + |u_3\vec{k}|^2 && (2.63)\\ &= |u_1|^2|\vec{i}| + |u_2|^2|\vec{j}| + |u_3||\vec{k}|^2 && (2.64)\\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. && (2.65) \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da última equação, obtemos o resultado desejado. □

Exemplo 2.4.1. Se $\vec{u} = (-1,2,-\sqrt{2})_B$ e B é uma base ortonormal, então

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}. \tag{2.66}$$

Exercícios

E 2.4.1. Seja $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uma base ortogonal, i.e. $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são l.i. e dois a dois ortogonais. Mostre que $C = (\vec{a}/|\vec{a}|,\vec{b}/|\vec{b}|,\vec{c}/|\vec{c}|)$ é uma base ortonormal.

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

E 1.2.4. $|\vec{v}| = 1$.

E 2.1.1. Dica: os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são l.d..

E 2.1.2. Dica: Escreva um dos vetores como combinação linear dos outros.

Referências Bibliográficas

[1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica.* Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo

ângulo
- entre vetores, 5

base, 15

combinação linear, 11
comprimento, 1
coordenadas, 17

distância, 1

equipolentes, 4
extremidade, 2

linearmente
- dependente, 11
- independentes, 12

módulo, 5
mesmo sentido, 3

norma, 5

origem, 2

segmento, 1
segmento nulo, 2
segmento orientado, 2

vetor
- oposto, 7

vetores
- coplanares, 5
- não coplanares, 5
- ortogonais, 5
- paralelos, 5