

Cálculo I

Pedro H A Konzen

10 de setembro de 2019

Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre cálculo de funções de uma variável. Como ferramenta computacional de apoio, vários exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	vi
1 Fundamentos sobre funções	1
1.1 Definição e gráfico de funções	1
1.1.1 Categorizações de funções	4
1.2 Função afim	5
1.3 Função potência	12
1.4 Função polinomial	19
1.4.1 Função quadrática	20
1.5 Função racional	23
1.6 Funções trigonométricas	26
1.6.1 Seno e cosseno	26
1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante	29
1.6.3 Identidades trigonométricas	31
1.7 Operações com funções	32
1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes	32
1.7.2 Funções compostas	33
1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos	33
1.7.4 Translações	33
1.7.5 Dilatações e contrações	36
1.7.6 Reflexões	39
1.8 Propriedades de funções	44

1.8.1	Funções crescentes ou decrescentes	44
1.8.2	Funções pares ou ímpares	44
1.8.3	Funções injetoras	45
1.9	Funções exponenciais	47
1.10	Funções logarítmicas	49
2	Limites	53
2.1	Noção de limites	53
2.1.1	Limites da função constante e da função identidade	55
2.2	Regras para o cálculo de limites	61
2.2.1	Indeterminação 0/0	64
2.3	Limites laterais	70
2.4	Limites no infinito	79
2.4.1	Assíntotas horizontais	83
2.4.2	Limite no infinito de função periódica	84
2.5	Limites infinitos	90
2.5.1	Assíntotas verticais	95
2.5.2	Assíntotas oblíquas	97
2.5.3	Limites infinitos no infinito	99
2.6	Continuidade	102
2.7	Limites e desigualdades	108
2.7.1	Limites de funções limitadas	109
2.7.2	Teorema do confronto	109
2.7.3	Limites envolvendo $(\sin x)/x$	111
2.8	Exercícios finais	113
3	Derivadas	114
3.1	Derivada no ponto	114
3.1.1	Retas secante e tangente	114
3.1.2	Taxas de variação	118
3.1.3	Derivada em um ponto	120
3.2	Função derivada	124
3.3	Regras básicas de derivação	131
3.3.1	Multiplicação por constante e soma	132
3.3.2	Produto e quocientes	134
3.3.3	Derivadas de funções exponenciais	137
3.3.4	Derivadas de ordens mais altas	138
3.4	Taxa de variação	139

3.5	Derivadas de funções trigonométricas	141
3.6	Regra da cadeia	141
3.7	Diferenciabilidade da função inversa	141
3.7.1	Derivadas de funções trigonométricas inversas	143
3.8	Derivação implícita	145
4	Aplicações da derivada	146
4.1	Extremos de funções	146
4.1.1	Exercícios resolvidos	150
4.1.2	Exercícios	152
4.2	Teorema do valor médio	153
4.2.1	Teorema de Rolle	153
4.2.2	Teorema do valor médio	154
4.3	Teste da primeira derivada	156
5	Integração	159
5.1	Integrais indefinidas	159
5.1.1	Regras básicas de integração	160
5.1.2	Exercícios	162
5.2	Integração por substituição	162
5.3	Integração por partes	164
5.4	Integral definida	165
5.4.1	Teorema fundamental do cálculo	166
5.4.2	Substituição em integrais definidas	166
5.4.3	Integração por partes para integrais definidas	167
6	Aplicações da integral	170
6.1	Cálculo de áreas	170
6.1.1	Áreas entre curvas	170
6.2	Volumes por fatiamento e rotação	173
	Respostas dos Exercícios	174
	Referências Bibliográficas	179
	Índice Remissivo	180

Capítulo 1

Fundamentos sobre funções

Observação 1.0.1. Ao longo deste capítulo, contaremos com o suporte de alguns códigos [Python](#) com o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

1.1 Definição e gráfico de funções

Uma **função** de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa um único elemento $y \in Y$ ¹ a cada elemento $x \in D$. Costumeiramente, identificamos uma função por uma letra, por exemplo, f e escrevemos $f : D \rightarrow Y$, $y = f(x)$, para denotar que a função f toma valores de entrada em D e de saída em Y .

O conjunto D de todos os possíveis valores de entrada da função é chamado de **domínio**. O conjunto de todos os valores $f(x)$ tal que $x \in D$ é chamado de **imagem** da função.

Ao longo do curso de cálculo, as funções serão definidas apenas por expressões matemáticas. Nestes casos, salvo explicitado o contrário, suporemos que a função tem números reais como valores de entrada e de saída. O domínio e a imagem deverão ser inferidos da regra algébrica da função ou da aplicação de interesse.

¹ $y \in Y$ denota que y é um elemento do conjunto Y .

Exemplo 1.1.1. Determinemos o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

- $y = x^2$:
 - Para qualquer número real x , temos que x^2 também é um número real. Então, dizemos que seu domínio (natural)² é o conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
 - Para cada número real x , temos $y = x^2 \geq 0$. Além disso, para cada número real não negativo y , temos que $x = \sqrt{y}$ é tal que $y = x^2$. Assim sendo, concluímos que a imagem da função é o conjunto de todos os números reais não negativos, i.e. $[0, \infty)$.
- $y = 1/x$:
 - Lembremos que divisão por zeros não está definida. Logo, o domínio desta função é o conjunto dos números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
 - Primeiramente, observemos que se $y = 0$, então não existe número real tal que $0 = 1/x$. Ou seja, 0 não pertence a imagem desta função. Por outro lado, dado qualquer número $y \neq 0$, temos que $x = 1/y$ é tal que $y = 1/x$. Logo, concluímos que a imagem desta função é o conjunto de todos os números reais não nulos, i.e. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- $y = \sqrt{1 - x^2}$:
 - Lembremos que a raiz quadrada de números negativos não está definida. Portanto, precisamos que:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1. \quad (1.2)$$

Donde concluímos que o domínio desta função é o conjunto de todos os números x tal que $-1 \leq x \leq 1$ (ou, equivalentemente, o intervalo $[-1, 1]$).

Com o [SymPy](#), podemos usar o comando³

²O **domínio natural** é o conjunto de todos os números reais tais que a expressão matemática que define a função seja possível.

³Veja a Observação [1.0.1](#).


```
reduce_inequalities(1-x**2>=0,[x])
```

para resolvermos a inequação $1 - x^2 \geq 0$.

- Uma vez que $-1 \leq x \leq 1$, temos que $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ e, portanto, $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$. Ou seja, a imagem desta função é o intervalo $[0, 1]$.

O **gráfico** de uma função é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ tal que x pertence ao domínio da função. Mais especificamente, para uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, o gráfico é o conjunto

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}. \quad (1.3)$$

O **esboço do gráfico** de uma função é, costumeiramente, uma representação geométrica dos pontos de seu gráfico em um plano cartesiano.

Exemplo 1.1.2. A Figura 1.1 mostra os esboços dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

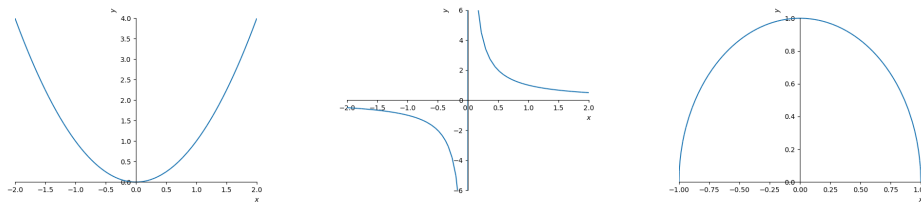


Figura 1.1: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 1/x$ e $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dadas no Exemplo 1.1.2.

Para plotarmos os gráficos destas funções usando [SymPy](#) podemos usar os seguintes comandos⁴:

```
plot(x**2,(x,-2,2))
plot(1/x,(x,-1,1),ylim=(-10,10))
plot(sqrt(1-x**2),(x,-1,1))
```

⁴Veja a Observação 1.0.1.

1.1.1 Categorizações de funções

Funções algébricas

Funções algébricas são funções definidas a partir de somas, subtrações, multiplicações, divisões ou extração de raízes de funções polinomiais. Estudaremos estas funções ao longo do curso de cálculo.

Funções transcendentais

Funções transcendentais são funções que não são algébricas. Como exemplos, temos as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica, as quais introduziremos nas próximas seções.

Funções definidas por partes

Funções definidas por partes são funções definidas por diferentes expressões matemáticas em diferentes partes de seu domínio.

Um exemplo fundamental de função definida por partes é a **função valor absoluto**⁵

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Vejamos o esboço do seu gráfico dado na Figura 1.2.

⁵Esta função também pode ser definida por $|x| = \sqrt{x^2}$.

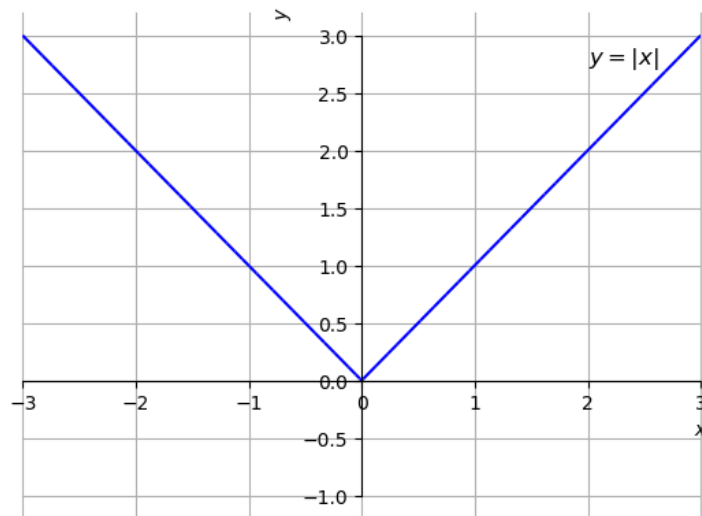


Figura 1.2: Esboço do gráfico da função valor absoluto $y = |x|$.

Exercícios

Exemplo 1.1.3. Determine o domínio e a imagem da função identidade, i.e. $f(x) = x$.

Exemplo 1.1.4. Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2 + 1$.

Exemplo 1.1.5. Determine o domínio e a imagem da função

$$h(x) = \frac{1}{x-1} - 2. \quad (1.5)$$

1.2 Função afim

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = mx + b, \quad (1.6)$$

sendo m e b parâmetros⁶ dados. O parâmetro m é chamado de **coeficiente angular** e o parâmetro b é chamado de **coeficiente constante**⁷.

⁶números reais.

⁷Mais corretamente, coeficiente do termo constante.

Quando $m = 0$, temos uma **função constante** $f(x) = b$. Esta tem domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $\{b\}$. Quando $b = 0$, temos uma **função linear** $f(x) = mx$, cujo domínio é $(-\infty, \infty)$ e imagem é $(-\infty, \infty)$. Por outro lado, toda função linear com $m \neq 0$ tem $(-\infty, \infty)$ como domínio e imagem.

Exemplo 1.2.1. A Figura 1.3 mostra esboços dos gráficos das funções afins $f(x) = -5/2$, $f(x) = 2$ e $f(x) = 2x - 1$.

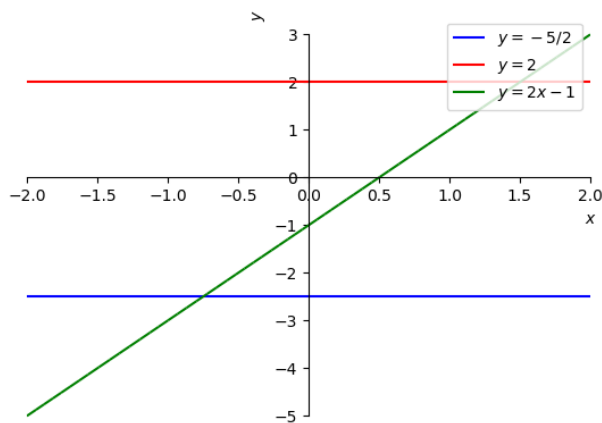


Figura 1.3: Esboços dos gráficos das funções afins $y = -5/2$, $y = 2$ e $y = 2x - 1$ discutidas no Exemplo 1.2.1.

Com o [SymPy](#), podemos plotar os gráficos destas funções com os seguintes comandos⁸:

```
plot(-5/2, (x, -2, 2))
plot(2, (x, -2, 2))
plot(2*x-1, (x, -2, 2))
```

O lugar geométrico do gráfico de uma função afim é uma reta (ou linha). O coeficiente angular m controla a inclinação da reta em relação ao eixo x ⁹.

⁸Veja a Observação 1.0.1.

⁹eixo das abscissas

Quando $m = 0$, temos uma reta horizontal. Quando $m > 0$ temos uma reta com inclinação positiva (crescente) e, quando $m < 0$ temos uma reta com inclinação negativa.

Exemplo 1.2.2. A Figura 1.4 mostra esboços dos gráficos das funções lineares $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = -2x$, $f_5(x) = -x$ e $f_6(x) = -\frac{1}{2}x$.

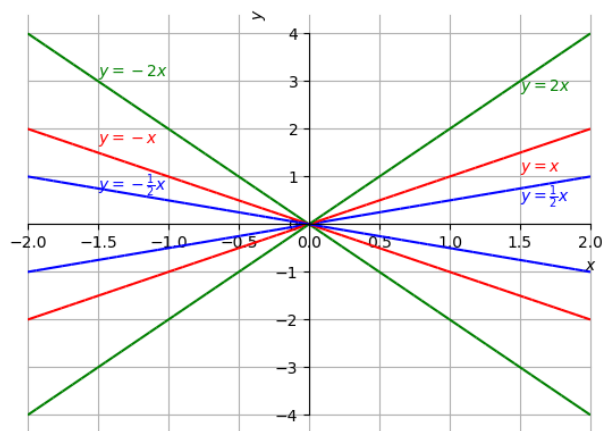


Figura 1.4: Esboços dos gráficos das funções lineares discutidas no Exemplo 1.2.2.

Verifique, plotando os gráficos com o [SymPy](#)!

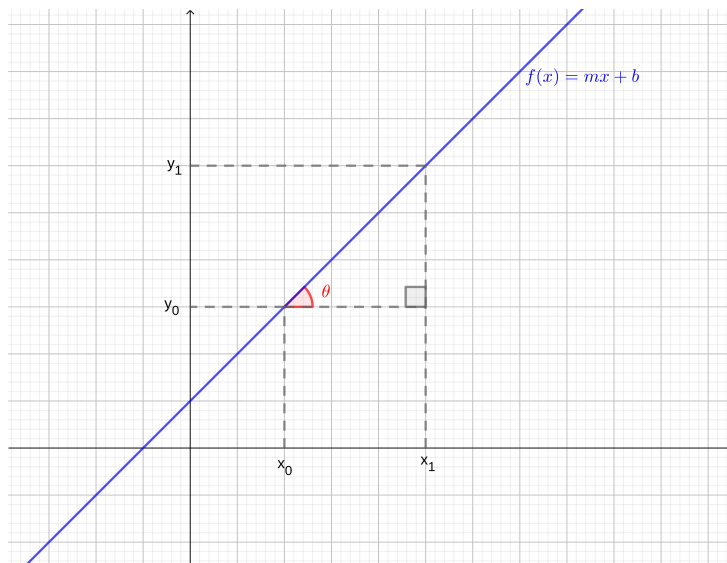


Figura 1.5: Declividade e o coeficiente angular.

A inclinação de uma reta é, normalmente, medida pelo ângulo de declividade (veja a Figura 1.5). Para definirmos este ângulo, sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , $x_0 < x_1$, pontos sobre uma dada reta, gráfico da função afim $f(x) = mx + b$. O ângulo de declividade (ou, simplesmente, a declividade) da reta é, por definição, o ângulo formado pelo segmento que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_0) e o segmento que parte de (x_0, y_0) e termina em (x_1, y_1) . Denotando este ângulo por θ , temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1.7)$$

$$= \frac{mx_1 + b - (mx_0 + b)}{x_1 - x_0} \quad (1.8)$$

$$= m, \quad (1.9)$$

o que justifica chamar m de coeficiente angular.

Quaisquer dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 \neq x_1$, determinam uma única função afim (reta) que passa por estes pontos. Para encontrar a expressão desta função, basta resolver o seguinte sistema linear

$$mx_0 + b = y_0 \quad (1.10)$$

$$mx_1 + b = y_1 \quad (1.11)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$m(x_0 - x_1) = y_0 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}. \quad (1.12)$$

Daí, substituindo o valor de m na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}x_0 + y_0. \quad (1.13)$$

Ou seja, a expressão da função linear (equação da reta) que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = \underbrace{\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}_m (x - x_0) + y_0. \quad (1.14)$$

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Trace o esboço da reta que representa o gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$.

Solução. Para esboçar o gráfico de uma função afim, basta traçarmos a reta que passa por quaisquer dois pontos distintos de seu gráfico. Por exemplo, no caso da função $f(x) = -x - 1$, temos

x	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Assim sendo, marcamos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, -2)$ em um plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles. Veja a Figura 1.6.

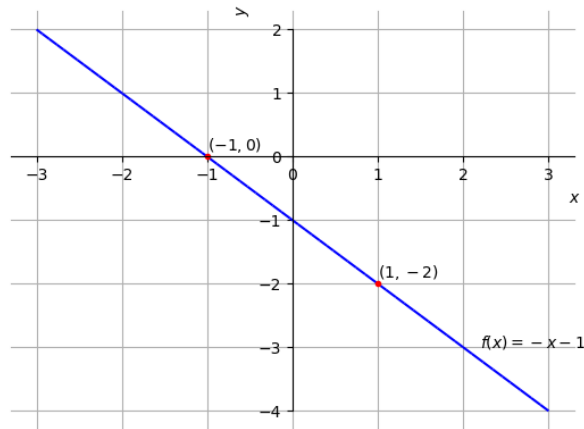


Figura 1.6: Esboço do gráfico da função afim $f(x) = -x - 1$.

Com o [SymPy](#), podemos plotar o gráfico da função $f(x) = -x - 1$ com o seguinte comando¹⁰:

```
plot(-x-1, (x, -3, 3))
```

◇

ER 1.2.2. Determine a função afim $f(x) = mx + b$, cujo gráfico contém os pontos $(1, -1)$ e $(2, 1)$.

Solução. Vamos usar (1.14). Para tanto, tomamos $(x_0, y_0) = (1, -1)$ e $(x_1, y_1) = (2, 1)$. Desta forma, temos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2. \quad (1.15)$$

De (1.14), temos

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0 \quad (1.16)$$

$$= 2(x - 1) + (-1) \quad (1.17)$$

$$= 2x - 3. \quad (1.18)$$

¹⁰Veja a Observação 1.0.1.

Ou seja, a função afim desejada é $f(x) = 2x - 3$.

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código¹¹:

```
x0 = 1
y0 = -1

x1 = 2
y1 = 1

m = (y1-y0)/(x1-x0)

print(m*(x-x0) + y0)
```

◇

ER 1.2.3. Verifique se as retas $y = -x - 1$ e $y = 2x - 3$ se interceptam e, caso afirmativo, determine o ponto de interseção.

Solução. As retas dadas são gráficos das funções afins $f(x) = -x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$. Como os coeficientes angulares de $f(x)$ e $g(x)$ são diferentes, temos que as retas têm ângulos de declividade diferentes e, portanto, são retas concorrentes¹².

Agora, vamos determinar o ponto de interseção. No ponto de interseção dos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ deve ocorrer que $f(x) = g(x)$. Segue

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x - 1 = 2x - 3 \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}. \quad (1.21)$$

Assim, temos que as retas se interceptam no ponto de abscissa $x = 2/3$. Para determinar a ordenada deste ponto, podemos usar qualquer uma das funções. Usando $f(x)$ temos

$$y = f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\frac{2}{3} - 3 = \frac{4 - 9}{3} = -\frac{5}{3}. \quad (1.22)$$

Concluimos que as retas se interceptam no ponto $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$.

Com o [SymPy](#), podemos resolver este exercício utilizando o seguinte código¹³:

¹¹Veja a Observação .

¹²Retas concorrentes são retas que se interceptam em um ponto.

¹³Veja a Observação .

```
f = lambda x: -x-1
g = lambda x: 2*x-3

px = solve(f(x)-g(x))[0]
py = f(px)

print(px, py)
```

◇

Exercícios

Exemplo 1.2.3. Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

- a) $f_1(x) = x$
- b) $f_2(x) = -x$
- c) $f_3(x) = x - 1$
- d) $f_4(x) = -x + 1$

Exemplo 1.2.4. Determine a função afim $f(x) = mx + b$, cujo gráfico contém os pontos $(-2, 1)$ e $(0, -2)$.

Exemplo 1.2.5. Determine o ponto de interseção dos gráficos das funções afins $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$.

1.3 Função potência

Uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \neq 0$ é uma constante, é chamada de **função potência**.

Funções potências têm comportamentos característicos, conforme o valor de n . Quando n é um inteiro positivo ímpar, seu domínio e sua imagem são $(-\infty, \infty)$. Veja a Figura 1.7.

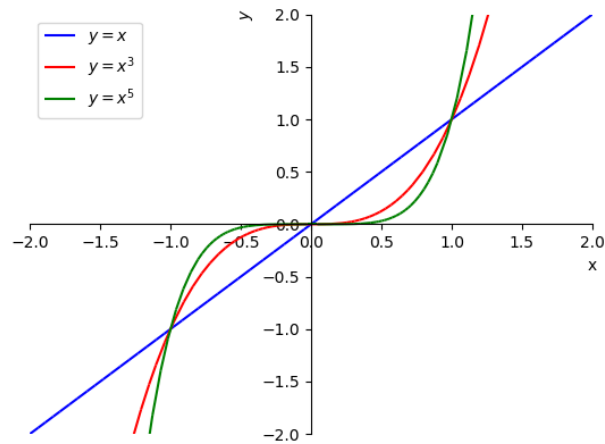


Figura 1.7: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$.

Funções potências com n positivo par estão definidas em toda parte e têm imagem $[0, \infty)$. Veja a Figura 1.8.

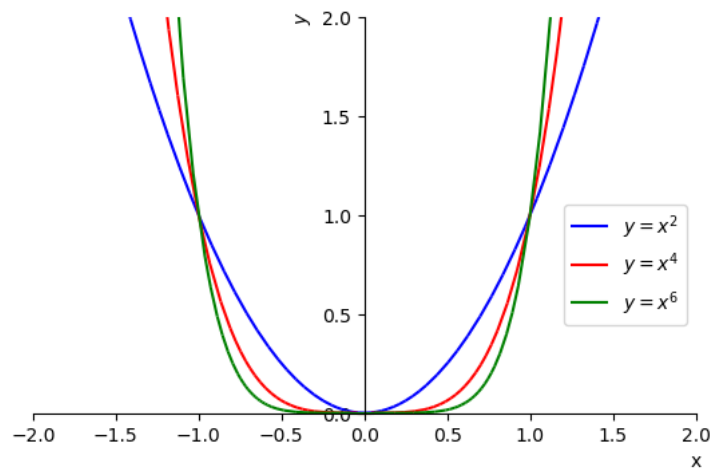


Figura 1.8: Esboços dos gráficos das funções potências $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$.

Funções potências com n inteiro negativo ímpar não são definidas em $x = 0$, tendo domínio e imagem igual a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Também, quando n inteiro negativo par, a função potência não está definida em $x = 0$, tem domínio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mas imagem $(0, \infty)$. Veja a Figura 1.9.

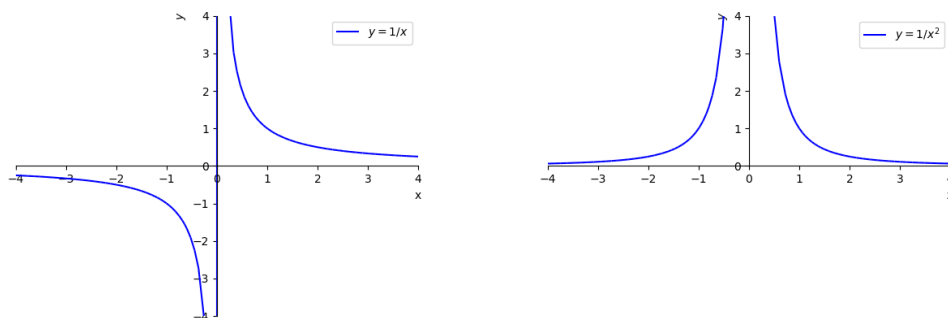


Figura 1.9: Esboços dos gráficos das funções potências $y = 1/x$ (esquerda), $y = 1/x^2$ (direita).

Há, ainda, comportamentos característicos quando $n = 1/2$, $1/3$, $3/2$ e $2/3$. Veja a Figura 1.10.

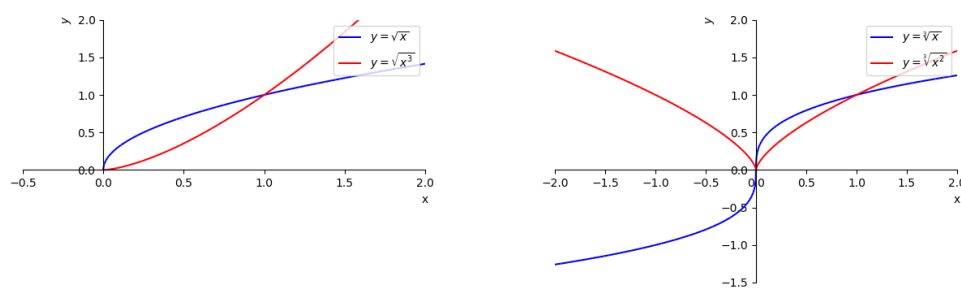


Figura 1.10: Esboços dos gráficos das funções potências. Esquerda $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x^3}$. Direita: $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Exercícios resolvidos

ER 1.3.1. Determine o domínio e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{5/2}$;

b) $g(x) = x^{5/3}$.

Solução.

- a) Vamos analisar a função $f(x) = x^{5/2}$. Como $x^{5/2} = \sqrt{x^5}$ e não existe a raiz quadrada de número negativo, temos que x^5 deve ser não negativo. Daí, x deve ser não negativo. Logo, o domínio de $f(x) = x^{5/2}$ é $[0, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 1.11.

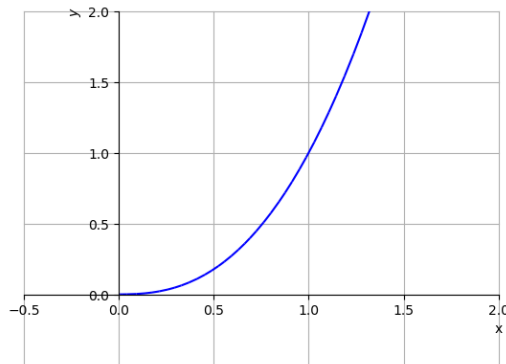


Figura 1.11: Esboço do gráfico de $f(x) = x^{5/2}$.

Para plotar o gráfico de $f(x)$ com o [SymPy](#), basta digitar¹⁴, por exemplo:

```
plot(x**(5/2), (x, 0, 2))
```

- b) Vamos analisar a função $g(x) = x^{5/3}$. Como $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$, não temos restrição sobre os valores de x . Logo, o domínio da função g é $(-\infty, \infty)$. Veja o esboço desta função na Figura 1.12.

¹⁴Veja a Observação 1.0.1.

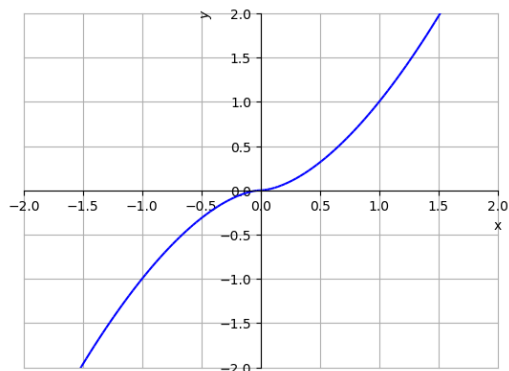


Figura 1.12: Esboço do gráfico de $g(x) = x^{5/3}$.

Para plotar o gráfico de $g(x)$ com o [SymPy](#), digitamos¹⁵:

```
p = plot(x**(5/3), (x, 0, 2), line_color="blue", show=False)
q = plot(-(-x)**(5/3), (x, -2, 0), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

Você sabe o porquê não pode-se usar, simplesmente, o seguinte comando?

```
plot(x**(5/3), (x, -2, 2))
```

◇

ER 1.3.2. Determine a equação da reta que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução. Para determinarmos a reta precisamos, antes, dos pontos de in-

¹⁵Veja a Observação [1.0.1](#).

terseção. As funções se interceptam nos pontos de abscissa x tais que

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt[3]{x} \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow 1 = x \sqrt[3]{x} \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow 1 = x \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow x^{1+\frac{1}{3}} = 1 \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 1 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow x^4 = \sqrt[3]{1} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow x^4 = 1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (1.30)$$

Ou seja, os gráficos se interceptam nos pontos de abscissas $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Veja o esboço dos gráficos das funções na Figura 1.13. Agora, podemos usar qualquer uma das funções para obter as ordenadas dos pontos de interseção. Usando $f(x)$, temos

$$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) = (-1, -1) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) = (x_1, f(x_1)) = (1, 1). \quad (1.31)$$

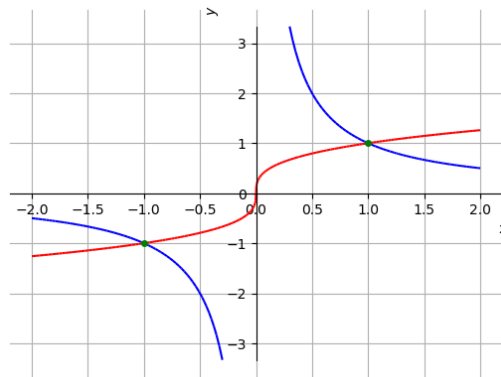


Figura 1.13: Interseção dos gráficos das funções $f(x) = 1/x$ (azul) e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (vermelho).

Agora, basta determinarmos a equação da reta que passa pelos pontos $(x_0, y_0) =$

$(-1, -1)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1)$. De (1.14), temos que a equação da reta é tal que

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) + (-1) \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow y = x + 1 - 1 \Rightarrow y = x. \quad (1.33)$$

Ou seja, a que passa pelos pontos de interseção dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ tem equação $y = x$.

Os seguintes comandos, mostrar como podemos resolver este problema usando o [SymPy](#)¹⁶:

```
f = lambda x: 1/x
# x nao negativo
g1 = lambda x: cbrt(x)
# x negativo
g2 = lambda x: -cbrt(-x)

x0 = solve(f(x)-g2(x))[0]
x1 = solve(f(x)-g1(x))[0]

y0 = f(x0)
y1 = f(x1)

print('y = ', (y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0)+y0)
```

◇

Exercícios

E 1.3.1. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^7$;

b) $g(x) = x^8$.

¹⁶Veja a Observação ??.

E 1.3.2. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x^7}$;

b) $g(x) = \frac{1}{x^8}$.

E 1.3.3. Determine o domínio, a imagem e faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$;

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

1.4 Função polinomial

Uma **função polinomial** (**polinômio**) tem a forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.34)$$

onde a_i são coeficientes reais, $a_n \neq 0$ e n é inteiro não negativo, este chamado de **grau do polinômio**.

Polinômios são definidos em toda parte¹⁷. Polinômios de grau ímpar tem imagem $(-\infty, \infty)$. Entretanto, a imagem polinômios de grau par dependem de cada caso. Iremos estudar mais propriedades de polinômios ao longo do curso de cálculo. Veja a Figura 1.14.

¹⁷Uma função é dita ser definida em toda parte quando seu domínio é (∞, ∞)

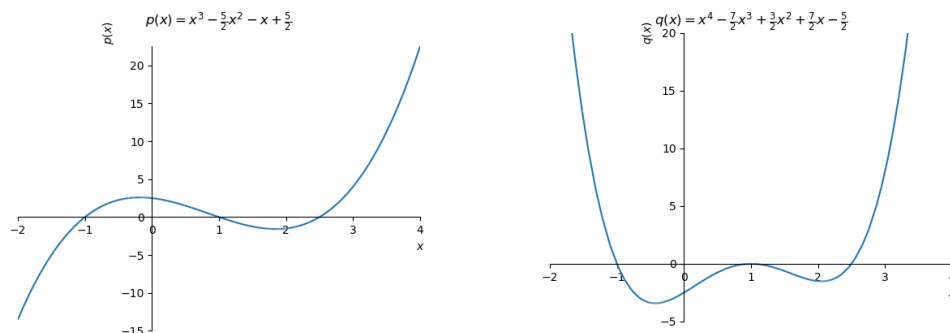


Figura 1.14: Esboços dos gráficos das funções polinomiais. Esquerda $p(x) = x^3 - 2.5x^2 - 1.0x + 2.5$. Direita: $q(x) = x^4 - 3.5x^3 + 1.5x^2 + 3.5x - 2.5$.

Quando $n = 0$, temos um polinômio de grau 0 (ou uma função constante). Quando $n = 1$, temos um polinômio de grau 1 (ou, uma função afim). Ainda, quando $n = 2$ temos uma **função quadrática** (ou **polinômio quadrático**) e, quando $n = 3$, temos uma **função cúbica** (ou **polinômio cúbico**).

1.4.1 Função quadrática

Os polinômios de grau 2 são, também, chamados de **funções quadráticas**, i.e. funções da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (1.35)$$

onde a é chamado de **coeficiente do termo quadrático**, b o **coeficiente do termo linear** e c o **coeficiente do termo constante**.

Os zeros de uma função quadrática podem ser calculados pela **fórmula de Bhaskara**

$$x_0, x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.36)$$

O esboço do gráfico de uma função quadrática é uma **parábola côncava para cima** quando $a > 0$ e, **côncava para baixo** quando $a < 0$. Veja a Figura 1.15.

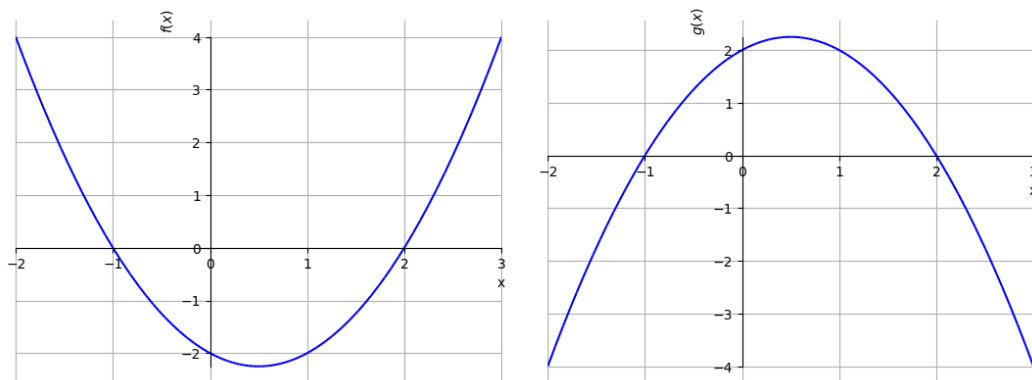


Figura 1.15: Esboço dos gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2 - x - 2$ (esquerda) e $g(x) = -x^2 + x + 2$ (direita).

O **vértice** da função quadrática $f(x)$ com coeficiente quadrático positivo (com coeficiente quadrático negativo) é o ponto no qual ela atinge seu **valor máximo (mínimo)** em todo o seu domínio natural. Quando f têm zeros reais, o ponto de abscissa do vértice é o ponto médio entre os zeros x_0 e x_1 da função, i.e. o vértice $V = (x_v, y_v)$ é tal que

$$x_v = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad \text{e} \quad y_v = f(x_v). \quad (1.37)$$

O valor x_v é a abscissa do ponto em que a função quadrática f atinge o valor máximo (valor mínimo) y_v .

Exercícios resolvidos

ER 1.4.1. Determine os zeros do polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Solução. Determinar os zeros da função f significa entrar todos os valores de x tais que $f(x) = 0$ (estes são as abscissas dos pontos nos quais o gráfico de f intercepta o eixo das abscissas). Temos

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 2 = 0. \quad (1.40)$$

Então, usando a fórmula de Bhaskara (1.36) na equação $x^2 - x - 2 = 0$, obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.41)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad (1.42)$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad (1.43)$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \quad (1.44)$$

$$= -1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad (1.45)$$

Com isso, temos que os zeros da função f ocorrem nos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Com o [SymPy](#), podemos calcular os zeros da função f com o seguinte comando¹⁸:

```
solve(x**3-x**2-2*x)
```

◇

ER 1.4.2. Determine o valor mínimo da função $f(x) = x^2 - x - 2$.

Solução. Como f é uma função quadrática com coeficiente quadrático positivo, temos que seu gráfico é uma parábola côncava para cima. Logo, f atinge seu valor mínimo no seu vértice. Por sorte, os zeros de f são $x_0 = -1$ e $x_1 = 2$. Logo, o vértice tem abscissa

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (1.46)$$

Ou seja, a abscissa do ponto de mínimo de f é $1/2$ e seu valor mínimo é

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 - 8}{4} = -\frac{9}{4}. \quad (1.47)$$

Podemos resolver este exercício com o seguinte código [SymPy](#)¹⁹:

¹⁸Veja a Observação 1.0.1.

¹⁹Veja a Observação 1.0.1.

```
f = lambda x: x**2-x-2
z = solve(f(x))
f((z[0]+z[1])/2)
```

◇

Exercícios

E 1.4.1. Determine os zeros do polinômio $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$.

E 1.4.2. Determine o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + x + 2$.

1.5 Função racional

Uma **função racional** tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (1.48)$$

onde $p(x)$ e $q(x) \not\equiv 0$ são polinômios.

Funções racionais não estão definidas nos zeros de $q(x)$. Além disso, suas imagens dependem de cada caso. Estudaremos o comportamento de funções racionais ao longo do curso de cálculo. Como exemplo, veja a Figura 1.16 para um esboço do gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}. \quad (1.49)$$

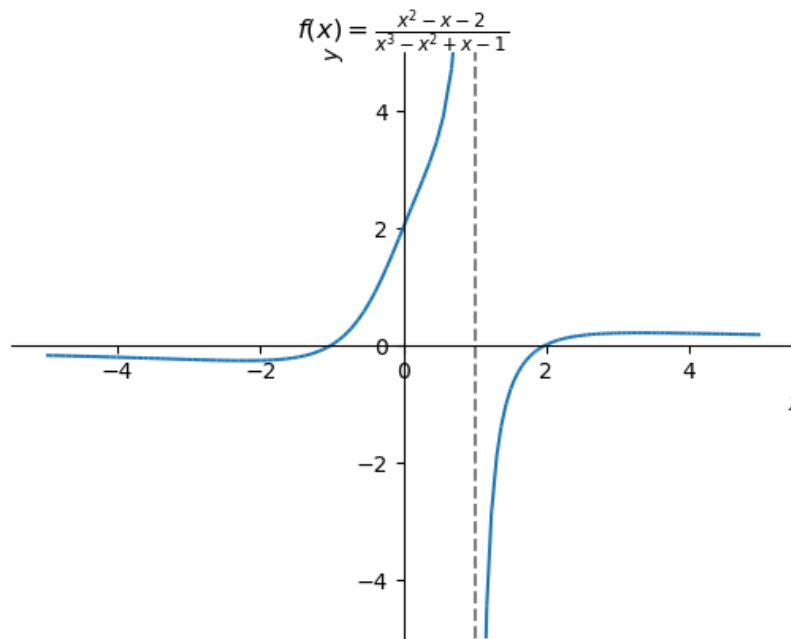


Figura 1.16: Esboço do gráfico da função racional $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

Com o estudo do cálculo de limites, veremos que a reta $y = 0$ (eixo das abscissas) é uma assíntota horizontal e a reta $x = 1$ (reta tracejada) é uma assíntota vertical ao gráfico desta função. Esta singularidade no ponto $x = 1$ está relacionada ao fato de que o denominador se anula em $x = 1$. Ainda, temos

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1, \quad (1.50)$$

o que mostra que $x = 1$ é a única raiz do denominador. Com isso, podemos concluir que o domínio da função $f(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercícios resolvidos

E 1.5.1. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}. \quad (1.51)$$

Solução. Como $f(x)$ é uma função racional, ela não está definida nos zeros do polinômio que constitui seu denominador. I.e., nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (1.52)$$

Logo, o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

◇

E 1.5.2. Determine o domínio e faça o esboço do gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x - 1}{x - 1}. \quad (1.53)$$

Solução. Tendo em vista que o denominador se anula em $x = 1$, o domínio de g é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Agora, para fazermos um esboço de seu gráfico, observamos que $g(x) = 1$ para $x \neq 1$. I.e., g é uma função constante para valores de $x \neq 1$ e não está definida em $x = 1$. Veja a Figura 1.17 para o esboço do gráfico da função g .

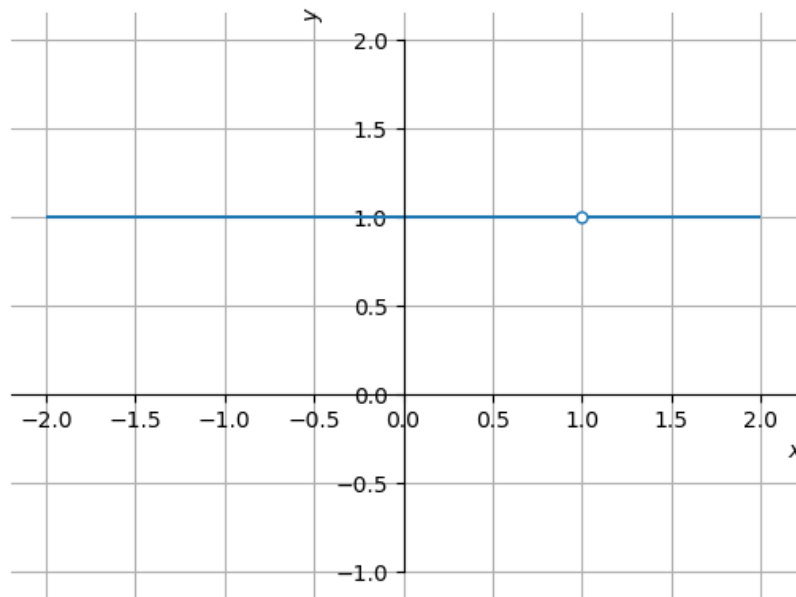


Figura 1.17: Esboço do gráfico da função $g(x) = (x - 1)/(x - 1)$.

Com o [SymPy](#), o comando²⁰

```
plot((x-1)/(x-1), (x, -2, 2))
```

plota uma linha constante, sem identificar a singularidade em $x = 1$. Isto ocorre, pois os gráficos com o [SymPy](#) são obtidos a partir de uma amostra discreta de pontos. Ocorre que esta amostra pode não conter as singularidades. No caso de conter, a execução pode não plotar o gráfico e retornar um erro.

Devemos ficar atentos a esboços de gráficos obtidos no computador, muitas vezes os gráficos podem estar errados. Cabe ao usuário identificar e analisar pontos e região de interesse.

◇

Exercícios

E 1.5.3. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x}. \quad (1.54)$$

1.6 Funções trigonométricas

1.6.1 Seno e cosseno

As funções trigonométricas seno $y = \text{sen}(x)$ e cosseno $y = \text{cos}(x)$ podem ser definidas a partir do círculo trigonométrico (veja a Figura 1.18). Seja x o ângulo²¹ de declividade da reta que passa pela origem do plano cartesiano (reta r na Figura 1.18). Seja, então, (a, b) o ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária²². Então, definimos:

$$\text{sen}(x) = a, \quad \text{cos}(x) = b. \quad (1.55)$$

²⁰Veja a Observação 1.0.1.

²¹Em geral utilizaremos a medida em radianos para ângulos.

²²Circunferência do círculo de raio 1.

A partir da definição, notemos que ambas funções têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $[-1, 1]$.

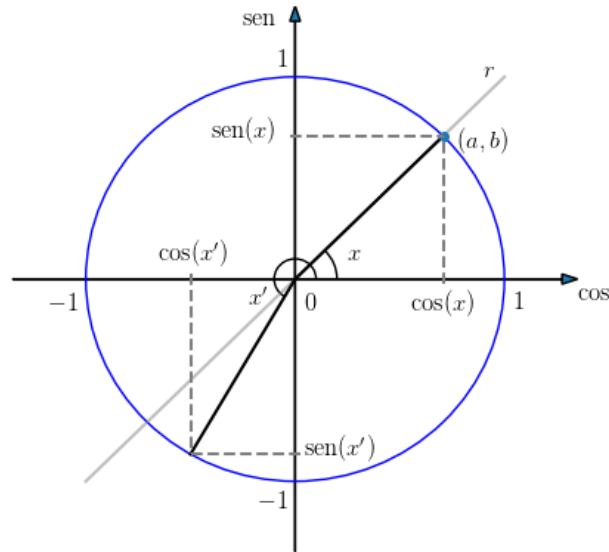


Figura 1.18: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Na Figura 1.19 podemos extrair os valores das funções seno e cosseno para os ângulos fundamentais. Por exemplo, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.56)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.57)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (1.58)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (1.59)$$

$$(1.60)$$

As funções seno e cosseno estão definidas no [SymPy](#) como `sin` e `cos`, respectivamente. Por exemplo, para computar o seno de $\pi/6$, digitamos:

```
sin(pi/6)
```

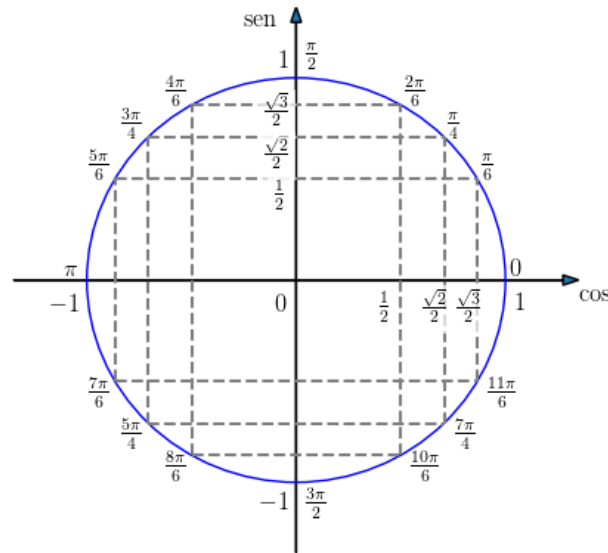


Figura 1.19: Funções seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Uma **função** $f(x)$ é dita **periódica** quando existe um número p , chamado de período da função, tal que

$$f(x + p) = f(x) \quad (1.61)$$

para qualquer valor de x no domínio da função. Da definição das funções seno e cosseno, notemos que ambas são periódicas com período 2π , i.e.

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (1.62)$$

para qualquer valor de x .

Na Figura 1.20, temos os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno.

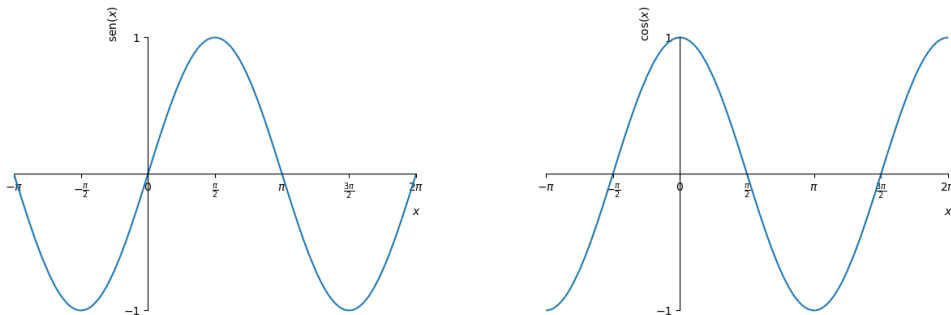


Figura 1.20: Esboços dos gráficos das funções seno (esquerda) e cosseno (direita).

1.6.2 Tangente, cotangente, secante e cossecante

Das funções seno e cosseno, definimos as funções **tangente**, **cotangente**, **secante** e **cossecante** como seguem:

$$\operatorname{tg}(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) := \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad (1.63)$$

$$\operatorname{sec}(x) := \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) := \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}. \quad (1.64)$$

No [SymPy](#), as funções tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser computadas com as funções **tan**, **cot**, **sec** e **csc**, respectivamente. Por exemplo, podemos computar o valor de $\operatorname{cosec}(\pi/4)$ com o comando

```
csc(pi/4)
```

Na Figura [1.21](#), temos os esboços dos gráficos das funções tangente e cotangente. Observemos que a função tangente não está definida nos pontos $(2k + 1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cotangente não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, \infty)$ e período π .

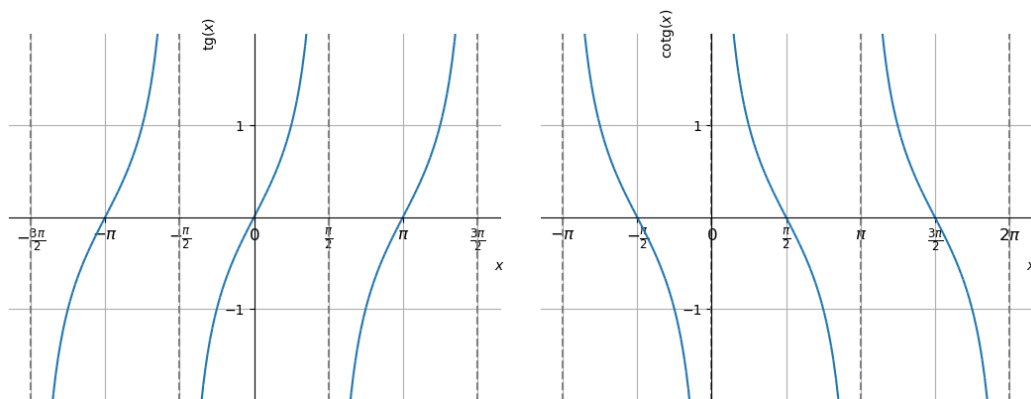


Figura 1.21: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

Na Figura 1.22, temos os esboços dos gráficos das funções secante e cossecante. Observemos que a função secante não está definida nos pontos $(2k + 1)\pi/2$, para todo k inteiro. Já, a função cossecante não está definida nos pontos $k\pi$, para todo k inteiro. Ambas estas funções têm imagem $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ e período π .

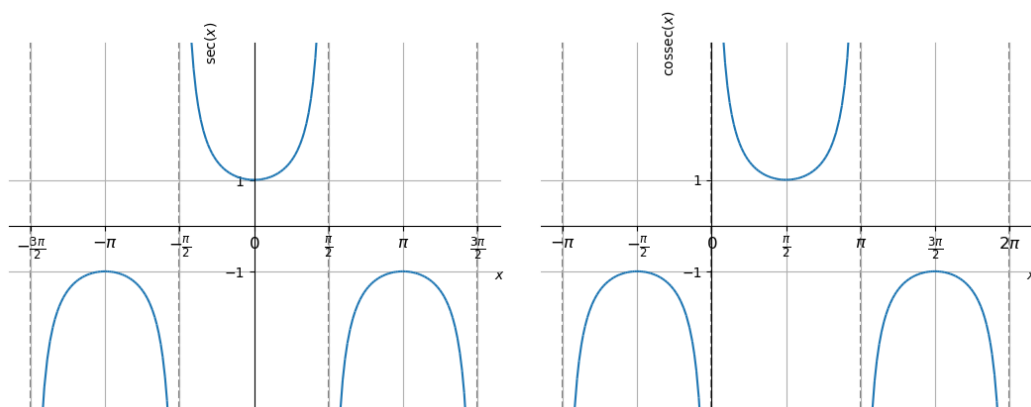


Figura 1.22: Esboços dos gráficos das funções tangente (esquerda) e cotangente(direita).

1.6.3 Identidades trigonométricas

Aqui, vamos apresentar algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas ao longo do curso de cálculo. Começemos pela identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1.65)$$

Desta decorrem as identidades

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2 x, \quad (1.66)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x). \quad (1.67)$$

Das seguintes fórmulas para adição/subtração de ângulos

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.68)$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y), \quad (1.69)$$

seguem as fórmulas para ângulo duplo

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \quad (1.70)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (1.71)$$

Também, temos as fórmulas para o ângulo metade

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (1.72)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (1.73)$$

Exercícios resolvidos

ER 1.6.1. Mostre que

$$\cos x - 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (1.74)$$

Solução. A identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (1.75)$$

aplicada a metade do ângulo, fornece

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}. \quad (1.76)$$

Então, isolando $\cos x$, obtemos

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (1.77)$$

$$\Rightarrow \cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (1.78)$$

◇

Exercícios

E 1.6.1. Mostre que $\sin x$ é uma função ímpar, i.e.

$$\sin x = \sin(-x) \quad (1.79)$$

para todo número real x .

E 1.6.2. Mostre que $\cos x$ é uma função par, i.e.

$$\cos x = -\cos(-x) \quad (1.80)$$

para todo número real x .

1.7 Operações com funções

1.7.1 Somas, diferenças, produtos e quocientes

Sejam dadas as funções f e g com domínio em comum D . Então, definimos as funções

- $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ para todo $x \in D$;
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$ para todo $x \in D$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ para todo $x \in D$ tal que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 1.7.1. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$. Temos:

- $(f + g)(x) = x^2 + x$ e está definida em toda parte.

- $(g - f)(x) = x - x^2$ e está definida em toda parte.
- $(fg)(x) = x^3$ e está definida em toda parte.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x}$ e tem domínio $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ ²³.

1.7.2 Funções compostas

Sejam dadas as funções f e g . Definimos a **função composta** de f com g por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \quad (1.81)$$

Seu domínio consiste dos valores de x que pertençam ao domínio da g e tal que $g(x)$ pertença ao domínio da f .

Exemplo 1.7.2. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. A função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

1.7.3 Translações, contrações, dilatações e reflexões de gráficos

Algumas operações com funções produzem resultados bastante característico no gráfico de funções. Com isso, podemos usar estas operações para construir gráficos de funções mais complicadas a partir de funções básicas.

1.7.4 Translações

Dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que a o gráfico de $y = f(x) + k$ é uma translação vertical do gráfico de f . Se $k > 0$, observamos uma translação vertical para cima. Se $k < 0$, observamos uma translação vertical para baixo.

Exemplo 1.7.3. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.23, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k = x^2 + k$ para $k = 1$.

²³Observemos que não podemos simplificar o x , pois a função $y = x$ é diferente da função $y = x^2/x$.

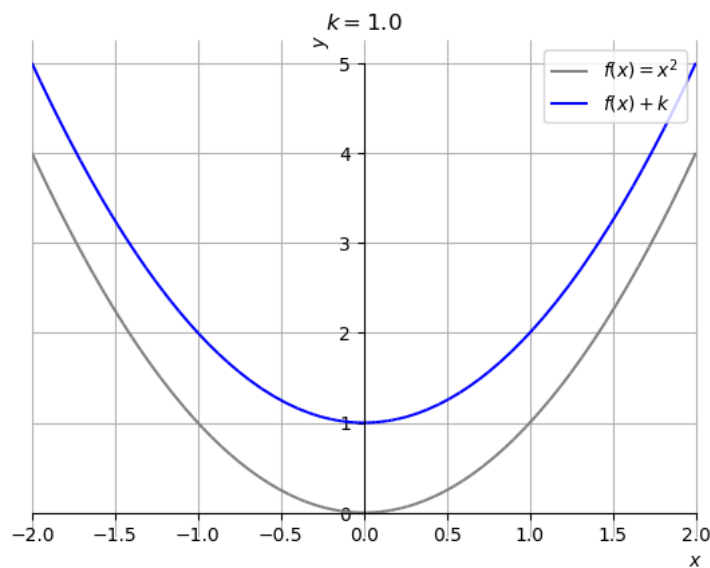


Figura 1.23: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $f(x) + k$ com $k = 1$.

O seguinte código Python²⁴, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x) + k$:

```
k = 1
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(x)+k,(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("%k = %1.1f$" % k)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$f(x)+k$"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

²⁴Veja a Observação 1.0.1.


```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de k e a função f para vermos o efeito das translações verticais.

Translações horizontais de gráficos podem ser produzidas pela soma de uma constante não nula ao argumento da função. Mais precisamente, dada uma função f e uma constante $k \neq 0$, temos que o gráfico de $y = f(x + k)$ é uma translação horizontal do gráfico de f em k unidades. Se $k > 0$, observamos uma translação horizontal para a esquerda. Se $k < 0$, observamos uma translação horizontal para a direita.

Exemplo 1.7.4. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.24, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x + k) = (x + k)^2$ para $k = 1$.

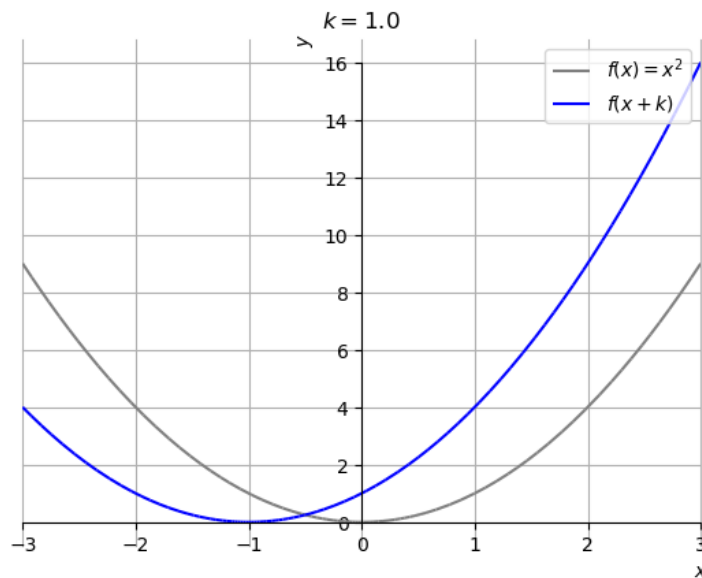


Figura 1.24: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $f(x + k)$ com $k = 1$.

O seguinte código Python²⁵, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(x + k)$:

```
k = 1
```

²⁵Veja a Observação 1.0.1.

```

f = lambda x: x**2

p = plot(f(x), (x, -3, 3), line_color="gray", show=False)
q = plot(f(x+k), (x, -3, 3), line_color="blue", show=False)
p.extend(q)
p.title = ("k = %1.1f" % k)
p.xlabel = 'x'
p.ylabel = 'y'
p[0].label = "f(x) = x^2"
p[1].label = "f(x+k)"
p.save('fig.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar o valor de k e a função f para vermos o efeito das translações horizontais.

1.7.5 Dilatações e contrações

Sejam dados uma função f e uma constante α . Então, o gráfico de:

- $y = \alpha f(x)$ é uma dilatação vertical do gráfico de f , quando $\alpha > 1$;
- $y = \alpha f(x)$ é uma contração vertical do gráfico de f , quando $0 < \alpha < 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma contração horizontal do gráfico de f , quando $\alpha > 1$;
- $y = f(\alpha x)$ é uma dilatação horizontal do gráfico de f , quando $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 1.7.5. Seja $f(x) = x^2$. A Figura 1.25, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot x^2$ para $\alpha = 2$.

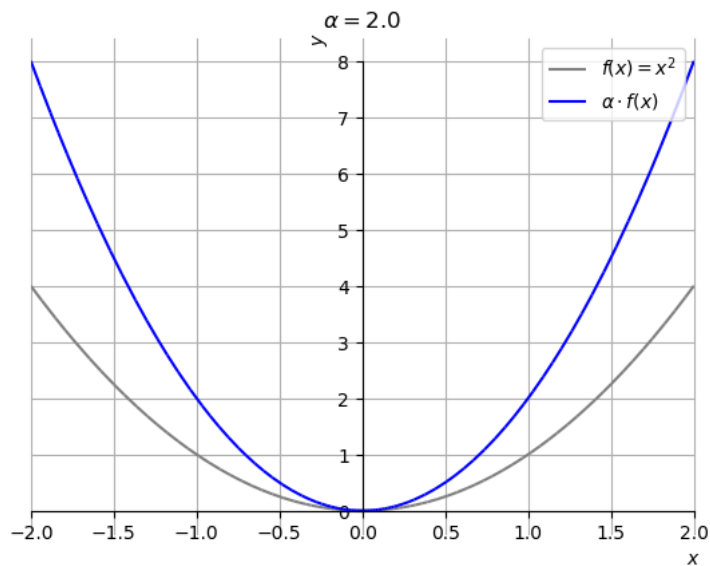


Figura 1.25: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2$ e $\alpha \cdot f(x)$ com $\alpha = 2$.

O seguinte código Python²⁶, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $\alpha \cdot f(x)$:

```
alpha = 2
f = lambda x: x**2

p = plot(f(x),(x,-2,2),line_color="gray",show=False)
q = plot(alpha*f(x),(x,-2,2),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha = %1.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2$"
p[1].label = "$\alpha \cdot f(x)$"
p.save('fig_ex_dilavert.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
```

²⁶Veja a Observação 1.0.1.

```
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilavert.png', bbox_inches='tight')
```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações verticais.

Exemplo 1.7.6. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$. A Figura 1.26, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^2 - 2(\alpha \cdot x) + 1$ para $\alpha = \frac{1}{2}$.

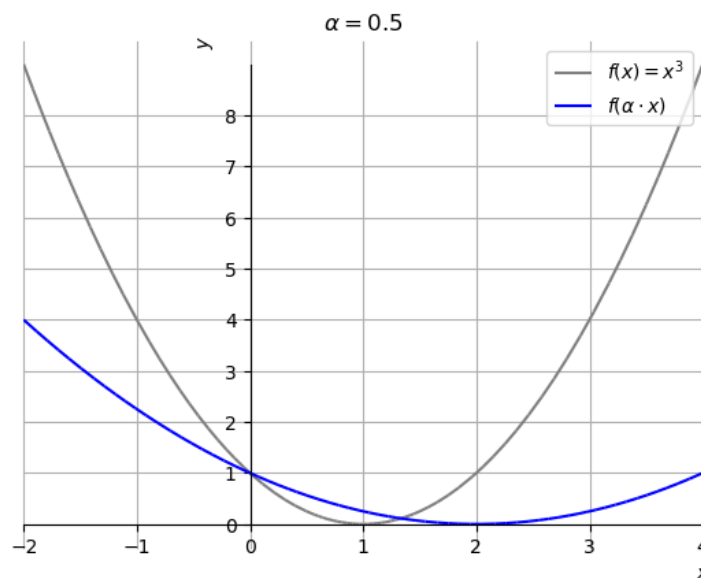


Figura 1.26: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $f(\alpha \cdot x)$ com $\alpha = \frac{1}{2}$.

O seguinte código Python²⁷, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(\alpha \cdot x)$:

```
alpha = 0.5
f = lambda x: x**2-2*x+1

p = plot(f(x),(x,-2,4),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(alpha*x),(x,-2,4),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.title = ("$\alpha = %.1f$" % alpha)
p.xlabel = '$x$'
```

²⁷Veja a Observação 1.0.1.

```

p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^3$"
p[1].label = "$f(\alpha \cdot x)$"
p.save('fig_ex_dilahoriz.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(0,9))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_dilahoriz.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar o valor de `alpha` e a função `f` para vermos o efeito das dilatações/contrações horizontais.

1.7.6 Reflexões

Seja dada uma função f . O gráfico da função $y = -f(x)$ é uma reflexão em torno do eixo das abscissas do gráfico da função f . Já, o gráfico da função $y = f(-x)$ é uma reflexão em torno do eixo das ordenadas do gráfico da função f .

Exemplo 1.7.7. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura 1.28, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

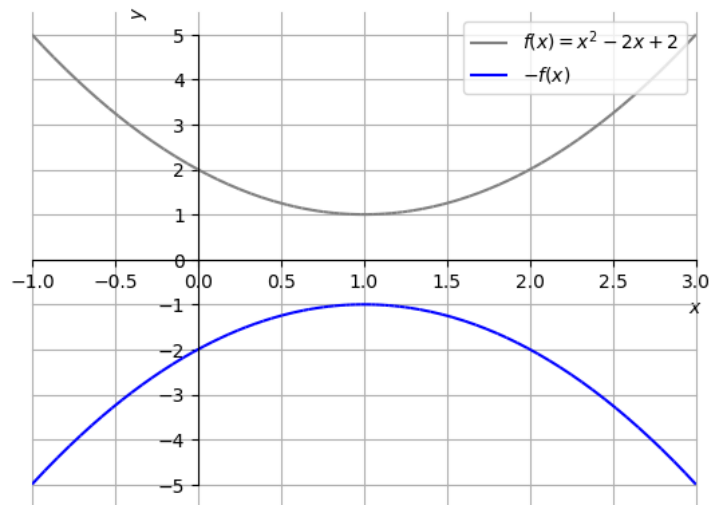


Figura 1.27: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $-f(x)$.

O seguinte código Python²⁸, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $-f(x)$:

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(-f(x),(x,-1,3),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$-f(x)$"
p.save('fig_ex_reflex.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-5,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_reflex.png', bbox_inches='tight')
```

²⁸Veja a Observação 1.0.1.

Podemos alterar a função f para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das abscissas.

Exemplo 1.7.8. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 2$. A Figura ??, contém os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x) = x^2 + 2x + 2$.

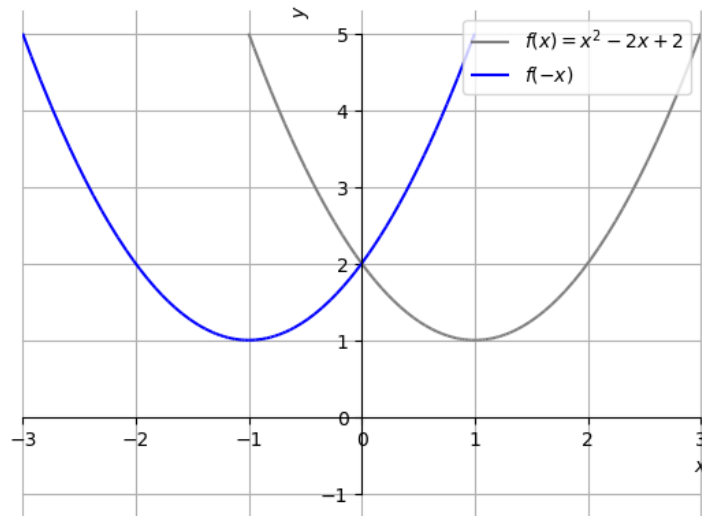


Figura 1.28: Esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $f(-x)$.

O seguinte código Python²⁹, faz os esboços dos gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$:

```
f = lambda x: x**2-2*x+2

p = plot(f(x),(x,-1,3),line_color="gray",show=False)
q = plot(f(-x),(x,-3,1),line_color="blue",show=False)
p.extend(q)
q = plot(-1,(x,-3,3),line_color="none",show=False)
p.extend(q)
p.xlabel = '$x$'
p.ylabel = '$y$'
p[0].label = "$f(x) = x^2-2x+2$"
p[1].label = "$f(-x)$"
p[2].label = ""
```

²⁹Veja a Observação 1.0.1.

```

p.save('fig_ex_refley.png')

fig = p._backend.fig
ax = fig.axes[0]
ax.grid()
ax.set_yticks(range(-1,6))
ax.legend(loc="upper right")
fig.savefig('fig_ex_refley.png', bbox_inches='tight')

```

Podemos alterar a função f para vermos o efeito das reflexões em torno de eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

ER 1.7.1. Sejam

$$f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1. \quad (1.82)$$

Determine a função composta $(f \circ g)$ e seu domínio.

Solução. Começamos determinando a função composta

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad (1.83)$$

$$= f(x^2 + 1) \quad (1.84)$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^2 - \sqrt{x^2 + 1 - 1}}{x^2 + 1} \quad (1.85)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{x^2}}{x^2 + 1} \quad (1.86)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - |x|}{x^2 + 1}. \quad (1.87)$$

Agora, observamos que g está definida em toda parte e tem imagem $[1, \infty)$. Como o domínio da f é $[1, \infty)$, temos que $(f \circ g)$ está definida em toda parte.

◇

ER 1.7.2. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = 2(x-1)^3 + 1$.

Solução. Começamos traçando o gráfico de $f_1(x) = x^3$. Então, obtemos o gráfico de $f_2(x) = (x - 1)^3$ por translação de uma unidade à direita. O gráfico de $f_3(x) = 2(x - 1)^3$ é obtido por dilatação vertical de 2 vezes. Por fim, o gráfico de $f_4(x) = 2(x - 1)^3 + 1$ é obtido por translação de uma unidade para cima. Veja a Figura 1.29.

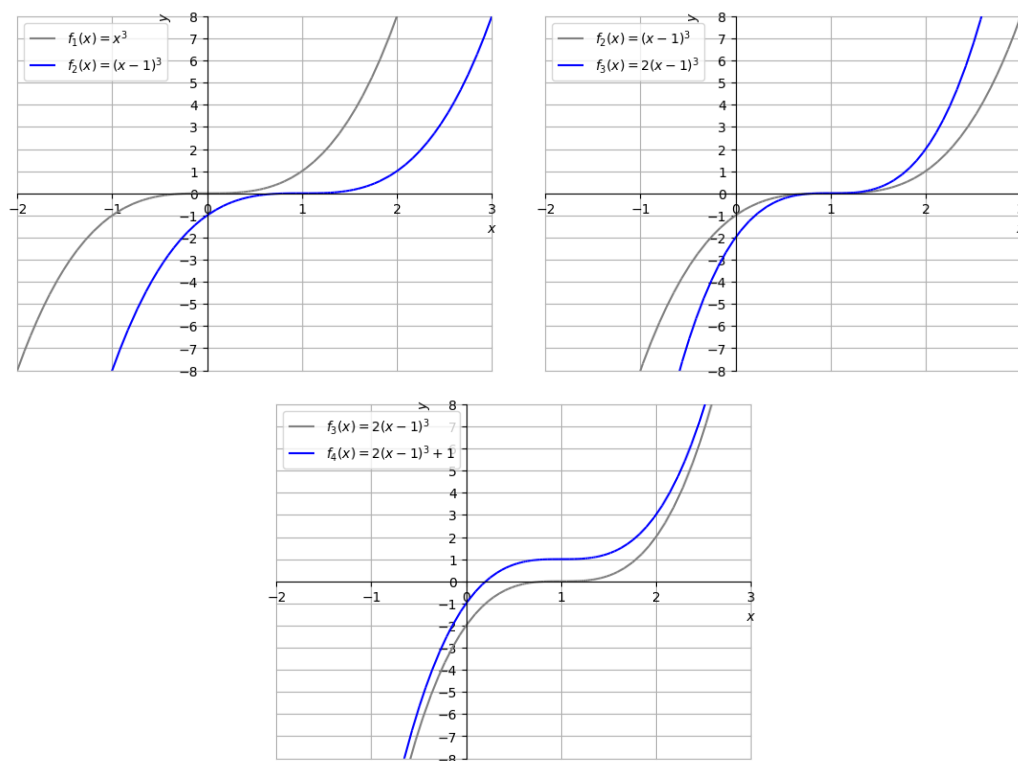


Figura 1.29: Construção do esboço do gráfico de $f(x) = 2(x - 1)^3 + 1$.

◇

Exercícios

E 1.7.1. Sejam $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine a função $(f \circ g)$ e seu domínio.

E 1.7.2. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = 2x^3 - 1$.

1.8 Propriedades de funções

1.8.1 Funções crescentes ou decrescentes

Uma função f é dita ser crescente quando $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ no seu domínio. É dita não decrescente quando $f(x_1) \leq f(x_2)$ para todos os $x_1 < x_2$ no seu domínio. Analogamente, é dita decrescente quando $f(x_1) > f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$. E, por fim, é dita não crescente quando $f(x_1) \geq f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$, sempre no seu domínio.

Exemplo 1.8.1. Vejamos os seguintes casos:

- A **função identidade** $f(x) = x$ é crescente.
- A seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0, \\ 2 & , 0 < x \leq 1, \\ (x - 1)^2 + 2 & , x > 1 \end{cases} \quad (1.88)$$

é não decrescente.

Também, definem-se os conceitos análogos de uma função ser crescente ou decrescente em um dado intervalo.

Exemplo 1.8.2. A função $f(x) = x^2$ é uma função decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

1.8.2 Funções pares ou ímpares

Uma dada **função** f é dita **par** quando $f(x) = f(-x)$ para todo x no seu domínio. Ainda, é dita **ímpar** quando $f(x) = -f(-x)$ para todo x no seu domínio.

Exemplo 1.8.3. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ é uma função par.
- $f(x) = x^3$ é uma função par.
- $f(x) = \sin x$ é uma função ímpar.
- $f(x) = \cos x$ é uma função par.
- $f(x) = x + 1$ não é par nem ímpar.

1.8.3 Funções injetoras

Uma dada **função** f é dita **injetora** quando $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todos $x_1 \neq x_2$ no seu domínio.

Exemplo 1.8.4. Vejamos os seguintes casos:

- $f(x) = x^2$ não é uma função injetora.
- $f(x) = x^3$ é uma função injetora.
- $f(x) = e^x$ é uma função injetora.

Função injetoras são funções invertíveis. Mais precisamente, dada uma função injetora $y = f(x)$, existe uma única função g tal que

$$g(f(x)) = x, \quad (1.89)$$

para todo x no domínio da f . Tal função g é chamada de **função inversa** de f é comumente denotada por f^{-1} .³⁰

Exemplo 1.8.5. Vamos calcular a função a função inversa de $f(x) = x^3 + 1$. Para tanto, escrevemos

$$y = x^3 + 1. \quad (1.90)$$

Então, isolando x , temos

$$x = \sqrt[3]{y - 1}. \quad (1.91)$$

Desta forma, concluímos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f !

Observação 1.8.1. Os gráficos de uma dada função injetora f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação a **reta identidade** $y = x$.

Exercícios resolvidos

ER 1.8.1. Defina os intervalos em que a função $f(x) = -|x + 1|$ é crescente ou decrescente.

³⁰Observe que, em geral, $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Solução. A função f é uma translação à esquerda, seguida de uma reflexão em torno do eixo das abscissas da função $f(x) = |x|$. Veja a Figura 1.30.

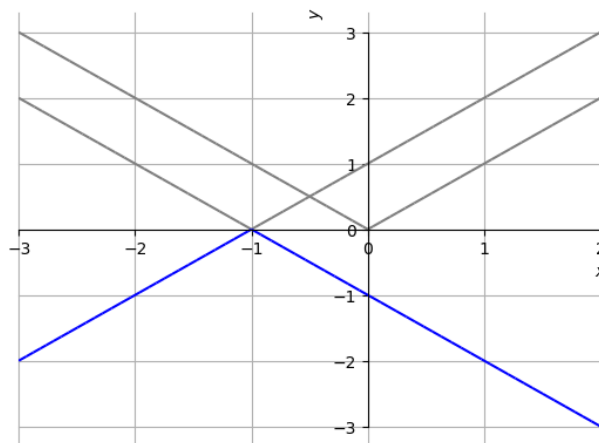


Figura 1.30: Esboço do gráfico de $f(x) = -|x + 1|$.

Do esboço do gráfico de f , podemos inferir que f é crescente no intervalo $(-\infty, -1]$ e decrescente no intervalo $[-1, \infty)$.

◇

ER 1.8.2. Analise a paridade da função $\operatorname{tg}(x)$.

Solução. Da paridade das funções seno e cosseno, temos

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\operatorname{tg} x. \quad (1.92)$$

Logo, a tangente é uma função ímpar.

◇

ER 1.8.3. Calcule a função inversa de $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

Solução. Para obtermos a função inversa de uma função f , resolvemos $y = f(x)$ para x . Ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x + 1} \quad (1.93)$$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \quad (1.94)$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 1. \quad (1.95)$$

Logo, temos $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ restrita ao conjunto imagem da f , i.e. o domínio de f^{-1} é $[0, \infty)$.

◇

Exercícios

E 1.8.1. Determine os intervalos de crescimento ou decrescimento da função

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , -\infty < x \leq 1, \\ -x+5 & , 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (1.96)$$

E 1.8.2. Analise a paridade da função $\operatorname{cosec} x$.

E 1.8.3. Seja $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$. Calcule f^{-1} e determine seu domínio.

1.9 Funções exponenciais

Uma **função exponencial** tem a forma

$$f(x) = a^x, \quad (1.97)$$

onde $a \neq 1$ é uma constante positiva e é chamada de **base** da função exponencial.

Funções exponenciais estão definidas em toda parte e têm imagem $(0, \infty)$. O gráfico de uma função exponencial sempre contém os pontos $(-1, 1/a)$, $(0, 1)$ e $(1, a)$. Veja a Figura 1.31.

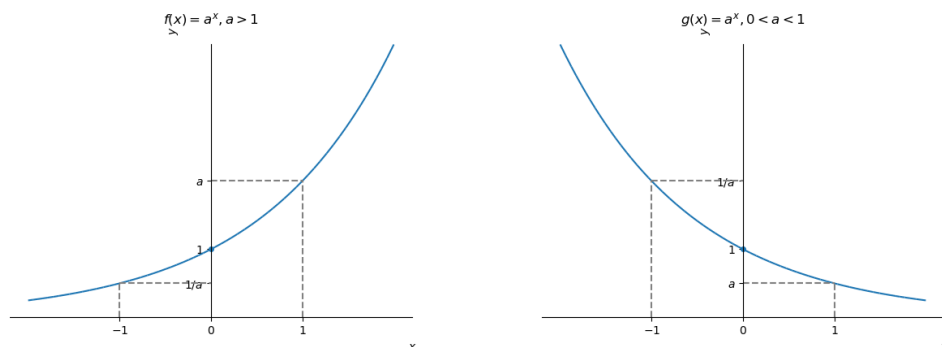


Figura 1.31: Esboços dos gráficos de funções exponenciais: (esquerda) $f(x) = a^x$, $a > 1$; (direita) $g(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.9.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2,718281828459045$, chamamos $f(x) = e^x$ de função exponencial natural.

No [SymPy](#)³¹, o número de Euler é obtido com a constante E:

```
>>> float(E)
2.718281828459045
```

Exercícios resolvidos

ER 1.9.1. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

Solução. Primeiramente, observamos que $f(x) = e^{-2x+1} - 1 = e^{-2(x-\frac{1}{2})} - 1$. Então, partindo do gráfico de e^{-x} , fazemos uma translação de $\frac{1}{2}$ unidades à direita, seguida de uma contração horizontal de $\frac{1}{2}$ vezes e, por fim, uma translação para baixo de uma unidade. Veja a Figura 1.32.

³¹Veja a Observação 1.0.1

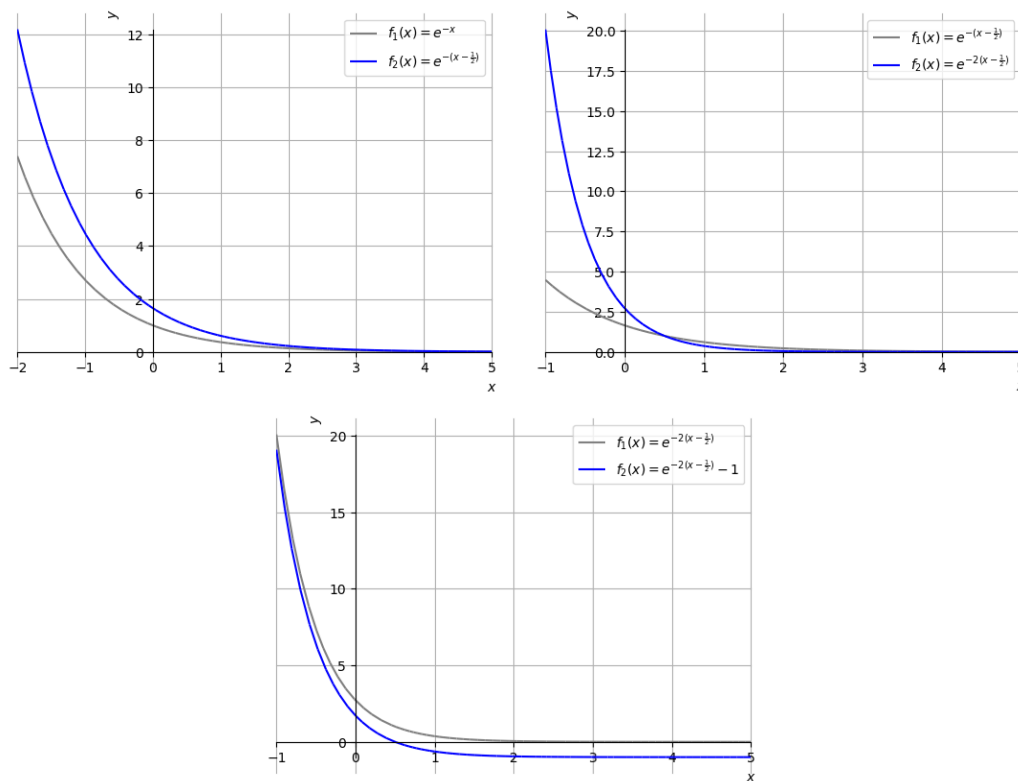


Figura 1.32: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-2x+1} - 1$.

◇

Exercícios

E 1.9.1. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = 2e^{x-1} + 2$.

1.10 Funções logarítmicas

A **função logarítmica** $y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função inversa da função exponencial $y = a^x$. Veja a Figura 1.33. O domínio da função logarítmica é $(0, \infty)$ e a imagem $(-\infty, \infty)$.

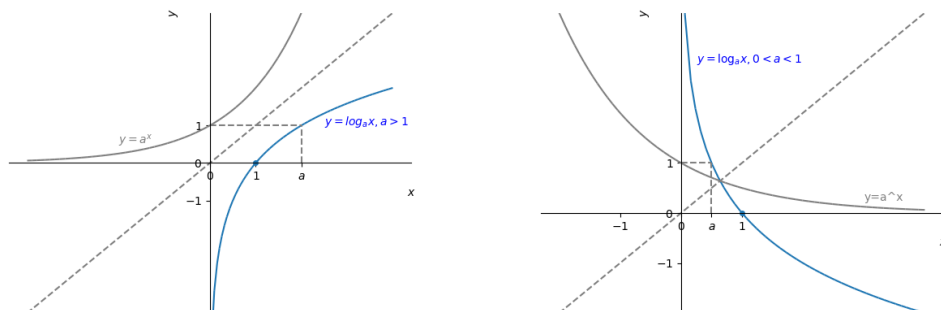


Figura 1.33: Esboços dos gráficos de funções logarítmicas: (esquerda) $y = \log_a x$, $a > 1$; (direita) $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Observação 1.10.1. Quando a base é o número de Euler $e \approx 2,718281828459045$, chamamos $y = \log_e x$ de função exponencial natural e denotamo-la por $y = \ln x$.

No [SymPy](#), podemos computar $\log_a x$ com a função `log(x,a)`. O $\ln x$ é computado com `log(x)`.

Observação 1.10.2. Vejamos algumas propriedades dos logaritmos:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a a^x = x$;
- $a^{\log_a x} = x$;
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Exercícios resolvidos

ER 1.10.1. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ e determine seu domínio.

Solução. Para fazermos o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$, podemos começar com o gráfico de $f_1(x) = \ln x$. Então, podemos transladá-lo 2 unidades à esquerda, de forma a obtermos $f_2(x) = \ln(x + 2) = f_1(x + 2)$. Por fim, transladamos o gráfico de $f_2(x)$ uma unidade para cima, obtendo o esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1 = f_2(x) + 1$. Veja a Figura 1.34.

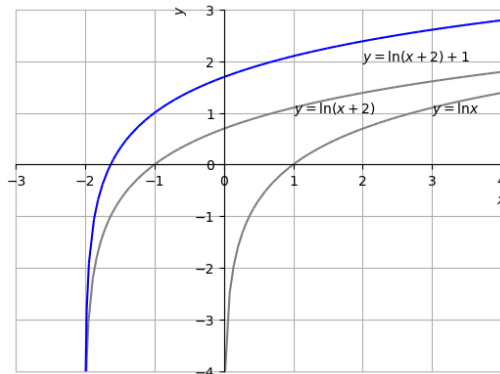


Figura 1.34: Esboço do gráfico de $f(x) = \ln(x + 2) + 1$.

Ainda, o domínio de $\ln x$ é $(0, \infty)$. Como, $f(x) = \ln(x + 2) + 1$ é uma translação de duas unidades à esquerda e uma para cima de $\ln x$, temos que o domínio de $f(x)$ é $(-2, \infty)$.

◇

ER 1.10.2. Resolva a seguinte equação para x

$$\ln(x + 2) + 1 = 1. \quad (1.98)$$

Solução. Podemos calcular a solução pelos seguintes passos:

$$\ln(x + 2) + 1 = 1 \Rightarrow \ln(x + 2) = 0 \quad (1.99)$$

$$\Rightarrow x + 2 = e^0 \quad (1.100)$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2 = -1. \quad (1.101)$$

$$(1.102)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar a solução com o seguinte comando³²:

```
solve(Eq(log(x+2)+1,1),x)
```

◇

Exercícios

E 1.10.1. Faça o esboço do gráfico de $f(x) = \log(x - 2) - 1$ e determine seu domínio.

E 1.10.2. Resolva a seguinte equação para x

$$\ln(x + 1)^2 = 0. \quad (1.103)$$

³²Veja a Observação [1.0.1](#).

Capítulo 2

Limites

Observação 2.0.1. Ao longo deste capítulo, ao apresentarmos códigos [Python](#) estaremos assumindo os seguintes comandos prévios:

```
from sympy import *  
init_printing()  
var('x')
```

2.1 Noção de limites

Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de um dado ponto x_0 , exceto talvez em x_0 . Quando o valor de $f(x)$ é arbitrariamente próximo de um número L para x suficientemente próximo de x_0 , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (2.1)$$

e dizemos que o limite da função f é L quando x tende a x_0 . Veja a [Figura 2.1](#).

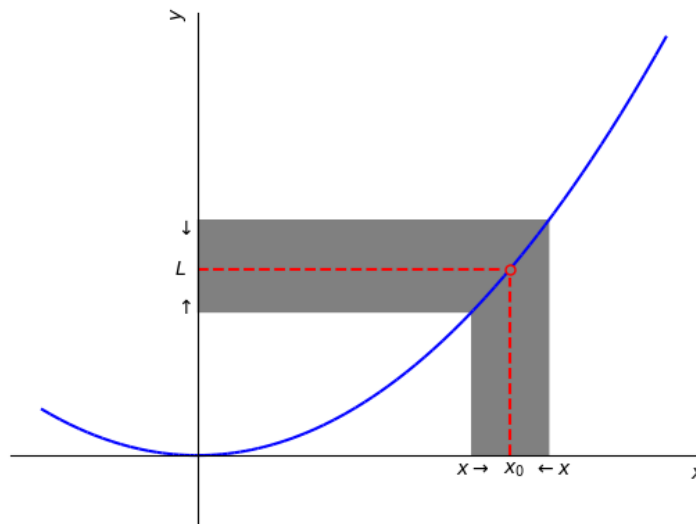


Figura 2.1: Ilustração da noção de limite de uma função.

Exemplo 2.1.1. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}. \quad (2.2)$$

Na Figura 2.2, temos um esboço do gráfico desta função.

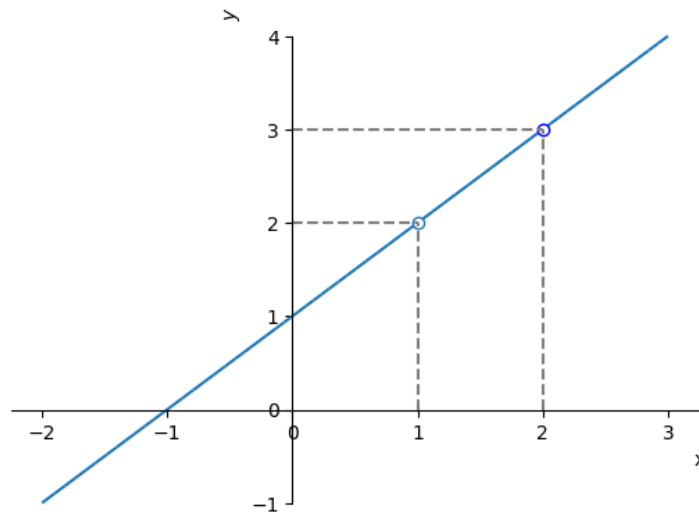


Figura 2.2: Esboço do gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 2.1.1.

Vejamos os seguintes casos:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$.

x	-0,01	-0,001	-0,0001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	0,99	0,999	0,9999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)), x, 0)
```

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, embora $f(1)$ não esteja definido.

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,0001	2,001	2,01

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, embora $f(2)$ também não esteja definido. Verifique!

2.1.1 Limites da função constante e da função identidade

Da noção de limite, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad (2.3)$$

seja qual for a constante k . Veja a Figura 2.3.

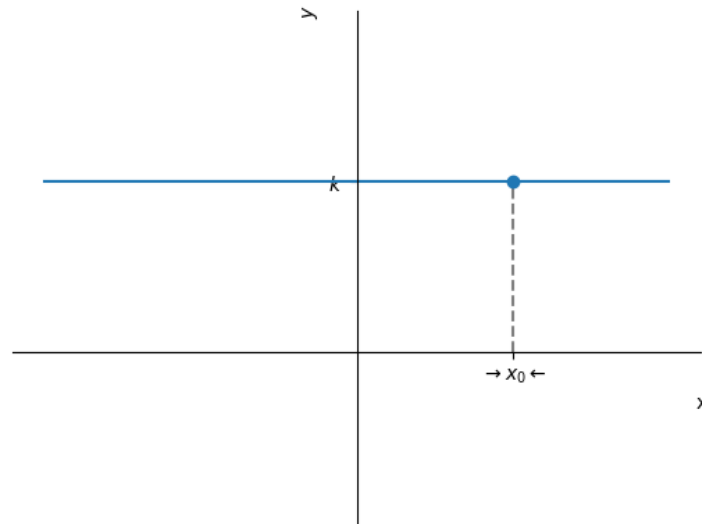


Figura 2.3: Esboço do gráfico de uma função constante $f(x) = k$.

Exemplo 2.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} -3 = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{2} - e = \sqrt{2} - e$

Também da noção de limites, podemos inferir que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad (2.4)$$

seja qual for o ponto x_0 . Vejamos a Figura 2.4.

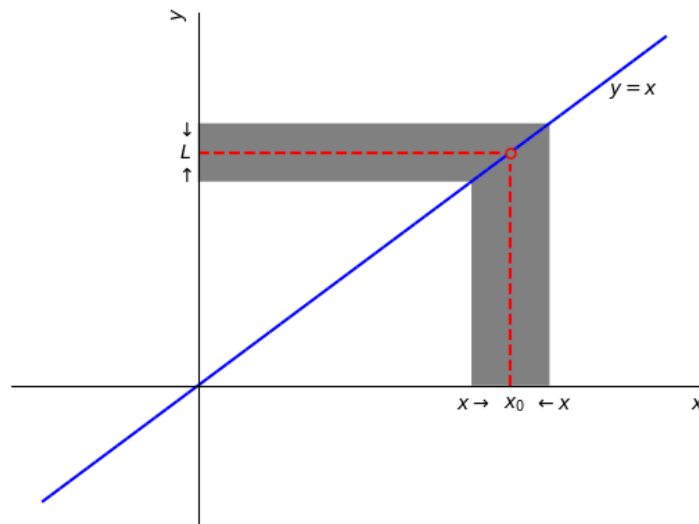


Figura 2.4: Noção de limite para a função identidade $f(x) = x$.

Exemplo 2.1.3. Vejamos os seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
- c) $\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Estime o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x. \quad (2.5)$$

Solução. Da noção de limite, podemos buscar inferir o limite de uma função em um ponto x_0 , computando seus valores próximos deste ponto. Por exemplo, construímos a seguinte tabela:

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,460	2,691	2,716	$\rightarrow 2,72 \leftarrow$	2,719	2,721	2,746

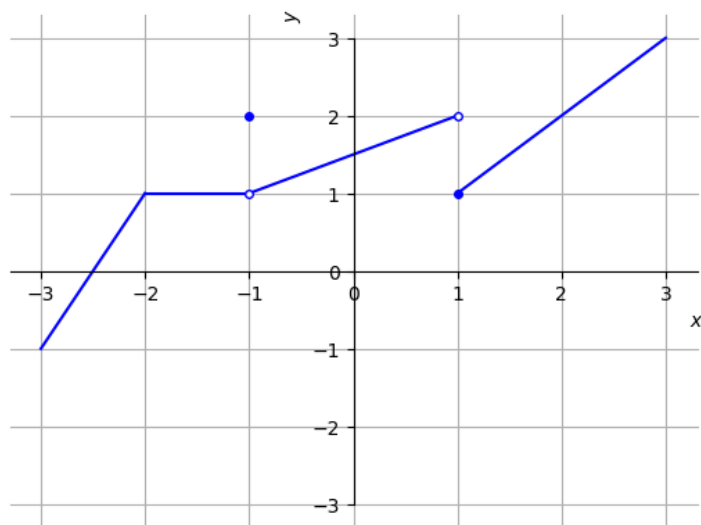
Com isso, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x \approx 2,72. \quad (2.6)$$

Mais adiante, veremos que $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \approx 2,718281828459045\dots$

◇

ER 2.1.2. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Para valores suficientemente próximos de -2 e a direita de -2 (i.e. $x > -2$), podemos observar que $f(x) = 1$. Para tais valores de x a esquerda de -2 (i.e. $x < -2$), vemos que os valores de $f(x)$ tornam-se próximos de 1. Isto é, temos que os valores de $f(x)$ podemos ser tomados arbitrariamente próximos de $L = 1$, se tomarmos x suficientemente próximo de -2 . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1. \quad (2.7)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de x suficientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1. \quad (2.8)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Aqui, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a esquerda ($x < 1$), vemos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 2$. Entretanto, para valores de x suficientemente próximos de $x_0 = 1$ e a direita ($x > 1$), temos que os valores de $f(x)$ são próximos de $L = 1$. Ou seja, não é possível escolher um valor L tal que $f(x)$ esteja arbitrariamente próxima ao tomarmos x suficientemente próximo de $x_0 = 1$, pois L dependerá de x estar a esquerda ou a direita de do ponto $x_0 = 1$. Concluimos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.9)$$

◇

Exercícios

E 2.1.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de



gráfico:

Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

E 2.1.2. Considerando a mesma função do exercício anterior (Exercícios 2.3.4), forneça

1. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x)$

E 2.1.3. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} -3$

d) $\lim_{x \rightarrow e} \pi$

E 2.1.4. Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} x$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} x$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} x$

d) $\lim_{x \rightarrow e} x$

2.2 Regras para o cálculo de limites

Sejam dados os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2, \quad (2.10)$$

com x_0, L_1, L_2 números reais. Então, valem as seguintes regras:

- Regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL_1, \quad (2.11)$$

para qualquer número real k .

- Regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (2.12)$$

- Regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.13)$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.14)$$

desde que $L_2 \neq 0$.

- Regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^s = L_1^s, \quad (2.15)$$

se L_1^s é um número real.

Podemos usar essas regras para calcularmos limites.

Exemplo 2.2.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow -1} x \quad (2.16)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad (2.17)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit(2*x,x,-1)
```

b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.18)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 \quad (2.19)$$

$$= 2^2 - 1 = 3. \quad (2.20)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

`limit(x**2-1,x,-1)`

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2} \quad (2.21)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right)^2} \quad (2.22)$$

$$= \sqrt{1 - (0)^2} \quad (2.23)$$

$$= 1. \quad (2.24)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com

`limit(sqrt(1-x**2),x,0)`

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1)(x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)} \quad (2.25)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)} \quad (2.26)$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1. \quad (2.27)$$

Proposição 2.2.1. (Limites de polinômios) Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = p(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.28)$$

para qualquer número real b dado.

Demonstração. Segue das regras da soma, da multiplicação por escalar e da potenciação. Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow b} p(x) = \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.29)$$

$$= \lim_{x \rightarrow b} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow b} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow b} a_0 \quad (2.30)$$

$$= a_n \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow b} x\right)^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.31)$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = p(b). \quad (2.32)$$

□

Exemplo 2.2.2.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 2x^4 - 2x^2 + x = 2(\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}. \quad (2.33)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit(2*x**4-2*x**2+x,x,sqrt(2))
```

Proposição 2.2.2. (Limite de funções racionais) Sejam $r(x) = p(x)/q(x)$ é uma função racional e b um número real tal que $q(b) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.34)$$

Demonstração. Segue da regra do limite do quociente e da Proposição 2.2.1:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow b} p(x)}{\lim_{x \rightarrow b} q(x)} \quad (2.35)$$

$$= \frac{p(b)}{q(b)}. \quad (2.36)$$

□

Exemplo 2.2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(0^2 - 1)(0 - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = 1. \quad (2.37)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o comando

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,0)
```

2.2.1 Indeterminação 0/0

Quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2.38)$$

é uma **indeterminação do tipo 0/0**. Em vários destes casos, podemos calcular o limite eliminando o fator em comum $(x - a)$.

Exemplo 2.2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 3. \quad (2.39)$$

No [SymPy](#), podemos computar o limite acima com

```
limit((x**2-1)*(x-2)/((x-1)*(x-2)),x,2)
```

Quando o fator em comum não aparece explicitamente, podemos tentar trabalhar algebricamente de forma a explicitá-lo.

Exemplo 2.2.5. No caso do limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} \quad (2.40)$$

temos que o denominador $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ se anula em $x = 1$, assim como o denominador $q(x) = x^2 + x - 2$. Assim sendo, $(x - 1)$ é um fator comum entre $p(x)$ e $q(x)$. Para explicitá-lo,

$$\frac{p(x)}{x - 1} = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad \frac{q(x)}{x - 1} = x + 2. \quad (2.41)$$

No [SymPy](#), podemos computar estas divisões com os seguintes comandos

```
simplify((x**3-3*x**2-x+3)/(x-1))
simplify((x**2+x-2)/(x-1))
```

Realizadas as divisões, temos

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \quad \text{e} \quad q(x) = (x - 1)(x + 2). \quad (2.42)$$

Com isso, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x + 2)} \quad (2.43)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = -\frac{4}{3}. \quad (2.44)$$

Exemplo 2.2.6. No caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \quad (2.45)$$

temos uma indeterminação do tipo 0/0 envolvendo uma raiz. Neste caso, podemos calcular o limite usando de racionalização

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} \quad (2.46)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.47)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} \quad (2.48)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}. \quad (2.49)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com

```
limit((sqrt(1-x)-1)/x,x,0)
```

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.50)$$

Solução. Usando das propriedades de limites, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - x^2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 + 3}} \quad (2.51)$$

$$= \frac{-1 - (-1)^2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3}} \quad (2.52)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4}} \quad (2.53)$$

$$= -1. \quad (2.54)$$

◇

ER 2.2.2. Assumindo que o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ e que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1, \quad (2.55)$$

forneça o valor de L .

Solução. Das propriedades de limites, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x + 2} = 1 &\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 2} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 2}{2 + 2} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{L - 2}{4} = 1 \\ &\Rightarrow L - 2 = 4 \\ &\Rightarrow L = 6. \end{aligned}$$

◇

ER 2.2.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}. \quad (2.56)$$

Solução. Neste caso, não podemos usar a regra do quociente, pois

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - \sqrt{x^2 + 3} = 0. \quad (2.57)$$

Agora, como também temos

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0, \quad (2.58)$$

concluimos se tratar de uma indeterminação $0/0$. Por racionalização, obte-

mos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{x^2+3}} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}} \quad (2.59)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{4-(x^2+3)} \quad (2.60)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2} \quad (2.61)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2+\sqrt{x^2+3})}{(1+x)(1-x)} \quad (2.62)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{1-x} \quad (2.63)$$

$$= \frac{4}{2} = 2. \quad (2.64)$$

◇

Exercícios

E 2.2.1. Sabendo que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2, \quad (2.65)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 2 \cdot f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \pi \cdot f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} -e^{\sqrt{2}} \cdot f(x).$

E 2.2.2. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{1}{2}, \quad (2.66)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 2g(x)$

E 2.2.3. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2, \quad (2.67)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$

E 2.2.4. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -3, \quad (2.68)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{2f(x)}$

E 2.2.5. Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4, \quad (2.69)$$

calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x))^{\frac{4}{3}}$

E 2.2.6. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} -3x$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 3x + \sqrt{x^2}$

E 2.2.7. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

E 2.2.8. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

E 2.2.9. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x - 2}}{x - 6}. \quad (2.70)$$

2.3 Limites laterais

Seja dada uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (a, x_0) . O **limite lateral à esquerda** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (2.71)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x < x_0$. Em outras palavras, o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (2.72)$$

quando $f(x)$ pode ser tomado arbitrariamente próximo de L , desde que tomemos $x < x_0$ suficientemente próximo de a . Veja a Figura 2.5.

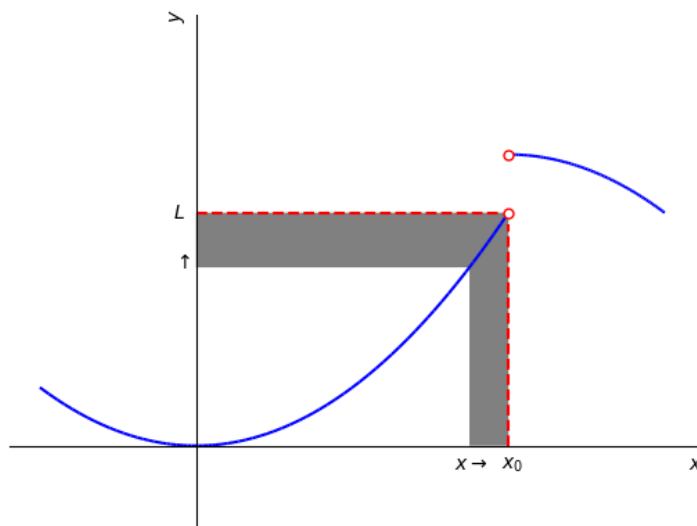


Figura 2.5: Ilustração da noção de limite lateral à esquerda.

Para uma função f definida para todo x em um intervalo aberto (x_0, b) , o **limite lateral à direita** de f no ponto x_0 é denotado por

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (2.73)$$

e é computado tendo em vista a tendência da função apenas para pontos $x > x_0$. Em outras palavras, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, \quad (2.74)$$

quando $f(x)$ pode ser tomado arbitrariamente próximo de L , desde que tomemos $x > x_0$ suficientemente próximo de x_0 . Veja a Figura 2.6.

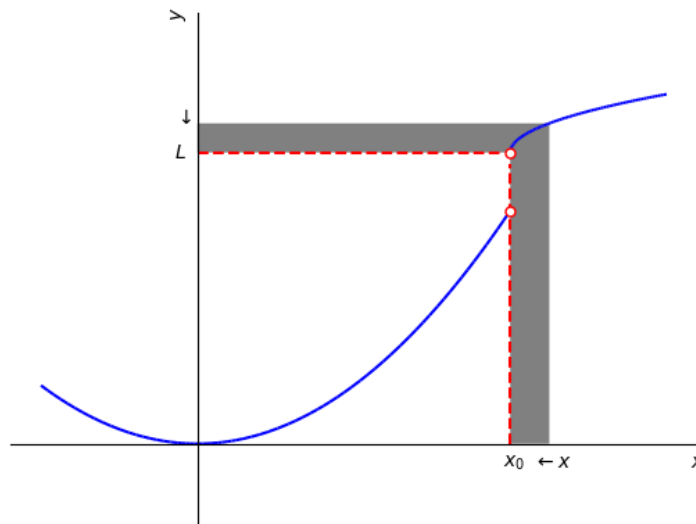


Figura 2.6: Ilustração da noção de limite lateral à direita.

Observação 2.3.1. Por inferência direta, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} x = x_0, \quad (2.75)$$

onde x_0 e k são quaisquer números reais.

E 2.3.1. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|. \quad (2.76)$$

Por definição, temos

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.77)$$

Como estamos interessados no limite lateral à esquerda de $x = 0$, trabalhamos com $x < 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \quad (2.78)$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \quad (2.79)$$

Verifique!

Usando o [SymPy](#), podemos computar os limites acima com os seguintes comandos¹:

```
limit(abs(x),x,0,'-')
limit(abs(x),x,0,'+')
```

Teorema 2.3.1. *Existe o limite de uma dada função f no ponto $x = x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto $x = x_0$.*

E 2.3.2. No exemplo anterior (Exemplo [2.3.1](#)), vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0. \quad (2.80)$$

Logo, pelo teorema acima (Teorema [2.3.1](#)), podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad (2.81)$$

E 2.3.3. Vamos verificar a existência de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \quad (2.82)$$

Começamos pelo limite lateral à esquerda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \quad (2.83)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1. \quad (2.84)$$

Agora, calculando o limite lateral à direita, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \quad (2.85)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1. \quad (2.86)$$

Como os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, concluímos que não existe o limite de $|x|/x$ no ponto $x = 0$.

No [SymPy](#), por padrão o limite computado é sempre o limite lateral à direita. É por isso que o comando

¹Veja a Observação [2.0.1](#)

`limit(abs(x)/x,x,0)`

fornece o valor 1 como saída.

Observação 2.3.2. As regras básicas para o cálculo de limites bilaterais são estendidas para limites laterais. I.e., se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_2, \quad (2.87)$$

então valem a:

- regra da multiplicação por um escalar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = kL_1, \quad (2.88)$$

para qualquer número real k .

- regra da soma/subtração:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (2.89)$$

- regra do produto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (2.90)$$

- regra do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (2.91)$$

desde que $L_2 \neq 0$.

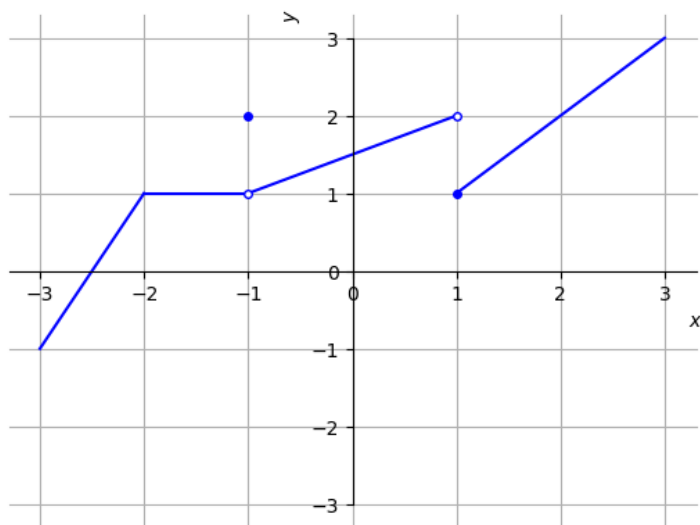
- regra da potenciação:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (f(x))^s = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \right)^s = L_1^s, \quad (2.92)$$

se L_1^s é um número real.

Exercícios resolvidos

ER 2.3.1. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Então, infira o valores de

- a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solução.

- a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

Para valores $x < -2$ e suficientemente próximos de -2 , podemos observar que $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de 1 . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1. \quad (2.93)$$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

Mesmo sendo $f(-1) = 2$, observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > -1$ e suficientemente próximos de -1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1. \quad (2.94)$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 2, se escolhemos valores de $x < 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2. \quad (2.95)$$

Notamos também que, neste caso, $f(x)$ não tende para $f(1) = 1$ quando x tende a 1 pela esquerda.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Observamos que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de 1, se escolhemos valores de $x > 1$ e suficientemente próximos de 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.96)$$

Aqui, $f(x) \rightarrow f(1) = 1$ quando $x \rightarrow 1^+$.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nos itens anteriores, vimos que

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1. \quad (2.97)$$

Logo, concluímos que este limite não existe, e escrevemos

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \quad (2.98)$$

◇

ER 2.3.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & , x < -1, \\ x & , x > -1. \end{cases} \quad (2.99)$$

Solução. A função f tem comportamentos distintos para valores à esquerda e à direita de $x_0 = -1$. Portanto, para calcularmos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ precisamos calcular os limites laterais. Temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1)^2 - 1 \quad (2.100)$$

$$= (-1 + 1)^2 - 1 = -1, \quad (2.101)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \quad (2.102)$$

$$= -1. \quad (2.103)$$

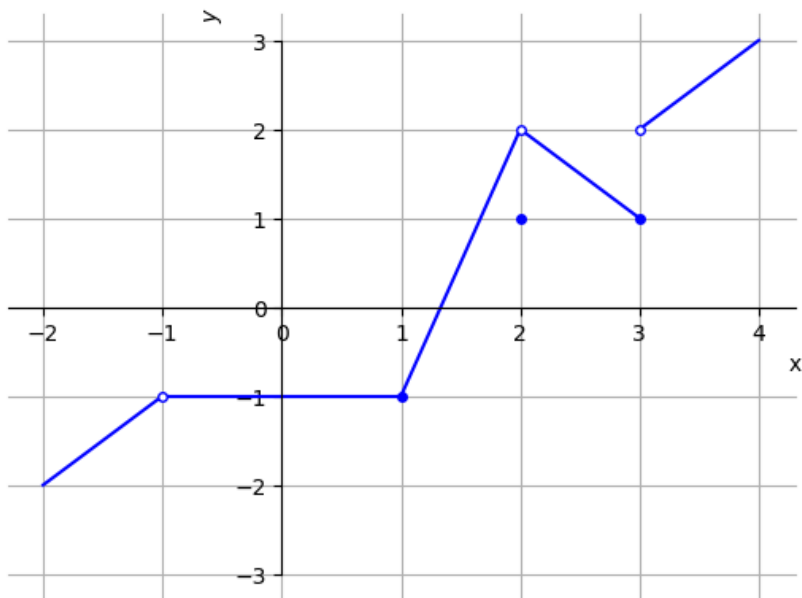
Como ambos os limites laterais são iguais a -1 , concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \quad (2.104)$$

◇

Exercícios

E 2.3.4. Considere que uma dada função f tenha o seguinte esboço de gráfico:



Forneça o valor dos seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

E 2.3.5. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x & , x > 1. \end{cases} \quad (2.105)$$

calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x).$

E 2.3.6. Sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1, \\ 2x + 1 & , x > 1, \end{cases} \quad (2.106)$$

calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x).$

E 2.3.7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2|x|}. \quad (2.107)$$

E 2.3.8. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.108)$$

O que pode-se dizer sobre o limite à esquerda?

2.4 Limites no infinito

Limites no infinito descrevem a tendência de uma dada função $f(x)$ quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow \infty$.

Dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende a $-\infty$, se os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente próximos de L para valores de x suficientemente pequenos. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (2.109)$$

Veja a Figura 2.7.

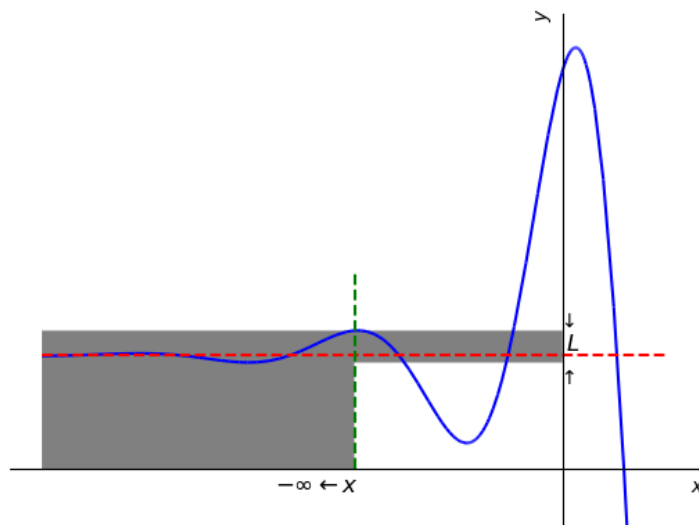


Figura 2.7: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow -\infty$.

Analogamente, dizemos que o limite de $f(x)$ é L quando x tende ∞ , se os valores de $f(x)$ são arbitrariamente próximos de L para valores de x suficientemente grandes. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.110)$$

Veja a Figura 2.8.

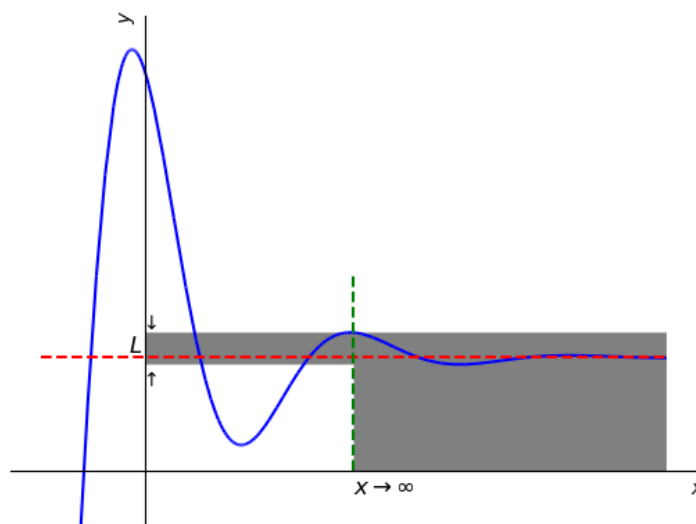


Figura 2.8: Ilustração da noção de limite de uma função quando $x \rightarrow \infty$.

Exemplo 2.4.1. Vamos inferir os limites de $f(x) = 1/x$ para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$. A Figura 2.9 é um esboço do gráfico desta função.

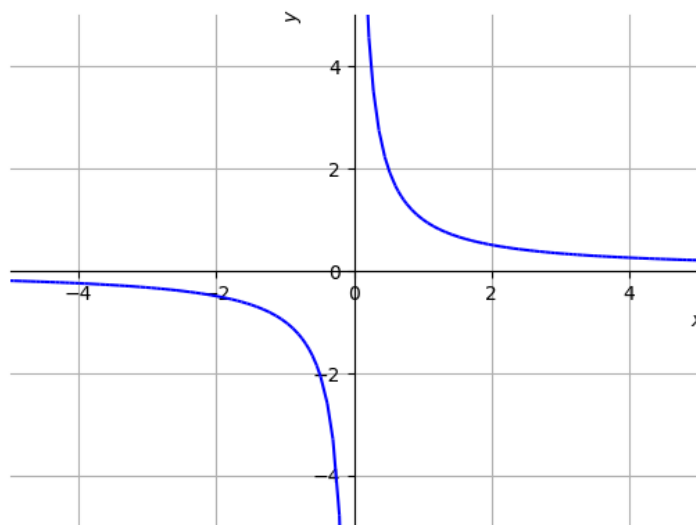


Figura 2.9: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x$.

Observamos que quanto menores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Daí, inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.111)$$

Também, quanto maiores os valores de x , mais próximos de 0 são os valores de $f(x) = 1/x$. Com isso, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (2.112)$$

Podemos computar estes limites com o [SymPy](#), usando os seguintes comandos²:

```
limit(1/x,x,-oo)
limit(1/x,x,oo)
```

Observação 2.4.1. (Regras para o cálculo de limites no infinito) Supondo que L , M e k são números reais e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M. \quad (2.113)$$

Então, temos as seguintes regras para limites no infinito:

- Regra da soma/diferença

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad (2.114)$$

- Regra do produto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = LM \quad (2.115)$$

- Regra da multiplicação por escalar

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = kL \quad (2.116)$$

- Regra do quociente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \quad (2.117)$$

²Veja a Observação [2.0.1](#).

- Regra da potenciação

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^k = L^k, \text{ se } L^k \in \mathbb{R}. \quad (2.118)$$

Exemplo 2.4.2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \quad (2.119)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \quad (2.120)$$

$$= 0^2 + 1 = 1. \quad (2.121)$$

Exemplo 2.4.3. Consideramos o seguinte caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.122)$$

Observe que não podemos usar a regra do quociente diretamente, pois, por exemplo, não existe o limite do numerador. Para contornar este problema, podemos multiplicar e dividir por $1/x^3$ (grau dominante), obtendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3}. \quad (2.123)$$

Então, aplicando a regras do quociente, da soma/subtração e da multiplicação por escalar, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - 3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.124)$$

Observação 2.4.2. Dados dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m}. \quad (2.125)$$

Exemplo 2.4.4. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.4.3), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.126)$$

2.4.1 Assíntotas horizontais

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (2.127)$$

Exemplo 2.4.5. No Exemplo 2.4.3, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.128)$$

Logo, temos que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}. \quad (2.129)$$

. Veja a Figura 2.10.

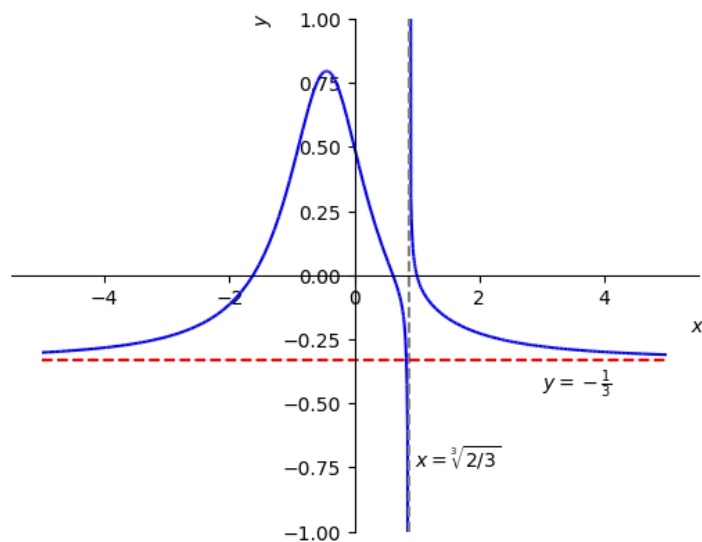


Figura 2.10: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3}$.

Também, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{3}. \quad (2.130)$$

O que reforça que $y = -1/3$ é uma assíntota horizontal desta função.

Exemplo 2.4.6. (Função exponencial natural)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.131)$$

donde temos que $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função exponencial natural. Veja a Figura 2.11.

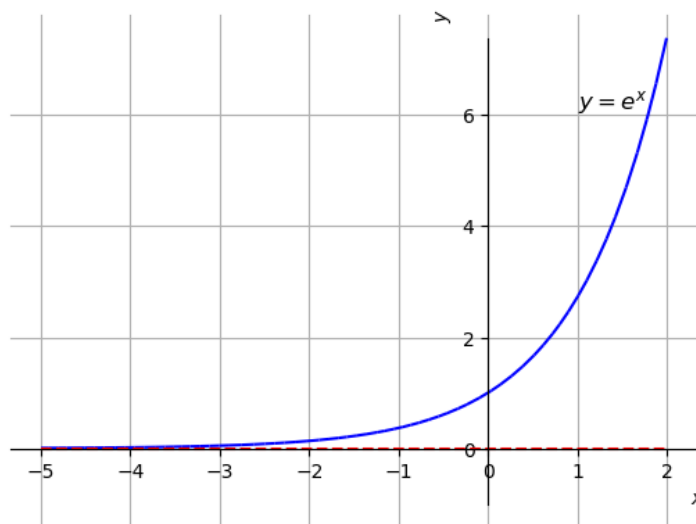


Figura 2.11: Esboço do gráfico de $f(x) = e^x$.

2.4.2 Limite no infinito de função periódica

Uma função f é periódica quando existe um número T tal que

$$f(x) = f(x + T), \quad (2.132)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no domínio de f . As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas (veja a Seção 1.6).

O limite no infinito de funções periódicas não existe³. De fato, se f não é constante, então existem números $x_1 \neq x_2$ tal que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como a função é periódica, $f(x_1 + kT) = y_1$ e $f(x_2 + kT) = y_2$ para todo número inteiro k . Desta forma, não existe número L que possamos tomar $f(x)$ arbitrariamente próxima, para todos os valores de x suficientemente grandes (ou pequenos).

³À exceção de funções constantes.

Exemplo 2.4.7. Não existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x), \quad (2.133)$$

pois os valores de $\sin x$ oscilam periodicamente no intervalo $[-1, 1]$. Veja a Figura 2.12.

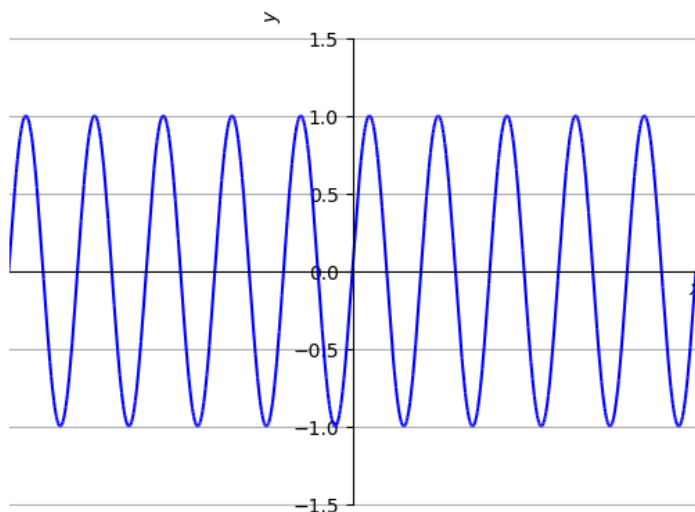


Figura 2.12: Esboço do gráfico de $f(x) = \sin x$.

No [SymPy](#), ao computarmos $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ com o comando⁴:

```
limit(sin(x),x,oo)
```

obtemos como saída o intervalo $[-1, 1]$, indicando que o limite não existe, pois $\sin x$ oscila indefinidamente com valores neste intervalo.

Exercícios resolvidos

ER 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1. \quad (2.134)$$

⁴Veja a Observação 2.0.1

Solução. Utilizando a regra da soma para limites no infinito, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 \quad (2.135)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) + 1, \quad (2.136)$$

observando que $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/(x-1)$ existe. De fato, o gráfico de $g(x) = 1/(x-1)$ é uma translação de uma unidade à esquerda da função $f(x) = 1/x$. Uma translação horizontal finita não altera o comportamento da função para $x \rightarrow \infty$. Portanto, como $f(x) = 1/x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, temos que $g(x) = f(x-1) = 1/(x-1) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0. \quad (2.137)$$

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} + 1 = 1. \quad (2.138)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando⁵:

```
limit(1/(x-1)+1,x,oo)
```

◇

ER 2.4.2. Determine a(s) assíntota(s) horizontal(ais) do gráfico da função

$$f(x) = \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x}. \quad (2.139)$$

Solução. Uma reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L. \quad (2.140)$$

Começamos com $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} \quad (2.141)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{2x^4} = 2. \quad (2.142)$$

⁵Veja a Observação 2.0.1.

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Agora, vamos ver a tendência da função para $x \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x + 4x^4 - 10x^3}{x^2 + 2x^4 - x} = \frac{4}{2} = 2. \quad (2.143)$$

Portanto, concluímos que $y = 2$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função f .

Os seguintes comandos⁶ do [SymPy](#) permitem plotar o esboço do gráfico da função f (linha azul) e sua assíntota horizontal (linha vermelha):

```
f = lambda x: (3-x+4*x**4-10*x**3)/(x**2+2*x**4-x)
L = limit(f(x),x,oo)
p = plot(f(x),(x,-15,15),ylim=[-4,6],line_color="blue",show=False)
q = plot(L,(x,-15,15),line_color="red",show=False)
p.extend(q)
p.show()
```

◇

ER 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}. \quad (2.144)$$

Solução. Seguindo a ideia aplicada no Exemplo 2.4.3, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}} \quad (2.145)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}}. \quad (2.146)$$

⁶Veja a Observação 2.0.1.

Lembramos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Como $x \rightarrow \infty$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}}{2 \frac{x}{|x|}} \quad (2.147)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{2 \frac{x}{x}} \quad (2.148)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.149)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1} \quad (2.150)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (2.151)$$

◇

ER 2.4.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}. \quad (2.152)$$

Solução. Observamos que o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo y do gráfico da função $g(x) = e^x$. No Exemplo 2.4.6, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (2.153)$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0. \quad (2.154)$$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$ na Figura 2.13.

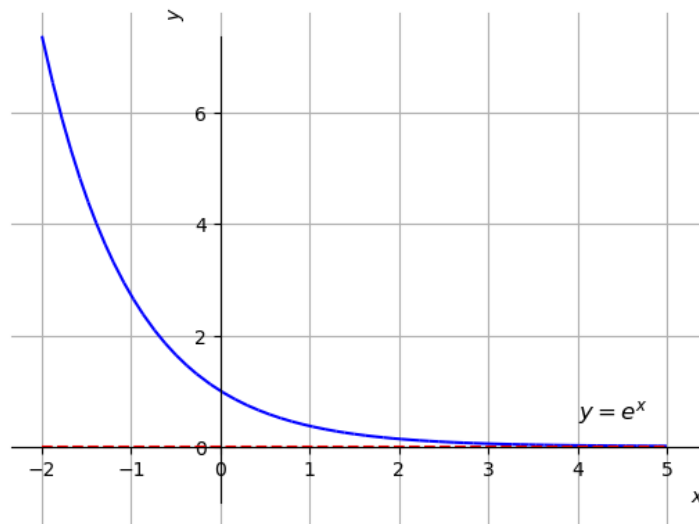


Figura 2.13: Esboço do gráfico de $f(x) = e^{-x}$.

Com o [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando⁷:

```
limit(exp(-x),x,oo)
```

◇

Exercícios

E 2.4.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x+1}. \quad (2.155)$$

E 2.4.2. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + e^{-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x} - 1$

⁷Veja a Observação [2.0.1](#).

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e - e^{-x}$

E 2.4.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x. \quad (2.156)$$

E 2.4.4. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + e^{-x}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{x + 3} - e^x - 1.$

2.5 Limites infinitos

O limite de uma função nem sempre existe. Entretanto, em muitos destes casos, podemos concluir mais sobre a tendência da função. Por exemplo, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é infinito quando x tende a um número x_0 , quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente grande para todos os valores de x suficientemente próximos de x_0 , mas $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (2.157)$$

A Figura 2.14, é uma ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

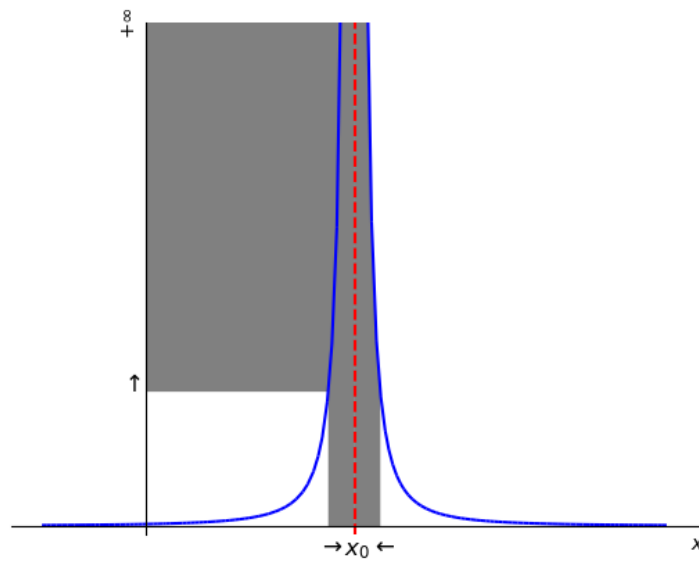


Figura 2.14: Ilustração de $f(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x_0$.

Exemplo 2.5.1. Vejamos o caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}. \quad (2.158)$$

Ao tomarmos x próximo de $x_0 = 0$, obtemos os seguintes valores de $f(x)$:

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	$\rightarrow 0 \leftarrow$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$f(x)$	-10^2	-10^4	-10^6	$\rightarrow \infty \leftarrow$	10^6	10^4	10^2

Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.15.

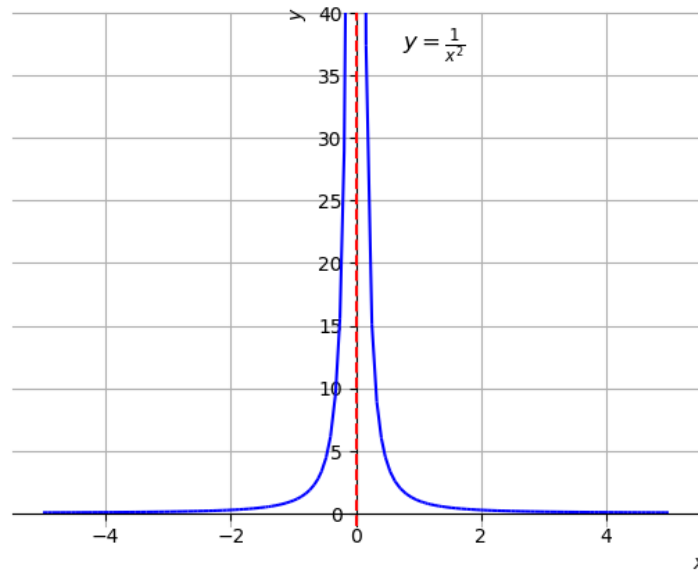


Figura 2.15: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/x^2$.

Podemos concluir que os valores de $f(x)$ podem ser tomados arbitrariamente grandes ao escolhermos qualquer x suficientemente próximo de 0, com $x \neq 0$. I.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \quad (2.159)$$

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando⁸:

```
limit(1/x**2,x,0)
```

Atenção! Na verdade, este comando computa o limite lateral à direita. Na sequência, discutimos sobre limites laterais infinitos.

Definimos os limites laterais infinitos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty. \quad (2.160)$$

No primeiro caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x < x_0$. No segundo caso, os valores de $f(x)$ são arbitrariamente grandes conforme os valores de $x \rightarrow x_0$ e $x > x_0$.

⁸Veja a Observação [2.0.1](#).

Exemplo 2.5.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty. \quad (2.161)$$

De fato, conforme tomamos valores de x próximos de 1, com $x > 1$, os valores de $f(x) = 1/(x-1)$ tornam-se cada vez maiores. Veja o esboço do gráfico de $f(x)$ na Figura 2.16.

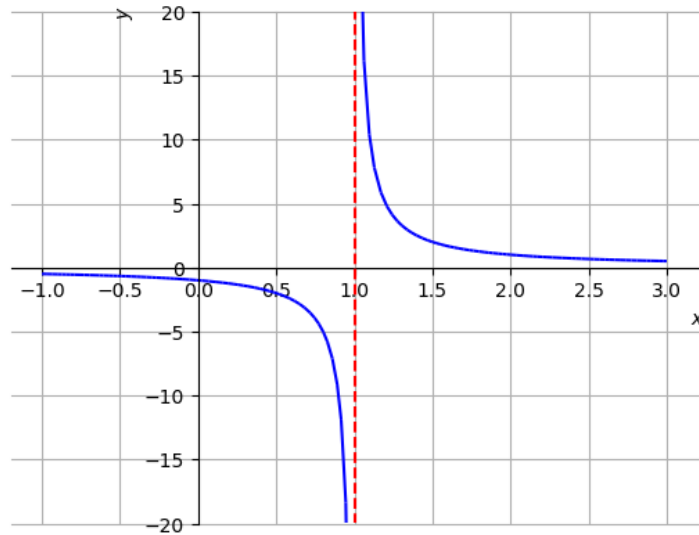


Figura 2.16: Esboço do gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$.

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando⁹:

```
limit(1/(x-1), x, 0, '+')
```

Analogamente a definição de limite infinito, dizemos que o limite de uma dada função $f(x)$ é menos infinito quando x tende a x_0 , quando $f(x)$ torna-se arbitrariamente pequeno para valores de x suficientemente próximos de x_0 , com $x \neq x_0$. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty. \quad (2.162)$$

De forma similar, definimos os limites laterais $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow x_0^\pm$.

⁹Veja a Observação 2.0.1.

Exemplo 2.5.3. Observe que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (2.163)$$

e que não podemos concluir que este limite é ∞ ou $-\infty$. Isto ocorre, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (2.164)$$

Exemplo 2.5.4.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty. \quad (2.165)$$

De fato, podemos inferir este limite a partir do gráfico da função $f(x) = 1/(x+1)^2$. Este é uma translação de uma unidade à esquerda do gráfico de $y = 1/x^2$, seguida de uma reflexão em torno de eixo x . Veja a Figura 2.17.

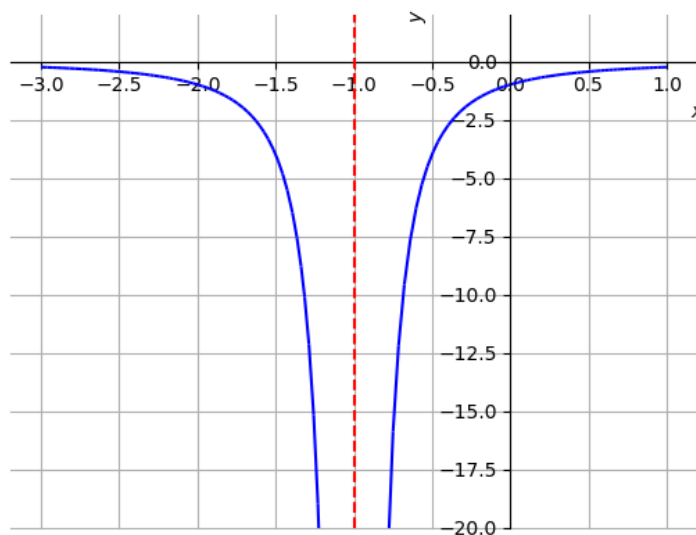


Figura 2.17: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/(x+1)^2$.

No [SymPy](#), podemos computar este limite com o seguinte comando¹⁰:

```
limit(-1/(x+1)**2,x,-1)
```

Novamente, observamos que este comando computa apenas o limite lateral à direita.

¹⁰Veja a Observação 2.0.1.

2.5.1 Assíntotas verticais

Uma reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad (2.166)$$

Exemplo 2.5.5. O gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty. \quad (2.167)$$

Veja o esboço de seu gráfico na Figura 2.18.

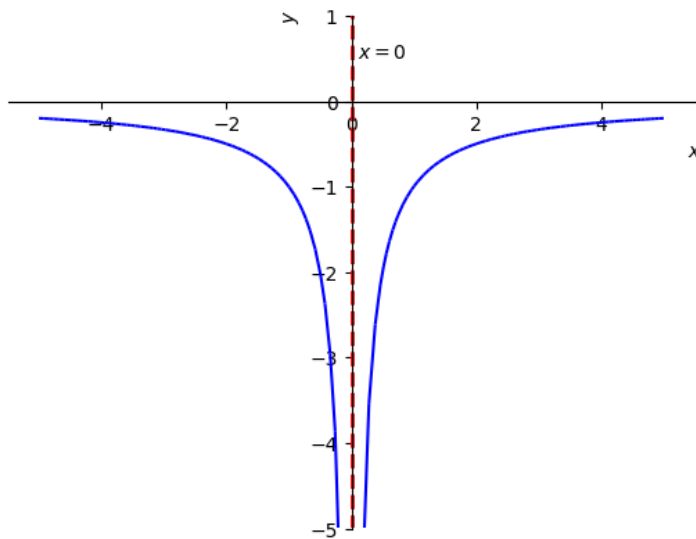


Figura 2.18: Esboço do gráfico de $f(x) = -1/|x|$.

Exemplo 2.5.6. A função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$ não está definida para valores de x tais que seu denominador se anule, i.e.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 1. \quad (2.168)$$

Nestes pontos o gráfico de f pode ter assíntotas verticais. De fato, temos

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty, \quad (2.169)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.170)$$

e, também, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = -\infty, \quad (2.171)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = +\infty. \quad (2.172)$$

Com isso, temos que as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f . Veja a Figura 2.19 para o esboço do gráfico desta função.

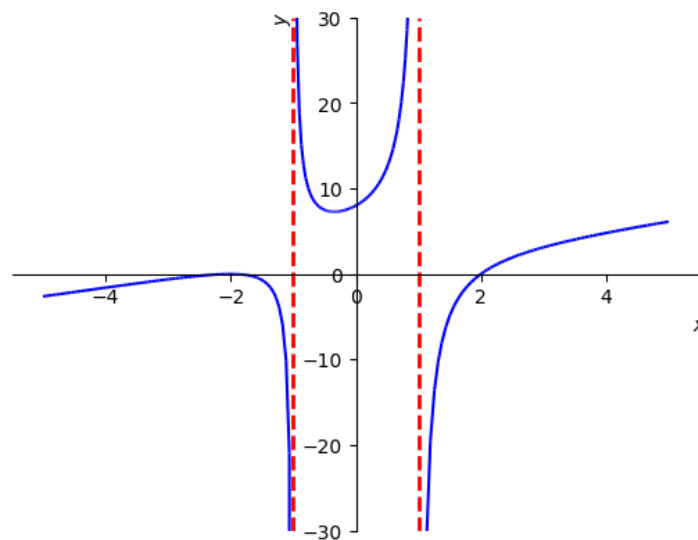


Figura 2.19: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}$.

Exemplo 2.5.7. (Função logarítmica) A função logarítmica natural $y = \ln x$ é tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (2.173)$$

i.e., $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $\ln x$. Isto decorre do fato de $y = \ln x$ ser a função inversa de $y = e^x$ e, esta, ter uma assíntota horizontal $y = 0$ ¹¹. A Figura 2.20 é um esboço do gráfico da função $\ln x$.

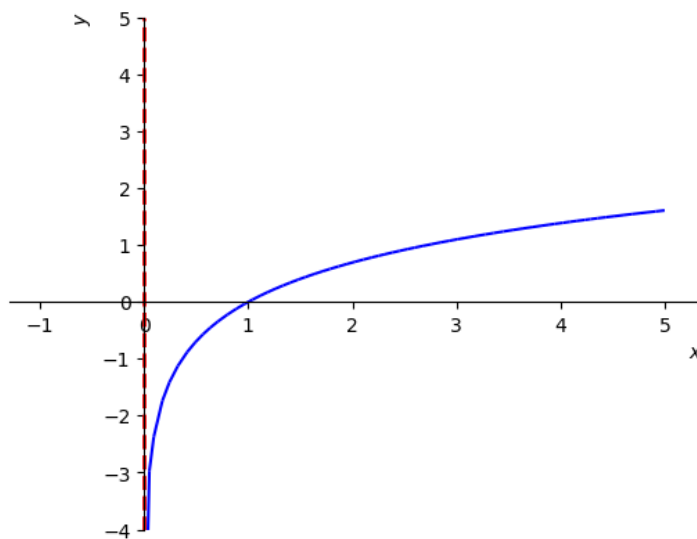


Figura 2.20: Esboço do gráfico da função logaritmo natural.

Exemplo 2.5.8. As funções trigonométricas $y = \sec x$ e $y = \operatorname{tg} x$ têm assíntotas verticais $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ para k inteiro. Veja as Figuras 1.21.

Exemplo 2.5.9. As funções trigonométricas $y = \operatorname{cosec} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ têm assíntotas verticais $x = k\pi$ para k inteiro. Veja as Figuras 1.22.

2.5.2 Assíntotas oblíquas

Além de assíntotas horizontais e verticais, gráficos de funções podem ter assíntota oblíquas. Isto ocorre, particularmente, para funções racionais cujo grau do numerador é maior que o do denominador.

¹¹Veja o Exemplo 2.4.6.

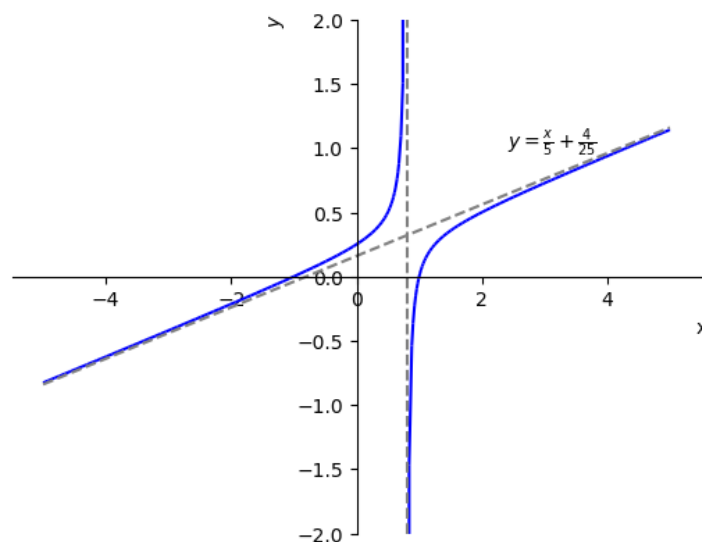


Figura 2.21: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}$.

Exemplo 2.5.10. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{5x - 4}. \quad (2.174)$$

Para buscarmos determinar a assíntota oblíqua desta função, dividimos o numerador pelo denominador, de forma a obtermos

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{5} + \frac{4}{25}\right)}_{\text{quociente}} + \underbrace{\frac{-\frac{9}{25}}{5x - 4}}_{\text{resto}}. \quad (2.175)$$

Observamos, agora, que o resto tende a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, i.e. $f(x) \rightarrow \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Com isso, concluímos que $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{25}$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$. Veja a Figura 2.21.

Observação 2.5.1. Analogamente à assíntotas oblíquas, podemos ter outros tipos de assíntotas determinadas por funções de diversos tipos, por exemplo, assíntotas quadráticas.

2.5.3 Limites infinitos no infinito

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad (2.176)$$

quando os valores da função f são arbitrariamente grandes para todos os valores de x suficientemente grandes. De forma análoga, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad (2.177)$$

Exemplo 2.5.11. Vejamos os seguintes casos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$

Exemplo 2.5.12.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 300}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \quad (2.178)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{10}{x} + \frac{300}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \infty. \quad (2.179)$$

Proposição 2.5.1. Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n. \quad (2.180)$$

Exemplo 2.5.13. Retornando ao exemplo anterior (Exemplo 2.5.12, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 10x^2 + 300 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty. \quad (2.181)$$

Exercícios resolvidos

ER 2.5.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x}. \quad (2.182)$$

Solução. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} \xrightarrow{0^-} -\infty. \quad (2.183)$$

Outra forma de calcular este limite é observar que $y = 1 - x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow 1^-$. Assim, fazendo a mudança de variável $y = 1 - x$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-2}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y-1}{y} = -\infty. \quad (2.184)$$

Podemos usar o seguinte comando [SymPy¹²](#) para computar este limite:

```
limit((x-2)/(1-x), x, 1, '-')
```

◇

ER 2.5.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x-1|. \quad (2.185)$$

Solução. Começamos observando que

$$\ln |x-1| = \begin{cases} \ln(1-x) & , x < 1, \\ \ln(x-1) & , x > 1. \end{cases} \quad (2.186)$$

Então, calculando o limite lateral à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln |x-1| &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^{13}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln |x-1| &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty^{14}. \end{aligned}$$

¹²Veja a Observação 2.0.1.

Portanto, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x - 1| = -\infty. \quad (2.187)$$

Podemos usar os seguintes comandos [SymPy](#)¹⁵ para computar os limites laterais:

```
limit(log(abs(x-1)),x,1,'-')
limit(log(abs(x-1)),x,1,'+')
```

◇

ER 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1}. \quad (2.188)$$

Solução. Tratando-se de uma função racional, temos¹⁶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty. \quad (2.189)$$

◇

ER 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2}. \quad (2.190)$$

Solução. Observamos que $1 - x^2 \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Desta forma, fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x^2$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0. \quad (2.191)$$

◇

¹⁵Veja a Observação 2.0.1.

¹⁶Veja a Observação 2.4.2. Veja, também, o gráfico desta função na Figura 2.19.

Exercícios

E 2.5.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}. \quad (2.192)$$

E 2.5.2. Determine as assíntotas verticais ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad (2.193)$$

E 2.5.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 - 1}. \quad (2.194)$$

E 2.5.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 10x^2 - 300. \quad (2.195)$$

2.6 Continuidade

Dizemos que uma **função** f é **contínua** em um ponto x_0 , quando $f(x_0)$ está definida, existe o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.196)$$

Usando de limites laterais, definimos os conceitos de **função contínua à esquerda** ou **à direita**. Quando a **função** f não é contínua em um dado ponto x_0 , dizemos que f é **descontínua** neste ponto.

Exemplo 2.6.1. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} & , x \neq 2, \\ -4 & , x = 2. \end{cases} \quad (2.197)$$

Na Figura 2.22, temos um esboço do gráfico de f .

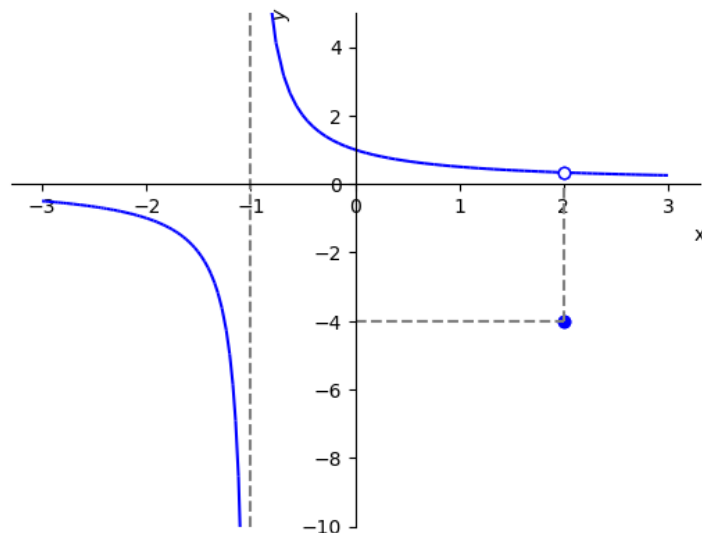


Figura 2.22: Esboço do gráfico da função f definida no Exemplo 2.6.1.

Vejamos a continuidade desta função nos seguintes pontos:

a) $x = -2$. Neste ponto, temos $f(-2) = -1$ e

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{-1 \cdot (-4)} = -1 = f(-2). \quad (2.198)$$

Com isso, concluímos que f é contínua no ponto $x = -2$.

b) $x = -1$. Neste ponto,

$$f(-1) = \frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} \quad (2.199)$$

logo, $f(-1)$ não está definido e, portanto, f é descontínua neste ponto. Observemos que f tem uma assíntota vertical em $x = -1$, verifique!

c) $x = 2$. Neste ponto, temos $f(2) = -4$ e

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \neq f(2). \quad (2.200)$$

Portanto, concluímos que f é descontínua em $x = 2$.

Uma função f é dita ser **contínua em um intervalo** (a, b) , quando f é contínua em todos os pontos $x_0 \in (a, b)$. Para intervalos, $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, empregamos a noção de continuidade lateral nos pontos de extremos fechados dos intervalos. Quando uma função é contínua em $(-\infty, \infty)$, dizemos que ela é **contínua em toda parte**.

Exemplo 2.6.2. (Continuidade da função valor absoluto.) A função valor absoluto é contínua em toda parte. De fato, ela é definida por

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases} \quad (2.201)$$

Veja o esboço do gráfico desta função na Figura 1.2.

Observamos que para $x \in (-\infty, 0)$ temos $|x| = -x$ que é contínua para todos estes valores de x . Também, para $x \in (0, \infty)$ temos $|x| = x$ que é contínua para todos estes valores de x . Agora, em $x = 0$, temos $|0| = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (2.202)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0. \quad (2.203)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|. \quad (2.204)$$

Com tudo isso, concluímos que a função valor absoluto é contínua em toda parte.

Proposição 2.6.1. (Propriedades de funções contínuas) Se f e g são funções contínuas em $x = c_0$ e k um número real, então também são contínuas em $x = c_0$ as funções:

- kf
- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- f/g , se $g(c_0) \neq 0$
- f^k , se existe $f^k(c_0)$.

Exemplo 2.6.3. Polinômios são contínuos em toda parte. Isto é, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0), \quad (2.205)$$

para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x^2 + x^5 = 2 - (-1)^2 + (-1)^5 = 0. \quad (2.206)$$

Exemplo 2.6.4. Funções racionais $r(x) = p(x)/q(x)$ são contínuas em todos os pontos de seus domínios. Por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad (2.207)$$

é descontínua nos pontos

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad (2.208)$$

pois f não está definida nestes pontos. Agora, para $x_0 \neq 1$ e $x_0 \neq -1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (2.209)$$

$$= \frac{x_0-1}{x_0^2-1} = f(x_0). \quad (2.210)$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 = f(0). \quad (2.211)$$

Ou seja, f é contínua nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, que coincide com seu domínio.

Observação 2.6.1. São contínuas em todo seu domínio as funções potência, polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Proposição 2.6.2. (Composição de funções contínuas) Se f é contínua no ponto x_0 e g é contínua no ponto $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0 .

Exemplo 2.6.5. Vejamos os seguintes casos:

a) $y = \sqrt{x^2-1}$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1. \quad (2.212)$$

Isto é, esta função é contínua em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

b) $y = \left| \frac{x-1}{x^2-1} \right|$ é descontínua nos pontos x tais que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad (2.213)$$

Exemplo 2.6.6. Podemos explorar a continuidade para calcularmos limites. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4} \cdot e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x+4} \cdot e^{\sin \lim_{x \rightarrow 0} x} = \sqrt{4} \cdot e^0 = 2. \quad (2.214)$$

Teorema 2.6.1. (Teorema do valor intermediário) Uma função f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Exemplo 2.6.7. Podemos afirmar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tem (pelo menos) um zero no intervalo $(0, 2)$. De fato, f é contínua no intervalo $[0, 2]$ e, pelo teorema do valor intermediário, assume todos os valores entre $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Observemos que $y = 0$ está entre $f(0)$ e $f(2)$. Veja a Figura 2.23.

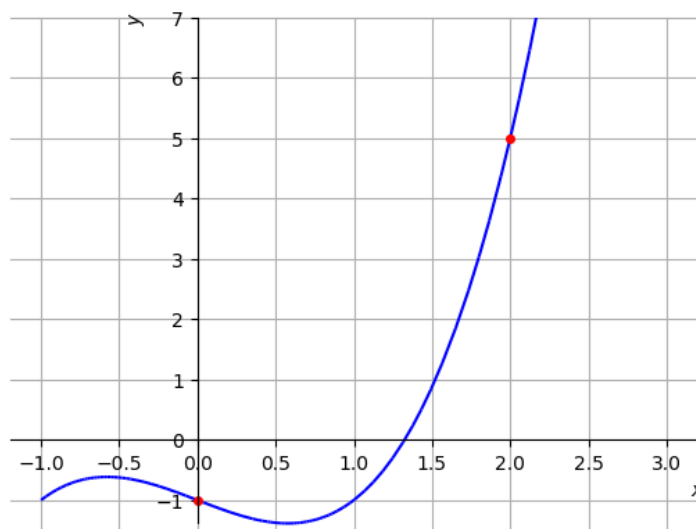


Figura 2.23: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Exercícios resolvidos

ER 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}. \quad (2.215)$$

Solução. Observamos que a função é descontínua em $x = 0$, pois não está definida neste ponto. Agora, para $x < 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1. \quad (2.216)$$

Ou seja, para $x < 0$ a função é constante igual a -1 e, portanto, contínua. Para $x > 0$, temos

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad (2.217)$$

I.e., para $x > 0$ a função é constante igual a 1 e, portanto, contínua. Concluimos que $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Faça o esboço do gráfico desta função!

◇

ER 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.218)$$

Solução. A função f pode ser vista como a composição da função logaritmo natural $g(x) = \ln x$ com a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Observamos que:

- a) a função logaritmo natural é contínua em todo o seu domínio, i.e. g é contínua para todo $x > 0$;
- b) a função racional $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ é contínua para todo $x \neq 1$.

Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, temos que a função $f(x) = g(h(x))$ é contínua nos pontos de continuidade da função h tais que $h(x) > 0$, i.e. para $x \neq 1$ e

$$\frac{x+1}{x-1} > 0. \quad (2.219)$$

Fazendo o estudo de sinal

-	-1	+	1	+	$x+1$
-		-		+	$x-1$
+	-1	-	1	+	$\frac{x+1}{x-1}$

vemos que $h(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Em resumo, h é contínua em $(0, \infty)$ e g é contínua e positiva em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f = (h \circ g)$ é contínua na interseção destes conjuntos, i.e. f é contínua em $(1, \infty)$.

◇

Exercícios

E 2.6.1. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}. \quad (2.220)$$

E 2.6.2. Encontre os pontos de continuidade da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x + 2}}. \quad (2.221)$$

E 2.6.3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2} - \cos x}{2} \right). \quad (2.222)$$

2.7 Limites e desigualdades

Se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo x em um certo intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em $x = x_0$, e existem os limites de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (2.223)$$

Observe que a tomada do limite não preserva a desigualdade estrita.

E 2.7.1. As funções $f(x) = x^2/3$ e $g(x) = x^2/2$ são tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq 0$. Ainda, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \quad (2.224)$$

Observação 2.7.1. A preservação da desigualdade também ocorre para limites laterais. Mais precisamente, se f e g são funções tais que $f(x) < g(x)$ para todo $x < x_0$ e existem os limites laterais à esquerda de f e g no ponto $x = x_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x). \quad (2.225)$$

Vale o resultado análogo para limite lateral à direita e limites no infinito.

2.7.1 Limites de funções limitadas

Se $f(x) \leq L$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em x_0 , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq L. \quad (2.226)$$

Resultados análogos valem para limites laterais e limites no infinito.

Exemplo 2.7.1. Vamos calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x. \quad (2.227)$$

Como $|\sin x| \leq 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x} = 0. \quad (2.228)$$

Logo, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x = 0. \quad (2.229)$$

2.7.2 Teorema do confronto

Teorema 2.7.1. (Teorema do confronto) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em $x = a$, e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L, \quad (2.230)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (2.231)$$

Demonstração. Da preservação da desigualdade, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \quad (2.232)$$

donde

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L. \quad (2.233)$$

□

E 2.7.2. Toda função $f(x)$ tal que $-1 + x^2/2 \leq f(x) \leq -1 + x^2/3$, para todo $x \neq 0$, tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \quad (2.234)$$

Observação 2.7.2. O Teorema do confronto também se aplica a limites laterais.

Exemplo 2.7.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.235)$$

De fato, começamos assumindo $0 < x < \pi/2$. Tomando $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $P = (\cos x, \sin x)$, observamos que

$$\text{Área do triângulo } OAP < \text{Área do setor } OAP, \quad (2.236)$$

i.e.

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x < x, \quad (2.237)$$

para todo $0 < x < \pi/2$.

É certo que $\sin x < -x$ para $-\pi/2 < x < 0$. Com isso e o resultado acima, temos

$$\sin x \leq |x|, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.238)$$

Lembrando que $\sin x$ é uma função ímpar, temos

$$-|x| \leq -\sin x = \sin -x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (2.239)$$

Logo, de (2.238) e (2.239), temos

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|. \quad (2.240)$$

Por fim, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \quad (2.241)$$

do Teorema do confronto, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (2.242)$$

Observação 2.7.3. Do exemplo anterior (Exemplo 2.7.2), podemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.243)$$

De fato, da identidade trigonométrica de ângulo metade (1.73)

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad (2.244)$$

temos

$$\cos x = 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \quad (2.245)$$

Então, aplicando as regras de cálculo de limites, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right] \quad (2.246)$$

$$= 1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^2. \quad (2.247)$$

Agora, fazemos a mudança de variável $y = x/2$. Neste caso, temos $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$ e, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen} y = 0. \quad (2.248)$$

Então, retornando a equação (2.247), concluímos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (2.249)$$

2.7.3 Limites envolvendo $(\operatorname{sen} x)/x$

Verificamos o seguinte resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.250)$$

Para verificarmos este resultado, calcularemos os limites laterais à esquerda e à direita. Começamos com o limite lateral a direita e assumimos $0 < x < \pi/2$. Sendo os pontos $O = (0,0)$, $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $A = (1,0)$ e $T = (1, \operatorname{tg} x)$, observamos que

$$\text{Área do triâng. } OAP < \text{Área do setor } OAP < \text{Área do triâng. } OAT. \quad (2.251)$$

Ou seja, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad (2.252)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por $\operatorname{sen} x$ ¹⁷, obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2.253)$$

Tomando os recíprocos, temos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \quad (2.254)$$

Agora, passando ao limite

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1. \quad (2.255)$$

Logo, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.256)$$

Agora, usando o fato de que $\operatorname{sen} x/x$ é uma função par, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \quad (2.257)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (2.258)$$

Calculados os limites laterais, concluímos o que queríamos.

Exemplo 2.7.3. Com o resultado acima e as regras de cálculo de limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \quad (2.259)$$

Veja o Exercício 2.7.6.

Exercícios resolvidos

ER 2.7.1. Sabendo que $x^3 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ para $0 < x < 1$, calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad (2.260)$$

¹⁷ $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $0 < x < \pi/2$.

Solução. Pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \overset{0}{\nearrow} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \overset{0}{\nearrow}. \quad (2.261)$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad (2.262)$$

◇

Em construção ...

Exercícios

E 2.7.3. Supondo que $1 - x^2/3 \leq u(x) \leq 1 - x^2/2$ para todo $x \neq 0$, determine o $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$.

E 2.7.4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x. \quad (2.263)$$

E 2.7.5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{6x}. \quad (2.264)$$

E 2.7.6. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}. \quad (2.265)$$

E 2.7.7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x}. \quad (2.266)$$

2.8 Exercícios finais

E 2.8.1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \quad (2.267)$$

Capítulo 3

Derivadas

Observação 3.0.1. (Códigos [Python](#)) Nos códigos [Python](#) inseridos ao longo deste capítulo, estaremos assumindo o seguinte preâmbulo:

```
%matplotlib inline
from sympy import *
init_printing()
var('x',real=True)
```

3.1 Derivada no ponto

Nesta seção, vamos discutir sobre a noção de **derivada de uma função em um ponto**. Começamos pelas noções de **reta secante** e de **reta tangente** ao gráfico de uma função. Em seguida, discutimos sobre as noções de **taxa de variação média** e **taxa de variação instantânea**. Por fim, definimos a derivada de uma função em um ponto.

3.1.1 Retas secante e tangente

Definimos a **reta secante** ao gráfico de uma dada função f pelos pontos x_0 e x_1 , $x_0 \neq x_1$, como sendo a reta determinada pela equação

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.1)$$

Isto é, é a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Veja a Figura 3.1. Observemos que o coeficiente angular da reta secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.2)$$

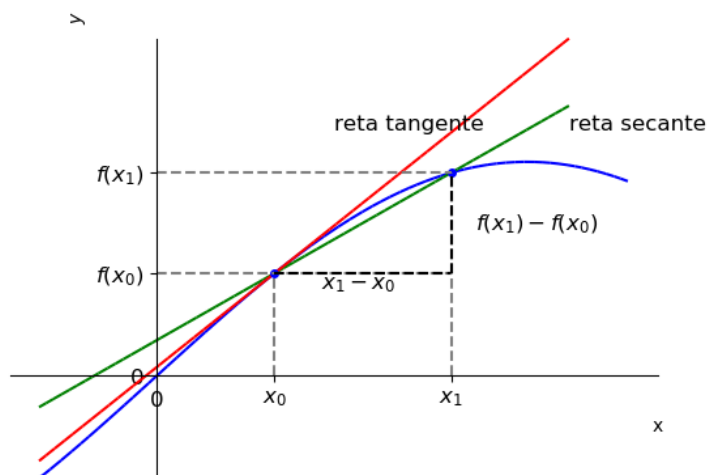


Figura 3.1: Esboços de uma reta secante (verde) e da reta tangente (vermelho) ao gráfico de uma função.

A **reta tangente** ao gráfico de uma função f em $x = x_0$ é a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular

$$m_{\text{tg}} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.3)$$

Isto é, a reta de equação

$$y = m_{\text{tg}}(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.4)$$

Menos formal, é a reta limite das retas secantes ao gráfico da função pelos pontos x_0 e x_1 , quando $x_1 \rightarrow x_0$. Veja a Figura 3.1.

Observação 3.1.1. Fazendo $h = x_1 - x_0$, temos que (3.3) é equivalente a

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.5)$$

Exemplo 3.1.1. Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. O coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.6)$$

$$= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad (3.7)$$

$$= 4 - 1 = 3. \quad (3.8)$$

Logo, a reta secante ao gráfico de f pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ tem equação

$$y = m_{\text{sec}}(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 3(x - 1) + f(1) \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow y = 3x - 2. \quad (3.10)$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta secante (verde).

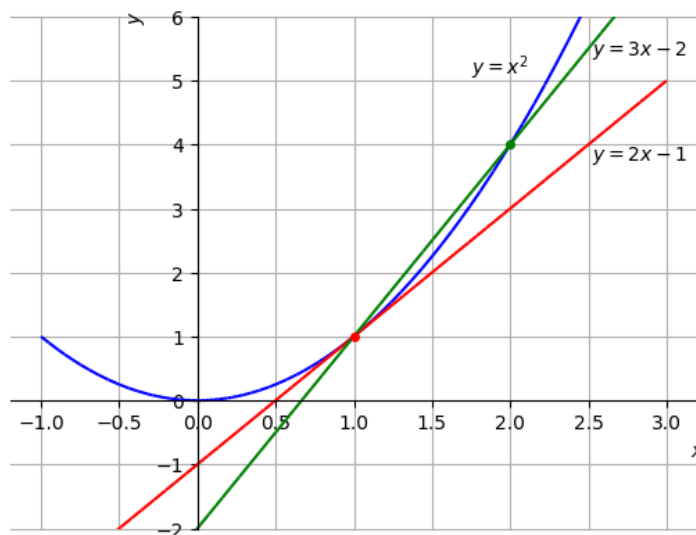


Figura 3.2: Esboços dos gráficos de $f(x) = x^2$ (azul), da reta secante pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ (verde) e da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$ (vermelho).

Agora, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 é

$$m_{\text{tg}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.11)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} \quad (3.12)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \quad (3.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{1} = 2. \quad (3.14)$$

Assim sendo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ tem coeficiente angular $m_{\text{tg}} = 2$ e equação

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \quad (3.15)$$

Na Figura 3.2, temos os esboços dos gráfico da função e da reta tangente (vermelho).

Com o [SymPy](#), podemos obter a expressão da reta secante com os seguintes comandos¹:

```
x0 = 1
x1 = 2
f = lambda x: x**2
msec = (f(x1)-f(x0))/(x1-x0)
msec*(x-x0)+f(x0)
```

A expressão da reta tangente pode ser obtida com os seguintes comandos²:

```
h = var("h",real=True)
x0 = 1
f = lambda x: x**2
mtg = limit((f(x0+h)-f(x0))/h,h,0)
mtg*(x-x0)+f(x0)
```

¹Veja a Observação 3.0.1.

²Veja a Observação 3.0.1.

3.1.2 Taxas de variação

A **taxa de variação média** de uma função f quando x varia de x_0 a x_1 é definida como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (3.16)$$

Desta deriva-se a **taxa de variação instantânea** de f no ponto x_0 , a qual é definida como

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.17)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.18)$$

Em muitas áreas do conhecimento, estas taxa recebem nomes específicos.

Exemplo 3.1.2. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida por um objeto no tempo. A **velocidade média** (taxa de variação média da distância) do tempo t_0 ao tempo t_1 é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (3.19)$$

Por exemplo, se $s(t) = 15t^2 + t$ (km), então a velocidade média do objeto entre $t_0 = 1\text{h}$ e $t_1 = 3\text{h}$ é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(15t_1^2 + t_1) - (15t_0^2 + t_0)}{t_1 - t_0} \quad (3.20)$$

$$= \frac{15 \cdot 3^2 + 3 - (15 \cdot 1^2 + 1)}{3 - 1} \quad (3.21)$$

$$= \frac{135 + 3 - 15 - 1}{2} \quad (3.22)$$

$$= 61 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.23)$$

A **velocidade** (taxa de variação instantânea da distância) no tempo $t_0 = 1$

é

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \quad (3.24)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(t_0 + h)^2 + (t_0 + h) - (15t_0^2 + t_0)}{h} \quad (3.25)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15t_0^2 + 30t_0h + 15h^2 + t_0 + h - 15t_0^2 - t_0}{h} \quad (3.26)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30t_0h + 15h^2 + h}{h} \quad (3.27)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 30t_0 + 15h + 1 \quad (3.28)$$

$$= 30t_0 + 1 = 31 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (3.29)$$

Exemplo 3.1.3. Seja $c(x) = \sqrt{x}$ (milhões de reais) o custo da produção em uma empresa em função do número de unidades produzidas (milhares). O **custo médio da produção** de $x_0 = 4$ a $x_1 = 9$ é

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3.30)$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}}{x_1 - x_0} \quad (3.31)$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{9 - 4} \quad (3.32)$$

$$= \frac{3 - 2}{5} \quad (3.33)$$

$$= 0,2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.34)$$

O **custo marginal** (taxa de variação instantânea do custo) quando a empresa

está produzindo $x_0 = 4$ milhões de unidades é

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0=4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (3.35)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.36)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \quad (3.37)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \quad (3.39)$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 0,25 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.40)$$

Observação 3.1.2. Analogamente a custo marginal, temos as noções de rendimento marginal e lucro marginal.

3.1.3 Derivada em um ponto

A **derivada** de uma função f **em um ponto** $x = x_0$ é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ e é definida por

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.41)$$

Exemplo 3.1.4. Vejamos os seguintes casos:

a) $f(x) = k$, k constante.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (3.42)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0. \quad (3.43)$$

b) $f(x) = x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.44)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1. \quad (3.45)$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \quad (3.46)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} \quad (3.47)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.48)$$

Exemplo 3.1.5. Assuma que o rendimento de uma empresa é modelado por $r(x) = x^2$ (milhões de reais), onde x é o número em milhões de unidades vendidas. O **rendimento marginal** quando $x = x_0 = 1$ é

$$r'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \quad (3.49)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad (3.50)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} 2x_0h + h = 2x_0 = 2 \frac{\text{R\$}}{\text{un}} \quad (3.51)$$

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$. Faça, então, os esboços dos gráficos de f e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

Solução. A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x_0 = 4$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3.52)$$

A derivada de f no ponto x_0 é

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.53)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \quad (3.54)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \quad (3.55)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} \quad (3.56)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}. \quad (3.57)$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + \sqrt{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1. \quad (3.58)$$

Veja a Figura 3.3 para os esboços dos gráfico de f e da reta tangente.

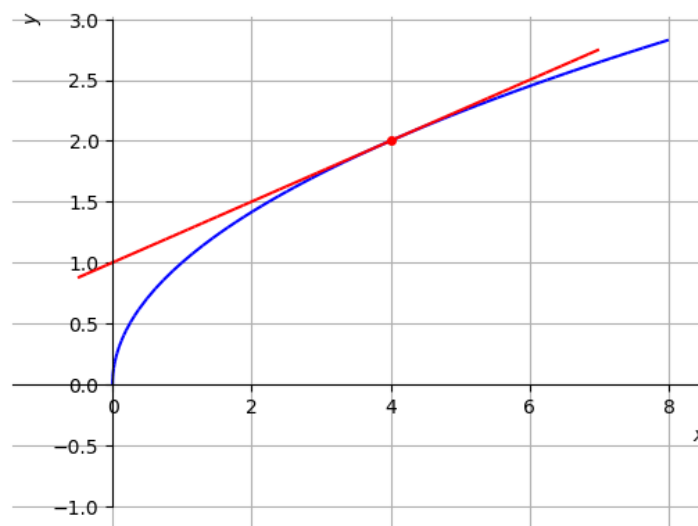


Figura 3.3: Esboços do gráfico da função f e da reta tangente no ponto $x_0 = 4$.

◇

ER 3.1.2. Considere que a produção em uma empresa tem custo

$$c(x) = \sqrt{x} \quad (3.59)$$

e rendimento

$$r(x) = x^2, \quad (3.60)$$

onde x é o número de unidades (em milhões) produzidas. Calcule o lucro marginal da empresa quando $x = 1$ mi.

Solução. O lucro é

$$l(x) = r(x) - c(x). \quad (3.61)$$

Desta forma, o lucro marginal no ponto $x_0 = 1$ é

$$l'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x_0 + h) - l(x_0)}{h} \quad (3.62)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - c(x_0 + h) - (r(x_0) - c(x_0))}{h} \quad (3.63)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0) - (c(x_0 + h) - c(x_0))}{h} \quad (3.64)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x_0 + h) - c(x_0)}{h} \quad (3.65)$$

$$= r'(x_0) - c'(x_0) \quad (3.66)$$

$$= 2x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (3.67)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = 1,5 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}. \quad (3.68)$$

◇

Exercícios

E 3.1.1. Calcule as derivadas conforme indicado:

a) $f(x) = 2$, $f'(-1)$;

b) $g(x) = 10^6$, $g'(10^8)$;

c) $h(x) = \ln 2e$, $h'(-\pi)$;

E 3.1.2. Calcule as derivadas conforme indicado:

- a) $f(x) = 2 + x$, $f'(-1)$;
- b) $g(x) = 10^6 - 2x$, $g'(-3)$;
- c) $h(x) = \ln(2e) + ex$, $h'(10^6)$;

E 3.1.3. Calcule as derivadas conforme indicado:

- a) $f(x) = x$, $f'(-1)$;
- b) $g(x) = -2x$, $g'(-3)$;
- c) $h(x) = ex$, $h'(10^6)$;

E 3.1.4. Determine a reta secante ao gráfico de $f(x) = 5 - x^2$ pelos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Então, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$. Por fim, faça os esboços dos gráficos de f , da reta secante e da reta tangente em um mesmo plano cartesiano.

E 3.1.5. Assumindo que, em uma empresa, a produção tenha o custo $c(x) = 2\sqrt{x}$ e rendimento $r(x) = \frac{1}{100}x^3$, dados em milhões de reais com x em milhares de unidades. Calcule:

- a) o custo marginal quando $x = 1$;
- b) o rendimento marginal quando $x = 1$;
- c) o lucro marginal quando $x = 1$.

3.2 Função derivada

A **derivada** de uma função f em relação à variável x é a função $f' = \frac{df}{dx}$ cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.69)$$

quando este limite existe. Dizemos que f é **derivável** (ou **diferenciável**) em um ponto x de seu domínio, quando o limite dado em (3.69) existe. Se isso ocorre para todo número real x , dizemos que f é derivável em toda parte.

Exemplo 3.2.1. A derivada de $f(x) = x^2$ é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.70)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (3.71)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \quad (3.72)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \quad (3.73)$$

Observamos que este é o caso de uma função derivável em toda parte. A Figura 3.4.

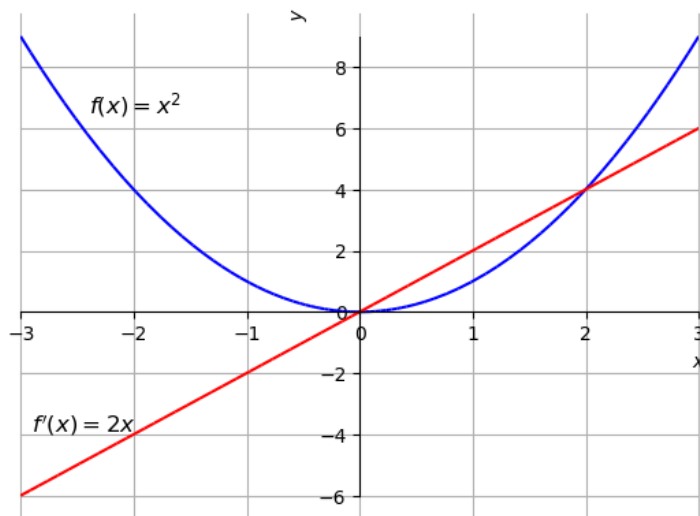


Figura 3.4: Esboços dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e de sua derivada $f'(x) = 2x$.

Com o [SymPy](#)³, podemos usar os seguintes comandos para verificarmos este resultado:

```
h = symbols('h', real=True)
f = lambda x: x**2
limit((f(x+h)-f(x))/h, h, 0)
```

³Veja a Observação 3.0.1.

Mais adequadamente, podemos usar o comando:

```
diff(x**2,x)
```

ou, equivalentemente,

```
diff(x**2)
```

para computar a derivada de x^2 em relação a x .

Observação 3.2.1. A derivada à direita (à esquerda) de uma função f em um ponto x é definida por

$$f'_{\pm}(x) = \frac{df}{dx^{\pm}} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.74)$$

Desta forma, no caso de pontos extremos do domínio de uma função, empregamos a derivada lateral correspondente.

Exemplo 3.2.2. Vamos calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. Para $x = 0$, só faz sentido calcular a derivada lateral à direita:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \quad (3.75)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \quad (3.76)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cancel{\sqrt{h}} h^{\overline{0^+}}} + \infty. \quad (3.77)$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. Agora, para $x > 0$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \quad (3.78)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad (3.79)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \quad (3.80)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (3.81)$$

Na Figura 3.5, temos os esboços dos gráficos desta função e de sua derivada.

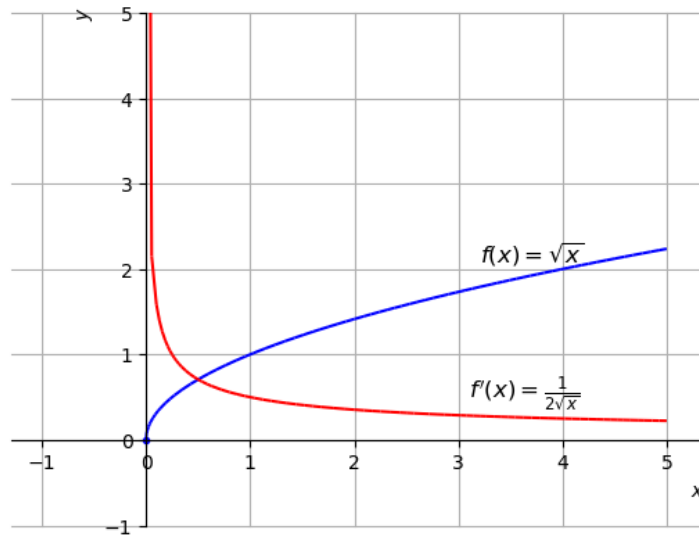


Figura 3.5: Esboços dos gráficos da função $f(x) = \sqrt{x}$ e de sua derivada.

No [SymPy](#)⁴, a computação de $f'_+(0)$ pode ser feita com os comandos⁵:

```
var('h', real=True)
limit((sqrt(0+h)-sqrt(0))/h,h,0)
```

E, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ (nos pontos de diferenciabilidade) pode ser obtida com o comando:

```
diff(sqrt(x),x)
```

Exemplo 3.2.3. A função valor absoluto é derivável para todo $x \neq 0$ e não é derivável em $x = 0$. De fato, para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.82)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) + x}{h} \quad (3.83)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.84)$$

⁴Veja a Observação 3.0.1.

⁵Por padrão no [SymPy](#), o limite é tomado à direita.

Analogamente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \quad (3.85)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \quad (3.86)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.87)$$

Agora, para $x = 0$, devemos verificar as derivadas laterais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1, \quad (3.88)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.89)$$

Como as derivadas laterais são diferentes, temos que $y = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Na figura 3.6, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = |x|$ e sua derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0, \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

Esta é chamada de **função sinal** e denotada por $\text{sign}(x)$. Ou seja, a função sinal é a derivada da função valor absoluto.

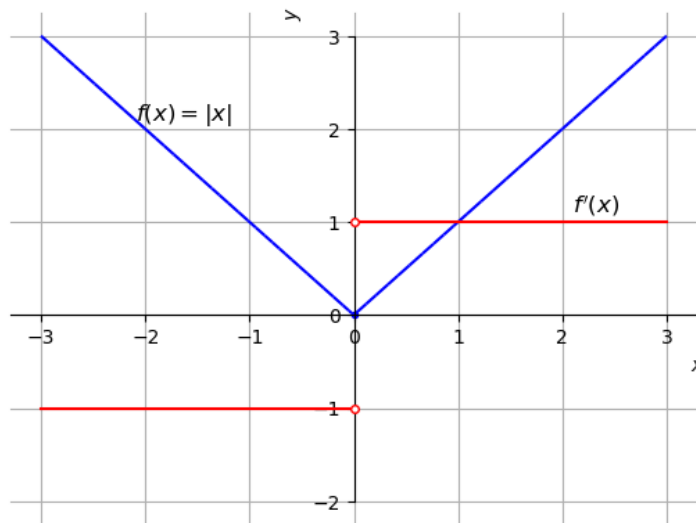


Figura 3.6: Esboços dos gráficos da função $f(x) = |x|$ e de sua derivada.

No [SymPy](#)⁶, podemos computar a derivada da função valor absoluto com o comando:

```
diff(abs(x))
```

Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ em relação a x .

Solução. Por definição da derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.91)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{h} \quad (3.92)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1 - x^2 - 2x - 1}{h} \quad (3.93)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \quad (3.94)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2. \quad (3.95)$$

◇

ER 3.2.2. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = |x - 1|$.

Solução. O gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ tem um bico no ponto $x = 1$ (verifique!). Para valores de $x < 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.96)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{<0} - \overbrace{|x-1|}^{<0}}{h} \quad (3.97)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x - h + 1 + x - 1}{h} \quad (3.98)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \quad (3.99)$$

⁶Veja a Observação 3.0.1.

Para valores de $x > 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.100)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|x+h-1|}^{>0} - \overbrace{|x-1|}^{>0}}{h} \quad (3.101)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-1-x+1}{h} \quad (3.102)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad (3.103)$$

Ou seja, temos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável para $x \neq 1$. Agora, para $x = 1$, temos

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.104)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{|h|}^{<0} - |1-1|}{h} \quad (3.105)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (3.106)$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (3.107)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{|h|}^{>0} - |1-1|}{h} \quad (3.108)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (3.109)$$

$$(3.110)$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, temos que $\nexists f'(1)$. Concluimos que $f(x) = |x-1|$ é diferenciável nos pontos $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

◇

Exercícios

E 3.2.1. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

- a) $f(x) = 2$
- b) $g(x) = -3$
- c) $h(x) = \sqrt{e}$

E 3.2.2. Calcule a derivada em relação a x de cada uma das seguintes funções:

- a) $f(x) = 2x$
- b) $g(x) = -3x$
- c) $h(x) = \sqrt{e}x$

E 3.2.3. Calcule a derivada em relação a x da função

$$f(x) = x^2 - 2x + 1. \quad (3.111)$$

E 3.2.4. Determine os pontos de diferenciabilidade da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

3.3 Regras básicas de derivação

Vejam as derivadas da função constante e da função potência.

- $\frac{dk}{dx} = 0$, onde k é uma constante.

Dem.: Com $f(x) \equiv k$ temos

$$\frac{dk}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.112)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \quad (3.113)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (3.114)$$

No `SymPy`, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
k = symbols('k',real=True)
diff(k,x)
```

- $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, para n inteiro positivo.

Dem.: Com $f(x) = x^n$, temos

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.115)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (3.116)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (3.117)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \quad (3.118)$$

$$= nx^{n-1}. \quad (3.119)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
n = symbols('n',integer=True, positive=True)
simplify(diff(x**n,x))
```

Exemplo 3.3.1. Vejamos os seguintes casos:

a) $\frac{d\sqrt{2}}{dx} = 0.$

b) $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2.$

3.3.1 Multiplicação por constante e soma

Sejam c um número real, u e v funções. Temos as seguintes regras básicas de derivação:

- $(cu)' = cu'.$

Dem.:

$$\frac{d}{dx}(cu)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \quad (3.120)$$

$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (3.121)$$

$$= c \frac{du}{dx}. \quad (3.122)$$

No **SymPy**, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
c = symbols('c', real=True)
u = Function('u', real=True)(x)
diff(c*u, x)
```

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Dem.:

$$(u \pm v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u \pm v)(x+h) - (u \pm v)(x)}{h} \quad (3.123)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \quad (3.124)$$

$$= u'(x) \pm v'(x). \quad (3.125)$$

No **SymPy**, podemos usar os seguintes comandos para obtermos a regra de derivação para soma:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u+v, x)
```

Exemplo 3.3.2.

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2x - 1) = \frac{d}{dx}x^3 - 2\frac{dx}{dx} - \frac{d1}{dx} \quad (3.126)$$

$$= 3x^2 - 2. \quad (3.127)$$

3.3.2 Produto e quocientes

Sejam $y = u(x)$ e $y = v(x)$ funções deriváveis, com $v(x) \neq 0$. Então:

- $(uv)' = u'v + uv'$.

Dem.:

$$(uv)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \quad (3.128)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (3.129)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \right. \quad (3.130)$$

$$\left. + \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \quad (3.131)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) \quad (3.132)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \quad (3.133)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (3.134)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
diff(u*v,x)
```

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

Dem.:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h} \quad (3.135)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h} \quad (3.136)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \right. \quad (3.137)$$

$$\left. - \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.138)$$

$$= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \right. \quad (3.139)$$

$$\left. - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \quad (3.140)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad (3.141)$$

No SymPy, podemos usar os seguintes comandos para obtermos tal regra de derivação:

```
u = Function('u', real=True)(x)
v = Function('v', real=True)(x)
simplify(diff(u/v,x))
```

Exemplo 3.3.3. Vejamos os seguintes casos:

a)

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + x)(1 + x^3)] = \left[\frac{d}{dx}(x^2 + x) \right] (1 + x^3) \quad (3.142)$$

$$+ (x^2 + x) \left[\frac{d}{dx}(1 + x^3) \right] \quad (3.143)$$

$$= (2x + 1)(1 + x^3) + (x^2 + x)3x^2 \quad (3.144)$$

$$= 2x + 2x^4 + 1 + x^3 + 3x^4 + 3x^3 \quad (3.145)$$

$$= 5x^4 + 4x^3 + 2x + 1. \quad (3.146)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando⁷:

```
d = diff((x**2+x)*(1+x**3),x)
simplify(d)
```

b)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x}{1 - x^3} \right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2 + x) \right] (1 - x^3) - (x^2 + x) \left[\frac{d}{dx}(1 - x^3) \right]}{(1 - x^3)^2} \quad (3.147)$$

$$= \frac{(2x + 1)(1 - x^3) + (x^2 + x)3x^2}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.148)$$

$$= \frac{2x - 2x^4 + 1 - x^3 + 3x^4 + 3x^3}{1 - 2x^3 + x^6} \quad (3.149)$$

$$= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{x^6 - 2x^3 + 1} \quad (3.150)$$

Com o [SymPy](#), podemos computar esta derivada com o seguinte comando⁸:

```
d = diff((x**2+x)/(1-x**3),x)
simplify(d)
```

Observação 3.3.1. (Derivada de funções potência) No início desta seção, vimos que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad (3.151)$$

para $n > 0$ inteiro. Agora, podemos afirmar que este é, também, o caso quando $n < 0$ inteiro. De fato, se $n < 0$, então

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right) \quad (3.152)$$

$$= \frac{(1)'x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{(x^{-n})^2} \quad (3.153)$$

$$= \frac{0 - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} \quad (3.154)$$

$$= nx^{2n-n-1} = nx^{n-1}. \quad (3.155)$$

⁷Veja a Observação 3.0.1.

⁸Veja a Observação 3.0.1.

O SymPy, obtém o mesmo resultado, verifique usando os comandos:

```
var('n', integer=True)
simplify(diff(x**n, x))
```

Exemplo 3.3.4.

$$\frac{d}{dx}x^{-5} = -5x^{-5-1} = -5x^{-4}. \quad (3.156)$$

3.3.3 Derivadas de funções exponenciais

Seja $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Então

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.157)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \quad (3.158)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \quad (3.159)$$

$$= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad (3.160)$$

Pode-se mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a. \quad (3.161)$$

Desta forma, temos

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a. \quad (3.162)$$

Para a função exponencial natural $y = e^x$, temos

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \ln e \quad (3.163)$$

$$= e^x. \quad (3.164)$$

Exemplo 3.3.5. Vejamos os seguintes casos:

a) $\frac{d2^x}{dx} = 2^x \ln 2.$

b)

$$\frac{de^{2x}}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x e^x) \quad (3.165)$$

$$= e^x e^x + e^x e^x \quad (3.166)$$

$$= 2e^{2x}. \quad (3.167)$$

3.3.4 Derivadas de ordens mais altas

A derivada de uma função $y = f(x)$ em relação a x é a função $y = f'(x)$. Quando esta é diferenciável, podemos calcular a derivada da derivada. Esta é conhecida como a **segunda derivada** de f , denotamos

$$f''(x) := (f'(x))' \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right). \quad (3.168)$$

Exemplo 3.3.6. Seja $f(x) = 1/x$. Então, a primeira derivada de f é

$$f'(x) = [x^{-1}]' = -x^{-2}. \quad (3.169)$$

De posse da primeira derivada, podemos calculamos a segunda derivada de f , como segue:

$$f''(x) = [f'(x)]' = [-x^{-2}]' = 2x^{-3}. \quad (3.170)$$

Generalizando, quando existe, a n -ésima derivada de uma função $y = f(x)$, $n \geq 1$, é recursivamente definida (e denotada) por

$$f^{(n)}(x) := [f^{(n-1)}]' \text{ ou } \frac{d^n}{dx^n} f(x) := \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right], \quad (3.171)$$

com $f^{(3)} \equiv f'''$, $f^{(2)} \equiv f''$, $f^{(1)} \equiv f'$ e $f^{(0)} \equiv f$.

Exemplo 3.3.7. a) Para obtermos a terceira derivada de $f(x) = x^3 - 2x$, calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 2. \quad (3.172)$$

então

$$f''(x) = 6x \quad (3.173)$$

e, finalmente,

$$f'''(x) = 6. \quad (3.174)$$

Com o **Sympy**, podemos computar esta derivada com o seguinte comando:

`diff(x**3-2*x,x,3)`

b) A milionésima primeira derivada de $f(x) = e^x$ é $f^{(1001)}(x) = e^x$. Verifique!

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

3.4 Taxa de variação

Observamos que a razão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.175)$$

pode ser entendida como a **taxa de variação média** de f no intervalo de x_0 a $x_0 + h$, $h \neq 0$. Tomando o limite de $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad (3.176)$$

temos a **taxa de variação instantânea** de f em relação a x no ponto x_0 , i.e. a taxa com que f varia no ponto $x = x_0$.

Exemplo 3.4.1. (Taxa de variação) Suponhamos que o número de litros de água em um tanque, t minutos depois de iniciar seu esvaziamento, é dado por $V = 2000(40 - t)^2$. Deste modelo, podemos tirar várias conclusões.

a) A taxa média do volume de água no tanque nos primeiros 10 minutos é:

$$\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = \frac{V(0 + 10) - V(0)}{10} \quad (3.177)$$

$$= \frac{2000 \cdot 30^2 - 2000 \cdot 40^2}{10} \quad (3.178)$$

$$= 200(900 - 1600) = 100\,000 \text{ L/min.} \quad (3.179)$$

- b) Podemos obter a taxa instantânea do volume de água no tanque em $t = 10$ minutos. Para tanto, calculamos a derivada

$$V'(t) = -160\,000 + 4000t. \quad (3.180)$$

Assim, temos que a taxa de variação instantânea do volume de água no tanque em $t = 10$ minutos é:

$$V'(10) = 160\,000 + 40\,000 = 120\,000 \text{ L/min.} \quad (3.181)$$

Exemplo 3.4.2. (Movimento de uma partícula) Consideremos que, no instante $t \geq 0$ segundos (s), a posição (em metros, m) de uma partícula sobre o eixo s é modelada por $s = t^2 - 3t$. Vejamos, então, as seguintes conclusões.

- a) A **velocidade** é, por definição, a derivada da função posição em relação ao tempo (taxa de variação da posição em relação ao tempo). Desta forma, temos que a velocidade da partícula no instante t é

$$v(t) := \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 3t) = 2t - 3 \text{ m/s.} \quad (3.182)$$

- b) A **aceleração** é, por definição, a derivada da função velocidade em relação ao tempo⁹. Desta forma, temos que a aceleração da partícula no instante t é

$$a(t) := \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 3) = 2 \text{ m/s}^2. \quad (3.183)$$

Exemplo 3.4.3. O volume de um balão esférico é dado em função de seu raio por $V = \frac{4\pi}{3}r^3$. Então, podemos concluir que:

- a) A taxa de variação do volume do balão em relação ao raio quando $r = 1$ é

$$V'(1) = \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=1} \quad (3.184)$$

$$= \left. \frac{4\pi}{3}r^2 \right|_{r=1} = \frac{4\pi}{3}. \quad (3.185)$$

- b) A taxa de variação calculada no item a), significa que, quando $r = 1$, o volume do balão está aumentando $4\pi/3$ unidades por unidade do raio. Assim, aproximadamente, se o raio aumentar de 1 para 1,1, o volume do balão aumentará $V'(1)(1,1 - 1) = 0,4\pi/3$. Observamos que, fazendo o cálculo exato, temos que o aumento do volume é de $0,44\pi/3$.

⁹A aceleração é a segunda derivada da função velocidade em relação ao tempo.

Exercícios

Em construção ...

3.5 Derivadas de funções trigonométricas

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

3.6 Regra da cadeia

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

3.7 Diferenciabilidade da função inversa

Seja f uma função diferenciável e injetora em um intervalo aberto I . Então, pode-se mostrar que sua inversa f^{-1} é diferenciável em qualquer ponto da imagem da f no qual $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e sua derivada é

$$\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3.186)$$

Exemplo 3.7.1. Seja $f(x) = 2x^3 - 1$. Para calcular sua inversa, fazemos

$$y = 2x^3 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x^3 \quad (3.187)$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{y + 1}{2} \quad (3.188)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y + 1}{2}}. \quad (3.189)$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 1}{2}}. \quad (3.190)$$

Calculando a derivada de f^{-1} diretamente, temos

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{6 \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{4}}}, \quad (3.191)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{6 \sqrt[3]{(x+1)^2}}. \quad (3.192)$$

Agora, usando (3.186) e observando que $f'(x) = 6x^2$, obtemos

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (3.193)$$

$$= \frac{1}{6 \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \right)^2}, \quad = \frac{\sqrt[3]{4}}{6 \sqrt[3]{(x+1)^2}}, \quad (3.194)$$

como esperado.

Exemplo 3.7.2. (Derivada da função logarítmica)

- Tomando $f(x) = e^x$ temos $f^{-1}(x) = \ln x$ e, daí por (3.186)

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (3.195)$$

- Tomando $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f^{-1}(x) = \log_a x$ e, por (3.186),

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3.196)$$

Exemplo 3.7.3. (Derivada de funções potência) Em seções anteriores, já vimos que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad (3.197)$$

para qualquer $n \neq 0$ racional. Também, se $r \neq 0$ é um número real, temos

$$y = x^r \Rightarrow \ln y = \ln x^r = r \ln x. \quad (3.198)$$

Daí, derivando ambos os lados desta última equação, obtemos

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} r \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} \quad (3.199)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{r}{x} y \quad (3.200)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}. \quad (3.201)$$

3.7.1 Derivadas de funções trigonométricas inversas

Seja $f(x) = \sin x$ restrita a $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Sua inversa é a função arco seno, denotada por

$$y = \arcsin x. \quad (3.202)$$

Para calcular a derivada da função arco seno, vamos usar (3.186), donde

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}. \quad (3.203)$$

Como $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ (veja Figura 3.7, concluimos

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3.204)$$

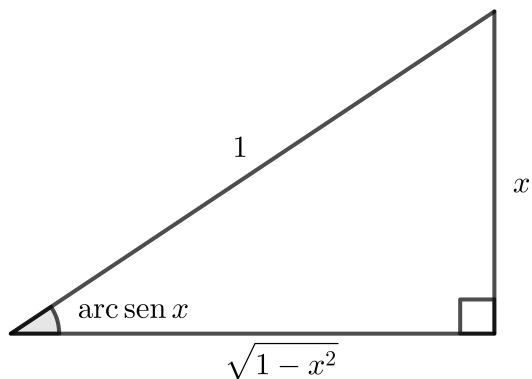


Figura 3.7: Arco seno de um ângulo no triângulo retângulo.

Exemplo 3.7.4.

$$\frac{d}{dx} \arcsen x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.205)$$

Com argumentos análogos aos usados no cálculo da derivada da função arco seno, podemos obter as seguintes derivadas:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.206)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.207)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (3.208)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.209)$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (3.210)$$

Exercícios

Em construção ...

3.8 Derivação implícita

Seja $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$g(y(x)) = 0. \quad (3.211)$$

A derivada dy/dx pode ser calculada via regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}g(y(x)) = \frac{d0}{dx} \Rightarrow g'(y(x))\frac{dy}{dx} = 0. \quad (3.212)$$

Exemplo 3.8.1. Considere a equação da circunferência unitária

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.213)$$

Para calcularmos dy/dx , fazemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d0}{dx} \Rightarrow 2x + \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (3.214)$$

$$\Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.215)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (3.216)$$

Em construção ...

Exercícios

Capítulo 4

Aplicações da derivada

Observação 4.0.1. Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

4.1 Extremos de funções

Seja f uma função com domínio D . Dizemos que f tem valor **máximo absoluto** no ponto $x = a$ quando

$$f(x) < f(a), \quad (4.1)$$

para todo $x \in D$. Analogamente, dizemos que f tem valor **mínimo absoluto** no ponto $x = b$ quando

$$f(x) > f(b), \quad (4.2)$$

para todo $x \in D$. Em tais pontos, dizemos que a função têm seus valores **extremos absolutos**.

Exemplo 4.1.1. A função $f(x) = x^2$ tem valor mínimo absoluto no ponto $x = 0$ e não assume valor máximo absoluto. A função $g(x) = -x^2$ tem valor máximo absoluto no ponto $x = 0$ e não assume valor mínimo absoluto. A função $h(x) = x^3$ não assume valores mínimo e máximo absolutos. Veja a Figura 4.1.

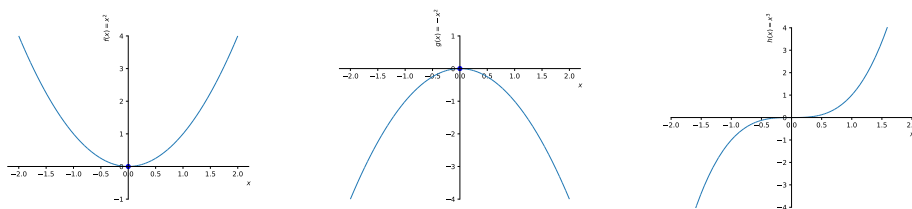


Figura 4.1: Esboço das funções discutidas no Exemplo 4.1.1.

Teorema 4.1.1. (Teorema do valor extremo) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo como um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

Exemplo 4.1.2. Vejamos os seguintes casos:

- a) A função $f(x) = (x-1)^2 + 1$ é contínua no intervalo fechado $[0, \frac{3}{2}]$. Assume valor mínimo absoluto de 1 no ponto $x = 1$. Ainda, assume valor máximo absoluto igual a 2 no ponto $x = 0$. Veja Figura 4.2.

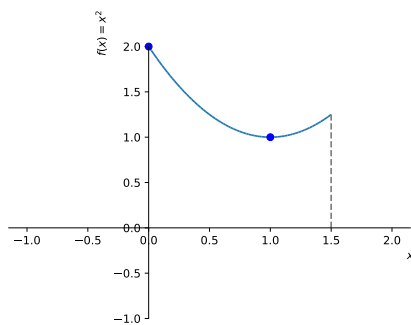


Figura 4.2: Esboço do gráfico de $f(x) = (x-1)^2 + 1$ no intervalo $[0, \frac{3}{2}]$. Veja o Exemplo 4.1.2 a).

- b) A função $g(x) = \ln x$ é contínua no intervalo $(0, e]$. Neste intervalo, assume valor máximo absoluto no ponto $x = e$, mas não assume valor mínimo absoluto. Veja Figura 4.3.

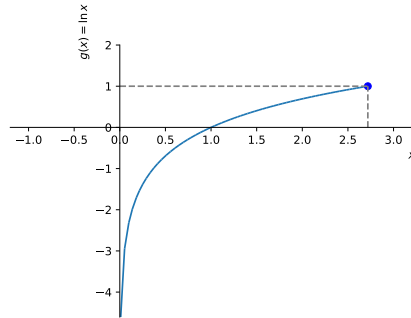


Figura 4.3: Esboço do gráfico de $g(x) = \ln x$ no intervalo $(0, e]$. Veja o Exemplo 4.1.2 b).

c) A função

$$h(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

definida no intervalo $[0, 1]$ é descontínua no ponto $x = 1$. Neste intervalo, assume valor mínimo absoluto no ponto $x = 0$, mas não assume valor máximo absoluto. Veja a Figura 4.4.

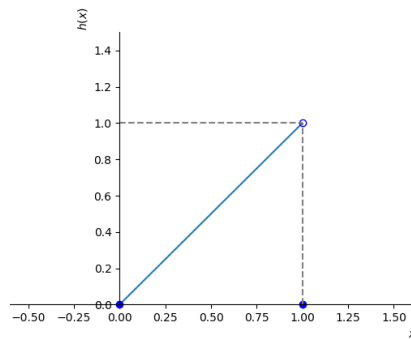


Figura 4.4: Esboço do gráfico de $h(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Veja o Exemplo 4.1.2 c).

Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior $x = a$ de seu domínio, se $f(x) \leq f(a)$ para qualquer x em um intervalo aberto que

contenha o ponto a . Analogamente, f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior $x = b$ de seu domínio, se $f(x) \geq f(b)$ para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto b . Em tais pontos, dizemos que a função têm valores **extremos locais** (ou relativos).

Exemplo 4.1.3. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2 & , -2 \leq x < \frac{1}{2}, \\ |x| & , \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ (x-2)^3 + 2 & , 1 \leq x < 3. \end{cases} \quad (4.4)$$

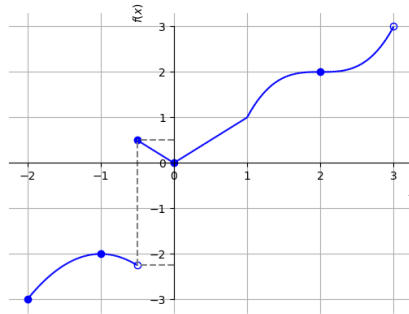


Figura 4.5: Esboço do gráfico de $f(x)$ discutida no Exemplo 4.1.3.

Na Figura 4.5 temos o esboço de seu gráfico. Por inferência, temos que f tem um valor máximo local no ponto $x = -1$ e tem um valor mínimo local no ponto $x = 0$. Observamos que $x = -2$, $x = -1/2$, $x = 2$ e $x = 3$ não são pontos de extremos locais desta função. No ponto $x = -2$, f tem seu valor mínimo absoluto. Ainda, f não tem valor máximo absoluto.

Teorema 4.1.2. (Teorema da derivada para pontos extremos locais.) Se f possui um valor extremo local em um ponto $x = a$ e f é diferenciável neste ponto, então

$$f'(a) = 0. \quad (4.5)$$

Deste teorema, podemos concluir que uma função f pode ter valores extremos em:

1. pontos interiores de seu domínio onde $f' = 0$,

2. pontos interiores de seu domínio onde f' não existe, ou
3. pontos extremos de seu domínio.

Um ponto interior do domínio de uma função f onde $f' = 0$ ou não existe, é chamado de **ponto crítico** da função. Desta forma, afirmamos que f pode ter valores extremos em pontos críticos ou nos extremos de seu domínio.

Exemplo 4.1.4. Consideramos a função $f(x)$ discutida no Exemplo 4.1.3. No ponto $x = -1$, $f'(-1) = 0$ e f tem valor máximo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = 2$, também temos $f'(2) = 0$, mas f não tem valor extremo neste ponto.

No ponto $x = 0$, $f'(0)$ não existe e f tem valor mínimo local neste ponto. Entretanto, no ponto $x = -\frac{1}{2}$, $f'(-\frac{1}{2})$ não existe e f não tem extremo local neste ponto.

Nos extremos do domínio, temos que f tem valor mínimo absoluto no ponto $x = -2$, mas não tem extremo absoluto no ponto $x = 3$.

4.1.1 Exercícios resolvidos

ER 4.1.1. Determine os pontos extremos da função $f(x) = (x+1)^2 - 1$ no intervalo $[-2,1]$.

Solução. Os valores extremos de uma função podem ocorrer, somente, em seus pontos críticos ou nos extremos de seu domínio. Como $f(x) = (x+1)^2 - 1$ é diferenciável no intervalo $(-2,1)$, seus pontos críticos são pontos tais que $f' = 0$. Para identificá-los, calculamos

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1) = 0 \tag{4.6}$$

$$\Rightarrow x = -1. \tag{4.7}$$

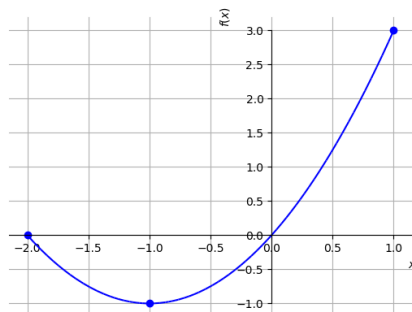


Figura 4.6: Esboço do gráfico da função $f(x) = (x + 1)^2 - 1$ discutida no Exercício Resolvido 4.1.1.

Desta forma, f pode ter valores extremos nos pontos $x = -2$, $x = -1$ e $x = 1$. Analisamos, então, o esboço do gráfico da função (Figura 4.7) e a seguinte tabela:

x	-2	-1	1
$f(x)$	0	-1	3

Daí, podemos concluir que f tem o valor mínimo absoluto (e local) de $f(-1) = -1$ no ponto $x = -1$ e tem valor máximo absoluto de $f(1) = 3$ no ponto $x = 1$.

Podemos usar o **Sympy** para computar os pontos extremos e plotar a função. Por exemplo, com os seguintes comandos:

```
# f(x)
f = lambda x: (x+1)**2-1
# f'(x)
f1 = lambda x: diff(f(x),x)
# f'(x)=0
solve(f1(x),x)
# valores nos extremos e no pto crítico
f(-2), f(-1), f(1)
# esboço do gráfico
plot((x+1)**2-1,(x,-2,1),show=True)
```

◇

ER 4.1.2. Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1,1]$.

Solução. Como f é diferenciável no intervalo $(-1,1)$, temos que seus pontos críticos são tais que $f'(x) = 0$. Neste caso, temos

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (4.8)$$

é o único ponto crítico de f . Entretanto, analisando o gráfico desta função (Figura ??) vemos f não tem valor extremo local neste ponto. Assim, os pontos extremos da f só podem ocorrer nos extremos do domínio $[-1,1]$. Concluimos que $f(-1) = -1$ é o valor mínimo absoluto de f e $f(1) = 1$ é seu valor máximo absoluto.

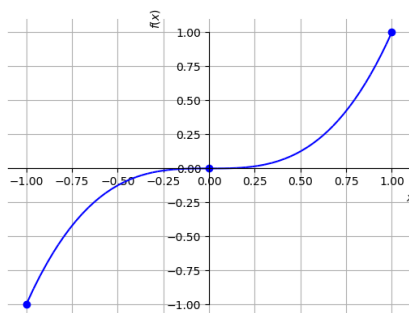


Figura 4.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3$ discutida no Exercício Resolvido 4.1.2.

◇

4.1.2 Exercícios

Exemplo 4.1.5. Determine os pontos extremos da função $f(x) = x^{1/3}$ no intervalo $[-1,1]$.

Em construção ...

4.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma aplicação do teorema de Rolle.

4.2.1 Teorema de Rolle

O teorema de Rolle fornece uma condição suficiente para que uma dada função diferenciável tenha derivada nula em pelo menos um ponto.

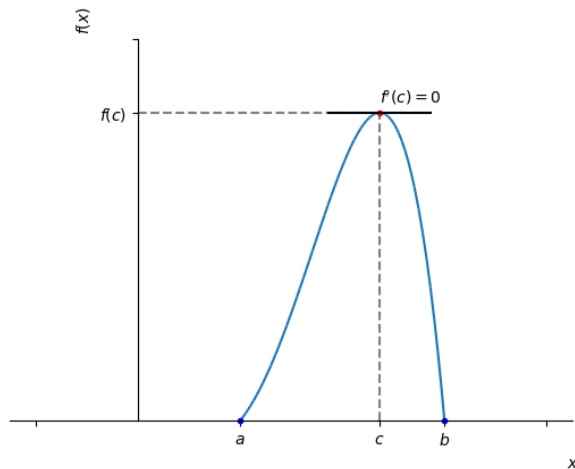


Figura 4.8: Ilustração do teorema de Rolle.

Teorema 4.2.1. (Teorema de Rolle) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se

$$f(a) = f(b), \quad (4.9)$$

então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0. \quad (4.10)$$

Exemplo 4.2.1. Vejamos os seguintes casos:

- a) O polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ tem pelo menos um ponto crítico no intervalo $(0,1)$ e no intervalo $(1,3)$. De fato,

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \quad (4.11)$$

$$= x(x^2 - 4x + 3) \quad (4.12)$$

$$= x(x-1)(x-3). \quad (4.13)$$

Logo, temos $p(0) = p(1) = 0$ e, pelo teorema de Rolle, segue que existe pelo menos um ponto $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Analogamente, como $p(1) = p(3) = 0$, segue do teorema que existe pelo menos um ponto crítico no intervalo $(1,3)$.

A função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , x = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

é tal que $f(0) = f(1) = 0$, entretanto sua derivada $f'(x) = 1$ no intervalo $(0,1)$. Ou seja, a condição da f ser contínua no intervalo fechado associado é necessária no teorema de Rolle.

Não existe ponto tal que a derivada da $g(x) = -|x-1| + 1$ seja nulo. Entretanto, notemos que $g(0) = g(2) = 0$ e g contínua no intervalo fechado $[0,2]$. O teorema de Rolle não se aplica neste caso, pois g não é diferenciável no intervalo $(0,2)$, mais especificamente, no ponto $x = 1$.

4.2.2 Teorema do valor médio

O teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle.

Teorema 4.2.2. (Teorema do valor médio) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.15)$$

Exemplo 4.2.2. A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[0,2]$ e diferenciável no intervalo $(0,2)$. Logo, segue do teorema do valor médio que existe pelo menos um ponto $c \in (0,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2. \quad (4.16)$$

De fato, $f'(x) = 2x$ e, portanto, tomando $c = 1$, temos $f'(c) = 2$.

Corolário 4.2.1. (Funções com derivadas nulas são constantes) Se $f'(x) = 0$ para todos os pontos em um intervalo (a, b) , então f é constante neste intervalo.

Demonstração. De fato, sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ e, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2$. Então, temos f é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) . Segue do teorema do valor médio que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (4.17)$$

Como $f'(c) = 0$, temos $f(x_2) = f(x_1)$. Ou seja, a função vale sempre o mesmo valor para quaisquer dois pontos no intervalo (a, b) , logo é constante neste intervalo. \square

Corolário 4.2.2. (Função com a mesma derivada diferem por uma constante) Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os pontos em um intervalo aberto (a, b) , então $f(x) = g(x) + C$, C constante, para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração. Segue, imediatamente, da aplicação do corolário anterior à função $h(x) = f(x) - g(x)$. \square

Corolário 4.2.3. (Monotonicidade e o sinal da derivada) Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Exercícios resolvidos

ER 4.2.1. Um carro percorreu 150 km em 1h30min. Mostre que em algum momento o carro estava a uma velocidade maior que 80 km/h.

Solução. Seja $s = s(t)$ a função distância percorrida pelo carro e t o tempo, em horas, contado do início do percurso. Do teorema do valor médio, existe tempo $t_1 \in (0, 1,5)$ tal que

$$f'(t_1) = \frac{s(1,5) - s(0)}{1,5 - 0} = \frac{150}{1,5} = 100 \text{ km/h}. \quad (4.18)$$

Ou seja, em algum momento o carro atingiu a velocidade de 100 km/h.

\diamond

Em construção ...

Exercícios

E 4.2.1. Demonstre que um polinômio cúbico pode ter no máximo 3 raízes reais.

4.3 Teste da primeira derivada

Na Seção , vimos que os extremos de uma função ocorrem nos extremos de seu domínio ou em um ponto crítico. Aliado a isso, o Corolário 4.2.3 nos fornece condições suficientes para classificar os pontos críticos como extremos locais.

Mais precisamente, seja c um ponto crítico de uma função contínua f e diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto (a,b) contendo c , exceto possivelmente no ponto c . Movendo-se no sentido positivo em x :

- se f' muda de negativa para positiva em c , então f possui um mínimo local em c ;
- se f' muda de positiva para negativa em c , então f possui um máximo local em c ;
- se f' não muda de sinal em c , então c não é um extremo local de f .

Exemplo 4.3.1. Consideremos a função $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Como f é diferenciável em toda parte, seus pontos críticos são aqueles tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.19)$$

Temos $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Segue, que os pontos críticos são

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad (4.20)$$

Com isso, temos

Intervalos	$x < \frac{2-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{7}}{3} < x$
f'	+	-	+
f	crescente	decrecente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ é ponto de máximo local e que $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ é ponto de mínimo local.

Podemos usar o **Sympy** para computarmos a derivada de f com o comando

```
f1 = diff((x - 2)*(x - 1)*(x + 1))
```

Então, podemos resolver $f'(x) = 0$ com o comando

```
solve(f1)
```

e, por fim, podemos fazer o estudo de sinal da f' com os comandos

```
reduce_inequalities(f1<0)
```

```
reduce_inequalities(f1>0)
```

Exercícios resolvidos

ER 4.3.1. Determine e classifique os extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2. \quad (4.21)$$

Solução. Como o domínio da f é $(-\infty, \infty)$ e f é diferenciável em toda parte, temos que seus extremos ocorrem em pontos críticos tais que

$$f'(x) = 0. \quad (4.22)$$

Resolvendo, obtemos

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (4.23)$$

Logo,

$$4x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.24)$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}. \quad (4.25)$$

Portanto, os pontos críticos são $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ e $x_3 = -1$. Fazendo o estudo de sinal da f' , temos

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x$
$4x$	-	+	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+
f	decrecente	crescente	decrecente	crescente

Então, do teste da primeira derivada, concluímos que $x_1 = 0$ é ponto de mínimo local, $x_2 = -2$ é ponto de máximo local e $x_3 = -1$ é ponto de máximo local.

◇

Exercícios

Capítulo 5

Integração

Observação 5.0.1. Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

5.1 Integrais indefinidas

Seja $f(x)$ uma função. Dizemos que $F(x)$ é uma **primitiva** de $f(x)$ quando

$$F'(x) = f(x) \quad (5.1)$$

para todo x no domínio da f .

Exemplo 5.1.1. Seja $f(x) = 2x$. Notemos que $F(x) = x^2$ é uma primitiva de f , pois

$$F'(x) = 2x = f(x). \quad (5.2)$$

Também, se C é uma constante qualquer, $F(x) = x^2 + C$ é primitiva de $f(x)$. De fato, lembrando que a derivada de uma constante é zero, temos

$$F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x). \quad (5.3)$$

Observação 5.1.1. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + C$, com C constante, também é primitiva de $f(x)$.

A **integral indefinida** de uma função $f(x)$ é denotada por

$$\int f(x) dx \quad (5.4)$$

e é definida por

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.5)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Exemplo 5.1.2. Do observado no exemplo anterior (Exemplo 5.1.1), temos

$$\int 2x dx = x^2 + C. \quad (5.6)$$

Com o `Sympy`, podemos computar a integral indefinida acima com o comando¹:

```
integrate(2*x)
```

Observe que o `Sympy` não adiciona a constante indeterminada.

5.1.1 Regras básicas de integração

Das regras básicas de derivação, podemos inferir as seguintes regras para integração:

- $\int 0 dx = C.$
- $\int 1 dx = x + C.$
- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \neq 0$ constante.
- $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

¹Veja a Observação 5.0.1.

Exemplo 5.1.3.

$$\int x - 3x^2 dx = \int x dx - \int 3x^2 dx \quad (5.7)$$

$$= \int \frac{2}{2} x dx - x^3 + C \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int 2x dx - x^3 + C \quad (5.9)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x^3 + C. \quad (5.10)$$

No exemplo anterior (Exemplo 5.1.3) integramos funções potências. Da regra de derivação

$$[x^n]' = nx^{n-1}, \quad n \neq 0, \quad (5.11)$$

temos

$$\int x^n dx = \int \frac{n+1}{n+1} x^n dx, \quad n \neq -1, \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx, \quad (5.13)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (5.14)$$

Ou seja, obtemos a seguinte regra de integração para função potência

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1. \quad (5.15)$$

Exemplo 5.1.4.

$$\int 3x^{-2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = -\frac{3}{x} + C. \quad (5.16)$$

Das regras de derivação para a função exponencial natural e logaritmo natural, temos

- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$

Também, como $(a^x)' = a^x \ln a$, temos

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (5.17)$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

5.1.2 Exercícios

Em construção ...

5.2 Integração por substituição

Seja $u = u(x)$. Usando de diferenciais, temos $du = u'(x)dx$. Logo,

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.18)$$

Esta é chamada de regra de integração por substituição.

Exemplo 5.2.1. Consideremos

$$\int (2x + 1)^2 dx. \quad (5.19)$$

Substituindo

$$u = 2x + 1 \quad (5.20)$$

temos

$$du = 2dx. \quad (5.21)$$

Portanto,

$$\int (x + 1)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{2} \quad (5.22)$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du \quad (5.23)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{2+1}}{2+1} + C \quad (5.24)$$

$$= \frac{u^3}{6} + C \quad (5.25)$$

$$= \frac{1}{6}(2x + 1)^3 + C. \quad (5.26)$$

Exercícios resolvidos

ER 5.2.1. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.27)$$

Solução. Usamos a regra de integração por substituição

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.28)$$

Escolhemos

$$u = x - 1, \quad (5.29)$$

e calculamos

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx. \quad (5.30)$$

Então, da fórmula, obtemos

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{7}{u^2} du \quad (5.31)$$

$$= 7 \int u^{-2} du \quad (5.32)$$

$$= 7 \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \quad (5.33)$$

$$= -\frac{7}{u} \quad (5.34)$$

$$= \frac{7}{1-x}. \quad (5.35)$$

◇

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

5.3 Integração por partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}. \quad (5.36)$$

Integrando em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \frac{du}{dx} v dx + \int u \frac{dv}{dx} dx, \quad (5.37)$$

donde

$$uv = \int v du + \int u dv. \quad (5.38)$$

Daí, segue a **fórmula de integração por partes**

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.39)$$

Exemplo 5.3.1. Consideremos $\int x e^x dx$. Tomando

$$u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx, \quad (5.40)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x. \quad (5.41)$$

Então, da fórmula de integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = \int u dv = uv - \int v du \quad (5.42)$$

$$= x e^x - \int e^x dx \quad (5.43)$$

$$= x e^x - e^x + C. \quad (5.44)$$

Exercícios resolvidos

ER 5.3.1. Calcule

$$\int x \ln x dx. \quad (5.45)$$

Solução. Usamos a fórmula de integração por partes

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.46)$$

Para tanto, escolhemos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad (5.47)$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C. \quad (5.48)$$

Tomando $C = 0$, e usando a fórmula, obtemos

$$\int x \ln x dx = \int u dv \quad (5.49)$$

$$= uv - \int v du \quad (5.50)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \quad (5.51)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \quad (5.52)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \quad (5.53)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad (5.54)$$

Podemos computar esta integral, usando o seguinte comando do **Sympy**²:

```
integrate(x*log(x),x)
```

◇

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

5.4 Integral definida

Em construção ...

²Veja a Observação [5.0.1](#).

5.4.1 Teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre a integral definida de uma função e suas primitivas.

Teorema 5.4.1. (Teorema fundamental do cálculo) Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.55)$$

Observação 5.4.1. Uma outra forma do teorema fundamental do cálculo é a seguinte: se f é contínua em $[a, b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (5.56)$$

é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e sua derivada é

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (5.57)$$

5.4.2 Substituição em integrais definidas

Em algumas situações, faz-se necessário a aplicação da técnica de integração por substituição para integrais definidas. Neste contexto, sejam f e u funções dadas e F uma primitiva de f . Então,

$$[F(u)]' = F'(u)u' = f(u)u'. \quad (5.58)$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = F(u(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \quad (5.59)$$

$$= F(u)\Big|_{u=u(a)}^{u=u(b)} \quad (5.60)$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.61)$$

Resumidamente, temos que a **regra da substituição em integrais definidas**, lê-se

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.62)$$

5.4.3 Integração por partes para integrais definidas

Podemos aplicar a fórmula de integração por partes para integrais definidas. Neste caso, temos

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx. \quad (5.63)$$

Exercícios resolvidos

ER 5.4.1. Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.64)$$

Solução. Vejamos as seguintes formas de calcular esta integral definida.

- Solução 1: aplicando a regra de substituição em integrais definidas.

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \quad (5.65)$$

Escolhendo, $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x dx$. Daí, segue

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.66)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} du \quad (5.67)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{u=1}^0 \quad (5.68)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \Big|_{u=1}^0 \quad (5.69)$$

$$= \frac{1}{3}. \quad (5.70)$$

- Solução 2: calculando uma primitiva em função de x . Para obtermos uma primitiva em função de x , calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx. \quad (5.71)$$

Como anteriormente, usamos a regra de substituição. Escolhendo $u = 1 - x^2$, temos $du = -2x \, dx$ e, portanto

$$\int x\sqrt{1-x^2} \, dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} \quad (5.72)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du \quad (5.73)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (5.74)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} \quad (5.75)$$

$$= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \quad (5.76)$$

Então, do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (5.77)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do Sympy:

```
integrate(x*sqrt(1-x**2),(x,0,1))
```

◇

ER 5.4.2. Calcule

$$\int_{-1}^1 x e^x \, dx. \quad (5.78)$$

Solução. Vamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx. \quad (5.79)$$

Para tanto, escolhemos $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, donde

$$f'(x) = 1, \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x) \, dx = \int e^x \, dx = e^x + C. \quad (5.80)$$

Escolhendo $C = 0$ e usando a fórmula, temos

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = \int_{-1}^1 f(x) g'(x) dx \quad (5.81)$$

$$= f(x) g(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(x) f'(x) dx \quad (5.82)$$

$$= x e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \quad (5.83)$$

$$= e + e^{-1} - [e^x]_{-1}^1 \quad (5.84)$$

$$= e + e^{-1} - (e - e^{-1}) \quad (5.85)$$

$$= 2e^{-1}. \quad (5.86)$$

Para computarmos esta integral definida, podemos usar o seguinte comando do Sympy:

```
integrate(x*exp(x),(x,-1,1))
```

◇

Em construção ...

Exercícios

E 5.4.1. Calcule

$$\int \frac{7}{(x-1)^2} dx. \quad (5.87)$$

E 5.4.2. Calcule

$$\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx. \quad (5.88)$$

E 5.4.3. Calcule

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1} dx. \quad (5.89)$$

E 5.4.4. Calcule

$$\int_{-1}^1 x^2 e^x dx. \quad (5.90)$$

Capítulo 6

Aplicações da integral

Observação 6.0.1. Nos códigos Python apresentados neste capítulo, assumimos o seguinte preâmbulo:

```
from sympy import *  
var('x',real=True)
```

6.1 Cálculo de áreas

A integral definida $\int_a^b f(x) dx$ está associada a área entre o gráfico da função f e o eixo das abscissas no intervalo $[a, b]$. Ocorre que se f for não negativa, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Se f for negativa, então $\int_a^b f(x) dx < 0$. Por isso, dizemos que $\int_a^b f(x) dx$ é a área líquida (ou com sinal) entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

Em construção ...

6.1.1 Áreas entre curvas

Observamos que se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx \tag{6.1}$$

corresponde à área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ restritas ao intervalo $[a, b]$.

Em construção ...

Exercícios resolvidos

ER 6.1.1. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3 - x$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1, 1]$.

Solução. Para calcularmos a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas no intervalo $[-1, 1]$, fazemos:

1. O estudo de sinal de f no intervalo $[-1, 1]$.

(a) Cálculo das raízes de f no intervalo $[-1, 1]$.

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad (6.2)$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1. \quad (6.4)$$

(b) Os sinais de $f(x)$.

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (6.5)$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0. \quad (6.6)$$

2. Cálculo da área usando integrais definidas.

(a) Cálculo da integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int x^3 - x dx \quad (6.7)$$

$$= \int x^3 dx - \int x dx \quad (6.8)$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C. \quad (6.9)$$

(b) Cálculo da área.

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \quad (6.10)$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \quad (6.11)$$

$$= \frac{1}{2}. \quad (6.12)$$

Podemos computar a solução deste exercício usando os seguintes comandos do Sympy¹. Para o estudo de sinal, podemos utilizar

```
f = lambda x: x*(x-1)*(x+1)
reduce_inequalities(f(x)>=0)
```

Então, para o cálculo da área, podemos utilizar

```
integrate(f(x),(x,-1,0))-integrate(f(x),(x,0,1))
```

◇

ER 6.1.2. Calcule a área entre a reta $y = 1$ e o gráfico de $f(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$.

Solução. Observamos que a medida desta área corresponde à área do quadrado $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$ descontada a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ restrita ao intervalo $[0,1]$. Isto é,

$$A = 1 - \int_0^1 x^2 dx \quad (6.13)$$

$$= 1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad (6.14)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (6.15)$$

◇

ER 6.1.3. Calcule a área entre as curvas $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$.

Solução. O problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ restritas ao intervalo $[0,1]$. Como $f(x) \geq g(x)$ neste intervalo, temos

$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) dx \quad (6.16)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx \quad (6.17)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{6}. \quad (6.19)$$

¹Veja Observação 6.0.1.



Em construção ...

Exercícios

E 6.1.1. Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e a reta $y = 1$ restritas ao intervalo $[-1, 1]$.

E 6.1.2. Calcule a área entre as curvas $y = x$, $y = x^2$, $x = 0$ e $x = 2$.

Em construção ...

6.2 Volumes por fatiamento e rotação

Em construção ...

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, \infty)$; Imagem: $(-\infty, \infty)$

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, \infty)$; Imagem: $[1, \infty)$.

E 1.1.0. Domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; Imagem: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

E 1.2.0. $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$

E 1.2.0. não há.

E 1.3.1. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.3.2. a) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$. b) domínio: $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$; imagem: $(0, \infty)$. Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.3.3. a) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $[0, \infty)$. b) domínio: $(-\infty, \infty)$; imagem: $(-\infty, \infty)$. Dica: use o [SymPy Gamma](#) para verificar os esboços de seus gráficos.

E 1.4.1. $-1, 0, 2$

E 1.4.2. $9/4$

E 1.5.3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E 1.6.1. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

E 1.6.2. Dica: analise o ciclo trigonométrico.

E 1.7.1. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$; domínio: $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

E 1.7.2. Dica: verifique sua resposta com um pacote de matemática simbólica, por exemplo, com o [SymPy](#).

E 1.8.1. decrescente: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; crescente: $[-1, 1]$.

E 1.8.2. função ímpar

E 1.8.3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$; domínio $[-1, \infty)$

E 1.9.1. Dica: use um pacote de matemática simbólica para verificar sua resposta.

E 1.10.1. Dica: use um pacote computacional de matemática simbólica para verificar o esboço de seu gráfico. Domínio: $(2, \infty)$.

E 1.10.2. 0

E 2.1.1. a) -1 ; b) -1 ; c) 2 ; d) \nexists

E 2.1.3. a) 2 ; b) 2 ; c) -3 ; d) π

E 2.1.4. a) 2 ; b) -2 ; c) -3 ; d) e

E 2.2.1. a) 2 ; b) 2π ; c) $-2e^{\sqrt{2}}$

E 2.2.2. a) $-3/2$; b) $5/2$; c) -3

E 2.2.3. a) -6 ; b) -3 ;

E 2.2.4. a) $2/3$; b) $1/3$;

E 2.2.5. a) 2 ; b) -1 ; c) 1

E 2.2.6. a) 6 ; b) 10 ; c) 12

E 2.2.7. a) $1/2$; b) $-1/3$;

E 2.2.8. a) \nexists ; b) 3;

E 2.2.9. $-1/4$

E 2.3.4. a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) 1; f) \nexists

E 2.3.5. a) 2; b) 2; c) 2

E 2.3.6. a) 2; b) 3; c) \nexists

E 2.3.7. $-\frac{1}{2}$

E 2.3.8. 0; Não está definido, pois o domínio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é $[-1, 1]$.

E 2.4.1. 2

E 2.4.2. a) 1; b) 3; c) -1 ; d) e

E 2.4.3. não existe.

E 2.5.1. ∞

E 2.5.2. $x = 2$; $x = -2$

E 2.5.3. ∞

E 2.5.4. $-\infty$

E 2.6.1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

E 2.6.2. $(1, 2) \cup (3, \infty)$.

E 2.6.3. 0

E 2.7.3. 1

E 2.7.4. 0

E 2.7.5. 0

E 2.7.6. 0

E 2.7.7. $\frac{1}{2}$

E 2.8.1. ∞

E 3.1.1. a) 0; b) 0; c) 0

E 3.1.2. a) -1 ; b) -2 ; c) e

E 3.1.3. a) -1 ; b) -2 ; c) e

E 3.1.4. reta secante: $y = -3x + 7$; reta tangente: $y = -2x + 6$; dica: verifique seus esboços plotando os gráficos no computador

E 3.1.5. a) $1000 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; b) $30 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$; c) $-970 \frac{\text{R\$}}{\text{un}}$.

E 3.2.1. a) 0; b) 0; c) 0

E 3.2.2. a) 2; b) -3 ; c) \sqrt{e}

E 3.2.3. $f'(x) = 2x - 2$

E 3.2.4. $(1, \infty)$

E 4.1.0. $f(-1) = -1$ é o valor mínimo absoluto; $f(1) = 1$ é o valor máximo absoluto.

E 5.4.1. $\frac{7}{2}$

E 5.4.2. 4

E 5.4.3. $\frac{1}{2}$

E 5.4.4. $-\frac{5}{e} + e$

E 6.1.1. 2

E 6.1.2. Observamos o problema é equivalente a calcular a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$ restritas no intervalo $[0, 2]$. Como

$g(x) \geq f(x)$ no intervalo $[0,1]$ e $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[1,2]$, temos

$$A = \int_0^1 g(x) - f(x) dx + \int_1^2 f(x) - g(x) dx \quad (6.20)$$

$$= \int_0^1 x - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x dx \quad (6.21)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \quad (6.22)$$

$$= 1 \quad (6.23)$$

Referências Bibliográficas

- [1] Howard Anton. *Cálculo*, volume 1. Bookman, 10. edition, 2014.
- [2] George Thomas. *Cálculo*, volume 1. Addison- Wesley, 12. edition, 2012.

Índice Remissivo

- base, [47](#)
- domínio, [1](#)
 - natural, [2](#)
- função, [1](#)
 - ímpar, [44](#)
 - afim, [5](#)
 - algébrica, [4](#)
 - cúbica, [20](#)
 - composta, [33](#)
 - constante, [6](#)
 - cossecante, [29](#)
 - cotangente, [29](#)
 - definida por partes, [4](#)
 - exponencial, [47](#)
 - identidade, [44](#)
 - inversa, [45](#)
 - logarítmica, [49](#)
 - par, [44](#)
 - periódica, [28](#)
 - potência, [12](#)
 - quadrática, [20](#)
 - racional, [23](#)
 - secante, [29](#)
 - tangente, [29](#)
 - transcendente, [4](#)
- função polinomial, [19](#)
- gráfico, [3](#)
- grau do polinômio, [19](#)
- imagem, [1](#)
- polinômio, [19](#)
 - quadrático, [20](#)
- polinômio cúbico, [20](#)
- reta
 - identidade, [45](#)