Stochastik und Statistik

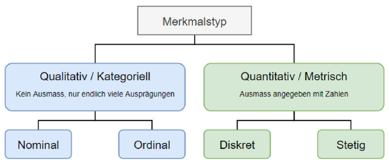
Jil Zerndt, Lucien Perret
January 2025

Deskriptive Statistik

Begriffe

Grundlegende Begriffe

- Ω = Grundgesamtheit
- n = Anzahl Objekte
- X = Stichprobenwerte
- a = Ausprägungen
- h = Absolute Häufigkeit
- f = Relative Häufigkeit
- H = Kumulative Absolute Häufigkeit
- F = Kumulative Relative Häufigkeit



Statistische Grundbegriffe

- **Merkmalsträger/Statistische Einheiten**: Objekte, an denen interessierende Grössen beobachtet werden
- **Grundgesamtheit**: Alle statistischen Einheiten, über die Aussagen gewonnen werden sollen
- **Vollerhebung**: Eigenschaften werden bei jedem Individuum in der Grundgesamtheit erhoben
- **Stichprobe**: Untersuchte Teilmenge der Grundgesamtheit (repräsentativ)
- **Merkmal**: Interessierende Grösse, die an den Einheiten beobachtet wird

Merkmalstypen

- **Qualitativ/Kategoriell**: Ausprägung und kein Ausmass (endlich viele Ausprägungen)
  - **Nominal**: Reine Kategorisierung (z.B. Parteien bei Wahlen)
  - **Ordinal**: Ordnung vorhanden (z.B. Schulnoten)
- **Quantitativ/Metrisch**: Ausmass wird mit Zahlen angegeben
  - **Diskret**: Abzählbar viele Ausprägungen (z.B. Würfelwurf)
  - **Stetig**: Alle Ausprägungen in einem reellen Intervall (z.B. Länge)

Häufigkeiten und Verteilungsfunktionen (PMF, CDF)

Absolute und relative Häufigkeiten

Absolute Häufigkeit H

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

h_i: Einzelhäufigkeit der i-ten Beobachtung
n: Anzahl der Beobachtungen.

Relative Häufigkeit F

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad F(x) = \frac{H(x)}{n}$$

f_i: Einzelrelative Häufigkeit der i-ten Beobachtung
$H(x)$: Absolute Häufigkeit eines Wertes x

Kumulative Verteilungsfunktion (CDF)

Nicht klassierte Daten (PMF und CDF)

Die absolute Häufigkeit kann als Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden.

$$h_i$$

h_i: Absolute Häufigkeit der i-ten Beobachtung.

Die relative Häufigkeit kann als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden.

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

f_i: Relative Häufigkeit der i-ten Beobachtung,
h_i: Absolute Häufigkeit der i-ten Beobachtung,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Erstellen einer Häufigkeitsverteilung

1. Sammle alle verschiedenen Werte
2. Zähle absolute Häufigkeiten:
   - Wie oft kommt jeder Wert vor?
3. Berechne relative Häufigkeiten:
   - Teile jede absolute Häufigkeit durch n
4. Berechne kumulative Häufigkeiten:
   - Absolute: Summiere h_i von links nach rechts
   - Relative: Summiere f_i von links nach rechts

Verteilungsfunktionen für diskrete und stetige Daten

Unterschied zwischen PMF und PDF

- **PMF (Probability Mass Function)**:
  - Für diskrete Daten
  - Wahrscheinlichkeit für exakte Werte
  - Summe aller Wahrscheinlichkeiten = 1
- **PDF (Probability Density Function)**:
  - Für stetige Daten
  - Fläche unter Kurve gibt Wahrscheinlichkeit
  - Integral über gesamten Bereich = 1

Diskrete Verteilungsfunktionen

Die absolute Häufigkeit kann als Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden:

$$h_i$$

Die relative Häufigkeit kann als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden:

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

Diskrete Häufigkeitsverteilung

a_i	397	398	399	400	Total
h_i	1	3	7	5	16
f_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	1
H_i	1	4	11	16	
F_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{16}{16}$	

Klassierte Stichproben

Häufigkeiten bei nicht-klassierten Daten

- **Absolute Häufigkeit** h_i: Anzahl Vorkommen des Wertes a_i
- **Relative Häufigkeit** f_i: $f_i = \frac{h_i}{n}$
- **Kumulative absolute Häufigkeit** H_i: $H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$
- **Kumulative relative Häufigkeit** F_i: $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = \frac{H_i}{n}$

Häufigkeiten bei klassierten Daten Bei grossen Stichproben metrisch stetiger Merkmale werden die Werte in Klassen eingeteilt:

- Klassen sind aneinandergrenzende Intervalle
- Obere Intervallgrenzen gehören zum nächsten Intervall
- Relative Häufigkeit einer Klasse = Anzahl Werte in Klasse / Stichprobengrösse
- Relative Häufigkeitsdichte = Relative Häufigkeit / Klassenbreite

Klasseneinteilung **Faustregeln:**

- Klassen sollten gleich breit gewählt werden
- Anzahl Klassen zwischen 5 und 20
- Anzahl Klassen sollte $\sqrt{n}$ nicht überschreiten
- Klassenbreite = $\frac{\text{Max - Min}}{\text{Anzahl Klassen}}$

Häufigkeitsverteilung Noten einer Klasse: 3.5, 4.0, 4.0, 4.5, 4.5, 4.5, 5.0, 5.0, 5.5, 6.0

- $n = 10$ (Stichprobengrösse)
- Absolute Häufigkeiten: $h_{3.5} = 1$, $h_{4.0} = 2$, $h_{4.5} = 3$, $h_{5.0} = 2$, $h_{5.5} = 1$, $h_{6.0} = 1$
- Relative Häufigkeiten: $f_{3.5} = 0.1$, $f_{4.0} = 0.2$, $f_{4.5} = 0.3$, $f_{5.0} = 0.2$, $f_{5.5} = 0.1$, $f_{6.0} = 0.1$
- Kumulative absolute Häufigkeiten: $H_{3.5} = 1$, $H_{4.0} = 3$, $H_{4.5} = 6$, $H_{5.0} = 8$, $H_{5.5} = 9$, $H_{6.0} = 10$

Klassenbildung für stetige Daten

1. Bestimme Spannweite (Max - Min)
2. Wähle Anzahl Klassen k:
   - $5 \leq k \leq 20$
   - $k \leq \sqrt{n}$
3. Berechne Klassenbreite:
   - $d = \frac{\text{Spannweite}}{k}$
   - Runde auf praktische Zahl
4. Bestimme Klassengrenzen:
   - Start bei Min oder praktischem Wert darunter
   - Ende bei Max oder praktischem Wert darüber
5. Zähle Häufigkeiten in jeder Klasse

Klassenbildung (Faustregeln)

- Die Klassen sollten gleich breit gewählt werden
- Die Anzahl der Klassen sollte zwischen 5 und 20 liegen, jedoch $\sqrt{n}$ nicht überschreiben
- Klassengrenzen sollten 'runde' Zahlen sein
- Werte auf Klassengrenzen kommen in die obere Klasse

Stetige Verteilungsfunktionen

Die absolute Häufigkeitsdichtefunktion erhält man, indem der Wert der absoluten Häufigkeit h_i durch die Klassenbreite (Säulenbreite) d_i geteilt wird:

$$h(x) = \frac{h_i}{d_i}$$

Die relative Häufigkeitsdichtefunktion (PDF) $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ erhält man aus der absoluten Häufigkeitsdichtefunktion, indem man den Wert durch die Stichprobengrösse n teilt:

$$\text{PDF} = f(x) = \frac{h(x)}{n}$$

Stetige Häufigkeitsverteilung

Klassen	[100,200)	[200,500)	[500,800)	[800,1000)	Total
h_i	35	182	317	84	618
f_i	$\frac{35}{618}$	$\frac{182}{618}$	$\frac{317}{618}$	$\frac{84}{618}$	Area = 1
d_i	100	300	300	200	
$h(x)$	$\frac{35}{100}$	$\frac{182}{300}$	$\frac{317}{300}$	$\frac{84}{200}$	
$f(x)$	$\frac{35}{100 \cdot 618}$	$\frac{182}{300 \cdot 618}$	$\frac{317}{300 \cdot 618}$	$\frac{84}{200 \cdot 618}$	

Berechnung von PDF und CDF für klassierte Daten

1. PDF Berechnung:
   1.1 Bestimme für jede Klasse:
   - Absolute Häufigkeit h_i
   - Klassenbreite d_i

   1.2 Berechne Häufigkeitsdichte:
   - $h(x) = \frac{h_i}{d_i}$

   1.3 Berechne relative Häufigkeitsdichte:
   - $f(x) = \frac{h(x)}{n}$
2. CDF Berechnung:
   2.1 Bestimme kumulative Häufigkeiten H_i

   2.2 Teile durch Stichprobengröße:
   - $F(x) = \frac{H(x)}{n}$

Kenngrössen

Quantile

Quantil

$$i = \lceil n \cdot q \rceil, \quad Q = x_i = x_{\lceil n \cdot q \rceil}$$

i: Position des Quantils,
n: Anzahl der Beobachtungen,
q: Quantilswert (z. B. 0.25 für das erste Quartil),
x_i: Beobachtung an Position i.

Interquartilsabstand

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

IQR: Interquartilsabstand,
Q_3: Oberes Quartil (75. Perzentil),
Q_1: Unteres Quartil (25. Perzentil).

Berechnung von Lagekennwerten

1. Sortiere die Daten aufsteigend
2. Berechne den Mittelwert:
   - Summe aller Werte / Anzahl Werte
3. Bestimme den Median:
   - Bei ungerader Anzahl: mittlerer Wert
   - Bei gerader Anzahl: Mittelwert der beiden mittleren Werte
4. Finde den Modus (häufigster Wert)
5. Berechne die Quartile:
   - Q1: 25%-Quantil
   - Q2: Median (50%-Quantil)
   - Q3: 75%-Quantil

.

Berechnung von Quantilen Gegeben sei die Datenreihe: 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9, 10
$n = 8$ Beobachtungen
Berechnung Q1 (25%-Quantil):
- $i = \lceil 8 \cdot 0.25 \rceil = \lceil 2 \rceil = 2$
- Q1 $= x_2 = 4$

Berechnung Q2 (Median):
- n gerade $\to$ Mittelwert von Position 4 und 5
- Q2 $= (5 + 7)/2 = 6$

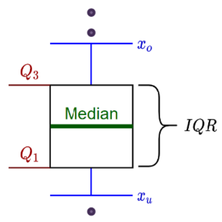
Berechnung Q3 (75%-Quantil):
- $i = \lceil 8 \cdot 0.75 \rceil = \lceil 6 \rceil = 6$
- Q3 $= x_6 = 8$

Interquartilsabstand:
- IQR = Q3 - Q1 = 8 - 4 = 4

Boxplot

Boxplot

- $Q_1, Q_2 = x_{\text{med}}, Q_3$ (Quartile)
- $IQR = Q_3 - Q_1$ (Interquartilsabstand)
- Untere Antenne x_u :
  $u = \min[Q_1 - 1.5 \cdot IQR, Q_1]$
- Obere Antenne x_0 :
  $o = \max[Q_3 + 1.5 \cdot IQR, Q_3]$
- Ausreisser: $x_i < x_u \vee x_i > x_0$



Erstellen eines Boxplots

1. Berechne die Quartile Q_1, Q_2 (Median) und Q_3
2. Bestimme den Interquartilsabstand IQR $= Q_3 - Q_1$
3. Berechne die Grenzen für Ausreisser:
   - Untere Grenze: $Q_1 - 1.5 \cdot IQR$
   - Obere Grenze: $Q_3 + 1.5 \cdot IQR$
4. Zeichne Box mit:
   - Unterer Rand bei Q_1
   - Mittellinie bei Q_2
   - Oberer Rand bei Q_3
5. Zeichne Antennen bis zum:
   - Kleinsten Wert $\geqslant$ untere Grenze
   - Grössten Wert $\leqslant$ obere Grenze
6. Markiere alle Werte ausserhalb als Ausreisser

Boxplot - Praktisches Beispiel Gegeben sind folgende Messwerte: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 50
1. Sortiere Werte: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 50
2. Bestimme Quartile:
   - Q_1 = 4 (25%-Quantil)
   - Q_2 = 7 (Median)
   - Q_3 = 12 (75%-Quantil)
3. IQR = 12 - 4 = 8
4. Ausreisser-Grenzen:
   - Untere: 4 - 1.5 · 8 = -8
   - Obere: 12 + 1.5 · 8 = 24
5. 50 ist ein Ausreisser (> 24)

Lagekennwerte

Lageparameter

Modus

$$x_{\text{mod}} = \text{Häufigste Wert}$$

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i$$

$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen,
x_i: Einzelbeobachtung,
a_i: Klassenmitte,
f_i: Relative Häufigkeit der Klasse i.

Median

$$\begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & n \text{ ungerade} \\ 0.5 \cdot \left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right) & n \text{ gerade} \end{cases}$$

n: Anzahl der Beobachtungen,
$x_{[k]}$: Beobachtung an der k-ten Position.

Vergleich der Lageparameter Gegeben seien folgende Datensätze:

- A: 2, 2, 3, 4, 4, 5, 8, 12
- B: 2, 4, 4, 4, 4, 4, 6, 8

Datensatz A:

- Mittelwert: $\bar{x}_A = 5$
- Median: $x_{med_A} = 4$
- Modus: $x_{mod_A} = 2, 4$ (bimodal)

Datensatz B:

- Mittelwert: $\bar{x}_B = 4.5$
- Median: $x_{med_B} = 4$
- Modus: $x_{mod_B} = 4$

Vergleich zeigt:

- Mittelwert reagiert empfindlich auf Ausreißer (A)
- Median ist robuster gegen Ausreißer
- Modus zeigt Häufungen, kann mehrfach auftreten

Streuungskennwerte

Streuungskennwerte

Stichprobenvarianz s^2 (Streumasse)

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad (s_{\text{kor}})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$(s_{\text{kor}})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

s^2: Stichprobenvarianz,
s^2_{kor}: Korrigierte Stichprobenvarianz,
x_i: Einzelbeobachtung,
$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Berechnung der Stichprobenvarianz

1. Berechne den Mittelwert $\bar{x}$
2. Für jeden Wert x_i:
   2.1 Berechne Abweichung vom Mittelwert $(x_i - \bar{x})$
   2.2 Quadriere die Abweichung $(x_i - \bar{x})^2$
3. Summiere alle quadrierten Abweichungen
4. Teile durch $(n-1)$ für korrigierte Varianz
5. Alternative Berechnung:
   5.1 Berechne $\overline{x^2}$ (Mittelwert der quadrierten Werte)
   5.2 Berechne $(\bar{x})^2$ (Quadrat des Mittelwerts)
   5.3 Varianz $= \overline{x^2} - (\bar{x})^2$

Standardabweichung s (Streumasse)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad s_{\text{kor}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

s: Standardabweichung,
s_{kor}: Korrigierte Standardabweichung,
x_i: Einzelbeobachtung,
$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Berechnung der Standardabweichung

Berechnung von Varianz und Standardabweichung Gegeben sei die Datenreihe: 2, 4, 4, 6, 9

Schritt 1: Mittelwert berechnen

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+6+9}{5} = 5$$

Schritt 2: Abweichungen quadrieren

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	-3	9
4	-1	1
4	-1	1
6	1	1
9	4	16

Schritt 3: Varianz berechnen

$$s^2_{\text{kor}} = \frac{9+1+1+1+16}{5-1} = \frac{28}{4} = 7$$

Schritt 4: Standardabweichung berechnen

$$s_{\text{kor}} = \sqrt{7} \approx 2.65$$

Alternative Berechnung:

- $\overline{x^2} = \frac{4+16+16+36+81}{5} = 30.6$
- $(\bar{x})^2 = 5^2 = 25$
- $s^2 = 30.6 - 25 = 5.6$
- $s^2_{\text{kor}} = \frac{5}{4} \cdot 5.6 = 7$

Form der Verteilung

Deskriptive Statistik Multivarianz

Bivariate Daten

Bivariate Daten (Merkmale)

Bivariate Daten beschreiben zwei Merkmale desselben Merkmalsträgers. Die Darstellung hängt von den Merkmalstypen ab:

- 2x kategoriell → Kontingenztabelle + Mosaikplot
- 1x kategoriell + 1x metrisch → Boxplot oder Stripchart
- 2x metrisch → Streudiagramm

Grafische Darstellung

Erstellen einer Kontingenztabelle

1. Identifiziere die Ausprägungen beider kategorieller Merkmale
2. Erstelle eine Tabelle mit:
   - Zeilen für Ausprägungen des ersten Merkmals
   - Spalten für Ausprägungen des zweiten Merkmals
3. Zähle die Häufigkeiten für jede Kombination
4. Füge Randsummen für Zeilen und Spalten hinzu
5. Optional: Berechne relative Häufigkeiten

Kontingenztabelle Studierende nach Studiengang und Geschlecht:

	Männlich	Weiblich	Total
Informatik	120	30	150
Wirtschaft	80	70	150
Total	200	100	300

Graphische Darstellung

- **Form** linear / gekrümmt
  - Linear: Punkte streuen um Gerade
  - Gekrümmt: Systematische Abweichung von Gerade
- **Richtung** positiver / negativer Zusammenhang
  - Positiv: y steigt mit x
  - Negativ: y fällt mit steigendem x
- **Stärke** starke / schwache Streuung
  - Stark: Punkte nahe an Linie/Kurve
  - Schwach: Große Streuung um Trend

Korrelation

Varianz und Kovarianz

Abkürzungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(Mittelwert der x-Werte)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{(Mittelwert der y-Werte)}$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \text{(Mittelwert der Produkte)}$$

Varianz und Kovarianz

Varianz s_x^2, s_y^2:

$$(s_x)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad (s_y)^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

Kovarianz s_{xy}:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Berechnung der Kovarianz

1. Methode 1 (direkte Formel):
   1.1 Berechne Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$
   1.2 Für jedes Paar (x_i, y_i):
   - Berechne $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

   1.3 Summiere alle Produkte
   1.4 Teile durch n
2. Methode 2 (schnellere Berechnung):
   2.1 Berechne $\overline{xy}$ (Mittelwert der Produkte)
   2.2 Berechne $\bar{x} \cdot \bar{y}$
   2.3 Kovarianz $= \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$

Berechnung von Kovarianz und Korrelation Gegeben seien die Wertepaare:

$$(1,2),(2,4),(3,5),(4,8)$$

Schritt 1: Mittelwerte berechnen

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{2+4+5+8}{4} = 4.75$$

Schritt 2: Kovarianz berechnen

- $\overline{xy} = \frac{2+8+15+32}{4} = 14.25$
- $\bar{x} \cdot \bar{y} = 2.5 \cdot 4.75 = 11.875$
- $s_{xy} = 14.25 - 11.875 = 2.375$

Schritt 3: Korrelationskoeffizient berechnen

- $s_x^2 = \frac{1+4+9+16}{4} - 2.5^2 = 1.25$
- $s_y^2 = \frac{4+16+25+64}{4} - 4.75^2 = 5.6875$
- $r_{xy} = \frac{2.375}{\sqrt{1.25} \cdot \sqrt{5.6875}} = 0.894$

Rang-Varianz und Kovarianz

Varianz (Ränge) $(s_{rg(x)})^2, (s_{rg(y)})^2$:

$$(s_{rg(x)})^2 = \overline{rg(x)^2} - (\overline{rg(x)})^2, \quad (s_{rg(y)})^2 = \overline{rg(y)^2} - (\overline{rg(y)})^2$$

Kovarianz (Ränge) $s_{rg(xy)}$:

$$s_{rg(xy)} = \overline{rg(xy)} - \overline{rg(x)} \cdot \overline{rg(y)} = \overline{rg(xy)} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

Rangberechnung und Bindungen

1. Sortiere die Werte aufsteigend
2. Weise Ränge zu:
   - Kleinster Wert: Rang 1
   - Zweitkleinster: Rang 2
   - usw.
3. Bei Bindungen (gleiche Werte):
   3.1 Identifiziere gleiche Werte
   3.2 Berechne Durchschnittsrang:
   - Durchschnittsrang = $\frac{\text{Summe der Rangplätze}}{\text{Anzahl gebundener Werte}}$

   3.3 Weise allen gleichen Werten diesen Rang zu

Rangberechnung mit Bindungen Gegeben sei die Datenreihe: 3, 7, 7, 4, 9, 7, 2

Schritt 1: Sortieren

$$2,3,4,7,7,7,9$$

Schritt 2: Ränge zuweisen

- 2: Rang 1
- 3: Rang 2
- 4: Rang 3
- 7: Durchschnittsrang $\frac{4+5+6}{3} = 5$
- 9: Rang 7

Schritt 3: Finale Rangzuordnung

Wert	3	7	7	4	9	7	2
Rang	2	5	5	3	7	5	1

Der Korrelationskoeffizient (Pearson) r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$$

Ist der Korrelationskoeffizient r_{xy}:

- $r_{xy} \approx 1 \rightarrow$ starker positiver linearer Zusammenhang
- $r_{xy} \approx -1 \rightarrow$ starker negativer linearer Zusammenhang
- $r_{xy} \approx 0 \rightarrow$ keine lineare Korrelation

Interpretation des Korrelationskoeffizienten Verschiedene Datensätze mit jeweils 20 (x,y)-Paaren:

Fall A: $r_{xy} = 0.95$

- Starker positiver linearer Zusammenhang
- y steigt fast proportional mit x
- Nur geringe Streuung um die Regressionsgerade

Fall B: $r_{xy} = -0.82$

- Starker negativer linearer Zusammenhang
- y sinkt mit steigendem x
- Moderate Streuung vorhanden

Fall C: $r_{xy} = 0.12$

- Kaum linearer Zusammenhang
- Starke Streuung der Punkte
- Möglicherweise nichtlinearer Zusammenhang

Korrelationskoeffizient (Spearman) r_{sp}

$$r_{sp} = \frac{s_{rg(xy)}}{s_{rg(x)} \cdot s_{rg(y)}} = \frac{\overline{rg(xy)} - \overline{rg(x)} \cdot \overline{rg(y)}}{\sqrt{\overline{rg(x)^2} - (\overline{rg(x)})^2} \cdot \sqrt{\overline{rg(y)^2} - (\overline{rg(y)})^2}}$$

Vereinfachte Formel, sofern **alle Ränge unterschiedlich** sind:

$$r_{sp} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n d_i^2}{n \cdot (n^2-1)}, \quad \text{mit } d_i = rg(x_i) - rg(y_i)$$

Ränge

Der Rang $rg(x_i)$ des Stichprobenwertes x_i ist definiert als der Index von x_i in der nach der Grösse geordneten Stichprobe.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	23	27	35	35	42	59
$rg(x_i)$	1	2	3.5	3.5	5	6

Berechnung des Spearman-Korrelationskoeffizienten

1. Weise beiden Merkmalen Ränge zu:
   - Sortiere x-Werte, vergebe Ränge
   - Sortiere y-Werte, vergebe Ränge
   - Bei Bindungen: Durchschnittsränge
2. Falls keine Bindungen vorhanden:
   2.1 Berechne Rangdifferenzen d_i
   2.2 Quadriere Differenzen d_i^2
   2.3 Summiere quadrierte Differenzen
   2.4 Verwende Formel: $r_{sp} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$
3. Bei Bindungen:
   3.1 Berechne Rangmittelwerte
   3.2 Berechne Rangvarianzen und -kovarianz
   3.3 Verwende allgemeine Formel

Vergleich Pearson und Spearman Gegeben seien die Wertepaare:

$$(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)$$

Pearson-Korrelation:

- Zeigt starken linearen Zusammenhang
- $r_{xy} = 0.975$

Spearman-Korrelation:

- Perfekter monotoner Zusammenhang
- $r_{sp} = 1.000$

Vergleich:

- Pearson erfasst nur linearen Zusammenhang
- Spearman erfasst jeden monotonen Zusammenhang
- Hier: Quadratischer Zusammenhang
- Spearman robuster gegen Ausreißer

Wahl des Korrelationskoeffizienten

- **Pearson verwenden wenn:**
  - Linearer Zusammenhang vermutet
  - Keine/wenige Ausreißer
  - Metrische Daten
- **Spearman verwenden wenn:**
  - Nichtlinearer monotoner Zusammenhang
  - Ausreißer vorhanden
  - Ordinale Daten
  - Robustheit wichtig

Grenzen der Korrelation

Prüfung auf Scheinkorrelation

1. Betrachte die Datenpunkte im Streudiagramm:
   - Gibt es Ausreißer?
   - Ist der Zusammenhang wirklich linear?
2. Überlege fachlich:
   - Gibt es plausible Kausalität?
   - Könnte ein drittes Merkmal beide beeinflussen?
3. Prüfe Teilstichproben:
   - Bleibt Korrelation in Untergruppen bestehen?
   - Ändert sich die Stärke deutlich?
4. Bei Zweifeln:
   - Spearman-Korrelation prüfen
   - Weitere Merkmale einbeziehen
   - Fachexperten konsultieren

Bemerkungen

Auch wenn zwischen zwei Grössen eine Korrelation besteht, so muss das noch lange nicht einen **kausalen Zusammenhang** bedeuten. Man spricht von **Scheinkorrelation** wenn:

- Ein drittes Merkmal beide beeinflusst
- Der Zusammenhang zufällig ist
- Ausreißer das Ergebnis verzerren
- Ein nichtlinearer Zusammenhang vorliegt

Mehrere Merkmale

Kombinatorik

Grundlegende Methoden des Abzählens

Entscheidungsweg für kombinatorische Probleme

1. **Bestimme die relevanten Parameter**
- n: Wie viele Objekte gibt es insgesamt?
- k: Wie viele Objekte sollen ausgewählt werden?
2. **Prüfe die Reihenfolge**
- Spielt die Reihenfolge eine Rolle? → Variation
- Ist nur die Auswahl wichtig? → Kombination
3. **Prüfe Wiederholungen**
- Können Objekte mehrfach gewählt werden? → Mit Wiederholung
- Darf jedes Objekt nur einmal vorkommen? → Ohne Wiederholung
4. **Wähle die passende Formel**
- Variation mit Wiederholung: n^k
- Variation ohne Wiederholung: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Kombination mit Wiederholung: $\binom{n+k-1}{k}$
- Kombination ohne Wiederholung: $\binom{n}{k}$

Systematik

Grundbegriffe der Kombinatorik

Variation (mit Reihenfolge)		Kombination (ohne Reihenfolge)	
Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$
Zahlenschloss	Schwimmwettkampf	Zahnarzt	Lotto

Systematik der Kombinatorik

- **Variation mit Wiederholung**: n^k
- **Variation ohne Wiederholung**: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- **Kombination mit Wiederholung**: $\binom{n+k-1}{k}$
- **Kombination ohne Wiederholung**: $\binom{n}{k}$

Binomialkoeffizienten

Fakultät Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen bis zu dieser Zahl:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

mit $0! = 1$ als Definitionsvereinbarung

Parameter:

- n = Die positive ganze Zahl, für die die Fakultät berechnet wird
- k = Laufvariable in der Produktnotation
- $\prod$ = Produkt aller Terme von $k = 1$ bis n

Berechnung von Fakultäten 1. Prüfe Spezialfälle:

- $0! = 1$ (Definition)
- $1! = 1$

2. Für $n > 1$:

- Schreibe alle Zahlen von 1 bis n auf
- Multipliziere der Reihe nach
- Alternative: Nutze rekursive Definition $n! = n \cdot (n-1)!$

Binomialkoeffizient Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte aus einer Gesamtheit von n Objekten auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Parameter:

- n = Gesamtanzahl der Objekte in der Menge
- k = Anzahl der auszuwählenden Objekte ($0 \leq k \leq n$)
- $n!$ = Fakultät von n
- $(n-k)!$ = Fakultät von $(n-k)$
- $k!$ = Fakultät von k

Wichtige Eigenschaften:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)
- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (Pascal'sche Rekursion)

Schritte zur Berechnung von Binomialkoeffizienten

1. **Prüfe Grundfälle** - $\binom{n}{0} = 1$ - $\binom{n}{n} = 1$ - $\binom{n}{1} = n$ 2. **Nutze Symmetrie** - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 3. **Pascal'sches Dreieck** - $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ 4. **Direkte Berechnung** - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Variation mit Wiederholung (Zahlenschloss) **Aufgabe:** Wie viele Möglichkeiten gibt es bei einem Zahlenschloss (0 – 9) mit 6 Zahlenkränzen?

Lösung:

- $n = 10$ (Ziffern 0-9)
- $k = 6$ (Stellen)
- Reihenfolge wichtig: Ja ($123456 \neq 654321$)
- Wiederholungen erlaubt: Ja (11111 ist möglich)
- Formel: $n^k = 10^6 = 1\,000\,000$ mögliche Kombinationen

Variation ohne Wiederholung (Schwimmwettkampf) **Aufgabe:** Bei einem Schwimmwettkampf starten 10 Teilnehmer. Wie viele mögliche Platzierungen der ersten drei Plätze (Podest) gibt es?

Lösung:

- $n = 10$ (Teilnehmer)
- $k = 3$ (Podestplätze)
- Reihenfolge wichtig: Ja (1., 2., 3. Platz unterschiedlich)
- Wiederholungen erlaubt: Nein (niemand kann mehrere Plätze belegen)
- Formel: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{7!} = 720$ mögliche Platzierungen

Kombination mit Wiederholung (Zahnarzt) **Aufgabe:** 3 Spielzeuge werden aus 5 Töpfen gezogen. Jeder Topf ist mit einer (unterschiedlichen) Art von Spielzeug befüllt. Wie viele Möglichkeiten hat das Kind?

Lösung:

- $n = 5$ (Arten von Spielzeug)
- $k = 3$ (zu wählende Spielzeuge)
- Reihenfolge wichtig: Nein (nur Anzahl pro Art relevant)
- Wiederholungen erlaubt: Ja (mehrere Spielzeuge gleicher Art möglich)
- Formel: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten

Kombination ohne Wiederholung (Lotto) **Aufgabe:** Wie gross sind die Chancen beim Lotto 6 aus 49 Zahlen richtig zu ziehen?

Lösung:

- $n = 49$ (Zahlen insgesamt)
- $k = 6$ (zu wählende Zahlen)
- Reihenfolge wichtig: Nein (nur Auswahl relevant)
- Wiederholungen erlaubt: Nein (jede Zahl nur einmal)
- Formel: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten
- Gewinnwahrscheinlichkeit: $\frac{1}{13\,983\,816} \approx 0.0000000715$

Variation mit Wiederholung (Zahlenschloss)

Wie viele Möglichkeiten gibt es bei einem Zahlenschloss (0 – 9) mit 6 Zahlenkränzen?

$$n = 10, \quad k = 6$$
$$n^k = 10^6$$

Variation ohne Wiederholung (Schimmwettkampf)

Bei einem Schwimmwettkampf starten 10 Teilnehmer. Wie viele mögliche Platzierungen der ersten drei Plätze (Podest) gibt es?

$$n = 10, \quad k = 3$$
$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}$$

Kombination mit Wiederholung (Zahnarzt)

3 Spielzeuge werden aus 5 Töpfen gezogen. Jeder Topf ist mit einer (unterschiedlichen) Art von Spielzeug befüllt.
Wie viele Möglichkeiten hat das Kind?

$$n = 5, \quad k = 3$$
$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3}$$

Kombination ohne Wiederholung (Lotto)

Wie gross sind die Chancen beim Lotto 6 aus 49 Zahlen richtig zu ziehen?
Jede Zahl ist nur einmal vorhanden und die Zahlen werden nicht zurückgelegt. Die Reihenfolge in der gezogen wird spielt keine Rolle.

$$n = 49, \quad k = 6$$
$$\binom{n}{k} = \binom{49}{6}$$

Lösen komplexer kombinatorischer Probleme 1. **Problem zerlegen**
- Teile das Problem in unabhängige Teilprobleme
- Identifiziere abhängige Entscheidungen

2. **Für jedes Teilproblem**
- Bestimme n und k
- Prüfe Reihenfolge und Wiederholung
- Wähle passende Formel

3. **Kombiniere Teillösungen**
- Unabhängige Ereignisse: Multipliziere
- Sich ausschließende Ereignisse: Addiere
- Prüfe Überlappungen (Inklusions-Exclusions)

Komplexeres Beispiel: Passwörter **Aufgabe:** Ein Passwort muss bestehen aus:
- Genau 8 Zeichen
- Mindestens ein Großbuchstabe (26 mögliche)
- Mindestens eine Ziffer (10 mögliche)
- Kleine Buchstaben erlaubt (26 mögliche)

Lösung: 1. Gesamtzahl aller möglichen 8-stelligen Passwörter mit den Zeichen:
- $n = 26 + 26 + 10 = 62$ Zeichen
- Variation mit Wiederholung: 62^8

2. Abziehen der ungültigen Kombinationen:
- Ohne Großbuchstaben: $(36)^8$
- Ohne Ziffern: $(52)^8$
- Ohne beide: $(26)^8$

3. Nach dem Inklusions-Exclusions-Prinzip:

$$\text{Gültige Passwörter} = 62^8 - 36^8 - 52^8 + 26^8$$

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ergebnisraum und Laplace-Raum Der **Ergebnisraum** Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments. Die **Zähldichte** $\rho : \Omega \to [0, 1]$ ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu.
Für einen **Laplace-Raum** (Ω, P) gilt:

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$$

Parameter:
- $\Omega =$ Ergebnisraum (Menge aller möglichen Ergebnisse)
- $P(M) =$ Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M
- $|M| =$ Anzahl der für M günstigen Ergebnisse
- $|\Omega| =$ Anzahl aller möglichen Ergebnisse

Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Eigenschaften von diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen

Wahrschinlichkeits Ausdrücke
- $P(A) =$ Wahrscheinlichkeit von Ereignis A
- $P(B) =$ Wahrscheinlichkeit von Ereignis B
- $P(\bar{A}) =$ Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A
- $P(B|A) =$ Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A eingetreten ist
- $P(B|\bar{A}) =$ Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A nicht eingetreten ist
- $P(A \cap B) =$ Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse eintreten
- $P(A \cup B) =$ Wahrscheinlichkeit dass mindestens eines der Ereignisse eintritt

Wahrscheinlichkeitsregeln
- **Additionssatz:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Komplementärregel:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- **Multiplikationssatz:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
- **Totale Wahrscheinlichkeit:** $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$
- **Satz von Bayes:** $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$
- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:** $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- **Stochastische Unabhängigkeit:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- **Stochastische Unabhängigkeit (Zufallsvariablen):** $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$

Strategien zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Grundlegende Strategien
- **Aufteilung in Kombinationen:** Komplexe Probleme in einfachere Teilprobleme zerlegen
- **Berechnung über Inverse:** Manchmal ist es einfacher, die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen
- **Prozentrechnung:** Wahrscheinlichkeit / Gesamt-Wahrscheinlichkeit $\cdot$ 100%
- **Vierfeldertafel:** Zur Übersicht bei zwei binären Merkmalen

Grundschritte der Wahrscheinlichkeitsberechnung
1. **Ergebnisraum identifizieren**
- Alle möglichen Ergebnisse auflisten
- Prüfen, ob es sich um einen Laplace-Raum handelt

2. **Ereignis präzisieren**
- Exakte mathematische Beschreibung des gesuchten Ereignisses
- Zerlegung in Teilmengen falls nötig

3. **Berechnungsstrategie wählen**
- Direkte Berechnung: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
- Über Gegenereignis: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Über bedingte Wahrscheinlichkeit falls abhängig

4. **Berechnung durchführen**
- Kombinatorische Formeln anwenden
- Zwischenergebnisse notieren
- Probe durch Plausibilitätskontrolle

Problemlösung mit Gegenereignis
1. **Prüfe, ob Gegenereignis einfacher ist**
- Original: "Mindestens eine...öder "Mehr als..."
- Gegenereignis: "Keine...öder "Höchstens..."

2. **Berechne Wahrscheinlichkeit des Gegenereignis**
- Oft einfacher zu zählen
- Weniger Fälle zu berücksichtigen

3. **Wende Komplementärregel an**
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Überprüfe Plausibilität des Ergebnisses

Zufallsvariablen und Verteilungen

Kenngrössen

Erwartungswert und Varianz

Kenngrössen von Zufallsvariablen **Wichtige Eigenschaften:**
- **Erwartungswert:** $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, $E(\alpha X) = \alpha E(X)$
- **Varianz:** $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- **Standardabweichung:** $S(X) = \sqrt{V(X)}$
- **Lineare Transformation:** $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)$

Kenngrössen (Varianz und Erwartungswert)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y), \quad E(\alpha X) = \alpha E(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left[\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2\right] - E(X)^2$$

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X), \quad S(X) = \sqrt{V(X)}$$

$E(X) =$ Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X) =$ Varianz der Zufallsvariable X
$S(X) =$ Standardabweichung der Zufallsvariable X
$\alpha, \beta =$ Konstanten
$P(X = x) =$ Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x annimmt
$\sum_{x \in \mathbb{R}} =$ Summe über alle möglichen Werte von x in den reellen Zahlen

Verteilungen und Erwartungswerte

Für diskrete Verteilungen:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$$
$$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot (x - E(X))^2$$

$E(X)$ = Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X
$f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsfunktion
x = Mögliche Werte der Zufallsvariable

Für stetige Verteilungen:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2 dx$$

$E(X)$ = Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X
$f(x)$ = Dichtefunktion
x = Mögliche Werte der Zufallsvariable

Berechnung von Erwartungswert und Varianz

1. **Erwartungswert bestimmen**
- Diskret: $E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$
- Stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$
2. **Varianz berechnen (2 Methoden)**
- Direkte Methode: $V(X) = \sum_x (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$
- Verschiebungssatz: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
3. **Bei Standardabweichung**
- Wurzel aus Varianz ziehen
- Einheit beachten (gleich wie Ursprungsdaten)

Erwartungswert bei Würfelspiel

Aufgabe: Bei einem Würfelspiel gewinnt man:
- Bei 6: 5€
- Bei 5: 2€
- Bei 1-4: verliert man 1€

Lösung:
1. **Wahrscheinlichkeiten und Werte aufstellen:**
   - P(X = 5€) = 1/6
   - P(X = 2€) = 1/6
   - P(X = -1€) = 4/6
2. **Erwartungswert berechnen:**

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{4}{6} = \frac{5+2-4}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

3. **Varianz berechnen:**

$$E(X^2) = 25 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} = \frac{25+4+4}{6} = \frac{33}{6}$$
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{33}{6} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{33}{6} - \frac{1}{4} \approx 5.25$$

Interpretation:
- Positiver Erwartungswert: Spiel ist langfristig profitabel
- Hohe Varianz: Große Schwankungen möglich

Lotterie mit bedingten Gewinnen

Aufgabe: Bei einer Lotterie gewinnt man zunächst mit p = 0.1 einen Bonus-Los. Mit diesem Los kann man dann mit p = 0.2 den Hauptpreis von 1000€ gewinnen. Berechne den Erwartungswert.

Lösung:
1. **Ereignisbaum erstellen:**
   - P(Bonus) = 0.1
   - P(Hauptgewinn|Bonus) = 0.2
2. **Mögliche Ausgänge:**
   - 1000€: P = 0.1 · 0.2 = 0.02
   - 0€: P = 0.98
3. **Erwartungswert:**

$$E(X) = 1000 \cdot 0.02 + 0 \cdot 0.98 = 20$$

Interpretation von Erwartungswert und Varianz

1. **Erwartungswert**
- Langfristiger Durchschnitt
- Schwerpunkt der Verteilung
- Nicht unbedingt ein möglicher Wert
2. **Varianz**
- Maß für die Streuung
- Quadratische Einheit beachten
- Je größer, desto unsicherer die Vorhersage
3. **Standardabweichung**
- Gleiche Einheit wie Daten
- Typische Abweichung vom Mittelwert
- Oft für Konfidenzintervalle verwendet

Aktienportfolio

Aufgabe: Ein Portfolio besteht aus:
- Aktie A: 60% Anteil, E(A) = 8%, V(A) = 25
- Aktie B: 40% Anteil, E(B) = 12%, V(B) = 36

Lösung:
1. **Erwartungswert des Portfolios:**

$$\begin{aligned} E(P) &= 0.6 \cdot E(A) + 0.4 \cdot E(B) \\ &= 0.6 \cdot 8\% + 0.4 \cdot 12\% \\ &= 4.8\% + 4.8\% = 9.6\% \end{aligned}$$

2. **Varianz des Portfolios** (bei Unabhängigkeit):

$$\begin{aligned} V(P) &= (0.6)^2 \cdot V(A) + (0.4)^2 \cdot V(B) \\ &= 0.36 \cdot 25 + 0.16 \cdot 36 \\ &= 9 + 5.76 = 14.76 \end{aligned}$$

3. **Standardabweichung:**

$$S(P) = \sqrt{14.76} \approx 3.84\%$$

Kovarianz und Korrelation

Die **Kovarianz** zweier Zufallsvariablen ist:

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Der **Korrelationskoeffizient** ist:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Eigenschaften:
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- $\rho_{XY} = \pm 1$: perfekter linearer Zusammenhang
- $\rho_{XY} = 0$: unkorreliert

Anwendung von Kovarianz und Korrelation

1. **Kovarianz berechnen**
- Direkter Weg: $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Alternativ: $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
2. **Korrelation bestimmen**
- Kovarianz durch Produkt der Standardabweichungen
- Normierung auf [-1,1]
3. **Interpretation**
- Vorzeichen: Richtung des Zusammenhangs
- Betrag: Stärke des Zusammenhangs
- Unabhängig von Maßeinheiten

Portfoliorisiko mit Korrelation **Aufgabe:** Zwei Aktien mit:
- A: E(A) = 10%, S(A) = 5%
- B: E(B) = 8%, S(B) = 4%
- Korrelation: $\rho_{AB} = 0.3$

Portfolio: 60% A, 40% B
Lösung:
1. **Erwartungswert:**

$$E(P) = 0.6 \cdot 10\% + 0.4 \cdot 8\% = 9.2\%$$

2. **Varianz mit Korrelation:**

$$\begin{aligned} V(P) &= (0.6)^2 V(A) + (0.4)^2 V(B) + 2(0.6)(0.4)\rho_{AB} S(A) S(B) \\ &= 0.36 \cdot (5\%)^2 + 0.16 \cdot (4\%)^2 + 2(0.24)(0.3)(5\%)(4\%) \\ &= 0.09\% + 0.0256\% + 0.0288\% = 0.1444\% \end{aligned}$$

3. **Standardabweichung:**

$$S(P) = \sqrt{0.1444\%} \approx 3.8\%$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A ist:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Parameter:
- $P(B \cap A)$ = Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts ??

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Anwendung:
- Berechnung von Schnittwahrscheinlichkeiten
- Prüfung auf stochastische Unabhängigkeit
- Zerlegung von mehrstufigen Experimenten

Erstellen einer Vierfeldertafel 1. **Aufbau der Tabelle**
- Zeilen: Erstes Merkmal (A und nicht A)
- Spalten: Zweites Merkmal (B und nicht B)
- Randwahrscheinlichkeiten notieren

2. **Eintragen der Wahrscheinlichkeiten**
- Schnittwahrscheinlichkeiten in die Felder
- Zeilensummen = P(A) bzw. P(nicht A)
- Spaltensummen = P(B) bzw. P(nicht B)

3. **Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten**
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Medizinischer Test **Aufgabe:** Ein Test auf eine Krankheit hat folgende Eigenschaften:
- 1% der Bevölkerung hat die Krankheit
- Test ist bei Kranken zu 98% positiv
- Test ist bei Gesunden zu 95% negativ

Lösung mit Vierfeldertafel:

	Test +	Test -	Summe
Krank	0.0098	0.0002	0.01
Gesund	0.0495	0.9405	0.99
Summe	0.0593	0.9407	1

Berechnung: Wahrscheinlichkeit krank bei positivem Test:

$$P(\text{krank}|\text{positiv}) = \frac{0.0098}{0.0593} \approx 0.165 = 16.5\%$$

Spezielle Sätze

Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

Anwendung:
- Berechnung von P(B) durch Fallunterscheidung
- Basis für den Satz von Bayes
- Wichtig bei Entscheidungsbäumen

Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Anwendung:
- Umkehrung bedingter Wahrscheinlichkeiten
- Aktualisierung von Wahrscheinlichkeiten
- Diagnostische Tests

Anwendung des Satzes von Bayes 1. **Identifiziere die bekannten Größen**
- A priori Wahrscheinlichkeit P(A)
- Bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A)
- Totale Wahrscheinlichkeit P(B)

2. **Berechne P(B) falls nötig**
- Nutze Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
- $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$

3. **Berechne P(A|B)**
- Setze in Bayes-Formel ein
- Interpretiere das Ergebnis

Qualitätskontrolle **Aufgabe:** Eine Maschine produziert Teile.
- 95% der Teile sind fehlerfrei
- Ein Test erkennt fehlerhafte Teile zu 98%
- Der Test klassifiziert 3% der guten Teile falsch

Gesucht: Wahrscheinlichkeit für tatsächlich fehlerhaftes Teil bei positivem Test
Lösung:
- P(F) = 0.05 (fehlerhaft)
- P(T|F) = 0.98 (Test positiv wenn fehlerhaft)
- P(T|¬F) = 0.03 (Test positiv wenn gut)
- P(T) = 0.05 · 0.98 + 0.95 · 0.03 = 0.0775
- P(F|T) = $\frac{0.05 \cdot 0.98}{0.0775} \approx 0.632 = 63.2\%$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit
Zwei Ereignisse A und B heissen stochastisch unabhängig, falls:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ heissen stochastisch unabhängig, falls:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

$P(X = x, Y = y)$ = Wahrscheinlichkeit dass X den Wert x und Y den Wert y annimmt
$P(X = x)$ = Wahrscheinlichkeit dass X den Wert x annimmt
$P(Y = y)$ = Wahrscheinlichkeit dass Y den Wert y annimmt

Stochastische Unabhängigkeit Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, falls:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen stochastisch unabhängig, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Eigenschaften:
- Für unabhängige Ereignisse: $P(A|B) = P(A)$
- Für unabhängige Zufallsvariablen: $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Varianz der Summe: $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Prüfung auf stochastische Unabhängigkeit 1. **Für Ereignisse**
- Berechne $P(A \cap B)$
- Berechne $P(A) \cdot P(B)$
- Vergleiche die Werte

2. **Für Zufallsvariablen**
- Stelle Verbundverteilung auf
- Prüfe für alle Wertepaare
- Alternative: Prüfe Kovarianz = 0

3. **Praktische Überlegungen**
- Physikalische/logische Abhängigkeit?
- Kausaler Zusammenhang?
- Gemeinsame Einflussfaktoren?

Würfelwurf und Münzwurf **Aufgabe:** Ein Würfel wird geworfen und eine Münze geworfen. Ereignisse:
- A: "Würfel zeigt eine 6"
- B: "Münze zeigt Kopf"

Lösung:
1. **Einzelwahrscheinlichkeiten:**
   - $P(A) = \frac{1}{6}$
   - $P(B) = \frac{1}{2}$
2. **Schnittwahrscheinlichkeit:** $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$
3. **Schlussfolgerung:** Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig

Kartenziehen ohne Zurücklegen **Aufgabe:** Aus einem Kartenspiel werden nacheinander zwei Karten gezogen. Ereignisse:
- A: Ërste Karte ist Herz"
- B: SZweite Karte ist Herz"

Lösung:
1. **Wahrscheinlichkeiten:**
   - $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
   - $P(B|A) = \frac{12}{51}$
   - $P(B|\bar{A}) = \frac{13}{51}$
2. **Prüfung:**

$$P(B) = \frac{13}{52} \neq P(B|A)$$

3. **Schlussfolgerung:** Die Ereignisse sind stochastisch abhängig

Spezielle Verteilungen

Diskrete und Stetige Zufallsvariablen

Verteilungen und Erwartungswerte **Für diskrete Verteilungen:**

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$$

$$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot (x - E(X))^2$$

Für stetige Verteilungen:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - E(X))^2 dx$$

Parameter:
- $E(X) =$ Erwartungswert der Zufallsvariable X
- $V(X) =$ Varianz der Zufallsvariable X
- $f(x) =$ Wahrscheinlichkeitsfunktion (diskret) oder Dichtefunktion (stetig)
- $x =$ Mögliche Werte der Zufallsvariable

Berechnung von Erwartungswert und Varianz 1. **Diskrete Verteilung**
- Liste alle möglichen Werte x_i auf
- Bestimme zugehörige Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$
- $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$
- $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$

2. **Stetige Verteilung**
- Identifiziere Dichtefunktion $f(x)$
- Berechne $E(X) = \int x \cdot f(x) dx$
- Berechne $V(X) = \int (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$

Regeln für stetige und diskrete Zufallsvariablen

Diskrete Verteilungen

Hypergeometrische Verteilung (Ohne zurücklegen)
- $N =$ Objekte gesamthaft
- $M =$ Objekte einer bestimmten Sorte
- $n =$ Stichprobengrösse
- $x =$ Merkmalsträger

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Schreibweise: $X \sim H(N, M, n)$
1. $\mu = E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$ 2. $\sigma^2 = V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$ 3. $\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}$

Hypergeometrische Verteilung Ziehen ohne Zurücklegen aus einer endlichen Grundgesamtheit.
Parameter:
- N: Grundgesamtheit
- M: Anzahl der Merkmalsträger
- n: Stichprobenumfang

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Kenngrößen:
- $E(X) = n\frac{M}{N}$
- $V(X) = n\frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

Notation: $X \sim H(N, M, n)$

Ziehung ohne Zurücklegen **Aufgabe:** In einer Urne sind 20 Kugeln, davon 8 rot. Es werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Lösung:
1. **Parameter:**
   - N = 20 (Gesamtanzahl)
   - M = 8 (rote Kugeln)
   - n = 5 (Ziehungen)
2. **Erwartungswert:**

$$E(X) = 5 \cdot \frac{8}{20} = 2$$

3. **Varianz:**

$$V(X) = 5 \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{15}{19} \approx 1.184$$

4. **P(genau 2 rote):**

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{3}}{\binom{20}{5}} \approx 0.3682$$

Hypergeometrische Verteilung Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Parameter:
- $N =$ Grundgesamtheit
- $M =$ Anzahl Merkmalsträger
- $n =$ Stichprobengröße
- $k =$ Erfolge in Stichprobe

Kenngrößen:
1. $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$
2. $V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
3. $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Notation: $X \sim H(N, M, n)$

Lotterie **Aufgabe:** In einer Urne sind 100 Lose, davon 10 Gewinnerlose. Ein Spieler zieht 5 Lose.
Parameter:
- N = 100 (Gesamtlose)
- M = 10 (Gewinnerlose)
- n = 5 (gezogene Lose)

Berechnung:
- $E(X) = 5 \cdot \frac{10}{100} = 0.5$ Gewinne erwartet
- $V(X) = 5 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{95}{99} \approx 0.432$
- $P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0.3726$

Bernoulli-Verteilung Experiment mit genau zwei möglichen Ausgängen (Erfolg/Misserfolg).

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p = q$$

Kenngrößen:
- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

Anwendung der Bernoulli-Verteilung 1. **Prüfe Voraussetzungen**
- Genau zwei mögliche Ausgänge
- Unabhängige Wiederholungen
- Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit

2. **Parameter identifizieren**
- p = Erfolgswahrscheinlichkeit
- q = 1-p = Misserfolgswahrscheinlichkeit

3. **Berechnung**
- E(X) = p
- V(X) = pq

Bernoulliverteilung Bernoulli-Experimente sind Zufallsexperimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen (1 und 0):

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p=q$$

Es gilt:
1. $E(X)=E(X^2)=p$
2. $V(X)=p\cdot(1-p)$

$E(X)$ = Erwartungswert
$V(X)$ = Varianz
$P(X=1)$ = Wahrscheinlichkeit für Erfolg
p = Erfolgswahrscheinlichkeit
q = Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$

Bernoulliverteilung Experiment mit genau zwei möglichen Ausgängen:

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p=q$$

Parameter:
- p = Erfolgswahrscheinlichkeit
- $q=1-p$ = Gegenwahrscheinlichkeit

Kenngrößen:
1. $E(X)=E(X^2)=p$
2. $V(X)=p\cdot(1-p)=pq$

Münzwurf **Aufgabe:** Faire Münze wird geworfen. X = 1 bei Kopf, X = 0 bei Zahl.
Lösung:
- p = 0.5 (faire Münze)
- $E(X)=0.5$
- $V(X)=0.5\cdot 0.5=0.25$
- $P(X=1)=0.5$
- $P(X=0)=0.5$

Binomialverteilung n-malige unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Kenngrößen:
- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$

Notation: $X\sim B(n,p)$

Qualitätskontrolle mit Binomialverteilung **Aufgabe:** Eine Maschine produziert Teile mit Ausschussquote 5%. In einer Stichprobe von 100 Teilen:
- a) Wie viele defekte Teile sind zu erwarten?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 3 defekte Teile?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 defekte Teile?

Lösung:
1. **Parameter:**
   - n = 100 (Stichprobenumfang)
   - p = 0.05 (Ausschusswahrscheinlichkeit)
   - X ∼ B(100, 0.05)
2. **Erwartungswert:**

$$E(X)=np=100\cdot 0.05=5$$

3. **Genau 3 defekte:**

$$P(X=3)=\binom{100}{3}(0.05)^3(0.95)^{97}\approx 0.1404$$

4. **Höchstens 2 defekte:**

$$P(X\leq 2)=\sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}(0.05)^k(0.95)^{100-k}\approx 0.0861$$

Binomialverteilung (Mit zurücklegen)
- n = Anzahl Wiederholungen
- p = Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis 1
- $q=1-p$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$

Schreibweise: $X\sim B(n;p)$
1. $\mu=E(X)=np$ 2. $\sigma^2=V(X)=npq$ 3. $\sigma=S(X)=\sqrt{npq}$

Binomialverteilung n-malige unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Parameter:
- n = Anzahl Wiederholungen
- p = Wahrscheinlichkeit für Erfolg
- $q=1-p$ = Gegenwahrscheinlichkeit

Kenngrößen:
1. $E(X)=np$
2. $V(X)=npq$
3. $\sigma=\sqrt{npq}$

Notation: $X\sim B(n;p)$

Binomialverteilung in der Qualitätskontrolle **Aufgabe:** Ein Produktionsprozess hat eine Fehlerquote von 5%. In einer Stichprobe von 100 Teilen:
Parameter:
- n = 100 (Stichprobenumfang)
- p = 0.05 (Fehlerwahrscheinlichkeit)
- X ∼ B(100, 0.05)

Berechnung:
- $E(X)=100\cdot 0.05=5$ defekte Teile erwartet
- $V(X)=100\cdot 0.05\cdot 0.95=4.75$
- $P(X=3)=\binom{100}{3}\cdot 0.05^3\cdot 0.95^{97}\approx 0.1754$
- $P(X\leq 2)=\sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}\cdot 0.05^k\cdot 0.95^{100-k}\approx 0.1247$

Poisson Verteilung
- λ = Rate

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda>0$$

Schreibweise: $X\sim Poi(\lambda)$
1. $\mu=E(X)=\lambda$ 2. $\sigma^2=V(X)=\lambda$ 3. $\sigma=S(X)=\sqrt{\lambda}$

Poisson-Verteilung Modelliert seltene Ereignisse in festem Zeit- oder Rauminterval.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Parameter:
- λ: Erwartungswert pro Intervall

Kenngrößen:
- $E(X)=\lambda$
- $V(X)=\lambda$

Notation: $X\sim Poi(\lambda)$

Poisson-Verteilung Modelliert seltene Ereignisse:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda>0$$

Parameter:
- λ = Erwartungswert/Rate

Kenngrößen:
1. $E(X)=\lambda$
2. $V(X)=\lambda$
3. $\sigma=\sqrt{\lambda}$

Notation: $X\sim Poi(\lambda)$

Anrufe in Call-Center **Aufgabe:** Ein Call-Center erhält durchschnittlich 4 Anrufe pro Stunde.
Parameter:
- $\lambda=4$ (Anrufe pro Stunde)
- X ∼ Poi(4)

Berechnung:
- $E(X)=4$ Anrufe erwartet
- $V(X)=4$
- $P(X=3)=\frac{4^3}{3!}\cdot e^{-4}\approx 0.1954$
- $P(X\leq 2)=e^{-4}\cdot(1+4+\frac{16}{2})\approx 0.2381$

Poisson-Verteilung in der Praxis **Aufgabe:** Ein Callcenter erhält durchschnittlich 3 Anrufe pro 10 Minuten.

- a) Wahrscheinlichkeit für genau 2 Anrufe in 10 Minuten?
- b) Wahrscheinlichkeit für mehr als 4 Anrufe?

Lösung:

1. **Parameter:**
   - $\lambda = 3$ (Erwartungswert)
   - X $\sim$ Poi(3)
2. **Genau 2 Anrufe:**

$$P(X=2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} \approx 0.2240$$

3. **Mehr als 4 Anrufe:**

$$P(X>4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{3^k}{k!}e^{-3} \approx 0.1847$$

Wahl der richtigen Verteilung 1. **Prüfe Ziehungsart**

- Mit Zurücklegen $\to$ Binomialverteilung
- Ohne Zurücklegen $\to$ Hypergeometrische Verteilung
- Seltene Ereignisse $\to$ Poisson-Verteilung

2. **Prüfe Grundgesamtheit**

- Endlich, klein $\to$ Hypergeometrische Verteilung
- Sehr groß/unendlich $\to$ Binomialverteilung
- Zeitlich/räumlich kontinuierlich $\to$ Poisson-Verteilung

3. **Beachte Approximationen**

- Binomial $\to$ Poisson für $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \lambda$
- Hypergeometrisch $\to$ Binomial für $\frac{n}{N} \leq 0.05$

Wahl der richtigen diskreten Verteilung 1. **Bernoulli-Verteilung**

- Genau zwei mögliche Ausgänge
- Ein einzelner Versuch
- Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit

2. **Binomial-Verteilung**

- Feste Anzahl unabhängiger Versuche
- Mit Zurücklegen/große Grundgesamtheit
- Konstante Erfolgswahrscheinlichkeit

3. **Hypergeometrische Verteilung**

- Ziehen ohne Zurücklegen
- Endliche Grundgesamtheit
- Veränderliche Wahrscheinlichkeiten

4. **Poisson-Verteilung**

- Seltene Ereignisse
- Festes Zeitintervall/Raumbereich
- Rate λ bekannt

Stetige Verteilungen

Normalverteilung

Gauss-Verteilung Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Parameter:

- μ = Erwartungswert
- σ = Standardabweichung
- $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ = Dichtefunktion
- $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ = Verteilungsfunktion

Notation: $X \sim N(\mu;\sigma)$

Gauss-Verteilung Die stetige Zufallsvariable X folgt der Normalverteilung mit den Parametern $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Standardnormalverteilung ($\mu = 0$ und $\sigma = 1$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ = Dichtefunktion der Normalverteilung
$\varphi(x)$ = Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

μ = Erwartungswert
σ = Standardabweichung
e = Eulersche Zahl
π = Kreiszahl Pi

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung
Die kumulative Verteilungsfunktion (CDF) von $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ wird mit $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ bezeichnet. Sie ist definiert durch:

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$$

$\phi_{\mu,\sigma}(x)$ = Verteilungsfunktion der Normalverteilung
$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ = Dichtefunktion der Normalverteilung
$P(X \leq x)$ = Wahrscheinlichkeit dass X kleiner oder gleich x ist
μ = Erwartungswert
σ = Standardabweichung
π = Kreiszahl Pi
e = Eulersche Zahl

Approximation durch die Normalverteilung

- Binomialverteilung: $\mu = np, \sigma^2 = npq$
- Poissonverteilung: $\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda$

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} P(X=x) \approx \phi_{\mu,\sigma}(b + \frac{1}{2}) - \phi_{\mu,\sigma}(a - \frac{1}{2})$$

$P(a \leq X \leq b)$ = Wahrscheinlichkeit dass X zwischen a und b liegt
$\phi_{\mu,\sigma}$ = Verteilungsfunktion der Normalverteilung
a, b = Untere und obere Grenze

Standardisierung der Normalverteilung
Bei einer stetigen Zufallsvariable X lässt sich die Verteilungsfunktion als Integral einer Funktion f darstellen:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\cdot du$$

Liegt eine beliebige Normalverteilung $N(\mu,\sigma)$ vor, muss standardisiert werden. Statt ursprünglichen Zufallsvariablen X betrachtet man die Zufallsvariable:

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$F(x)$ = Verteilungsfunktion
$P(X \leq x)$ = Wahrscheinlichkeit dass X kleiner oder gleich x ist
$f(u)$ = Dichtefunktion
U = Standardisierte Zufallsvariable
X = Ursprüngliche Zufallsvariable
μ = Erwartungswert
σ = Standardabweichung

Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung
Für eine Zufallsvariable $X \sim N(\mu;\sigma)$ gilt:

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

$E(X)$ = Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X
μ = Erwartungsparameter
σ^2 = Varianzparameter

Arbeiten mit der Normalverteilung

1. **Standardisierung**
   - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ transformiert zu N(0,1)
   - Benutze Tabelle der Standardnormalverteilung
   - Beachte: $\phi(z) = 1 - \phi(-z)$
2. **Stetigkeitskorrektur**
   - Bei Approximation diskreter Verteilungen
   - Untere Grenze: $a - 0.5$
   - Obere Grenze: $b + 0.5$
3. **Faustregel für Intervalle**
   - $\mu \pm \sigma$: ca. 68
   - $\mu \pm 2\sigma$: ca. 95
   - $\mu \pm 3\sigma$: ca. 99.7

Körpergrößen **Aufgabe:** Körpergrößen in einer Population sind normalverteilt mit $\mu = 175$ cm und $\sigma = 10$ cm.

Berechnung:
- $P(X \leq 185) = \phi(\frac{185-175}{10}) = \phi(1) \approx 0.8413$
- $P(165 \leq X \leq 185) = \phi(1) - \phi(-1) \approx 0.6826$
- $P(X > 195) = 1 - \phi(2) \approx 0.0228$

Zentraler Grenzwertsatz und Approximationen

Zentraler Grenzwertsatz Für eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2 gilt für die Summe S_n und das arithmetische Mittel $\bar{X}_n$:

$$E(S_n) = n \cdot \mu, \quad V(S_n) = n \cdot \sigma^2$$

$$E(\bar{X}_n) = \mu, \quad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot V(S_n)$$

Die standardisierte Zufallsvariable ist:

$$U_n = \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(u)$ gegen die Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes 1. **Prüfe Voraussetzungen**
- Unabhängige Zufallsvariablen
- Identische Verteilung
- Endliche Varianz
- Genügend große Stichprobe (n $\geq$ 30)

2. **Berechne Parameter**
- $\mu_{S_n} = n\mu$
- $\sigma_{S_n} = \sqrt{n}\sigma$
- $\mu_{\bar{X}} = \mu$
- $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

3. **Standardisiere**
- Transformiere zu $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- Verwende Tabelle der Standardnormalverteilung

Zentraler Grenzwertsatz
Für eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2 gilt:

$$E(S_n) = n{\cdot}\mu, \quad V(S_n) = n{\cdot}\sigma^2, \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n^2}{\cdot}V(S$$

S_n = Summe der Zufallsvariablen
$\bar{X}_n$ = Arithmetisches Mittel der Zufallsvariablen
n = Anzahl der Zufallsvariablen
μ = Erwartungswert der einzelnen Zufallsvariablen
σ^2 = Varianz der einzelnen Zufallsvariablen

Die standardisierte Zufallsvariable:

$$U_n = \frac{((X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - n\mu)}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Sind die Zufallsvariablen alle identisch $N(\mu, \sigma)$ verteilt, so sind die Summe S_n und das arithmetische Mittel $\bar{X}_n$ wieder normalverteilt mit:
- $S_n: \quad N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$
- $\bar{X}_n: \quad N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Verteilungsfunktion $F_n(u)$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Faustregeln für Approximationen
- Die Approximation (Binomialverteilung) kann verwendet werden, wenn $npq > 9$
- Für grosses $n (n \geq 50)$ und kleines $p (p \leq 0.1)$ kann die Binomial- durch die Poisson-Verteilung approximiert werden:

  $$B(n, p) \approx \text{Poi}(n \cdot p)$$

  $B(n, p)$ = Binomialverteilung
  Poi(λ) = Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$

- Eine Hypergeometrische Verteilung kann durch eine Binomialverteilung angenähert werden, wenn $n \leq \frac{N}{20}$:

  $$H(N, M, n) \approx B(n, \frac{M}{N})$$

  $H(N, M, n)$ = Hypergeometrische Verteilung
  $B(n, p)$ = Binomialverteilung
  N = Grundgesamtheit
  M = Anzahl der Erfolge in der Grundgesamtheit
  n = Stichprobengröße

Faustregeln für Approximationen **Binomialverteilung durch Normalverteilung:**
- Bedingung: $npq > 9$
- Parameter: $\mu = np$, $\sigma^2 = npq$
- Stetigkeitskorrektur beachten!

Binomialverteilung durch Poissonverteilung:
- Bedingung: $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$
- $B(n, p) \approx Poi(n \cdot p)$

Hypergeometrische durch Binomialverteilung:
- Bedingung: $n \leq \frac{N}{20}$
- $H(N, M, n) \approx B(n, \frac{M}{N})$

Approximation der Binomialverteilung **Aufgabe:** Eine Produktionsanlage produziert mit Ausschusswahrscheinlichkeit 5%. In einer Charge von 200 Teilen:
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 15 oder mehr defekte Teile?

Lösung:
1. **Prüfung Approximationsbedingung:**
   - $npq = 200 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 9.5 > 9$
   - Normalapproximation ist zulässig
2. **Parameter der Normalverteilung:**
   - $\mu = np = 200 \cdot 0.05 = 10$
   - $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9.5} \approx 3.08$
3. **Berechnung mit Stetigkeitskorrektur:**

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &= 1 - P(X \leq 14.5) \\ &= 1 - \phi(\frac{14.5 - 10}{3.08}) \\ &= 1 - \phi(1.46) \\ &\approx 0.0721 \end{aligned}$$

Approximation durch Poissonverteilung **Aufgabe:** Ein seltener Gendefekt tritt mit Wahrscheinlichkeit p = 0.001 auf. In einer Gruppe von 2000 Menschen:
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 3 Betroffene?

Lösung:
1. **Prüfung Approximationsbedingung:**
   - $n = 2000 \geq 50$ und $p = 0.001 \leq 0.1$
   - Poissonapproximation ist zulässig
2. **Parameter:**
   - $\lambda = np = 2000 \cdot 0.001 = 2$
3. **Berechnung:**

$$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx 0.180$$

4. **Vergleich mit Binomialverteilung:**

$$P_{Bin}(X = 3) = \binom{2000}{3} \cdot 0.001^3 \cdot 0.999^{1997} \approx 0.180$$

Entscheidung über Approximationen

1. **Prüfe Stichprobenumfang**
- Klein (n < 30): Exakte Verteilung
- Mittel (30 ≤ n < 50): Je nach p
- Groß (n ≥ 50): Approximation möglich
2. **Prüfe Wahrscheinlichkeit**
- p ≤ 0.1: Poisson möglich
- 0.1 < p < 0.9: Normal möglich
- npq > 9: Normal empfohlen
3. **Wähle Approximation**
- Binomial → Normal: Große Stichproben, mittleres p
- Binomial → Poisson: Große n, kleines p
- Hypergeometrisch → Binomial: Kleine Stichprobe relativ zur Grundgesamtheit
4. **Beachte**
- Stetigkeitskorrektur bei Normal
- Rundungsregeln bei Grenzen
- Vergleich mit exakter Lösung wenn möglich

Methode der kleinsten Quadrate

Lineare Regression

Lineare Regression

Gegeben sind Datenpunkte $(x_i; y_i)$ mit $1 \leq i \leq n$. Die Residuen / Fehler $\epsilon_i = g(x_i) - y_i$ dieser Datenpunkte sind Abstände in y-Richtung zwischen y_i und der Geraden g. Die Ausgleichs- oder Regressionsgerade ist diejenige Gerade, für die die Summe der quadrierten Residuen $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$ am kleinsten ist.

(x_i, y_i) = Datenpunkte
ϵ_i = Residuum (Abweichung) des i-ten Datenpunkts
$g(x_i)$ = Wert der Regressionsgerade an der Stelle x_i
n = Anzahl der Datenpunkte

Lineare Regression berechnen

1. Berechne arithmetische Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ 2. Berechne Kovarianzen und Varianzen:
- $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
- $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
- $s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$
3. Berechne Steigung m und y-Achsenabschnitt d:
- $m = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$
- $d = \bar{y} - m\bar{x}$
4. Regressionsgerade: $g(x) = mx + d$

Lineare Regression

Gegeben sind die Datenpunkte:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2.1	4.0	6.3	7.8	9.9

1. $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 6.02$
2. Kovarianzen und Varianzen:
- $s_{xy} = 3.945$
- $s_x^2 = 2$
- $s_y^2 = 8.4916$
3. Parameter:
- $m = \frac{3.945}{2} = 1.9725$
- $d = 6.02 - 1.9725 \cdot 3 = 0.1025$
4. Regressionsgerade: $g(x) = 1.9725x + 0.1025$

Regressionsgerade

Die Regressionsgerade $g(x) = mx + d$ mit den Parametern m und d ist die Gerade, für welche die Residualvarianz s_ϵ^2 minimal ist.

Steigung: $m = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$, y-Achsenabschnitt: $d = \bar{y} - m\bar{x}$, $s_\epsilon^2 = s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$

m = Steigung der Regressionsgerade
d = y-Achsenabschnitt
s_{xy} = Kovarianz von x und y
s_x^2 = Varianz der x-Werte
s_y^2 = Varianz der y-Werte
$\bar{x}$ = Arithmetisches Mittel der x-Werte
$\bar{y}$ = Arithmetisches Mittel der y-Werte
s_ϵ^2 = Residualvarianz

Varianzzerlegung und Bestimmtheitsmass

Varianzaufspaltung

Die Totale Varianz setzt sich zusammen aus der Residualvarianz und der Varianz der prognostizierten Werte:
- s_y^2 Totale Varianz
- $s_{\hat{y}}^2$ prognostizierte (erklärte) Varianz
- s_ϵ^2 Residualvarianz

$$s_y^2 = s_\epsilon^2 + s_{\hat{y}}^2$$

s_y^2 = Totale Varianz der beobachteten y-Werte
s_ϵ^2 = Varianz der Residuen
$s_{\hat{y}}^2$ = Varianz der durch die Regression geschätzten Werte

Bestimmtheitsmass berechnen

1. Berechne die totale Varianz s_y^2 2. Berechne die Residualvarianz s_ϵ^2 3. Berechne die erklärte Varianz $s_{\hat{y}}^2$ 4. Berechne das Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_\epsilon^2}{s_y^2}$$

5. Interpretation:
- $R^2 \approx 1$: Sehr gute Anpassung
- $R^2 \approx 0$: Schlechte Anpassung

Bestimmtheitsmass

Das Bestimmtheitsmass R^2 beurteilt die globale Anpassungsgüte einer Regression über den Anteil der prognostizierten Varianz $s_{\hat{y}}^2$ an der totalen Varianz s_y^2:

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$$

R^2 = Bestimmtheitsmass (zwischen 0 und 1)
$s_{\hat{y}}^2$ = Varianz der prognostizierten Werte
s_y^2 = Totale Varianz

Das Bestimmtheitsmass R^2 entspricht dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten:

$$R^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2} = (r_{xy})^2$$

s_{xy} = Kovarianz von x und y
s_x^2 = Varianz der x-Werte
s_y^2 = Varianz der y-Werte
r_{xy} = Korrelationskoeffizient

Residuenbetrachtung

Residuen und Residuenplot analysieren

1. Berechne die Residuen für jeden Datenpunkt:
- $\epsilon_i = y_i - (mx_i + d)$
2. Erstelle Residuenplot:
- x-Achse: Prognostizierte Werte $\hat{y}_i = mx_i + d$
- y-Achse: Residuen ϵ_i
3. Prüfe Eigenschaften:
- Residuen sollten zufällig um Null streuen
- Keine systematischen Muster erkennbar
- Gleiche Streubreite über alle $\hat{y}_i$

Nichtlineares Verhalten

Linearisierungsfunktionen

Transformationen

Ausgangsfunktion	Transformation
$y = q \cdot x^m$	$\log(y) = \log(q) + m \cdot \log(x)$
$y = q \cdot m^x$	$\log(y) = \log(q) + \log(m) \cdot x$
$y = q \cdot e^{m \cdot x}$	$\ln(y) = \ln(q) + m \cdot x$
$y = \frac{1}{q+m \cdot x}$	$V = q + m \cdot x; V = \frac{1}{y}$
$y = q + m \cdot \ln(x)$	$y = q + m \cdot U; u = \ln(x)$
$y = \frac{1}{q \cdot m^x}$	$\log(\frac{1}{y}) = \log(q) + \log(m) \cdot x$

y = Abhängige Variable
x = Unabhängige Variable
q, m = Parameter der Funktion
e = Eulersche Zahl
$\ln$ = Natürlicher Logarithmus
$\log$ = Logarithmus zur Basis 10

Nichtlineare Regression durch Linearisierung

1. Bestimme passende Transformation aus Tabelle 2. Führe Transformation durch 3. Wende lineare Regression auf transformierte Daten an 4. Transformiere Parameter zurück

Beispiel für exponentielles Wachstum $y = q \cdot e^{mx}$:

1. Transformation: $\ln(y) = \ln(q) + mx$
2. Setze $Y = \ln(y)$, $b = \ln(q)$
3. Lineare Regression für $Y = mx + b$
4. Rücktransformation: $q = e^b$

Exponentielles Wachstum Gegeben sind die Messwerte:

x	1	2	3	4
y	2.1	4.2	8.1	15.9

1. Transformation $Y = \ln(y)$:

x	1	2	3	4
Y	0.742	1.435	2.092	2.766

2. Lineare Regression ergibt: $Y = 0.674x + 0.071$
3. Rücktransformation:
- $m = 0.674$
- $q = e^{0.071} = 1.074$
4. Ergebnis: $y = 1.074 \cdot e^{0.674x}$

Allgemeines Vorgehen: Methode der kleinsten Quadrate –

Matrix-Darstellung

Die Parameter m und q der Regressionsgeraden werden mit der Matrix A berechnet:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matrix-Methode für lineare Regression

1. Erstelle Design-Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechne $A^T \cdot A$ 3. Berechne $(A^T \cdot A)^{-1}$ 4. Berechne Parameter:

$$\begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{y}$$

Residuenberechnung

Die Residuen ϵ_i ergeben sich als:

$$\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (mx_i + q)$$

Die Summe der quadrierten Residuen wird minimiert:

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + q))^2 \to \text{min}$$

Mehrfachregression

1. Aufstellen der Designmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1(k-1)} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2(k-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n(k-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung der Parameter:

$$\vec{p} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$$

3. Residuen berechnen:

$$\vec{\epsilon} = \vec{y} - A\vec{p}$$

4. Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \epsilon_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

Mehrfachregression Ein Gebrauchtwagenhändler möchte den Preis (P) seiner Autos basierend auf Alter (A) und Kilometerstand (K) berechnen. Gegeben sind folgende Daten:

Auto	Alter (Jahre)	km (10000)	Preis (1000 CHF)
1	2	3	25
2	3	4	20
3	4	6	15
4	5	7	12

1. Designmatrix aufstellen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Parameter berechnen:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 35 \end{pmatrix}$$

3. Resultierende Funktion:

$$P = -3A - 1.5K + 35$$

Polynomiale Regression

Für Regression mit Polynomen höheren Grades:

1. Erweitere Designmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m & 1 \end{pmatrix}$$

2. Löse wie bei linearer Regression:

$$\vec{p} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$$

3. Polynom aufstellen:

$$y = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_n x + p_{n+1}$$

Quadratische Regression Gegeben sind Messwerte:

x	0	1	2	3	4
y	1	2.1	5.2	10.1	17.2

1. Designmatrix für quadratisches Polynom:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Parameter berechnen:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Quadratische Funktion:

$$y = x^2 + 0.1x + 1$$

Gütekriterien für Regression

1. Bestimmtheitsmass R^2:
- $R^2 > 0.9$: Sehr gute Anpassung
- $0.7 < R^2 < 0.9$: Gute Anpassung
- $0.5 < R^2 < 0.7$: Mittelmässige Anpassung
- $R^2 < 0.5$: Schlechte Anpassung

2. Residuenanalyse:
- Residuen sollten zufällig um 0 schwanken
- Keine systematischen Muster erkennbar
- Residuen sollten normalverteilt sein

3. Prognosegüte:
- Mittlerer quadratischer Fehler (MSE)
- Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (RMSE)
- Mittlerer absoluter Fehler (MAE)

Modellwahl durch Residuenanalyse Für einen Datensatz wurden drei Modelle getestet:

- Linear: $y = 2x + 1$
- Quadratisch: $y = x^2 + x + 1$
- Exponentiell: $y = 2e^{0.5x}$

Bestimmtheitsmasse:

- Linear: $R^2 = 0.85$
- Quadratisch: $R^2 = 0.98$
- Exponentiell: $R^2 = 0.92$

Residuenanalyse zeigt:

- Linear: Systematische Krümmung in Residuen
- Quadratisch: Zufällige Verteilung der Residuen
- Exponentiell: Leichte Systematik in Residuen

Schlussfolgerung: Das quadratische Modell ist am besten geeignet.

Prüfungsaufgaben lösen

1. Aufgabentyp identifizieren:
- Einfache lineare Regression
- Mehrfachregression
- Nichtlineare Regression mit Transformation
- Polynomiale Regression

2. Vorgehen wählen:
- Linear: Direkte Berechnung mit Formeln
- Nichtlinear: Transformation und lineare Regression
- Polynomial: Erweiterte Designmatrix
- Mehrfach: Matrix-Methode

3. Berechnungen durchführen:
- Parameter bestimmen
- Bestimmtheitsmass berechnen
- Residuen analysieren

4. Ergebnisse interpretieren:
- Modellgüte bewerten
- Residuen beurteilen
- Prognosen erstellen

Klausuraufgabe - Linearisierung Gegeben sind Messwerte für ein exponentielles Wachstum:

t (h)	0	1	2	3
N	100	150	225	340

Finden Sie eine Funktion der Form $N(t) = N_0 e^{kt}$

1. Transformation:

$$\ln(N) = \ln(N_0) + kt$$

2. Neue Wertetabelle:

t	0	1	2	3
$\ln(N)$	4.61	5.01	5.42	5.83

3. Lineare Regression:

$$\ln(N) = 0.405t + 4.61$$

4. Rücktransformation:

$$N(t) = 100.4e^{0.405t}$$

5. Bestimmtheitsmass: $R^2 = 0.999$

Schliessende Statistik: Parameter- und Intervallschätzung

Zufallsstichproben

Parameterschätzungen

Grundlagen der Schätztheorie

Die Schätztheorie befasst sich mit zwei Hauptproblemen:

- Punktschätzung: Bestimmung eines einzelnen Schätzwerts
- Intervallschätzung: Bestimmung eines Vertrauensbereichs

Wichtige Begriffe:

- θ: Unbekannter Parameter der Grundgesamtheit
- Θ: Schätzfunktion (Zufallsvariable)
- $\hat{\theta}$: Schätzwert (konkreter Wert)
- n: Stichprobenumfang

Schätzfunktionen

Kriterien für eine optimale Schätzfunktion

Erwartungstreue Schätzfunktion

Eine Schätzfunktion Θ eines Parameters θ heisst erwartungstreu, wenn:

$$E(\Theta) = \theta$$

$E(\Theta)$: Erwartungswert der Schätzfunktion
θ: Wahrer Parameter der Grundgesamtheit

Effizienz einer Schätzfunktion

Gegeben sind zwei erwartungstreue Schätzfunktionen Θ_1 und Θ_2 desselben Parameters θ. Man nennt Θ_1 effizienter als Θ_2, falls:

$$V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$$

$V(\Theta_1), V(\Theta_2)$: Varianzen der Schätzfunktionen

Konsistenz einer Schätzfunktion

Eine Schätzfunktion Θ heisst konsistent, wenn:

$$E(\Theta) \to \theta \text{ und } V(\Theta) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

n: Stichprobenumfang

Prüfen von Schätzfunktionen

1. Erwartungstreue:
- Erwartungswert $E(\Theta)$ berechnen
- Mit Parameter θ vergleichen
- Erwartungstreu, wenn $E(\Theta) = \theta$

2. Effizienz:
- Varianzen $V(\Theta_1)$ und $V(\Theta_2)$ berechnen
- Varianzen vergleichen
- Kleinere Varianz = effizienter

3. Konsistenz:
- Grenzwert für $n \to \infty$ betrachten
- $E(\Theta) \to \theta$?
- $V(\Theta) \to 0$?

Prüfung auf Erwartungstreue

Gegeben sei die Schätzfunktion $\Theta_1 = \frac{1}{3}(2X_1 + X_2)$ für den Erwartungswert μ.

1. Erwartungswert berechnen:

$$E(\Theta_1) = E(\frac{1}{3}(2X_1 + X_2)) = \frac{1}{3}(2E(X_1) + E(X_2))$$

2. Einsetzen der Erwartungswerte:

$$E(\Theta_1) = \frac{1}{3}(2\mu + \mu) = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

3. Da $E(\Theta_1) = \mu$, ist die Schätzfunktion erwartungstreu.

Effizienzberechnung:

$$\begin{aligned} V(\Theta_1) &= V(\frac{1}{3}(2X_1 + X_2)) \\ &= \frac{1}{9}V(2X_1 + X_2) \\ &= \frac{1}{9}(4V(X_1) + V(X_2)) \\ &= \frac{1}{9}(4\sigma^2 + \sigma^2) \\ &= \frac{5\sigma^2}{9} \end{aligned}$$

Erwartungstreue Schätzfunktion

Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ, Varianz σ^2 und Zufallsstichprobe X_1, X_2, X_3. Die folgende Schätzfunktion ist gegeben:

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)$$

Θ_1 = Schätzfunktion
X_1, X_2 = Zufallsvariablen aus der Stichprobe

Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu (Parameter: μ)?

$$E(\Theta_1) = E(\frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)) = \frac{1}{3} \cdot (2E(X_1) + E(X_2))$$

$$E(\Theta_1) = \frac{1}{3} \cdot (2\mu + \mu) = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

$E(\Theta_1)$ = Erwartungswert der Schätzfunktion
$E(X_1), E(X_2)$ = Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen
μ = Wahrer Parameterwert

Da $E(\Theta_1) = \mu$ ist die Funktion erwartungstreu.

Effizienz einer Schätzfunktion

Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ, Varianz σ^2 und Zufallsstichprobe X_1, X_2, X_3. Gegeben ist die Schätzfunktion:

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)$$

Berechnung der Effizienz:

$$\begin{aligned} V(\Theta_1) &= V(\frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)) \\ &= \frac{1}{9} \cdot V(2X_1 + X_2) \\ &= \frac{1}{9} \cdot (V(2X_1) + V(X_2)) \\ &= \frac{1}{9} \cdot (4V(X_1) + V(X_2)) \\ &= \frac{1}{9} \cdot (4\sigma^2 + \sigma^2) \\ &= \frac{5\sigma^2}{9} \end{aligned}$$

$V(\Theta_1)$ = Varianz der Schätzfunktion
$V(X_1), V(X_2)$ = Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen
σ^2 = Varianz der Grundgesamtheit

Die Effizienz der Schätzfunktion ist also $\frac{5\sigma^2}{9}$.

Schätzfunktionen für die wichtigsten statistischen Parameter

Erwartungswert und Varianz (Funktion und Wert)

Erwartungswert:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\bar{X}$ = Arithmetischer Mittelwert (Zufallsvariable)
$\hat{\mu} = \bar{x}$ = Arithmetischer Mittelwert (Stichprobenwert)
n = Stichprobenumfang
X_i = i-te Zufallsvariable
x_i = i-ter Stichprobenwert

Varianz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

S^2 = Stichprobenvarianz (Zufallsvariable)
$\hat{\sigma}^2 = s^2$ = Stichprobenvarianz (Stichprobenwert)
$\bar{X}$ = Arithmetischer Mittelwert (Zufallsvariable)
$\bar{x}$ = Arithmetischer Mittelwert (Stichprobenwert)

Maximum-Likelihood-Schätzung

Likelyhood-Funktion

Wir betrachten eine Zufallsvariable X und ihre Dichte (PDF) $f_x(x|\theta)$, welche von x und einem oder mehreren Parametern θ abhängig sind. Für eine Stichprobe vom Umfang n mit $x_1, \ldots, x_n$ nennen wir die vom Parameter θ abhängige Funktion die Likelyhood-Funktion der Stichprobe:

$$L(\theta) = f_x(x_1|\theta) \cdot f_x(x_2|\theta) \cdot \ldots \cdot f_x(x_n|\theta)$$

Vorgehen bei Maximum-Likelihood-Schätzung

1. Likelyhood-Funktion bestimmen
2. Maximalstelle der Funktion bestimmen:
   - (Partielle) Ableitung $L'(\theta) = 0$

Maximum-Likelihood-Schätzung

Die Likelihood-Funktion für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ ist:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i|\theta)$$

$f_X(x|\theta)$: Wahrscheinlichkeitsdichte
θ: zu schätzender Parameter
n: Stichprobenumfang
Der Maximum-Likelihood-Schätzer maximiert $L(\theta)$ bzw. $\ln(L(\theta))$.

Maximum-Likelihood-Schätzung

1. Likelihood-Funktion aufstellen:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i|\theta)$$

2. Logarithmieren:

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f_X(x_i|\theta))$$

3. Ableitung Null setzen:

$$\frac{d}{d\theta} \ln(L(\theta)) = 0$$

4. Nach θ auflösen:

$$\hat{\theta}_{ML} = \text{Lösung}$$

5. Maximum prüfen:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \ln(L(\theta)) < 0$$

Maximum-Likelihood Normalverteilung

Gegeben sei eine Stichprobe aus einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$.

1. Likelihood-Funktion:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Log-Likelihood:

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

3. Ableitungen:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

4. ML-Schätzer:

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

1. Likelyhood-Funktion aufstellen:
   - Dichte der Verteilung identifizieren
   - Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten bilden
   - $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i|\theta)$
2. Logarithmierte Likelyhood-Funktion bilden:
   - $\ln(L(\theta))$ berechnen
   - Produkte werden zu Summen
3. Ableitung Null setzen:
   - $\frac{d}{d\theta} \ln(L(\theta)) = 0$
   - Nach θ auflösen
4. Maximum prüfen:
   - Zweite Ableitung muss negativ sein
   - $\frac{d^2}{d\theta^2} \ln(L(\theta)) < 0$

Maximum-Likelihood Exponentialverteilung

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ aus einer Exponentialverteilung mit Parameter λ:

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

1. Likelihood-Funktion:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

2. Log-Likelihood:

$$\ln(L(\lambda)) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum x_i$$

3. Ableitung Null setzen:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln(L(\lambda)) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0$$

4. ML-Schätzer:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Vertrauensintervalle

Vertrauensintervall

Ein Vertrauensintervall zum Niveau γ ist ein zufälliges Intervall $[\Theta_u, \Theta_o]$ mit:

$$P(\Theta_u \leq \theta \leq \Theta_o) = \gamma$$

γ: Vertrauensniveau (stat. Sicherheit)
$\alpha = 1 - \gamma$: Irrtumswahrscheinlichkeit
Θ_u, Θ_o: Unter- und Obergrenze

Intervallschätzung

Verteilungstypen und zugehörige Quantile:

Verteilung	Parameter	Quantile
Normalverteilung (σ^2 bekannt)	μ	$c = u_p, p = \frac{1+\gamma}{2}$
t-Verteilung (σ^2 unbekannt)	μ	$c = t_{(p;f=n-1)}, p = \frac{1+\gamma}{2}$
Chi-Quadrat-Verteilung	σ^2	$c_1 = \chi^2_{(\frac{1-\gamma}{2};n-1)}, c_2 = \chi^2_{(\frac{1+\gamma}{2};n-1)}$

Übersicht statistische Schätzverfahren

1. Punktschätzung:
- Maximum-Likelihood
- Momentenmethode
- Kleinste-Quadrate
2. Intervallschätzung:
- Vertrauensintervalle für Mittelwert
- Vertrauensintervalle für Varianz
- Vertrauensintervalle für Anteilswerte
3. Gütekriterien:
- Erwartungstreue
- Effizienz
- Konsistenz
- Minimale Varianz

Berechnung eines Vertrauensintervalls
Geben Sie das Vertrauensintervall für μ an (σ^2 unbekannt). Gegeben sind:

$$n = 10, \quad \bar{x} = 102, \quad s^2 = 16, \quad \gamma = 0.99$$

1. Verteilungstyp mit Param μ und σ^2 unbekannt $\rightarrow$ T-Verteilung
2. $f = n - 1 = 9$, $p = \frac{1+\gamma}{2} = 0.995$, $c = t_{(p;f)} = t_{(0.995;9)} = 3.25$
3. $e = c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 4.111$, $\Theta_u = \bar{X} - e = 97.89$, $\Theta_o = \bar{X} + e = 106.11$

Vertrauensintervalle berechnen

1. Verteilungstyp bestimmen:
- Normalverteilung (σ^2 bekannt)
- t-Verteilung (σ^2 unbekannt)
- Chi-Quadrat (für Varianz)
2. Quantile bestimmen:
- Normalverteilung: $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$
- t-Verteilung: $c = t_{(p;f)}$ mit $f = n - 1$
- Chi-Quadrat: $c_1 = \chi^2_{(p_1;f)}$, $c_2 = \chi^2_{(p_2;f)}$
3. Intervallgrenzen berechnen:
- Mittelwert: $[\bar{x} \pm c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$
- Varianz: $[\frac{(n-1)s^2}{c_2}, \frac{(n-1)s^2}{c_1}]$

Vertrauensintervall für Mittelwert

Gegeben: $n = 25$, $\bar{x} = 102$, $s = 4$, $\gamma = 0.95$
1. Verteilung: t-Verteilung mit $f = 24$ (σ^2 unbekannt)
2. Quantil:
- $p = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$
- $c = t_{(0.975;24)} = 2.064$
3. Intervallgrenzen:
- $e = 2.064 \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} = 1.652$
- $[102 - 1.652; 102 + 1.652] = [100.348; 103.652]$

Konstruktion von Vertrauensintervallen

Vertrauensintervalle berechnen

1. Verteilungstyp und Parameter bestimmen:
- Normalverteilung mit σ^2 bekannt
- Normalverteilung mit σ^2 unbekannt
- Chi-Quadrat für Varianz
2. Vertrauensniveau γ und Freiheitsgrade:
- γ aus Aufgabe entnehmen
- $f = n - 1$ bei t- und χ^2-Verteilung
3. Kritische Werte bestimmen:
- Normalverteilung: $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$
- t-Verteilung: $c = t_{(p;f)}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$
- Chi-Quadrat: $c_1 = \chi^2_{(p_1;f)}$ und $c_2 = \chi^2_{(p_2;f)}$
4. Intervallgrenzen berechnen:
- Mittelwert: $[\bar{x} - e; \bar{x} + e]$ mit $e = c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
- Varianz: $[\frac{(n-1)s^2}{c_2}; \frac{(n-1)s^2}{c_1}]$

Vertrauensintervall für Mittelwert

Eine Maschine produziert Schrauben. Bei einer Stichprobe von $n = 16$ Schrauben wurde der Durchmesser gemessen:
- Mittelwert: $\bar{x} = 5.2$ mm
- Standardabweichung: $s = 0.15$ mm
- Vertrauensniveau: $\gamma = 95\%$
1. Verteilungstyp:
- σ^2 unbekannt $\rightarrow$ t-Verteilung
- $f = n - 1 = 15$ Freiheitsgrade
2. Kritischer Wert:
- $p = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$
- $c = t_{(0.975;15)} = 2.131$
3. Intervallgrenzen:
- $e = 2.131 \cdot \frac{0.15}{\sqrt{16}} = 0.080$
- $[\bar{x} - e; \bar{x} + e] = [5.12; 5.28]$

Vertrauensintervall für Varianz

Für die obigen Schrauben soll ein 95%-Vertrauensintervall für die Varianz berechnet werden.
1. Verteilungstyp:
- Chi-Quadrat-Verteilung
- $f = n - 1 = 15$ Freiheitsgrade
2. Kritische Werte:
- $p_1 = \frac{1-0.95}{2} = 0.025$
- $p_2 = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$
- $c_1 = \chi^2_{(0.025;15)} = 6.262$
- $c_2 = \chi^2_{(0.975;15)} = 27.488$
3. Intervallgrenzen:
- $s^2 = 0.15^2 = 0.0225$
- $\theta_u = \frac{15 \cdot 0.0225}{27.488} = 0.0123$
- $\theta_o = \frac{15 \cdot 0.0225}{6.262} = 0.0539$
4. Vertrauensintervall für σ^2: $[0.0123; 0.0539]$

Bestimmung des Stichprobenumfangs

1. Gegebene Verteilung und Parameter:
- Normalverteilung mit σ^2 bekannt
- Vertrauensniveau γ
- Maximal zulässige Intervallbreite d
2. Kritischen Wert bestimmen:
- $p = \frac{1+\gamma}{2}$
- $c = u_p$ für Normalverteilung
3. Stichprobenumfang berechnen:
- $n \geq (\frac{2c\sigma}{d})^2$
- Auf nächste ganze Zahl aufrunden
4. Bei unbekannter Varianz:
- Vorerhebung durchführen
- Varianz schätzen
- t-Verteilung statt Normalverteilung

Stichprobenumfang bestimmen

Ein Prozess produziert Teile mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 0.5$ mm. Der Mittelwert soll mit einer Genauigkeit von ± 0.2 mm bei einem Vertrauensniveau von 99% geschätzt werden.

1. Gesucht:
- Intervallbreite $d = 0.4$ mm
- $\gamma = 0.99$
2. Kritischer Wert:
- $p = \frac{1+0.99}{2} = 0.995$
- $c = u_{0.995} = 2.576$
3. Stichprobenumfang:
- $n \geq (\frac{2 \cdot 2.576 \cdot 0.5}{0.4})^2 = 41.47$
- $n = 42$ (aufgerundet)

Minimum Stichprobenumfang bestimmen

1. Voraussetzungen:
- Gewünschte Genauigkeit d
- Vertrauensniveau γ
- Standardabweichung σ (wenn bekannt)
2. Kritischen Wert bestimmen:
- $c = u_p$ oder $t_{(p;f)}$
- $p = \frac{1+\gamma}{2}$
3. Stichprobenumfang berechnen:
- $n \geq (\frac{2c\sigma}{d})^2$ für Mittelwert
- Auf nächste ganze Zahl aufrunden

Stichprobenumfang

Ein Parameter soll mit einer Genauigkeit von $d = 0.2$ bei $\gamma = 0.99$ geschätzt werden. Die Standardabweichung ist $\sigma = 0.5$ bekannt.

1. Kritischer Wert:
- $p = \frac{1+0.99}{2} = 0.995$
- $c = u_{0.995} = 2.576$
2. Mindestumfang:
- $n \geq (\frac{2 \cdot 2.576 \cdot 0.5}{0.2})^2 = 41.47$
- $n = 42$ (aufgerundet)

Übersicht Vertrauensintervalle

Parameter	Verteilung	Test-Statistik	Intervall
μ (σ^2 bekannt)	Normal	$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$[\bar{x} \pm u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
μ (σ^2 unbek.)	t	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$[\bar{x} \pm t_p \frac{s}{\sqrt{n}}]$
σ^2	χ^2	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$[\frac{(n-1)s^2}{c_2}, \frac{(n-1)s^2}{c_1}]$

Detaillierte Vertrauensintervalle

Verteilungstypen und Quantile

Verteilung	Parameter	Standardisierung	Quantile
Normalverteilung (σ^2 bekannt)	μ	$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$c = u_p, p = \frac{1+}{2}$
t-Verteilung (σ^2 unbekannt)	μ	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$c = t_{(p;f=n-1)}, p =$
Chi-Quadrat	σ^2	$Z = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$	$c_1 = \chi^2_{(\frac{1-\gamma}{2};n-}$ $c_2 = \chi^2_{(\frac{1+\gamma}{2};n-}$

Konfidenzintervalle

Für verschiedene Verteilungen ergeben sich folgende Intervallgrenzen:

1. Normalverteilung (σ^2 bekannt):

$$\Theta_u = \bar{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \Theta_o = \bar{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. t-Verteilung (σ^2 unbekannt):

$$\Theta_u = \bar{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \Theta_o = \bar{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}$$

3. Chi-Quadrat-Verteilung:

$$\Theta_u = \frac{(n-1)s^2}{c_2}, \quad \Theta_o = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$$

Typische Prüfungsaufgaben

Typische Prüfungsaufgaben

1. Maximum-Likelihood:
- Likelihood-Funktion aufstellen
- Logarithmieren und ableiten
- ML-Schätzer bestimmen
2. Vertrauensintervalle:
- Verteilungstyp bestimmen
- Quantile nachschlagen
- Intervall berechnen
3. Schätzer prüfen:
- Erwartungstreue nachweisen
- Effizienz vergleichen
- Konsistenz zeigen
4. Stichprobenumfang:
- Genauigkeit berücksichtigen
- Vertrauensniveau einbeziehen
- Mindestumfang bestimmen

Typische Prüfungsaufgaben

1. Maximum-Likelihood-Schätzung:
- Likelihood-Funktion aufstellen
- Logarithmieren
- Ableitung Null setzen
- ML-Schätzer bestimmen
- Maximum prüfen
2. Vertrauensintervalle:
- Verteilungstyp bestimmen
- Kritische Werte nachschlagen
- Intervallgrenzen berechnen
- Interpretation der Ergebnisse
3. Stichprobenumfang:
- Genauigkeitsanforderungen
- Vertrauensniveau
- Minimal notwendigen Umfang bestimmen

Hypothesentests

Hypothesentest

Ein statistischer Test zur Überprüfung einer Behauptung bzw. Hypothese über einen oder mehrere Parameter einer Grundgesamtheit.

- H_0: Nullhypothese (zu überprüfende Behauptung)
- H_A: Alternativhypothese (Gegenhypothese)
- α: Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit)

Vorgehen bei Hypothesentests

Ablauf eines Hypothesentests

1. Hypothesen formulieren:
- H_0 aufstellen (punktförmig)
- H_A aufstellen (ein- oder zweiseitig)
2. Signifikanzniveau α festlegen:
- Meist $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$
3. Testvariable und Verteilung bestimmen:
- Passende Zeile aus Tabelle 8.2.1 wählen
- Standardisierte Testvariable notieren
4. Kritische Werte bestimmen:
- Einseitig: ein Wert c
- Zweiseitig: zwei Werte c_u und c_o
5. Testwert berechnen:
- Stichprobenwerte einsetzen
- Standardisierung durchführen
6. Entscheidung treffen:
- H_0 annehmen oder ablehnen
- Ergebnis interpretieren

Mittelwerttest (bekannte Varianz)

Ein Automobilhersteller gibt den mittleren Verbrauch mit $\mu_0 = 8.2$ l/100km an. In einer Stichprobe von $n = 25$ Fahrzeugen wurde ein Mittelwert von $\bar{x} = 9.1$ l/100km bei bekannter Standardabweichung $\sigma = 2.1$ l/100km gemessen.

1. Hypothesen:
- $H_0 : \mu = 8.2$
- $H_A : \mu \neq 8.2$ (zweiseitig)
2. Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$
3. Testvariable: $U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (standardnormalverteilt)
4. Kritische Werte:
- $c_u = -1.96$
- $c_o = 1.96$
5. Testwert:

$$\hat{u} = \frac{9.1 - 8.2}{2.1/\sqrt{25}} = 2.14$$

6. Entscheidung: $\hat{u} > c_o$, also H_0 ablehnen

Unterscheidung abhängiger/unabhängiger Stichproben

1. Abhängige Stichproben:
- Gleicher Stichprobenumfang
- Messungen am gleichen Objekt
- Paarweise Zuordnung möglich
2. Unabhängige Stichproben:
- Unterschiedliche Objekte
- Keine Zuordnung möglich
- Stichprobenumfänge können verschieden sein
3. Auswirkung auf Test:
- Abhängig: Test der Differenzen
- Unabhängig: Test der einzelnen Stichproben

Abhängige Stichproben (t-Test)

Vergleich zweier Messgeräte an denselben 5 Widerständen:

i	1	2	3	4	5
Gerät 1	100.5	102.4	104.3	101.5	98.4
Gerät 2	98.2	99.1	102.4	101.1	96.2

1. Hypothesen:
- $H_0 : \mu_d = 0$
- $H_A : \mu_d \neq 0$
2. $\alpha = 0.01$
3. Differenzen bilden:
- $\bar{d} = 2.02$
- $s_d = 1.047$
4. Testvariable: $T = \frac{\bar{D}}{S_d/\sqrt{n}}$ (t-verteilt mit $f = 4$)
5. Testwert:

$$\hat{t} = \frac{2.02}{1.047/\sqrt{5}} = 4.313$$

6. Kritische Werte: $c_u = -4.604$, $c_o = 4.604$
7. Entscheidung: $|\hat{t}| < c_o$, also H_0 annehmen

Verteilungen der Testvariablen

- Normalverteilung (σ^2 bekannt):

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- t-Verteilung (σ^2 unbekannt):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- Chi-Quadrat (Varianztest):

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Anteilstest (für großes n):

$$U = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Varianztest

Die Varianz eines Produktionsprozesses soll $\sigma_0^2 = 25$ nicht überschreiten. Eine Stichprobe von $n = 12$ Teilen ergab eine empirische Varianz von $s^2 = 40$.

1. Hypothesen:
- $H_0 : \sigma^2 = 25$
- $H_A : \sigma^2 > 25$
2. $\alpha = 0.05$
3. Testvariable: $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (χ^2-verteilt mit $f = 11$)
4. Testwert:

$$\hat{z} = \frac{11 \cdot 40}{25} = 17.6$$

5. Kritischer Wert: $c = \chi^2_{(0.95;11)} = 19.675$
6. Entscheidung: $\hat{z} < c$, also H_0 annehmen

Einseitige vs. zweiseitige Tests

1. Zweiseitiger Test ($H_A : \theta \neq \theta_0$):
- Kritische Werte: c_u und c_o
- Ablehnbereich: $(-\infty, c_u) \cup (c_o, \infty)$
- p-Wert: $2 \cdot P(T \geq |\hat{t}|)$
2. Rechtsseitiger Test ($H_A : \theta > \theta_0$):
- Kritischer Wert: c_o
- Ablehnbereich: (c_o, ∞)
- p-Wert: $P(T \geq \hat{t})$
3. Linksseitiger Test ($H_A : \theta < \theta_0$):
- Kritischer Wert: c_u
- Ablehnbereich: $(-\infty, c_u)$
- p-Wert: $P(T \leq \hat{t})$

p-Wert berechnen

1. Testvariable und Verteilung bestimmen:
- Aus Tabelle 8.2.1 auswählen
- Testwert berechnen
2. p-Wert ermitteln:
- Einseitig: $P(T \geq |\hat{t}|)$ oder $P(T \leq |\hat{t}|)$
- Zweiseitig: $2 \cdot P(T \geq |\hat{t}|)$
3. Vergleich mit α:
- $p \leq \alpha$: H_0 ablehnen
- $p > \alpha$: H_0 annehmen

p-Wert berechnen

Bei einer Qualitätskontrolle wurden in einer Stichprobe von $n = 400$ Teilen 20 Defekte gefunden. Die Nullhypothese lautet $H_0 : p = 0.03$ gegen $H_A : p > 0.03$.

1. Testvariable:

$$U = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

2. Testwert:

$$\hat{u} = \frac{0.05 - 0.03}{\sqrt{\frac{0.03 \cdot 0.97}{400}}} = 2.345$$

3. p-Wert (einseitig):

$$p = P(U \geq 2.345) = 1 - \Phi(2.345) = 0.0095$$

4. Entscheidung: $p < \alpha = 0.05$, also H_0 ablehnen

Typische Prüfungsaufgaben

1. Parametertests:
- Mittelwerttest (σ^2 bekannt/unbekannt)
- Varianztest
- Anteilstest
2. Vergleich zweier Stichproben:
- Abhängige Stichproben
- Unabhängige Stichproben
- Gleiche/verschiedene Varianzen
3. p-Wert Berechnung:
- Ein-/zweiseitige Tests
- Verschiedene Verteilungen

Hypothesentests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte u1 und u2 zweier Normalverteilungen

Mögliche Fehlerquellen bei Hypothesentests

Fehlerarten bei Hypothesentests

	H_0 annehmen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	Richtige Entscheidung	Fehler 1. Art (α)
H_0 falsch	Fehler 2. Art (β)	Richtige Entscheidung

- Fehler 1. Art: α (Signifikanzniveau)
- Fehler 2. Art: β (abhängig vom wahren Wert)
- Teststärke: $1 - \beta$ (Wahrscheinlichkeit für richtige Ablehnung)

Allgemeine Bemerkungen zu Hypothesentests

Weitere Beispiele

Deskriptive Statistik

Merkmalstypen - Praktische Beispiele

- **Nominal**: Geschlecht, Automarke, Blutgruppe
- **Ordinal**: Bildungsabschluss, Zufriedenheit (1-5), Kaufkraft (tief/mittel/hoch)
- **Diskret metrisch**: Anzahl Kinder, Würfelaugen, Stockwerke
- **Stetig metrisch**: Temperatur, Gewicht, Länge

Kombinatorik

Zahlenschloss Ein Zahlenschloss hat 6 Stellen, jede mit Ziffern 0-9.

- Reihenfolge wichtig? Ja (Variation)
- Wiederholungen erlaubt? Ja
- Formel: $n^k = 10^6$ mögliche Kombinationen

Lotto 6 aus 49 ziehen:

- Reihenfolge wichtig? Nein (Kombination)
- Wiederholungen erlaubt? Nein
- Formel: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!}$ mögliche Kombinationen

Zahnarztproblem 3 Spielzeuge aus 5 Töpfen ziehen:

- Reihenfolge wichtig? Nein (Kombination)
- Wiederholungen erlaubt? Ja
- Formel: $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3}$ mögliche Kombinationen

Komplexeres Beispiel: Mannschaftsauswahl In einer Klasse von 20 Studierenden sollen:

- Eine 11er Fußballmannschaft gebildet werden
- Mit genau 6 Frauen und 5 Männern
- Es gibt 8 Frauen und 12 Männer in der Klasse

Lösung: 1. Wähle 6 aus 8 Frauen: $\binom{8}{6}$ 2. Wähle 5 aus 12 Männern: $\binom{12}{5}$ 3. Multipliziere: $\binom{8}{6} \cdot \binom{12}{5}$ = 22,176 Möglichkeiten

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeit bei Rommé

Beim Rommé spielt man mit **110 Karten: sechs** davon sind **Joker**. Zu Beginn eines Spiels erhält jeder Spieler genau **12 Karten**.
In wieviel Prozent aller möglichen Fälle sind darunter **genau zwei** Joker?

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{104}{10}}{\binom{110}{12}}$$

In wieviel Prozent aller möglichen Fälle ist darunter **mindestens ein** Joker?

$$1 - \frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}}$$

Geschwister und Geburtsmonat

Sind in mehr als 60% aller Fälle von vier (nicht gleichaltrigen) Geschwistern mindestens zwei im gleichen Monat geboren?

$$1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{12^4}$$

Anordnung von Büchern

Auf wie viele Arten lassen sich 10 Bücher in ein Regal reihen?

$$n = 10, \quad k = 10$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = 10!$$

Glühbirnen auswählen

Von **100 Glühbirnen** sind genau **drei defekt**. Es werden nun **6 Glühbirnen** zufällig ausgewählt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn sich **mindestens eine defekte** Glühbirne in der Auswahl befinden soll?

$$\binom{100}{6} - \binom{97}{6} = 203'880'032$$

Mit wie viel Prozent Chancen ist bei einer Auswahl von 6 Glühbirnen **keine defekt**?

$$\frac{\binom{97}{6}}{\binom{100}{6}}$$

Buchstabenkombinationen

Wie viele Worte lassen sich aus den Buchstaben des Wortes ABRAKADABRA bilden? (Nur Worte in denen alle Buchstaben vorkommen!)
$A = 5x, \quad B = 2x, \quad R = 2x, \quad D = 1x, \quad K = 1x$

$$\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 83160$$

Kartenspiel: Rommé **Aufgabe:** Beim Rommé spielt man mit 110 Karten, davon sind 6 Joker. Jeder Spieler erhält 12 Karten.
Teil 1: Berechne die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Joker.

- **Ergebnisraum:** Alle möglichen 12-Karten-Hände: $|\Omega| = \binom{110}{12}$
- **Günstige Ereignisse:**
  - 2 Joker aus 6: $\binom{6}{2}$
  - 10 Nicht-Joker aus 104: $\binom{104}{10}$
- **Berechnung:** $P(\text{2 Joker}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{104}{10}}{\binom{110}{12}}$

Teil 2: Berechne die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Joker.

- **Strategie:** Berechnung über Gegenereignis (kein Joker)
- **Berechnung:** $P(\text{mind. 1 Joker}) = 1 - \frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}}$

Glühbirnen-Problem **Aufgabe:** Von 100 Glühbirnen sind 3 defekt. Es werden 6 zufällig ausgewählt.
Teil 1: Anzahl Möglichkeiten mit mindestens einer defekten Glühbirne.

- **Gesamtmöglichkeiten:** $\binom{100}{6}$
- **Gegenereignis:** Keine defekte $= \binom{97}{6}$
- **Lösung:** $\binom{100}{6} - \binom{97}{6} = 203'880'032$

Teil 2: Wahrscheinlichkeit für keine defekte Glühbirne.

$$P(\text{keine defekt}) = \frac{\binom{97}{6}}{\binom{100}{6}}$$

Beispiele

Erwartungstreue Schätzfunktion Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ, Varianz σ^2 und Zufallsstichprobe X_1, X_2, X_3. Die folgende Schätzfunktion ist gegeben:

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)$$

Θ_1 = Schätzfunktion
X_1, X_2 = Zufallsvariablen aus der Stichprobe

Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu (Parameter: μ)?

$$E(\Theta_1) = E(\frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)) = \frac{1}{3} \cdot (2E(X_1) + E(X_2))$$

$$E(\Theta_1) = \frac{1}{3} \cdot (2\mu + \mu) = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

$E(\Theta_1)$ = Erwartungswert der Schätzfunktion
$E(X_1), E(X_2)$ = Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen
μ = Wahrer Parameterwert

Da $E(\Theta_1) = \mu$ ist die Funktion erwartungstreu.

Intervallschätzung für die Varianz Für die Varianz σ^2 einer Normalverteilung mit Stichprobenumfang $n = 10$ und Stichprobenvarianz $s^2 = 16$ soll ein 99%-Vertrauensintervall berechnet werden.

1. Verteilungstyp: Chi-Quadrat-Verteilung
2. Freiheitsgrade: $f = n - 1 = 9$
3. Quantile: $c_1 = \chi^2_{(0.005;9)} = 1.735$, $c_2 = \chi^2_{(0.995;9)} = 23.589$
4. Vertrauensintervall:

$$\frac{(n-1)s^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{c_1}$$

n = Stichprobenumfang
s^2 = Stichprobenvarianz
c_1, c_2 = Chi-Quadrat-Quantile
σ^2 = Wahre Varianz der Grundgesamtheit

$$\frac{9 \cdot 16}{23.589} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \cdot 16}{1.735}$$

$$6.10 \leq \sigma^2 \leq 82.99$$

Bernoulli-Anteilsschätzung Ein Vertrauensintervall für den Parameter p einer Bernoulli-Verteilung soll aus einer Stichprobe mit $n = 100$ und $\bar{x} = 0.42$ bei einem Vertrauensniveau von 95% berechnet werden.

1. Prüfen der Voraussetzung: $n\hat{p}(1-\hat{p}) = 100 \cdot 0.42 \cdot 0.58 = 24.36 > 9$
2. Quantil: $c = u_{0.975} = 1.96$
3. Standardfehler: $\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = \sqrt{\frac{0.42 \cdot 0.58}{100}} = 0.0494$
4. Vertrauensintervall:

$$0.42 \pm 1.96 \cdot 0.0494 = [0.323; 0.517]$$

n = Stichprobenumfang
$\bar{x}$ = Stichprobenmittelwert (Anteil der Erfolge)
$\hat{p}$ = Geschätzter Parameter der Bernoulli-Verteilung
$u_{0.975}$ = 97.5