

# Equações a Diferenças

Pedro H A Konzen

6 de outubro de 2020

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos introdutórios sobre equações a diferenças. Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos [Python](#)<sup>1</sup> são apresentados, mais especificamente, códigos com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

---

<sup>1</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Equações a diferenças . . . . .	1
<b>2 Equações de ordem 1</b>	<b>8</b>
2.1 Equações lineares . . . . .	8
2.1.1 Equação homogênea . . . . .	8
2.1.2 Equação não homogênea . . . . .	10
2.1.3 Somas definidas . . . . .	13
2.2 Estudo assintótico de equações lineares . . . . .	17
2.3 Alguns aspectos sobre equações não lineares . . . . .	23
2.3.1 Solução . . . . .	24
2.3.2 Pontos de equilíbrio . . . . .	24
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>28</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>30</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, introduzimos conceitos e definições elementares sobre **equações a diferenças**. Por exemplo, definimos tais equações, apresentamos alguns exemplos de modelagem matemática e problemas relacionados.

**Observação 1.0.1.** Ao longo das notas de aula, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#)<sup>1</sup> com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *
```

### 1.1 Equações a diferenças

Equações a diferenças são aquelas que podem ser escritas na seguinte forma

$$f(y(n+k), y(n+k-1), \dots, y(n); n) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k \geq 0$  número natural e  $y : n \mapsto y(n)$  é função discreta (incógnita).

**Exemplo 1.1.1.** Vejamos os seguintes exemplos.

a) **Modelo de juros compostos**

$$y(n+1) = (1+r)y(n) \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

Esta equação a diferenças modela uma aplicação corrigida a juros compostos com taxa  $r$  por período de tempo  $n$  (dia, mês, ano, etc.). Mais especificamente, seja  $y(0)$  o valor da aplicação inicial, então

$$y(1) = (1 + r)y(0) \quad (1.3)$$

é o valor corrigido a taxa  $r$  no primeiro período (dia, mês, ano). No segundo período, o valor corrigido é

$$y(2) = (1 + r)y(1) \quad (1.4)$$

e assim por diante.

b) **Equação logística**

$$y(n + 1) = ry(n) \left( 1 - \frac{y(n)}{K} \right), \quad (1.5)$$

onde  $y(n)$  representa o tamanho da população no período  $n$ ,  $r$  é a taxa de crescimento e  $K$  um limiar de saturação.

c) **Sequência de Fibonacci**<sup>2</sup>

$$y(n + 2) = y(n + 1) + y(n), \quad (1.6)$$

onde  $y(0) = 1$  e  $y(1) = 1$ .

Uma equação a diferenças (1.1) é dita ser de **ordem**  $k$  (ou de  $k$ -ésima ordem). É dita ser **linear** quando  $f$  é função linear nas variáveis dependentes  $y(n + k), y(n + k - 1), \dots, y(n)$ , noutro caso é dita ser **não linear**.

**Exemplo 1.1.2.** No Exemplo 1.1.1, temos

- a) O modelo de juros compostos é dado por equação a diferenças de primeira ordem e linear.
- b) A equação logística é uma equação a diferenças de primeira ordem e não linear.
- c) A sequência equação de Fibonacci é descrita por uma equação a diferenças de segunda ordem e linear.

---

<sup>2</sup>Fibonacci, c. 1170 - c. 1240, matemático italiano. Fonte: [Wikipedia](#).

A **solução** de uma equação a diferenças (1.1) é uma sequência de números  $(y(n))_{n=0}^{\infty} = (y(0), y(1), \dots, y(n), \dots)$  que satisfazem a equação.

**Exemplo 1.1.3.** Vamos calcular os primeiros quatro valores da solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad (1.7)$$

$$y(0) = 0. \quad (1.8)$$

Para tanto, podemos fazer o seguinte procedimento iterativo. Tendo o valor inicial  $y(0) = 0$ , temos

$$y(1) = 2y(0) - 1 \quad (1.9)$$

$$= 2 \cdot 0 - 1 \quad (1.10)$$

$$= -1. \quad (1.11)$$

Calculado  $y(1) = -1$ , temos

$$y(2) = 2y(1) - 1 \quad (1.12)$$

$$= 2 \cdot (-1) - 1 \quad (1.13)$$

$$= -3. \quad (1.14)$$

Então, seguimos

$$y(3) = 2y(2) - 1 \quad (1.15)$$

$$= 2 \cdot (-3) - 1 \quad (1.16)$$

$$= -7. \quad (1.17)$$

$$y(4) = 2y(3) - 1 \quad (1.18)$$

$$= 2 \cdot (-7) - 1 \quad (1.19)$$

$$= -15. \quad (1.20)$$

Com estes cálculos, podemos concluir que a solução da equação a diferenças é uma sequência da forma

$$(y(n))_{n=0}^{\infty} = (0, -1, -3, -7, -15, \dots). \quad (1.21)$$

Podemos ilustrar a solução conforme feito na figura abaixo.

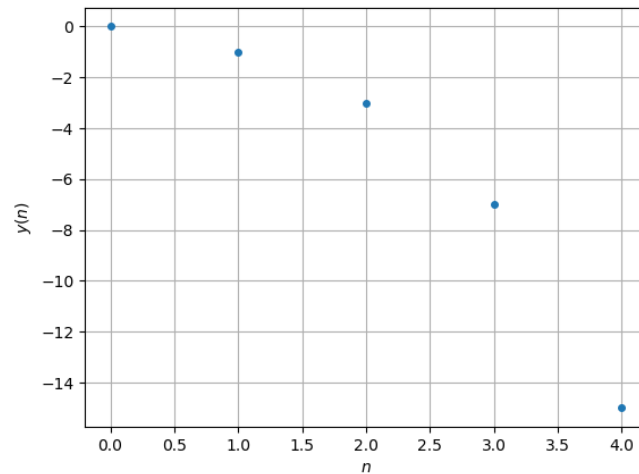


Figura 1.1: Esboço do gráfico da solução da equação a diferenças discutida no Exemplo 1.1.3.

Para algumas equações a diferenças, é possível escrever a **solução** como uma **forma fechada**

$$y(n) = g(n), \quad (1.22)$$

onde  $n = 0, 1, \dots$  e  $g : n \mapsto g(n)$  é a **função discreta** que representa a solução.

**Exemplo 1.1.4.** Vamos encontrar a solução para o modelo de juros compostos

$$y(n+1) = (1+r)y(n), \quad n \geq 0. \quad (1.23)$$



A partir do valor inicial  $y(0)$ , temos

$$y(1) = (1 + r)y(0) \quad (1.24)$$

$$y(2) = (1 + r)y(1) \quad (1.25)$$

$$= (1 + r)(1 + r)y(0) \quad (1.26)$$

$$= (1 + r)^2 y(0) \quad (1.27)$$

$$y(3) = (1 + r)y(2) \quad (1.28)$$

$$= (1 + r)(1 + r)^2 y(0) \quad (1.29)$$

$$= (1 + r)^3 y(0) \quad (1.30)$$

$$\vdots \quad (1.31)$$

Com isso, podemos inferir que a solução é dada por

$$y(n) = (1 + r)^n y(0), \quad (1.32)$$

onde o valor inicial  $y(0)$  é arbitrário.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Calcule  $y(10)$ , sendo que

$$y(n + 1) = 1,05y(n), \quad n \geq 0, y(0) = 1000. \quad (1.33)$$

**Solução.** Observamos que

$$y(1) = 1,05y(0) \quad (1.34)$$

$$y(2) = 1,05y(1) \quad (1.35)$$

$$= 1,05 \cdot 1,05y(0) \quad (1.36)$$

$$= 1,05^2 y(0) \quad (1.37)$$

$$y(3) = 1,05y(2) \quad (1.38)$$

$$= 1,05 \cdot 1,05^2 y(0) \quad (1.39)$$

$$= 1,05^3 y(0) \quad (1.40)$$

$$\vdots \quad (1.41)$$

Com isso, temos que a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = 1,05^n y(0). \quad (1.42)$$

Portanto,

$$y(10) = 1,05^{10}y(0) \quad (1.43)$$

$$= 1,05^{10} \cdot 1000 \quad (1.44)$$

$$\approx 1628,89. \quad (1.45)$$

◇

**ER 1.1.2.** Uma semente plantada produz uma flor com uma semente no final do primeiro ano e uma flor com duas sementes no final de cada ano consecutivo. Supondo que cada semente é plantada tão logo é produzida, escreva a equação de diferenças que modela o número de flores  $y(n)$  no final do  $n$ -ésimo ano.

**Solução.** No final do ano  $n + 2 \geq 0$ , o número de flores é igual a

$$y(n + 2) = 2u(n + 2) + 3d(n + 2), \quad (1.46)$$

onde  $u(n + 2)$  é o número de flores plantadas a um ano e  $d(n + 2)$  é o número de flores plantadas a pelo menos dois anos. Ainda, temos

$$u(n + 2) = u(n + 1) + 2d(n + 1) \quad (1.47)$$

e

$$d(n + 2) = u(n + 1) + d(n + 1). \quad (1.48)$$

Com isso, temos

$$y(n + 2) = 2[u(n + 1) + 2d(n + 1)] + 3[u(n + 1) + d(n + 1)] \quad (1.49)$$

$$= 2y(n + 1) + u(n + 1) + d(n + 1) \quad (1.50)$$

$$= 2y(n + 1) + \underbrace{u(n) + 2d(n)}_{u(n+1)} + \underbrace{u(n) + d(n)}_{d(n+1)} \quad (1.51)$$

$$= 2y(n + 1) + 2u(n) + 3d(n) \quad (1.52)$$

$$= 2y(n) + y(n). \quad (1.53)$$

Desta forma, concluímos que o número de plantas é modelado pela seguinte equação a diferenças de segunda ordem e linear

$$y(n + 2) = 2y(n + 1) + y(n). \quad (1.54)$$

◇

## Exercícios

**E 1.1.1.** Classifique as seguintes equações a diferenças quanto a ordem e linearidade.

- a)  $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1$
- b)  $ny(n+1) = y(n) \ln(n+1)$
- c)  $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1$
- d)  $y(n+1) - [1 - y(n)][1 + y(n)] = 0$
- e)  $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}$

**E 1.1.2.** Para cada uma das seguintes equações a diferenças, calcule  $y(3)$ .

- a)  $y(n+1) - \sqrt{2}y(n) = 1, \quad y(0) = 1$
- b)  $ny(n+1) = y(n) \ln(n+1), \quad y(1) = 1$

**E 1.1.3.** Para cada uma das seguintes equações a diferenças, calcule  $y(4)$ .

- a)  $y(n) = y(n+1) + 2y(n+2) - 1, \quad y(0) = 1, y(1) = 0$
- b)  $y(n+2) = n\sqrt{y(n)}, \quad y(0) = 1, y(1) = 1$

**E 1.1.4.** Encontre a equação a diferenças que modela o saldo devedor anual de uma cliente de cartão de crédito com taxa de juros de 200% a.a. (ao ano), considerando uma dívida inicial no valor de  $y(0)$  reais e que o cartão não está mais em uso.

**E 1.1.5.** Considere uma espécie de seres vivos monogâmicos que após um mês de vida entram na fase reprodutiva. Durante a fase reprodutiva, cada casal produz um novo casal por mês. Desconsiderando outros fatores (por exemplo, mortalidade, perda de fertilidade, etc.), encontre a equação a diferenças que modela o número de casais no  $n$ -ésimo mês.

# Capítulo 2

## Equações de ordem 1

Neste capítulo, discutimos de forma introdutória sobre **equações a diferenças de primeira ordem**. Tais equações podem ser escritas na forma

$$f(y(n+1), y(n); n) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $n = 0, 1, \dots$  e  $y : n \mapsto y(n)$  é função discreta (incógnita).

### 2.1 Equações lineares

Nesta seção, discutimos sobre equações a diferenças de ordem 1 e lineares. Tais equações podem ser escritas na seguinte forma

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad (2.2)$$

onde  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ,  $n_0$  número inteiro,  $a : n \mapsto a(n)$  e  $g : n \mapsto g(n)$  é o termo fonte. A equação é dita ser **homogênea** quando  $g \equiv 0$  e, caso contrário, é dita ser **não homogênea**.

#### 2.1.1 Equação homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n), \quad n \geq n_0, \quad (2.3)$$

pode ser obtida por iterações diretas. Para  $n \geq n_0$ , temos

$$y(n+1) = a(n)y(n) \quad (2.4)$$

$$= a(n)a(n-1)y(n-1) \quad (2.5)$$

$$= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \quad (2.6)$$

$$\vdots \quad (2.7)$$

$$= a(n)a(n-1) \cdots a(n_0)y(n_0). \quad (2.8)$$

Ou seja, dado o valor inicial  $y(n_0)$ , temos a solução<sup>1</sup>

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y(n_0), \quad (2.9)$$

assumindo a notação de que  $\prod_{i=n+1}^n a(i) = 1$ .

**Exemplo 2.1.1.** Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n), \quad n \geq 0. \quad (2.10)$$

Comparando com (2.3), temos  $a(n) = 2$  para todo  $n$ . Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$y(n+1) = 2y(n) \quad (2.11)$$

$$= 2 \cdot 2y(n-1) \quad (2.12)$$

$$= 2^2 y(n-1) \quad (2.13)$$

$$= 2^2 \cdot 2y(n-2) \quad (2.14)$$

$$= 2^3 y(n-2) \quad (2.15)$$

$$\dots \quad (2.16)$$

$$= 2^{n+1} y(0) \quad (2.17)$$

Equivalentemente, por (2.9), temos

$$y(n) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} 2 \right] y(0) \quad (2.18)$$

$$= 2^n y(0). \quad (2.19)$$

---

<sup>1</sup>A demonstração por ser feita por indução matemática.

A solução vale para qualquer valor inicial  $y(0)$ .

No [Python](#)<sup>2</sup>, podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=True)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1), 2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0
```

### 2.1.2 Equação não homogênea

A solução de uma equação a diferenças de ordem 1, linear e não homogênea

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq n_0, \quad (2.20)$$

pode ser obtida por iterações diretas.

Vejamos, para  $n \geq n_0$  temos

$$\begin{aligned} y(n+1) &= a(n)y_n + g(n) \\ &= a(n)[a(n-1)y(n-1) + g(n-1)] + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)y(n-1) + a(n)g(n-1) + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)[a(n-2)y(n-2) + g(n-2)] \\ &\quad + a(n)g(n-1) + g(n) \\ &= a(n)a(n-1)a(n-2)y(n-2) \\ &\quad + a(n)a(n-1)g(n-2) + a(n)g(n-1) + g(n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com isso, podemos inferir<sup>3</sup> que

$$y(n+1) = \left[ \prod_{i=n_0}^n a(i) \right] y(n_0) \quad (2.21)$$

$$+ \sum_{i=n_0}^n \left[ \prod_{j=i+1}^n a(j) \right] g(i). \quad (2.22)$$

---

<sup>2</sup>Veja a Observação 1.0.1.

<sup>3</sup>A demonstração por ser feita por indução matemática.

No último termo, consideramos a notação  $\sum_{j=i+1}^i a(j) = 0$ . Ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y(n_0) \\ &+ \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{j=i+1}^{n-1} a(j) \right] g(i). \end{aligned} \quad (2.23)$$

**Exemplo 2.1.2.** Vamos calcular a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) - 1, \quad n \geq 0. \quad (2.24)$$

Comparando com (2.20), temos  $a(n) = 2$  e  $g(n) = -1$  para todo  $n$ . Calculando a solução por iterações diretas, temos

$$y(n+1) = 2y(n) - 1 \quad (2.25)$$

$$= 2 \cdot [2y(n-1) - 1] - 1 \quad (2.26)$$

$$= 2^2 y(n-1) - 2 - 1 \quad (2.27)$$

$$= 2^2 \cdot [2y(n-2) - 1] - 2 - 1 \quad (2.28)$$

$$= 2^3 y(n-2) - 2^2 - 2 - 1 \quad (2.29)$$

$$\dots \quad (2.30)$$

$$= 2^{n+1} y(0) - \sum_{i=0}^n 2^i \quad (2.31)$$

Este último termo, é a soma dos termos da **progressão geométrica** de razão  $q = 2$  (veja Subseção 2.1.3), i.e.

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (2.32)$$

Logo, temos que a solução de (2.20) é

$$y(n+1) = 2^{n+1} y(0) - \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \quad (2.33)$$

$$= 2^{n+1} y(0) - 2^{n+1} + 1. \quad (2.34)$$

Equivalentemente, por (2.23), temos

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y(n_0) \quad (2.35)$$

$$+ \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{j=i+1}^{n-1} a(j) \right] g(i) \quad (2.36)$$

$$= \left[ \prod_{i=0}^{n-1} 2 \right] y(0) \quad (2.37)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \prod_{j=i+1}^{n-1} 2 \right] (-1) \quad (2.38)$$

$$= 2^n y(0) - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} \quad (2.39)$$

$$= 2^n y(0) - 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \quad (2.40)$$

$$= 2^n y(0) - 2^n + 1. \quad (2.41)$$

A solução vale para qualquer valor inicial  $y(0)$ .

No [Python](#)<sup>4</sup>, podemos computar a solução da equação a diferenças (2.10) com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=True)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1), 2*y(n)-1)
In : rsolve(ead, y(n))
Out: 2**n*C0 + 1
```

Observamos que esta solução é equivalente à (2.41), pois

$$y(n) = 2^n y(0) - 2^n + 1 \quad (2.42)$$

$$= 2^n [y(0) - 1] + 1, \quad (2.43)$$

onde  $y(0)$  é um valor inicial arbitrário.

---

<sup>4</sup>Veja a Observação 1.0.1.



### 2.1.3 Somas definidas

Seguem algumas somas definidas que podem ser úteis na resolução de equações a diferenças.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.44)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2.45)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (2.46)$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} \quad (2.47)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1 \quad (2.48)$$

$$\sum_{k=1}^n kq^k = \frac{(q-1)(n+1)q^{n+1} - q^{n+2} + q}{(q-1)^2} \quad (2.49)$$

### Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Calcule a solução da equação à diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \quad (2.50)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.51)$$

**Solução.** De (2.9), temos

$$y(n) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \right] y(0) \quad (2.52)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot 1 \quad (2.53)$$

$$= 2^{-n}. \quad (2.54)$$

No [Python](#)<sup>5</sup>, podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

---

<sup>5</sup>Veja a Observação 1.0.1.

```
In : n = symbols('n', integer=True)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1), 1/2*y(n))
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):1})
Out: 0.5**n
```

◇

**ER 2.1.2.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + \frac{1}{2}, \quad n \geq 0, \quad (2.55)$$

$$y(0) = 0. \quad (2.56)$$

**Solução.** De (2.23), temos

$$y(n) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} 2 \right] y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \prod_{j=i+1}^{n-1} 2 \right] \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^i \quad (2.57)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \cdot 2^{-i} \quad (2.58)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1} \cdot 2^{-2i} \quad (2.59)$$

$$= 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{4} \right)^i \quad (2.60)$$

$$= 2^{n-1} \cdot \frac{\left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{4}} \quad (2.61)$$

$$= 2^{n-1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right) \quad (2.62)$$

$$= \frac{4}{3} \left( 2^{n-1} - \frac{2^{n-1}}{4^n} \right) \quad (2.63)$$

$$= \frac{4}{3} \left( 2^{n-1} - 2^{n-1} 2^{-2n} \right) \quad (2.64)$$

$$= \frac{4}{3} \left( 2^{n-1} - 2^{-n-1} \right) \quad (2.65)$$

$$= \frac{2}{3} \left( 2^n - 2^{-n} \right). \quad (2.66)$$

No [Python](#)<sup>6</sup>, podemos computar a solução deste exercício com os seguintes comandos:

```
In : n = symbols('n', integer=True)
In : y = symbols('y', cls=Function)
In : ead = Eq(y(n+1), 2*y(n)+(1/2)**n)
In : rsolve(ead, y(n), {y(0):0})
Out: -0.6666666666666667*0.5**n + 0.6666666666666667*2**n
```

◇

---

<sup>6</sup>Veja a Observação 1.0.1.

## Exercícios

**E 2.1.1.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n), \quad n \geq 0. \quad (2.67)$$

**E 2.1.2.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = \frac{1}{3}y(n), \quad n \geq 0, \quad (2.68)$$

$$y(0) = -1. \quad (2.69)$$

**E 2.1.3.** Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1%. Considerando  $y(0) = 100$ , qual o valor de  $y(n)$  no  $n$ -ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução. Então, calcule o valor da dívida no 36º mês.

**E 2.1.4.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = 3y(n) - 3, \quad n \geq 0, \quad (2.70)$$

$$y(0) = 2. \quad (2.71)$$

**E 2.1.5.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = ny(n) + n!, \quad n \geq 0, \quad (2.72)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.73)$$

**E 2.1.6.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = 2y(n) + 2^n, \quad n \geq 0, \quad (2.74)$$

$$y(0) = 2. \quad (2.75)$$

**E 2.1.7.** Considere um empréstimo de \$100 a uma taxa mensal de 1% e com parcelas mensais fixas de \$1. Considerando  $y(0) = 100$ , qual o valor de  $y(n)$  no  $n$ -ésimo mês? Modele o problema como uma equação à diferenças e calcule sua solução.

**E 2.1.8.** Calcule a solução de

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq 0, \quad (2.76)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes com  $a \neq 1$ .

## 2.2 Estudo assintótico de equações lineares

Nesta seção, vamos introduzir aspectos básicos sobre o comportamento assintótico de soluções de equações a diferenças de primeira ordem e lineares. Seja

$$y(n+1) = f(y(n), n), \quad n \geq n_0, \quad (2.77)$$

uma equação a diferenças com valor inicial  $y(n_0)$ . Dizemos que  $y^*$  é **ponto de equilíbrio** da equação, quando  $y^*$  é tal que

$$f(y^*, n) = y^*, \quad (2.78)$$

para todo  $n \geq n_0$ . Neste caso, ao escolhermos  $y(n_0) = y^*$ , então a solução de equação a diferenças (2.77) é

$$y(n) = y^*. \quad (2.79)$$

**Exemplo 2.2.1.** Vamos calcular o(s) ponto(s) de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{4}{3}y(n) - 1, \quad n \geq 0. \quad (2.80)$$

Neste caso, por comparação com (2.77), temos  $f(y(n), n) = \frac{4}{3}y(n) - 1$ . Para calcularmos o(s) ponto(s) de equilíbrio, resolvemos

$$f(y^*, n) = y^* \quad (2.81)$$

$$\frac{4}{3}y^* - 1 = y^* \quad (2.82)$$

$$\left(\frac{4}{3} - 1\right)y^* = 1 \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{3}y^* = 1 \quad (2.84)$$

$$y^* = 3. \quad (2.85)$$

Com isso, concluímos que  $y^* = 3$  é o único ponto de equilíbrio de (2.80). Notamos que, de fato, ao escolhermos  $y(0) = 3$ , temos

$$y(1) = \frac{4}{3}y(0) - 1 = 3 \quad (2.86)$$

$$y(2) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \quad (2.87)$$

$$y(3) = \frac{4}{3}y(1) - 1 = 3 \quad (2.88)$$

$$\vdots \quad (2.89)$$

$$y(n) = 3. \quad (2.90)$$

Seja a equação a diferenças de primeira ordem, linear e com coeficientes constantes

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \quad (2.91)$$

Se  $a = 0$ , então todo número real  $y^*$  é ponto de equilíbrio de (2.91). Se  $a = 1$  e  $b = 0$ , também. Agora, se  $a = 1$  e  $b \neq 0$ , então (2.91) não tem ponto de equilíbrio. Por fim, se  $a \neq 0$  e  $a \neq 1$ , então

$$y^* = \frac{b}{1-a} \quad (2.92)$$

é o único ponto de equilíbrio de (2.91). Este é o caso do Exemplo 2.2.1.

Um ponto de equilíbrio é um **atrator global** quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = y^*, \quad (2.93)$$

para qualquer valor inicial  $y(n_0)$ . Neste caso, também dizemos que  $y^*$  é um ponto de equilíbrio **assintoticamente globalmente estável**.

Uma equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n), \quad n \geq n_0, \quad (2.94)$$

com  $-1 < a < 1$ , tem  $y^* = 0$  como atrator global. De fato, a solução desta equação a diferenças é

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a \right] y(n_0) \quad (2.95)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0). \quad (2.96)$$

Logo, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n-n_0} y(n_0) \quad (2.97)$$

$$= 0. \quad (2.98)$$

**Exemplo 2.2.2.** Para a equação a diferenças

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n), \quad n \geq 0, \quad (2.99)$$

temos que  $y^*$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável.

Um equação a diferenças da forma

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad n \geq n_0, \quad (2.100)$$

com  $-1 < a < 1$ , tem

$$y^* = \frac{b}{1-a} \quad (2.101)$$

como ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável. De fato, a

solução desta equação é

$$y(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a \right] y(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{j=i+1}^{n-1} a \right] b \quad (2.102)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} a^{n-1-i} b \quad (2.103)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-1} b \sum_{i=n_0}^{n-1} a^{-i} \quad (2.104)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-1} b \sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j-n_0} \quad (2.105)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \sum_{j=0}^{n-n_0-1} a^{-j} \quad (2.106)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \frac{(1 - a^{-(n-n_0)})}{1 - a^{-1}} \quad (2.107)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + a^{n-n_0-1} b \frac{\frac{a^{n-n_0}-1}{a}}{\frac{a-1}{a}} \quad (2.108)$$

$$= a^{n-n_0} y(n_0) + b \frac{1 - a^{n-n_0}}{1 - a} \quad (2.109)$$

$$= \left( y(n_0) - \frac{b}{1-a} \right) a^{n-n_0} + \frac{b}{1-a}. \quad (2.110)$$

Observamos que esta última equação, confirma que

$$y^* = \frac{b}{1-a} \quad (2.111)$$

é ponto de equilíbrio de (2.100) e é assintoticamente globalmente estável, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( y(n_0) - \frac{b}{1-a} \right) a^{n-n_0} + \frac{b}{1-a} \right] \quad (2.112)$$

$$= \frac{b}{1-a}. \quad (2.113)$$



**Exemplo 2.2.3.** A equação a diferenças

$$y(n+1) = 4y(n) - 1, \quad n \geq 0, \quad (2.114)$$

tem  $y^* = 1/3$  como ponto de equilíbrio, o qual não é um atrator global. De fato, para qualquer escolha de  $y(0) \neq y^*$ , temos

$$y(n) = \underbrace{\left(y(0) - \frac{1}{3}\right)}_{\neq 0} 4^n + \frac{1}{3}. \quad (2.115)$$

Logo, vemos que  $y(n) \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \pm\infty$ , onde o sinal é igual ao do termo  $y(0) - 1/3$ .

Observamos as seguintes computações no [Python](#)<sup>7</sup>:

```
In : y=1/3
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
...:
...: y
Out: -21.0
```

Ou seja,  $y(30) = -21.0$  computando por iterações recorrentes, enquanto que o valor esperado é  $y(30) = 1/3$ , sendo este um ponto de equilíbrio da equação a diferenças.

O que está ocorrendo nestas computações é um fenômeno conhecido como cancelamento catastrófico em máquina. No computador, o valor inicial  $y(0) = 1/3$  é computado com um pequeno erro de arredondamento. Do que vimos acima, se  $y(0) \neq 1/3$ , então  $y(n) \rightarrow \pm\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

No [Python](#)<sup>8</sup>, podemos fazer as computações exatas na aritmética dos números racionais. Para tanto, podemos usar o seguinte código:

```
In : from sympy import Rational
...: y=Rational(1,3)
...: for i in range(1,31):
...:     y=4*y-1
...:
...: y
Out: 1/3
```

---

<sup>7</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

<sup>8</sup>Veja a Observação [1.0.1](#).

## Exercícios resolvidos

**ER 2.2.1.** Calcule os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = ny(n), \quad n \geq 0. \quad (2.116)$$

**Solução.** Temos que  $y^*$  é ponto de equilíbrio da equações a diferenças, quando

$$y^* = ny^* \quad (2.117)$$

$$(1-n)y^* = 0 \quad (2.118)$$

para todo  $n \geq 0$ . Logo,  $y^* = 0$  é ponto de equilíbrio da equação a diferenças.

◇

**ER 2.2.2.** Verifique se  $y^* = 0$  é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável de

$$y(n+1) = \frac{1}{n+1}y(n), \quad n \geq 0. \quad (2.119)$$

**Solução.** Primeiramente, confirmamos que  $y^* = 0$  é ponto de equilíbrio, pois

$$\frac{1}{n+1}y^* = 0 = y^*, \quad n \geq 0. \quad (2.120)$$

Por fim, a solução da equação a diferenças é

$$y(n) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right] y(0) \quad (2.121)$$

$$= \frac{1}{n!}y(0). \quad (2.122)$$

Daí, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}y(0) = 0 = y^*. \quad (2.123)$$

Logo, concluímos que  $y^* = 0$  é ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável da equação a diferenças dada.

◇

## Exercícios

**E 2.2.1.** Calcule o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = -y(n) + 1 \quad (2.124)$$

**E 2.2.2.** O ponto de equilíbrio da equação a diferenças do Exercício 2.2.1 é um atrator global? Justifique sua resposta.

**E 2.2.3.** Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = \frac{1}{2}y(n) + \frac{1}{2}, \quad n \geq 2, \quad (2.125)$$

e diga se ele é um atrator global. Justifique sua resposta.

**E 2.2.4.** Encontre o ponto de equilíbrio de

$$y(n+1) = 2y(n) + 1, \quad n \geq 2, \quad (2.126)$$

e diga se ele é assintoticamente globalmente estável. Justifique sua resposta.

**E 2.2.5.** Considere um financiamento de valor \$100 com taxa de juros 1% a.m. e amortizações fixas mensais de valor \$ $a$ . O valor devido  $y(n+1)$  no  $n+1$ -ésimo mês pode ser modelado pela seguinte equação a diferenças

$$y(n+1) = 1,01y(n) - a, \quad n \geq 0, \quad (2.127)$$

com valor inicial  $y(0) = 100$ . Calcule o valor  $a$  mínimo a ser amortizado mensalmente de forma que o valor devido permaneça sempre constante.

## 2.3 Alguns aspectos sobre equações não lineares

O estudo de equações a diferenças não lineares é bastante amplo, podendo chegar ao estado da arte. Nesta seção, vamos abordar alguns conceitos fundamentais para a análise de equações de primeira ordem e não lineares, i.e. equações da forma

$$f(y(n+1), y(n); n) = 0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (2.128)$$

onde  $f$  é uma função não linear nas incógnitas  $y(n+1)$  ou  $y(n)$ .

### 2.3.1 Solução

A variedade de formas que uma equação a diferenças não linear pode ter é enorme e não existem formas fechadas para a solução da grande maioria delas. No entanto, sempre pode-se buscar calcular a solução por iteração direta, i.e.

$$y(n_0) = \text{valor inicial}, \quad (2.129)$$

$$f(y(n+1), y(n); n) = 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (2.130)$$

**Exemplo 2.3.1.** Vamos calcular a solução da seguinte equação a diferenças não linear

$$y(n+1) = y^2(n), \quad n \geq 0. \quad (2.131)$$

A partir do valor inicial  $y(0)$  e por iterações diretas, temos

$$y(1) = y^2(0), \quad (2.132)$$

$$y(2) = [y(1)]^2 \quad (2.133)$$

$$= [y^2(0)]^2 \quad (2.134)$$

$$= y^{2^2}(0), \quad (2.135)$$

$$y(3) = [y(2)]^2 \quad (2.136)$$

$$= [y^{2^2}(0)]^2 \quad (2.137)$$

$$= y^{2^3}(0) \quad (2.138)$$

$$\vdots \quad (2.139)$$

Disso, podemos inferir que a solução de 2.131 é

$$y(n) = y^{2^n}(0). \quad (2.140)$$

### 2.3.2 Pontos de equilíbrio

Introduzimos pontos de equilíbrio na Seção 2.2 e, aqui, vamos estudá-los no contexto de equação a diferenças de primeira ordem e não lineares. Um dos primeiros aspectos a serem notados é que equação não lineares podem ter vários pontos de equilíbrio, ter somente um ou não ter.

**Exemplo 2.3.2.** (Ponto de equilíbrio) Vejamos os seguintes casos:

a)  $y(n+1) = y(n)^2 + 1, n \geq 0$

Se  $y^*$  é ponto de equilíbrio, então

$$y^* = (y^*)^2 + 1 \quad (2.141)$$

$$(y^*)^2 - y^* + 1 = 0, \quad (2.142)$$

a qual não admite solução real. Ou seja, a equação a diferenças deste item não tem ponto de equilíbrio.

b)  $y(n+1) = y(n)^2, n \geq 0$

$$y^* = (y^*)^2 \quad (2.143)$$

$$(y^*)^2 - y^* = 0 \quad (2.144)$$

$$y^*(y^* - 1) = 0, \quad (2.145)$$

Neste caso, a equação a diferenças tem dois pontos de equilíbrio, a saber,  $y_1^* = 0$  e  $y_2^* = 1$ .

c)  $[y(n+1) - 1] \cdot [y(n) - 1] = 0, n \geq 0$

$$(y^* - 1) \cdot (y^* - 1) = 0 \quad (2.146)$$

$$(y^* - 1)^2 = 0 \quad (2.147)$$

$$y^* = 1 \quad (2.148)$$

Concluimos que esta equação tem  $y^* = 1$  como seu único ponto de equilíbrio.

d)  $y(n+1) = y(n) \cos(y(n)), n \geq 0$

$$y^* = y^* \cos(y^*) \quad (2.149)$$

$$[\cos(y^*) - 1] y^* = 0 \quad (2.150)$$

$$\cos(y^*) = 1 \quad (2.151)$$

Disso, temos que  $y^* = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , são pontos de equilíbrio da equação a diferenças dada.

Equações a diferenças não lineares podem ter pontos de equilíbrio eventuais. Mais especificamente, uma equação a diferenças

$$f(y(n+1), y(n); n) = 0, \quad n \geq n_0, \quad (2.152)$$

tem  $y^*$  como **ponto de equilíbrio eventual** quando existe  $n_1 > n_0$  tal que

$$y(n) = y^*, \quad n \geq n_1. \quad (2.153)$$

**Exemplo 2.3.3.** (Ponto de equilíbrio eventual) A equação a diferenças

$$y(n+1) = |2y(n) - 2|, \quad n \geq 0, \quad (2.154)$$

$$y(0) = 1, \quad (2.155)$$

tem  $y^* = 2$  como ponto de equilíbrio eventual. De fato, por iterações diretas temos

$$y(1) = |2y(0) - 2| \quad (2.156)$$

$$= |2 \cdot 1 - 2| = 0 \quad (2.157)$$

$$y(2) = |2y(1) - 2| \quad (2.158)$$

$$= |2 \cdot 0 - 2| = 2 \quad (2.159)$$

$$y(3) = |2y(2) - 2| \quad (2.160)$$

$$= |2 \cdot 2 - 2| = 2 \quad (2.161)$$

$$\vdots \quad (2.162)$$

$$y(n) = 2, \quad n \geq 2. \quad (2.163)$$

Um ponto de equilíbrio  $y^*$  de (2.152) é dito ser **estável** quando, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|y(0) - y^*| < \delta \Rightarrow |y(n) - y^*| < \epsilon, \quad (2.164)$$

para todo  $n > 0$ . Em outras palavras, para todo  $n$ , a solução  $y(n)$  está arbitrariamente próxima de  $y^*$  para toda escolha de valor inicial  $y(0) \neq y^*$  suficientemente próximo de  $y^*$ . Quando este não é o caso,  $y^*$  é dito ser ponto de equilíbrio **instável**.

**Exemplo 2.3.4.** Vamos estudar os pontos de equilíbrio de

$$y(n+1) = \left(y^2(n) - 1\right)^2 + 1, \quad n \geq 0. \quad (2.165)$$

Vamos calcular os pontos de equilíbrio.

$$y^* = \left[ (y^*)^2 - 1 \right]^2 + 1 \quad (2.166)$$

$$y^* = (y^*)^2 - 2y^* + 2 \quad (2.167)$$

$$(y^*)^2 - 3y^* + 2 = 0 \quad (2.168)$$

$$y_1^* = 1, \quad y_2^* = 2 \quad (2.169)$$

Tomamos o ponto de equilíbrio  $y^* = 1$ . Seja  $\epsilon > 0$  e escolhemos  $0 < \delta < 1$  tal que  $\delta < \epsilon$ . Então, para qualquer valor inicial

$$y(0) = 1 \pm \delta \quad (2.170)$$

temos

$$y(1) = (y(0) - 1)^2 + 1 \quad (2.171)$$

$$= \delta^2 + 1 < 1 + \epsilon \quad (2.172)$$

Em construção ...

## Exercícios resolvidos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...

# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.1.** a) ordem 1, linear; b) ordem 1, linear; c) ordem 2, linear; d) ordem 1, não linear; e) ordem 2, não linear;

**E 1.1.2.** a)  $y(3) = 3 - 3\sqrt{2}$ ; b)  $y(3) = \frac{1}{3} \ln(2) \ln(3)$

**E 1.1.3.** a)  $y(4) = 3/8$ ; b)  $y(4) = 0$

**E 1.1.4.**  $y(n+1) = 3y(n)$ .

**E 1.1.5.** Sequência de Fibonacci

**E 2.1.1.**  $y(n) = 3^n y(0)$

**E 2.1.2.**  $y(n) = -\frac{1}{3^n}$

**E 2.1.3.**  $y(n+1) = 1,01 \cdot y(n)$ ,  $y(0) = 100$ ;  $y(n) = 100 \cdot 1,01^n$ ;  $y(36) \approx 143,08$

**E 2.1.4.**  $y(n) = \frac{1}{2}(3^n + 3)$

**E 2.1.5.**  $y(n) = n!$

**E 2.1.6.**  $y(n) = 2^n \left( \frac{n}{2} + 2 \right)$

**E 2.1.7.**  $y(n+1) = 1,01 \cdot y(n) - 1$ ,  $y(0) = 100$ ;  $y(n) = 100$ ;

**E 2.1.8.**  $y(n) = \left( y(0) - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a}$



**E 2.2.1.**  $1/2$

**E 2.2.2.** não

**E 2.2.3.**  $y^* = 1$ ; atrator global

**E 2.2.4.**  $y^* = -1$ ; não é assintoticamente globalmente estável

**E 2.2.5.**  $a = 1$

# Referências Bibliográficas

- [1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.
- [2] S. Elaydi. *An introduction to difference equations*. Springer, 3. edition, 2005.