

# Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro H A Konzen

27 de março de 2020

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional Creative Commons. Para visualizar uma cópia desta licença, visite [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt\\_BR](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR) ou mande uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos [Python](#) são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica [SymPy](#).

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

# Sumário

Capa	i
Licença	ii
Prefácio	iii
Sumário	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Equações diferenciais . . . . .	1
1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno . . . . .	5
<b>2 EDO de primeira ordem</b>	<b>11</b>
2.1 Equação linear . . . . .	11
2.1.1 EDO autônoma e homogênea . . . . .	11
2.1.2 Método dos fatores integrantes . . . . .	13
2.1.3 Caso geral . . . . .	15
2.1.4 Aplicação em modelagem . . . . .	16
2.2 Equação separável . . . . .	21
2.2.1 Equação de Verhulst . . . . .	23
2.3 Equação exata . . . . .	29
2.3.1 Método dos fatores integrantes . . . . .	32
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>37</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Equações diferenciais

**Equação Diferencial (ED)** é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita.

**Exemplo 1.1.1.** São exemplos de equações diferenciais:

a) Modelo de queda de um corpo com resistência do ar.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \quad (1.1)$$

Nesta equação, temos a velocidade  $v = v(t)$  ( $v$  função de  $t$ ) como **incógnita**. O tempo é descrito por  $t$  como uma variável independente. As demais letras correspondem a parâmetros dados (constantes). Mais especificamente,  $g$  corresponde à gravidade,  $k$  à resistência do ar e  $m$  à massa do corpo.

b) Equação de Verhulst (Equação Logística)

$$\frac{dy}{dt} = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y. \quad (1.2)$$

Esta equação é um clássico modelo de crescimento populacional. Aqui,  $y = y(t)$  é o tamanho da população (incógnita) no tempo  $t$  (variável independente). As demais letras correspondem a parâmetros dados.

c) Equação de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{kx^2}{2}\psi = E\psi. \quad (1.3)$$

Esta equação modela a função de onda  $\psi$  (incógnita) de uma partícula em função de sua posição  $x$  (modelo unidimensional). Neste modelo quântico,  $\hbar$ ,  $m$ ,  $k$  e  $E$  são parâmetros.

d) Modelagem da corrente em um circuito elétrico.

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E. \quad (1.4)$$

Aqui, a incógnita é função corrente  $I$  em função do tempo. O modelo refere-se a um circuito elétrico com os seguintes parâmetros:  $L$  indutância,  $R$  resistência,  $C$  capacitância e  $E$  voltagem do gerador.

e) Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura (incógnita)  $u = u(t, x)$  como função do tempo e da posição (variáveis independentes). O parâmetro é o coeficiente de difusão térmica  $\alpha$ .

**Equação Diferencial Ordinária (EDO)** é aquela em a incógnita é função apenas de uma variável independente. Desta forma, todas as derivadas que aparecem na equação são ordinárias. No Exemplo 1.1.1, as equações diferenciais a), b), c) e d) são ordinárias. A equação e) não é ordinária, pois a incógnita  $u = u(t, x)$  é função das variáveis independentes  $t$  e  $x$ , portanto, os termos diferenciais são parciais (derivadas parciais). Equações como esta são chamadas de equações diferenciais parciais.

Toda EDO pode ser escrita na seguinte forma geral

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.6)$$

Aqui,  $F$  é uma função envolvendo a variável independente  $t$  e a variável dependente  $y = y(t)$  (incógnita, função de  $t$ ) e pelo menos uma derivada ordinária de  $y$  em relação a  $t$ <sup>1</sup>. O índice  $n$  corresponde a **ordem** da derivada

---

<sup>1</sup>Lembre-se que  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$  e assim por diante.

de maior ordem que aparece na equação, sendo  $n \geq 1$ . Quando  $F$  é função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , então a EDO é dita ser **linear**, caso contrário, é **não linear**. Quando  $F$  não depende explicitamente de  $t$ , a equação é dita ser **autônoma**.

**Exemplo 1.1.2.** Vejamos os seguintes casos:

a) A equação

$$y'' + y = 0 \quad (1.7)$$

é uma EDO de ordem 2, linear e autônoma. Aqui, temos  $F(y, y'') = y'' + y$ .

b) As equações (1.1) e (1.2) são EDOs de **primeira ordem** (de ordem 1), autônomas e não lineares.

c) A Equação de Schrödinger (1.3) é uma EDO de **segunda ordem**, linear e não autônoma.

Uma **solução** de uma EDO (1.6) é uma função  $y = y(t)$  que satisfaça a equação para todos os valores de  $t^2$ .

**Exemplo 1.1.3.** As funções  $y_1(t) = e^t$  e  $y_2(t) = e^{-t}$  são soluções da equação diferencial ordinária

$$y'' - y = 0. \quad (1.8)$$

De fato, tomando  $y = y_1(t) = e^t$ , temos  $y'' = e^t$  e

$$y'' - y = e^t - e^t = 0 \quad (1.9)$$

para todo  $t$ . Também, tomando  $y = y_2(t) = e^{-t}$ , temos  $y'' = e^{-t}$  e

$$y'' - y = e^{-t} - e^{-t} = 0, \quad \forall t. \quad (1.10)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 1.1.1.** Determine a ordem e diga se a seguinte EDO é linear ou autônoma. Justifique suas respostas.

$$t^2 \frac{dy}{dt} + (1 + y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + y = e^t. \quad (1.11)$$

---

<sup>2</sup>Em várias situações o domínio de interesse de  $t$  é também informado junto com a equação. Veremos isso mais adiante.

### Solução.

a) Ordem 2.

A equação tem ordem 2, pois o termo diferencial de maior ordem é uma derivada de segunda ordem.

b) EDO é não linear.

A equação tem um termo  $y^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$ , o qual não é linear em  $y$ .

c) EDO não é autônoma.

A equação não é autônoma, pois a variável independente  $t$  aparece explicitamente. A saber, no primeiro termo do lado esquerdo e no termo fonte da equação.

◇

**ER 1.1.2.** Determine os valores de  $r$  para os quais  $y = e^{rt}$  é solução da equação

$$y'' - y = 0. \quad (1.12)$$

**ER 1.1.3.** Para que  $y = e^{rt}$  seja solução da equação dada, devemos ter

$$y'' - y = 0 \Rightarrow (e^{rt})'' - e^{rt} = 0 \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow r^2 e^{rt} - e^{rt} = 0 \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow (r^2 - 1) \cdot \underbrace{e^{rt}}_{>0} = 0 \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 = 0 \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow r = \pm 1. \quad (1.17)$$

### Exercícios

**E 1.1.1.** Determine quais das seguintes são EDOs. Justifique sua resposta.

a)  $y = y''$ .

b)  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x}$ .



c)  $y \cdot \frac{d^5 y}{dx^5} = x \ln(y) + \frac{d}{dx} e^{x^2}.$

d)  $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx},$  sendo  $\alpha$  um parâmetro.

**E 1.1.2.** Determine a ordem das seguintes EDOs. Justifique sua resposta.

a)  $t^2 y' = e^t.$

b)  $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^3 y}{dt^3}.$

c)  $y \cdot y'' - 3y'' = y - y'.$

d)  $\left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 = e^t.$

**E 1.1.3.** Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 não são autônomas. Justifique sua resposta.

**E 1.1.4.** Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 são lineares. Justifique sua resposta.

**E 1.1.5.** Para cada equação a seguir, calcule os valores de  $r$  para os quais  $y = e^{rt}$  seja solução da equação.

a)  $y'' + y' - 6y = 0.$

b)  $y''' = 3y''.$

**E 1.1.6.** Calcule os valores de  $\alpha$  para os quais  $y = t^\alpha, t > 0,$  seja solução da equação

$$t^2 y'' = 2y. \quad (1.18)$$

## 1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) pode ter infinitas soluções.

**Exemplo 1.2.1.** A EDO

$$y' = 1 \quad (1.19)$$

tem soluções

$$\int y' dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y = t + c, \quad (1.20)$$

onde  $c$  é uma constante indeterminada.

Afim de fixar uma solução única para tais EDOs, comumente define-se uma **condição inicial** apropriada, i.e. o valor da solução para um dado valor da variável independente. O problema de resolver uma EDO com condição inicial dada é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI).

**Exemplo 1.2.2.** No exemplo anterior,  $t$  é a variável independente. Assim, por exemplo,

$$y(t_0) = y(0) = 1 \quad (1.21)$$

é um exemplo de uma condição inicial. Neste caso, determinamos a constante  $c$  com

$$y(t) = t + c \Rightarrow y(0) = 0 + c = 1 \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow c = 1. \quad (1.23)$$

Ou seja, a solução deste problema de valor inicial é  $y(t) = t + 1$ .

EDOs de segunda ordem podem requer duas condições iniciais.

**Exemplo 1.2.3.** Consideramos o seguinte problema de valores iniciais

$$y'' = 1, \quad (1.24)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \quad (1.25)$$

Integrando a EDO, obtemos

$$\int y'' dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y' = t + c_1. \quad (1.26)$$

Integrando novamente

$$\int y' dt = \int t + c_1 dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.27)$$

Com isso, obtemos a chamada **solução geral** desta EDO

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.28)$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0 \quad (1.29)$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1. \quad (1.30)$$

Da segunda condição, obtemos  $c_1 = 0$ . Logo, da primeira, obtemos  $c_2 = -\frac{1}{2}$ . Portanto, a solução deste PVI de ordem 2 é:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}. \quad (1.31)$$

**Observação 1.2.1.** Observe que o número de condições iniciais é igual à ordem da EDO.

No caso de EDOs de ordem 2, também podemos fixar uma solução através da aplicação de **condições de contorno**. Neste caso, estamos interessados em obter a solução para valores da variável independente restritos a um intervalo fechado  $[t_0, t_1]$ . A solução é fixada pela determinação de seus valores nos pontos  $t_0$  e  $t_1$ . O problema de encontrar a solução de uma EDO com condições de contorno, é chamado de **Problema de Valor de Contorno (PVC)**.

**Exemplo 1.2.4.** Consideramos o seguinte problema de valores de contorno

$$y'' = 1, \quad 0 < t < 1, \quad (1.32)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}. \quad (1.33)$$

Integrando duas vezes a EDO, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.34)$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, \quad (1.35)$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = 0. \quad (1.36)$$

Desta forma, temos que a solução do PVC é

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1. \quad (1.37)$$

**Observação 1.2.2.** O número de constantes indeterminadas na solução geral está relacionado à ordem da EDO.

## Exercícios resolvidos

**ER 1.2.1.** Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y' = t + 1, \quad t > 0, \quad (1.38)$$

$$y(0) = 2. \quad (1.39)$$

**Solução.** Integrando a EDO obtemos

$$\int y' dt = \int t + 1 dt \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + t + c, \quad (1.40)$$

a qual é a solução geral da EDO.

Então, aplicando a condição inicial  $y(0) = 2$ , obtemos

$$c = 2. \quad (1.41)$$

Logo, a solução do PVC é  $y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 2$ .

◇

**ER 1.2.2.** Encontre a solução do seguinte problema de valor de contorno (PVC)

$$y'' = t + 1, \quad -1 < t < 1, \quad (1.42)$$

$$y(-1) = y(1) = 0. \quad (1.43)$$

**Solução.** Integrando duas vezes a EDO, obtemos

$$y'' = t + 1 \Rightarrow \int y'' dt = \int t + 1 dt \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{t^2}{2} + t + c_1 \quad (1.45)$$

$$\Rightarrow \int y' dt = \int \frac{t^2}{2} + t + c_1 dt \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (1.47)$$

Obtida a solução geral da EDO, aplicamos as condições de contorno

$$y(-1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 0 \quad (1.48)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0. \quad (1.49)$$

Ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema linear

$$-c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \quad (1.50)$$

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}. \quad (1.51)$$

Resolvendo, obtemos  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = \frac{1}{6}$ .

◇

**ER 1.2.3.** Determine o valor de  $x$  para o qual a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad x > 0, \quad (1.52)$$

$$y(0) = 0, \quad (1.53)$$

atinge seu valor máximo.

**Solução.** Lembramos que a monotonicidade de  $y = y(x)$  pode ser analisada a partir do estudo de sinal de  $dy/dx$ . Fazendo o estudo de sinal de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad (1.54)$$

vemos que  $dy/dx > 0$  para  $x \in (0, \ln 2)$  e  $dy/dx < 0$  para  $x \in (\ln 2, \infty)$ . Logo, temos que  $y = y(x)$  é crescente em  $[0, \ln 2]$  e decrescente em  $[\ln 2, \infty)$ . Desta forma, concluímos que a solução do PVI atinge seu valor máximo em  $x = \ln 2$ .

◇

## Exercícios

**E 1.2.1.** Resolva o seguinte PVI

$$y' = 0, \quad y(-1) = 1. \quad (1.55)$$

**E 1.2.2.** Resolva o seguinte PVI

$$y' = t, \quad y(-1) = 1. \quad (1.56)$$

**E 1.2.3.** Resolva o seguinte PVC

$$y'' = 1, \quad (1.57)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1. \quad (1.58)$$

**E 1.2.4.** Resolva o seguinte PVC

$$y'' = \sin(t), \quad (1.59)$$

$$y(-\pi) = y(\pi) = 0. \quad (1.60)$$

# Capítulo 2

## EDO de primeira ordem

### 2.1 Equação linear

A forma geral de uma **EDO linear de primeira ordem** é

$$P(t) \frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \quad (2.1)$$

onde  $P(t) \neq 0$ ,  $Q(t)$  e  $G(t)$  são funções de  $t$ . Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (2.2)$$

escolhendo  $p(t) = Q(t)/P(t)$  e  $g(t) = G(t)/P(t)$ .

#### 2.1.1 EDO autônoma e homogênea

Primeiramente, vamos considerar o caso em que  $p(t) \equiv a \neq 0$  (constante) e  $g(t) \equiv 0$ , i.e.

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0. \quad (2.3)$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -a \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} dy = -a dt. \quad (2.5)$$

Agora, integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int a dt \Rightarrow \ln |y| = -at + c \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow e^{\ln |y|} = e^{-at+c} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow e^{\ln |y|} = e^{-at} e^c \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow y = ce^{-at}, \quad (2.9)$$

onde  $c$  é uma constante indeterminada.

Com isso, temos que

$$y(t) = ce^{-at} \quad (2.10)$$

é **solução geral** da equação (2.3).

**Exemplo 2.1.1.** Vamos resolver o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' - y = 0, \quad t > 0, y(0) = 1. \quad (2.11)$$

Começamos calculando a solução geral da EDO:

$$y' = y \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 1 \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \int 1 dt \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \ln |y| = t + c \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow e^{\ln |y|} = e^{t+c} \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow y(t) = ce^t. \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

Por fim, aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow ce^0 = 1 \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow c = 1. \quad (2.19)$$

Concluimos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^t. \quad (2.20)$$



### 2.1.2 Método dos fatores integrantes

Vejamos, agora, o caso de uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t). \quad (2.21)$$

O **método dos fatores integrantes** consiste em multiplicarmos a equação por uma função  $\mu = \mu(t)$  (fator integrante) de forma que

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \frac{d}{dt}(\mu y). \quad (2.22)$$

Pela regra do produto para derivada, temos que

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu \frac{dy}{dt} + \mu' y. \quad (2.23)$$

Ou seja, tal função  $\mu$  deve satisfazer a seguinte EDO

$$\mu' = a\mu. \quad (2.24)$$

Usando o mesmo procedimento utilizado para (2.3), obtemos que

$$\mu(t) = ce^{at}. \quad (2.25)$$

Observamos que qualquer escolha de  $c \neq 0$  é apropriada e, por simplicidade, escolhemos  $c = 1$ . Ou seja, escolhemos o fator integrante

$$\mu(t) = e^{at}. \quad (2.26)$$

Agora, retornamos a equação (2.21). Multiplicando-a pelo fator integrante  $\mu(t) = e^{at}$ , obtemos

$$\mu \frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu g(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mu y) = \mu g(t) \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \int d(\mu y) = \int \mu g(t) dt \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow \mu y = \int \mu g(t) dt + c \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\mu} \left[ \int \mu g(t) dt + c \right]. \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) = e^{-at} \left[ \int g(t) e^{at} dt + c \right] \quad (2.32)$$

é a **solução geral** de (2.21).

**Exemplo 2.1.2.** Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' - y = 1. \quad (2.33)$$

Aplicando o método dos fatores integrantes, temos

$$\mu y' - \mu y = (\mu y)' \quad (2.34)$$

$$= \mu' y + \mu y'. \quad (2.35)$$

Ou seja, devemos escolher  $\mu$  tal que

$$\mu' = -\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -1 \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu = - \int 1 dt \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = -t + c \quad (2.38)$$

$$\Rightarrow \mu = ce^{-t}. \quad (2.39)$$

Por simplicidade, escolhemos  $\mu = e^{-t}$ .

Com isso, a EDO (2.33) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} (\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{-t} y) = e^{-t}. \quad (2.40)$$

Integrando, obtemos

$$e^{-t} y = \int e^{-t} dt \Rightarrow e^{-t} y(t) = -e^{-t} + c \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow y(t) = -e^t e^{-t} + ce^t \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow y(t) = -1 + ce^t, \quad (2.43)$$

a qual é a solução geral.

### 2.1.3 Caso geral

O caso geral de uma EDO linear de primeira ordem

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (2.44)$$

também pode ser resolvido pelo **método dos fatores integrantes**. Neste caso, o fator integrante  $\mu = \mu(t)$  deve ser escolhido de forma que

$$\mu y' + \mu p(t)y = (\mu y)' \quad (2.45)$$

$$= \mu' y + \mu y', \quad (2.46)$$

ou seja

$$\mu' = p(t)\mu. \quad (2.47)$$

Integrando, obtemos o **fator integrante**

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (2.48)$$

Usando este fator integrante, a equação (2.44) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu g(t). \quad (2.49)$$

Integrando, obtemos a **solução geral**

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int \mu(t)g(t) dt + c \right]. \quad (2.50)$$

**Exemplo 2.1.3.** Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = t. \quad (2.51)$$

Primeiramente, calculamos o fator integrante  $\mu = \mu(t)$  tal que

$$\mu y' + \mu \frac{1}{t}y = (\mu y)' = \mu' y + \mu y'. \quad (2.52)$$

Ou seja, precisamos que

$$\mu' = \frac{1}{t}\mu. \quad (2.53)$$

Integrando, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} \quad (2.54)$$

$$= e^{\ln|t|} \quad (2.55)$$

$$= t. \quad (2.56)$$

Aplicando o fator integrante a EDO (2.51), obtemos

$$\frac{d}{dt}(ty) = t^2 \Rightarrow ty = \int t^2 dt \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{t} \left[ \frac{t^3}{3} + c \right] \quad (2.58)$$

$$\Rightarrow y = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}. \quad (2.59)$$

## 2.1.4 Aplicação em modelagem

**Exemplo 2.1.4.** (Mistura em tanque) No instante inicial  $t = 0$  s (segundo), um tanque contém  $q_0$  kg (quilograma) de sal dissolvido em  $l$  L (litro) de água. Uma solução de  $s$  kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de  $r$  L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de  $r$  L/s.

Vamos modelar a quantidade de sal  $q$  kg presente no tanque a cada instante  $t$  s. Temos que  $q$  é função do tempo  $t$  s, i.e.  $q = q(t)$ . A condição inicial é

$$q(0) = q_0. \quad (2.60)$$

A taxa de variação de  $q$  no tempo é  $dq/dt$  e é modelada por

$$\frac{dq}{dt} = \underbrace{sr}_{\text{taxa de entrada}} - \underbrace{\frac{q}{l}r}_{\text{taxa de saída}}. \quad (2.61)$$

Ou seja, o problema é modelado como o seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = sr - \frac{q}{l}r, \quad t > 0, \quad (2.62)$$

$$q(0) = q_0, \quad (2.63)$$

onde  $s$ ,  $r$ ,  $l$  e  $q_0$  são parâmetros do problema. A EDO relacionada é linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Veja o Exercício Resolvido ??.

**Exemplo 2.1.5.** (Objeto em queda livre) Seja  $m$  kg a massa de um objeto em queda livre em um meio com resistência de  $\gamma$  kg/s e aceleração da gravidade de  $g$  m/s<sup>2</sup>. A segunda lei de Newton é a lei física que estabelece que a força total atuando sobre o objeto é igual a sua massa multiplicada por sua aceleração. Desta forma, obtemos

$$\underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{\text{massa} \times \text{aceleração}} = \underbrace{mg}_{\text{força da gravidade}} - \underbrace{\gamma v}_{\text{força da resistência}}, \quad (2.64)$$

onde  $v = v(t)$  m/s é a velocidade do objeto (sentido positivo igual ao da força da gravidade). Assumindo que o objeto tem velocidade  $v_0$  m/s no instante inicial  $t = 0$ , o modelo resume-se ao seguinte PVI:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \quad t > 0, \quad (2.65)$$

$$v(0) = v_0, \quad (2.66)$$

onde  $m$ ,  $g$ ,  $\gamma$  e  $v_0$  são parâmetros.

## Exercícios resolvidos

**ER 2.1.1.** Resolva o seguinte PVI

$$y' + y = 1, \quad t > 0, \quad (2.67)$$

$$y(0) = 2. \quad (2.68)$$

**Solução.** Primeiramente, obtemos a solução geral da EDO pelo método dos fatores integrante. Para tanto, buscamos pelo fator integrante  $\mu$  tal que

$$\mu y' + \mu y = (\mu y)', \quad (2.69)$$

ou seja,

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = e^t. \quad (2.70)$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^t y) = e^t. \quad (2.71)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y = 1 + ce^{-t}. \quad (2.72)$$

Aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + ce^{-0} = 2 \quad (2.73)$$

$$\Rightarrow c = 1. \quad (2.74)$$

Concluimos que a solução do PVI é  $y(t) = 1 + e^{-t}$ .

◇

**ER 2.1.2.** Calcule a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = \text{sen}(t), \quad t > 0. \quad (2.75)$$

**Solução.** Buscamos pelo fator integrante  $\mu$  tal que

$$\mu y' + \mu \frac{1}{t}y = (\mu y)', \quad (2.76)$$

ou seja,

$$\mu' = \frac{\mu}{t} \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln |t|} = t. \quad (2.77)$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot \text{sen}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = t \text{sen}(t). \quad (2.78)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{c}{t} + \frac{\text{sen}(t)}{t} - \cos(t). \quad (2.79)$$

◇

**ER 2.1.3.** (Mistura em tanque) No instante inicial  $t = 0$  s (segundo), um tanque contem 100 kg de sal dissolvidos em 1000 L d'água. Uma solução de 0,2 kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de 10 L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de sal misturado no tanque após 1 hora de operação, i.e. quando  $t = 3600$  s.

**Solução.** Denotando por  $q = q(t)$  kg a quantidade de sal misturado no tanque no instante  $t$ , temos que a taxa de variação de  $q$  no tempo é dada por

$$\frac{dq}{dt} = 0,2 \cdot 10 - \frac{q}{1000} \cdot 10 \quad (2.80)$$

$$= 2 - \frac{q}{100}. \quad (2.81)$$

Ou seja, o modelo constitui-se no seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = 2 - \frac{q}{100}, \quad t > 0, \quad (2.82)$$

$$q(0) = 100. \quad (2.83)$$

Para resolver o problema, vamos usar o método dos fatores integrantes. O fator integrante é escolhido como sendo

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} \quad (2.84)$$

$$= e^{t/100}. \quad (2.85)$$

Segue que a EDO (2.82) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} (qe^{t/100}) = 2e^{t/100}. \quad (2.86)$$

Integrando, obtemos

$$q(t) = e^{-t/100} \int 2e^{t/100} dt \quad (2.87)$$

$$= e^{-t/100} (200e^{t/100} + c) \quad (2.88)$$

$$= 200 + ce^{-t/100}. \quad (2.89)$$

Da condição inicial, obtemos

$$q(0) = 100 \Rightarrow 200 + c = 100 \quad (2.90)$$

$$\Rightarrow c = -100. \quad (2.91)$$

Logo, a solução do PVI é

$$q(t) = 200 - 100e^{-t/100}. \quad (2.92)$$

No tempo  $t = 3600$  s, temos

$$q(3600) = 200 - 100e^{-3600/100} \approx 200 \text{ kg}. \quad (2.93)$$

◇

## Exercícios

**E 2.1.1.** Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' + y = 0, \quad t > 0, \quad (2.94)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.95)$$

**E 2.1.2.** Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' - y = 2, \quad t > 0, \quad (2.96)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.97)$$

**E 2.1.3.** Calcule a solução geral da seguinte EDO

$$y' + y = \sin(t). \quad (2.98)$$

**E 2.1.4.** Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$y' + \frac{1}{t}y = 2t, \quad t > 1, \quad (2.99)$$

$$y(1) = 0. \quad (2.100)$$

**E 2.1.5.** Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$ty' + 2y = 1, \quad t > 1, \quad (2.101)$$

$$y(1) = 1. \quad (2.102)$$

**E 2.1.6.** Seja um objeto de massa  $m = 1$  kg em queda livre sujeito a aceleração da gravidade de  $9,8 \text{ m/s}^2$  e resistência do meio de  $\gamma = 0,2 \text{ kg/s}$ . Assuma, ainda, que o objeto está em repouso no tempo inicial e a uma altura de 10 m (metros) do solo. Quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.



## 2.2 Equação separável

Uma EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (2.103)$$

é dita ser uma **equação separável** quando pode ser reescrita na seguinte forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.104)$$

**Exemplo 2.2.1.** Vejamos os seguintes casos.

a) É separável a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad (2.105)$$

pois pode ser reescrita como segue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = x^2 \quad (2.106)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.107)$$

b) Não é separável a EDO

$$e^{xy} - x \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.108)$$

Observe que não há como reescrever esta equação na forma (2.104).

Agora, vamos ver como podemos resolver uma EDO separável. Consideremos a equação separável

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.109)$$

Sejam, também,  $F = F(x)$  e  $G = G(y)$  primitivas de  $M$  e  $N$ , respectivamente. I.e.

$$\frac{d}{dx} F(x) = M(x), \quad (2.110)$$

$$\frac{d}{dy} G(y) = N(y). \quad (2.111)$$

Lembrando que  $y = y(x)$ , temos da **regra da cadeia** que

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\frac{dy}{dx} \quad (2.112)$$

$$= N(y)\frac{dy}{dx}. \quad (2.113)$$

Ou seja, a EDO (2.109) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(y) = 0 \quad (2.114)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(y)) = 0. \quad (2.115)$$

Então, integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$F(x) + G(y) = c, \quad (2.116)$$

a qual é uma equação algébrica para  $y$  que, com sorte, pode ser usada para explicitar a solução da EDO (2.109).

**Exemplo 2.2.2.** Vamos resolver a seguinte EDO separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}. \quad (2.117)$$

a) **Método 1.** Primeiramente, reescrevemos a EDO no formato (2.104):

$$\underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.118)$$

Então, calculamos as primitivas

$$F(x) = \int M(x) dx \quad (2.119)$$

$$= \int -x^2 dx \quad (2.120)$$

$$= -\frac{x^3}{3} + c \quad (2.121)$$

e

$$G(y) = \int N(y) dy \quad (2.122)$$

$$= \int y dy \quad (2.123)$$

$$= \frac{y^2}{2} + c. \quad (2.124)$$

Então, segue que a EDO resume-se a seguinte equação algébrica

$$F(x) + G(y) = c \Rightarrow -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c, \quad (2.125)$$

a qual é uma equação implícita da solução geral  $y = y(x)$ .

b) **Método 2.** A EDO separável

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2.126)$$

pode ser reescrita como

$$y dy = x^2 dx. \quad (2.127)$$

Integrando ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c, \quad (2.128)$$

a qual é equivalente a solução obtida em (2.125).

**Observação 2.2.1.** Como vimos no exemplo anterior (Exemplo 2.2.2), a solução geral de uma EDO separável nem sempre pode ser explicitada. Em muitos casos o procedimento de separar as variáveis nos leva a obter a solução da EDO na forma de uma equação algébrica implícita.

### 2.2.1 Equação de Verhulst

A **equação de Verhulst**<sup>1</sup> (ou **equação logística**) é um clássico modelo de crescimento populacional. Trata-se da seguinte equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (2.129)$$

---

<sup>1</sup>Pierre François Verhulst, 1804-1849, matemático belga.

onde  $y$  é a medida de tamanho da população e os parâmetros são:  $r > 0$  a taxa de crescimento intrínseca e  $K > 0$  o nível de saturação.

Antes de resolvermos esta equação, vamos fazer algumas observações que podem ser obtidas diretamente da EDO. Do cálculo, temos que se  $dy/dt = 0$  para todos os valores de  $t$ , então  $y$  é constante, i.e. a população se mantém constante. A derivada é nula quando o lado direito de (2.129) for nulo, i.e.

$$r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y = 0. \quad (2.130)$$

Isso ocorre quando  $y = 0$  ou quando  $y = K$ . Ou seja, se a população é nula não há crescimento populacional, bem como, não há crescimento se a população estiver em seu nível de saturação.

Agora, o que ocorre se a população for  $0 < y < K$ ? Neste caso, temos

$$\frac{dy}{dt} = r \underbrace{\left( 1 - \frac{y}{K} \right)}_{>0} y > 0, \quad (2.131)$$

ou seja, a população cresce. Por outro lado, se  $y > K$  (a população está acima de seu nível de saturação), então

$$\frac{dy}{dt} = r \underbrace{\left( 1 - \frac{y}{K} \right)}_{<0} y < 0, \quad (2.132)$$

a população decresce. Estas conclusões também nos levam a inferir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K, \quad (2.133)$$

para qualquer população inicial não nula.

## Solução da equação logística

Consideramos o seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt} = r \left( 1 - \frac{y}{K} \right) y, \quad t > 0, \quad (2.134)$$

$$y(0) = y_0. \quad (2.135)$$

A equação de Verhulst é uma EDO separável, daí segue que

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y} dy = r dt. \quad (2.136)$$

Vamos integrar o lado direito desta última equação:

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y} dy = \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} \right) dy \quad (2.137)$$

$$= \ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right|. \quad (2.138)$$

Logo, a solução da equação logística satisfaz a seguinte equação algébrica

$$\ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| = rt + c, \quad (2.139)$$

onde  $c$  é uma constante a determinar. Antes, observamos que esta equação é equivalente a

$$\ln \left| \frac{y}{1 - \frac{y}{K}} \right| = rt + c. \quad (2.140)$$

Aplicando a função exponencial, obtemos

$$\frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}. \quad (2.141)$$

Da condição inicial  $y(0) = y_0$ , encontramos

$$c = \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \quad (2.142)$$

Agora, isolando  $y$  em (2.141), vemos que

$$y = \frac{ce^{rt}}{1 + \frac{c}{K}e^{rt}} \quad (2.143)$$

$$= \frac{K}{\frac{K}{c}e^{-rt} + 1} \quad (2.144)$$

Por fim, de (2.142), obtemos a solução

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \quad (2.145)$$

Da solução, corroboramos que a população permanece constante quando  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = K$ . Ainda, se  $0 < y_0 < K$  ou  $y_0 > K$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}} = 0 \quad (2.146)$$

$$= K. \quad (2.147)$$

## Exercícios resolvidos

**ER 2.2.1.** Calcule a solução geral da EDO

$$y' = 2y^2 + xy^2. \quad (2.148)$$

**Solução.** Separando as variáveis, obtemos

$$y' = 2y^2 + xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(2 + x) \quad (2.149)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = (2 + x) dx. \quad (2.150)$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c. \quad (2.151)$$

◇

**ER 2.2.2.** Calcule a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad x > 0, \quad y(0) = 2. \quad (2.152)$$

**Solução.** Separamos as variáveis e integramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y dy = x^2 dx \quad (2.153)$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int x^2 dx \quad (2.154)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c. \quad (2.155)$$

Determinamos a constante  $c$  pela aplicação da condição inicial  $y(0) = 1$ . Ou seja, temos

$$\frac{y^2(0)}{2} = \frac{0^3}{3} + c \Rightarrow c = 2. \quad (2.156)$$

Logo, a solução  $y = y(x)$  do PVI é dada pela equação algébrica

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2. \quad (2.157)$$

Buscando explicitar a solução, observamos que

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \quad (2.158)$$

Lembrando que  $y(0) = 2$ , temos necessariamente que

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \quad (2.159)$$

◇

**ER 2.2.3.** (Crescimento populacional com limiar) Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ . Forneça os valores de  $y_0$  para os quais a população é crescente.

**Solução.** A população  $y$  é crescente quando

$$\frac{dy}{dt} > 0. \quad (2.160)$$

Logo, precisamos ter

$$-r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y > 0. \quad (2.161)$$

Isto ocorre quando

$$1 - \frac{y}{L} < 0 \Rightarrow y > L. \quad (2.162)$$

Logo, concluímos que uma população inicial  $y_0 > L$  é necessária para produzir uma taxa de crescimento populacional positiva.

◇

## Exercícios

**E 2.2.1.** Calcule a solução de

$$\frac{dy}{dx} = xe^y, \quad x > 0, \quad (2.163)$$

$$y(0) = 1. \quad (2.164)$$

**E 2.2.2.** Resolva a EDO

$$y' + y^2 \cos x = 0. \quad (2.165)$$

**E 2.2.3.** Resolva o PVI

$$e^{x+y}y' = 1, \quad x > 0, y(0) = 0. \quad (2.166)$$

**E 2.2.4.** Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ . Qual é a tendência da população  $y = y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e

- a)  $y_0 = 0$ ;
- b)  $0 < y_0 < L$ ;
- c)  $y_0 = L$ ;
- d)  $y_0 > L$

**E 2.2.5.** Resolva o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r, L > 0$ .



**E 2.2.6.** Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -r \left(1 - \frac{y}{L}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

onde  $y = y(t)$  é o tamanho da população,  $y_0 \geq 0$  é a população inicial e são parâmetros  $r > 0$ ,  $K > L > 0$ . Qual é a tendência da população  $y = y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  e

- a)  $y_0 = 0$ ;
- b)  $0 < y_0 < L$ ;
- c)  $y_0 = L$
- d)  $L < y_0 < K$ ;
- e)  $y_0 = K$
- f)  $y_0 > K$

## 2.3 Equação exata

Uma EDO

$$M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.167)$$

é uma **equação exata** quando

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y). \quad (2.168)$$

Neste caso, pode-se calcular uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.169)$$

Com isso, a EDO (2.167) é equivalente a

$$\frac{d}{dx} \Psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \Psi + \frac{\partial}{\partial y} \Psi \frac{dy}{dx} \quad (2.170)$$

$$= M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} \quad (2.171)$$

$$= 0. \quad (2.172)$$

Logo, temos a **solução geral**

$$\Psi(x,y) = c. \quad (2.173)$$

**Exemplo 2.3.1.** Vamos resolver a seguinte EDO

$$(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.174)$$

Denotamos

$$M(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2, \quad (2.175)$$

$$N(x,y) = 6y^2 - x^2 + 3. \quad (2.176)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = -2x, \quad (2.177)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = -2x, \quad (2.178)$$

vemos que (2.174) é uma equação exata. Desta forma, buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x,y)$  tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.179)$$

a) **Método 1.** Podemos calcular  $\Psi$  a partir de

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y). \quad (2.180)$$

Integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y) dx + f(y) \quad (2.181)$$

$$= \int 3x^2 - 2xy + 2 dx + f(y) \quad (2.182)$$

$$= x^3 - x^2y + 2x + f(y). \quad (2.183)$$

Para encontrar  $f(y)$ , usamos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.184)$$

No caso, temos

$$-x^2 + f'(y) = 6y^2 - x^2 + 3, \quad (2.185)$$

donde

$$f'(y) = 6y^2 + 3. \quad (2.186)$$

Integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$f(y) = \int 6y^2 + 3 \, dy \quad (2.187)$$

$$= 2y^3 + 3y + c. \quad (2.188)$$

Concluimos que

$$\Psi(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y + c. \quad (2.189)$$

A solução geral da EDO é dada pela equação implícita

$$x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c. \quad (2.190)$$

b) **Método 2.** Partimos da equação

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.191)$$

Integrando em relação a  $y$ , obtemos

$$\Psi(x,y) = \int N(x,y) \, dy + g(x) \quad (2.192)$$

$$= \int 6y^2 - x^2 + 3 \, dy + g(x) \quad (2.193)$$

$$= 2y^3 - x^2y + 3y + g(x). \quad (2.194)$$

Agora, usando

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad (2.195)$$

temos

$$-2xy + g'(x) = 3x^2 - 2xy + 2 \quad (2.196)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2. \quad (2.197)$$

Integrando em relação a  $x$ , obtemos

$$g(x) = \int 3x^2 + 2 dx + c \quad (2.198)$$

$$= x^3 + 2x + c. \quad (2.199)$$

Ou seja, obtivemos

$$\Psi(x, y) = 2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x + c, \quad (2.200)$$

o que nos fornece a solução geral

$$2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x = c. \quad (2.201)$$

### 2.3.1 Método dos fatores integrantes

Para algumas equações

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.202)$$

não exatas é possível aplicar o método dos fatores integrantes para convertê-las em equações exatas.

A ideia é buscar por um fator integrante  $\mu = \mu(x, y)$  tal que

$$\mu M(x, y) + \mu N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.203)$$

seja uma equação exata, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu N(x, y)). \quad (2.204)$$

Ou seja,  $\mu$  deve ser tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu M(x, y)) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu N(x, y)) = 0 \quad (2.205)$$

$$\Rightarrow \mu_y M + \mu M_y - \mu_x N - \mu N_x = 0. \quad (2.206)$$

Com isso, pode-se concluir que  $\mu = \mu(x, y)$  deve satisfazer

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \quad (2.207)$$

Em geral, resolver (2.207) pode ser tão ou mais difícil que resolver a EDO original (2.202). Vejamos alguns casos em que é possível encontrar o fator  $\mu$ .

$$\mu = \mu(x)$$

No caso de  $\mu = \mu(x)$  (função de  $x$  apenas), a equação (2.207) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (2.208)$$

Ou seja, se

$$\frac{M_y - N_x}{N} \quad (2.209)$$

é função apenas de  $x$ , então podemos calcular um fator integrante  $\mu = \mu(x)$  resolvendo a EDO linear (2.208).

**Exemplo 2.3.2.** Vamos resolver a EDO

$$(x + 2) \sin(y) + x \cos(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.210)$$

Denotando

$$M(x, y) = (x + 2) \sin(y) \quad (2.211)$$

$$N(x, y) = x \cos(y) \quad (2.212)$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = (x + 2) \cos(y) \neq \cos(y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y). \quad (2.213)$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(x + 2) \cos(y) - \cos(y)}{x \cos(y)} \quad (2.214)$$

$$= \frac{x + 1}{x} \quad (2.215)$$

é função apenas de  $x$ , o que nos indica a existência de um fator integrante  $\mu = \mu(x)$  satisfazendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d}{dx} \mu = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (2.216)$$

Ou seja, resolvemos

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x+1}{x}\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{x+1}{x} dx \quad (2.217)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = x + \ln |x| + c \quad (2.218)$$

$$\Rightarrow \mu = cxe^x. \quad (2.219)$$

Com isso, escolhendo o fator integrante  $\mu = xe^x$  a equação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.220)$$

é exata e é equivalente a EDO (2.210). De fato, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + 2x)e^x \sin(y)] \quad (2.221)$$

$$= (x^2 + 2x)e^x \cos(y) \quad (2.222)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [x^2 e^x \cos(y)] \quad (2.223)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \quad (2.224)$$

Para resolver (2.220), buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = \mu N \Rightarrow \Psi(x, y) = \int x^2 e^x \cos(y) dy + f(x) \quad (2.225)$$

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = x^2 e^x \sin(y) + f(x). \quad (2.226)$$

Bem como,  $\Psi$  deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) = \mu M \Rightarrow (x^2 + 2x)e^x \sin(y) + f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \sin(y) \quad (2.227)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad (2.228)$$

$$\Rightarrow f(x) = c. \quad (2.229)$$

Logo, podemos concluir que a solução geral de (2.210) é dada por

$$x^2 e^x \sin(y) = c. \quad (2.230)$$

$$\mu = \mu(y)$$

No caso de  $\mu = \mu(y)$  (função de  $y$  apenas), a equação (2.207) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M} \mu. \quad (2.231)$$

Ou seja, se

$$\frac{N_x - M_y}{M} \quad (2.232)$$

é função apenas de  $y$ , então podemos calcular um fator integrante  $\mu = \mu(y)$  resolvendo a EDO linear (2.231).

**Exemplo 2.3.3.** Vamos resolver a EDO

$$y + (2x - ye^y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.233)$$

Denotando

$$M(x,y) = y \quad (2.234)$$

$$N(x,y) = 2x - ye^y \quad (2.235)$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = 1 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y). \quad (2.236)$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y} \quad (2.237)$$

é função apenas de  $y$ . Com isso, podemos obter um fator integrante  $\mu = \mu(y)$  resolvendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{M_y - N_x}{M} \mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{y} \mu \quad (2.238)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{y} dy \quad (2.239)$$

$$\Rightarrow \ln |\mu| = \ln |y| + c \quad (2.240)$$

$$\Rightarrow \mu = cy. \quad (2.241)$$

Desta forma, podemos escolher o fator integrante  $\mu = y$  de forma que a equação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.242)$$

é exata e equivalente a EDO (2.233). De fato, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \quad (2.243)$$

$$= 2y \quad (2.244)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [(2x - ye^y)y] \quad (2.245)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \quad (2.246)$$

Sendo (2.242) uma equação exata, buscamos por uma função  $\Psi = \Psi(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) = \mu M(x, y) \Rightarrow \Psi(x, y) = \int y^2 dx + f(y) \quad (2.247)$$

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = xy^2 + f(y). \quad (2.248)$$

Bem como,

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = \mu N(x, y) \Rightarrow 2xy + f'(y) = 2xy - y^2 e^y \quad (2.249)$$

$$\Rightarrow f'(y) = -y^2 e^y \quad (2.250)$$

$$\Rightarrow f(y) = -(y^2 - 2y + 2)e^y + c. \quad (2.251)$$

Logo, concluímos que a solução geral da EDO (2.233) é

$$xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c. \quad (2.252)$$

## Exercícios resolvidos

Em construção ...

## Exercícios

Em construção ...



# Resposta dos Exercícios

**E 1.1.1.** a), c)

**E 1.1.2.** a) 1; b) 3; c) 2; d) 2.

**E 1.1.3.** a), d).

**E 1.1.4.** a), b).

**E 1.1.5.** a)  $\{-3, 2\}$ ; b)  $\{0, 3\}$

**E 1.1.6.**  $\{-1, 2\}$ .

**E 1.2.1.**  $y(t) = 1$ .

**E 1.2.2.**  $y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$ .

**E 1.2.3.**  $y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}t + 1$ .

**E 1.2.4.**  $y(t) = -\text{sen}(t)$ .

**E 2.1.1.**  $y(t) = e^{-t}$

**E 2.1.2.**  $y(t) = 3e^t - 2$

**E 2.1.3.**  $y(t) = ce^{-t} + \frac{\text{sen}(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$

**E 2.1.4.**  $y(t) = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{t} + t^2 \right)$

**E 2.1.5.**  $y(t) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t^2} + 1 \right)$

**E 2.1.6.** 1.5 s

**E 2.2.1.**  $y(x) = \ln \left( \frac{2}{2e^{-1} - x^2} \right)$ .

**E 2.2.2.**  $y(x) = \frac{1}{c + \sin x}$

**E 2.2.3.**  $y(x) = \ln (c - e^{-x})$

**E 2.2.4.** a)  $y(t) \equiv 0$ ; b)  $y(t) \rightarrow 0$ ; c)  $y(t) \equiv L$ ; d)  $y(t) \rightarrow \infty$ .

**E 2.2.5.**  $y(t) = \frac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{rt}}$ .

**E 2.2.6.** a)  $y(t) \equiv 0$ ; b)  $y(t) \rightarrow 0$ ; c)  $y(t) \equiv L$ ; d)  $y(t) \rightarrow K$ ; e)  $y(t) \equiv K$ ; f)  $y(t) \rightarrow K$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.
- [2] E.C. Oliveira and J.E. Maiorino. *Introdução aos métodos de matemática aplicada*. Unicamp, 2. edition, 2013.