$I = 2\int_1^2 \ln(x)\,dx$

$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C \Rightarrow I = 2[(x\cdot\ln(x)-x)]_1^2 = 2[(2\cdot\ln(2)-2)-(1\cdot\ln(1)-1)] = 2[(2\cdot\ln(2)-2-(-1)]$

$= 2(2\cdot\ln(2)-1) \approx 2\cdot(2\cdot 0.6931-1) = 0.7724$

Fehlerabschätzung Summierte Rechtecksregel

$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Ableitung berechnen

$f(x) = 2\ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x},\quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = 2$

Einsetzen

$\frac{(2-1)^3}{24n^2}\cdot 2 \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{2}{24n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{1}{12n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{12\cdot 10^{-5}} = \frac{10^5}{12} = 8333.33 \Rightarrow n \geq \sqrt{8333.33} = 91.3 \Rightarrow n = 92$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{92} = 0.01087$

Fehlerabschätzung Summierte Trapezregel

$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Einsetzen

$\frac{1}{12n^2}\cdot 2 \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{2}{12n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5} = n^2 \geq \frac{1}{6\cdot 10^{-5}} = \frac{10^5}{6} = 16666.67 \Rightarrow n \geq \sqrt{16666.67} \approx 129.1 \Rightarrow n = 130$

$h = \frac{1}{130} = 0.00769$

Fehlerabschätzung Summierte Simpsonregel

$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

Berechnen 4. Ableitung

$f'''(x) = \frac{6}{x^3},\quad f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^4} \Rightarrow \max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = 24$

Einsetzen

$\frac{1^5}{180n^4}\cdot 24 \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{24}{180n^4} \leq 10^{-5} \Rightarrow \frac{2}{15n^4} \leq 10^{-5} \Rightarrow n^4 \geq \frac{2}{15\cdot 10^{-5}} = \frac{2\cdot 10^5}{15} = 13333.33 \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{13333.33} = 10.75 \Rightarrow n = 11$

Simpson regel n muss gerade sein $\Rightarrow n = 12$

$h = \frac{1}{12} = 0.0833$