Zu zeigen:

a) $T_f = \frac{f(a) \; + f(b)}{2} \cdot (b-a) \xrightarrow{\text{Sum nicht äquidistant}} T_f(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

1. betrachten Integral für $[a,b] = [x_0, x_n]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

2. einfache Trapezregel für $[x_i, x_{i+1}]$ anwenden

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

3. setze $f(x_i) = y_i$ ein

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{y_i \; + \; y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

4. Sumieren aller teil intervalle ergibt

$$T_f(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

b

$T_f = \frac{f(a) \; + f(b)}{2} \cdot (b-a) \xrightarrow{\text{Sum äquidistant}} T_f(h) = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$

1. aus a) folgt

$$T_f(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

2. wegen äquidistanz gilt

$x_{i+1} - x_i = h$ für alle i

3. einsetzen

$$T_f(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot h$$

4. h ausklamern

$$T_f(h) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

5. Summe explizit ausschreiben

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

6. addiren der Terme

y_0 kommt 1 mal vor $\rightarrow \frac{y_0}{2}$

y_n kommt 1 mal vor $\rightarrow \frac{y_0}{2}$

alle anderen y_i kommen 2 mal vor $\rightarrow \frac{y_i}{2} \cdot 2 = y_i$

also:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i$$

7. einsetzen

$$Tf(h) = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

8 $y_i = f(x_i)$

$$Tf(h) = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$