Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro H A Konzen

1 de abril de 2020

Licença

Prefácio

Nestas notas de aula são abordados temas introdutórios sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Como ferramenta computacional de apoio, exemplos de aplicação de códigos Python são apresentados, mais especificamente, com suporte da biblioteca de matemática simbólica SymPy.

Agradeço aos(às) estudantes e colegas que assiduamente ou esporadicamente contribuem com correções, sugestões e críticas em prol do desenvolvimento deste material didático.

Pedro H A Konzen

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Equações diferenciais

Equação Diferencial (ED) é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita.

Exemplo 1.1.1. São exemplos de equações diferenciais:

a) Modelo de queda de um corpo com resistência do ar.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \tag{1.1}$$

Nesta equação, temos a velocidade $v = v(t)$ (v função de t) como **incógnita**. O tempo é descrito por t como uma variável independente. As demais letras correspondem a parâmetros dados (constantes). Mais especificamente, g corresponde à gravidade, k à resistência do ar e m à massa do corpo.

b) Equação de Verhulst (Equação Logística)

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y. \tag{1.2}$$

Esta equação é um clássico modelo de crescimento populacional. Aqui, $y = y(t)$ é o tamanho da população (incógnita) no tempo t (variável independente). As demais letras correspondem a parâmetros dados.

c) Equação de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{kx^2}{2}\psi=E\psi. \tag{1.3}$$

Esta equação modela a função de onda ψ (incógnita) de uma partícula em função de sua posição x (modelo unidimensional). Neste modelo quântico, $\hbar$, m, k e E são parâmetros.

d) Modelagem da corrente em um circuito elétrico.

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E. \tag{1.4}$$

Aqui, a incógnita é função corrente I em função do tempo. O modelo refere-se a um circuito elétrico com os seguintes parâmetros: L indutância, R resistência, C capacitância e E voltagem do gerador.

e) Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.5}$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura (incógnita) $u=u(t,x)$ como função do tempo e da posição (variáveis independentes). O parâmetro é o coeficiente de difusão térmica α.

Equação Diferencial Ordinária (EDO) é aquela em a incógnita é função apenas de uma variável independente. Desta forma, todas as derivadas que aparecem na equação são ordinárias. No Exemplo 1.1.1, as equações diferenciais a), b), c) e d) são ordinárias. A equação e) não é ordinária, pois a incógnita $u=u(t,x)$ é função das varáveis independentes t e x, portanto, os termos diferenciais são parciais (derivadas parciais). Equações como esta são chamadas de equações diferenciais parciais.
Toda EDO pode ser escrita na seguinte forma geral

$$F(t,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.6}$$

Aqui, F é uma função envolvendo a variável independente t e a variável dependente $y=y(t)$ (incógnita, função de t) e pelo menos uma derivada ordinária de y em relação a t[1]. O índice n corresponde a **ordem** da derivada

[1]Lembre-se que $y'=\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{d^2y}{dt^2}$ e assim por diante.

de maior ordem que aparece na equação, sendo $n \geq 1$. Quando F é função linear das variáveis y, y', $\cdots$, $y^{(n)}$, então a EDO é dita ser **linear**, caso contrário, é **não linear**. Quando F não dependente explicitamente de t, a equação é dita ser **autônoma**.

Exemplo 1.1.2. Vejamos os seguintes casos:

a) A equação
$$y'' + y = 0 \tag{1.7}$$
é uma EDO de ordem 2, linear e autônoma. Aqui, temos $F(y, y'') = y'' + y$.

b) As equações (1.1) e (1.2) são EDOs de **primeira ordem** (de ordem 1), autônomas e não lineares.

c) A Equação de Schrödinger (1.3) é uma EDO de **segunda ordem**, linear e não autônoma.

Uma **solução** de uma EDO (1.6) é uma função $y = y(t)$ que satisfaça a equação para todos os valores de t[2].

Exemplo 1.1.3. As funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da equação diferencial ordinária
$$y'' - y = 0. \tag{1.8}$$
De fato, tomando $y = y_1(t) = e^t$, temos $y'' = e^t$ e
$$y'' - y = e^t - e^t = 0 \tag{1.9}$$
para todo t. Também, tomando $y = y_2(t) = e^{-t}$, temos $y'' = e^{-t}$ e
$$y'' - y = e^{-t} - e^{-t} = 0, \quad \forall t. \tag{1.10}$$

Exercícios resolvidos

ER 1.1.1. Determine a ordem e diga se a seguinte EDO é linear ou autônoma. Justifique suas respostas.
$$t^2 \frac{dy}{dt} + (1 + y^2)\frac{d^2y}{dt} + y = e^t. \tag{1.11}$$

[2]Em várias situações o domínio de interesse de t é também informado junto com a equação. Veremos isso mais adiante.

Solução.

a) Ordem 2.

   A equação tem ordem 2, pois o termo diferencial de maior ordem é uma derivada de segunda ordem.

b) EDO é não linear.

   A equação tem um termo $y^2\frac{d^2y}{dt}$, o qual não é linear em y.

c) EDO não é autônoma.

   A equação não é autônoma, pois a variável independente t aparece explicitamente. A saber, no primeiro termo do lado esquerdo e no termo fonte da equação.

◊

ER 1.1.2. Determine os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ é solução da equação

$$y'' - y = 0. \tag{1.12}$$

ER 1.1.3. Para que $y = e^{rt}$ seja solução da equação dada, devemos ter

$$\begin{aligned}
y'' - y = 0 &\Rightarrow \left(e^{rt}\right)'' - e^{rt} = 0 &(1.13)\\
&\Rightarrow r^2e^{rt} - e^{rt} = 0 &(1.14)\\
&\Rightarrow (r^2 - 1)\cdot \underbrace{e^{rt}}_{>0} = 0 &(1.15)\\
&\Rightarrow r^2 - 1 = 0 &(1.16)\\
&\Rightarrow r = \pm 1. &(1.17)
\end{aligned}$$

Exercícios

E 1.1.1. Determine quais das seguintes são EDOs. Justifique sua resposta.

a) $y = y''$.

b) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}$.

c) $y \cdot \dfrac{d^5y}{dx^5} = x\ln(y) + \dfrac{d}{dx}e^{x^2}$.

d) $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, sendo α um parâmetro.

E 1.1.2. Determine a ordem das seguintes EDOs. Justifique sua resposta.

a) $t^2y' = e^t$.

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^3y}{dt^3}$.

c) $y \cdot y'' - 3y'' = y - y'$.

d) $\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = e^t$.

E 1.1.3. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 não são autônomas. Justifique sua resposta.

E 1.1.4. Determine quais das equações do Exercício 1.1.2 são lineares. Justifique sua resposta.

E 1.1.5. Para cada equação a seguir, calcule os valores de r para os quais $y = e^{rt}$ seja solução da equação.

a) $y'' + y' - 6y = 0$.

b) $y''' = 3y''$.

E 1.1.6. Calcule os valores de α para os quais $y = t^\alpha$, $t > 0$, seja solução da equação

$$t^2y'' = 2y. \tag{1.18}$$

1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) pode ter infinitas soluções.

Exemplo 1.2.1. A EDO

$$y' = 1 \tag{1.19}$$

tem soluções

$$\int y'\,dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y = t + c, \tag{1.20}$$

onde c é uma constante indeterminada.

Afim de fixar uma solução única para tais EDOs, comumente define-se uma **condição inicial** apropriada, i.e. o valor da solução para um dado valor da variável independente. O problema de resolver uma EDO com condição inicial dada é chamado de **Problema de Valor Inicial** (PVI).

Exemplo 1.2.2. No exemplo anterior, t é a variável independente. Assim, por exemplo,

$$y(t_0) = y(0) = 1 \tag{1.21}$$

é um exemplo de uma condição inicial. Neste caso, determinamos a constante c com

$$y(t) = t + c \Rightarrow y(0) = 0 + c = 1 \tag{1.22}$$

$$\Rightarrow c = 1. \tag{1.23}$$

Ou seja, a solução deste problema de valor inicial é $y(t) = t + 1$.

EDOs de segunda ordem podem requer duas condições iniciais.

Exemplo 1.2.3. Consideramos o seguinte problema de valores iniciais

$$y'' = 1, \tag{1.24}$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \tag{1.25}$$

Integrando a EDO, obtemos

$$\int y''\,dt = \int 1 \cdot dt \Rightarrow y' = t + c_1. \tag{1.26}$$

Integrando novamente

$$\int y'\,dt = \int t + c_1\,dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.27}$$

Com isso, obtemos a chamada **solução geral** desta EDO

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.28}$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0 \tag{1.29}$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1. \tag{1.30}$$

Da segunda condição, obtemos $c_1 = 0$. Logo, da primeira, obtemos $c_2 = -\frac{1}{2}$. Portanto, a solução deste PVI de ordem 2 é:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}. \tag{1.31}$$

Observação 1.2.1. Observe que o número de condições iniciais é igual à ordem da EDO.

No caso de EDOs de ordem 2, também podemos fixar uma solução através da aplicação de **condições de contorno**. Neste caso, estamos interessados em obter a solução para valores da variável independente restritos a um intervalo fechado $[t_0, t_1]$. A solução é fixada pela determinação de seus valores nos pontos t_0 e t_1. O problema de encontrar a solução de uma EDO com condições de contorno, é chamado de **Problema de Valor de Contorno (PVC)**.

Exemplo 1.2.4. Consideramos o seguinte problema de valores de contorno

$$y'' = 1, \quad 0 < t < 1, \tag{1.32}$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}. \tag{1.33}$$

Integrando duas vezes a EDO, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.34}$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1, \tag{1.35}$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = 0. \tag{1.36}$$

Desta forma, temos que a solução do PVC é

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1. \tag{1.37}$$

Observação 1.2.2. O número de constantes indeterminadas na solução geral está relacionado à ordem da EDO.

Exercícios resolvidos

ER 1.2.1. Encontre a solução do seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$y' = t + 1, \quad t > 0, \tag{1.38}$$
$$y(0) = 2. \tag{1.39}$$

Solução. Integrando a EDO obtemos

$$\int y'\,dt = \int t + 1\,dt \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + t + c, \tag{1.40}$$

a qual é a solução geral da EDO.
Então, aplicando a condição inicial $y(0) = 2$, obtemos

$$c = 2. \tag{1.41}$$

Logo, a solução do PVC é $y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 2$.

◊

ER 1.2.2. Encontre a solução do seguinte problema de valor de contorno (PVC)

$$y'' = t + 1, \quad -1 < t < 1, \tag{1.42}$$
$$y(-1) = y(1) = 0. \tag{1.43}$$

Solução. Integrando duas vezes a EDO, obtemos

$$y'' = t + 1 \Rightarrow \int y''\,dt = \int t + 1\,dt \tag{1.44}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{t^2}{2} + t + c_1 \tag{1.45}$$
$$\Rightarrow \int y'\,dt = \int \frac{t^2}{2} + t + c_1\,dt \tag{1.46}$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{1.47}$$

Obtida a solução geral da EDO, aplicamos as condições de contorno

$$y(-1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 0 \tag{1.48}$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0. \tag{1.49}$$

Ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema linear

$$-c_1 + c_2 = -\frac{1}{3} \tag{1.50}$$

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}. \tag{1.51}$$

Resolvendo, obtemos $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{6}$.

◊

ER 1.2.3. Determine o valor de x para o qual a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \quad x > 0, \tag{1.52}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.53}$$

atinge seu valor máximo.

Solução. Lembramos que a monotonicidade de $y = y(x)$ pode ser analisada a partir do estudo de sinal de dy/dx. Fazendo o estudo de sinal de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^x}{1 + y^2}, \tag{1.54}$$

vemos que $dy/dx > 0$ para $x \in (0, \ln 2)$ e $dy/dx < 0$ para $x \in (\ln 2, \infty)$. Logo, temos que $y = y(x)$ é crescente em $[0, \ln 2]$ e decrescente em $[\ln 2, \infty)$. Desta forma, concluímos que a solução do PVI atinge seu valor máximo em $x = \ln 2$.

◊

Exercícios

E 1.2.1. Resolva o seguinte PVI

$$y' = 0, \quad y(-1) = 1. \tag{1.55}$$

E 1.2.2. Resolva o seguinte PVI

$$y' = t, \quad y(-1) = 1. \tag{1.56}$$

E 1.2.3. Resolva o seguinte PVC

$$y'' = 1, \tag{1.57}$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1. \tag{1.58}$$

E 1.2.4. Resolva o seguinte PVC

$$y'' = \operatorname{sen}(t), \tag{1.59}$$
$$y(-\pi) = y(\pi) = 0. \tag{1.60}$$

Capítulo 2

EDO de primeira ordem

2.1 Equação linear

A forma geral de uma **EDO linear de primeira ordem** é

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{2.1}$$

onde $P(t) \neq 0$, $Q(t)$ e $G(t)$ são funções de t. Esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{2.2}$$

escolhendo $p(t) = Q(t)/P(t)$ e $g(t) = G(t)/P(t)$.

2.1.1 EDO autônoma e homogênea

Primeiramente, vamos considerar o caso em que $p(t) \equiv a \neq 0$ (constante) e $g(t) \equiv 0$, i.e.

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0. \tag{2.3}$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = -ay \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a \tag{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -a\,dt. \tag{2.5}$$

Agora, integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int a\,dt \Rightarrow \ln|y| = -at + c \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-at+c} \tag{2.7}$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-at}e^{c} \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow y = ce^{-at}, \tag{2.9}$$

onde c é uma constante indeterminada.
Com isso, temos que

$$y(t) = ce^{-at} \tag{2.10}$$

é **solução geral** da equação (2.3).

Exemplo 2.1.1. Vamos resolver o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' - y = 0, \quad t > 0, y(0) = 1. \tag{2.11}$$

Começamos calculando a solução geral da EDO:

$$y' = y \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1 \tag{2.12}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{=}\int 1\,dt \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = t + c \tag{2.14}$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{t+c} \tag{2.15}$$

$$\Rightarrow y(t) = ce^{t}. \tag{2.16}$$

$$\tag{2.17}$$

Por fim, aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow ce^{0} = 1 \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow c = 1. \tag{2.19}$$

Concluímos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^{t}. \tag{2.20}$$

2.1.2 Método dos fatores integrantes

Vejamos, agora, o caso de uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t). \tag{2.21}$$

O **método dos fatores integrantes** consiste em multiplicarmos a equação por uma função $\mu = \mu(t)$ (fator integrante) de forma que

$$\mu\frac{dy}{dt} + \mu ay = \frac{d}{dt}\left(\mu y\right). \tag{2.22}$$

Pela regra do produto para derivada, temos que

$$\mu\frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu\frac{dy}{dt} + \mu' y. \tag{2.23}$$

Ou seja, tal função μ deve satisfazer a seguinte EDO

$$\mu' = a\mu. \tag{2.24}$$

Usando o mesmo procedimento utilizado para (2.3), obtemos que

$$\mu(t) = ce^{at}. \tag{2.25}$$

Observamos que qualquer escolha de $c \neq 0$ é apropriada e, por simplicidade, escolhemos $c = 1$. Ou seja, escolhemos o fator integrante

$$\mu(t) = e^{at}. \tag{2.26}$$

Agora, retornamos a equação (2.21). Multiplicando-a pelo fator integrante $\mu(t) = e^{at}$, obtemos

$$\begin{align}
\mu\frac{dy}{dt} + \mu ay = \mu g(t) &\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mu y\right) = \mu g(t) \tag{2.27}\\
&\Rightarrow \int d(\mu y) = \int \mu g(t)\, dt \tag{2.28}\\
&\Rightarrow \mu y = \int \mu g(t)\, dt + c \tag{2.29}\\
&\Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu g(t)\, dt + c\right]. \tag{2.30}\\
& \tag{2.31}
\end{align}$$

Portanto, concluímos que

$$y(t) = e^{-at}\left[\int g(t)e^{at}\,dt + c\right] \tag{2.32}$$

é a **solução geral** de (2.21).

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' - y = 1. \tag{2.33}$$

Aplicando o método dos fatores integrantes, temos

$$\begin{aligned}\mu y' - \mu y &= (\mu y)' &(2.34)\\ &= \mu' y + \mu y'. &(2.35)\end{aligned}$$

Ou seja, devemos escolher μ tal que

$$\begin{aligned}\mu' = -\mu &\Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -1 &(2.36)\\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\mu}\,d\mu = -\int 1\,d\mu &(2.37)\\ &\Rightarrow \ln|\mu| = -t + c &(2.38)\\ &\Rightarrow \mu = ce^{-t}. &(2.39)\end{aligned}$$

Por simplicidade, escolhemos $\mu = e^{-t}$.
Com isso, a EDO (2.33) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t}y\right) = e^{-t}. \tag{2.40}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned}e^{-t}y = \int e^{-t}\,dt &\Rightarrow e^{-t}y(t) = -e^{-t} + c &(2.41)\\ &\Rightarrow y(t) = -e^{t}e^{-t} + ce^{t} &(2.42)\\ &\Rightarrow y(t) = -1 + ce^{t}, &(2.43)\end{aligned}$$

a qual é a solução geral.

2.1.3 Caso geral

O caso geral de uma EDO linear de primeira ordem

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{2.44}$$

também pode ser resolvido pelo **método dos fatores integrantes**. Neste caso, o fator integrante $\mu = \mu(t)$ deve ser escolhido de forma que

$$\begin{aligned} \mu y' + \mu p(t)y &= (\mu y)' \qquad (2.45)\\ &= \mu' y + \mu y', \qquad (2.46)\end{aligned}$$

ou seja

$$\mu' = p(t)\mu. \tag{2.47}$$

Integrando, obtemos o **fator integrante**

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}. \tag{2.48}$$

Usando este fator integrante, a equação (2.44) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu g(t). \tag{2.49}$$

Integrando, obtemos a **solução geral**

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)g(t)\,dt + c\right]. \tag{2.50}$$

Exemplo 2.1.3. Vamos calcular a solução geral da seguinte EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = t. \tag{2.51}$$

Primeiramente, calculamos o fator integrante $\mu = \mu(t)$ tal que

$$\mu y' + \mu\frac{1}{t}y = (\mu y)' = \mu' y + \mu y'. \tag{2.52}$$

Ou seja, precisamos que

$$\mu' = \frac{1}{t}\mu. \tag{2.53}$$

Integrando, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}\, dt} \tag{2.54}$$
$$= e^{\ln|t|} \tag{2.55}$$
$$= t. \tag{2.56}$$

Aplicando o fator integrante a EDO (2.51), obtemos

$$\frac{d}{dt}(ty) = t^2 \Rightarrow ty = \int t^2\, dt \tag{2.57}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{t}\left[\frac{t^3}{3} + c\right] \tag{2.58}$$
$$\Rightarrow y = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}. \tag{2.59}$$

2.1.4 Aplicação em modelagem

Exemplo 2.1.4. (Mistura em tanque) No instante inicial $t = 0$ s (segundo), um tanque contem q_0 kg (quilograma) de sal dissolvido em l L (litro) de água. Uma solução de s kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de r L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de r L/s.
Vamos modelar a quantidade de sal q kg presente no tanque a cada instante t s. Temos que q é função do tempo t s, i.e. $q = q(t)$. A condição inicial é

$$q(0) = q_0. \tag{2.60}$$

A taxa de variação de q no tempo é dq/dt e é modelada por

$$\frac{dq}{dt} = \underbrace{sr}_{\text{taxa de entrada}} - \underbrace{\frac{q}{l}r}_{\text{taxa de saída}}. \tag{2.61}$$

Ou seja, o problema é modelado como o seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = sr - \frac{q}{l}r, \quad t > 0, \tag{2.62}$$
$$q(0) = q_0, \tag{2.63}$$

onde s, r, l e q_0 são parâmetros do problema. A EDO relacionada é linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelo método dos fatores integrantes. Veja o Exercício Resolvido **??**.

Exemplo 2.1.5. (Objeto em queda livre) Seja m kg a massa de um objeto em queda livre em um meio com resistência de γ kg/s e aceleração da gravidade de g m/s^2. A segunda lei de Newton é a lei física que estabelece que a força total atuando sobre o objeto é igual a sua massa multiplicada por sua aceleração. Desta forma, obtemos

$$\underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{\text{massa}\times\text{aceleração}} = \underbrace{mg}_{\text{força da gravidade}} - \underbrace{\gamma v}_{\text{força da resistência]}}, \tag{2.64}$$

onde $v = v(t)$ m/s é a velocidade do objeto (sentido positivo igual ao da força da gravidade). Assumindo que o objeto tem velocidade v_0 m/s no instante inicial $t = 0$, o modelo resume-se ao seguinte PVI:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \quad t > 0, \tag{2.65}$$

$$v(0) = v_0, \tag{2.66}$$

onde m, g, γ e v_0 são parâmetros.

Exercícios resolvidos

ER 2.1.1. Resolva o seguinte PVI

$$y' + y = 1, \quad t > 0, \tag{2.67}$$

$$y(0) = 2. \tag{2.68}$$

Solução. Primeiramente, obtemos a solução geral da EDO pelo método dos fatores integrante. Para tanto, buscamos pelo fator integrante μ tal que

$$\mu y' + \mu y = (\mu y)', \tag{2.69}$$

ou seja,

$$\mu' = \mu \Rightarrow \mu(t) = e^t. \tag{2.70}$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^t y\right) = e^t. \tag{2.71}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y = 1 + ce^{-t}. \tag{2.72}$$

Aplicando a condição inicial, obtemos

$$y(0) = 2 \Rightarrow 1 + ce^{-0} = 2 \tag{2.73}$$
$$\Rightarrow c = 1. \tag{2.74}$$

Concluímos que a solução do PVI é $y(t) = 1 + e^{-t}$.

◊

ER 2.1.2. Calcule a solução geral da EDO

$$y' + \frac{1}{t}y = \operatorname{sen}(t), \quad t > 0. \tag{2.75}$$

Solução. Buscamos pelo fator integrante μ tal que

$$\mu y' + \mu \frac{1}{t} y = (\mu y)', \tag{2.76}$$

ou seja,

$$\mu' = \frac{\mu}{t} \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}\,dt} = e^{\ln|t|} = t. \tag{2.77}$$

Obtido o fator integrante, reescrevemos a EDO como segue

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu \cdot \operatorname{sen}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = t\operatorname{sen}(t). \tag{2.78}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$y(t) = \frac{c}{t} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} - \cos(t). \tag{2.79}$$

◊

ER 2.1.3. (Mistura em tanque) No instante inicial $t = 0$ s (segundo), um tanque contem 100 kg de sal dissolvidos em 1000 L d'água. Uma solução de 0,2 kg/L de sal e água entra no tanque a uma taxa de 10 L/s. Esta solução mistura-se com o líquido presente no tanque e a mistura final sai do tanque a mesma taxa de 10 L/s. Calcule a quantidade de sal misturado no tanque após 1 hora de operação, i.e. quando $t = 3600$ s.

Solução. Denotando por $q = q(t)$ kg a quantidade de sal misturado no tanque no instante t, temos que a taxa de variação de q no tempo é dada por

$$\frac{dq}{dt} = 0{,}2 \cdot 10 - \frac{q}{1000} \cdot 10 \tag{2.80}$$
$$= 2 - \frac{q}{100}. \tag{2.81}$$

Ou seja, o modelo constitui-se no seguinte PVI

$$\frac{dq}{dt} = 2 - \frac{q}{100}, \quad t > 0, \tag{2.82}$$
$$q(0) = 100. \tag{2.83}$$

Para resolver o problema, vamos usar o método dos fatores integrantes. O fator integrante é escolhido como sendo

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100}\,dt} \tag{2.84}$$
$$= e^{t/100}. \tag{2.85}$$

Segue que a EDO (2.82) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}\left(qe^{t/100}\right) = 2e^{t/100}. \tag{2.86}$$

Integrando, obtemos

$$q(t) = e^{-t/100} \int 2e^{t/100}\,dt \tag{2.87}$$
$$= e^{-t/100}\left(200e^{t/100} + c\right) \tag{2.88}$$
$$= 200 + ce^{-t/100}. \tag{2.89}$$

Da condição inicial, obtemos

$$q(0) = 100 \Rightarrow 200 + c = 100 \tag{2.90}$$
$$\Rightarrow c = -100. \tag{2.91}$$

Logo, a solução do PVI é

$$q(t) = 200 - 100e^{-t/100}. \tag{2.92}$$

No tempo $t = 3600$ s, temos

$$q(3600) = 200 - 100e^{-3600/100} \approx 200 \text{ kg}. \tag{2.93}$$

$\Diamond$

Exercícios

E 2.1.1. Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' + y = 0, \quad t > 0, \tag{2.94}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.95}$$

E 2.1.2. Calcule a solução do seguinte PVI

$$y' - y = 2, \quad t > 0, \tag{2.96}$$
$$y(0) = 1. \tag{2.97}$$

E 2.1.3. Calcule a solução geral da seguinte EDO

$$y' + y = \operatorname{sen}(t). \tag{2.98}$$

E 2.1.4. Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$y' + \frac{1}{t}y = 2t, \quad t > 1, \tag{2.99}$$
$$y(1) = 0. \tag{2.100}$$

E 2.1.5. Calcule a solução geral do seguinte PVI

$$ty' + 2y = 1, \quad t > 1, \tag{2.101}$$
$$y(1) = 1. \tag{2.102}$$

E 2.1.6. Seja um objeto de massa $m = 1$ kg em queda livre sujeito a aceleração da gravidade de 9,8 m/s^2 e resistência do meio de $\gamma = 0{,}2$ kg/s. Assuma, ainda, que o objeto está em repouso no tempo inicial e a uma altura de 10 m (metros) do solo. Quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.

2.2 Equação separável

Uma EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.103}$$

é dita ser uma **equação separável** quando pode ser reescrita na seguinte forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.104}$$

Exemplo 2.2.1. Vejamos os seguintes casos.

a) É separável a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \tag{2.105}$$

pois pode ser reescrita como segue

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = x^2 \tag{2.106}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.107}$$

b) Não é separável a EDO

$$e^{xy} - x\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.108}$$

Observe que não há como reescrever esta equação na forma (2.104).

Agora, vamos ver como podemos resolver uma EDO separável. Consideremos a equação separável

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.109}$$

Sejam, também, $F = F(x)$ e $G = G(y)$ primitivas de M e N, respectivamente. I.e.

$$\frac{d}{dx}F(x) = M(x), \tag{2.110}$$

$$\frac{d}{dy}G(y) = N(y). \tag{2.111}$$

Lembrando que $y = y(x)$, temos da **regra da cadeia** que

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\frac{dy}{dx} \tag{2.112}$$

$$= N(y)\frac{dy}{dx}. \tag{2.113}$$

Ou seja, a EDO (2.109) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(y) = 0 \tag{2.114}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) + G(y)\right) = 0. \tag{2.115}$$

Então, integrando em relação a x, obtemos

$$F(x) + G(y) = c, \tag{2.116}$$

a qual é uma equação algébrica para y que, com sorte, pode ser usada para explicitar a solução da EDO (2.109).

Exemplo 2.2.2. Vamos resolver a seguinte EDO separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}. \tag{2.117}$$

a) **Método 1**. Primeiramente, reescrevemos a EDO no formato (2.104):

$$\underbrace{-x^2}_{M(x)} + \underbrace{y}_{N(y)}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.118}$$

Então, calculamos as primitivas

$$F(x) = \int M(x)\,dx \tag{2.119}$$

$$= \int -x^2\,dx \tag{2.120}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + c \tag{2.121}$$

e

$$G(y) = \int N(y)\,dy \tag{2.122}$$

$$= \int y\,dy \tag{2.123}$$

$$= \frac{y^2}{2} + c. \tag{2.124}$$

Então, segue que a EDO resume-se a seguinte equação algébrica

$$F(x) + G(y) = c \Rightarrow -\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c, \tag{2.125}$$

a qual é uma equação implícita da solução geral $y = y(x)$.

b) **Método 2**. A EDO separável

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \tag{2.126}$$

pode ser reescrita como

$$y\,dy = x^2\,dx. \tag{2.127}$$

Integrando ambos os lados desta equação, obtemos

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c, \tag{2.128}$$

a qual é equivalente a solução obtida em (2.125).

Observação 2.2.1. Como vimos no exemplo anterior (Exemplo 2.2.2), a solução geral de uma EDO separável nem sempre pode ser explicitada. Em muitos casos o procedimento de separar as variáveis nos leva a obter a solução da EDO na forma de uma equação algébrica implícita.

2.2.1 Equação de Verhulst

A **equação de Verhulst**[1] (ou **equação logística**) é um clássico modelo de crescimento populacional. Trata-se da seguinte equação autônoma

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{2.129}$$

[1]Pierre François Verhulst, 1804-1849, matemático belga.

onde y é a medida de tamanho da população e os parâmetros são: $r > 0$ a taxa de crescimento intrínseca e $K > 0$ o nível de saturação.

Antes de resolvermos esta equação, vamos fazer algumas observações que podem ser obtidas diretamente da EDO. Do cálculo, temos que se $dy/dt = 0$ para todos os valores de t, então y é constante, i.e. a população se mantém constante. A derivada é nula quando o lado direito de (2.129) for nulo, i.e.

$$r\left(1-\frac{y}{K}\right)y = 0. \tag{2.130}$$

Isso ocorre quando $y = 0$ ou quando $y = K$. Ou seja, se a população é nula não há crescimento populacional, bem como, não há crescimento se a população estiver em seu nível de saturação.

Agora, o que ocorre se a população for $0 < y < K$? Neste caso, temos

$$\frac{dy}{dt} = r\underbrace{\left(1-\frac{y}{K}\right)}_{>0}y > 0, \tag{2.131}$$

ou seja, a população cresce. Por outro lado, se $y > K$ (a população está acima de seu nível de saturação), então

$$\frac{dy}{dt} = r\underbrace{\left(1-\frac{y}{K}\right)}_{<0}y < 0, \tag{2.132}$$

a população decresce. Estas conclusões também nos levam a inferir que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K, \tag{2.133}$$

para qualquer população inicial não nula.

Solução da equação logística

Consideramos o seguinte PVI

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y, \quad t > 0, \tag{2.134}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.135}$$

A equação de Verhulst é uma EDO separável, daí segue que

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y}\, dy = r\, dt. \tag{2.136}$$

Vamos integrar o lado direito desta última equação:

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right) y}\, dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right) dy \tag{2.137}$$

$$= \ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right|. \tag{2.138}$$

Logo, a solução da equação logística satisfaz a seguinte equação algébrica

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c, \tag{2.139}$$

onde c é uma constante a determinar. Antes, observamos que esta equação é equivalente a

$$\ln\left|\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right| = rt + c. \tag{2.140}$$

Aplicando a função exponencial, obtemos

$$\frac{y}{1 - y/K} = ce^{rt}. \tag{2.141}$$

Da condição inicial $y(0) = y_0$, encontramos

$$c = \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \tag{2.142}$$

Agora, isolando y em (2.141), vemos que

$$y = \frac{ce^{rt}}{1 + \frac{c}{K}e^{rt}} \tag{2.143}$$

$$= \frac{K}{\frac{K}{c}e^{-rt} + 1} \tag{2.144}$$

Por fim, de (2.142), obtemos a solução

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \tag{2.145}$$

Da solução, corroboramos que a população permanece constante quando $y_0 = 0$ ou $y_0 = K$. Ainda, se $0 < y_0 < K$ ou $y_0 > K$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)\cancelto{0}{e^{-rt}}} \tag{2.146}$$

$$= K. \tag{2.147}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.2.1. Calcule a solução geral da EDO

$$y' = 2y^2 + xy^2. \tag{2.148}$$

Solução. Separando as variáveis, obtemos

$$y' = 2y^2 + xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(2 + x)) \tag{2.149}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\,dy = (2 + x)\,dx. \tag{2.150}$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c. \tag{2.151}$$

◊

ER 2.2.2. Calcule a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}, \quad x > 0, \qquad y(0) = 2. \tag{2.152}$$

Solução. Separamos as variáveis e integramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = x^2\,dx \tag{2.153}$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int x^2\,dx \tag{2.154}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c. \tag{2.155}$$

Determinamos a constante c pela aplicação da condição inicial $y(0) = 1$. Ou seja, temos

$$\frac{y^2(0)}{2} = \frac{0^3}{3} + c \Rightarrow c = 2. \tag{2.156}$$

Logo, a solução $y = y(x)$ do PVI é dada pela equação algébrica

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2. \tag{2.157}$$

Buscando explicitar a solução, observamos que

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \tag{2.158}$$

Lembrando que $y(0) = 2$, temos necessariamente que

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4}. \tag{2.159}$$

◊

ER 2.2.3. (Crescimento populacional com limiar) Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$. Forneça os valores de y_0 para os quais a população é crescente.

Solução. A população y é crescente quando

$$\frac{dy}{dt} > 0. \tag{2.160}$$

Logo, precisamos ter

$$-r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y > 0. \tag{2.161}$$

Isto ocorre quando

$$1 - \frac{y}{L} < 0 \Rightarrow y > L. \tag{2.162}$$

Logo, concluímos que uma população inicial $y_0 > L$ é necessária para produzir uma taxa de crescimento populacional positiva.

◊

Exercícios

E 2.2.1. Calcule a solução de

$$\frac{dy}{dx} = xe^y, \quad x > 0, \tag{2.163}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.164}$$

E 2.2.2. Resolva a EDO

$$y' + y^2 \cos x = 0. \tag{2.165}$$

E 2.2.3. Resolva o PVI

$$e^{x+y}y' = 1, \quad x > 0, y(0) = 0. \tag{2.166}$$

E 2.2.4. Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$. Qual é a tendência da população $y = y(t)$ quando $t \to \infty$ e

a) $y_0 = 0$;

b) $0 < y_0 < L$;

c) $y_0 = L$;

d) $y_0 > L$

E 2.2.5. Resolva o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)y, \quad t > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r, L > 0$.

E 2.2.6. Considere o seguinte modelo de crescimento populacional

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{L}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \quad t > 0,\\
&y(0) = y_0,
\end{aligned}$$

onde $y = y(t)$ é o tamanho da população, $y_0 \geq 0$ é a população inicial e são parâmetros $r > 0$, $K > L > 0$. Qual é a tendência da população $y = y(t)$ quando $t \to \infty$ e

a) $y_0 = 0$;

b) $0 < y_0 < L$;

c) $y_0 = L$

d) $L < y_0 < K$;

e) $y_0 = K$

f) $y_0 > K$

2.3 Equação exata

Uma EDO

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.167}$$

é uma **equação exata** quando

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y). \tag{2.168}$$

Neste caso, pode-se calcular uma função $\Psi = \Psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.169}$$

Com isso, a EDO (2.167) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Psi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Psi + \frac{\partial}{\partial y}\Psi\frac{dy}{dx} && (2.170)\\
&= M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} && (2.171)\\
&= 0. && (2.172)
\end{aligned}$$

Logo, temos a **solução geral**

$$\Psi(x,y) = c. \tag{2.173}$$

Exemplo 2.3.1. Vamos resolver a seguinte EDO

$$(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.174}$$

Denotamos

$$M(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2, \tag{2.175}$$

$$N(x,y) = 6y^2 - x^2 + 3. \tag{2.176}$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = -2x, \tag{2.177}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = -2x, \tag{2.178}$$

vemos que (2.174) é uma equação exata. Desta forma, buscamos por uma função $\Psi = \Psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.179}$$

a) **Método 1.** Podemos calcular Ψ a partir de

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y). \tag{2.180}$$

Integrando em relação a x, obtemos

$$\Psi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + f(y) \tag{2.181}$$

$$= \int 3x^2 - 2xy + 2\,dx + f(y) \tag{2.182}$$

$$= x^3 - x^2y + 2x + f(y). \tag{2.183}$$

Para encontrar $f(y)$, usamos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.184}$$

No caso, temos

$$-x^2 + f'(y) = 6y^2 - x^2 + 3, \tag{2.185}$$

donde

$$f'(y) = 6y^2 + 3. \tag{2.186}$$

Integrando em relação a y, obtemos

$$f(y) = \int 6y^2 + 3\,dy \tag{2.187}$$

$$= 2y^3 + 3y + c. \tag{2.188}$$

Concluímos que

$$\Psi(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y + c. \tag{2.189}$$

A solução geral da EDO é dada pela equação implícita

$$x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c. \tag{2.190}$$

b) **Método 2.** Partimos da equação

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.191}$$

Integrando em relação a y, obtemos

$$\Psi(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x) \tag{2.192}$$

$$= \int 6y^2 - x^2 + 3\,dy + g(x) \tag{2.193}$$

$$= 2y^3 - x^2y + 3y + g(x). \tag{2.194}$$

Agora, usando

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y), \tag{2.195}$$

temos

$$-2xy + g'(x) = 3x^2 - 2xy + 2 \tag{2.196}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2. \tag{2.197}$$

Integrando em relação a x, obtemos

$$g(x) = \int 3x^2 + 2\,dx + c \tag{2.198}$$

$$= x^3 + 2x + c. \tag{2.199}$$

Ou seja, obtivemos

$$\Psi(x,y) = 2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x + c, \tag{2.200}$$

o que nos fornece a solução geral

$$2y^3 - x^2y + 3y + x^3 + 2x = c. \tag{2.201}$$

2.3.1 Método dos fatores integrantes

Para algumas equações

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.202}$$

não exatas é possível aplicar o método dos fatores integrantes para convertê-las em equações exatas.
A ideia é buscar por um fator integrante $\mu = \mu(x,y)$ tal que

$$\mu M(x,y) + \mu N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.203}$$

seja uma equação exata, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N(x,y)\right). \tag{2.204}$$

Ou seja, μ deve ser tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu M(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N(x,y)\right) = 0 \tag{2.205}$$

$$\Rightarrow \mu_y M + \mu M_y - \mu_x N - \mu N_x = 0. \tag{2.206}$$

Com isso, pode-se concluir que $\mu = \mu(x,y)$ deve satisfazer

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{2.207}$$

Em geral, resolver (2.207) pode ser tão ou mais difícil que resolver a EDO original (2.202). Vejamos alguns casos em que é possível encontrar o fator μ.

$\mu = \mu(x)$

No caso de $\mu = \mu(x)$ (função de x apenas), a equação (2.207) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{2.208}$$

Ou seja, se

$$\frac{M_y - N_x}{N} \tag{2.209}$$

é função apenas de x, então podemos calcular um fator integrante $\mu = \mu(x)$ resolvendo a EDO linear (2.208).

Exemplo 2.3.2. Vamos resolver a EDO

$$(x+2)\operatorname{sen}(y) + x\cos(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.210}$$

Denotando

$$M(x,y) = (x+2)\operatorname{sen}(y) \tag{2.211}$$
$$N(x,y) = x\cos(y) \tag{2.212}$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = (x+2)\cos(y) \neq \cos(y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y). \tag{2.213}$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(x+2)\cos(y) - \cos(y)}{x\cos(y)} \tag{2.214}$$
$$= \frac{x+1}{x} \tag{2.215}$$

é função apenas de x, o que nos indica a existência de um fator integrante $\mu = \mu(x)$ satisfazendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d}{dx}\mu = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{2.216}$$

Ou seja, resolvemos

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x+1}{x}\mu \Rightarrow \frac{1}{\mu}\,d\mu = \frac{x+1}{x}\,dx \tag{2.217}$$
$$\Rightarrow \ln|\mu| = x + \ln|x| + c \tag{2.218}$$
$$\Rightarrow \mu = cxe^x. \tag{2.219}$$

Com isso, escolhendo o fator integrante $\mu = xe^x$ a equação

$$\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.220}$$

é exata e é equivalente a EDO (2.210). De fato, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+2x)e^x \operatorname{sen}(y)\right] \tag{2.221}$$
$$= (x^2+2x)e^x \cos(y) \tag{2.222}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 e^x \cos(y)\right] \tag{2.223}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). \tag{2.224}$$

Para resolver (2.220), buscamos por uma função $\Psi = \Psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y) = \mu N \Rightarrow \Psi(x,y) = \int x^2 e^x \cos(y)\,dy + f(x) \tag{2.225}$$
$$\Rightarrow \Psi(x,y) = x^2 e^x \operatorname{sen}(y) + f(x). \tag{2.226}$$

Bem como, Ψ deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y) = \mu M \Rightarrow (x^2+2x)e^x \operatorname{sen}(y) + f'(x) = (x^2+2x)e^x \operatorname{sen}(y) \tag{2.227}$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \tag{2.228}$$
$$\Rightarrow f(x) = c. \tag{2.229}$$

Logo, podemos concluir que a solução geral de (2.210) é dada por

$$x^2 e^x \operatorname{sen}(y) = c. \tag{2.230}$$

$\mu = \mu(y)$

No caso de $\mu = \mu(y)$ (função de y apenas), a equação (2.207) resume-se a

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu. \tag{2.231}$$

Ou seja, se

$$\frac{N_x - M_y}{M} \tag{2.232}$$

é função apenas de y, então podemos calcular um fator integrante $\mu = \mu(y)$ resolvendo a EDO linear (2.231).

Exemplo 2.3.3. Vamos resolver a EDO

$$y + (2x - ye^y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.233}$$

Denotando

$$M(x,y) = y \tag{2.234}$$

$$N(x,y) = 2x - ye^y \tag{2.235}$$

vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 1 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y). \tag{2.236}$$

Ou seja, não é uma equação exata. Por outro lado,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{y} \tag{2.237}$$

é função apenas de y. Com isso, podemos obter um fator integrante $\mu = \mu(y)$ resolvendo a seguinte EDO linear

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{M_y - N_x}{M}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{y}\mu \tag{2.238}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}\,d\mu = \frac{1}{y}\,dy \tag{2.239}$$

$$\Rightarrow \ln|\mu| = \ln|y| + c \tag{2.240}$$

$$\Rightarrow \mu = cy. \tag{2.241}$$

Desta forma, podemos escolher o fator integrante $\mu = y$ de forma que a equação

$$\mu M + \mu N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.242}$$

é exata e equivalente a EDO (2.233). De fato, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2) && (2.243)\\
&= 2y && (2.244)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[(2x - ye^y)y\right] && (2.245)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mu N). && (2.246)
\end{aligned}$$

Sendo (2.242) uma equação exata, buscamos por uma função $\Psi = \Psi(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y) = \mu M(x,y) &\Rightarrow \Psi(x,y) = \int y^2\,dx + f(y) && (2.247)\\
&\Rightarrow \Psi(x,y) = xy^2 + f(y). && (2.248)
\end{aligned}$$

Bem como,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y) = \mu N(x,y) &\Rightarrow 2xy + f'(y) = 2xy - y^2e^y && (2.249)\\
&\Rightarrow f'(y) = -y^2e^y && (2.250)\\
&\Rightarrow f(y) = -(y^2 - 2y + 2)e^y + c. && (2.251)
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que a solução geral da EDO (2.233) é

$$xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c. \tag{2.252}$$

Exercícios resolvidos

ER 2.3.1. Verifique se a EDO

$$x^2 + (2xy - y^2)\frac{dy}{dx} = -y^2 \tag{2.253}$$

é exata. Caso não seja, busque por um fator integrante para reescrevê-la como uma equação exata.

Solução. Para verificarmos se a equação é exata, vamos colocá-la reescrevê-la na seguinte forma

$$x^2 + y^2 + (2xy - y^2)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.254}$$

Com isso, identificamos

$$M(x,y) = x^2 + y^2, \tag{2.255}$$
$$N(x,y) = 2xy - y^2. \tag{2.256}$$

Ainda, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \tag{2.257}$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y. \tag{2.258}$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2.259}$$

concluímos que a EDO é exata.

$\diamondsuit$

ER 2.3.2. Resolva o seguinte PVI:

$$sen(y) + (x\cos(y) + 1)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.260}$$
$$y(0) = \pi. \tag{2.261}$$

Solução. Denotando

$$M(x,y) = \operatorname{sen}(y), \quad N(x,y) = x\cos(y) + 1, \tag{2.262}$$

vemos que a EDO associada ao PVI é uma equação exata. Logo, para resolvê-la buscamos por uma função $\Psi = \Psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \Psi = \int M(x,y)\,dx + f(y) \tag{2.263}$$
$$\Rightarrow \Psi = x\operatorname{sen}(y) + f(y). \tag{2.264}$$

Bem como, Ψ deve ser tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y) = N(x,y) \Rightarrow x\cos(y) + f'(y) = x\cos(y) + 1 \tag{2.265}$$

$$\Rightarrow f'(y) = 1 \tag{2.266}$$

$$\Rightarrow f(y) = y + c. \tag{2.267}$$

Logo, a solução geral da EDO associada é dada por

$$x\,\mathrm{sen}(y) + y = c. \tag{2.268}$$

Por fim, aplicando a condição inicial $y(0) = 1$, obtemos

$$0 \cdot \mathrm{sen}(1) + 1 = c \Rightarrow c = 1. \tag{2.269}$$

Concluímos que a solução do PVI é dada por

$$x\,\mathrm{sen}(y) + y = 1. \tag{2.270}$$

$\Diamond$

Exercícios

E 2.3.1. Verifique se a seguinte EDO é exata. Justifique sua resposta.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(y)}{1 + x\,\mathrm{sen}(y)}. \tag{2.271}$$

E 2.3.2. Resolva a seguinte EDO

$$\cos(y) + (1 - x\,\mathrm{sen}(y))\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.272}$$

E 2.3.3. Mostre que a seguinte EDO não é exata

$$xy^2 + 1 + -x^2y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.273}$$

Ainda, mostre que o fator integrante $\mu = x^{-4}$ pode ser usado para transformar esta em uma equação exata. Por fim, resolva-a.

E 2.3.4. Resolva a seguinte EDO

$$6xy + y^2 + (2x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.274}$$

E 2.3.5. Resolva o seguinte PVI

$$y + (y - 3x)\frac{dy}{dx} = 0, y(1) = 1 \tag{2.275}$$

Capítulo 3

EDO linear de segunda ordem

3.1 EDO homogênea com coeficientes constantes - parte I

Uma **EDO de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes** tem a forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.1}$$

onde $y = y(t)$ e a, b, c são parâmetros constantes (números reais).
Vamos buscar por soluções da forma $y(t) = e^{rt}$, onde r é constante. Substituindo na equação (3.1), obtemos

$$a\left(e^{rt}\right)'' + b\left(e^{rt}\right)' + ce^{rt} = 0 \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0. \tag{3.4}$$

Ou seja, $y(t) = e^{rt}$ é solução de (3.1) quando

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.5}$$

Esta é chamada de **equação característica** de (3.1).

Exemplo 3.1.1. Vamos buscar por soluções de

$$y'' - 4y = 0. \tag{3.6}$$

Buscamos por r tal que $y(t) = e^{rt}$ seja solução desta equação. Substituindo na equação, obtemos

$$\left(e^{rt}\right)'' - 4e^{rt} = 0 \Rightarrow (r^2 - 4)e^{rt} = 0 \tag{3.7}$$

o que nos fornece a equação característica

$$r^2 - 4 = 0. \tag{3.8}$$

As soluções desta equação são $r_1 = -2$ e $r_2 = 2$. Ou seja, obtemos as seguintes **soluções particulares** da EDO

$$y_1(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t}. \tag{3.9}$$

Observamos, ainda, que para quaisquer constantes c_1 e c_2,

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \tag{3.10}$$

também é solução da EDO (3.6). De fato, temos

$$\begin{align}
y'' - 4y &= \left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\right)'' - 4\left(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}\right) \tag{3.11}\\
&= 4c_1 e^{-2t} + 4c_2 e^{2t} - 4c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{2t} \tag{3.12}\\
&= 0. \tag{3.13}
\end{align}$$

Como veremos logo mais,

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \tag{3.14}$$

é a **solução geral** de (3.6).

3.1.1 Conjunto fundamental de solução

Sejam $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ soluções de

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.15}$$

Então,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{3.16}$$

também é solução de (3.15).

De fato, basta verificar que

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy = a(c_1y_1 + c_2y_2)'' & \quad (3.17)\\
+ b(c_1y_1 + c_2y_2)' & \quad (3.18)\\
+ c(c_1y_1 + c_2y_2) & \quad (3.19)\\
= c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) & \quad (3.20)\\
+ c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) & \quad (3.21)\\
= 0. & \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Suponhamos, ainda, que as soluções $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ são tais que o chamado **wronskiano**

$$W(y_1,y_2;t) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.23}$$

para todo t.
Neste caso, sempre é possível escolher as constantes c_1 e c_2 tais que

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{3.24}$$

satisfaça o problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.25}$$
$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{3.26}$$

para quaisquer dados valores y_0 e y_0'.
De fato, já sabemos que (3.24) satisfaz a EDO. Então, c_1 e c_2 deve satisfazer o seguinte sistema linear

$$y(t_0) = c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \tag{3.27}$$
$$y'(t_0) = c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0'. \tag{3.28}$$

Do método de Cramer[1], temos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \tag{3.29}$$

[1]Gabriel Cramer, 1704 - 1752, matemático suíço.

e

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{3.30}$$

O **wronskiano não nulo** nos garante a existência de c_1 e c_2.
Por fim, afirmamos que todas as soluções de (3.15) podem ser escritas como combinação linear de $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$, i.e. têm a forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{3.31}$$

De fato, seja $\psi = \psi(t)$ uma solução de (3.15). Então, ψ é solução do seguinte PVI

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.32}$$

$$y(t_0) = \psi(t_0), \quad y'(t_0) = \psi'(t_0), \tag{3.33}$$

para quaisquer t_0 dado. Agora, pelo que vimos acima e lembrando que o wronskiano $W(y_1{,}y_2; t) \neq 0$, temos que existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{3.34}$$

também é solução deste PVI. Da **unicidade de solução**[2], segue que

$$\psi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{3.35}$$

Do que vimos aqui, a **solução geral** de (3.15) é

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{3.36}$$

dadas quaisquer soluções $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ com wronskiano $W(y_1{,}y_2; t) \neq 0$ para todo t.

Exemplo 3.1.2. No Exemplo 3.1.1, vimos que

$$y_1(t) = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{2t} \tag{3.37}$$

[2]Embora não tenha sido apresentada aqui, a unicidade de solução pode ser demonstrada.

são soluções particulares de

$$y'' - 4y = 0. \tag{3.38}$$

Como

$$\begin{aligned}
W(y_1,y_2;t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} && (3.39)\\
&= \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{2t} \\ -2e^{-2t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} && (3.40)\\
&= 4 \neq 0, && (3.41)
\end{aligned}$$

temos que

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} \tag{3.42}$$

é solução geral de (3.38).

3.1.2 Raízes reais distintas

Uma EDO da forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.43}$$

tem **solução geral**

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{3.44}$$

quando sua **equação característica**

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.45}$$

tem r_1 e r_2 como suas raízes reais distintas.

Exemplo 3.1.3. Vamos resolver o seguinte PVI

$$y'' - 3y' + 2 = 0, \tag{3.46}$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 5. \tag{3.47}$$

Começamos resolvendo a equação característica associada

$$r^2 - 3r + 2 = 0. \tag{3.48}$$

As soluções são

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \tag{3.49}$$
$$= \frac{3 \pm 1}{2}. \tag{3.50}$$

Ou seja, $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$. Logo,

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \tag{3.51}$$

é solução geral da EDO.
Agora, aplicando as condições iniciais, temos

$$y(0) = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3, \tag{3.52}$$
$$y'(0) = 5 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 5. \tag{3.53}$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Concluímos que

$$y(t) = e^t + 2e^{2t} \tag{3.54}$$

é a solução do PVI.

Exercícios resolvidos

ER 3.1.1. Calcule a solução geral de

$$2y'' + 2y' - 4 = 0. \tag{3.55}$$

Solução. A equação característica associada é

$$2r^2 + 2r - 4 = 0. \tag{3.56}$$

Suas soluções são

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2} \tag{3.57}$$
$$= \frac{-2 \pm 6}{4}, \tag{3.58}$$

i.e. $r_1 = -2$ e $r_2 = 1$. Como a equação característica tem raízes reais distintas, concluímos que

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \tag{3.59}$$

é solução geral da EDO.

◊

ER 3.1.2. Mostre que se $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^t$, então o wronskiano

$$W(y_1,y_2;t) \neq 0. \tag{3.60}$$

Solução. Calculamos

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2;t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{vmatrix} \quad (3.61) \\ &= e^{-2t}e^t + 2e^{-2t}e^t \quad (3.62) \\ &= 3e^{-t}. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Como $e^{-t} \neq 0$ para todo t, temos que $W(y_1,y_2;t) \neq 0$ para todo t.

◊

Exercícios

E 3.1.1. Calcule a solução geral de

$$-2y'' + 2y' + 4y = 0. \tag{3.64}$$

E 3.1.2. Resolva o seguinte PVI

$$y'' = 7y' - 12, \tag{3.65}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \tag{3.66}$$

E 3.1.3. Resolva o seguinte PVI

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \tag{3.67}$$
$$y(\ln 2) = -2, \quad y'(\ln 2) = -6. \tag{3.68}$$

E 3.1.4. Calcule o wronskiano de $y_1(t) = \cos(t)$ e $y_2(t) = \text{sen}(t)$.

E 3.1.5. Mostre que se r_1 e r_2 são raízes reais distintas da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{3.69}$$

então

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.70}$$

é solução geral de

$$ay'' + by + c = 0. \tag{3.71}$$

3.2 EDO homogênea com coeficientes constantes - parte II

Na Seção 3.1 introduzimos as propriedades fundamentais de EDOs lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Em particular, tratamos o caso em que a equação característica tem raízes reais distintas. Nesta seção, estudar os casos em que a equação característica tem raízes complexas ou raízes duplas.

3.2.1 Raízes complexas

Consideramos

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.72}$$

cuja **equação característica**

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.73}$$

tem **raízes complexas**

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu. \tag{3.74}$$

As soluções particulares associadas são

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{(\lambda + i\mu)t} \tag{3.75}$$

$$y_2(t) = e^{r_2 t} = e^{(\lambda - i\mu)t}. \tag{3.76}$$

Da **fórmula de Euler**[3], temos

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} \tag{3.77}$$

$$= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b). \tag{3.78}$$

Ou seja, as soluções particulares podem ser reescritas da forma[4]

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\left[\cos(\mu t) + i \operatorname{sen}(\mu t)\right], \tag{3.79}$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t}\left[\cos(\mu t) - i \operatorname{sen}(\mu t)\right] \tag{3.80}$$

Agora, se denotarmos

$$u(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t) \quad \text{e} \quad v(t) = e^{\lambda t}\operatorname{sen}(\mu t), \tag{3.81}$$

temos

$$y_1(t) = u(t) + iv(t), \quad y_2(t) = u(t) - iv(t). \tag{3.82}$$

Para concentrar a escrita, vamos denotar

$$y(t) = u(t) \pm iv(t). \tag{3.83}$$

Substituindo $y = y(t)$ na EDO, obtemos

$$0 = ay'' + by' + cy \tag{3.84}$$

$$= a(u'' \pm iv'') \tag{3.85}$$

$$+ b(u' \pm iv') \tag{3.86}$$

$$+ c(u + pmiv) \tag{3.87}$$

$$= (au'' + bu' + cu) \tag{3.88}$$

$$\pm i(av'' + bv' + cv). \tag{3.89}$$

Ou seja,

$$au'' + bu' + cu = 0 \tag{3.90}$$

$$av'' + bv' + cv = 0. \tag{3.91}$$

Desta forma, concluímos que $u(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ e $v(t) = e^{\lambda t}\operatorname{sen}(\mu t)$ são soluções particulares da EDO (3.72). Do que vimos na Seção 3.1, temos que

$$y(t) = e^{\lambda t}\left[c_1\cos(mut) + c_2\operatorname{sen}(\mu t)\right] \tag{3.92}$$

é **solução geral** de (3.72).

[3]Leonhard Euler, 1707-1783, matemático suíço. Fonte: Wikipedia.

[4]Lembre-se que seno é uma função ímpar, i.e. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Exemplo 3.2.1. Vamos resolver

$$y'' + 2y' + 5 = 0. \tag{3.93}$$

Começamos identificando a equação característica associada

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \tag{3.94}$$

Suas raízes são

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \qquad (3.95)\\ &= -1 \pm 2i. \qquad (3.96)\end{aligned}$$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = e^{-t}\left[c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)\right]. \tag{3.97}$$

3.2.2 Raízes repetidas

Seja a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.98}$$

cuja equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{3.99}$$

tem raiz dupla[5]

$$r = \frac{-b}{2a}. \tag{3.100}$$

Neste caso, podemos verificar que

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \tag{3.101}$$

é solução particular de (3.98).

Vamos usar o **método de redução de ordem** para encontrar uma segunda solução particular $y_2 = y_2(t)$ de (3.98), lembrando que o wronskiano

[5] $b^2 - 4ac = 0$

$W(y_1,y_2;t)$ deve ser não nulo. O método consiste em buscar por uma solução da forma

$$y_2(t) = u(t)y_1(t) \tag{3.102}$$

$$= u(t)e^{-\frac{b}{2a}t}. \tag{3.103}$$

Substituindo y_2 na EDO (3.98), obtemos

$$0 = ay_2'' + by_2' + cy_2 \tag{3.104}$$

$$= a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') \tag{3.105}$$

$$+ b(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 \tag{3.106}$$

$$= au''y_1 + (2ay_1' + by_1)u' \tag{3.107}$$

$$+ (ay_1'' + by_1' + cy_1)u \tag{3.108}$$

$$= au''y_1 + \left(-\frac{2ab}{2a}e^{-\frac{b}{2a}} + be^{-\frac{b}{2a}}\right)u' \tag{3.109}$$

$$= au''y_1. \tag{3.110}$$

Segue que

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \tag{3.111}$$

$$\Rightarrow u = c_1 + c_2t. \tag{3.112}$$

Podemos escolher c_1 e c_2 arbitrariamente, desde que o wronskiano

$$W(y_1,y_2;t) \neq 0. \tag{3.113}$$

A escolha mais simples é $c_1 = 0$ e $C_2 = 1$, donde segue que

$$y_2(t) = te^{-\frac{b}{2a}t}. \tag{3.114}$$

Concluímos que a **solução geral** de (3.98) é

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-\frac{b}{2a}t}. \tag{3.115}$$

Exemplo 3.2.2. Vamos resolver

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{3.116}$$

Da equação característica

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \tag{3.117}$$

obtemos a raiz dupla

$$r = 1. \tag{3.118}$$

Logo, a solução geral da EDO é

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^t. \tag{3.119}$$

Exercícios resolvidos

ER 3.2.1. Resolva

$$y'' - 4y' + 5 = 0, \tag{3.120}$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \tag{3.121}$$

Solução. Resolvendo a equação característica

$$r^2 - 4r + 5 = 0, \tag{3.122}$$

obtemos as raízes

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \tag{3.123}$$
$$= 2 \pm i. \tag{3.124}$$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = e^{2t} \left[c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)\right]. \tag{3.125}$$

Por fim, aplicamos as condições iniciais

$$y(0) = 2 \Rightarrow e^{2\cdot 0} \left[c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0)\right] = 2 \tag{3.126}$$
$$\Rightarrow c_1 = 2. \tag{3.127}$$

e, observando que

$$y'(t) = e^{2t} \left[(2c_1 + c_2) \cos(t) + (2c_2 - c_1) \operatorname{sen}(t)\right] \tag{3.128}$$

temos

$$y'(0) = 0 \Rightarrow e^{2\cdot 0}(2 \cdot 2 + c_2) = 0 \tag{3.129}$$
$$\Rightarrow 4 + c_2 = 0 \tag{3.130}$$
$$\Rightarrow c_2 = -4. \tag{3.131}$$

Concluímos que a solução do PVI é

$$y(t) = e^{2t} \left[2 \cos(t) - 4 \operatorname{sen}(t)\right]. \tag{3.132}$$

◊

ER 3.2.2. Resolva

$$y'' + 4y' + 4 = 0, \quad (3.133)$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (3.134)$$

Solução. Resolvemos a equação característica

$$r^2 + 4r + 4 = 0, \quad (3.135)$$

de modo que obtemos uma raiz dupla

$$r = -2. \quad (3.136)$$

Logo, a solução geral da EDO é

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}. \quad (3.137)$$

Agora, aplicamos as condições iniciais

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (3.138)$$

e, observando que

$$y'(t) = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)e^{-2t} \quad (3.139)$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow (c_2 - 2 \cdot 0 - 2c_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0} = 1 \quad (3.140)$$
$$\Rightarrow c_2 = 1. \quad (3.141)$$

Concluímos que a solução do PVI é

$$y(t) = te^{-2t}. \quad (3.142)$$

◊

Exercícios

E 3.2.1. Encontre a solução geral de

$$2y'' - 4y + 4 = 0. \quad (3.143)$$

E 3.2.2. Resolva

$$2y'' + 12y' = -26, \tag{3.144}$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \tag{3.145}$$

E 3.2.3. Encontre a solução geral de

$$3y'' + 27y = 18y' \tag{3.146}$$

E 3.2.4. Resolva

$$-y = 2y' + y'', \tag{3.147}$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \tag{3.148}$$

Exemplo 3.2.3. Mostre que o wronskiano de $y_1(t) = e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ e $y_2(t) = e^{\lambda t}\operatorname{sen}(\mu t)$ é não nulo para qualquer $\mu \neq 0$.

Exemplo 3.2.4. Mostre que o wronskiano de $y_1(t) = e^{rt}$ e $y_2(t) = te^{rt}$ é não nulo para qualquer r.

Resposta dos Exercícios

E 1.1.1. a), c)

E 1.1.2. a) 1; b) 3; c) 2; d) 2.

E 1.1.3. a), d).

E 1.1.4. a), b).

E 1.1.5. a) $\{-3, 2\}$; b) $\{0, 3\}$

E 1.1.6. $\{-1, 2\}$.

E 1.2.1. $y(t) = 1$.

E 1.2.2. $y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$.

E 1.2.3. $y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}t + 1$.

E 1.2.4. $y(t) = -\operatorname{sen}(t)$.

E 2.1.1. $y(t) = e^{-t}$

E 2.1.2. $y(t) = 3e^{t} - 2$

E 2.1.3. $y(t) = ce^{-t} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$

E 2.1.4. $y(t) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t} + t^2\right)$

E 2.1.5. $y(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)$

E 2.1.6. 1.5 s

E 2.2.1. $y(x) = \ln\left(\frac{2}{2e^{-1} - x^2}\right)$.

E 2.2.2. $y(x) = \frac{1}{c + \operatorname{sen} x}$

E 2.2.3. $y(x) = \ln\left(c - e^{-x}\right)$

E 2.2.4. a) $y(t) \equiv 0$; b) $y(t) \to 0$; c) $y(t) \equiv L$; d) $y(t) \to \infty$.

E 2.2.5. $y(t) = \dfrac{y_0 L}{y_0 + (L - y_0)e^{rt}}$.

E 2.2.6. a) $y(t) \equiv 0$; b) $y(t) \to 0$; c) $y(t) \equiv L$; d) $y(t) \to K$; e) $y(t) \equiv K$; f) $y(t) \to K$.

E 2.3.1. Exata

E 2.3.2. $x\cos(y) + y = c$

E 2.3.3. $x - \frac{y^2}{2x^2} = c$

E 2.3.4. $(xy + 2x^2)^2 - 4x^4 = c$

E 2.3.5. $xy^{-3} + \frac{y^{-4}}{4} = \frac{5}{4}$

E 3.1.1. $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

E 3.1.2. $y(t) = e^{3t} - e^{4t}$

E 3.1.3. $y(t) = e^{t} - e^{2t}$

E 3.1.4. 1

E 3.1.5. Mostre que $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções da EDO com $W(y_1,y_2;t) \neq 0$.

E 3.2.1. $y(t) = [c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)]e^t$

E 3.2.2. $y(t) = e^{-3t} \operatorname{sen}(2t)$

E 3.2.3. $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t}$

E 3.2.4. $y(t) = (2 + 2t)e^{-t}$

E 3.2.4. $W(y_1,y_2;t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0$

E 3.2.4. $W(y_1,y_2;t) = e^{2rt} \neq 0$

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce and R.C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC, 10. edition, 2017.

[2] E.C. Oliveira and J.E. Maiorino. *Introdução aos métodos de matemática aplicada*. Unicamp, 2. edition, 2013.