Alphabet, Wörter & Sprachen

Begriff	*Erklärung / Beispiel*	Begriff	*Erklärung / Beispiel*
Alphabet Σ	*endliche, nichtleere Menge an Symbolen*	echtes Suffix v_e	v_e *ist ein echtes Suffix von* w, *wenn* $v_e \neq w$ *gilt.*
Wort w	*ist eine endliche Folge von Symbolen*	Σ^k	*Menge aller Wörter mit der Länge* k.
leeres Wort ε	*enthält keine Symbole, gehört zu jedem Alphabet*	Σ^*	*Menge aller Wörter über dem Alphabet* Σ. *(Kleenesche Hülle)*
$\|w\|$	*Länge eines Wortes* $\|abc\| = 3$	Σ^+	*Menge aller Wörter über dem Alphabet* Σ *minus dem leeren Wort.* $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$
$\|w\|_x$	*Häufigkeit des Symbols* x *in dem Wort* w. $\|100110\|_1 = 3$	$x \circ y$	*Konkatenation von zwei beliebigen Wörter*
w^R	*Spiegelung des Wortes* w $(abc)^R = cba$	Wortpotenz x^n	x *ist ein beliebiges Wort über* Σ $(x = ab)$ $x^3 = ababab$
Teilwort (Infix) v	v *ist ein Teilwort von* w, *wenn* $w = xvy$ *für beliebige Wörter* x, y *gilt.*	**Sprache** L	*ist eine Teilmenge von* Σ^* $L \subseteq \Sigma^*$
echtes Teilwort v_e	v_e*ist ein echtes Teilwort von* w, *wenn* $v_e \neq w$ *gilt.*	leere Sprache $\emptyset$	*ist die Sprache über jedem Alphabet.*
Präfix v	v *ist ein Präfix von* w, *wenn* $w = vy$ *für beliebige Wörter* y *gilt.*	Konkatenation von Sprachen	$AB = \{uv \mid u \in A \& v \in B\}$ *Nennt man eine Konkatenation der zwei Sprachen* A & B.
echtes Präfix v_e	v_e *ist ein echtes Präfix von* w, *wenn* $v_e \neq w$ *gilt.*	A^*	*die Kleenische Hülle* A^* *der Sprach* A *ist durch* $\{\varepsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \cup \ldots$ *definiert.*
Suffix v	v *ist ein Suffix von* w, *wenn* $w = xv$ *für beliebige Wörter* x *gilt.*	Entscheidungsproblem	*INPUT: Sprache* L, *Wort* x *OUTPUT: JA, wenn* $x \in L$ *oder NEIN, wenn* $x \notin L$.

Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind Sprachen, welche Sprachen beschreiben oder endlich repräsentiert.

Syntax:

- 1 oder 0 $:= 1 \mid 0$
- beliebig oft 1 $:= 1^*$

Rechenregel:

- $L(R|S) = L(S|R)$
- $L\big(R(ST)\big) = L\big((RS)T\big)$
- $L\big(R\big|(S|T)\big) = L\big((R|S)\big|T\big)$
- $L\big(R(S|T)\big) = L(RS|ST)$
- $L((R^*)^*) = L(R^*)$
- $L(R|R) = L(R)$

Abschlusseigenschaften:

L_1 und L_2 sind zwei **reguläre** Sprachen.

- $L_1 \cup L_2$ ist auch **regulär**
- $L_1 L_2$ ist auch **regulär**
- L_1^* ist auch **regulär**
- $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ ist au **regulär**
- $L_1 \cap L_2$ ist auch **regulär**
- $L_1 \setminus L_2$ ist auch **regulär**

Nino Frei

Endliche Automaten

Endliche Automaten sind gleich mächtig wie reguläre Ausdrücke.

Definition (Endlicher Automat)

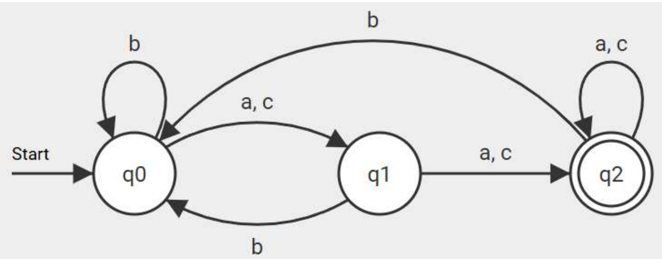
Ein **(deterministischer) endlicher Automat** (EA) ist ein Quintupel

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

mit

- ***endlichen*** Menge von **Zuständen** $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$
- **Eingabealphabet** $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$
- **Übergangsfunktion** $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$
- **Startzustand** $q_0 \in Q$
- Menge der **akzeptierenden Zustände** $F \subseteq Q$

Beispiel DEA:



Die Berechnung für das Wort *abac* mit dem Beispiel-Automaten sieht wie folgt aus:

$$(q0, abac) \vdash (q1, bac) \vdash (q0, ac) \vdash (q1, c) \vdash (q2, \varepsilon)$$

→ Akzeptiert

ε – NEA

Den ε – NEA zuerst in ein NEA umwandeln, in dem man alle ε-Übergänge eliminiert.

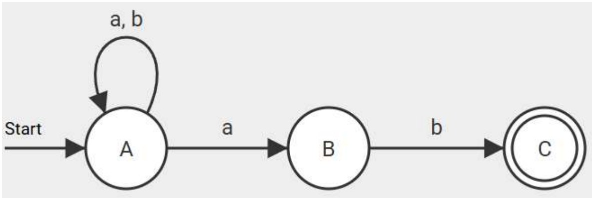
Danach kann man die Teilmengenkonstruktion wieder anwenden.

Nichtdeterminismus

Automaten sind **deterministisch** wenn gilt:

- Ein Automat über dem beliebigen Alphabet Σ, braucht **pro Zustand** und pro Element in Σ, eine Übergangsfunktion mit der *Eingabe* gleich dem Element.
- Keine ε-Übergänge existieren.

Nichtdeterministische Automaten sind gleich mächtig wie deterministische!
Mit einer Teilmengenkonstruktion kann ein NEA in einen DEA umgewandelt werden:



- Tabelle aufstellen:

	Eingabe	
Zustand	a	b
A	A, B	A
B	Ø	C
C	Ø	Ø

- Tabelle umschreiben + nicht zu erreichende Zustände weglassen:

	Eingabe	
Zustand	a	b
A	AB	A
AB	AB	AC
AC	AB	A

Kontextfreie Grammatiken

Die Kontextfreie Grammatik sind mächtiger als reguläre Sprachen.

Definition (Kontextfreie Grammatik)

Eine **kontextfreie Grammatik** G (KFG) ist ein 4-Tupel (N, Σ, P, A) mit

- N ist das Alphabet der **Nichtterminale** (Variablen).
- Σ ist das Alphabet der **Terminale**.
- P ist eine endliche Menge von **Produktionen** (Regeln). Jede Produktion hat die Form

$$X \to \beta$$

mit **Kopf** $X \in N$ und **Rumpf** $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$.
- A ist das **Startsymbol**, wobei $A \in N$.

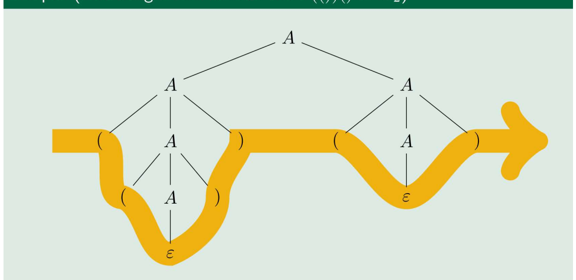
Ein KGF für die Sprache $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$G_1 = (\{A\}, \{0, 1\}, P, A)$$

$$P = \{A \to 0A1, A \to \varepsilon\}$$

Linksseitige Ableitung: Das Nichtterminale Zeichen, ganz links, wird immer zuerst abgeleitet.
Rechtsseitige Ableitung: Das Nichtterminale Zeichen, ganz rechts, wird immer zuerst abgeleitet.

Beispiel (Ableitungsbaum für das Wort (())() in G_2)



Mehrdeutige KGF: Für ein Wort existieren mehrere Parsebäume.

KFG für eine reguläre Sprache (DEA)

1. Zustand q_i := Nichtterminale Variable Q_i.
2. Transition $\delta(q_i, a) = q_j$ ≔ Produktion $Q_i \to aQ_j$.
3. akzeptierenden Zustand $q_i \in F$ ≔ Produktion $Q_i \to \varepsilon$.
4. Das Nichtterminale Q_0 wird zum Startsymbol.

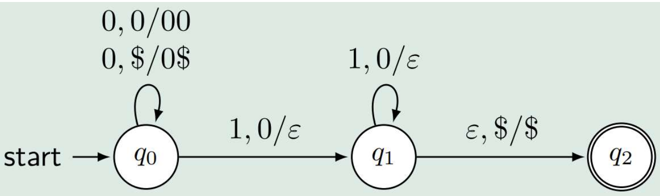
Kellerautomaten

Definition (deterministischer Kellerautomat)

Ein **deterministischer Kellerautomat (KA)** M ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \$, F)$, wobei

- Q ist eine endliche Menge von Zuständen.
- Σ ist das Alphabet der Eingabe.
- Γ ist das Alphabet des Kellers.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$ ist eine (partielle) Übergangsfunktion.
- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand.
- $\$ \in \Gamma$ ist ein ausgezeichnetes Symbol vom Alphabet des Kellers.
- $F \subseteq Q$ ist die Menge der akzeptierenden Zustände.

Berechnungsschritt: $\delta(q_i,\text{read},\text{pop}) = (q_j,\text{push}) \to$ im Diagramm: read, pop/push.



Mit dem $read = \varepsilon$ & $pop = c \in \Gamma$, diese Übergangsfunktion mit $pop = c$ darf nur einmal Vorkommen pro Zustand, ansonsten ist der KA nichtdeterministisch.

Nichtdeterminismus

NKA sind **nicht** gleich mächtig wie DKA.

Eine Sprache ist kontextfrei, genau dann, wenn es einen NKA gibt, der die Sprache erkennt.

Turingmaschine

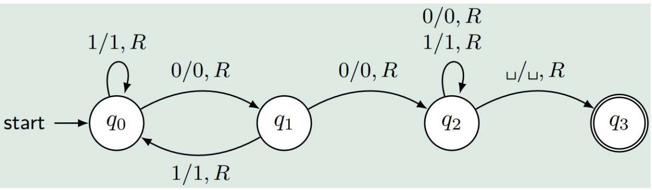
Definition (Turing-Maschine)

Eine **(deterministische) Turing-Maschine** (TM) ist ein 7-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$$

mit einer bzw. einem:

- *endlichen* Menge von **Zuständen** $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$,
- **Eingabealphabet** $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$,
- **Übergangsfunktion** $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times D,\ D = \{L, R\}$,
- **Startzustand** $q_0 \in Q$,
- Menge von **akzeptierenden Zuständen** $F \subseteq Q$,
- **Bandalphabet** Γ (endliche Menge von Symbolen) und $\Sigma \subset \Gamma$ und
- **Leerzeichen** $\sqcup$, mit $\sqcup \in \Gamma$ und $\sqcup \notin \Sigma$.



Die Berechnung für das Wort 01001 die Beispiel-Turingmaschine sieht wie folgt aus:

$$q_0 01001 \vdash 0q_1 1001 \vdash 01q_0 001 \vdash 010q_1 01$$
$$\vdash 0100q_2 1 \vdash 01001q_2 \vdash 01001\_q_3$$
$$\to \text{Akzeptierend}$$

Eine Sprache die von einer TM akzeptiert wird, ist rekursiv aufzählbar.

Nichtdeterminismus

Nichtdeterministische Turing-Maschinen sind gleich mächtig wie DTM.

Universelle Turingmaschinen

Bei einer universellen TM werden die Übergangsfunktionen einer TM codiert mit folgenden Vorgehen:

1. Zustände $q_n \coloneqq 0^n \to$ Bsp. $q_2 = 00$, dabei ist $q_1 = \text{Startzustand}, q_2 = \text{Endzustand}$
2. $\Gamma = \{0, 1, \$, a, b, \dots, z\}$, Bandsymbol $\Gamma_3 = \$(\text{blank}) = 000$
3. Richtung $L = 0$ & $R = 00$

Trennzeichen:

- Zwischen den Elementen: 1
- Zwischen den Übergangsfunktionen: 11
- Ende der Turing-Definition: 111

Berechnungsmodelle

Eine Funktion ist Turing-berechenbar, wenn es eine TM gibt, die für alle Wörter anhält.

Loop-Programm:

$\text{Variable} = \text{Variable} \pm \text{Konstante}$

```
Loop x1 Do
   x2 = x2 + 1
End;
x0 = x2 + 0;
x0 = x0 + 1
```

While-Programm:

Erweiterung des Loop-Programm.

```
While x1 > 0 Do
   x1 = x1 - 1;
   Loop x2 Do
      x0 = x0 + 1
   End
End
```

GoTo-Programm:

```
M1: x0 = x3 + 0
M2: IF x1=0 THEN GOTO M4
M3: x0 = x2 + 0
M4: HALT
```

While & GoTo Programme sind Turing-vollständig, während das Loop-Programm primitiv-rekursiv ist.

$\forall n \in \mathbb{N}$ und jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ die n-stellige konstante Funktion:

$$c_k^n = \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \text{ mit } c_k^n(x_1, ..., x_n) = k$$

Nachfolgerfunktion: $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\eta(x) = x + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < k < n$ die n-stellige Projektion auf die k-te Komponente:

$$\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \text{ mit } \pi_k^n(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = k$$

n = Anzahl der Argumente, k = Position des Arguments

Beispiel Addition:

$$Add(0, y) = y$$
$$Add(x + 1, y) = Add(x, y) + 1$$

$$Add(0, y) = \pi_1^1(y)$$
$$Add(x + 1, y) = \eta(\pi_1^3(Add(x, y), x, y))$$

Entscheidbarkeit

Negative-Sprache $\bar{A}$: Output ist zur Sprache A «umgekehrt».

Entscheidbarkeit: TM haltet immer an → Output: JA / NEIN. A entscheidbar $:=$ $\bar{A}$ entscheidbar

Semi-Entscheidbarkeit: TM haltet nur an, wenn Output: JA, ansonsten läuft TM unendlich weiter. Wenn A & $\bar{A}$ beide semi-entscheidbar sind, dann ist A entscheidbar.

Reduktion: $A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A$ ist reduzierbar auf B. $P_1(x) \coloneqq$ Ist x eine Primzahl? & $P_2(x, y) \coloneqq$ Ist x der kleinste Primfaktor von y? P_1 kann auf P_2 reduziert werden mit dem Input: $P_2(x, x)$.

Halteproblem:
- allgemeines Halteproblem H: Hält die TM T, wenn man sie auf x ansetzt?
- leeres Halteproblem H_0: Hält die TM T, wenn man sie auf das leere Band ansetzt?
- spez. Halteproblem H_S: Hält die TM T, wenn man sie auf ihren eigenen Code ansetzt?

Beweisidee: Wir zeigen H_S ist nicht entscheidbar und reduzieren dann das Halteproblem: $H_S \preccurlyeq H \preccurlyeq H_0$.

H_S ist nicht entscheidbar (durch Widerspruch), H_S ist auf H reduzierbar und H auf H_0. Somit ist H_0 auch nicht entscheidbar.

Komplexitätstheorie

Zeitkomplexität	Platzkomplexität	Beschreibungskomplexität
Laufzeit des besten Programms, welche das Problem löst.	Speicherbedarf des besten Programms	Länge des kürzesten Programms.

$\mathcal{O}$-Notation (Landau Symbole):
- $f \in \mathcal{O}(g)$: f wächst nicht asymptotisch schneller als g.
- $f \in \Omega(g)$: f wächst asymptotisch mindestens so schnell wie g.
- $f \in \Theta(g)$: f und g wachsen asymptotisch gleich schnell.

Laufzeit-Reihenfolge: $\mathcal{O}(1) < \mathcal{O}(\log\log n) < \mathcal{O}(\sqrt{\log n}) < \mathcal{O}(\log\sqrt{n}) < \mathcal{O}(\log n) < \mathcal{O}(\sqrt{n}) < \mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(n * \log n) < \mathcal{O}(n^2) < \mathcal{O}(n^3) < \mathcal{O}(n^C) < \mathcal{O}(2^n) < \mathcal{O}(n!) < \mathcal{O}(n^n)$.

Klasse P: Alle Probleme, die von einer DTM in Polynomzeit gelöst werden.

Klasse NP: Alle Probleme die von einer NTM in Polynomzeit gelöst werden. (NP = nichtdeterministisch polynomiell)

Polynomzeit-Verifizierer:
Kann ein Zeuge (= mögliche Lösung für ein Problem) in polynomielle Zeit verifiziert werden, nennt man dies ein Polynomzeit-Verifizierer.

$[P] \coloneqq$ Lösung finden in Polynomzeit
$[NP] \coloneqq$ Lösung verifizieren in Polynomzeit
Ob nun $[P] = [NP]$ ist noch nicht geklärt.

Eine Sprache L ist **NP-schwer**, falls alle anderen Sprachen $L' \in NP$ auf L reduziert werden kann.

Eine Sprache L ist **NP-vollständig**, falls

$$L \in NP \,\&\, L \in NP_{Sch}$$

Wenn es uns gelingt eine NP-vollständiges Problem in P liegt, dann gilt: $P = NP$.
Beispiel NP-vollständiges Problem:
SAT (ist das Problem zu entscheiden, ob eine gegebene Formel in KNF erfüllbar ist.)