XMM1.AN2

Tobias Kugel, Jil Zerndt
May 2024

Matrizenrechnung

Grundlagen

Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ
Eine *Matrix* ist (simpel gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element* a_ij ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Z**eile **z**uerst, **Spa**lte **Spä**ter). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit m-Zeilen und n-Spalten werden $m \times n$-Matrizen genannt.

Nullmatrix Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

Spaltenmatrix
Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Spaltenmatrix können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden ($\vec{a}$).

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion von Matrizen
Zwei Matrizen des gleichen Typs können addiert und subtrahiert werden. Diese Operationen werden Elementweise durchgeführt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

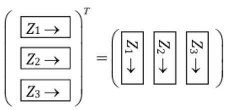
Skalare Multiplikation Matrizen können mit einer λ Zahl skaliert werden. Jedes Element wird dabei mit λ multipliziert.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

- Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:
  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ sowie $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

Transponieren
Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix ist eine $n \times m$-Matrix. Diese wird erhalten, indem die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen gemacht werden.

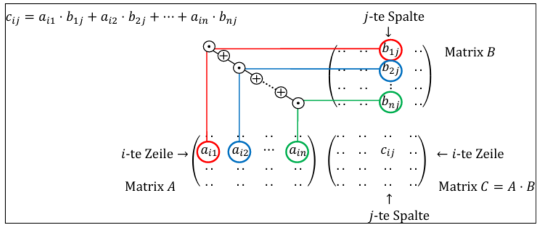


Transposition Regeln

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Multiplikation von Matrizen Die Multiplikation von Matrizen ist **nicht** elementweise definiert! Dammit zwei Matrizen A und B multipliziert werden können, muss die **Anzahl Spalen von A gleich der Anzahl Zeilen von B**. Die Resultierende Matrix hat gleich viele Zeilen wie A und Spalten wie B.

<!> Die Matrizenmultiplikation ist **nicht Kommutativ**!



Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen
- Assoziativ-Gesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:
  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Inverse

Inverse Die Inverse einer quadratischen Matrix A ist eine Matrix A^{-1}, für die gilt:
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$
. Eine Matrix heisst *invertierbar / regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*.

Eigenschaften invertierbarer Matrizen
1. Die Inverse einer invertierbaren Matrix ist eindeutig bestimmt.
2. Die Inverse einer invertierbaren Matrix A ist invertierbar und es gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Multiplizieren wir zwei invertierbare Matrizen A und B miteinander, so ist das Produkt auch invertierbar und es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   Die Reihenfolge ist relevant!
4. Die Transponierte A^T einer quadratischen Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. In diesem Fall gilt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Zusammenhänge invertierbarkeit
Gegeben eines LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit $n \times n$-Koeffizientenmatrix A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent ($\Leftrightarrow$):
1. A ist invertierbar.
2. $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat genau eine Lösung.
3. $rg(A) = n$

Inverse einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer 3×3-Matrix

Homogenes LGS
Ein LGS heisst *homogen*, wenn die rechte Seite $= \vec{0}$ ist: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Zusammenhänge invertierbarkeit und Homogenes LGS
Ist A invertierbar, so hat das homogene LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

Determinante

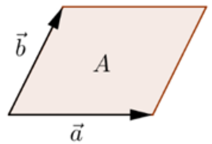
Determinante
Die Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist.

$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert.} \\ = 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert nicht.} \end{cases}$$

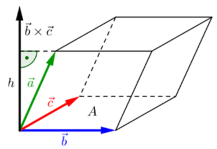
Eigenschaften von Determinanten Gegeben zweier *quadratischer Matrizen A, B* sowie einer *quadratischen Dreiecksmatrix D*.

$$\begin{aligned} \det(E) &= 1 \\ \det(D) &= \prod_{i=1}^{n} d_{ii} \\ \det(A \cdot B) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A^T) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ \det(m \cdot A) &= m^n \cdot \det(A) \quad \text{mit } m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Geometrische bedeutung der Determinante
Die Spalten einer 2×2-Matrix A spannen ein Parallelogram auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade der **Flächeninhalt** des aufgespannte Parallelogram.



Werden Spalten einer 3×3-Matrix B als raum Vektoren betrachtet, spannen diese einen Spat auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade das *Volumen* des aufgespannten Spat.



Determinante einer 1×1-Matrix

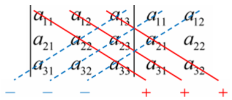
$$\det(A) = A_{11}$$

Determinante einer 2×2-Matrix

$$\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Determinante einer 3×3-Matrix

Die Formel für die Berechnung der Determinante einer 3×3-Matrix ist rechts Gegeben.



$$\begin{aligned}\det(A) &= |A| \\ &= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} \\ &\quad - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\end{aligned}$$

Determinante einer $n \times n$-Matrix nach Laplace

Gegeben einer $n\times n$-Matrix A, wird zum berechnen der Determinante eine feste Zeile i oder Spalte j gewählt, nachder die Determinante entwickelt wird.

Entwicklung nach Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bezeichnungen:

- a_{ij} ist das Element der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Splate
- A_{ij} ist die Matrix, die durch das Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

! Um den Rechenaufwand zu minimieren, entwickelt man nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen.

LGS

Rang

Der Rang $rg(A)$ einer Matrix A in Stufenform gibt an, wie viele Zeilen von A linear unabhängig sind. Der Rang entspricht der Anzahl der Zeilen von A minus der Anzahl der Nullzeilen.

$$rg(A) = \text{Gesamtanzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

Der Rang einer Matrix ist für die Lösbarkeit von Gleichungssystemen von Bedeutung.

Matrizengleichung

Zeilenstufenform und reduzierte Zeilenstufenform

Gauss-Verfahren

Für das Gauss-Verfahren wird Schritt 1.-4 des Gauss-Jordan-Verfahren angewendet. Das resultierende LGS wird durch Rückwärtssubstitution gelöst.

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte $= 0$, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

1. Ein LGS $A\cdot\vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $rg(A) = rg(A \mid \vec{c})$
2. Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** zu 1. gilt: $rg(A) = n$
3. Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $(rg(A) < n)$

i Bei einem homogenen LGS ist nach Definition $\vec{c} = \vec{0}$; deswegen gilt immer: $rg(A) = rg(A \mid \vec{c})$. Daher gibt es bei homogenen LGS nur zwei Möglichkeiten:

- Das LGS hat **eine Lösung** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**.

Vektorgeometrie

Vektor Ein Vektor ist ein Objekt, das einen *Betrag* (Länge) und eine *Richtung* hat. Vektoren werden durch Kleinbuchstaben mit einem Pfeil darüber bezeichnet ($\vec{a}$). Der Vektor, der den Punkt P in Q verschiebt, wird als $\vec{PQ}$ bezeichnet. Beschreiben zwei Vektoren dieselbe Translation (selber Betrag und Richtung), werden sie als gleich betrachtet. Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

Nullvektor

Der Vektor mit dem Betrag 0 (es gibt nur einen) heisst *Nullvektor* und wird mit $\vec{0}$ bezeichnet. Der Nullvektor ist der **einzige Vektor ohne Richtung**.

Einheitsvektor

Ein Vektor mit Betrag 1 heisst *Einheitsvektor* oder normiert und wird mit $\vec{e}$ bezeichnet (evtl. mit einem Index zwecks Unterscheidung von anderen Einheitsvektoren: z. B. $\vec{e_a}$).

Länge/Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

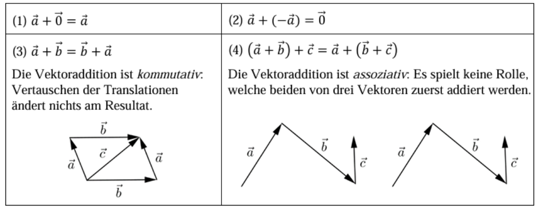
Berechnung Einheitsvektor/normieren Gegeben ein Vektor $\vec{a}$ mit Betrag $a = |\vec{a}|$. So ist der Einheitsvektor ist gegeben durch:

$$\vec{e_a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$$

Der Vektor $\vec{e_a}$ wird als **Einheitsvektor oder auch normiert** bezeichnet und der Übergang von $\vec{a}$ nach $\vec{e_a}$ heisst **Normierung**.

Rechenregeln für Vektoren I

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:



Rechenregeln für Vektoren II

- $(-\lambda)\cdot\vec{a} = -(\lambda\cdot\vec{a}) = \lambda\cdot(-\vec{a})$
- Assoziativ-Gesetz $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}$
- Distributiv-Gesetz $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- Distributiv-Gesetz $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a} + \lambda\cdot\vec{b}$

Normalenvektor Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene E ist, heisst *Normalenvektor* von E. Eine Koordinatendarstellung einer Ebene E heisst normiert, wenn gilt: $\vec{n} = 1$.

Gegenvektor

Der Vektor, der zu einem vorgegebenen Vektor $\vec{a}$ parallel ist und denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung hat, heisst *Gegenvektor* zu $\vec{a}$ und wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

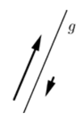
Linearkombination Gegeben sind n-Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$. Der Ausdruck

$$\lambda_1\cdot\vec{a_1} + \lambda_2\cdot\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\cdot\vec{a_n}$$

mit $\lambda_n \in R$ heisst *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$.

Kollinear

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen **kollinear**, wenn es eine Gerade g gibt, zu denen beide parallel sind. Ein **Spezialfall** bildet dabei der Nullvektor, welcher zu jedem Vektor kollinear ist.



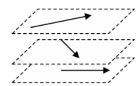
Eigenschaften kollinear Vektoren

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so ist einer ein Vielfaches des anderen; es gibt also eine reelle Zahl λ, sodass gilt:

$$\vec{a} = \lambda\cdot\vec{b}$$

Komplanar

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen **komplanar**, wenn es eine Ebene E gibt, zu denen alle drei parallel sind.

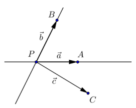


Eigenschaften komplanarer Vektoren

Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, für die gilt:

- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear.

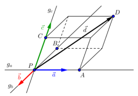
Dann lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen; es gibt also reelle Zahlen λ und μ, sodass gilt:



$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

Eigenschaften nicht komplanarer Vektoren

Sind drei *nicht komplanare* Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$, dann lässt sich jeder Vektor $\vec{d}$ im $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ eindeutig darstellen; es gibt also reelle Zahlen λ, μ und ν, so dass gilt:



$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$$

Komponentendarstellung

Jeder Vektor $\vec{a}$ kann als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ eindeutig dargestellt werden. Es gibt reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ genannt (Komponente), so dass gilt:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ortsvektor

Zu jedem Punkt P des Vektorraums ist ein *Ortsvektor* definiert

$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$$

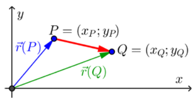
. Ortsvektoren sind im Ursprung O angeheftet und sind wie jeder Vektor Linearkombination von $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen:

$$\vec{r}(P) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2, \dots, x_n \cdot \vec{e}_n, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Komponentendarstellung von $\overrightarrow{OP}$

$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \overrightarrow{PQ}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \dots - \dots \end{pmatrix}$$



Rechnen mit Vektoren in Komponentendarstellung

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sowie ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Addition	Skalare Multiplikation	Gegenvektor
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Produkte

Skalarprodukt

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\phi)$$

. Dabei ist ϕ der Zwischenwinkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(0 \leq \phi \leq \pi)$.

Wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes

Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
3. Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
4. Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
5. Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Skalarprodukt aus Komponenten

In der Ebene

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 + a_2 b_2$$

Im Raum

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Winkelberechnung

Wir können die Definition des Skalarprodukts zur Berechnung des Zwischenwinkels $\phi (0 \leq \phi \leq \pi)$ zweier Vektoren nutzen.

In der Ebene	Im Raum
$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$	$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}$

Winkel und Skalarprodukt

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren und ϕ der eingeschlossene Winkel, $0 \leq \phi \leq \pi$, dann gilt:

$$\phi < \frac{pi}{2}, \quad \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ ist.}$$

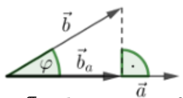
$$\phi > \frac{pi}{2}, \quad \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{ ist.}$$

$$\phi = \frac{pi}{2}, \quad \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ist.}$$

Orthogonal Projektion

Für die orthogonale Projektion $\vec{b}_a$ eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ gilt:

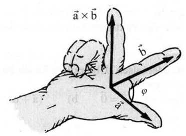
$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \text{ und } \left|\vec{b}\right|_a = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für den Fall $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, die zweite für $\frac{\pi}{2} < \phi \leq \pi$

Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier räumlicher Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der eindeutig bestimmte Vektor mit folgenden Eigenschaften:¨



- $\vec{a} \times \vec{b}$ **ist orthogonal zu** $\vec{b}$ **und zu** $\vec{b}$.
- $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\phi)$
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge!) ein *Rechtssystem*: Wenn Der Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{a}$ zeigt und der Zeigefinger in die Richtung von $\vec{b}$, dann gibt der Mittelfinger die Ausrichtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ an.

Dabei ist ϕ der Zwischenwinkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}(0 \leq \phi \leq \phi)$. Wir definieren aussderem: $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{b} \times \vec{0} = \vec{0}$.

Eigenschaften des Vektorprodukt

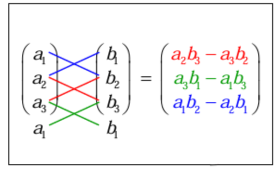
Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sowie für jede beliebiges $\lambda \in R$ gilt:

- $\vec{a}, \vec{b}$ **sind genau dann kollinear, wenn** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- Distributiv-Gesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Gemmischtes Assoziativ-Gesetz
  $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

<!> Das normale Assoziativ-Gesetz gilt im Allgemeinen nicht $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})$!

Vektorproduktes aus der Komponentendarstellung

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &= (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3) \times (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3) \\
&= a_1 b_1 \cdot \vec{0} + a_1 b_2 \cdot \vec{e}_3 + a_1 b_3 \cdot (-\vec{e}_2) + a_2 b_1 \cdot (-\vec{e}_3) + a_2 b_2 \cdot \vec{0} \\
&\quad + a_2 b_3 \cdot \vec{e}_1 + a_3 b_1 \cdot \vec{e}_2 + a_3 b_2 \cdot (-\vec{e}_1) + a_3 b_3 \cdot \vec{0} \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Vektorprodukt und Fläche des Parallelogramms

Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

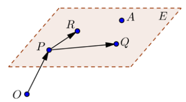
Lage von Geraden im Raum

		Gibt es gemeinsame Punkte?	
		ja	nein
Sind die Richtungsvektoren kollinear?	ja	identisch	echt parallel
	nein	schneidend	windschief

Parameterdarstellung

Eine Gerade oder Ebene E lässt sich durch eine Gleichung der folgenden Form beschreiben:

$$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$



Der Punkt P heisst *Aufpunkt*, die Vektoren $a = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ heissen *Richtungsvektoren* von E. Die Parameterdarstellung ist nicht eindeutig. Als Richtungsvektoren werden zwei beliebige Vektor gewählt, die *parallel* zu E sind und *nicht kollinear* sind.

Koordinatendarstellung

Eine Ebene E im Raum lässt sich durch eine Gleichung der folgenden Form Beschreiben:

$$E: ax + by + cz + d = 0, \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Dait ist gemeint, dass die Ebene E aus allen Punkten P besteht, deren Koordinaten x, y und z diese Gleichung erfüllen. Das $|d|$ stellt den Abstand zum Ursprung dar, wenn die Gleichung normiert ist. Ansonsten ist es $\frac{d}{\vec{n}}$

Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Für das Berechnen der Koordinatendarstellung aus der Parameterdarstellung gibt es mehrere Möglichkeiten.
Die Einfachste ist das berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten a, b und c liefert.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene E ermittelt.
Die zweite Möglichkeit ist es, ein LGS aufzustellen und die Parameter zu eliminieren.

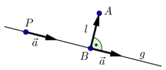
$$\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Abstand Punkt-Gerade

Für das finden des Abstandes zu einer Geraden gibt es verschiedene Möglichkeit.
Hier der Weg über den Fusspunkt. Gegeben Gerade $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ in Parameterform und Punkt A. Gesucht ist der Fusspunkt $B \in g$.

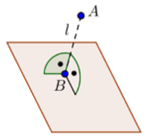


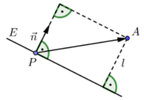
1. Da $B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \begin{pmatrix} P_x + a\lambda_B \\ P_y + b\lambda_B \\ P_z + c\lambda_B \end{pmatrix}$.
2. Da $\overrightarrow{BA} \perp g \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a} = 0$
3. Jetzt kann ein LGS aufgestellt und aufgelöst werden.

Weiter Möglichkeit gehen über die Projektion oder die Fläche des Kreuzprodukt.

Abstand Punkt-Ebene

Gegeben ein Punkt $A = (x_A; y_A; z_A)$ sowie eine Ebene E mit der **normierten** Koordinatendarstellung $E: ax + by + cz + d = 0$. Dann gilt für den Abstand l des Punktes A von der Ebene E die gleichung (1). Ist die Koordinatendarstellung nicht **nicht normiert**, so gilt (2).





$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d| \tag{1}$$

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|} \tag{2}$$

Vektorräume

Grundlagen

Vektorraum

Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge $V \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen:

$$+ : V \times V \to V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \to V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$$

mit folgenden Eigenschaften: Gegeben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die Menge aller Vektoren V sowie dem Neutralelement $\vec{0}$ gilt:

1. Es gibt ein Element $\vec{0} \in V$, für das gilt: $\forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2. Für jedes Element in $\vec{a} \in V$ gibt es genau ein $-\vec{a} \in V$, so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
3. Es gilt $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
4. Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. Assoziativgesetz:
   $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
   $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
6. Distributivgesetz:
   $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
   $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Wichtig: Die Betrachtung, dass ein Vektor ein Objekt mit *Betrag* und *Richtung* ist, stimmt in dieser allgemeinen Sichtweise nicht mehr umbedingt.

Eigenschaften eines Vektorraums

Dammit eine Menge V mit einer Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, muss gelten:

1. Die Regeln (1)-(8) aus der Definition werden eingehalten.
2. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$

Unterraum Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst *Unterraum*, wenn U selber auch ein Vektorraum ist. Nicht jede Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V. Zwar erfüllt sie die Vektorraum-Eigenschaften aus der Definition, jedoch ist nicht garantiert, dass für $\vec{a}, \vec{b} \in U$ $\vec{a} + \vec{b} \in U$ gilt.

Unterraumkriterien Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:

1. $\forall \vec{a}, \vec{a} \in U : \vec{a} + \vec{b} \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in U : \lambda \cdot \vec{a} \in U$

Wichtig: U enthält $\vec{0}$. Falls $\vec{0} \notin U$, ist U kein Unterraum.

Unterraum Die Teilmenge $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$, die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum V enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von V.