Geometria Analítica

Pedro H A Konzen

21 de outubro de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados tópicos sobre geometria analítica no espaço euclidiano tridimensional. Mais especificamente, discute-se sobre sistemas de coordenadas, estudo de retas, planos e cônicas.

Agradeço a todos e todas que de modo assíduo ou esporádico contribuem com correções, sugestões e críticas. :)

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Sistema de coordenadas

A geometria analítica é uma área interdisciplinar da matemática que faz o estudo de objetos da geometria através de estruturas algébricas (equações e inequações algébricas). Para tanto, o primeiro passo é a construção (definição) de um sistema de coordenadas, no qual os objetos geométricos serão referenciados.

1.1 Sistema de coordenadas no espaço

▶ Vídeo disponível!

Um sistema de coordenadas no espaço (euclidiano) é constituído de um ponto O e uma base de vetores $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado um tal sistema, temos que cada ponto P determina de forma única um vetor $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ e vice-versa. Assim sendo, definimos que o ponto P tem coordenadas (x,y,z). Veja a figura abaixo.

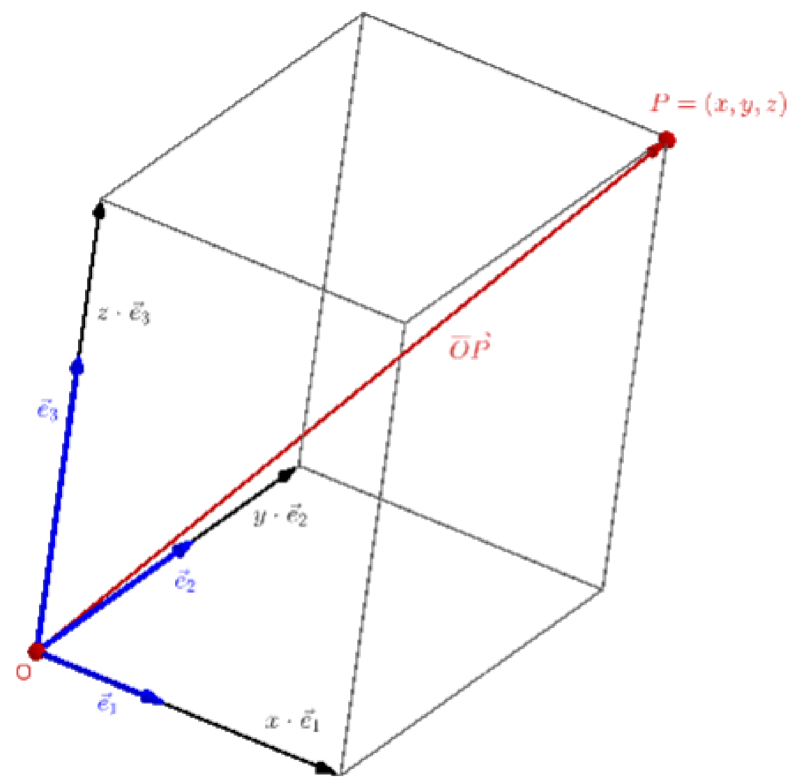

Figura 1.1: Ilustração de um sistema de coordenadas no espaço.

O ponto O é chamado de **origem** (do sistema de coordenadas) e tem coordenadas $O = (0,0,0)$. Dado um ponto $P = (x,y,z)$, chama-se x de sua **abscissa**, y de sua **ordenada** e z de sua **cota**. As retas que passam por O e têm, respectivamente, as mesmas direções de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**. Os planos que contém O e representantes de dois vetores da base B são chamados de **planos coordenados**.

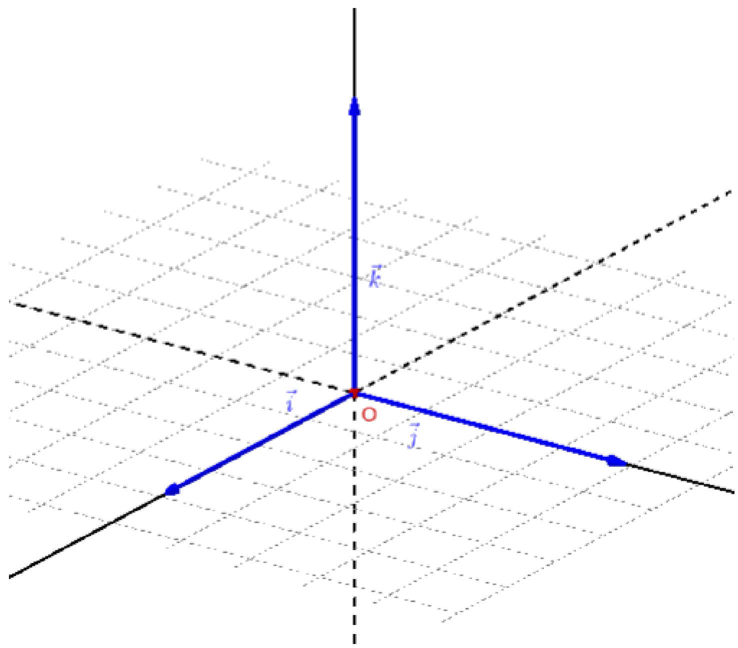

Figura 1.2: Ilustração de um sistema de coordenadas ortonormal.

Salvo explicitado diferente, trabalharemos com um **sistema de coordenadas ortonormal**, i.e. sistema cuja base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ seja ortonormal. Mais ainda, estaremos assumindo que a base é positiva. Veja a Figura 1.2.

Observação 1.1.1. (Relação entre pontos e vetores)(▶ Vídeo disponível!) Seja dado um vetor $\overrightarrow{AB}$. Sabendo as coordenadas dos pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, temos que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} && (1.1)\\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} && (1.2)\\
&= -(x_A,y_A,z_A) + (x_B,y_B,z_B) && (1.3)\\
&= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). && (1.4)
\end{aligned}$$

Em uma linguagem menos formal, podemos dizer que as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ é a resultante das coordenadas do ponto final menos as coordenadas do ponto de partida. Veja a figura abaixo.

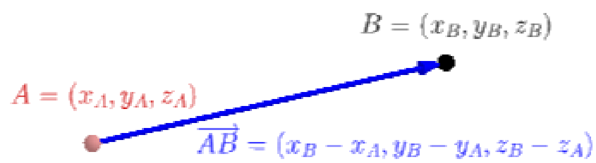

Figura 1.3: Relação entre as coordenadas dos pontos de partida e de chegada de um vetor.

Exemplo 1.1.1. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -1 - 1, 0 - 2) = (4, -2, -2). \tag{1.5}$$

Observação 1.1.2. (Ponto médio de um segmento)(▶ Vídeo disponível!) Dados os pontos $A = (x_A,y_A,z_A)$ e $B = (x_B,y_B,z_B)$, podemos calcular as coordenadas do ponto médio $M = (x_M,y_M,z_M)$ do segmento AB. Veja a figura abaixo.

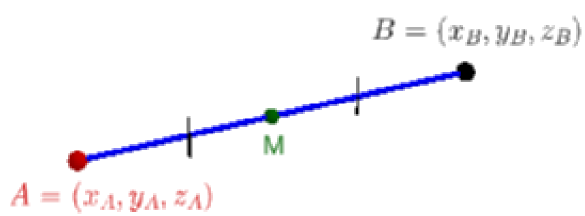

Figura 1.4: Coordenadas do ponto médio de um segmento.

Do fato de que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, temos

$$(x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M), \tag{1.6}$$

Logo, segue que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \tag{1.7}$$
$$y_M - y_A = y_B - y_M \tag{1.8}$$
$$z_M - z_A = z_B - z_M \tag{1.9}$$

ou, equivalentemente,

$$2x_M = x_A + x_B \tag{1.10}$$
$$2y_M = y_A + y_B \tag{1.11}$$
$$2z_M = z_A + z_B \tag{1.12}$$

Portanto, concluímos que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \tag{1.13}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \tag{1.14}$$
$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \tag{1.15}$$

Logo, temos

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) \tag{1.16}$$

Exemplo 1.1.2. Dados os pontos $A = (-1,1,2)$ e $B = (3,-1,0)$, temos que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \tag{1.17}$$
$$= (1,0,1). \tag{1.18}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e $C = (x,2,2)$ vértices consecutivos de um triângulo isósceles, cujos lados AC e BC são congruentes. Determine o valor de x.

Solução. Sendo os lados AC e BC congruentes, temos $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. As coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são

$$\overrightarrow{AC} = (x-(-1),2-2,2-1) = (x+1,0,1) \tag{1.19}$$

e as coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ são

$$\overrightarrow{BC} = (x-1,2-(-2),2-0) = (x-1,4,2). \tag{1.20}$$

Então, temos

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| &\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{(x-1)^2+4^2+2^2} && (1.21)\\
&\Rightarrow (x+1)^2+0^2+1^2 = (x-1)^2+4^2+2^2 && (1.22)\\
&\Rightarrow x^2+2x+1+1 = x^2-2x+1+16+4 && (1.23)\\
&\Rightarrow 4x = 19 && (1.24)\\
&\Rightarrow x = \frac{19}{4}. && (1.25)
\end{aligned}
$$

♢

ER 1.1.2. Sejam $A = (-1,2,1)$, $B = (1,-2,0)$ e M o ponto médio do intervalo AB. Determine as coordenadas do ponto P de forma que $2AP = AM$.

Solução. As coordenadas do ponto médio são

$$
M = \left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+(-2)}{2},\frac{1+0}{2}\right) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right). \tag{1.26}
$$

Agora, denotando $P = (x_P,y_P,z_P)$, temos

$$
2AP = AM \Rightarrow 2(x_P-(-1),y_P-2,z_P-1) = \left(0-(-1),0-2,\frac{1}{2}-1\right) \tag{1.27}
$$

$$
\Rightarrow (2x_p+2,2y_P-4,2z_P-2) = \left(1,-2,-\frac{1}{2}\right). \tag{1.28}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&2x_P+2 = 1 \Rightarrow x_P = -\frac{1}{2} && (1.29)\\
&2y_P-4 = -2 \Rightarrow y_P = 1 && (1.30)\\
&2z_P-2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_P = \frac{3}{4}. && (1.31)
\end{aligned}
$$

Logo, $P = (-1/2,1,3/4)$.

♢

Exercícios

E 1.1.1. Sejam dados os pontos $A = (1,-1,2)$ e $B = (0,1,-2)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

E 1.1.2. Sejam dados os pontos $E = (-1,2,0)$ e $F = (2,-1,1)$. Calcule o ponto médio do segmento EF.

E 1.1.3. Sejam dados os pontos $A = (-1,1,-1)$ e $M = (0,1,3)$. Determine o ponto B tal que M seja o ponto médio do segmento AB.

E 1.1.4. Sejam dados os pontos $A = (1,-1,1)$, $B = (2,1,0)$ e $C = (x,2,1)$. Determine x tal que ABC forme um triângulo retângulo com hipotenusa BC.

E 1.1.5. Determine a distância entre os pontos $C = (2,-1,0)$ e $D = (1,1,1)$.

Capítulo 2

Estudo de retas

Neste capítulo, vamos estudar retas no espaço (euclidiano) tridimensional. Salvo explicitado diferente, iremos trabalhar sobre o sistema de coordenadas canônico, i.e. um sistema de coordenadas ortonormal (veja Seção 1.1).

2.1 Equações da reta

Nesta seção, vamos desenvolver equações para a representação de retas no espaço tridimensional.

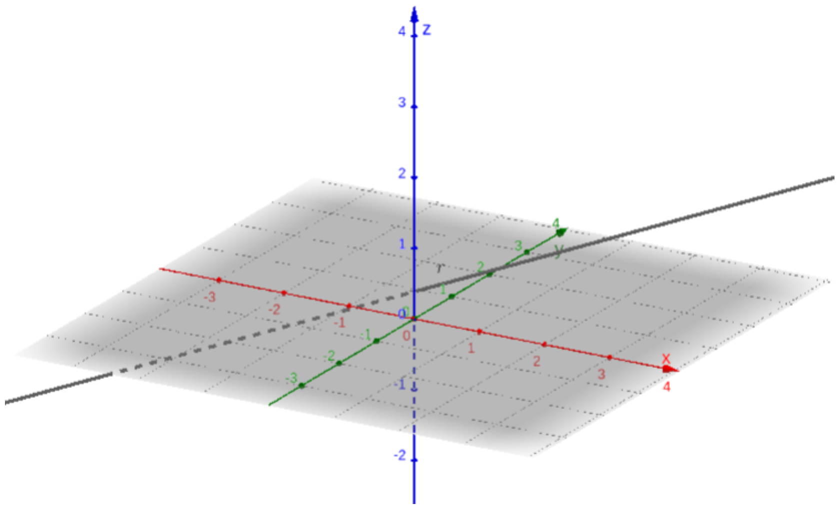

Figura 2.1: Ilustração de uma reta r em um sistema de coordenadas ortonormal.

2.1.1 Equação vetorial de uma reta

Seja r uma reta dada, $\vec{v}$ um vetor paralelo a r e A um ponto de r (veja a Figura 2.2). Assim sendo, $P = (x,y,z)$ é um ponto de r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$. i.e. existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{2.1}$$

Esta é chamada **equação vetorial da reta** r.

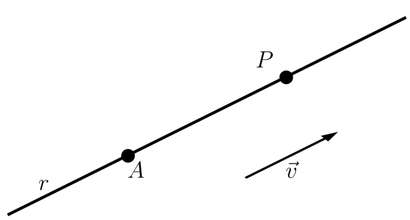

Figura 2.2: Equação vetorial de uma reta.

Observe que para obtermos uma equação vetorial de uma dada reta, podemos escolher qualquer ponto $A \in r$ e qualquer vetor $\vec{v} \parallel r$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. O vetor $\vec{v}$ escolhido é chamado de **vetor diretor**.

Exemplo 2.1.1. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (-1, -1, -2)$ e $B = (2,1,3)$ (veja a Figura 2.3). O vetor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - (-1), 3 - (-2)) = (3,2,5) \tag{2.2}$$

é um vetor diretor de r. Desta forma, uma equação vetorial da reta r é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{2.3}$$

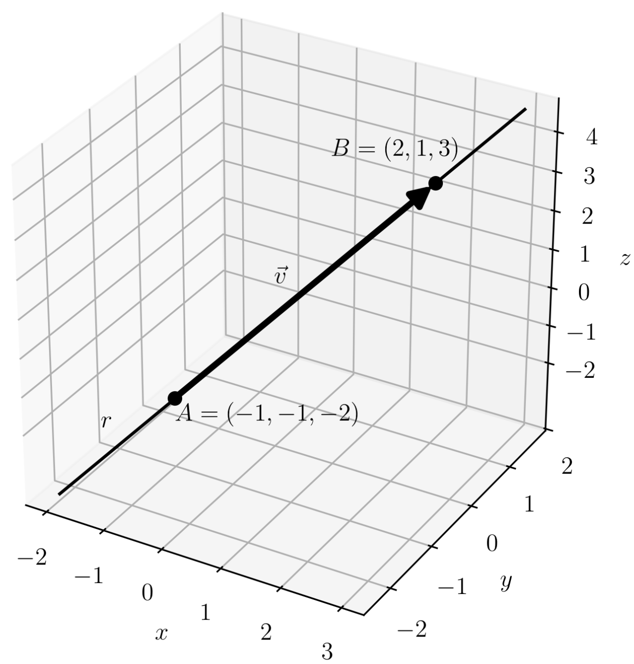

Figura 2.3: Esboço da reta discutida no Exemplo 2.1.1.

2.1.2 Equações paramétricas de uma reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e tenha vetor diretor $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Da equação vetorial, temos que $P = (x,y,z) \in r$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}. \tag{2.4}$$

Equivalentemente,

$$\underbrace{(x - x_A, y - y_A, z - z_A)}_{\overrightarrow{AP}} = \lambda \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{\vec{v}}. \tag{2.5}$$

Então,

$$x - x_A = \lambda v_1, \tag{2.6}$$
$$y - y_A = \lambda v_2, \tag{2.7}$$
$$z - z_A = \lambda v_3, \tag{2.8}$$

donde

$$x = x_A + \lambda v_1, \tag{2.9}$$
$$y = y_A + \lambda v_2, \tag{2.10}$$
$$z = z_A + \lambda v_3, \tag{2.11}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 2.1.2. A reta r discutida no Exemplo 2.1.1 tem equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{2.12}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{2.13}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{2.14}$$

De fato, tomando $\lambda = 0$, temos $(x,y,z) = (-1,-1,-2) = A \in r$. E, tomado $\lambda = 1$, temos $(x,y,z) = (-1+3,-1+2,-2+5) = (2,1,3) = B \in r$. Ou seja, as equações paramétricas acima representam a reta que passa pelos pontos A e B.
Com o `Sympy`, podemos plotar o gráfico de r usando o seguinte código:

```
var('lbda',real=True)
plot3d_parametric_line(-1+3*lbda,-1+2*lbda,-2+5*lbda,(lbda,-1,2))
```

2.1.3 Equações da reta na forma simétrica

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A = (x_A,y_A,z_A)$ e tem $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ como vetor diretor. Então, r tem as equações paramétricas

$$x = x_A + v_1\lambda, \tag{2.15}$$
$$y = y_A + v_2\lambda, \tag{2.16}$$
$$z = z_A + v_3\lambda. \tag{2.17}$$

Isolando λ em cada uma das equações, obtemos

$$\lambda = \frac{x - x_A}{v_1}, \tag{2.18}$$
$$\lambda = \frac{y - y_A}{v_2}, \tag{2.19}$$
$$\lambda = \frac{z - z_A}{v_3}. \tag{2.20}$$

Daí, temos

$$\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}, \tag{2.21}$$

as quais são as **equações da reta na forma simétrica**.

Exemplo 2.1.3. No Exemplo 2.1.2, consideramos a reta r de equações paramétricas

$$x = -1 + 3\lambda, \tag{2.22}$$
$$y = -1 + 2\lambda, \tag{2.23}$$
$$z = -2 + 5\lambda. \tag{2.24}$$

Para obtermos as equações de r na forma simétrica, basta isolarmos λ em cada equação. Com isso, obtemos

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{5}. \tag{2.25}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (-1, -1, -2)$ e tem $\vec{v} = (3,2,5)$ como vetor diretor. Determine o valor de x de forma que $P = \left(x, 0, \frac{1}{2}\right)$ seja um ponto de r.

Solução. Da equação vetorial da reta r, temos que $P = \left(x,0,\frac{1}{2}\right)$ é um ponto de r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}. \tag{2.26}$$

Ou seja,

$$\left(x-(-1),0-(-1),\frac{1}{2}-(-2)\right) = \lambda(3,2,5). \tag{2.27}$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(x+1,1,\frac{5}{2}\right) = \lambda(3,2,5). \tag{2.28}$$

Usando a segunda coordenada destes vetores, temos

$$1 = \lambda \cdot 2 \tag{2.29}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{2.30}$$

Assim, da primeira coordenada dos vetores, temos

$$x+1 = \lambda \cdot 3 \tag{2.31}$$

$$x+1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \tag{2.32}$$

$$x = \frac{3}{2} - 1 \tag{2.33}$$

$$x = \frac{1}{2}. \tag{2.34}$$

◊

ER 2.1.2. Seja r a reta de equações paramétricas

$$x = 1-\lambda, \tag{2.35}$$

$$y = \lambda, \tag{2.36}$$

$$z = -3. \tag{2.37}$$

Determine uma equação vetorial de r.

Solução. Nas equações paramétricas de uma reta, temos que os coeficientes constantes estão associados a um ponto da reta. Os coeficientes do parâmetro λ estão associados a um vetor diretor. Assim sendo, das equações paramétricas da reta r, temos que

$$A = (1,0,-3) \in r \tag{2.38}$$

e

$$\vec{v} = (-1,1,0) \tag{2.39}$$

é um vetor diretor. Logo, temos que a reta r tem equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}, \tag{2.40}$$

com $A = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-1,1,0)$.

◊

ER 2.1.3. Sabendo que r é uma reta que passa pelos pontos $A = (2,-3,1)$ e $B = (-1,1,0)$, determine o valor de t tal que

$$x = 2 + t\lambda, \tag{2.41}$$
$$y = -2 + 4\lambda, \tag{2.42}$$
$$z = 1 - \lambda, \tag{2.43}$$

sejam equações paramétricas de r.

Solução. Para que estas sejam equações paramétricas de r, é necessário que $\vec{v} = (t,4,-1)$ seja um vetor diretor de r. Em particular, $\vec{v} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{v} = \beta\overrightarrow{AB} \tag{2.44}$$
$$(t,4,-1) = \beta(-1-2,1-(-3),0-1) \tag{2.45}$$
$$(t,4,-1) = \beta(-3,4,-1). \tag{2.46}$$

Das segunda e terceira coordenadas, temos $\beta = 1$. Daí, comparando pela primeira coordenada, temos

$$t = -3\beta \tag{2.47}$$
$$t = -3. \tag{2.48}$$

◊

ER 2.1.4. Seja r uma reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{1-z}{2}. \tag{2.49}$$

Determine equações paramétricas para esta reta e faça um esboço de seu gráfico.

Solução. Podemos obter equações paramétricas desta reta a partir de suas equações na forma simétrica. Para tanto, basta tomar o parâmetro λ tal que

$$\lambda = \frac{x+1}{2}, \tag{2.50}$$
$$\lambda = \frac{y-2}{3}, \tag{2.51}$$
$$\lambda = \frac{1-z}{2}. \tag{2.52}$$

Daí, isolando x, y e z em cada uma destas equações, obtemos

$$x = -1 + 2\lambda, \tag{2.53}$$
$$y = 2 + 3\lambda, \tag{2.54}$$
$$z = 1 - 2\lambda. \tag{2.55}$$

Para fazermos um esboço do gráfico desta reta, basta traçarmos a reta que passa por dois de seus pontos. Por exemplo, tomando $\lambda = 0$, temos $A = (-1,2,1) \in r$. Agora, tomando $\lambda = 1$, temos $B = (1,5,-1) \in r$. Desta forma, obtemos o esboço dado na Figura 2.4.

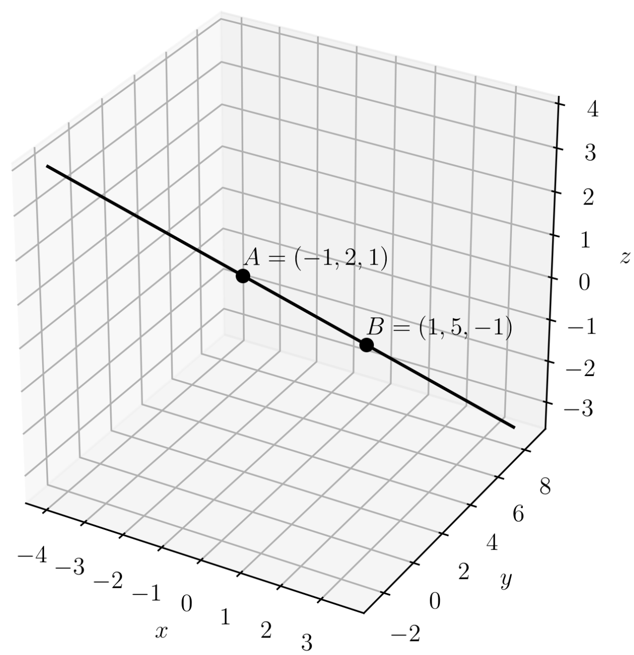

Figura 2.4: Esboço do gráfico da reta r do Exercício Resolvido 2.1.4.

$\Diamond$

Exercícios

E 2.1.1. Seja a reta que passa pelos pontos $A = (1, -2, 0)$ e $B = (-1, -1, 1)$. Determine:

a) sua equação vetorial.

b) suas equações paramétricas.

c) suas equações na forma simétrica.

E 2.1.2. Seja a reta que passa pelo ponto $A = (0, 1, -1)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Determine x tal que $B = (1, x, -\frac{1}{2})$.

E 2.1.3. Considere a reta de equações na forma simétrica

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z - 1. \tag{2.56}$$

Encontre um ponto e um vetor diretor desta reta.

E 2.1.4. Seja a reta r de equações paramétricas

$$x = \lambda \tag{2.57}$$
$$y = 2 - \lambda \tag{2.58}$$
$$z = -1 + \lambda \tag{2.59}$$

Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto $A = (1, -1{,}0)$ e é paralela a reta r.

E 2.1.5. Seja a reta r de equações paramétricas

$$x = \lambda \tag{2.60}$$
$$y = 2 - \lambda \tag{2.61}$$
$$z = -1 + \lambda \tag{2.62}$$

Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, -1{,}0)$ e é perpendicular a reta r.

Capítulo 3

Estudo de planos

Neste capítulo, temos uma introdução ao estudo de planos no espaço tridimensional.

3.1 Equações do plano

Um plano π fica unicamente determinado por um ponto $A \in \pi$ e dois vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v} \in \pi$[1]. Veja a Figura 3.1.

[1]No sentido que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm representantes no plano π.

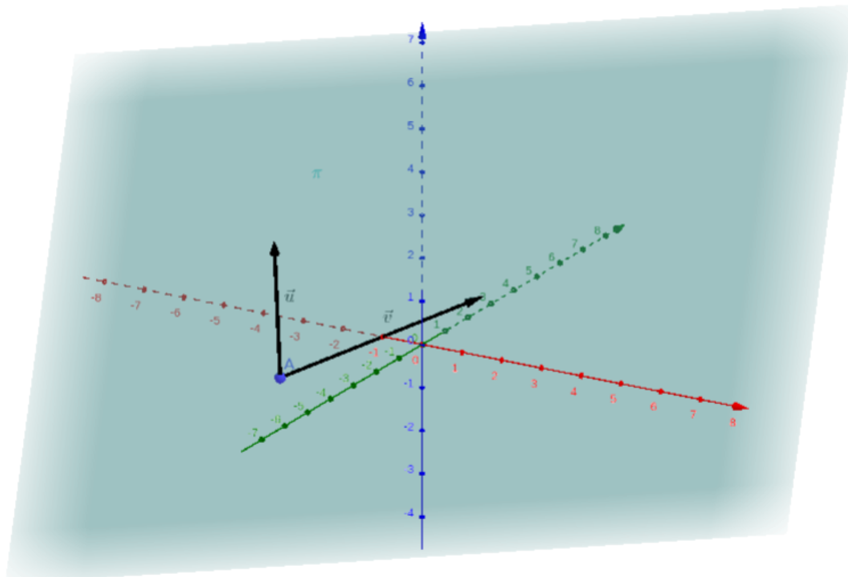

Figura 3.1: Ilustração de um plano no espaço tridimensional.

Os chamados **vetores diretores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam infinitos planos paralelos entre si. O chamado **ponto de ancoragem** A fixa um destes planos.

3.1.1 Equação vetorial do plano

Consideremos um plano π determinado pelo ponto de ancoragem A e os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (veja a Figura 3.2). Então, um ponto $P \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, i.e. $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou seja, $P \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Isto nos fornece a chamada **equação vetorial do plano**

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad \lambda,\beta \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

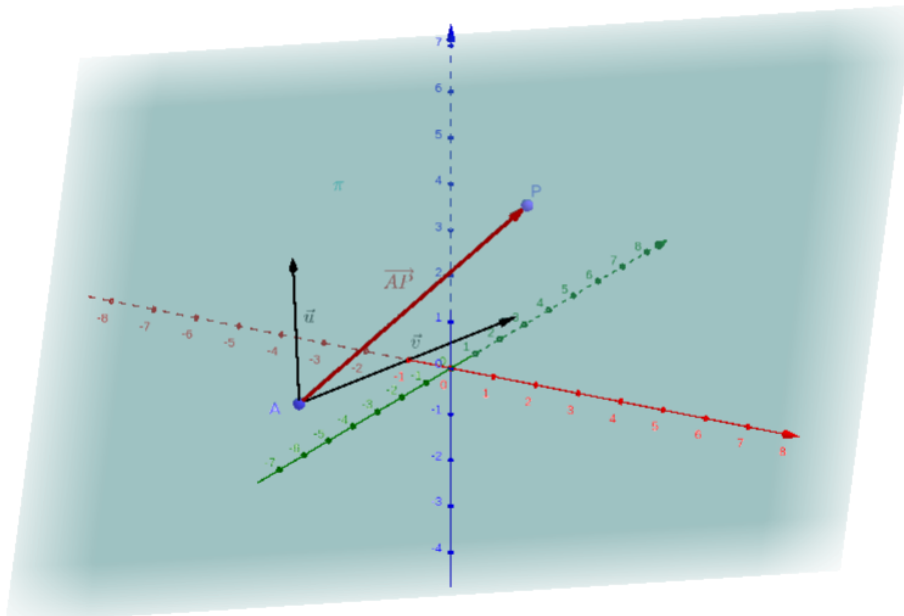

Figura 3.2: Ilustração sobre a equação vetorial de um plano.

Exemplo 3.1.1. Consideremos o plano π determinado pelo ponto $A = (1,-1,1)$ e pelos vetores $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$ (Veja a Figura 3.3. Desta forma, uma equação vetorial para este plano é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{3.2}$$

para $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

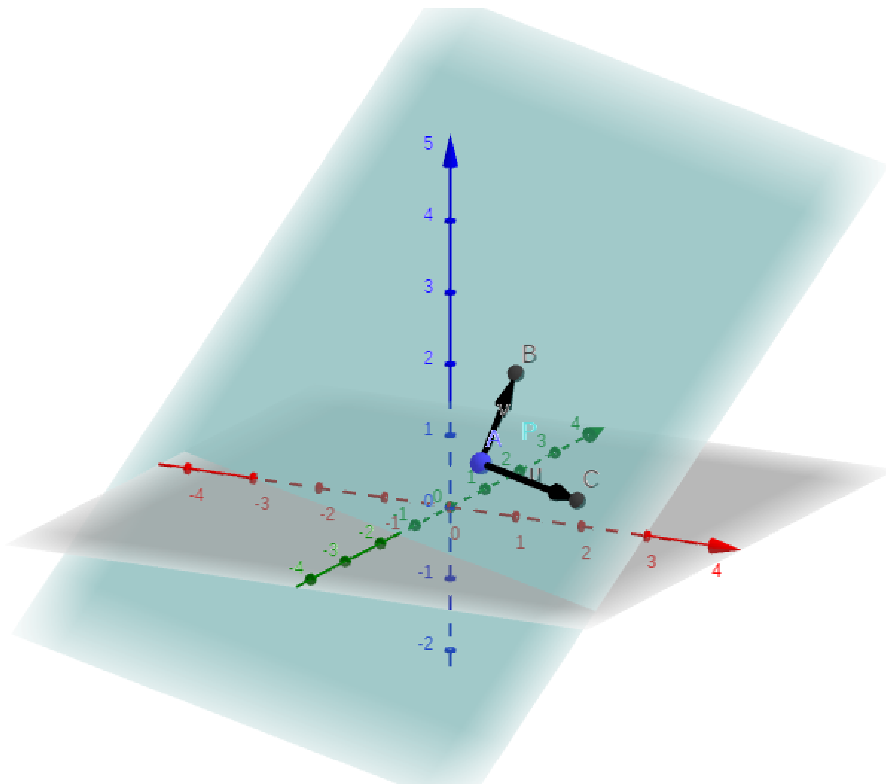

Figura 3.3: Esboço do plano π discutido no Exemplo 3.1.1.

Tomando, por exemplo, $\lambda = -1$ e $\beta = 1$, obtemos

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v} \tag{3.3}$$
$$= -(2,-1,0) + (0,1,1) \tag{3.4}$$
$$= (-2,2,1). \tag{3.5}$$

Observando que as coordenadas do ponto P são iguais as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, temos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \tag{3.6}$$
$$= (1,-1,1) + (-2,2,1) \tag{3.7}$$
$$= (-1,1,2). \tag{3.8}$$

Ou seja, $P = (-1,1,2) \in \pi$.

3.1.2 Equações paramétricas do plano

Seja um plano π com ponto de ancoragem $A = (x_A,y_A,z_A) \in \pi$ e vetores diretores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Então, todo o ponto $P = (x,y,z)$ neste plano π satisfaz a equação vetorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{3.9}$$

para dados parâmetros $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$. Assim, temos

$$\begin{align}(x - x_A,y - y_A,z - z_A) &= \lambda(u_1,u_2,u_3) + \beta(v_1,v_2,v_3) \tag{3.10}\\ &= (\lambda u_1 + \beta v_1,\lambda u_2 + \beta v_2,\lambda u_3 + \beta v_3). \tag{3.11}\end{align}$$

Portanto, temos

$$\begin{align}x - x_A &= \lambda u_1 + \beta v_1, \tag{3.12}\\ y - y_A &= \lambda u_2 + \beta v_2, \tag{3.13}\\ z - z_A &= \lambda u_3 + \beta v_3. \tag{3.14}\end{align}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{align}x &= x_A + \lambda u_1 + \beta v_1, \tag{3.15}\\ y &= y_A + \lambda u_2 + \beta v_2, \tag{3.16}\\ z &= z_A + \lambda u_3 + \beta v_3, \tag{3.17}\end{align}$$

as quais são chamadas de **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 3.1.2. No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1, -1,1)$ e os vetores $\vec{u} = (2, -1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$. Do que vimos acima, temos que

$$\begin{align}x &= 1 + 2\lambda, \tag{3.18}\\ y &= -1 - \lambda + \beta, \tag{3.19}\\ z &= 1 + \beta, \tag{3.20}\end{align}$$

são equações paramétricas deste plano.

Podemos usar as equações paramétricas do plano para plotá-lo usando o SymPy. Para tanto, podemos usar os seguintes comandos:

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface
var('r,s',real=True)
plot3d_parametric_surface(1+2*r,-1-r+s,1+s,
                          (r,-2,2),(s,-2,2),show=True,
                          xlabel='$x$',ylabel='$y$')
```

3.1.3 Equação geral do plano

Seja π o plano determinado pelo ponto de ancoragem $A = (x_A,y_A,z_A)$ e pelos vetores diretores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$. Sabemos que $P = (x,y,z) \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes. Ou, equivalentemente, o produto misto $[\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] = 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
0 &= [\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] && (3.21)\\
&= \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && (3.22)\\
&= -u_1v_2z_A + u_1v_3y_A + u_2v_1z_A && (3.23)\\
&- u_2v_3x_A - u_3v_1y_A + u_3v_2x_A && (3.24)\\
&+ x(u_2v_3 - u_3v_2) + y(-u_1v_3 + u_3v_1) + z(u_1v_2 - u_2v_1). && (3.25)
\end{aligned}
$$

Observamos que a equação acima tem a forma geral

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3.26}$$

com a,b,c,d não todos nulos ou, equivalentemente, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Esta última é chamada **equação geral do plano**.

Exemplo 3.1.3. No Exemplo 3.1.1, discutimos sobre o plano π determinado pelo ponto $A = (1,-1,1)$ e os vetores $\vec{u} = (2,-1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,1)$. Para encontrarmos a equação geral deste plano, tomamos $P = (x,y,z)$ e calculamos

$$
\begin{aligned}
0 &= [\overrightarrow{AP},\vec{u},\vec{v}] && (3.27)\\
&= \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (3.28)\\
&= -x - 2y + 2z - 3. && (3.29)
\end{aligned}
$$

Ou seja, a equação geral deste plano é

$$-x - 2y + 2z - 3 = 0. \tag{3.30}$$

3.1.4 Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Seja π um plano tal que $A = (2{,}0,-1) \in \pi$, $P = (0{,}1,-1) \in \pi$ e $\vec{u} = (1{,}0{,}1) \in \pi$. Determine uma equação vetorial para π.

Solução. Para obtermos uma equação vetorial do plano π, precisamos de um ponto e dois vetores l.i. em π. Do enunciado, temos o ponto $A = (2{,}0,-1) \in \pi$ e o vetor $\vec{u}$. Portanto, precisamos encontrar um vetor $\vec{v} \in \pi$ tal que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam l.i.. Por sorte, temos $P = (0{,}1,-1) \in \pi$ e, portanto $\overrightarrow{AP} \in \pi$. Podemos tomar

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} \tag{3.31}$$
$$= (-2{,}1{,}0), \tag{3.32}$$

pois $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são l.i.. Logo, uma equação vetorial do plano π é

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{3.33}$$
$$= \lambda(1{,}0{,}1) + \beta(-2{,}1{,}0), \tag{3.34}$$

com $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$.

◊

ER 3.1.2. Seja π o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda, \tag{3.35}$$
$$y = \beta, \tag{3.36}$$
$$z = 1 - \lambda + \beta. \tag{3.37}$$

Determine o valor de z_P de forma que $P = (-1{,}2{,}z_P) \in \pi$.

Solução. Para que $P = (-1{,}2{,}z_P)$ pertença ao plano, devemos ter

$$-1 = -1 + \lambda, \tag{3.38}$$
$$2 = \beta, \tag{3.39}$$
$$z_P = 1 - \lambda + \beta. \tag{3.40}$$

Das duas primeiras equações, obtemos $\lambda = 0$ e $\beta = 2$. Daí, da terceira equação, temos

$$z_P = 1 - 0 + 2 = 3. \tag{3.41}$$

♢

Exercícios

E 3.1.1. Determine a equação vetorial do plano com ponto de ancoragem $A = (-1,0,2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\vec{v} = (-1,1,2)$.

E 3.1.2. Seja o plano de equação vetorial $\overrightarrow{AP} = \lambda(2,-1,1) + \beta(-1,1,2)$, $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$, com ponto de ancoragem $A = (-1,0,2)$. Determine x tal que $P = (x,3,0)$ pertença a este plano.

E 3.1.3. Determine as equações paramétricas do plano com ponto de ancoragem $A = (-1,0,2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\vec{v} = (-1,1,2)$.

E 3.1.4. Considere o plano de equações paramétricas

$$x = -1 + 2\lambda - \beta, \tag{3.42}$$
$$y = -\lambda + \beta, \tag{3.43}$$
$$z = 2 + \lambda + 2\beta. \tag{3.44}$$

Determine y tal que $P = (-6,y,2)$ pertença a este plano.

E 3.1.5. Determine a equação geral do plano com ponto de ancoragem $A = (-1,0,2)$ e vetores diretores $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\vec{v} = (-1,1,2)$.

E 3.1.6. Considere o plano de equação geral $-3x-5y+z-5 = 0$. Determine z tal que o ponto $P = (0,0,z)$ pertença a este plano.

E 3.1.7. Considere o plano π de equações paramétricas

$$x = -1 + \lambda \tag{3.45}$$
$$y = \beta \tag{3.46}$$
$$z = = 1 - \lambda + \beta \tag{3.47}$$

A reta r de equação paramétricas

$$x = 2 \tag{3.48}$$
$$y = -1 + 2\lambda \tag{3.49}$$
$$z = 2\lambda \tag{3.50}$$

é paralela ao plano π? Justifique sua resposta.

E 3.1.8. Considere o plano π de equação geral

$$6x - 7y - 5z = -6. \tag{3.51}$$

Determine uma equação paramétrica para a reta r que é perpendicular ao plano π e passa pelo ponto $A = (2, -1{,}0)$.

Capítulo 4

Outros sistemas de coordenadas

Neste capítulo, vamos introduzir outros sistemas de coordenadas no plano e no espaço tridimensional.

4.1 Sistema de coordenadas polares

No plano, o sistema de coordenadas polares é definido por um ponto de origem (chamado de **polo**) e um eixo orientado Ox (chamado de **eixo polar**). Veja a Figura 4.1.

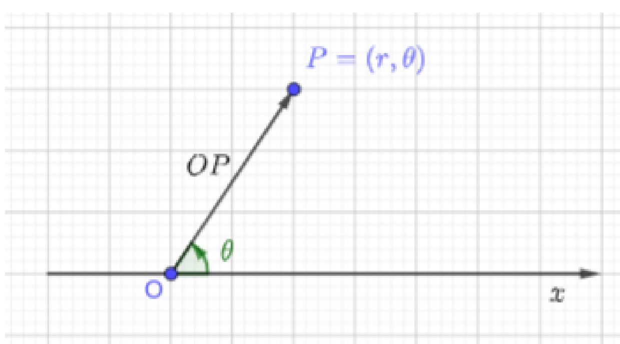

Figura 4.1: Sistema de coordenadas polares.

Neste sistema, um ponto P de coordenadas polares $P = (r, \theta)$ é tal que $|OP| = r$ (i.e. a distância do polo ao ponto é r) e θ é o ângulo de Ox com OP, medido positivamente no sentido anti-horário.

Exemplo 4.1.1. Na Figura 4.2, temos a representação dos pontos $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, $A = (2, \frac{2\pi}{3})$ e $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ no sistema de coordenadas polares.

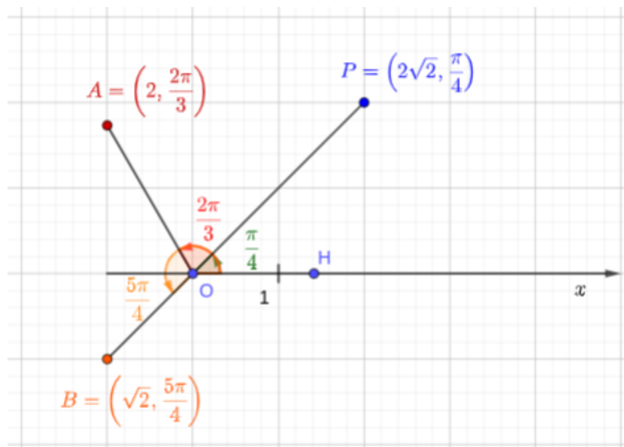

Figura 4.2: Sistema de coordenadas polares.

Observação 4.1.1. Por convenção, as coordenadas polares $(r, \pi + \theta) = (-r, \theta)$, $r > 0$. Por exemplo, $B = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Veja na Figura 4.2.

4.1.1 Coordenadas cartesianas x polares

Aqui, vamos estudar como podemos converter as coordenadas de um ponto P de coordenadas cartesianas para coordenadas polares e vice-versa. Vamos denotar as coordenadas cartesianas do ponto P por $P = (x_P, y_P)$ e suas coordenadas polares por $P = (r, \theta)$. Veja a Figura 4.3.

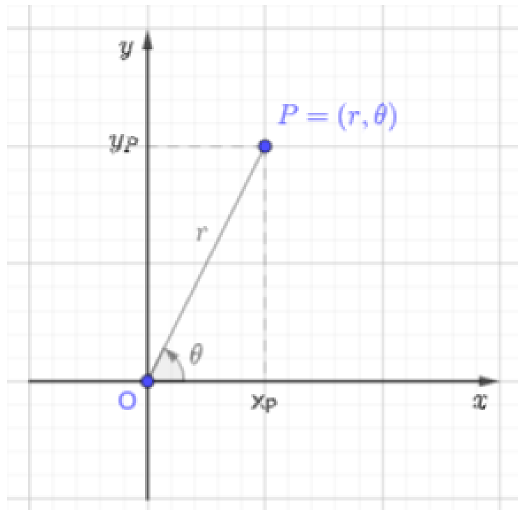

Figura 4.3: Sistema de coordenadas polares.

Na Figura 4.3, vamos nos concentrar no triângulo retângulo de vértices O, $(x_P, 0)$ e P. Das relações trigonométricas e do teorema de Pitágoras, temos que

$$\cos\theta = \frac{x_P}{r} \tag{4.1}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{r} \tag{4.2}$$

$$r^2 = x_P^2 + y_P^2 \tag{4.3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_P}{x_P} \tag{4.4}$$

ou, equivalentemente,

$$x_P = r\cos\theta \tag{4.5}$$

$$y_P = r\operatorname{sen}\theta \tag{4.6}$$

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \tag{4.7}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_P}{x_P}\right) \tag{4.8}$$

Exemplo 4.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) Conversão de $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ em coordenadas polares para coordenadas cartesianas.

No caso de $P = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$ temos $r = 2\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Desta forma, as coordenadas cartesianas de $P = (x,y)$ são dadas por

$$\begin{align}
x &= r\cos\theta \tag{4.9}\\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \tag{4.10}\\
&= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.11}\\
&= 2 \tag{4.12}
\end{align}$$

$$\begin{align}
y &= r\operatorname{sen}\theta \tag{4.13}\\
&= 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \tag{4.14}\\
&= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.15}\\
&= 2 \tag{4.16}
\end{align}$$

Logo, $P = (2,2)$ em coordenadas cartesianas. Veja a Figura 4.2.

b) Conversão de $B = (-\sqrt{3}, -1)$ de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Neste caso, temos $x = -\sqrt{3}$ e $y = -1$ e

$$\begin{align}
r &= \sqrt{x^2+y^2} \tag{4.17}\\
&= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} \tag{4.18}\\
&= \sqrt{4} \tag{4.19}\\
&= 2 \tag{4.20}
\end{align}$$

$$\begin{align}
\theta &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.21}\\
&= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) \tag{4.22}\\
&= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{4.23}\\
&= \frac{7\pi}{6}. \tag{4.24}
\end{align}$$

Desta forma, temos que $P = (2, \frac{7\pi}{6})$ em coordenadas polares. Ou, equivalentemente, $P = (-2, \frac{\pi}{6})$.

Equação de reta que passa pela origem

Em coordenadas polares, uma reta que passa pela origem e tem ângulo de declividade θ_0 tem equação

$$\theta = \theta_0, \tag{4.25}$$

com $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.3. Seja a reta $y = x$ em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta reta é

$$\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{4.26}$$

Equação de circunferência com centro na origem

Em coordenadas polares, a circunferência com centro na origem e raio r_0 tem equação

$$r = r_0. \tag{4.27}$$

Exemplo 4.1.4. Seja a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, a equação desta circunferência é

$$r = 2. \tag{4.28}$$

4.1.2 Exercícios resolvidos

ER 4.1.1. Obtenha duas representações em coordenadas polares do ponto $A = (-1{,}0)$ dado em coordenadas cartesianas.

Solução. O ponto $A = (-1, 0)$ tem coordenadas cartesianas $x = -1$ e $y = 0$. Para converter em coordenadas polares $A = (r, \theta)$, podemos usar

$$\begin{align}
r^2 &= x^2 + y^2 \tag{4.29}\\
r^2 &= 1^2 + 0^2 \tag{4.30}\\
r &= \pm 1 \tag{4.31}
\end{align}$$

e

$$\begin{align}
\theta &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.32}\\
&= \operatorname{arc\,tg}(0) \tag{4.33}\\
&= \pi \text{ ou } 0. \tag{4.34}
\end{align}$$

Ou seja, em coordenadas polares, temos as representações $A = (1,\pi)$ ou $A = (-1{,}0)$.

$\Diamond$

ER 4.1.2. Obtenha a representação em coordenadas cartesianas do ponto $B = (2, \frac{\pi}{2})$ dado em coordenadas polares.

Solução. O ponto $B = (2, \frac{\pi}{2})$ tem coordenadas polares $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para converter em coordenadas cartesianas $B = (x, y)$, podemos usar

$$x = r\cos\theta \tag{4.35}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{2} \tag{4.36}$$
$$= 0 \tag{4.37}$$

e

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{4.38}$$
$$= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \tag{4.39}$$
$$= 2 \tag{4.40}$$

Ou seja, em coordenadas cartesianas, temos a representação $B = (0, 2)$.

$\Diamond$

Exercícios

E 4.1.1. Obtenha uma representação em coordenadas polares dos seguintes pontos dados em coordenadas cartesianas:

a) $A = (-3, 3)$

b) $B = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

c) $C = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

E 4.1.2. Obtenha uma representação em coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

a) $A = (2, \frac{\pi}{6})$

b) $B = (1, \frac{5\pi}{6})$

c) $C = (-2, \frac{3\pi}{4})$

E 4.1.3. Considere a reta de equação $x = 0$ em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta reta em coordenadas polares.

E 4.1.4. Considere a reta de equação $\theta = \frac{3\pi}{4}$ em coordenadas polares. Escreva a equação desta reta em coordenadas cartesianas.

E 4.1.5. Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ em coordenadas cartesianas. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas polares.

E 4.1.6. Considere a circunferência de equação $r = \sqrt{2}$ em coordenadas polares. Escreva a equação desta circunferência em coordenadas cartesianas.

Capítulo 5

Cônicas

5.1 Elipse

Sejam F_1,F_2 pontos sobre um plano π, c a distância entre c_1 e c_2 e $a > c$. Chama-se **elipse** de **focos** F_1 e F_2 ao conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{5.1}$$

Veja a Figura 5.1.

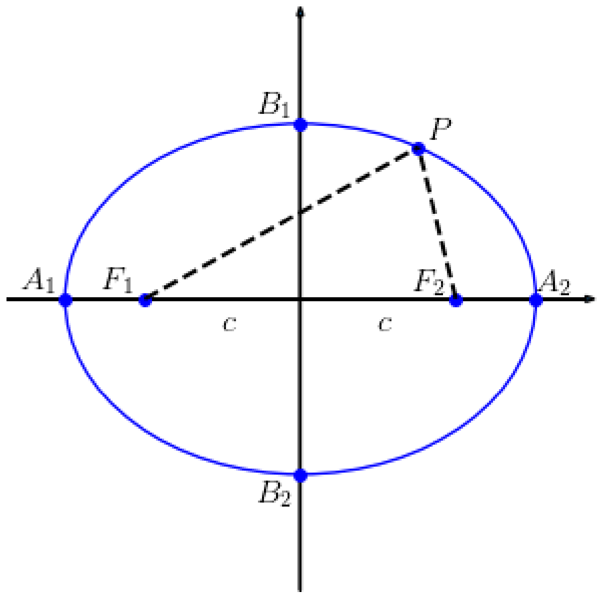

Figura 5.1: Ilustração de uma elipse de focos F_1 e F_2.

Dada uma tal elipse, identificamos $2c = |F_1F_2|$ como a **distância focal**. Os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta que passa pelos focos são chamados de **vértices** da elipse. O segmento A_1A_2 é chamado de **eixo maior** da elipse. Observamos que

$$|A_1A_2| = 2a. \tag{5.2}$$

O ponto médio do segmento F_1F_2 é chamado de **centro** da elipse. Sejam B_1 e B_2 os pontos de interseção da elipse com a reta que passa pelo centro da elipse e é perpendicular ao segmento A_1A_2. Assim sendo, o segmento B_1B_2 é chamado de **eixo menor** da elipse. Vamos denotar

$$2b = |B_1B_2|. \tag{5.3}$$

Chamamos de **excentricidade** da elipse o número

$$e = \frac{c}{a}. \tag{5.4}$$

Notemos que $0 \leq e < 1$. Para $e = 0$, temos $c = 0$ e, portanto $F_1 = F_2$. Neste caso, a elipse é a circunferência de centro em F_1 (ou F_2) e diâmetro $2a$. No que e tende a 1, a elipse tende ao segmento A_1A_2.
Por fim, notemos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, $|OF_2| = c$, $|F_2B_1| = a$ e $|OB_1| = b$. Do teorema de Pitágoras segue

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{5.5}$$

5.1.1 Equação reduzida da elipse

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas. Sejam $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$, $c \geq 0$, os focos de uma dada elipse (veja a Figura 5.1). Se $P = (x,y)$ é um ponto da elipse, então

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a. \tag{5.6}$$

Como

$$|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \tag{5.7}$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{5.8}$$

temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \tag{5.9}$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{5.10}$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \tag{5.11}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{5.12}$$

Elevando novamente ao quadrado, temos

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{5.13}$$

donde

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \tag{5.14}$$

Por cancelamento e rearranjo dos termos, obtemos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{5.15}$$

Como $a > c$, dividimos por $a^2 - c^2$ e depois por a^2 para obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{5.16}$$

Por fim, da equação (5.5), temos $a^2 - c^2 = b^2$, o que nos leva a **equação reduzida da elipse**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.17}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

5.2 Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos sobre um plano π e. Sejam, também, c tal que $|F_1F_2| = 2c$ e $a < c$. O lugar geométrico dos pontos P tais que

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a, \tag{5.18}$$

chama-se **hipérbole**. Veja Figura 5.2.

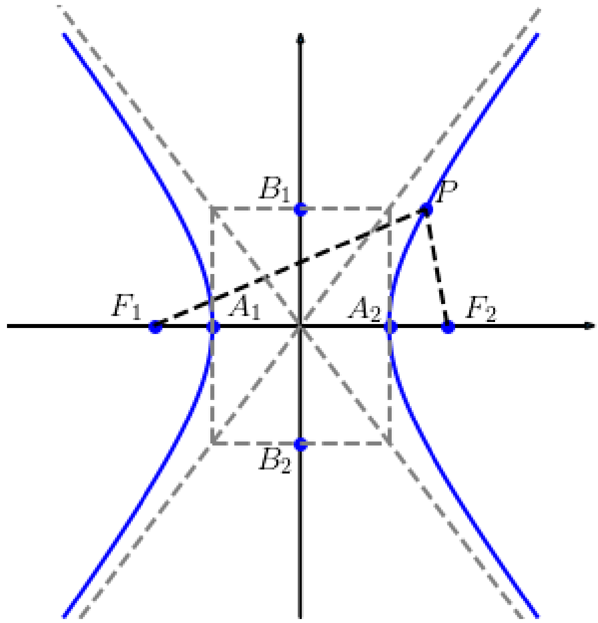

Figura 5.2: Ilustração de uma hipérbole de focos F_1 e F_2.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados de **focos** da hipérbole e $2c = |F_1F_2|$ é chamada de **distância focal**. O ponto médio entre os pontos F_1 e F_2 é chamado de centro da hipérbole. São chamados **vértices** da hipérbole os pontos A_1 e A_2, sendo que o segmento A_1A_2 é chamado de **eixo real** (ou transverso) da hipérbole. O comprimento deste eixo é $|A_1A_2| = 2a$.
Sejam B_1 e B_2 pontos c distantes de A_1 e A_2 e pertencentes a reta que passa pelo centro da hipérbole e é perpendicular ao seu eixo real. O segmento B_1B_2 é chamado de **eixo imaginário** (transverso ou conjugado). Denotando $2b = |B_1B_2|$, temos do triângulo retângulo B_1OA_1 que

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{5.19}$$

5.2.1 Equação reduzida da hipérbole

Assumimos um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de uma dada hipérbole e o eixo das abscissas seja coincidente com o eixo real da hipérbole. Desta forma, temos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Então, $P = (x,y)$ é um ponto da hipérbole quando

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a. \tag{5.20}$$

Daí, segue que

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{5.21}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{5.22}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \tag{5.23}$$

ou, equivalentemente,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \tag{5.24}$$

Simplificando e rearranjando os termos, temos

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}). \tag{5.25}$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \tag{5.26}$$

Simplificando e rearranjando os termos, obtemos

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{5.27}$$

Lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{5.28}$$

Dividindo por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.29}$$

a qual é chamada de **equação reduzida da hipérbole**.

Em construção ...

5.3 Parábola

Em um plano, consideramos uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de **parábola** o conjunto de pontos P do plano que são equidistantes de F e de d, i.e.

$$\text{dist}(P,F) = \text{dist}(P,d). \tag{5.30}$$

Veja a Figura 5.3.

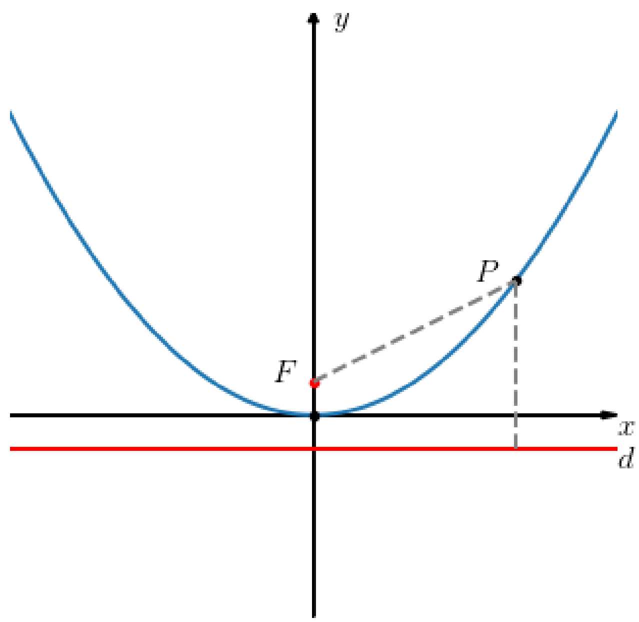

Figura 5.3: Ilustração de uma parábola.

O ponto F é chamado de **foco** da parábola. A reta d é chamada de **diretriz** da parábola. A reta perpendicular a d e que passa pelo ponto F é chamada de **eixo** da parábola. O ponto V de interseção entre a parábola e seu eixo é chamado de **vértice** da parábola.

5.3.1 Equação reduzida de uma parábola

Tomamos o sistema cartesiano de coordenadas com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas paralelo à diretriz. Seja p tal que

$$F = (0,p/2). \tag{5.31}$$

Logo, a diretriz tem equação $y = -p/2$. Da definição de parábola, $P = (x,y)$ pertence a parábola quando

$$\text{dist}(P,F) = \text{dist}(P,d). \tag{5.32}$$

Segue que

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}. \tag{5.33}$$

Elevando ao quadrado e expandindo, obtemos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}. \tag{5.34}$$

Cancelando e rearranjando termos, obtemos

$$x^2 = 2py, \tag{5.35}$$

a chamada **equação reduzida da parábola**.

Observação 5.3.1. Uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e foco $F = (p/2, 0)$, tem equação reduzida

$$y^2 = 2px. \tag{5.36}$$

Exercícios resolvidos

Em construção ...

Exercícios

Em construção ...

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. $\vec{v} = (1, -2,4)$

E 1.1.2. $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

E 1.1.3. $B = (1,1,7)$

E 1.1.4. $x = -5$

E 1.1.5. $|CD| = \sqrt{6}$

E 2.1.1. a) $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} = (-2,1,1)$; b) $x = 1 - 2\lambda$, $y = -2 + \lambda$, $z = \lambda$; c) $\frac{x-1}{-2} = y + 2 = z$

E 2.1.2. $x = \frac{1}{2}$

E 2.1.3. $A = (1, -1,1)$, $\vec{v} = (-2,3,1)$

E 2.1.4. $x - 1 = \frac{y+1}{-1} = z$

E 2.1.5. $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 2\lambda$, $z = -\lambda$

E 3.1.1. $\overrightarrow{AP} = \lambda(2, -1,1) + \beta(-1,1,2), \quad \lambda,\beta \in \mathbb{R}$

E 3.1.2. $x = 5$

E 3.1.3. $x = -1 + 2\lambda - \beta$, $y = -\lambda + \beta$, $z = 2 + \lambda + 2\beta$

E 3.1.4. $y = 3$

E 3.1.5. $-3x - 5y + z - 5 = 0$

E 3.1.6. $z = 5$

E 3.1.7. sim

E 3.1.8. $x = 2 + 6\lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = -5\lambda$

E 4.1.1. a) $A = (3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$; b) $B = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$; c) $C = (\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$

E 4.1.2. a) $A = (\sqrt{3}, 1)$; b) $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; c) $C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

E 4.1.3. $\theta = \frac{\pi}{2}$

E 4.1.4. $y = -x$

E 4.1.5. $r = 1$

E 4.1.6. $x^2 + y^2 = 2$

Referências Bibliográficas

[1] D.A. de Mello and R.G. Watanabe. *Vetores e uma iniciação à geometria analítica.* Livraria da Física, 2. edition, 2011.