

# Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro H A Konzen

21 de abril de 2020

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos [Python](#)<sup>1</sup> são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).


Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

---

<sup>1</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	v
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Equações diferenciais . . . . .	1
1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno . . . . .	6
<b>2 EDO de primeira ordem</b>	<b>11</b>
2.1 Equação linear . . . . .	11
2.1.1 EDO autônoma e homogênea  . . . . .	11
2.1.2 Método dos fatores integrantes . . . . .	14
2.1.3 Caso geral . . . . .	16
2.1.4 Aplicação em modelagem . . . . .	17
2.2 Equação separável . . . . .	22
2.2.1 Equação de Verhulst . . . . .	25
2.3 Equação exata . . . . .	30
2.3.1 Método dos fatores integrantes . . . . .	33
<b>3 EDO linear de ordem 2 ou mais alta</b>	<b>41</b>
3.1 EDO de ordem 2 - parte I . . . . .	41
3.1.1 Conjunto fundamental de solução . . . . .	43
3.1.2 Raízes reais distintas . . . . .	45
3.2 EDO de ordem 2 - parte II . . . . .	48
3.2.1 Raízes complexas . . . . .	48

3.2.2	Raízes repetidas . . . . .	51
3.3	EDO de ordem 2 - parte III . . . . .	56
3.3.1	Método da variação dos parâmetros . . . . .	57
3.3.2	Método dos coeficientes a determinar . . . . .	60
3.4	EDO de ordem 2 - parte IV . . . . .	68
3.4.1	Equação de Euler . . . . .	68
3.4.2	Solução em série de potências . . . . .	73
3.5	EDO de ordem mais alta . . . . .	78
3.5.1	EDO homogênea . . . . .	78
3.5.2	Equação não homogênea . . . . .	81
<b>Respostas dos Exercícios</b>		<b>84</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>87</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre Equações Diferenciais (ED). Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

**Observação 1.0.1.** Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#)<sup>1</sup> com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

### 1.1 Equações diferenciais

**Equação Diferencial (ED)** é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita.

**Exemplo 1.1.1.** São exemplos de equações diferenciais:

a) Modelo de queda de um corpo com resistência do ar.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \quad (1.1)$$

Nesta equação, temos a velocidade  $v = v(t)$  ( $v$  função de  $t$ ) como **incógnita**. O tempo é descrito por  $t$  como uma variável independente. As demais letras correspondem a parâmetros dados (constantes). Mais especificamente,  $g$  corresponde à gravidade,  $k$  à resistência do ar e  $m$  à massa do corpo.

---

<sup>1</sup>Veja a Observação 1.0.1.

b) Equação de Verhulst (Equação Logística)

$$\frac{dy}{dt} = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y. \quad (1.2)$$

Esta equação é um clássico modelo de crescimento populacional. Aqui,  $y = y(t)$  é o tamanho da população (incógnita) no tempo  $t$  (variável independente). As demais letras correspondem a parâmetros dados.

c) Equação de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{kx^2}{2} \psi = E\psi. \quad (1.3)$$

Esta equação modela a função de onda  $\psi$  (incógnita) de uma partícula em função de sua posição  $x$  (modelo unidimensional). Neste modelo quântico,  $\hbar$ ,  $m$ ,  $k$  e  $E$  são parâmetros.

d) Modelagem da corrente em um circuito elétrico.

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E. \quad (1.4)$$

Aqui, a incógnita é função corrente  $I$  em função do tempo. O modelo refere-se a um circuito elétrico com os seguintes parâmetros:  $L$  indutância,  $R$  resistência,  $C$  capacitância e  $E$  voltagem do gerador.

e) Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura (incógnita)  $u = u(t, x)$  como função do tempo e da posição (variáveis independentes). O parâmetro é o coeficiente de difusão térmica  $\alpha$ .

**Equação Diferencial Ordinária (EDO)** é aquela em a incógnita é função apenas de uma variável independente. Desta forma, todas as derivadas que aparecem na equação são ordinárias. No Exemplo 1.1.1, as equações diferenciais a), b), c) e d) são ordinárias. A equação e) não é ordinária, pois a incógnita  $u = u(t, x)$  é função das variáveis independentes  $t$  e  $x$ , portanto, os termos diferenciais são parciais (derivadas parciais). Equações como esta são chamadas de equações diferenciais parciais.

Toda EDO pode ser escrita na seguinte forma geral

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.6)$$

Aqui,  $F$  é uma função envolvendo a variável independente  $t$  e a variável dependente  $y = y(t)$  (incógnita, função de  $t$ ) e pelo menos uma derivada ordinária de  $y$  em relação a  $t$ <sup>2</sup>. O índice  $n$  corresponde a **ordem** da derivada de maior ordem que aparece na equação, sendo  $n \geq 1$ . Quando  $F$  é função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , então a EDO é dita ser **linear**, caso contrário, é **não linear**. Quando  $F$  não depende explicitamente de  $t$ , a equação é dita ser **autônoma**.

**Exemplo 1.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) A equação

$$y'' + y = 0 \quad (1.7)$$

é uma EDO de ordem 2, linear e autônoma. Aqui, temos  $F(y, y'') = y'' + y$ .

b) As equações (1.1) e (1.2) são EDOs de **primeira ordem** (de ordem 1), autônomas e não lineares.

c) A Equação de Schrödinger (1.3) é uma EDO de **segunda ordem**, linear e não autônoma.

Uma **solução** de uma EDO (1.6) é uma função  $y = y(t)$  que satisfaça a equação para todos os valores de  $t$ <sup>3</sup>.

**Exemplo 1.1.3.** As funções  $y_1(t) = e^t$  e  $y_2(t) = e^{-t}$  são soluções da equação diferencial ordinária

$$y'' - y = 0. \quad (1.8)$$

De fato, tomando  $y = y_1(t) = e^t$ , temos  $y'' = e^t$  e

$$y'' - y = e^t - e^t = 0 \quad (1.9)$$

para todo  $t$ . Também, tomando  $y = y_2(t) = e^{-t}$ , temos  $y'' = e^{-t}$  e

$$y'' - y = e^{-t} - e^{-t} = 0, \quad \forall t. \quad (1.10)$$

No [Python](#)<sup>4</sup>, podemos usar:

---

<sup>2</sup>Lembre-se que  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$  e assim por diante.

<sup>3</sup>Em várias situações o domínio de interesse de  $t$  é também informado junto com a equação. Veremos isso mais adiante.

<sup>4</sup>Veja a Observação 1.0.1.



```

In : t = symbols('t')
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : de = Eq(Derivative(y(t),t,t)-y(t) ,0)
In : y1 = exp(t)
In : checkodesol(de,y1)
Out: (True, 0)
In : y2 = exp(-t)
In : checkodesol(de,y2)
Out: (True, 0)

```

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Determine a ordem e diga se a seguinte EDO é linear ou autônoma. Justifique suas respostas.

$$t^2 \frac{dy}{dt} + (1 + y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t. \quad (1.11)$$

**Solução.**

a) Ordem 2.

A equação tem ordem 2, pois o termo diferencial de maior ordem é uma derivada de segunda ordem.

b) EDO é não linear.

A equação tem um termo  $y^2 \frac{d^2y}{dt^2}$ , o qual não é linear em  $y$ .

c) EDO não é autônoma.

A equação não é autônoma, pois a variável independente  $t$  aparece explicitamente. A saber, no primeiro termo do lado esquerdo e no termo fonte da equação.

◇

**ER 1.1.2.** Determine os valores de  $r$  para os quais  $y = e^{rt}$  é solução da equação

$$y'' - y = 0. \quad (1.12)$$

**ER 1.1.3.** Para que  $y = e^{rt}$  seja solução da equação dada, devemos ter

$$y'' - y = 0 \Rightarrow (e^{rt})'' - e^{rt} = 0 \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow r^2 e^{rt} - e^{rt} = 0 \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow (r^2 - 1) \cdot \underbrace{e^{rt}}_{>0} = 0 \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 = 0 \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow r = \pm 1. \quad (1.17)$$

No [Python](#)<sup>5</sup>, podemos computar a solução deste problema com os seguintes comandos:

```
In : r = symbols('r')
In : eq = diff(exp(r*t),t,2)-exp(r*t)
In : solve(eq,r)
Out: [-1, 1]
```

## Exercícios

**E 1.1.1.** Determine quais das seguintes são EDOs. Justifique sua resposta.

a)  $y = y''$ .

b)  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x}$ .

c)  $y \cdot \frac{d^5 y}{dx^5} = x \ln(y) + \frac{d}{dx} e^{x^2}$ .

d)  $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ , sendo  $\alpha$  um parâmetro.

**E 1.1.2.** Determine a ordem das seguintes EDOs. Justifique sua resposta.

a)  $t^2 y' = e^t$ .

b)  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^3 y}{dt^3}$ .

---

<sup>5</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

c)  $y \cdot y'' - 3y'' = y - y'$ .

d)  $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = e^t$ .

**E 1.1.3.** Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 não são autônomas. Justifique sua resposta.

**E 1.1.4.** Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 são lineares. Justifique sua resposta.

**E 1.1.5.** Para cada equação a seguir, calcule os valores de  $r$  para os quais  $y = e^{rt}$  seja solução da equação.

a)  $y'' + y' - 6y = 0$ .

b)  $y''' = 3y''$ .

**E 1.1.6.** Calcule os valores de  $\alpha$  para os quais  $y = t^\alpha$ ,  $t > 0$ , seja solução da equação

$$t^2 y'' = 2y. \quad (1.18)$$

## 1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) pode ter infinitas soluções.

**Exemplo 1.2.1.** A EDO

$$y' = 1 \quad (1.19)$$

tem soluções

$$\int y' dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y = t + c, \quad (1.20)$$

onde  $c$  é uma constante indeterminada.

Afim de fixar uma solução única para tais EDOs, comumente define-se uma **condição inicial** apropriada, i.e. o valor da solução para um dado valor da variável independente. O problema de resolver uma EDO com condição inicial dada é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI).

**Exemplo 1.2.2.** No exemplo anterior,  $t$  é a variável independente. Assim, por exemplo,

$$y(t_0) = y(0) = 1 \quad (1.21)$$

é um exemplo de uma condição inicial. Neste caso, determinamos a constante  $c$  com

$$y(t) = t + c \Rightarrow y(0) = 0 + c = 1 \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow c = 1. \quad (1.23)$$

Ou seja, a solução deste problema de valor inicial é  $y(t) = t + 1$ .

EDOs de segunda ordem podem requer duas condições iniciais.

**Exemplo 1.2.3.** Consideramos o seguinte problema de valores iniciais

$$y'' = 1, \quad (1.24)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \quad (1.25)$$

Integrando a EDO, obtemos

$$\int y'' dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y' = t + c_1. \quad (1.26)$$

Integrando novamente

$$\int y' dt = \int t + c_1 dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.27)$$

Com isso, obtemos a chamada **solução geral** desta EDO

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.28)$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0 \quad (1.29)$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1. \quad (1.30)$$

Da segunda condição, obtemos  $c_1 = 0$ . Logo, da primeira, obtemos  $c_2 = -\frac{1}{2}$ . Portanto, a solução deste PVI de ordem 2 é:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}. \quad (1.31)$$

**Observação 1.2.1.** Observe que o número de condições iniciais é igual à ordem da EDO.

No caso de EDOs de ordem 2, também podemos fixar uma solução através da aplicação de **condições de contorno**. Neste caso, estamos interessados em obter a solução para valores da variável independente restritos a um intervalo fechado  $[t_0, t_1]$ . A solução é fixada pela determinação de seus valores nos pontos  $t_0$  e  $t_1$ . O problema de encontrar a solução de uma EDO com condições de contorno, é chamado de **Problema de Valor de Contorno (PVC)**.

**Exemplo 1.2.4.** Consideramos o seguinte problema de valores de contorno

$$y'' = 1, \quad 0 < t < 1, \quad (1.32)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}. \quad (1.33)$$

Integrando duas vezes a EDO, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.34)$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, \quad (1.35)$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = 0. \quad (1.36)$$

Desta forma, temos que a solução do PVC é

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1. \quad (1.37)$$

**Observação 1.2.2.** O número de constantes indeterminadas na solução geral está relacionado à ordem da EDO.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y' = t + 1, \quad t > 0, \quad (1.38)$$

$$y(0) = 2. \quad (1.39)$$

**Solução.** Integrando a EDO obtemos

$$\int y' dt = \int t + 1 dt \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + t + c, \quad (1.40)$$

a qual é a solução geral da EDO.

Então, aplicando a condição inicial  $y(0) = 2$ , obtemos

$$c = 2. \quad (1.41)$$

Logo, a solução do PVC é  $y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 2$ .

◇

**ER 1.2.2.** Encontre a solução do seguinte problema de valor de contorno (PVC)

$$y'' = t + 1, \quad -1 < t < 1, \quad (1.42)$$

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (1.43)$$

**Solução.** Integrando duas vezes a EDO, obtemos

$$y'' = t + 1 \Rightarrow \int y'' dt = \int t + 1 dt \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{t^2}{2} + t + c_1 \quad (1.45)$$

$$\Rightarrow \int y' dt = \int \frac{t^2}{2} + t + c_1 dt \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.47)$$

Obtida a solução geral da EDO, aplicamos as condições de contorno

$$y(-1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 0 \quad (1.48)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0. \quad (1.49)$$

Ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema linear

$$-c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \quad (1.50)$$

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}. \quad (1.51)$$

Resolvendo, obtemos  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = \frac{1}{6}$ .

◇

**ER 1.2.3.** Determine o valor de  $x$  para o qual a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad x > 0, \quad (1.52)$$

$$y(0) = 0, \quad (1.53)$$

atinge seu valor máximo.

**Solução.** Lembramos que a monotonicidade de  $y = y(x)$  pode ser analisada a partir do estudo de sinal de  $dy/dx$ . Fazendo o estudo de sinal de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad (1.54)$$

vemos que  $dy/dx > 0$  para  $x \in (0, \ln 2)$  e  $dy/dx < 0$  para  $x \in (\ln 2, \infty)$ . Logo, temos que  $y = y(x)$  é crescente em  $[0, \ln 2]$  e decrescente em  $[\ln 2, \infty)$ . Desta forma, concluímos que a solução do PVI atinge seu valor máximo em  $x = \ln 2$ .

◇

## Exercícios

**E 1.2.1.** Resolva o seguinte PVI

$$y' = 0, \quad y(-1) = 1. \quad (1.55)$$

**E 1.2.2.** Resolva o seguinte PVI

$$y' = t, \quad y(-1) = 1. \quad (1.56)$$

**E 1.2.3.** Resolva o seguinte PVC

$$y'' = 1, \quad (1.57)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1. \quad (1.58)$$

**E 1.2.4.** Resolva o seguinte PVC

$$y'' = \sin(t), \quad (1.59)$$

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0. \quad (1.60)$$

# Capítulo 2

## EDO de primeira ordem

### 2.1 Equação linear

A forma geral de uma **EDO linear de primeira ordem** é

$$P(t) \frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \quad (2.1)$$

onde  $P(t) \neq 0$ ,  $Q(t)$  e  $G(t)$  são funções de  $t$ . Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (2.2)$$

escolhendo  $p(t) = Q(t)/P(t)$  e  $g(t) = G(t)/P(t)$ .

#### 2.1.1 EDO autônoma e homogênea

Primeiramente, vamos considerar o caso em que  $p(t) \equiv a \neq 0$  (constante) e  $g(t) \equiv 0$ , i.e.

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0. \quad (2.3)$$

Observamos que  $y(t) \equiv 0$  é solução trivial. Agora, para  $y(t) \neq 0$ , podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -a \quad (2.5)$$



Integrando em relação a  $t$ , obtemos

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = - \int a dt \quad (2.6)$$

$$\ln |y| = -at + c \quad (2.7)$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-at+c} \quad (2.8)$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-at} e^c \quad (2.9)$$

$$|y| = ce^{-at}, \quad (2.10)$$

onde  $c$  é uma constante indeterminada. Da definição do valor absoluto, temos esta última equação nos fornece que

$$y > 0 \Rightarrow y = |y| = ce^{-at} \quad (2.11)$$

$$y < 0 \Rightarrow -y = |y| = ce^{-at} \Rightarrow y = -ce^{-at}. \quad (2.12)$$

Lembrando que  $c$  é uma constante indeterminada, em qualquer caso, temos

$$y(t) = ce^{-at}. \quad (2.13)$$

Observamos, ainda, que tomando  $c = 0$  esta última equação também engloba a solução trivial  $y(t) \equiv 0$ .

Portanto, concluímos que a **solução geral** de (2.3) é

$$y(t) = ce^{-at}. \quad (2.14)$$

**Exemplo 2.1.1.** Vamos resolver o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' - y = 0, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.16)$$

Começamos calculando a solução geral da EDO:

$$y' = y \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 1 \quad (2.18)$$

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = \int 1 dt \quad (2.19)$$

$$\ln |y| = t + c \quad (2.20)$$

$$e^{\ln |y|} = e^{t+c} \quad (2.21)$$

$$y(t) = ce^t. \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

Por fim, aplicamos a condição inicial

$$y(0) = 1 \quad (2.24)$$

$$ce^0 = 1 \quad (2.25)$$

$$c = 1 \quad (2.26)$$

Concluimos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^t. \quad (2.27)$$

No [Python](#)<sup>1</sup>, podemos computar a solução solução geral da EDO com os seguintes comandos:

```
In : t = symbols('t')
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : edo = Eq(y(t).diff(t)-y(t),0)
In : sol = dsolve(edo,y(t))
In : sol
Out: Eq(y(t), C1*exp(t))
```

Então, para aplicarmos a condição inicial e obtermos a solução do PVI, usamos:

```
In : C1 = symbols('C1')
In : cs = solve(Eq(sol.rhs.subs(t,0),1),dict=True)
```

---

<sup>1</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

```
In : cs
Out: [{C1: 1}]
```

```
In : sol.subs(cs[0])
Out: Eq(y(t), exp(t))
```

## 2.1.2 Método dos fatores integrantes

Vejam, agora, o caso de uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t). \quad (2.28)$$

O **método dos fatores integrantes** consiste em multiplicarmos a equação por uma função  $\mu = \mu(t)$  (fator integrante) de forma que

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \frac{d}{dt} (\mu y). \quad (2.29)$$

Pela regra do produto para derivada, temos que

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu \frac{dy}{dt} + \mu' y. \quad (2.30)$$

Ou seja, tal função  $\mu$  deve satisfazer a seguinte EDO

$$\mu' = a\mu. \quad (2.31)$$

Usando o mesmo procedimento utilizado para (2.3), obtemos que

$$\mu(t) = ce^{at}. \quad (2.32)$$

Observamos que qualquer escolha de  $c \neq 0$  é apropriada e, por simplicidade, escolhemos  $c = 1$ . Ou seja, escolhemos o fator integrante

$$\mu(t) = e^{at}. \quad (2.33)$$

Agora, retornamos a equação (2.28). Multiplicando-a pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{at}$ , obtemos

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu g(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu y) = \mu g(t) \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \int d(\mu y) = \int \mu g(t) dt \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow \mu y = \int \mu g(t) dt + c \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu} \left[ \int \mu g(t) dt + c \right]. \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) = e^{-at} \left[ \int g(t) e^{at} dt + c \right] \quad (2.39)$$

é a **solução geral** de (2.28).

**Exemplo 2.1.2.** Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' - y = 1. \quad (2.40)$$

Aplicando o método dos fatores integrantes, temos

$$\mu y' - \mu y = (\mu y)' \quad (2.41)$$

$$= \mu' y + \mu y'. \quad (2.42)$$

Ou seja, devemos escolher  $\mu$  tal que

$$\mu' = -\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -1 \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu = - \int 1 dt \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = -t + c \quad (2.45)$$

$$\Rightarrow \mu = ce^{-t}. \quad (2.46)$$

Por simplicidade, escolhemos  $\mu = e^{-t}$ .

Com isso, a EDO (2.40) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} (\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{-t} y) = e^{-t}. \quad (2.47)$$

Integrando, obtemos

$$e^{-t}y = \int e^{-t} dt \Rightarrow e^{-t}y(t) = -e^{-t} + c \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow y(t) = -e^t e^{-t} + ce^t \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow y(t) = -1 + ce^t, \quad (2.50)$$

a qual é a solução geral.

### 2.1.3 Caso geral

O caso geral de uma EDO linear de primeira ordem

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (2.51)$$

também pode ser resolvido pelo **método dos fatores integrantes**. Neste caso, o fator integrante  $\mu = \mu(t)$  deve ser escolhido de forma que

$$\mu y' + \mu p(t)y = (\mu y)' \quad (2.52)$$

$$= \mu' y + \mu y', \quad (2.53)$$

ou seja

$$\mu' = p(t)\mu. \quad (2.54)$$

Integrando, obtemos o **fator integrante**

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (2.55)$$

Usando este fator integrante, a equação (2.51) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu g(t). \quad (2.56)$$

Integrando, obtemos a **solução geral**

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int \mu(t)g(t) dt + c \right]. \quad (2.57)$$

**Exemplo 2.1.3.** Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = t. \quad (2.58)$$

Primeiramente, calculamos o fator integrante  $\mu = \mu(t)$  tal que

$$\mu y' + \mu \frac{1}{t}y = (\mu y)' = \mu' y + \mu y'. \quad (2.59)$$

Ou seja, precisamos que

$$\mu' = \frac{1}{t}\mu. \quad (2.60)$$

Integrando, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} \quad (2.61)$$

$$= e^{\ln |t|} \quad (2.62)$$

$$= t. \quad (2.63)$$

Aplicando o fator integrante a EDO (2.58), obtemos

$$\frac{d}{dt}(ty) = t^2 \Rightarrow ty = \int t^2 dt \quad (2.64)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{t} \left[ \frac{t^3}{3} + c \right] \quad (2.65)$$

$$\Rightarrow y = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}. \quad (2.66)$$

## 2.1.4 Aplicação em modelagem

**Exemplo 2.1.4.** (Mistura em tanque) No instante inicial  $t = 0$  s (segundo), um tanque contem  $q_0$  kg (quilograma) de sal dissolvido em  $l$  L (litro) de água. Uma solução de  $s$  kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de  $r$  L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de  $r$  L/s.

Vamos modelar a quantidade de sal  $q$  kg presente no tanque a cada instante  $t$  s. Temos que  $q$  é função do tempo  $t$  s, i.e.  $q = q(t)$ . A condição inicial é

$$q(0) = q_0. \quad (2.67)$$

A taxa de variação de  $q$  no tempo é  $dq/dt$  e é modelada por

$$\frac{dq}{dt} = \underbrace{sr}_{\text{taxa de entrada}} - \underbrace{\frac{q}{l}r}_{\text{taxa de saída}}. \quad (2.68)$$

Ou seja, o problema é modelado como o seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = sr - \frac{q}{l}r, \quad t > 0, \quad (2.69)$$

$$q(0) = q_0, \quad (2.70)$$

onde  $s$ ,  $r$ ,  $l$  e  $q_0$  são parâmetros do problema. A EDO relacionada é linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Veja o Exercício Resolvido ??.

**Exemplo 2.1.5.** (Objeto em queda livre) Seja  $m$  kg a massa de um objeto em queda livre em um meio com resistência de  $\gamma$  kg/s e aceleração da gravidade de  $g$  m/s<sup>2</sup>. A segunda lei de Newton é a lei física que estabelece que a força total atuando sobre o objeto é igual a sua massa multiplicada por sua aceleração. Desta forma, obtemos

$$\underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{\text{massa} \times \text{aceleração}} = \underbrace{mg}_{\text{força da gravidade}} - \underbrace{\gamma v}_{\text{força da resistência}}, \quad (2.71)$$

onde  $v = v(t)$  m/s é a velocidade do objeto (sentido positivo igual ao da força da gravidade). Assumindo que o objeto tem velocidade  $v_0$  m/s no instante inicial  $t = 0$ , o modelo resume-se ao seguinte PVI:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \quad t > 0, \quad (2.72)$$

$$v(0) = v_0, \quad (2.73)$$

onde  $m$ ,  $g$ ,  $\gamma$  e  $v_0$  são parâmetros.

## Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Resolva o seguinte PVI

$$y' + y = 1, \quad t > 0, \quad (2.74)$$

$$y(0) = 2. \quad (2.75)$$

**Solução.** Primeiramente, obtemos a solução geral da EDO pelo método dos fatores integrante. Para tanto, buscamos pelo fator integrante  $\mu$  tal que

$$\mu y' + \mu y = (\mu y)', \quad (2.76)$$

ou seja,

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = e^t. \quad (2.77)$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^t y) = e^t. \quad (2.78)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y = 1 + ce^{-t}. \quad (2.79)$$

Aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + ce^{-0} = 2 \quad (2.80)$$

$$\Rightarrow c = 1. \quad (2.81)$$

Concluimos que a solução do PVI é  $y(t) = 1 + e^{-t}$ .

◇

**ER 2.1.2.** Calcule a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = \text{sen}(t), \quad t > 0. \quad (2.82)$$

**Solução.** Buscamos pelo fator integrante  $\mu$  tal que

$$\mu y' + \mu \frac{1}{t}y = (\mu y)', \quad (2.83)$$

ou seja,

$$\mu' = \frac{\mu}{t} \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln|t|} = t. \quad (2.84)$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot \text{sen}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = t \text{sen}(t). \quad (2.85)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{c}{t} + \frac{\text{sen}(t)}{t} - \cos(t). \quad (2.86)$$



◇

**ER 2.1.3.** (Mistura em tanque) No instante inicial  $t = 0$  s (segundo), um tanque contem 100 kg de sal dissolvidos em 1000 L d'água. Uma solução de 0,2 kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de 10 L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de sal misturado no tanque após 1 hora de operação, i.e. quando  $t = 3600$  s.

**Solução.** Denotando por  $q = q(t)$  kg a quantidade de sal misturado no tanque no instante  $t$ , temos que a taxa de variação de  $q$  no tempo é dada por

$$\frac{dq}{dt} = 0,2 \cdot 10 - \frac{q}{1000} \cdot 10 \quad (2.87)$$

$$= 2 - \frac{q}{100}. \quad (2.88)$$

Ou seja, o modelo constitui-se no seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = 2 - \frac{q}{100}, \quad t > 0, \quad (2.89)$$

$$q(0) = 100. \quad (2.90)$$

Para resolver o problema, vamos usar o método dos fatores integrantes. O fator integrante é escolhido como sendo

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} \quad (2.91)$$

$$= e^{t/100}. \quad (2.92)$$

Segue que a EDO (2.89) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} (qe^{t/100}) = 2e^{t/100}. \quad (2.93)$$

Integrando, obtemos

$$q(t) = e^{-t/100} \int 2e^{t/100} dt \quad (2.94)$$

$$= e^{-t/100} (200e^{t/100} + c) \quad (2.95)$$

$$= 200 + ce^{-t/100}. \quad (2.96)$$

Da condição inicial, obtemos

$$q(0) = 100 \Rightarrow 200 + c = 100 \quad (2.97)$$

$$\Rightarrow c = -100. \quad (2.98)$$

Logo, a solução do PVI é

$$q(t) = 200 - 100e^{-t/100}. \quad (2.99)$$

No tempo  $t = 3600$  s, temos

$$q(3600) = 200 - 100e^{-3600/100} \approx 200 \text{ kg}. \quad (2.100)$$

◇

## Exercícios

**E 2.1.1.** Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' + y = 0, \quad t > 0, \quad (2.101)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.102)$$

**E 2.1.2.** Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' - y = 2, \quad t > 0, \quad (2.103)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.104)$$

**E 2.1.3.** Calcule a solução geral da seguinte EDO

$$y' + y = \sin(t). \quad (2.105)$$

**E 2.1.4.** Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$y' + \frac{1}{t}y = 2t, \quad t > 1, \quad (2.106)$$

$$y(1) = 0. \quad (2.107)$$

**E 2.1.5.** Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$ty' + 2y = 1, \quad t > 1, \quad (2.108)$$

$$y(1) = 1. \quad (2.109)$$

**E 2.1.6.** Seja um objeto de massa  $m = 1$  kg em queda livre sujeito a aceleração da gravidade de  $9,8 \text{ m/s}^2$  e resistência do meio de  $\gamma = 0,2 \text{ kg/s}$ . Assuma, ainda, que o objeto está em repouso no tempo inicial e a uma altura de 10 m (metros) do solo. Quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.

## 2.2 Equação separável

Uma EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.110)$$

é dita ser uma **equação separável** quando pode ser reescrita na seguinte forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.111)$$

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos.

a) É separável a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad (2.112)$$

pois pode ser reescrita como segue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = x^2 \quad (2.113)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.114)$$

b) Não é separável a EDO

$$e^{xy} - x \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.115)$$

Observe que não há como reescrever esta equação na forma (2.111).

Agora, vamos ver como podemos resolver uma EDO separável. Consideremos a equação separável

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.116)$$

Sejam, também,  $F = F(x)$  e  $G = G(y)$  primitivas de  $M$  e  $N$ , respectivamente. I.e.

$$\frac{d}{dx}F(x) = M(x), \quad (2.117)$$

$$\frac{d}{dy}G(y) = N(y). \quad (2.118)$$

Lembrando que  $y = y(x)$ , temos da **regra da cadeia** que

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \frac{dy}{dx} \quad (2.119)$$

$$= N(y) \frac{dy}{dx}. \quad (2.120)$$

Ou seja, a EDO (2.116) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(y) = 0 \quad (2.121)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(y)) = 0. \quad (2.122)$$

Então, integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$F(x) + G(y) = c, \quad (2.123)$$

a qual é uma equação algébrica para  $y$  que, com sorte, pode ser usada para explicitar a solução da EDO (2.116).

**Exemplo 2.2.2.** Vamos resolver a seguinte EDO separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}. \quad (2.124)$$

a) **Método 1.** Primeiramente, reescrevemos a EDO no formato (2.111):

$$\underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.125)$$

Então, calculamos as primitivas

$$F(x) = \int M(x) dx \quad (2.126)$$

$$= \int -x^2 dx \quad (2.127)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + c \quad (2.128)$$

e

$$G(y) = \int N(y) dy \quad (2.129)$$

$$= \int y dy \quad (2.130)$$

$$= \frac{y^2}{2} + c. \quad (2.131)$$

Então, segue que a EDO resume-se a seguinte equação algébrica

$$F(x) + G(y) = c \Rightarrow -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c, \quad (2.132)$$

a qual é uma equação implícita da solução geral  $y = y(x)$ .

b) **Método 2.** A EDO separável

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2.133)$$

pode ser reescrita como

$$y dy = x^2 dx. \quad (2.134)$$

Integrando ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c, \quad (2.135)$$

a qual é equivalente a solução obtida em (2.132).

**Observação 2.2.1.** Como vimos no exemplo anterior (Exemplo 2.2.2), a solução geral de uma EDO separável nem sempre pode ser explicitada. Em muitos casos o procedimento de separar as variáveis nos leva a obter a solução da EDO na forma de uma equação algébrica implícita.

### 2.2.1 Equação de Verhulst

A **equação de Verhulst**<sup>2</sup> (ou **equação logística**) é um clássico modelo de crescimento populacional. Trata-se da seguinte equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (2.136)$$

onde  $y$  é a medida de tamanho da população e os parâmetros são:  $r > 0$  a taxa de crescimento intrínseca e  $K > 0$  o nível de saturação.

Antes de resolvermos esta equação, vamos fazer algumas observações que podem ser obtidas diretamente da EDO. Do cálculo, temos que se  $dy/dt = 0$  para todos os valores de  $t$ , então  $y$  é constante, i.e. a população se mantém constante. A derivada é nula quando o lado direito de (2.136) for nulo, i.e.

$$r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y = 0. \quad (2.137)$$

Isso ocorre quando  $y = 0$  ou quando  $y = K$ . Ou seja, se a população é nula não há crescimento populacional, bem como, não há crescimento se a população estiver em seu nível de saturação.

Agora, o que ocorre se a população for  $0 < y < K$ ? Neste caso, temos

$$\frac{dy}{dt} = r \underbrace{\left(1 - \frac{y}{K}\right)}_{>0} y > 0, \quad (2.138)$$

ou seja, a população cresce. Por outro lado, se  $y > K$  (a população está acima de seu nível de saturação), então

$$\frac{dy}{dt} = r \underbrace{\left(1 - \frac{y}{K}\right)}_{<0} y < 0, \quad (2.139)$$

a população decresce. Estas conclusões também nos levam a inferir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K, \quad (2.140)$$

para qualquer população inicial não nula.

---

<sup>2</sup>Pierre François Verhulst, 1804-1849, matemático belga.

## Solução da equação logística

Consideramos o seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad t > 0, \quad (2.141)$$

$$y(0) = y_0. \quad (2.142)$$

A equação de Verhulst é uma EDO separável, daí segue que

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y} dy = r dt. \quad (2.143)$$

Vamos integrar o lado direito desta última equação:

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y} dy = \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} \right) dy \quad (2.144)$$

$$= \ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right|. \quad (2.145)$$

Logo, a solução da equação logística satisfaz a seguinte equação algébrica

$$\ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| = rt + c, \quad (2.146)$$

onde  $c$  é uma constante a determinar. Antes, observamos que esta equação é equivalente a

$$\ln \left| \frac{y}{1 - \frac{y}{K}} \right| = rt + c. \quad (2.147)$$

Aplicando a função exponencial, obtemos

$$\frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}. \quad (2.148)$$

Da condição inicial  $y(0) = y_0$ , encontramos

$$c = \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \quad (2.149)$$

Agora, isolando  $y$  em (2.148), vemos que

$$y = \frac{ce^{rt}}{1 + \frac{c}{K}e^{rt}} \quad (2.150)$$

$$= \frac{K}{\frac{K}{c}e^{-rt} + 1} \quad (2.151)$$

Por fim, de (2.149), obtemos a solução

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \quad (2.152)$$

Da solução, corroboramos que a população permanece constante quando  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = K$ . Ainda, se  $0 < y_0 < K$  ou  $y_0 > K$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} \rightarrow 0 \quad (2.153)$$

$$= K. \quad (2.154)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.2.1.** Calcule a solução geral da EDO

$$y' = 2y^2 + xy^2. \quad (2.155)$$

**Solução.** Separando as variáveis, obtemos

$$y' = 2y^2 + xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(2 + x) \quad (2.156)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = (2 + x) dx. \quad (2.157)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c. \quad (2.158)$$

◇

**ER 2.2.2.** Calcule a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad x > 0, \quad y(0) = 2. \quad (2.159)$$

**Solução.** Separamos as variáveis e integramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y dy = x^2 dx \quad (2.160)$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int x^2 dx \quad (2.161)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c. \quad (2.162)$$



Determinamos a constante  $c$  pela aplicação da condição inicial  $y(0) = 1$ . Ou seja, temos

$$\frac{y^2(0)}{2} = \frac{0^3}{3} + c \Rightarrow c = 2. \quad (2.163)$$

Logo, a solução  $y = y(x)$  do PVI é dada pela equação algébrica

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2. \quad (2.164)$$

Buscando explicitar a solução, observamos que

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \quad (2.165)$$

Lembrando que  $y(0) = 2$ , temos necessariamente que

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \quad (2.166)$$

◇

**ER 2.2.3.** (Crescimento populacional com limiar) Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left( 1 - \frac{y}{L} \right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ . Forneça os valores de  $y_0$  para os quais a população é crescente.

**Solução.** A população  $y$  é crescente quando

$$\frac{dy}{dt} > 0. \quad (2.167)$$

Logo, precisamos ter

$$-r \left( 1 - \frac{y}{L} \right) y > 0. \quad (2.168)$$

Isto ocorre quando

$$1 - \frac{y}{L} < 0 \Rightarrow y > L. \quad (2.169)$$

Logo, concluímos que uma população inicial  $y_0 > L$  é necessária para produzir uma taxa de crescimento populacional positiva.

◇

## Exercícios

**E 2.2.1.** Calcule a solução de

$$\frac{dy}{dx} = xe^y, \quad x > 0, \quad (2.170)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.171)$$

**E 2.2.2.** Resolva a EDO

$$y' + y^2 \cos x = 0. \quad (2.172)$$

**E 2.2.3.** Resolva o PVI

$$e^{x+y}y' = 1, \quad x > 0, y(0) = 0. \quad (2.173)$$

**E 2.2.4.** Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ . Qual é a tendência da população  $y = y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e

- a)  $y_0 = 0$ ;
- b)  $0 < y_0 < L$ ;
- c)  $y_0 = L$ ;
- d)  $y_0 > L$

**E 2.2.5.** Resolva o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ .

**E 2.2.6.** Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r > 0$ ,  $K > L > 0$ . Qual é a tendência da população  $y = y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e

- a)  $y_0 = 0$ ;
- b)  $0 < y_0 < L$ ;
- c)  $y_0 = L$
- d)  $L < y_0 < K$ ;
- e)  $y_0 = K$
- f)  $y_0 > K$

## 2.3 Equação exata

Uma EDO

$$M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.174)$$

é uma **equação exata** quando

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y). \quad (2.175)$$

Neste caso, pode-se calcular uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.176)$$

Com isso, a EDO (2.174) é equivalente a

$$\frac{d}{dx} \Psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \Psi + \frac{\partial}{\partial y} \Psi \frac{dy}{dx} \quad (2.177)$$

$$= M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} \quad (2.178)$$

$$= 0. \quad (2.179)$$

Logo, temos a **solução geral**

$$\Psi(x,y) = c. \quad (2.180)$$

**Exemplo 2.3.1.** Vamos resolver a seguinte EDO

$$(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.181)$$

Denotamos

$$M(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2, \quad (2.182)$$

$$N(x,y) = 6y^2 - x^2 + 3. \quad (2.183)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = -2x, \quad (2.184)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = -2x, \quad (2.185)$$

vemos que (2.181) é uma equação exata. Desta forma, buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.186)$$

a) **Método 1.** Podemos calcular  $\Psi$  a partir de

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y). \quad (2.187)$$

Integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y) dx + f(y) \quad (2.188)$$

$$= \int 3x^2 - 2xy + 2 dx + f(y) \quad (2.189)$$

$$= x^3 - x^2y + 2x + f(y). \quad (2.190)$$

Para encontrar  $f(y)$ , usamos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.191)$$

No caso, temos

$$-x^2 + f'(y) = 6y^2 - x^2 + 3, \quad (2.192)$$

donde

$$f'(y) = 6y^2 + 3. \quad (2.193)$$

Integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$f(y) = \int 6y^2 + 3 \, dy \quad (2.194)$$

$$= 2y^3 + 3y + c. \quad (2.195)$$

Concluimos que

$$\Psi(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y + c. \quad (2.196)$$

A solução geral da EDO é dada pela equação implícita

$$x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c. \quad (2.197)$$

b) **Método 2.** Partimos da equação

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.198)$$

Integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$\Psi(x,y) = \int N(x,y) \, dy + g(x) \quad (2.199)$$

$$= \int 6y^2 - x^2 + 3 \, dy + g(x) \quad (2.200)$$

$$= 2y^3 - x^2y + 3y + g(x). \quad (2.201)$$

Agora, usando

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad (2.202)$$

temos

$$-2xy + g'(x) = 3x^2 - 2xy + 2 \quad (2.203)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2. \quad (2.204)$$

Integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$g(x) = \int 3x^2 + 2 dx + c \quad (2.205)$$

$$= x^3 + 2x + c. \quad (2.206)$$

Ou seja, obtivemos

$$\Psi(x,y) = 2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x + c, \quad (2.207)$$

o que nos fornece a solução geral

$$2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x = c. \quad (2.208)$$

### 2.3.1 Método dos fatores integrantes

Para algumas equações

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.209)$$

não exatas é possível aplicar o método dos fatores integrantes para convertê-las em equações exatas.

A ideia é buscar por um fator integrante  $\mu = \mu(x,y)$  tal que

$$\mu M(x,y) + \mu N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.210)$$

seja uma equação exata, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu N(x,y)). \quad (2.211)$$

Ou seja,  $\mu$  deve ser tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu M(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu N(x,y)) = 0 \quad (2.212)$$

$$\Rightarrow \mu_y M + \mu M_y - \mu_x N - \mu N_x = 0. \quad (2.213)$$

Com isso, pode-se concluir que  $\mu = \mu(x,y)$  deve satisfazer

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \quad (2.214)$$

Em geral, resolver (2.214) pode ser tão ou mais difícil que resolver a EDO original (2.209). Vejamos alguns casos em que é possível encontrar o fator  $\mu$ .

$$\mu = \mu(x)$$

No caso de  $\mu = \mu(x)$  (função de  $x$  apenas), a equação (2.214) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (2.215)$$

Ou seja, se

$$\frac{M_y - N_x}{N} \quad (2.216)$$

é função apenas de  $x$ , então podemos calcular um fator integrante  $\mu = \mu(x)$  resolvendo a EDO linear (2.215).

**Exemplo 2.3.2.** Vamos resolver a EDO

$$(x + 2) \sin(y) + x \cos(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.217)$$

Denotando

$$M(x, y) = (x + 2) \sin(y) \quad (2.218)$$

$$N(x, y) = x \cos(y) \quad (2.219)$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = (x + 2) \cos(y) \neq \cos(y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y). \quad (2.220)$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(x + 2) \cos(y) - \cos(y)}{x \cos(y)} \quad (2.221)$$

$$= \frac{x + 1}{x} \quad (2.222)$$

é função apenas de  $x$ , o que nos indica a existência de um fator integrante  $\mu = \mu(x)$  satisfazendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d}{dx} \mu = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (2.223)$$

Ou seja, resolvemos

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x+1}{x}\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{x+1}{x} dx \quad (2.224)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = x + \ln |x| + c \quad (2.225)$$

$$\Rightarrow \mu = cxe^x. \quad (2.226)$$

Com isso, escolhendo o fator integrante  $\mu = xe^x$  a equação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.227)$$

é exata e é equivalente a EDO (2.217). De fato, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + 2x)e^x \sin(y)] \quad (2.228)$$

$$= (x^2 + 2x)e^x \cos(y) \quad (2.229)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [x^2 e^x \cos(y)] \quad (2.230)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \quad (2.231)$$

Para resolver (2.227), buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x,y) = \mu N \Rightarrow \Psi(x,y) = \int x^2 e^x \cos(y) dy + f(x) \quad (2.232)$$

$$\Rightarrow \Psi(x,y) = x^2 e^x \sin(y) + f(x). \quad (2.233)$$

Bem como,  $\Psi$  deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,y) = \mu M \Rightarrow (x^2 + 2x)e^x \sin(y) + f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \sin(y) \quad (2.234)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad (2.235)$$

$$\Rightarrow f(x) = c. \quad (2.236)$$

Logo, podemos concluir que a solução geral de (2.217) é dada por

$$x^2 e^x \sin(y) = c. \quad (2.237)$$



$$\mu = \mu(y)$$

No caso de  $\mu = \mu(y)$  (função de  $y$  apenas), a equação (2.214) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} \mu. \quad (2.238)$$

Ou seja, se

$$\frac{N_x - M_y}{M} \quad (2.239)$$

é função apenas de  $y$ , então podemos calcular um fator integrante  $\mu = \mu(y)$  resolvendo a EDO linear (2.238).

**Exemplo 2.3.3.** Vamos resolver a EDO

$$y + (2x - ye^y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.240)$$

Denotando

$$M(x,y) = y \quad (2.241)$$

$$N(x,y) = 2x - ye^y \quad (2.242)$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = 1 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y). \quad (2.243)$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y} \quad (2.244)$$

é função apenas de  $y$ . Com isso, podemos obter um fator integrante  $\mu = \mu(y)$  resolvendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{M_y - N_x}{M} \mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{y} \mu \quad (2.245)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{y} dy \quad (2.246)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = \ln |y| + c \quad (2.247)$$

$$\Rightarrow \mu = cy. \quad (2.248)$$

Desta forma, podemos escolher o fator integrante  $\mu = y$  de forma que a equação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.249)$$

é exata e equivalente a EDO (2.240). De fato, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \quad (2.250)$$

$$= 2y \quad (2.251)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [(2x - ye^y)y] \quad (2.252)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \quad (2.253)$$

Sendo (2.249) uma equação exata, buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) = \mu M(x, y) \Rightarrow \Psi(x, y) = \int y^2 dx + f(y) \quad (2.254)$$

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = xy^2 + f(y). \quad (2.255)$$

Bem como,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = \mu N(x, y) \Rightarrow 2xy + f'(y) = 2xy - y^2 e^y \quad (2.256)$$

$$\Rightarrow f'(y) = -y^2 e^y \quad (2.257)$$

$$\Rightarrow f(y) = -(y^2 - 2y + 2)e^y + c. \quad (2.258)$$

Logo, concluímos que a solução geral da EDO (2.240) é

$$xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c. \quad (2.259)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.3.1.** Verifique se a EDO

$$x^2 + (2xy - y^2) \frac{dy}{dx} = -y^2 \quad (2.260)$$

é exata. Caso não seja, busque por um fator integrante para reescrevê-la como uma equação exata.

**Solução.** Para verificarmos se a equação é exata, vamos colocá-la reescrevê-la na seguinte forma

$$x^2 + y^2 + (2xy - y^2) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.261)$$

Com isso, identificamos

$$M(x,y) = x^2 + y^2, \quad (2.262)$$

$$N(x,y) = 2xy - y^2. \quad (2.263)$$

Ainda, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad (2.264)$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y. \quad (2.265)$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2.266)$$

concluimos que a EDO é exata.

◇

**ER 2.3.2.** Resolva o seguinte PVI:

$$\operatorname{sen}(y) + (x \cos(y) + 1) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.267)$$

$$y(0) = \pi. \quad (2.268)$$

**Solução.** Denotando

$$M(x,y) = \operatorname{sen}(y), \quad N(x,y) = x \cos(y) + 1, \quad (2.269)$$

vemos que a EDO associada ao PVI é uma equação exata. Logo, para resolvê-la buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \Psi = \int M(x,y) dx + f(y) \quad (2.270)$$

$$\Rightarrow \Psi = x \operatorname{sen}(y) + f(y). \quad (2.271)$$

Bem como,  $\Psi$  deve ser tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y) = N(x,y) \Rightarrow x \cos(y) + f'(y) = x \cos(y) + 1 \quad (2.272)$$

$$\Rightarrow f'(y) = 1 \quad (2.273)$$

$$\Rightarrow f(y) = y + c. \quad (2.274)$$

Logo, a solução geral da EDO associada é dada por

$$x \sin(y) + y = c. \quad (2.275)$$

Por fim, aplicando a condição inicial  $y(0) = 1$ , obtemos

$$0 \cdot \sin(1) + 1 = c \Rightarrow c = 1. \quad (2.276)$$

Concluimos que a solução do PVI é dada por

$$x \sin(y) + y = 1. \quad (2.277)$$

◇

## Exercícios

**E 2.3.1.** Verifique se a seguinte EDO é exata. Justifique sua resposta.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(y)}{1 + x \sin(y)}. \quad (2.278)$$

**E 2.3.2.** Resolva a seguinte EDO

$$\cos(y) + (1 - x \sin(y)) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.279)$$

**E 2.3.3.** Mostre que a seguinte EDO não é exata

$$xy^2 + 1 + -x^2y \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.280)$$

Ainda, mostre que o fator integrante  $\mu = x^{-4}$  pode ser usado para transformar esta em uma equação exata. Por fim, resolva-a.

**E 2.3.4.** Resolva a seguinte EDO

$$6xy + y^2 + (2x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.281)$$

**E 2.3.5.** Resolva o seguinte PVI

$$y + (y - 3x)\frac{dy}{dx} = 0, y(1) = 1 \quad (2.282)$$

## Capítulo 3

# EDO linear de ordem 2 ou mais alta

Neste capítulo, discutimos sobre EDOs lineares, as quais podem ser escritas na seguinte forma

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = g(x), \quad (3.1)$$

sendo  $y = y(x)$ ,  $p_n(x) \neq 0$  e  $n \geq 2$ .

**Observação 3.0.1.** Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#)<sup>1</sup> com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('t,x')  
y = Function('y')  
var('r,C1:3')
```

### 3.1 EDO de ordem 2 - parte I

Nesta seção, vamos nos restringir a **EDOs lineares de segunda ordem, homogêneas e com coeficientes constantes**, i.e. EDOs da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.2)$$

onde  $y = y(t)$  e  $a, b, c$  são parâmetros constantes (números reais).

---

<sup>1</sup>Veja a Observação 1.0.1.

Vamos buscar por soluções da forma  $y(t) = e^{rt}$ , onde  $r$  é constante. Substituindo na equação (3.2), obtemos

$$a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = 0 \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0. \quad (3.5)$$

Ou seja,  $y(t) = e^{rt}$  é solução de (3.2) quando

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3.6)$$

Esta é chamada de **equação característica** de (3.2).

**Exemplo 3.1.1.** Vamos buscar por soluções de

$$y'' - 4y = 0. \quad (3.7)$$

Buscamos por  $r$  tal que  $y(t) = e^{rt}$  seja solução desta equação. Substituindo na equação, obtemos

$$(e^{rt})'' - 4e^{rt} = 0 \Rightarrow (r^2 - 4)e^{rt} = 0 \quad (3.8)$$

o que nos fornece a equação característica

$$r^2 - 4 = 0. \quad (3.9)$$

As soluções desta equação são  $r_1 = -2$  e  $r_2 = 2$ . Ou seja, obtemos as seguintes **soluções particulares** da EDO

$$y_1(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t}. \quad (3.10)$$

Observamos, ainda, que para quaisquer constantes  $c_1$  e  $c_2$ ,

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \quad (3.11)$$

também é solução da EDO (3.7). De fato, temos

$$y'' - 4y = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t})'' - 4(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}) \quad (3.12)$$

$$= 4c_1 e^{-2t} + 4c_2 e^{2t} - 4c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{2t} \quad (3.13)$$

$$= 0. \quad (3.14)$$

Como veremos logo mais,

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \quad (3.15)$$

é a **solução geral** de (3.7).

### 3.1.1 Conjunto fundamental de solução

Sejam  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  soluções de

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (3.16)$$

Então,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (3.17)$$

também é solução de (3.16).

De fato, basta verificar que

$$ay'' + by' + cy = a(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' \quad (3.18)$$

$$+ b(c_1 y_1 + c_2 y_2)' \quad (3.19)$$

$$+ c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \quad (3.20)$$

$$= c_1 (ay_1'' + by_1' + cy_1) \quad (3.21)$$

$$+ c_2 (ay_2'' + by_2' + cy_2) \quad (3.22)$$

$$= 0. \quad (3.23)$$

Suponhamos, ainda, que as soluções  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  são tais que o chamado **wronskiano**

$$W(y_1, y_2; t) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.24)$$

para todo  $t$ .

Neste caso, sempre é possível escolher as constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (3.25)$$

satisfaça o problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.26)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad (3.27)$$

para quaisquer dados valores  $y_0$  e  $y_0'$ .

De fato, já sabemos que (3.25) satisfaz a EDO. Então,  $c_1$  e  $c_2$  deve satisfazer o seguinte sistema linear

$$y(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0 \quad (3.28)$$

$$y'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'. \quad (3.29)$$



Do método de Cramer<sup>2</sup>, temos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}} \quad (3.30)$$

e

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}. \quad (3.31)$$

O **wronskiano não nulo** nos garante a existência de  $c_1$  e  $c_2$ .

Por fim, afirmamos que todas as soluções de (3.16) podem ser escritas como combinação linear de  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$ , i.e. têm a forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (3.32)$$

De fato, seja  $\psi = \psi(t)$  uma solução de (3.16). Então,  $\psi$  é solução do seguinte PVI

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.33)$$

$$y(t_0) = \psi(t_0), \quad y'(t_0) = \psi'(t_0), \quad (3.34)$$

para quaisquer  $t_0$  dado. Agora, pelo que vimos acima e lembrando que o wronskiano  $W(y_1, y_2; t) \neq 0$ , temos que existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (3.35)$$

também é solução deste PVI. Da **unicidade de solução**<sup>3</sup>, segue que

$$\psi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (3.36)$$

Do que vimos aqui, a **solução geral** de (3.16) é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (3.37)$$

dadas quaisquer soluções  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  com wronskiano  $W(y_1, y_2; t) \neq 0$  para todo  $t$ .

---

<sup>2</sup>Gabriel Cramer, 1704 - 1752, matemático suíço.

<sup>3</sup>Embora não tenha sido apresentada aqui, a unicidade de solução pode ser demonstrada.

**Exemplo 3.1.2.** No Exemplo 3.1.1, vimos que

$$y_1(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t} \quad (3.38)$$

são soluções particulares de

$$y'' - 4y = 0. \quad (3.39)$$

Como

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ -2e^{-2t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

$$= 4 \neq 0, \quad (3.42)$$

temos que

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \quad (3.43)$$

é solução geral de (3.39).

### 3.1.2 Raízes reais distintas

Uma EDO da forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.44)$$

tem **solução geral**

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3.45)$$

quando sua **equação característica**

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.46)$$

tem  $r_1$  e  $r_2$  como suas raízes reais distintas.

**Exemplo 3.1.3.** Vamos resolver o seguinte PVI

$$y'' - 3y' + 2 = 0, \quad (3.47)$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 5. \quad (3.48)$$

Começamos resolvendo a equação característica associada

$$r^2 - 3r + 2 = 0. \quad (3.49)$$

As soluções são

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad (3.50)$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2}. \quad (3.51)$$

Ou seja,  $r_1 = 1$  e  $r_2 = 2$ . Logo,

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \quad (3.52)$$

é solução geral da EDO.

Agora, aplicando as condições iniciais, temos

$$y(0) = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3, \quad (3.53)$$

$$y'(0) = 5 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 5. \quad (3.54)$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 2$ . Concluimos que

$$y(t) = e^t + 2e^{2t} \quad (3.55)$$

é a solução do PVI.

## Exercícios resolvidos

**ER 3.1.1.** Calcule a solução geral de

$$2y'' + 2y' - 4 = 0. \quad (3.56)$$

**Solução.** A equação característica associada é

$$2r^2 + 2r - 4 = 0. \quad (3.57)$$

Suas soluções são

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2} \quad (3.58)$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{4}, \quad (3.59)$$

i.e.  $r_1 = -2$  e  $r_2 = 1$ . Como a equação característica tem raízes reais distintas, concluimos que

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \quad (3.60)$$

é solução geral da EDO.

◇

**ER 3.1.2.** Mostre que se  $y_1(t) = e^{-2t}$  e  $y_2(t) = e^t$ , então o wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) \neq 0. \quad (3.61)$$

**Solução.** Calculamos

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{vmatrix} \quad (3.62)$$

$$= e^{-2t}e^t + 2e^{-2t}e^t \quad (3.63)$$

$$= 3e^{-t}. \quad (3.64)$$

Como  $e^{-t} \neq 0$  para todo  $t$ , temos que  $W(y_1, y_2; t) \neq 0$  para todo  $t$ .

◇

## Exercícios

**E 3.1.1.** Calcule a solução geral de

$$-2y'' + 2y' + 4y = 0. \quad (3.65)$$

**E 3.1.2.** Resolva o seguinte PVI

$$y'' = 7y' - 12, \quad (3.66)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \quad (3.67)$$

**E 3.1.3.** Resolva o seguinte PVI

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad (3.68)$$

$$y(\ln 2) = -2, \quad y'(\ln 2) = -6. \quad (3.69)$$

**E 3.1.4.** Calcule o wronskiano de  $y_1(t) = \cos(t)$  e  $y_2(t) = \sin(t)$ .

**E 3.1.5.** Mostre que se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes reais distintas da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (3.70)$$

então

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3.71)$$

é solução geral de

$$ay'' + by + c = 0. \quad (3.72)$$

## 3.2 EDO de ordem 2 - parte II

Na Seção 3.1 introduzimos as propriedades fundamentais de EDOs lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Em particular, tratamos o caso em que a equação característica tem raízes reais distintas. Nesta seção, estudamos os casos em que a equação característica tem raízes complexas ou raízes duplas.

### 3.2.1 Raízes complexas

Consideramos

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.73)$$

cujas equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.74)$$

tem raízes complexas

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu. \quad (3.75)$$

As soluções particulares associadas são

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{(\lambda + i\mu)t} \quad (3.76)$$

$$y_2(t) = e^{r_2 t} = e^{(\lambda - i\mu)t}. \quad (3.77)$$

Da fórmula de Euler<sup>4</sup>, temos

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} \quad (3.78)$$

$$= e^a (\cos b + i \sin b). \quad (3.79)$$

---

<sup>4</sup>Leonhard Euler, 1707-1783, matemático suíço. Fonte: [Wikipedia](#).

Ou seja, as soluções particulares podem ser reescritas da forma<sup>5</sup>

$$y_1(t) = e^{\lambda t} [\cos(\mu t) + i \operatorname{sen}(\mu t)], \quad (3.80)$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t} [\cos(\mu t) - i \operatorname{sen}(\mu t)] \quad (3.81)$$

Agora, se denotarmos

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t) \quad \text{e} \quad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen}(\mu t), \quad (3.82)$$

temos

$$y_1(t) = u(t) + iv(t), \quad y_2(t) = u(t) - iv(t). \quad (3.83)$$

Para concentrar a escrita, vamos denotar

$$y(t) = u(t) \pm iv(t). \quad (3.84)$$

Substituindo  $y = y(t)$  na EDO, obtemos

$$0 = ay'' + by' + cy \quad (3.85)$$

$$= a(u'' \pm iv'') \quad (3.86)$$

$$+ b(u' \pm iv') \quad (3.87)$$

$$+ c(u \pm iv) \quad (3.88)$$

$$= (au'' + bu' + cu) \quad (3.89)$$

$$\pm i(av'' + bv' + cv). \quad (3.90)$$

Ou seja,

$$au'' + bu' + cu = 0 \quad (3.91)$$

$$av'' + bv' + cv = 0. \quad (3.92)$$

Desta forma, concluímos que  $u(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$  e  $v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen}(\mu t)$  são soluções particulares da EDO (3.73). Ainda mais, pode-se mostrar que o wronskiano  $W(u, v; t) \neq 0$ , i.e.  $u$  e  $v$  formam um conjunto fundamental de soluções. Do que vimos na Seção 3.1, concluímos que

$$y(t) = e^{\lambda t} [c_1 \cos(\mu t) + c_2 \operatorname{sen}(\mu t)] \quad (3.93)$$

é **solução geral** de (3.73).

---

<sup>5</sup>Lembre-se que seno é uma função ímpar, i.e.  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ .

**Exemplo 3.2.1.** Vamos resolver

$$y'' + 2y' + 5 = 0. \quad (3.94)$$

Começamos identificando a equação característica associada

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \quad (3.95)$$

Suas raízes são

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \quad (3.96)$$

$$= -1 \pm 2i. \quad (3.97)$$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = e^{-t} [c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)]. \quad (3.98)$$

### Modelagem: sistema massa-mola não amortecido

Consideremos um sistema massa-mola não amortecido e sem ação de força externa. Denotamos por  $m > 0$  a massa,  $k > 0$  a constante da mola. Desta forma, a lei de Newton do movimento nos fornece o seguinte modelo matemático

$$ms''(t) = -ks(t), \quad (3.99)$$

onde  $s = s(t)$  é a posição da massa ( $s = 0$  é a posição de repouso,  $s > 0$  a mola está esticada e  $s < 0$  a mola está contraída). Ou seja, trata-se de uma EDO de segunda ordem homogênea e com coeficientes constantes.

Supondo que, no tempo inicial  $t = 0$ , a massa está na posição inicial  $s_0$  e velocidade  $v_0$ , temos que a situação física é modelada pelo seguinte PVI

$$s'' + \frac{k}{m}s = 0, \quad t > 0, \quad (3.100)$$

$$s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0. \quad (3.101)$$

Como  $k/m > 0$ , temos que a equação característica associada têm raízes imaginárias

$$r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i. \quad (3.102)$$

Logo, a solução geral é

$$s(t) = c_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + c_2 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad (3.103)$$

Agora, aplicando as condições iniciais, obtemos

$$s(t) = s_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad (3.104)$$

### 3.2.2 Raízes repetidas

Seja a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (3.105)$$

cuja equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.106)$$

tem raiz dupla<sup>6</sup>

$$r = \frac{-b}{2a}. \quad (3.107)$$

Neste caso, podemos verificar que

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \quad (3.108)$$

é solução particular de (3.105).

Vamos usar o **método de redução de ordem** para encontrar uma segunda solução particular  $y_2 = y_2(t)$  de (3.105), lembrando que o wronskiano  $W(y_1, y_2; t)$  deve ser não nulo. O método consiste em buscar por uma solução da forma

$$y_2(t) = u(t)y_1(t) \quad (3.109)$$

$$= u(t)e^{-\frac{b}{2a}t}. \quad (3.110)$$

---

<sup>6</sup> $b^2 - 4ac = 0$



Substituindo  $y_2$  na EDO (3.105), obtemos

$$0 = ay_2'' + by_2' + cy_2 \quad (3.111)$$

$$= a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') \quad (3.112)$$

$$+ b(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 \quad (3.113)$$

$$= au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u' \quad (3.114)$$

$$+ (ay_1'' + by_1' + cy_1)u \quad (3.115)$$

$$= au''y_1 + \left( -\frac{2ab}{2a}e^{-\frac{b}{2a}} + be^{-\frac{b}{2a}} \right) u' \quad (3.116)$$

$$= au''y_1. \quad (3.117)$$

Segue que

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \quad (3.118)$$

$$\Rightarrow u = c_1 + c_2t. \quad (3.119)$$

Podemos escolher  $c_1$  e  $c_2$  arbitrariamente, desde que o wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) \neq 0. \quad (3.120)$$

A escolha mais simples é  $c_1 = 0$  e  $C_2 = 1$ , donde segue que

$$y_2(t) = te^{-\frac{b}{2a}t}. \quad (3.121)$$

Concluimos que a **solução geral** de (3.105) é

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-\frac{b}{2a}t}. \quad (3.122)$$

**Exemplo 3.2.2.** Vamos resolver

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (3.123)$$

Da equação característica

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad (3.124)$$

obtemos a raiz dupla

$$r = 1. \quad (3.125)$$

Logo, a solução geral da EDO é

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^t. \quad (3.126)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 3.2.1.** Resolva

$$y'' - 4y' + 5 = 0, \quad (3.127)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (3.128)$$

**Solução.** Resolvendo a equação característica

$$r^2 - 4r + 5 = 0, \quad (3.129)$$

obtemos as raízes

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \quad (3.130)$$

$$= 2 \pm i. \quad (3.131)$$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = e^{2t} [c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)]. \quad (3.132)$$

Por fim, aplicamos as condições iniciais

$$y(0) = 2 \Rightarrow e^{2 \cdot 0} [c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)] = 2 \quad (3.133)$$

$$\Rightarrow c_1 = 2. \quad (3.134)$$

e, observando que

$$y'(t) = e^{2t} [(2c_1 + c_2) \cos(t) + (2c_2 - c_1) \sin(t)] \quad (3.135)$$

temos

$$y'(0) = 0 \Rightarrow e^{2 \cdot 0} (2 \cdot 2 + c_2) = 0 \quad (3.136)$$

$$\Rightarrow 4 + c_2 = 0 \quad (3.137)$$

$$\Rightarrow c_2 = -4. \quad (3.138)$$

Concluimos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^{2t} [2 \cos(t) - 4 \sin(t)]. \quad (3.139)$$

◇

**ER 3.2.2.** Resolva

$$y'' + 4y' + 4 = 0, \quad (3.140)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (3.141)$$

**Solução.** Resolvemos a equação característica

$$r^2 + 4r + 4 = 0, \quad (3.142)$$

de modo que obtemos uma raiz dupla

$$r = -2. \quad (3.143)$$

Logo, a solução geral da EDO é

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}. \quad (3.144)$$

Agora, aplicamos as condições iniciais

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (3.145)$$

e, observando que

$$y'(t) = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)e^{-2t} \quad (3.146)$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow (c_2 - 2 \cdot 0 - 2c_2 \cdot 0)e^{-2 \cdot 0} = 1 \quad (3.147)$$

$$\Rightarrow c_2 = 1. \quad (3.148)$$

Concluimos que a solução do PVI é

$$y(t) = te^{-2t}. \quad (3.149)$$

◇

**ER 3.2.3.** (Sistema massa-mola amortecido) Um sistema massa-mola amortecido sem força externa pode ser modelado pelo seguinte PVI

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \quad t > 0, \quad (3.150)$$

$$s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0, \quad (3.151)$$

onde  $s = s(t)$  é a posição da massa ( $s = 0$  posição de repouso,  $s > 0$  mola estendida,  $s < 0$  mola contraída),  $m > 0$  massa,  $\gamma > 0$  coeficiente de resistência do meio,  $k > 0$  constante da mola,  $s_0$  posição inicial e  $v_0$  velocidade inicial da massa.

Mostre que  $s(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , i.e. a massa tende ao repouso ao passar do tempo.

**Solução.** A equação característica associada é

$$mr^2 + \gamma r + k = 0, \quad (3.152)$$

cujas raízes são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}. \quad (3.153)$$

Vejamos as seguintes possibilidades:

a)  $\gamma^2 - 4mk \geq 0$ .

Como  $m, k > 0$ , temos que  $\gamma^2 - 4mk < \gamma^2$  e, portanto,  $\sqrt{\gamma^2 - 4mk} < \gamma$ . Segue que  $r_1, r_2 < 0$ . Se  $r_1 \neq r_2$ , a solução geral é

$$s(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (3.154)$$

Se  $r_1 = r_2$ , a solução geral é

$$s(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{\gamma}{2m} t}. \quad (3.155)$$

Em ambos os casos,  $s(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ , devido aos expoentes negativos.

b)  $\gamma^2 - 4mk < 0$ .

Neste caso, a solução geral é

$$s(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m} t} \left[ c_1 \cos \left( \frac{\gamma^2 - 4mk}{2m} t \right) + c_2 \sin \left( \frac{\gamma^2 - 4mk}{2m} t \right) \right]. \quad (3.156)$$

Novamente, como seno e cosseno são funções limitadas, temos que o termo exponencial domina para  $t \rightarrow 0$ . Ou seja,  $s(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ .

◇

## Exercícios

**E 3.2.1.** Encontre a solução geral de

$$2y'' - 4y + 4 = 0. \quad (3.157)$$

**E 3.2.2.** Resolva

$$2y'' + 12y' = -26, \quad (3.158)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \quad (3.159)$$

**E 3.2.3.** Encontre a solução geral de

$$3y'' + 27y = 18y' \quad (3.160)$$

**E 3.2.4.** Resolva

$$-y = 2y' + y'', \quad (3.161)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \quad (3.162)$$

**Exemplo 3.2.3.** Mostre que o wronskiano de  $y_1(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$  e  $y_2(t) = e^{\lambda t} \sin(\mu t)$  é não nulo para qualquer  $\mu \neq 0$ .

**Exemplo 3.2.4.** Mostre que o wronskiano de  $y_1(t) = e^{rt}$  e  $y_2(t) = te^{rt}$  é não nulo para qualquer  $r$ .

### 3.3 EDO de ordem 2 - parte III

Nesta seção, vamos discutir o caso de EDOs lineares de segunda ordem, não-homogêneas e com coeficientes constantes. Tais EDOs têm a forma

$$y'' + ay' + by = g(t), \quad (3.163)$$

e pode-se mostrar que sua solução geral é dada como

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t), \quad (3.164)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções<sup>7</sup> da equação homogênea associada

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (3.165)$$

e  $y_p$  é uma solução particular qualquer de (3.163).

---

<sup>7</sup>São soluções da equação homogênea associada e  $W(y_1, y_2; t) \neq 0$ .

### 3.3.1 Método da variação dos parâmetros

O método da variação dos parâmetros consiste em calcular uma solução particular de (3.163) da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t), \quad (3.166)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  é um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada, enquanto  $u_1$  e  $u_2$  são funções a serem determinadas.

Observamos que a única condição que temos para determinar  $u_1$  e  $u_2$  é a equação (3.163). Ou seja, temos uma equação e duas incógnitas. Para fechar o problema, impomos a seguinte condição extra

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \quad (3.167)$$

Com isso, temos

$$y_p'(t) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \quad (3.168)$$

$$= u_1y_1' + u_2y_2' \quad (3.169)$$

e

$$y_p''(t) = u_1'y_1' + u_1y_1'' \quad (3.170)$$

$$= u_2'y_2' + u_2y_2''. \quad (3.171)$$

Substituindo  $y_p$  em (3.163), temos

$$g(t) = y_p'' + ay_p' + by_p \quad (3.172)$$

$$= (u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'') \quad (3.173)$$

$$+ a(u_1y_1' + u_2y_2') \quad (3.174)$$

$$+ b(u_1y_1 + u_2y_2) \quad (3.175)$$

$$= u_1'y_1' + u_2'y_2' \quad (3.176)$$

$$+ \underbrace{u_1(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} \quad (3.177)$$

$$+ \underbrace{u_2(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0} \quad (3.178)$$

$$= u_1'y_1' + u_2'y_2'. \quad (3.179)$$

Ou seja, (3.167) e (3.179) formam o seguinte sistema de equações

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \quad (3.180)$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t) \quad (3.181)$$

que têm  $u_1'$  e  $u_2'$  como incógnitas. Aplicando o método de Cramer<sup>8</sup>, obtemos

$$u_1' = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} \quad (3.182)$$

e

$$u_2' = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)}. \quad (3.183)$$

Ou, ainda, por integração temos

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.184)$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt. \quad (3.185)$$

Por tudo isso, concluímos que uma solução particular de (3.163) é dada por

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.186)$$

$$+ y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt. \quad (3.187)$$

**Exemplo 3.3.1.** Vamos calcular a solução geral de

$$y'' - y = e^{2t}. \quad (3.188)$$

Começamos determinando um conjunto fundamental de soluções  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  da equação homogênea associada

$$y'' - y = 0. \quad (3.189)$$

A equação característica associada é

$$r^2 - 1 = 0, \quad (3.190)$$

---

<sup>8</sup>Gabriel Cramer, 1704 - 1752, matemático suíço. Fonte: [Wikipedia](#).

cujas raízes são  $r_1 = -1$  e  $r_2 = 1$ . Segue que

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^t. \quad (3.191)$$

Agora, buscamos por uma solução particular de (3.188) da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t), \quad (3.192)$$

onde  $u_1$  é dada em (3.184) e  $u_2$  por (3.185). Ambas expressões requer o cálculo do wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (3.193)$$

$$= y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (3.194)$$

$$= e^{-t} e^t + e^t e^{-t} \quad (3.195)$$

$$= 2. \quad (3.196)$$

Com isso, temos

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.197)$$

$$= - \int \frac{e^t e^{2t}}{2} dt \quad (3.198)$$

$$= - \frac{1}{2} \int e^{3t} dt \quad (3.199)$$

$$= - \frac{1}{6} e^{3t} \quad (3.200)$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.201)$$

$$= \int \frac{e^{-t} e^{2t}}{2} dt \quad (3.202)$$

$$= \frac{1}{2} \int e^t dt \quad (3.203)$$

$$= \frac{1}{2} e^t \quad (3.204)$$



Desta forma, obtemos a solução particular

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \quad (3.205)$$

$$= -\frac{1}{6}e^{3t}e^{-t} + \frac{1}{2}e^te^t \quad (3.206)$$

$$= -\frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{2t} \quad (3.207)$$

$$= \frac{1}{3}e^{2t}. \quad (3.208)$$

Observamos que a solução particular é um múltiplo do termo não homogêneo da EDO (3.188). Isso não é apenas um acaso e vamos explorar isso mais adiante no texto.

Por fim, concluímos que a solução geral de (3.188) é

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + y_p(t) \quad (3.209)$$

$$= c_1e^{-t} + c_2e^t + \frac{1}{3}e^{2t}. \quad (3.210)$$

### 3.3.2 Método dos coeficientes a determinar

O método dos coeficientes a determinar consiste em buscar por uma solução particular na forma de uma combinação linear de funções elementares apropriadas. Tais funções são inferidas a partir do termo não homogêneo da equação.

$$g(t) = ce^{st}$$

Uma equação da forma

$$y'' + ay' + by = ce^{st} \quad (3.211)$$

com  $s \neq r_1, r_2$ , onde  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação característica, admite solução particular

$$y_p(t) = Ae^{st}, \quad (3.212)$$

onde  $A$  é uma constante a determinar.

**Exemplo 3.3.2.** Vamos calcular uma solução particular para

$$y'' - y = e^{2t}. \quad (3.213)$$

Pelo método dos coeficientes a determinar, buscamos por uma solução particular da forma

$$y_p(t) = Ae^{2t}, \quad (3.214)$$

observando que  $r_1 = -1$  e  $r_2 = 1$  são raízes da equação característica associada.

Substituindo  $y_p$  na EDO, obtemos

$$e^{2t} = y'' - y \quad (3.215)$$

$$= (Ae^{2t})'' - Ae^{2t} \quad (3.216)$$

$$= (4A - A)e^{2t} \quad (3.217)$$

$$= 3Ae^{2t}. \quad (3.218)$$

Segue que

$$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}. \quad (3.219)$$

Daí, concluímos que

$$y_p(t) = \frac{1}{3}e^{2t} \quad (3.220)$$

é solução particular da EDO.

**Observação 3.3.1.** a)  $s = r_1$ . Uma equação da forma

$$y'' + ay' + by = ce^{r_1 t}, \quad (3.221)$$

onde  $r_1$  é raiz da equação característica associada, admite solução particular

$$y_p(t) = Ate^{r_1 t}. \quad (3.222)$$

b)  $s = r$ . Uma equação da forma

$$y'' + ay' + by = ce^{rt}, \quad (3.223)$$

onde  $r$  é raiz dupla da equação característica associada, admite solução particular

$$y_p(t) = At^2e^{rt}. \quad (3.224)$$

$$g(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_0$$

Uma equação da forma

$$y'' + ay' + by = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_0 \quad (3.225)$$

admite solução particular

$$y_p(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_0, \quad (3.226)$$

onde  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$  são constantes a determinar.

**Exemplo 3.3.3.** Vamos calcular uma solução particular para

$$y'' - 4y = t. \quad (3.227)$$

Pelo método dos coeficientes a determinar, buscamos por uma solução particular da forma

$$y_p(t) = A_1 t + A_0. \quad (3.228)$$

Substituindo  $y_p$  na EDO, obtemos

$$t = y'' - 4y \quad (3.229)$$

$$= (A_1 t + A_0)'' - 4(A_1 t + A_0) \quad (3.230)$$

$$= -4A_1 t - 4A_0. \quad (3.231)$$

Segue que

$$-4A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{4}, \quad (3.232)$$

$$-4A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 0. \quad (3.233)$$

Daí, concluímos que

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}t \quad (3.234)$$

é solução particular da EDO.

$$g(t) = c_1 \operatorname{sen}(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)$$

Uma equação da forma

$$y'' + ay' + by = c_1 \operatorname{sen}(\beta t) + c_2 \cos(\beta t) \quad (3.235)$$

admite solução particular

$$y_p(t) = t^s [A_1 \operatorname{sen}(\beta t) + A_2 \cos(\beta t)], \quad (3.236)$$

onde  $s$  é o menor inteiro tal que  $y_p$  não seja solução da equação homogênea associada e  $A_1$  e  $A_2$  são constantes a determinar.

**Exemplo 3.3.4.** Vamos calcular uma solução particular para

$$y'' + 4y = \cos(2t). \quad (3.237)$$

Pelo método dos coeficientes a determinar, buscamos por uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t[A_1 \operatorname{sen}(2t) + A_2 \cos(2t)], \quad (3.238)$$

observando que  $y_1(t) = \cos(2t)$  e  $y_2(t) = \operatorname{sen}(2t)$  formam um conjunto fundamental de solução para a equação homogênea associada.

Substituindo  $y_p$  na EDO, obtemos

$$\cos(2t) = y'' + 4y \quad (3.239)$$

$$= [A_1 t \operatorname{sen}(2t) + A_2 t \cos(2t)]'' \quad (3.240)$$

$$+ 4[A_1 t \operatorname{sen}(2t) + A_2 t \cos(2t)] \quad (3.241)$$

$$= 4A_1 \cos(2t) - 4A_2 \operatorname{sen}(2t) \quad (3.242)$$

Segue que

$$4A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}, \quad (3.243)$$

$$-4A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0. \quad (3.244)$$

Daí, concluímos que

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t \operatorname{sen}(2t). \quad (3.245)$$

é solução particular da EDO.

**Observação 3.3.2.** (Resumo)

$$\frac{g(t)}{e^{\alpha t}(c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0)} \quad \frac{y_p(t)}{t^s e^{\alpha t}(A c_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0)}$$


---


$$e^{\alpha t}[c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)] \quad t^s e^{\alpha t}[A_1 \sin(\beta t) + A_2 \cos(\beta t)]$$

$s = 0, 1, 2$ , sendo o menor valor que garanta que  $y_p$  não seja solução da equação homogênea associada.

## Exercícios resolvidos

**ER 3.3.1.** Use o método da variação dos parâmetros para obter uma solução geral de

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-t} + \sin(t). \quad (3.246)$$

**Solução.** Primeiramente, resolvemos a equação homogênea associada

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \quad (3.247)$$

Para tanto, buscamos as raízes da equação característica associada

$$r^2 - 2r - 3 = 0, \quad (3.248)$$

as quais são

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2}, \quad (3.249)$$

i.e.  $r_1 = -1$  e  $r_2 = 3$ . Logo,

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{3t} \quad (3.250)$$

formam um conjunto fundamental de soluções da EDO homogênea.

Agora, buscamos por uma solução particular

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \quad (3.251)$$

para a equação não homogênea. Os parâmetros variáveis  $u_1 = u_1(t)$  e  $u_2 = u_2(t)$  dependem do wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (3.252)$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{vmatrix} \quad (3.253)$$

$$= 4e^{2t}. \quad (3.254)$$

Mais especificamente, eles são dados por

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.255)$$

$$= - \int \frac{e^{3t}[e^{-t} + \text{sen}(t)]}{4e^{2t}} dt \quad (3.256)$$

$$= -\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}e^t[\text{sen}(t) - \cos(t)] \quad (3.257)$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2; t)} dt \quad (3.258)$$

$$= \int \frac{e^{-t}[e^{-t} + \text{sen}(t)]}{4e^{2t}} dt \quad (3.259)$$

$$= -\frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{3}{40}e^{-3t}[\text{sen}(t) + \cos(t)] \quad (3.260)$$

Com isso, temos que a solução particular é

$$y_p(t) = \left\{ -\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}e^t[\text{sen}(t) - \cos(t)] \right\} e^{-t} \quad (3.261)$$

$$+ \left\{ -\frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{3}{40}e^{-3t}[\text{sen}(t) + \cos(t)] \right\} e^{3t} \quad (3.262)$$

$$= -\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}t\right)e^{-t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\text{sen}(t). \quad (3.263)$$

Concluimos que a solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \quad (3.264)$$

$$- \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}t\right)e^{-t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\text{sen}(t) \quad (3.265)$$

$$= c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \quad (3.266)$$

$$= -\frac{t}{4}e^{-t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\text{sen}(t). \quad (3.267)$$

◇

**ER 3.3.2.** Use o método dos coeficientes a determinar para obter uma solução geral de

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-t} + \text{sen}(t). \quad (3.268)$$

**Solução.** Esta é a mesma equação (3.3.1) que foi resolvida no ER. 3.3.1. Das contas realizadas, sabemos que

$$y_1(t) = e^{-t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{3t} \quad (3.269)$$

são soluções fundamentais da equação homogênea associada. Disso e com base no termo não homogêneo

$$g(t) = e^{-t} + \text{sen}(t), \quad (3.270)$$

buscamos por uma solução particular da forma

$$y_p(t) = Ate^{-t} + B \text{sen}(t) + C \cos(t). \quad (3.271)$$

Substituindo na EDO, obtemos

$$e^{-t} + \text{sen}(t) = y_p'' - 2y_p' - 3y_p \quad (3.272)$$

$$= -4Ae^{-t} + (2C - 4B) \text{sen}(t) - (2B + 4C) \cos(t). \quad (3.273)$$

Logo, devemos ter

$$-4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \quad (3.274)$$

e

$$-4B + 2C = 1 \quad (3.275)$$

$$-2B - 4C = 0 \quad (3.276)$$

o que nos leva a  $C = 1/10$  e  $B = -1/5$ .

Com tudo isso, concluímos que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \quad (3.277)$$

$$- \frac{t}{4} e^{-t} - \frac{1}{5} \text{sen}(t) + \frac{1}{10} \cos(t). \quad (3.278)$$

◇

## Exercício

**E 3.3.1.** Resolva

$$y'' + y' - 2y = e^{2t} \quad (3.279)$$

usando

- a) o método da variação dos parâmetros.  
b) o método dos coeficientes a determinar.

**E 3.3.2.** Resolva

$$y'' + y' - 2y = e^{-2t}. \quad (3.280)$$

**E 3.3.3.** Resolva

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \quad (3.281)$$

usando o método dos coeficientes a determinar.

**E 3.3.4.** Resolva

$$y'' + 4y = t \cos(2t). \quad (3.282)$$

**E 3.3.5.** Mostre que se  $y_1 = y_1(t)$  é solução de

$$y'' + by' + cy = g_1(t) \quad (3.283)$$

e  $y_2 = y_2(t)$  é solução de

$$y'' + by' + cy = g_2(t), \quad (3.284)$$

então  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$  é solução de

$$y'' + by' + cy = g_1(t) + g_2(t). \quad (3.285)$$

**E 3.3.6.** Resolva

$$y'' + 3y' + 2y = t, \quad t > 0, \quad (3.286)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (3.287)$$

**E 3.3.7.** Considere um sistema massa-mola modelado por

$$ms'' + \gamma s' + ks = \cos(t), \quad t > 0, \quad (3.288)$$

$$s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0, \quad (3.289)$$

onde  $m > 0$  é a massa,  $\gamma > 0$  é o coeficiente de resistência do meio,  $k > 0$  é a constante da mola,  $s = s(t)$  é posição da massa ( $s = 0$  posição de repouso,  $s > 0$  mola esticada,  $s < 0$  mola contraída),  $s_0$  é a posição inicial e  $v_0$  é a velocidade inicial da massa.

Supondo que  $\gamma^2 - 4mk = 0$ , o que pode se dizer sobre o comportamento de  $s = s(t)$  para valores de  $t$  muito grandes.



## 3.4 EDO de ordem 2 - parte IV

Nesta seção, vamos discutir de forma bastante introdutória o caso de EDOs lineares de ordem 2 com coeficientes não constantes, i.e. EDOs da forma

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x), \quad (3.290)$$

sendo  $y = y(x)$  e  $p(x) \not\equiv 0$ .

A teoria fundamental para tais equações é análoga a de equações com coeficientes constantes. Mais precisamente, a solução geral pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \quad (3.291)$$

onde  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto de soluções fundamentais ( $W(y_1, y_2; t) \neq 0$ ) para a equação homogênea associada e  $y_p$  é uma solução particular da equação não homogênea. Cabe observar que a existência e unicidade de solução (para um PVI com equação homogênea) é garantida quando os coeficientes  $p$ ,  $q$  e  $r$  são funções contínuas no domínio de interesse.

A seguir, vamos explorar dois casos. O primeiro, é a **equação de Euler**<sup>9</sup>, a qual admite soluções da forma  $y = x^r$  e pode ser tratada usando as mesmas abordagem utilizadas no caso das equações com coeficientes constantes. O segundo caso, são de equações que admitem **soluções em série de potências**.

### 3.4.1 Equação de Euler

Um caso fundamental de uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes não constantes é a **equação de Euler**

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad (3.292)$$

onde  $a, b$  são constantes e  $y = y(x)$ .

Assumindo uma solução da forma

$$y(t) = x^r \quad (3.293)$$

e substituindo na EDO, obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r = 0. \quad (3.294)$$

---

<sup>9</sup>Leonhard Euler, 1707-1783, matemático suíço. Fonte: [Wikipedia](#).

Rearranjando os termos, temos a **equação característica**

$$r(r-1) + ar + b = 0 \quad (3.295)$$

ou, equivalentemente,

$$r^2 + (a-1)r + b = 0. \quad (3.296)$$

Suas raízes são

$$r_1, r_2 = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}. \quad (3.297)$$

### Raízes reais distintas

No caso de  $(a-1)^2 - 4b \neq 0$ , temos que as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação característica são reais e distintas ( $r_1 \neq r_2$ ). Assim,  $y_1(x) = x^{r_1}$  e  $y_2(x) = x^{r_2}$  são soluções da equação de Euler e o wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (3.298)$$

$$= \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} \quad (3.299)$$

$$= (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0. \quad (3.300)$$

$$(3.301)$$

Ou seja,  $\{y_1, y_2\}$  formam um conjunto fundamental de soluções para a equação de Euler, logo sua **solução geral** é

$$y(t) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}. \quad (3.302)$$

**Exemplo 3.4.1.** Vamos encontrar a solução geral de

$$x^2 y'' + xy - 4y = 0. \quad (3.303)$$

Supondo uma solução da forma  $y(t) = x^r$ , obtemos a equação característica associada

$$r^2 - 4 = 0. \quad (3.304)$$

Suas raízes são  $r_1 = -2$  e  $r_2 = 2$ . Logo, concluímos que a solução geral é

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^2. \quad (3.305)$$

No [Python<sup>1011</sup>](#), temos

---

<sup>10</sup>Veja a Observação 1.0.1.

<sup>11</sup>Veja Observação 3.0.1

```
>>> dsolve(x**2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x)-4*y(x))
Eq(y(x), C1/x**2 + C2*x**2)
```

### Raiz dupla

No caso de  $(a - 1)^2 - 4b = 0$ , a equação característica tem raiz dupla

$$r = \frac{1 - a}{2}. \quad (3.306)$$

Isto nos fornece a solução particular

$$y_1(t) = x^r. \quad (3.307)$$

Para obtermos uma outra solução, usamos o **método da redução de ordem**. I.e., buscamos por uma solução da forma

$$y_2(x) = u(x)y_1(x), \quad (3.308)$$

Substituindo  $y_2$  na equação de Euler, obtemos

$$0 = x^2 y_2'' + x y_2' + b y_2 \quad (3.309)$$

$$= x^2 (y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u'') \quad (3.310)$$

$$+ x (y_1' u + y_1 u') \quad (3.311)$$

$$+ b y_1 u \quad (3.312)$$

$$= \underbrace{(x^2 y_1'' + x y_1' + b y_1)}_{=0} u \quad (3.313)$$

$$+ x^2 y_1 u'' + (2 x^2 y_1' + x y_1) u' \quad (3.314)$$

$$= x^{r+2} u'' + (2 x^2 r x^{r-1} + x x^r) u' \quad (3.315)$$

$$= x^{r+2} u'' + (2r + a) x^{r+1} u' \quad (3.316)$$

$$= x^{r+2} u'' + x^{r+1} u' \quad (3.317)$$

Desta equação, obtemos

$$x^{r+2} u'' = -x^{r+1} u' \Rightarrow \frac{1}{u'} u'' = -x^{-1} \quad (3.318)$$

$$\Rightarrow \ln |u'| = -\ln |x| + c \quad (3.319)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{c}{x} \quad (3.320)$$

$$\Rightarrow u = c \ln |x| + d. \quad (3.321)$$

Ou seja, podemos escolher  $y_2(x) = x^r \ln |x|$ . Conferindo o wronskiano, temos

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} x^r & x^r \ln |x| \\ rx^{r-1} & (r \ln |x| + 1)x^{r-1} \end{vmatrix} \quad (3.322)$$

$$= x^{2r-1} \neq 0, \quad x \neq 0. \quad (3.323)$$

Concluimos que, no caso de raiz dupla  $r = (1 - a)/2$ , a solução geral da equação de Euler é

$$y(t) = (c_1 + c_2 \ln |x|)x^{\frac{1-a}{2}}. \quad (3.324)$$

**Exemplo 3.4.2.** Vamos obter a solução geral de

$$x^2 y'' - xy' + y = 0. \quad (3.325)$$

A equação característica associada é

$$r^2 - 2r + 1 = 0, \quad (3.326)$$

a qual tem raiz dupla  $r = 1$ . Logo, a solução geral desta equação de Euler é

$$y(t) = (c_1 + c_2 \ln |x|)x. \quad (3.327)$$

No [Python](#)<sup>1213</sup>, temos

```
>>> dsolve(x**2*diff(y(x),x,2)-x*diff(y(x),x)+y(x))
Eq(y(x), x*(C1 + C2*log(x)))
```

## Raízes complexas

No caso de  $(a - 1)^2 - 4b < 0$ , a equação característica associada a equação de Euler tem raízes complexas

$$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu \quad (3.328)$$

onde

$$\lambda = \frac{(1 - a)}{2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\sqrt{4b - (a - 1)^2}}{2}. \quad (3.329)$$

---

<sup>12</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

<sup>13</sup>Veja Observação [3.0.1](#)

Da **fórmula de Euler**, temos

$$x^{\lambda \pm i\mu} = e^{\ln x^{\lambda \pm i\mu}} \quad (3.330)$$

$$= e^{(\lambda \pm i\mu) \ln(x)} \quad (3.331)$$

$$= e^{\lambda \ln |x|} [\cos(\mu \ln x) \pm i \sin(\mu \ln x)] \quad (3.332)$$

$$= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) \pm i \sin(\mu \ln x)]. \quad (3.333)$$

Agora, da linearidade da equação de Euler, vemos que  $y_1(x) = x^\lambda \cos(\mu \ln |x|)$  e  $y_2(x) = x^\lambda \sin(\mu \ln |x|)$  são soluções particulares. Mais ainda, o wronskiano

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (3.334)$$

$$= \mu x^{2\lambda-1} \quad (3.335)$$

$$= \frac{\sqrt{4b - (a-1)^2}}{2} x^a \neq 0. \quad (3.336)$$

Concluimos que, no caso de raiz dupla, a solução geral é

$$y(t) = x^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln |x|) + c_2 \sin(\mu \ln |x|)]. \quad (3.337)$$

**Exemplo 3.4.3.** Vamos obter a solução geral de

$$x^2 y'' + x y' + y = 0. \quad (3.338)$$

A equação característica associada é

$$r^2 + 1 = 0, \quad (3.339)$$

a qual tem raízes imaginárias  $r = \pm i$ . Logo, a solução geral desta equação de Euler é

$$y(t) = c_1 \cos(\ln |x|) + c_2 \sin(\ln |x|). \quad (3.340)$$

No [Python](#)<sup>1415</sup>, temos

```
>>> dsolve(x**2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x)+y(x))
Eq(y(x), C1*sin(log(x)) + C2*cos(log(x)))
```

---

<sup>14</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

<sup>15</sup>Veja Observação [3.0.1](#)

### 3.4.2 Solução em série de potências

Em muitos casos, a solução geral de tais EDOs pode ser escrita como uma série de potências, i.e.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (3.341)$$

O ponto  $x_0$  é arbitrário e deve pertencer ao domínio de interesse. A ideia básica é, então, substituir a representação em série de potência de  $y$  na EDO de forma a calcular seus coeficientes.

**Exemplo 3.4.4.** Vamos usar o método de série de potências para resolver

$$y'' - xy = 0, \quad (3.342)$$

chamada **equação de Airy**<sup>16</sup>.

Vamos assumir que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.343)$$

Segue que

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad (3.344)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n \quad (3.345)$$

e

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n x^{n-1} \quad (3.346)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n. \quad (3.347)$$

---

<sup>16</sup>Sir George Biddell Airy, 1801 - 1892, matemático inglês. Fonte: [Wikipedia](#).

Substituindo na equação de Airy, obtemos

$$0 = y'' - xy \quad (3.348)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.349)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad (3.350)$$

$$= 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \quad (3.351)$$

$$= 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n-1})x^n. \quad (3.352)$$

Como esta última equação deve valer para todo  $x$ , segue que

$$a_2 = 0, \quad (3.353)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.354)$$

Observamos que não há condições impostas para  $a_0$  e  $a_1$ , ou seja, são constantes indeterminadas. Das relações acima, obtemos:

a)  $n = 3, 6, 9, \dots$ :

$$a_5 = \frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0 \quad (3.355)$$

$$a_8 = \frac{a_5}{7 \cdot 9} = 0 \quad (3.356)$$

$$a_{11} = \frac{a_8}{10 \cdot 11} = 0 \quad (3.357)$$

$$\vdots \quad (3.358)$$

$$a_{3k+2} = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.359)$$

b)  $n = 1, 4, 7, \dots$ :

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad (3.360)$$

$$a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad (3.361)$$

$$a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \quad (3.362)$$

$$\vdots \quad (3.363)$$

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot (3k)}, \quad k \geq 1. \quad (3.364)$$

c)  $n = 2, 5, 8, \dots$ :

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad (3.365)$$

$$a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \quad (3.366)$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \quad (3.367)$$

$$\vdots \quad (3.368)$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3k) \cdot (3k+1)}, \quad k \geq 1. \quad (3.369)$$

Do que calculamos, podemos concluir que

$$y(t) = a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot (3k)} \right] \quad (3.370)$$

$$+ a_1 \left[ x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3k) \cdot (3k+1)} \right]. \quad (3.371)$$

Há uma série de questões importantes que fogem dos objetivos destas notas de aula. Por exemplo, observamos que nem sempre é possível escrever a solução de uma EDO como uma série de potências. Também deve-se fazer um tratamento especial quando  $P(x_0) = 0$ . Para maiores informações, pode-se consultar [1].



## Exercícios resolvidos

**ER 3.4.1.** Resolva

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad (3.372)$$

$$y(1) = 0 \quad \text{e} \quad y'(1) = -1. \quad (3.373)$$

**Solução.** Trata-se de um PVI envolvendo a equação de Euler. Primeiramente, buscamos a solução geral desta equação. Para tanto, resolvemos a equação característica associada

$$r^2 - 3r + 2 = 0. \quad (3.374)$$

As raízes desta equação são

$$r_1 = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = 2. \quad (3.375)$$

Logo, a solução geral da EDO é

$$y(t) = c_1 x + c_2 x^2. \quad (3.376)$$

Agora, das condições iniciais, obtemos

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (3.377)$$

$$y'(1) = -1 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = -1 \quad (3.378)$$

Resolvendo, obtemos  $c_1 = 1$  e  $c_2 = -1$ . Concluimos que a solução do PVI é

$$y(t) = x - x^2. \quad (3.379)$$

◇

**ER 3.4.2.** Considere o seguinte PVI

$$y'' + xy' = \cos(x), \quad (3.380)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.381)$$

Calcule os quatro primeiros termos da representação da solução em série de potências em torno de  $x_0 = 0$ .

**Solução.** Consideramos que a solução possa ser escrita como uma série de potências da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.382)$$

Ainda, lembramos que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.383)$$

Assim sendo, substituímos na EDO para encontrarmos

$$\cos(x) = y'' + xy' \quad (3.384)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n \quad (3.385)$$

$$+ x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n \quad (3.386)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n \quad (3.387)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^{n+1} \quad (3.388)$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n \quad (3.389)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n \quad (3.390)$$

$$(3.391)$$

Daí, considerando como constantes indeterminadas  $a_0 = c_1$  e  $a_1 = c_2$ , temos

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{c_2}{6}. \quad (3.392)$$

Obtivemos a seguinte aproximação da solução geral

$$y(x) \approx c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{c_2}{6} x^3. \quad (3.393)$$

Aplicando as condições iniciais, temos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \quad (3.394)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \quad (3.395)$$

Assim, temos calculado a seguinte aproximação da solução

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2. \quad (3.396)$$

◇

## Exercícios

Em construção ...

## 3.5 EDO de ordem mais alta

Os métodos aplicados para EDOs lineares de segunda ordem podem ser estendidos para tratarmos EDOs lineares de ordem mais alta. Aqui, vamos nos restringir ao caso de tais EDOs com coeficientes constantes, i.e. equações da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x), \quad (3.397)$$

onde  $y = y(t)$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são constantes dadas e  $a_n \neq 0$ .

### 3.5.1 EDO homogênea

A **solução geral** de uma EDO **homogênea** da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0, \quad (3.398)$$

é dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad (3.399)$$

sendo que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  formam um conjunto fundamental de soluções, i.e. são soluções tais que o **wronskiano**<sup>17</sup>

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.400)$$

---

<sup>17</sup>Józef Maria Hoene-Wroński, 1776 - 1853, matemático polonês. Fonte: [Wikipedia](#).

Podemos obter soluções particulares da forma

$$y(t) = e^{rt}. \quad (3.401)$$

Substituindo na EDO, vemos que  $r$  deve satisfazer a **equação característica**

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_0 = 0. \quad (3.402)$$

Cada raiz nos fornece uma solução particular  $y_p = y_p(t)$ :

a) se  $r = r_p$  é **raiz simples**, então  $y_p(t) = e^{r_p t}$

b) se  $r = r_p$  **raiz de multiplicidade  $m$** , então

$$y_{p+1}(t) = e^{r_p t} \quad (3.403)$$

$$y_{p+2}(t) = t e^{r_p t} \quad (3.404)$$

$$\vdots \quad (3.405)$$

$$y_{p+m}(t) = t^{m-1} e^{r_p t} \quad (3.406)$$

c) se  $r = \lambda_p \pm i\mu_p$  é **raiz complexa**, então

$$y_{p+1} = e^{\lambda_p t} \cos(\mu_p t) \quad (3.407)$$

$$y_{p+2} = e^{\lambda_p t} \sin(\mu_p t). \quad (3.408)$$

**Exemplo 3.5.1.** Vamos calcular a solução geral de

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0. \quad (3.409)$$

A **equação característica associada** é

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0. \quad (3.410)$$

Suas raízes são  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = -1$  e  $r_3 = 1$ . Logo, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^t. \quad (3.411)$$

Vamos, ainda, verificar se  $y_1(t) = e^{-2t}$ ,  $y_2(t) = e^{-t}$  e  $y_3(t) = e^t$  formam um conjunto fundamental de soluções. Por construção, sabemos que estas são

soluções particulares. Resta, portanto, verificar que o wronskiano é não nulo. De fato, temos

$$W(y_1, y_2, y_3; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \quad (3.412)$$

$$= \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} & e^t \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} & e^t \\ 4e^{-2t} & e^{-t} & e^t \end{vmatrix} \quad (3.413)$$

$$= 6e^{-2t} \neq 0, \quad \forall t. \quad (3.414)$$

No [Python](#)<sup>18</sup>, podemos computar a solução geral com os seguintes comandos:

```
In : t,r = symbols('t,r')
In : y = symbols('y', cls=Function)

In : edo = y(t).diff(t,3) + 2*y(t).diff(t,2) - y(t).diff(t) - 2*y(t)
In : dsolve(edo,y(t))
Out: Eq(y(t), C1*exp(-2*t) + C2*exp(-t) + C3*exp(t))
```

Para computarmos o wronskiano, podemos usar os seguintes comandos:

```
In : y1 = exp(-2*t)
In : y2 = exp(-t)
In : y3 = exp(t)
In : W = Matrix([[y1,y2,y3], \
                  [y1.diff(t),y2.diff(t),y3.diff(t)], \
                  [y1.diff(t,2),y2.diff(t,2),y3.diff(t,2)]])

In : W.det()
Out: 6*exp(-2*t)
```

**Exemplo 3.5.2.** Vamos encontrar a solução geral de

$$y^{(4)} - 7y'' + 11y' - 5y = 0. \quad (3.415)$$

As raízes da equação característica associada

$$r^3 - 7r^2 + 11r - 5 = 0 \quad (3.416)$$

---

<sup>18</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

são  $r_1, r_2 = 1$  ou  $r_3, r_4 = -1 \pm 2i$ . Logo, temos as seguintes soluções particulares

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = te^t, \quad (3.417)$$

$$y_3(t) = e^{-t} \cos(2t), \quad y_4(t) = e^{-t} \sin(2t). \quad (3.418)$$

Calculando o wronskiano, temos

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4; t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix} = 128 \neq 0. \quad (3.419)$$

Logo, concluímos que a solução geral é

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + e^{-t}[c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t)]. \quad (3.420)$$

### 3.5.2 Equação não homogênea

Ambos os métodos da variação dos parâmetros e dos coeficientes a determinar podem ser generalizados para EDOs lineares de ordem mais altas, com coeficientes constantes e não homogêneas. Tais equações têm a forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = g(t), \quad (3.421)$$

com  $n \geq 1$  e  $g(t) \neq 0$ . A **solução geral** pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t) + y_p(t), \quad (3.422)$$

onde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  formam um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada e  $y_p$  é uma solução particular qualquer da equação não homogênea.

#### Método da variação dos parâmetros

Em construção ...

#### Método dos coeficientes a determinar

Em construção ...

## Exercícios resolvidos

**ER 3.5.1.** Resolva

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad t > 0, \quad (3.423)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \quad (3.424)$$

**Solução.** A equação característica associada

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \quad (3.425)$$

tem raiz tripla  $r = -1$ . Logo, a solução geral é

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-t}. \quad (3.426)$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1, \quad (3.427)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 1, \quad (3.428)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}. \quad (3.429)$$

Logo, a solução do PVI é

$$y(t) = \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right) e^{-t}. \quad (3.430)$$

No [Python](#)<sup>19</sup>, podemos computar a solução deste problema com os seguintes comandos:

```
In : t = symbols('t')
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : eq = y(t).diff(t,3)+3*y(t).diff(t,2)+3*y(t).diff(t)+y(t)
In : sol = dsolve(eq,y(t))
In : sol
Out: Eq(y(t), (C1 + C2*t + C3*t**2)*exp(-t))
```

```
In : C1,C2,C3 = symbols('C1,C2,C3')
```

```
In : cs = solve([Eq(sol.rhs.subs(t,0),1),Eq(sol.rhs.diff(t).subs(t,0),0),Eq(sol.rhs.diff(t,2).subs(t,0),0)],C1,C2,C3)
```

---

<sup>19</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

```
In : cs  
Out: {C1: 1, C2: 1, C3: 1/2}
```

```
In : sol.subs(cs)  
Out: Eq(y(t), (t**2/2 + t + 1)*exp(-t))
```

◇

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...



# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.1.** a), c)

**E 1.1.2.** a) 1; b) 3; c) 2; d) 2.

**E 1.1.3.** a), d).

**E 1.1.4.** a), b).

**E 1.1.5.** a)  $\{-3, 2\}$ ; b)  $\{0, 3\}$

**E 1.1.6.**  $\{-1, 2\}$ .

**E 1.2.1.**  $y(t) = 1$ .

**E 1.2.2.**  $y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$ .

**E 1.2.3.**  $y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}t + 1$ .

**E 1.2.4.**  $y(t) = -\text{sen}(t)$ .

**E 2.1.1.**  $y(t) = e^{-t}$

**E 2.1.2.**  $y(t) = 3e^t - 2$

**E 2.1.3.**  $y(t) = ce^{-t} + \frac{\text{sen}(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$

**E 2.1.4.**  $y(t) = \frac{2}{3} \left( t^2 - \frac{1}{t} \right)$

**E 2.1.5.**  $y(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t^2} + 1 \right)$

**E 2.1.6.** 1.5 s

**E 2.2.1.**  $y(x) = \ln \left( \frac{2}{2e^{-1}-x^2} \right).$

**E 2.2.2.**  $y(x) = \frac{1}{c+\text{sen } x}$

**E 2.2.3.**  $y(x) = \ln (c - e^{-x})$

**E 2.2.4.** a)  $y(t) \equiv 0$ ; b)  $y(t) \rightarrow 0$ ; c)  $y(t) \equiv L$ ; d)  $y(t) \rightarrow \infty$ .

**E 2.2.5.**  $y(t) = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{rt}}.$

**E 2.2.6.** a)  $y(t) \equiv 0$ ; b)  $y(t) \rightarrow 0$ ; c)  $y(t) \equiv L$ ; d)  $y(t) \rightarrow K$ ; e)  $y(t) \equiv K$ ; f)  $y(t) \rightarrow K$ .

**E 2.3.1.** Exata

**E 2.3.2.**  $x \cos(y) + y = c$

**E 2.3.3.**  $x - \frac{y^2}{2x^2} = c$

**E 2.3.4.**  $(xy + 2x^2)^2 - 4x^4 = c$

**E 2.3.5.**  $xy^{-3} + \frac{y^{-4}}{4} = \frac{5}{4}$

**E 3.1.1.**  $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

**E 3.1.2.**  $y(t) = e^{3t} - e^{4t}$

**E 3.1.3.**  $y(t) = e^t - e^{2t}$

**E 3.1.4.** 1

**E 3.1.5.** Mostre que  $y_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $y_2(t) = e^{r_2 t}$  são soluções da EDO com  $W(y_1, y_2; t) \neq 0$ .

**E 3.2.1.**  $y(t) = [c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)]e^t$

**E 3.2.2.**  $y(t) = e^{-3t} \operatorname{sen}(2t)$

**E 3.2.3.**  $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t}$

**E 3.2.4.**  $y(t) = (2 + 2t)e^{-t}$

**E 3.2.4.**  $W(y_1, y_2; t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0$

**E 3.2.4.**  $W(y_1, y_2; t) = e^{2rt} \neq 0$

**E 3.3.1.**  $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + \frac{1}{4} e^{2t}$

**E 3.3.2.**  $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + \frac{1}{4} e^{2t}$

**E 3.3.3.**  $y(t) = \left(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}$

**E 3.3.4.**  $y(t) = \left(c_1 + \frac{t}{16}\right) \cos(2t) + \left(c_2 + \frac{t^2}{8}\right) \operatorname{sen}(2t)$

**E 3.3.5.** Dica: Basta usar que  $y_1'' + by_1' + cy_1 = g_1(t)$  e que  $y_2'' + by_2' + cy_2 = g_2(t)$ .

**E 3.3.6.**  $y(t) = -\frac{1}{4} e^{-2t} + e^{-t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$

**E 3.3.7.**  $s(t) \approx \frac{1}{\gamma^2 + (k - m)^2} \left( \frac{k - m}{\gamma} \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \right)$

# Referências Bibliográficas

- [1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.
- [2] E.C. Oliveira and J.E. Maiorino. *Introdução aos métodos de matemática aplicada*. Unicamp, 2. edition, 2013.