

Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
- \vec{e} = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index \vec{e}_a
- \vec{PQ} = Vektor, der den Punkt P in Q verschiebt
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (selber Betrag und Richtung)

Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

Gegenvektor $-\vec{a}$ ist parallel zu \vec{a} , hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \parallel -\vec{a}$$

Länge/Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Einheitsvektor/Normierung $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Der Vektor \vec{e}_a wird als **Einheitsvektor** oder auch **normiert** bezeichnet und der Übergang von \vec{a} nach \vec{e}_a heisst **Normierung**.

Orthogonal (Senkrecht) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ orthogonal

\vec{a} und \vec{b} sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt

Normalenvektor Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene E ist, heisst *Normalenvektor* von E . Eine Koordinatendarstellung einer Ebene E heisst normiert, wenn gilt: $\vec{n} = 1$.

Rechnen mit Vektoren

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Winkelberechnung φ = Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ($0 \leq \varphi \leq \pi$)

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Winkel und Skalarprodukt

Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren und φ der eingeschlossene Winkel, $0 \leq \varphi \leq \pi$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &< \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ \varphi &> \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

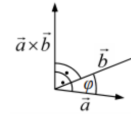
Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



Eigenschaften des Vektorprodukts

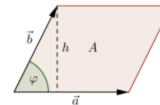
Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
 - Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
 - Distributiv-Gesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
 - Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}!$

Fläche des aufgespannten Parallelogramms $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

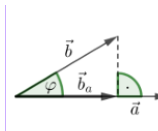
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Orthogonal Projektion von \vec{b} auf \vec{a}

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, die zweite für $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

Linearkombination (LK) $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

mit $\lambda_n \in \mathbb{R}$ heisst *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Lineare Abhängigkeit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig, wenn:

- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \neq \vec{0}$ ($\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$)
- $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$ als einzige LK $\vec{0}$ ergibt

Komponentendarstellung $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (Komponente), so dass jeder Vektor \vec{a} als LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eindeutig dargestellt werden kann.

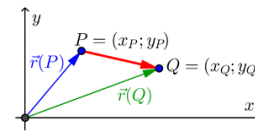
Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Zu jedem Punkt P des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung O angeheftet, wie jeder Vektor LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen:

Komponentendarstellung von \vec{OP}

$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \vdots \end{pmatrix}$$



Geraden und Ebenen

Kollinear und Komplanar

Kollinear \vec{a} und \vec{b}

- \exists eine Gerade g , zu der beide parallel sind
- Spezialfall: Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (Kreuzprodukt)
- $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ (einer ist Vielfaches des anderen)



Lage von Geraden im Raum

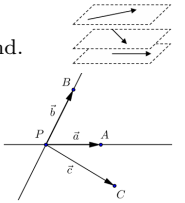
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Komplanar \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Es existiert eine Ebene E , zu der alle parallel sind.

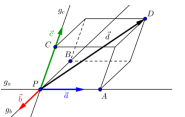
LK komplanarer Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Wenn \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear sind lässt sich \vec{c} als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ darstellen: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$



LK nicht komplanarer Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Jeder Vektor \vec{d} im \mathbb{R}^3 lässt sich als Linearkombination von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} eindeutig darstellen: $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

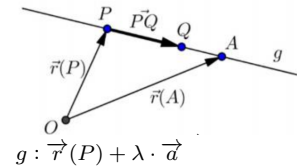


Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

Parameterdarstellung einer Geraden

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$$

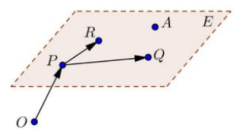
Der Punkt P heisst *Aufpunkt*, der Vektor $\vec{a} = \vec{PQ}$ heisst *Richtungsvektor* von g .



Parameterdarstellung einer Ebene

$$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

P = *Aufpunkt*, $\vec{a} = \vec{PQ}$ und $\vec{b} = \vec{PR}$ sind *Richtungsvektoren* von E .



Parameterdarstellung nicht eindeutig!

Richtungsvektoren zwei beliebige Vektoren: *parallel* zu E und *nicht kollinear*

$$\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PQ} \text{ komplanar}$$

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$$

Koordinatendarstellung $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$E : ax + by + cz + d = 0$$

Bedeutung: die Ebene E besteht aus allen Punkten P , deren Koordinaten x, y und z diese Gleichung erfüllen. $|d|$ = Abstand zum Ursprung, wenn Gleichung normiert (sonst $\frac{|d|}{n}$)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten a, b und c liefert. Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene E ermittelt.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 \\ 2+4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Option 2: LGS aufstellen, Parameter eliminieren: $\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4} \end{aligned} \quad E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

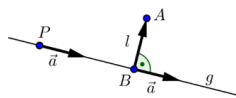
Abstände berechnen**Abstand Punkt-Gerade** Gesucht ist der Fusspunkt $B \in g$

Gegeben: Gerade $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ in Parameterform und Punkt A

$$1. \text{ Da } B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \begin{pmatrix} P_x + a\lambda_B \\ P_y + b\lambda_B \\ P_z + c\lambda_B \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Da } \vec{BA} \perp g \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{a} = 0$$

3. Jetzt kann ein LGS aufgestellt und aufgelöst werden.

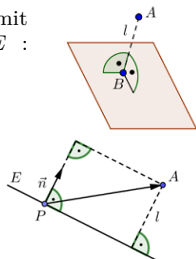
**Abstand Punkt-Ebene** l = Abstand von A zu E

Gegeben: Punkt $A = (x_A; y_A; z_A)$, Ebene E mit der **normierten** Koordinatendarstellung $E: ax + by + cz + d = 0$

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

nicht normierte Koordinatendarstellung:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

**Abstand Punkt-Gerade**

$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. 0 = \vec{BA} \cdot \vec{a}$$

$$3. \text{Length} = |\vec{BA}| = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Abstand Punkt-Ebene

$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. 0 = \vec{BA} \cdot \vec{n}$$

$$3. \text{Length} = |\vec{BA}| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Beispiel Abstand Punkt-Gerade

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

$$1. \vec{BA} = \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 13+5\lambda \end{pmatrix}$$

$$2. 0 = \begin{pmatrix} 3-1-3\lambda \\ -1-13-5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$$

Abstand Gerade-Gerade

$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$$

$$3. \text{Length} = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$3. \text{Length} = \left| \begin{pmatrix} 2-3x \\ -14-5x \end{pmatrix} \right|$$

Geometrische Transformationen \mathbb{R}^2 **Streckung**

- in x -Richtung um λ_1
- in y -Richtung um λ_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

- Gerade $g: ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g: x + 7y = 0$
- Normiert $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

- auf Gerade $g: ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g: 2x - y = 0$
- Normiert $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotation

- um den Ursprung
- um Winkel α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scherung

- in x -Richtung um s_1
- in y -Richtung um s_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

 \mathbb{R}^3 **Zentrische Streckung**

- in x -Richtung um λ_1
 - in y -Richtung um λ_2
 - in z -Richtung um λ_3
- $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

- Ebene $E: ax + by + cz = 0$
 - mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
- $$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E: x + 2y + 3z = 0$
 - Normiert $E: \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$
- $$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- Ebene $E: ax + by + cz = 0$
 - mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
- $$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E: 2x - y + 3z = 0$
 - Normiert $E: \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$
- $$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die x, y, z Achsen

$$\begin{aligned} x: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} & y: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ z: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rotation um den Winkel α um die Gerade g

Gerade $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 1$

\vec{a} ist ein Punkt auf der Geraden g , \vec{b} ist der Richtungsvektor der Geraden g

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1 - \cos(\alpha)) & ab(1 - \cos(\alpha)) - b \sin(\alpha) & \dots \\ ab(1 - \cos(\alpha)) + b \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1 - \cos(\alpha)) & \dots \\ -a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) & b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & -b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & \cos(\alpha) + (a^2 + b^2)(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

↑ 3x3 Matrix, die die Rotation um die Gerade g beschreibt (hat nicht auf eine Zeile gepasst)

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ

Eine *Matrix* ist (simpler gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element* a_{ij} ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Zeile** zuerst, **Spalte** später). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit m -Zeilen und n -Spalten werden $m \times n$ -Matrizen genannt.

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.

- $m \times n$ -Matrix
- a_{ij} : Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte

Nullmatrix Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

Spaltenmatrix Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden (\vec{a}).

Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

- Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:
 $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ sowie $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.

Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$
--	---

Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

- Assoziativ-Gesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- A^T : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{Z_1 \rightarrow} \\ \boxed{Z_2 \rightarrow} \\ \boxed{Z_3 \rightarrow} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{\leftarrow Z_1} \\ \boxed{\leftarrow Z_2} \\ \boxed{\leftarrow Z_3} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:** $A^T = A$
- Einheitsmatrix:** E mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.

A : Koeffizientenmatrix

\vec{x} : Vektor der Unbekannten

\vec{b} : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$

\Rightarrow Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen \rightarrow stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)

Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Gauss-Jordan-Verfahren

- bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
- oberste Zahl in Pivot-Spalte = 0
 \rightarrow vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
- teile erste Zeile durch $a_{11} \rightarrow$ so erhalten wir führende Eins
- Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenoperationen)
nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Zeilenoperationen erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$ • unendlich viele Lösungen:
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$ $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen

Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins

Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5$ $x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$ $x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow rg(A) = rg(A | \vec{b})$

nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für $n \times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Quadratische Matrizen

Umformen bestimme die Matrix X : $A \cdot X + B = 2 \cdot X$

$$\Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot X - B \Rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = -B \Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot X = -B$$

$$\Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$$

$$\Rightarrow X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$$

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}

A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
 A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Determinante

Determinante

Die Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist.

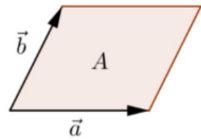
$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert.} \\ = 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht.} \end{cases}$$

Geometrische Interpretation der Determinante:

- Fläche im \mathbb{R}^2
- Volumen im \mathbb{R}^3

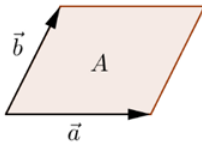
welche durch eine Matrix A aufgespannt wird.

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$

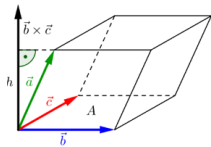


Geometrische Bedeutung der Determinante

Die Spalten einer 2×2 -Matrix A spannen ein Parallelogramm auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade der **Flächeninhalt** des aufgespannten Parallelogramms.



Werden Spalten einer 3×3 -Matrix B als Raumvektoren betrachtet, spannen diese einen Spat auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade das **Volumen** des aufgespannten Spats.



Determinantenregeln

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär

Eigenschaften von Determinanten Gegeben zweier quadratischer Matrizen A, B sowie einer quadratischen Dreiecksmatrix D .

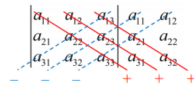
$$\begin{aligned} \det(E) &= 1 \\ \det(D) &= \prod_{i=1}^n d_{ii} \\ \det(A \cdot B) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A^T) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ \det(m \cdot A) &= m^n \cdot \det(A) \text{ mit } m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Determinante einer 1×1 -Matrix $\det(A) = A_{11}$

Determinante einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

Determinante einer 3×3 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$



$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$$

Determinante einer $n \times n$ -Matrix A

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen
- $|A_{ij}|$ ist die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die entsteht evtl. bsp hier

Determinante einer $n \times n$ -Matrix nach Laplace

Gegeben einer $n \times n$ -Matrix A , wird zum Berechnen der Determinante eine feste Zeile i oder Spalte j gewählt, nach der die Determinante entwickelt wird.

Entwicklung nach Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bezeichnungen:

- a_{ij} ist das Element der Matrix A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte
- A_{ij} ist die Matrix, die durch das Weglassen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.

! Um den Rechenaufwand zu minimieren, entwickelt man nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen.

Lineare Abhängigkeit Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind linear unabhängig
- Zeilen von A sind linear unabhängig
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Vektorräume

Vektorraum Menge V mit zwei Verknüpfungen:

- Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot \vec{a} \in V$
- Nullpunkt: $\vec{0} \in V$

Vektorraum

Ein **reeller Vektorraum** ist eine Menge $V \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften: Gegeben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die Menge aller Vektoren V sowie dem Neutralelement $\vec{0}$ gilt:

1. Es gibt ein Element $\vec{0} \in V$, für das gilt: $\forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2. Für jedes Element in $\vec{a} \in V$ gibt es genau ein $-\vec{a} \in V$, so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
3. Es gilt $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
4. Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
 $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
6. Distributivgesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
 $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Wichtig: Die Betrachtung, dass ein Vektor ein Objekt mit *Betrag* und *Richtung* ist, stimmt in dieser allgemeinen Sichtweise nicht mehr unbedingt.

Eigenschaften eines Vektorraums

Damit eine Menge V mit einer Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, muss gelten:

1. Die Regeln (1)-(8) aus der Definition werden eingehalten.
2. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$

Unterraum Teilmenge U eines Vektorraums V , die selbst ein Vektorraum ist.

- $\vec{0} \in U$
- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U$ gilt $\vec{a} + \vec{b} \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \vec{a} \in U$ gilt $\lambda \cdot \vec{a} \in U$

Unterraum Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst *Unterraum*, wenn U selber auch ein Vektorraum ist. Nicht jede Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V . Zwar erfüllt sie die Vektorraumeigenschaften aus der Definition, jedoch ist nicht garantiert, dass für $\vec{a}, \vec{b} \in U$ $\vec{a} + \vec{b} \in U$ gilt.

Unterraumskriterien Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V , wenn gilt:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U : \vec{a} + \vec{b} \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in U : \lambda \cdot \vec{a} \in U$

Wichtig: U enthält $\vec{0}$. Falls $\vec{0} \notin U$, ist U kein Unterraum.

Nullvektorraum Die Teilmenge $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$, die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum V enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von V .

Linearer Span

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ in einem reellen Vektorraum V .

$$\text{span}\left(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\right) = \left\{ \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Schreibt man die Vektoren $\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ -Matrix B

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- 1. Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig
- 2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \vec{0}$
- 3. Es gilt $\text{rg}(B) = n$
Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum von V , wenn U selbst auch ein Vektorraum ist.

Erzeugendensystem Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum aufspannen.

Eine Menge $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ von Vektoren \vec{b}_k im Vektorraum V heisst Erzeugendensystem von V , wenn gilt:

$$V = \text{span}\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\right)$$

Schreibt man die Vektoren $\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ -Matrix B .

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- 1. Die Vektoren \vec{b}_k bilden ein Erzeugendensystem \mathbb{R}^m
- 2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
- 3. Es gilt $\text{rg}(B) = m$

Dimensionen Für jeden reellen Vektorraum V gilt: Jede Basis von V hat gleich viele Elemente. Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden, heisst Dimension von $V = \dim(V)$.

- Eine Basis von \mathbb{R}^n hat n Elemente $\rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basis Eine Menge $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ von Vektoren \vec{b}_k im Vektorraum V heisst Basis von V , wenn gilt:

- $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V
- Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig

Basis und Dimensionen Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^n
- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Basiswechsel Beliebige Basis $B \rightarrow$ Standard-Basis S

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$
$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

Basiswechsel Standard-Basis $S \rightarrow$ Beliebige Basis B

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (V und W können auch gleich sein). Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heisst **linear Abbildung**, wenn für alle $x, y \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{1}$$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \tag{2}$$

Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ angewendet wird, heisst **Bild** von \vec{x} unter f .

i Linearität ist etwas Besonderes. Die allermeisten Abbildungen/Funktionen sind nicht linear.

Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heisst linear, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
- $f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a})$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Potenzieren: \vec{a}^2
- Addition von Skalaren: $\lambda + \vec{a}$
- Cosinus: $\cos(\vec{a})$

Überprüfung der Linearität

Für eine Abbildung $f : V \rightarrow W$, $f(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$

Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
- $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \rightarrow OK$

... usw.

Lineare Abbildung - Darstellung Wir betrachten die Vektorräume R''' und R'' , versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : R'' \rightarrow R'''$ durch eine $m \times n$ -Matrix A darstellen:

$$f(\vec{x}) = A \times \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Basisvektoren von R'' :

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kern Der *Kern* $\ker(A)$ einer $m \times n$ -Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Bild Das *Bild* (auch Spaltenraum) $\text{im}(A)$ einer $m \times n$ -Matrix A , ist der Unterraum des m -dimensionalen Vektorraums W , der von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ der Matrix (aufgefasst als Vektoren in W) aufgespannt wird.

$$\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_k \in \mathbb{R} \}$$

Bild im(A) einer $m \times n$ -Matrix A , ist der Unterraum des m -dimensionalen Vektorraum W , der von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\text{im}(A) = \text{span}\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\right) = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Für jede $m \times n$ -Matrix A gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \text{rg}(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{im}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Kern ker(A) einer $m \times n$ -Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Der Kern $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Beziehung Kern und Bild Für jede $m \times n$ -Matrix A gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \text{rg}(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$$

Bild und Kern Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A . Dann gilt:

- Die Spalten von A ergeben eine Basis des Bildes von f
- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ist der Kern von f

Abbildungsmatrix

Verknüpfungen Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f : U \rightarrow V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g : V \rightarrow W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{f \quad g}^{g \circ f} & & \\ U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Abbildungsmatrix Vektorräume \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n , mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ -Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^n :

$$A = (f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)) = \left(f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix und Basiswechsel

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \{ \vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n \}, W \text{ mit Basis } C = \{ \vec{c}_1; \dots; \vec{c}_m \}$$

Jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ lässt sich durch eine $m \times n$ -Matrix ${}_C A_B$ darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_C A_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C :

$${}_C A_B = C \left(\left(f \left(\vec{b}_1 \right) \right)_C \left(f \left(\vec{b}_2 \right) \right)_C \dots \left(f \left(\vec{b}_n \right) \right)_C \right)_B$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im \mathbb{R}^2 wird durch einen Vektor (x, y, z) dargestellt, wobei $z \neq 0$. Die Punkte (x, y, z) und $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

Homogene Koordinaten sind nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen.

Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ für den Basiswechsel von S nach B

- Die Matrix ${}_B T_S$ ist die Inverse von ${}_S T_B : {}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lineare Abbildung } f} & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} & \xrightarrow{{}_S A_S} & f(\vec{x}) \\ {}_S T_S \downarrow & & \uparrow {}_S T_B \\ \vec{x} & \xrightarrow{{}_B A_B} & f(\vec{x}) \end{array}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, {}_B T_C = ({}_C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vollständiges Beispiel

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C A_B = C \left(\left(f \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)_C \left(f \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right)_C \right)_B$$

$$\left(f \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)_C = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(f \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right)_C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$