Analysis I Cheatsheet

Jil Zerndt

Folgen und Reihen

Folgen

Folgen
- $n \in \mathbb{N}^* \to a_n \in \mathbb{R}$
- $(a_k) = (a_k)_{k\geq 1} = \big(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots\big)$

Die Elemente einer Folge heissen Glieder der Folge $\to a_n$.

Teilfolgen Eine **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung mit der Eigenschaft: $l(n) < l(n+1)\ \forall n \geq 1$.

Wichtige Folgen

(1) Arithmetische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1} - a_n = d$ konstant ist, d.h. $a_1 = a,\ a_2 = a_1 + d, \quad a_n = a + (n-1)d$

(2) Geometrische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1} = qa_n$ mit q konstant, d.h. $a_1 = a,\ a_2 = qa, \quad a_n = q^{n-1} \cdot a$

Satz. Es gilt

$$a + qa + \cdots + q^{n-1}a = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \begin{cases} na & \text{für } q = 1 \\ a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \end{cases}$$

Abkürzungen
- A = Anfangs-Glied
- d = Differenz
- q = Quotient

Arithmetische Folge $a_k = (2, 3, 4, 5, \ldots) \to d = 1, A = 2$
- N-tes Glied: $a_n = A + (n-1) \cdot d$
- Mittelwert: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$
- Partial-Summe:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$$

Geometrische Folge

$$a_k = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right) \to q = \frac{1}{2}, A = 1$$

- N-tes Glied: $a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$
- Mittelwert: $|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$
- Partial-Summe:

$$S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Grenzwert und Konvergenz von Folgen

ε-Definition
Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **konvergent**, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ endlich ist. ($\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}/0$.)

Einfach gesagt: das heisst, dass $|a_n - a| < \epsilon$ ab einem gewissen n für alle ϵ gilt.

Bem: l bezeichnet den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$

Formelle Grenzwert Definition Folgende Aussagen sind äquivalent:
1. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n\to\infty} a_n$
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1$, sodass $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Einzigartigkeit Grenzwert Es gibt max. ein $l \in \mathbb{R}$ für a_n mit dieser Eigenschaft (max. 1 Grenzwert)

Rechenregeln mit Folgen
Sei $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$
1. $(a_n \pm b_n)_{n\ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.
2. $(a_n \cdot b_n)_{n\ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
3. $(a_n \div b_n)_{n\ \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty}(a_n \div b_n) = a \div b$. (solange $b_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$)
4. Falls $\exists K \geq 1$ mit $a_n \leq b_n\ \forall n \geq K$ folgt $a \leq b$.

Tricks und Tipps für Folgen

Konvergenz Folgen
1. Für Brüche, grösste Potenz von n ausklammern und kürzen. Alle übrigen Brüche der Form $\frac{a}{n^s}$ streichen, da diese zu 0 konvergieren.
2. Für Wurzeln in einer Summe, multipliziere mit der Differenz der Summe (bei a + b multipliziere mit a - b)
3. Anwendung Satz von Weierstrass
4. Anwendung Sandwich-Satz
5. Vergleich mit Referenz-Folgen (Spezielle Grenzwerte)
6. Grenzwert durch simple Operationen und Umformen ermitteln
7. Binom -, Substitutions-, Log-Trick?
8. Definition der Konvergenz/Limes anwenden
9. Suchen eines konvergenten Majoranten

Divergenz Folgen
1. Suche einen divergenten Minoranten
2. Für alternierende Folgen zeige, dass $\lim_{n\to\infty} a_p1(n) \neq \lim_{n\to\infty} a_p2(n)$

Binom Trick
Gegeben die Summe von zweier (oder einer) Wurzel, kann man wie folgt vorgehen:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+5)-(x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}\right)$$

Substitutions Trick
Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x}))$$

Substituiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

Satz von Weierstrass
- $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
- $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

Sandwich-Satz Sei $\lim a_n = \alpha$ und $\lim c_n = \alpha$ und $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq k$ dann gilt $\lim b_n = \alpha$
Bmk: k steht hier für eine beliebige natürliche Zahl, ab der die Bedingung immer gilt. Also wie bei der Grenzwert-Definition mit dem «Gürtel» um den Grenzwert - das gilt ja auch erst ab einem gewissen Wert n.
Bmk 2: Einfach gesagt heisst das, dass wenn wir den Grenzwert von zwei Folgen bereits kennen und dieser für beide gleich ist, und wir eine dritte Folge haben die «zwischen» die zwei bekannten Folgen passt (daher Sandwich-Satz), wissen wir dass auch die dritte Folge den gleichen Grenzwert wie die anderen zwei hat.

Grenzwert einer Reihe

Reihen-Konvergenz Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$

Rechenregeln von Reihen
Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$.
1. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$.
2. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ konvergent. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Spezielle Grenzwerte von Reihen

Geom:	$\sum_{k=0}^{\infty} a^k$	$\begin{cases} \frac{1}{1-a} & \lvert a\rvert < 1 \\ \text{divergiert} & \lvert a\rvert \geq 1 \end{cases}$
	$\sum_{k=0}^{n} ax^k$	$= a(\frac{1-x^{n+1}}{1-x})$
Harm. mit $b = 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^b}$	$\begin{cases} \text{konvergiert} & b > 1 \\ \text{divergiert} & b \leq 1 \end{cases}$
Altern. Harm.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k^b}$	konvergiert nach Leibniz
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{b^k}$	abs. konv. falls $\lvert b\rvert > 1, k \in \mathbb{C}$
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k!}$	abs. konv. $\forall a \in \mathbb{C}$

Zeta-Funktion: Sei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $\zeta(s)$ konvergiert für $s > 1$

Teleskopsumme: Sei $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$. Konvergiert genau dann, wenn $\lim a_n \to g$ konvergiert. Der Grenzwert der Summe ist dann $a_1 - g$.

Die unendliche Geometrische Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1} = \frac{A}{1-q}$$

Bedingung
$|q| < 1$

Beispiel Unendliche Geometrische Reihe

$$a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \ldots = 14$$

- $q = \frac{1}{2} \to$ Die Reihe konvergiert
- $S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$

Konvergenzkriterien Reihen

Konvergenz Reihen
1. Handelt es sich um eine spezielle Reihe? (Geometrisch, Teleskopiert, Harmonisch, Zetafunktion)
2. Ist $\lim a_n = 0$? (Nullfolgenkriterium)
3. Ist das Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium anwendbar?
4. Existiert ein konvergierender Majorant / divergierender Minorant?
5. Kann man das Leibnizkriterium anwenden?
6. Integral Test? Partialbruchzerlegung?

Logarithmus abschätzen
$\log_b(n)$ kann mit n^α $(\alpha > 0)$ abgeschätzt werden.
$\ln(n) \leq \sqrt{n}$

Nullfolgenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$ aber die Umkehrung stimmt nicht.

Cauchy Kriterium Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1$ mit $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$

Leibniz Kriterium
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend, mit $a_n \geq 0\ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $S := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

Majorantenkriterium Seien $a_n, b_n \geq 0$ mit $a_n \geq b_n \quad \forall n > n_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert

Minorantenkriterium Seien $a_n, b_n \geq 0$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert

Quotientenkriterium Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$ und: $q = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

- $q < 1$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut
- $q > 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Für $\liminf a_n = 1$ keine Aussage möglich
!!! für die harmonische Reihe ist dieses Kriterium nicht anwendbar/gültig !!!

Wurzelkriterium Es sei: $q = \sqrt[n]{|a_n|}$

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergieren
- $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Integral Test
Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty[$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \text{ divergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

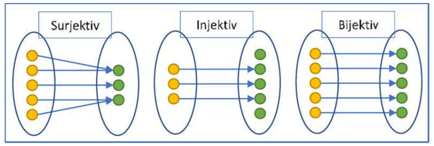
Der Grenzwert einer Reihe kann auch mit Partialbruchzerlegung berechnet werden.

Was ist der Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$?

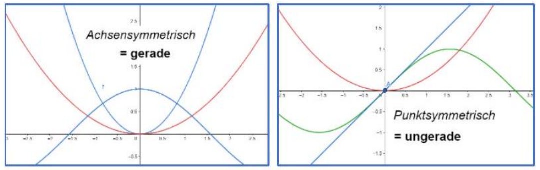
$$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} b &= -a = -\tfrac{1}{2} \\ a &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \dots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2\cdot 6} = \frac{5}{12}$$

Funktionen



Symmetrie gerade $f(-x) = f(x)$, ungerade $f(-x) = -f(x)$



Stetigkeit

Stetigkeit Eine Funktion ist stetig, falls

- die Kurve keine Sprünge macht
- man den Graphen der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen

Spezielle Stetige Funktionen

1. $|f|$, $max(f,g)$ und $min(f,g)$ sind stetig
2. Polynomielle Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig
3. die Trigonometrischen Funktionen $sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig
4. die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

Grenzwerte von Funktionen

Konvergenz einer Funktion
Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0 falls: für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$
Bmk: Die Stelle x_0 muss nicht im Definitionsbereich D sein.

Links- und Rechtsseitige Grenzwerte
Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, x_0 ist ein Häufungspunkt. Was vereinfacht heisst, dass die Funktion an dieser Stelle evtl. einen Sprung macht, da sich z.B. die Definition ändert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Setze in diesem Beispiel $x_0 = 0$, und prüfe ob sich die Funktion von rechts und links dem selben Wert nähert bei x_0. (NEIN in diesem Bsp.)
Formell: Eine Funktion ist dann gleichmässig konvergent wenn für alle Werte der Funktion gilt

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

(Linksseitiger Grenzwert = Rechtsseitiger Grenzwert)

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

Strategien und Rechentricks

Erweitern mit $\left(\frac{1}{n^k}\right)$
k = höchste Potenz

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}$$
$$= \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0+0}$$

Erweitern mit $\left(\frac{1}{a^k}\right)$
k = höchste Potenz
a = grösste Basis

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3\cdot 3^n + 2^n}{3^n+2} = \frac{\frac{3\cdot 3^n}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} + \frac{2}{3^n}}$$
$$= \frac{3 + \frac{2^n}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0}$$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)} + \sqrt{b(n)}$

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}$$
$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}}{1}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}}$$
$$= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2n}} \frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2+n)} - \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} - \sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Erweitern zu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

Wir rechnen also:

$$4n = \frac{3n}{2}\cdot a \text{ und } a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}$$

Differentialrechnung

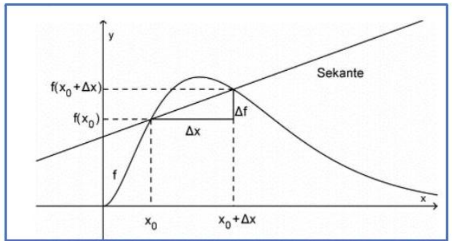
Differenzierbarkeit

Sekanten-Steigung und Differentialquotient

Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall im Definitionsbereich von f. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heisst Differentialquotient von f.



Differenzierbarkeit

f ist in x_0 **differenzierbar**, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.
Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x)$ bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta \mathrm{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Den Grenzwert selbst bezeichnet man als Ableitung.

Vereinfacht: Eine Funktion ist differenzierbar, falls die Kurve keine Knicke macht.

Tangentengleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Stetige Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitungsfunktion stetig ist.

n-fache Differenzierbarkeit

1. Für $n \geq 2$ ist f ***n*-mal differenzierbar** in D falls f^{n-1} in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ und nennnt sich die n-te Ableitung von f.
2. Die Funktion f ist ***n*-mal stetig differenzierbar** in D, falls sie n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$, n-mal differenzierbar ist.

- exp, sin, cos, sinh, cosh, tanh sind glatt auf $\mathbb{R}$
- Alle Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt
- ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist glatt

Rechnen mit höheren Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $f, g \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D.

1. $f + g$ ist n-mal differenzierbar und $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
3. $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$
4. $(g \circ f)$ ist n-mal differenzierbar

Funktionen untersuchen

Monotonie

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion in D mit $x_0 \in D$.

- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ konstant, bzw. horizontale Tangente
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend.
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend.

Krümmung

Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung:

- $f''(x_0) > 0$ Konvex (Nach links/oben gekrümmt)
- $f''(x_0) < 0$ Konkav (Nach rechts/unten gekrümmt)
- $f''(x_0) = 0$ Keine eindeutige Krümmung

Bmk: Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex. (konkav analog)

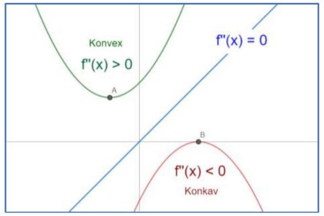
Quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$

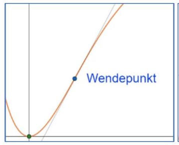
Nullstellen

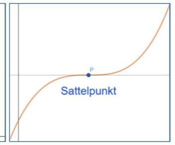
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Scheitelpunkt

- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- $\mathrm{S} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$







Berechnung Wendetangente

Lösen der Gleichung $f''(x) = 0 \to x_0$.
Bedingungen: Sei $y = f(x)$ dreimal differenzierbar

- $f''(x_0) = 0$
- $f^{(3)}(x_0) \neq 0 \quad \to$ Wendepunkt
- Falls zusätzlich $f'(x_0) = 0 \quad \to$ Sattelpunkt

Allgemeines Kriterium

Sei $f(x)$ eine genügend oft differenzierbare Funktion

- $f'(x_0) = 0$

Sei n die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0:

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Schlussfolgerungen:

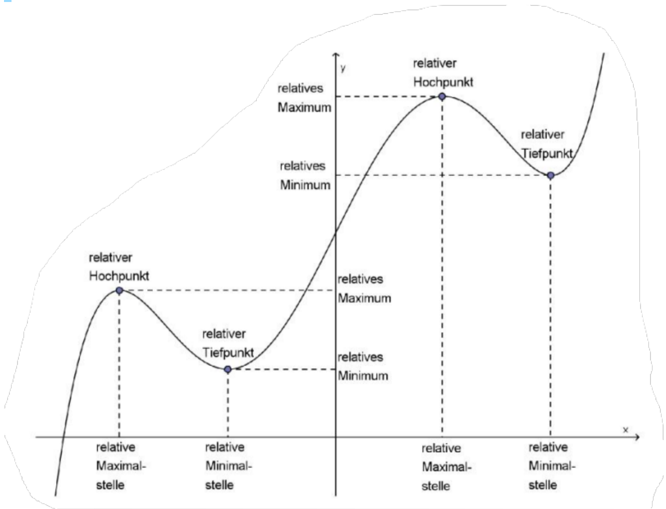
- Wenn n gerade, dann gibt es ein relatives Extremum $\left(f^{(n)}(x_0) \neq 0\right)$
- Wenn n ungerade, dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt und damit einen Sattelpunkt

Vorgehen Wende- und Sattelpunkte

1. Erste und zweite Ableitung
2. Wendepunkt bestimmen
   - $f''(x_0) = 0 \to x_0$
   - $f^{(3)}(x_0) \neq 0$
3. Sattelpunkte bestimmen
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f''(x_0) = 0$
   - ...
   - $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
   - Gerade $\to$ relatives Extremum
   - Ungerade $\to$ Sattelpunkt
4. x_0 in ursprüngliche Gleichung einsetzen

Relative Extrema

- Relative Extremal-Stelle $x_0 \implies$ Minimal-/Maximalstelle
- Relatives Extremum $y_0 \implies$ Maximum/Minimum
- Relativer Extremal-Punkt $P_0 = (x_0, y_0) \implies$ Hoch-/Tiefpunkt



Vorgehen relative Extrema von $f(x) = y$:

1. Bestimme $f'(x)$ (Erste Ableitung)
2. Bestimme NST von $f'(x)$
   $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ lokales Extremum
3. Bestimme $f''(x)$ (Zweite Ableitung)
   - $f''(x) = 0 \Rightarrow$ siehe Vorgehen Wende- und Sattelpunkte
   - $f''(x) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum
   - $f''(x) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum
4. In Gleichung f(x) = y einsetzen
   - Hochpunkt/Tiefpunkt $= P(x, y)$

Transformation: Funktionen zeichnen

- $y = f(x)By = f(ax)$: Streckung des Graphen um Faktor $\frac{1}{a}$ in x Richtung
- $y = f(x)$ ß $y = f(x + b)$: Verschiebung des Graphen um $|b|$ in **x** Richtung
- $y = f(x)$ ß $y = cf(x)$: Streckung des Graphen um Faktor c in y Richtung
- $y = f(x)$ ß $y = f(x) + d$: Verschiebung des Graphen um d Einheiten in y Richtung

Graphen von Polynomen

- Hat so viele Nullstellen wie Grad des Polynoms (Fundamentalssatz der Algebra)
- bei Faktorisiertem angeben, noch Vorfaktor beachten => Falls Punkt gegeben kann dieser berechnet werden
- für jede Nullstelle:
- Einfach: Schneidend
- Doppelt: Berührend
- Dreifach: Wie x^3
- für Asymptoten: anlehnend