Vetores e Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

18 de março de 2019

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre vetores e geometria analítica.
Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Vetores

1.1 Segmentos orientados

Sejam dois pontos A e B sobre uma reta r. O conjunto de todos os pontos de r entre A e B é chamado de **segmento** AB.

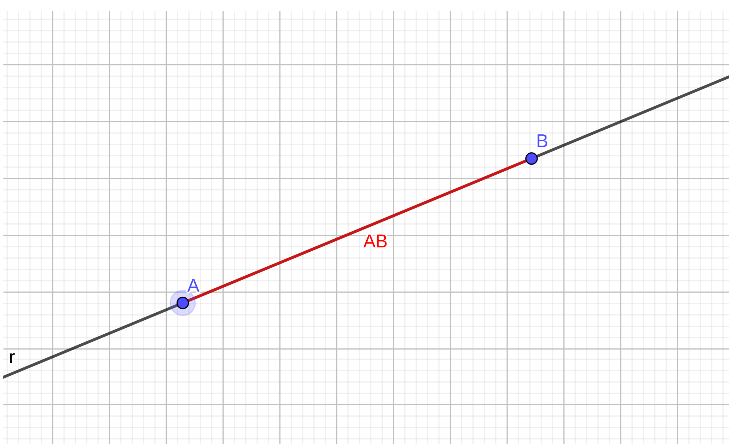


Figura 1.1: Esboço de um segmento AB.

Associado a um segmento AB, temos seu **comprimento** (ou tamanho), o qual é definido como sendo a **distância** entre os pontos A e B. A distância entre os ponto A e B é denotada por $|AB|$ ou $|BA|$.
A **direção** de um segmento AB é a direção da reta que fica determinada pelos pontos A e B.

Exemplo 1.1.1. Consideremos os segmentos esboçados na Figura 1.2. Os segmentos AB e CD têm as mesmas direções, mas comprimentos diferentes. Já, o segmento EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

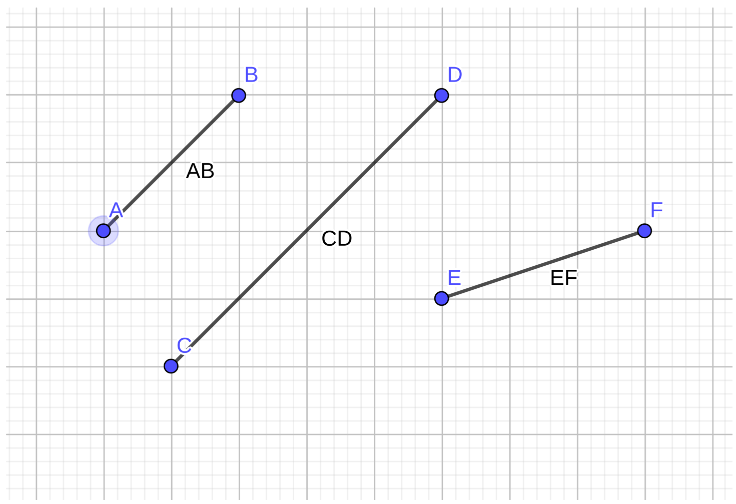


Figura 1.2: Esboço referente ao Exemplo 1.1.1.

Se A e B são o mesmo ponto, então chamamos AB de **segmento nulo** e temos $|AB| = 0$. Um segmento nulo não tem direção.
Observemos que um dado segmento AB é igual ao segmento BA. Agora, podemos associar a noção de **sentido** a um segmento, escolhendo um dos pontos como sua **origem** e o outro como sua **extremidade**. Ao fazermos isso, definimos um **segmento orientado**. Mais precisamente, um segmento orientado AB é o segmento definido pelos pontos A e B, sendo A a origem e B a extremidade. Veja a Figura 1.3.
Dizemos que dois dados segmentos orientados não nulos AB e CD têm a **mesma direção** quando as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo 1.1.2. Consideremos os segmentos orientados esboçados na Figura 1.4. Observemos que os segmentos orientados AB e CD têm a mesma direção. Já o segmento orientado EF tem direção diferente dos segmentos AB e CD.

Sejam dados dois segmentos orientados AB e CD de mesma direção, cujas retas AB e CD não sejam coincidentes. Então, as retas AB e CD determinam um único plano e a reta AC determina dois semiplanos (veja a Figura

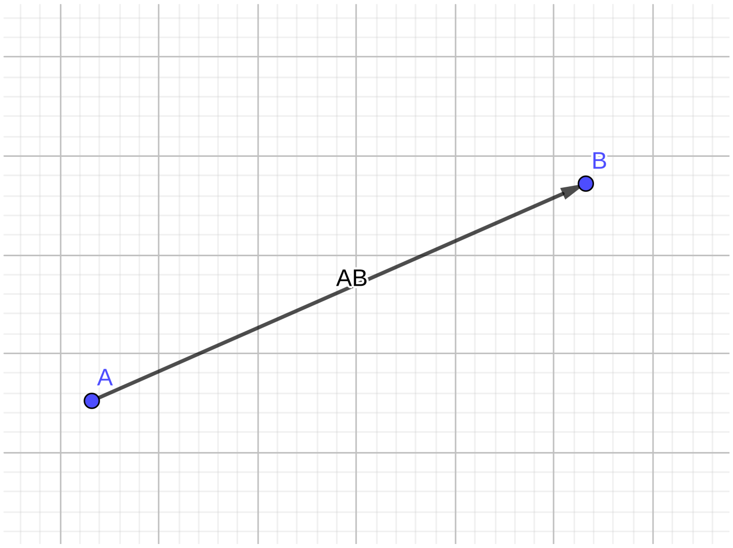


Figura 1.3: Esboço de um segmento orientado AB.

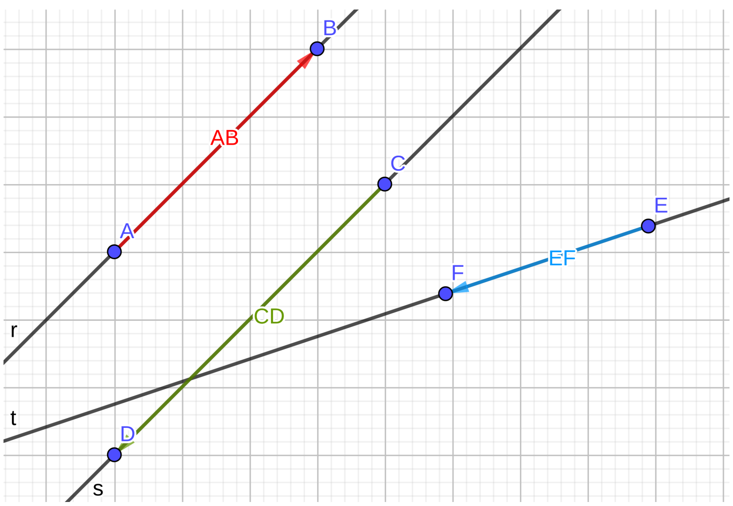


Figura 1.4: Esboço referente ao Exemplo 1.1.2.

??). Assim sendo, dizemos que os segmentos AB e CD têm **mesmo sentido** quando os pontos B e D estão ambos sobre o mesmo semiplano.

Para analisar o sentido de dois segmentos orientados e colineares, escolhemos um deles e construímos um segmento orientado de mesmo sentido a este, mas não colinear. Então, analisamos o sentido dos segmentos orientados originais

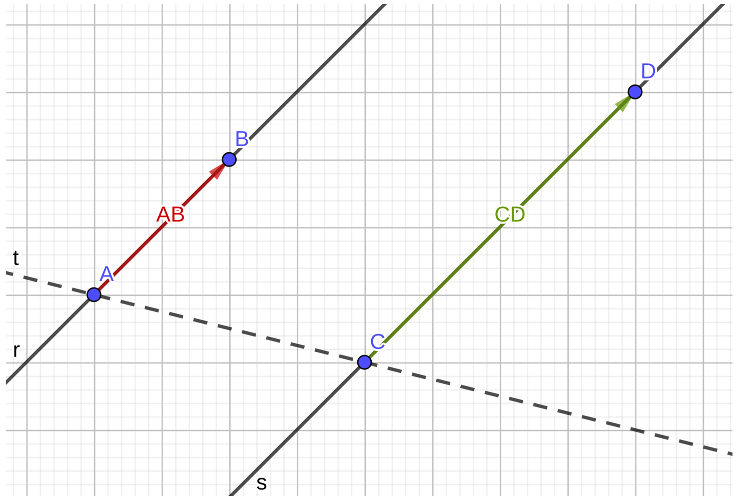


Figura 1.5: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD de mesmo sentido.

com respeito ao introduzido.

Dois segmentos orientados não nulos são **equipolentes** quando eles têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Veja o exemplo dado na Figura 1.6.

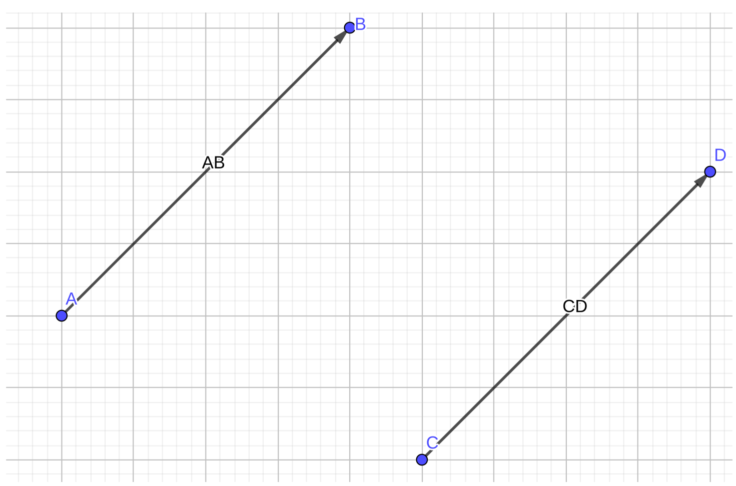


Figura 1.6: Esboço de dois segmentos orientados AB e CD equipolentes.

1.1.1 Exercícios

E 1.1.1. Mostre que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, os pontos médios de AD e BC são coincidentes.

1.2 Vetores

Dado um segmento orientado AB, chama-se **vetor** AB e denota-se $\overrightarrow{AB}$, qualquer segmento orientado equipolente a AB. Cada segmento orientado equipolente a AB é um representado de $\overrightarrow{AB}$. A Figura 1.7 mostra duas representações de um dado vetor $\overrightarrow{AB}$.

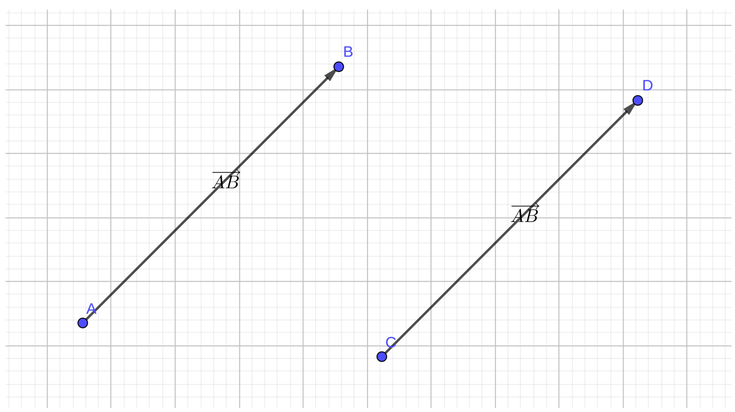


Figura 1.7: Esboço de duas representações de um mesmo vetor.

O **módulo** (ou **norma**) de um vetor $\overrightarrow{AB}$ é o valor de seu comprimento e é denotado por $|\overrightarrow{AB}|$.

Dois **vetores** são ditos **paralelos** quando qualquer de suas representações têm a mesma direção. De forma análoga, definem-se **vetores coplanares**, **vetores não coplanares**, **vetores ortogonais**, além de conceitos como **ângulo entre dois vetores**, etc. Veja a Figura 1.8.

Observemos que na Figura 1.8(direita) os vetores foram denotados por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sem alusão aos pontos que definem suas representações como segmentos orientados. Isto é costumeiro, devido a definição de vetor.

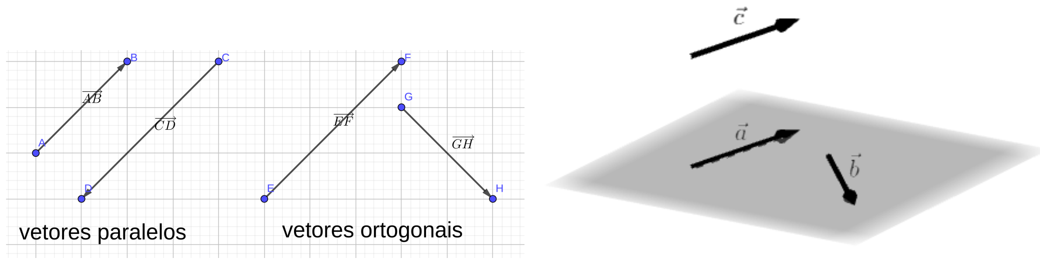


Figura 1.8: Esquerda: esboços de vetores paralelos e de vetores ortogonais. Direita: esboços de vetores coplanares.

1.2.1 Adição de vetores

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sejam, ainda, uma representação $\overrightarrow{AB}$ qualquer de u e a representação $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$. Então, define-se o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ como o vetor dado por $\overrightarrow{AC}$. Veja a Figura 1.9.

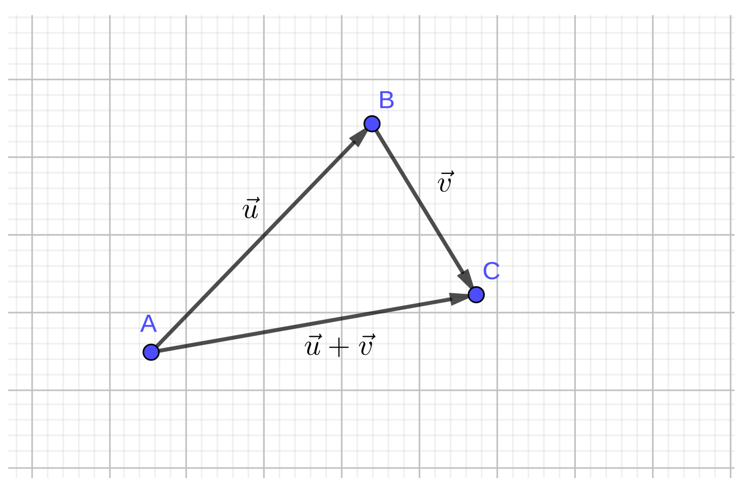


Figura 1.9: Representação geométrica da adição de dois vetores.

1.2.2 Vetor oposto

Um **vetor** $\vec{v}$ é dito ser **oposto** a um dado vetor $\vec{u}$, quando quaisquer representações de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são segmentos orientados de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos. Neste caso, denota-se por $-\vec{u}$ o vetor oposto a $\vec{u}$. Veja a Figura 1.10.

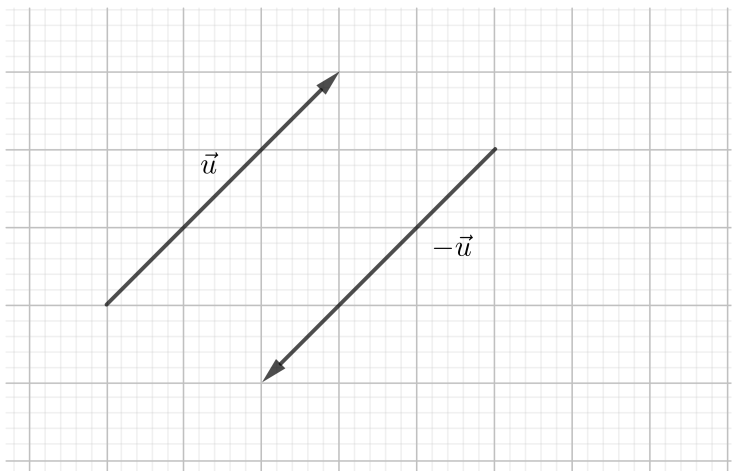


Figura 1.10: Representação geométrica de vetores opostos.

1.2.3 Subtração de vetores

Sejam dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é denotada por $\vec{u}-\vec{v}$ e é definida pela adição de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$, i.e. $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Veja a Figura 1.11.

1.2.4 Multiplicação de vetor por um escalar

A multiplicação de um número real $\alpha > 0$ (escalar) por um vetor $\vec{u}$ é denotado por $\alpha\vec{u}$ e é definido pelo vetor de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$ com norma $\alpha|\vec{u}|$. Quando $\alpha = 0$, define-se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, i.e. o vetor nulo (geometricamente, representado por qualquer ponto).

Observação 1.2.1.

- Para $\alpha < 0$, temos $\alpha\vec{u} = -(-\alpha\vec{u})$.
- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$.

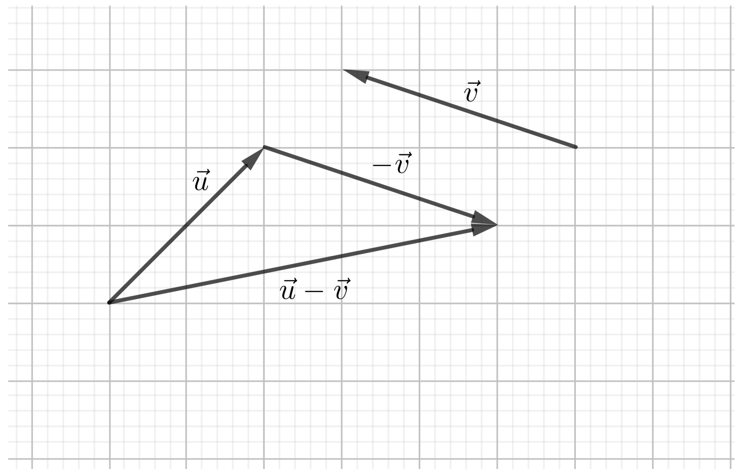


Figura 1.11: Representação geométrica da subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, i.e. $\vec{u} - \vec{v}$.

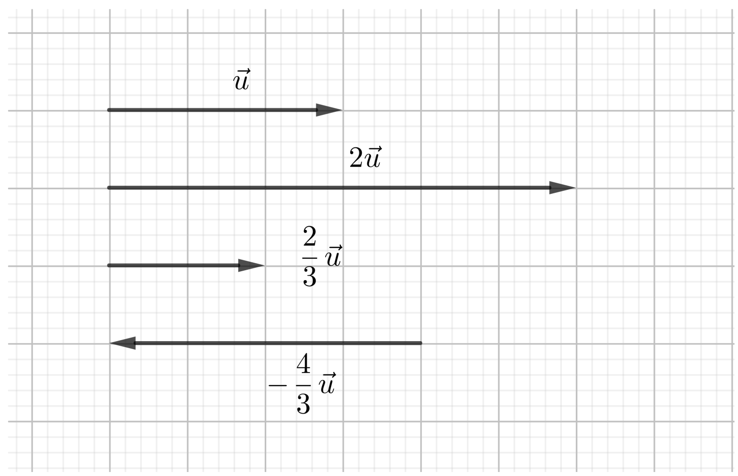


Figura 1.12: Representações geométricas de multiplicações de um vetor por diferentes escalares.

1.2.5 Propriedades das operações com vetores

As operações de adição e multiplicação por escalar de vetores têm propriedades importantes. Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e quaisquer escalares α e β temos:

- comutatividade da adição: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

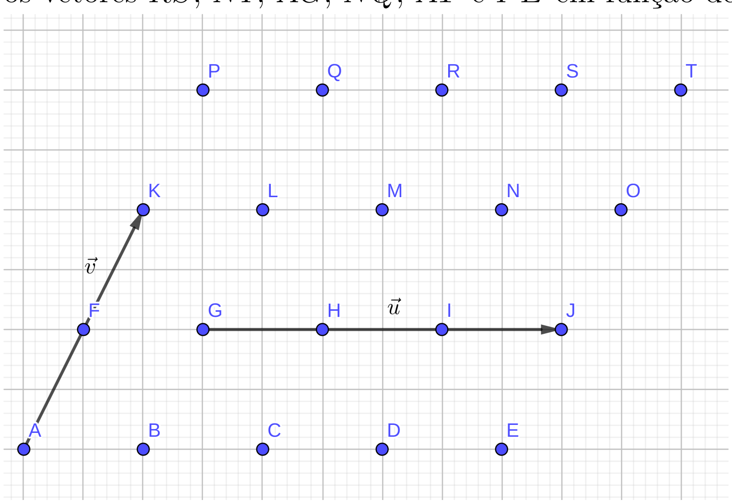
- associatividade da adição: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
- elemento neutro da adição: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;
- existência do oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$;
- associatividade da multiplicação por escalar: $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$;
- distributividade da multiplicação por escalar:

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}, \tag{1.1}$$
$$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}; \tag{1.2}$$

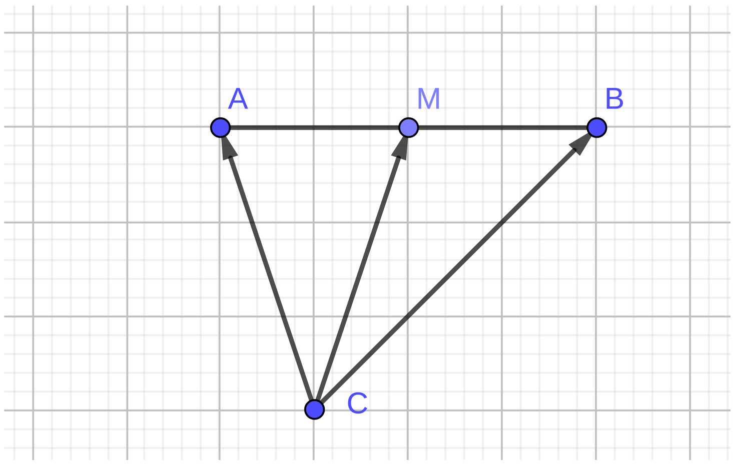
- existência do elemento neutro da multiplicação por escalar: $1\vec{u}=\vec{u}$.

Exercícios

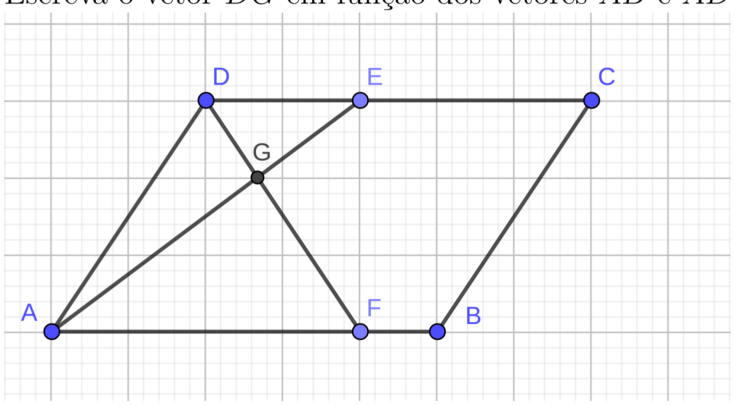
E 1.2.1. Na figura abaixo, temos $\vec{u}=\overrightarrow{GJ}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AK}$. Assim sendo, escreva os vetores $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{AT}$ e $\overrightarrow{PE}$ em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



E 1.2.2. Sejam $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{CB}$ os vetores indicados na figura abaixo. Mostre que $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.



E 1.2.3. Sejam A, B, C, D, E e G os pontos dados na figura abaixo. Escreva o vetor $\overrightarrow{DG}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



Capítulo 2

Bases e coordenadas

2.1 Dependência linear

2.1.1 Combinação linear

Dados vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ e números reais c_1, c_2, ..., c_n, com n inteiro positivo, chamamos de

$$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n \tag{2.1}$$

uma **combinação linear** de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$. Neste caso, também dizemos que $\vec{u}$ é **gerado** pelos vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ ou, equivalentemente, que estes vetores **geram** o vetor $\vec{u}$.

Exemplo 2.1.1. Sejam dados os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$. Então, temos:

- $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u} + \sqrt{2}\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_2} = \vec{u} - 2\vec{z}$ é uma outra combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_3} = 2\vec{u} - \vec{w} + \pi\vec{z}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_4} = \frac{3}{2}\vec{z}$ é uma combinação linear do vetor $\vec{z}$.

2.1.2 Dependência linear

Dois ou mais vetores dados são **linearmente dependentes** quando um deles for combinação linear dos demais.

Exemplo 2.1.2. No exemplo anterior (Exemplo **??**), temos:

- $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ dependem linearmente dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{z}$.
- $\vec{u_3}$ depende linearmente dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$.
- Os vetores $\vec{u_4}$ e $\vec{z}$ são linearmente dependentes.

Dois ou mais vetores dados são **linearmente independentes** quando eles não são linearmente dependentes.

2.1.3 Observações

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. Propriedades de congruência entre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal e congruência entre triângulos provam o enunciado.

Referências Bibliográficas

[1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica*. Livraria da Física, 2. edition, 2011.

Índice Remissivo