

## Aufgabe 1

Gleichungssystem:  $\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = 0$  mit  $f_1(x_1, x_2) = 20 - 18 - 2x_1^2$   
 $f_2(x_1, x_2) = -4 \cdot (x_1 - x_2^2)$

Gesucht: 2 Iterationen des Newton-Verfahrens mit Startwert  $\mathbf{x}^{(0)} = (1.1, 0.9)^T$

Jacobi-Matrix:  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -4x_2 \\ -4x_2 & -4(x_1 - 3x_2^2) \end{bmatrix}$  und Newton-Verfahren:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$

Iteration 1:  $\boxed{k=0}$   $\mathbf{x}^{(0)} = (1.1, 0.9)$

$f_1(\mathbf{x}^{(0)}) = -1.42, f_2(\mathbf{x}^{(0)}) = -1.044 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = (-1.42, -1.044)$

$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -18 & -3.6 \\ -3.6 & 5.32 \end{bmatrix}$

Gleichung lösen:  $\mathbf{J}_f \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$

$\begin{bmatrix} -18 & -3.6 \\ -3.6 & 5.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.044 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \mathbf{x}^{(0)} \approx (-0.0722, 0.1802)$

$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)} \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = (1.0278, 1.0802)$

$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})\|_2 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \approx 1.6846$

$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2 = \sqrt{(\Delta x_1^{(0)})^2 + (\Delta x_2^{(0)})^2} \approx 0.1929$

Iteration 2:  $\boxed{k=1}$   $\mathbf{x}^{(1)} = (1.0278, 1.0802)$

$f_1(\mathbf{x}^{(1)}) = -0.1427, f_2(\mathbf{x}^{(1)}) = 0.5982 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = (-0.1427, 0.5982)$

$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -18 & -4.3208 \\ -4.3208 & 9.8905 \end{bmatrix}$

Gleichung lösen:  $\mathbf{J}_f \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})$

$\begin{bmatrix} -18 & -4.3208 \\ -4.3208 & 9.8905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1427 \\ -0.5982 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \mathbf{x}^{(1)} \approx (0.0111, 0.0679)$

$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} \approx (1.0389, 1.1481)$

$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})\|_2 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \approx 0.615$

$\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_2 = \sqrt{(\Delta x_1^{(1)})^2 + (\Delta x_2^{(1)})^2} \approx 0.0688$

final solution:

Iteration k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})\ _2$	$\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ _2$
0	(1.1, 0.9)	1.6846	-
1	(1.0278, 1.0802)	0.615	0.1929
2	(1.0389, 1.1481)	-	0.0688