Stochastik und Statistik

Jil Zerndt, Lucien Perret
January 2025

Deskriptive Statistik

Teilbereiche der Statistik

- **Deskriptive Statistik:** Beschreibung und übersichtliche Darstellung von Daten, Ermittlung von Kenngrössen und Datenvalidierung
- **Explorative Statistik:** Weiterführung und Verfeinerung der beschreibenden Statistik, insbesondere die Suche nach Strukturen und Besonderheiten
- **Induktive Statistik:** Versucht mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die erhobenen Daten hinaus allgemeinere Schlussfolgerungen zu ziehen

Begriffe

Statistische Grundbegriffe

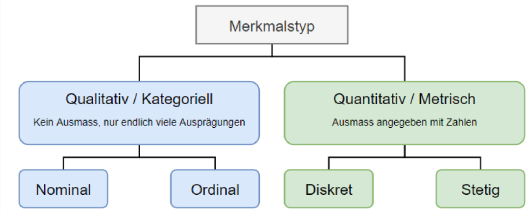
- **Merkmalsträger/Statistische Einheiten:** Objekte, an denen interessierende Grössen beobachtet und erfasst werden (z.B. Wohnungen, Menschen, Unternehmen)
- **Grundgesamtheit:** Alle statistischen Einheiten, über die man Aussagen gewinnen möchte. Kann endlich oder unendlich, real oder hypothetisch sein
- **Vollerhebung:** Eigenschaften werden bei jedem Individuum in der Grundgesamtheit erhoben
- **Stichprobe:** Untersuchte Teilmenge der Grundgesamtheit, soll diese möglichst genau repräsentieren
- **Stichprobengrösse:** Anzahl der Einheiten in der Stichprobe
- **Merkmal:** Interessierende Grösse, die an den statistischen Einheiten beobachtet wird
- **Merkmalsausprägungen:** Verschiedene Werte, die jedes Merkmal annehmen kann

Symbole und Bezeichnungen

- Ω = Grundgesamtheit
- n = Anzahl Objekte
- X = Stichprobenwerte
- a = Ausprägungen
- h = Absolute Häufigkeit
- f = Relative Häufigkeit
- H = Kumulative Absolute Häufigkeit
- F = Kumulative Relative Häufigkeit

Merkmalstypen

- **Qualitativ/Kategoriell:** eine Ausprägung, kein Ausmass angegeben
  - **Nominal:** Reine Kategorisierung, keine Ordnung
  - **Ordinal:** Ordnung vorhanden, Rangierung möglich
- **Quantitativ/Metrisch:** Es wird ein Ausmass mit Zahlen angegeben
  - **Diskret:** Endlich viele / abzählbar unendlich viele Ausprägungen
  - **Stetig:** Alle Ausprägungen in einem reellen Intervall



Merkmalstypen

- **Würfelwurf (4-mal)**
  - Merkmalsausprägungen: Zahlen 1 bis 6
  - Messniveau: Metrisch diskret
- **Parteiwahl (100 Menschen)**
  - Merkmalsausprägungen: BDP, CVP, FDP, GLP, etc.
  - Messniveau: Nominal
- **Programmrobustheit (100 Tests)**
  - Merkmalsausprägungen: schlecht, mittel, sehr gut
  - Messniveau: Ordinal
- **Programmlaufzeit (100 Tests)**
  - Merkmalsausprägungen: Laufzeiten
  - Messniveau: Metrisch stetig

Häufigkeiten und Verteilungsfunktion

Grundlegende Begriffe

- **Urliste:** Liste der beobachteten Stichprobenwerte (Messwerte)
- **Absolute Häufigkeit** h_i: Anzahl des Auftretens eines Wertes a_i
- **Relative Häufigkeit** f_i: Absolute Häufigkeit geteilt durch Stichprobenumfang
- **Empirische Dichtefunktion:**
  - Diskrete Merkmale: PMF (probability mass function)
  - Stetige Merkmale: PDF (probability density function)

Absolute Häufigkeit H

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

h_i: Einzelhäufigkeit der i-ten Beobachtung
n: Anzahl der Beobachtungen.

Relative Häufigkeit F

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad F(x) = \frac{H(x)}{n}$$

f_i: Einzelrelative Häufigkeit der i-ten Beobachtung
$H(x)$: Absolute Häufigkeit eines Wertes x

Absolute und Relative Häufigkeiten

Für eine Stichprobe mit verschiedenen Merkmalsausprägungen $a_1, a_2, ..., a_m$ gilt:

Absolute Häufigkeit:

- h_i ist die Anzahl des Auftretens von a_i $(i = 1, ..., m)$
- $\sum_{i=1}^{m} h_i = n$ (Stichprobenumfang)

Relative Häufigkeit:

- $f_i = \frac{h_i}{n}$
- $\sum_{i=1}^{m} f_i = 1$

Erstellen einer Häufigkeitsverteilung

1. Sammle alle verschiedenen Werte
2. Zähle absolute Häufigkeiten:
   - Wie oft kommt jeder Wert vor?
3. Berechne relative Häufigkeiten:
   - Teile jede absolute Häufigkeit durch n
4. Berechne kumulative Häufigkeiten:
   - Absolute: Summiere h_i von links nach rechts
   - Relative: Summiere f_i von links nach rechts

Würfelwurf Ein Würfel wird 20 Mal geworfen:

a_i	1	2	3	4	5	6	Total
h_i	4	3	4	0	6	3	20
f_i	4/20	3/20	4/20	0	6/20	3/20	1

Kumulative Verteilungsfunktion (CDF)

Die empirische absolute Summenhäufigkeit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ ist definiert durch:

$$H(x) = \text{Anzahl aller Stichprobenwerte} \leq x \text{ bzw. } H(x) = \sum_{i:a_i \leq x} h_i$$

Die empirische relative Summenhäufigkeit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$F(x) = \frac{H(x)}{n} \text{ bzw. } F(x) = \sum_{i:a_i \leq x} f_i$$

Diese CDF ist eine Stufenfunktion, die monoton von 0 bis 1 wächst und an den Stellen a_i genau um f_i springt.

Programmlaufzeiten Ein Programm wird auf 20 Rechnern ausgeführt. Folgende Laufzeiten (in ms) werden gemessen: 400, 399, 398, 400, 398, 399, 397, 400, 402, 399, 401, 399, 400, 402, 398, 400, 399, 401, 399, 399

a_i	397	398	399	400	401	402	Total
h_i	1	3	7	5	2	2	20
f_i	1/20	3/20	7/20	5/20	2/20	2/20	1
H_i	1	4	11	16	18	20	
F_i	1/20	4/20	11/20	16/20	18/20	1	

Eigenschaften der CDF

Für jede empirische kumulative Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

- $F(x) = \sum_{r \leq x} f(r)$ mit der relativen Häufigkeitsfunktion (PMF)
- $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle reellen Zahlen x
- $F(x)$ ist monoton wachsend
- Der Graph von $F(x)$ ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion
- Es gibt eine reelle Zahl x mit $F(x) = 0$
- Es gibt eine reelle Zahl y mit $F(y) = 1$
- Der Anteil aller Stichprobenwerte x_i im Bereich $a < x_i \leq b$ berechnet sich als $F(b) - F(a)$

Klassierte Stichproben

Klassierung von Daten Bei grossen Stichproben metrisch stetiger Merkmale teilt man die Stichprobenwerte in Klassen ein:

- Die Klassen sind aneinandergrenzende Intervalle
- Obere Intervallgrenzen zählen immer zum darauffolgenden Intervall
- Relative Häufigkeit eines Intervalls = Anzahl enthaltener Stichprobenwerte / Stichprobengrösse
- Die relative Häufigkeit eines Intervalls entspricht der Fläche des darüber liegenden Rechtecks im Histogramm

Häufigkeitsdichtefunktion Bei klassierten Daten wird die Häufigkeit als Rechtecksfläche über der Klassenbreite d_i dargestellt:
Absolute Häufigkeitsdichte:

$$h = \frac{h_i}{d_i}$$

Relative Häufigkeitsdichte:

$$f = \frac{f_i}{d_i}$$

Die Höhe des Rechtecks entspricht der absoluten bzw. relativen Häufigkeitsdichte.

Ausgaben für Transport Jährliche Ausgaben für Transport im ÖV von 750 Personen:

Klasse c_i	[100,200)	[200,500)	[500,800)	[8
h_i	35	182	317	
f_i	35/750	182/750	317/750	8
d_i	100	300	300	
$h(x)$	35/100	182/300	317/300	8
$f(x)$	35/(750 · 100)	182/(750 · 300)	317/(750 · 300)	84/(

Klassenbildung (Faustregeln)

- Die Klassen sollten gleich breit gewählt werden
- Die Anzahl der Klassen sollte etwa zwischen 5 und 20 liegen
- Die Anzahl der Klassen sollte $\sqrt{n}$ nicht wesentlich überschreiten
- Klassengrenzen sollten 'runde' Zahlen sein
- Werte auf Klassengrenzen kommen in die obere Klasse

Verteilungsfunktion für klassierte Daten Durch Integration der relativen Häufigkeitsfunktion (PDF) $f(x)$ erhält man die kumulative Verteilungsfunktion (CDF):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Dabei gilt:

- $F(x)$ ist stetig und stückweise differenzierbar
- Die Werte von $F(x)$ an den rechten Klassengrenzen erhält man durch Kumulieren der relativen Häufigkeiten f_i im kompletten Intervall

Berechnung der CDF für klassierte Daten

1. Bestimme für jede Klasse:
   - Klassenbreite d_i
   - Absolute Häufigkeit h_i
   - Relative Häufigkeit $f_i = \frac{h_i}{n}$
2. Kumuliere die relativen Häufigkeiten
3. Werte der CDF:
   - An linker Klassengrenze: F(x) entspricht kumulierter Häufigkeit bis vorherige Klasse
   - An rechter Klassengrenze: F(x) entspricht kumulierter Häufigkeit bis aktuelle Klasse
   - Dazwischen: Lineare Interpolation

Kenngrössen

Arten von Kenngrössen Bei der Analyse von Verteilungen unterscheidet man:

- **Lagemasse:** Beschreiben das Zentrum der Verteilung
- **Streuungsmasse:** Charakterisieren die Abweichung vom Zentrum
- **Schiefemasse:** Beschreiben die Form der Verteilung

Quantile

Quantile Für eine reelle Zahl $0 \leq q \leq 1$ heisst eine Zahl R ein q-Quantil der Stichprobe $x_1, x_2, ..., x_n$, falls:

- Der Anteil der Stichprobenwerte $x_i \leq R$ mindestens q ist
- Der Anteil der Stichprobenwerte $x_i \geq R$ mindestens $1 - q$ ist

Die 0.25, 0.5 und 0.75-Quantile werden auch 1., 2. und 3. Quartil genannt.

Berechnung von Quantilen Für eine geordnete Stichprobe $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq ... \leq x_{[n]}$:

1. Berechne $n \cdot q$
2. Falls $n \cdot q$ eine ganze Zahl ist:

$$R_q = \frac{1}{2}(x_{n \cdot q} + x_{n \cdot q+1})$$

3. Falls $n \cdot q$ keine ganze Zahl ist:

$$R_q = x_{\lceil n \cdot q \rceil}$$

4. Wobei $\lceil n \cdot q \rceil$ die nächstgrössere ganze Zahl ist

Median Das 0.5-Quantil (2. Quartil) wird auch Median oder Zentralwert genannt:

$$\text{Median}(x_1, ..., x_n) = x_{\text{med}} = \begin{cases} x_{[\frac{n+1}{2}]} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{[\frac{n}{2}]} + x_{[\frac{n}{2}+1]}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der Median teilt einen Datensatz in zwei gleich grosse Hälften.

Boxplot

Boxplot Ein Boxplot besteht aus:

- Box: Begrenzt durch 1. und 3. Quartil (Q_1 und Q_3)
- Mittellinie: Median (Q_2)
- Interquartilsabstand: $IQR = Q_3 - Q_1$
- Antennen (Whisker):
  - Untere Antenne: Minimum der Werte $\geq Q_1 - 1.5 \cdot IQR$
  - Obere Antenne: Maximum der Werte $\leq Q_3 + 1.5 \cdot IQR$
- Ausreisser: Alle Werte ausserhalb der Antennen

Erstellen eines Boxplots

1. Berechne Quartile Q_1, Q_2 (Median) und Q_3
2. Bestimme Interquartilsabstand $IQR = Q_3 - Q_1$
3. Berechne Grenzen für Ausreisser:
   - Untere Grenze: $Q_1 - 1.5 \cdot IQR$
   - Obere Grenze: $Q_3 + 1.5 \cdot IQR$
4. Zeichne Box und Antennen
5. Markiere Ausreisser einzeln

Lagekennwerte

Lageparameter

- **Arithmetisches Mittel:**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i$$

- **Median:** Teilt Datensatz in zwei gleich grosse Hälften
- **Modus:** Häufigster Wert in der Stichprobe

Streuungskennwerte

Streuungsmasse **Stichprobenvarianz:**

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Korrigierte Stichprobenvarianz:

$$s^2_{\text{kor}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}s^2$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{bzw.} \quad s_{\text{kor}} = \sqrt{s^2_{\text{kor}}}$$

Form der Verteilung

Verteilungsformen

- **Symmetrisch:** Rechte und linke Hälfte spiegelbildlich
- **Linkssteil (rechtsschief):**
  - Daten links konzentriert
  - $x_{\text{mod}} < x_{\text{med}} < \bar{x}$
- **Rechtssteil (linksschief):**
  - Daten rechts konzentriert
  - $x_{\text{mod}} > x_{\text{med}} > \bar{x}$
- **Modalität:**
  - Unimodal: Ein Maximum
  - Bimodal/Multimodal: Mehrere Maxima

Deskriptive Statistik (mehrere Merkmale)

Bei vielen Fragestellungen sind verschiedene Merkmale bei einem Merkmalsträger interessant. Teilweise ist auch das Ziel der Untersuchungen, Zusammenhänge zwischen diesen Merkmalen zu finden.

Multivariate Daten

- **Bivariate Daten:** Zwei Merkmale pro Merkmalsträger
- **Multivariate Daten:** Mehrere Merkmale pro Merkmalsträger

Bivariate Daten

Grafische Darstellung

Darstellungsformen nach Merkmalstypen

- **Zwei kategorielle Merkmale:**
  - Kontingenztabellen
  - Mosaikplots
- **Ein kategorielles + ein metrisches Merkmal:**
  - Boxplots
  - Stripcharts
  - Kennwerte pro Kategorie
- **Zwei metrische Merkmale:**
  - Streudiagramm (Scatterplot)
  - Punktwolke in der (x,y)-Ebene

Analyse von Streudiagrammen

1. Untersuche die **Form** des Zusammenhangs:
   - Linear: Punkte streuen um Gerade
   - Gekrümmt: Punkte folgen einer Kurve
   - Mehrere Punktwolken vorhanden?
2. Bestimme die **Richtung**:
   - Positiv: y-Werte steigen mit x-Werten
   - Negativ: y-Werte fallen mit x-Werten
   - Kein Trend erkennbar
3. Beurteile die **Stärke**:
   - Wenig Streuung: starker Zusammenhang
   - Große Streuung: schwacher Zusammenhang
   - Auf Ausreißer achten

Korrelation

Kovarianz Die Kovarianz ist ein Maß für den linearen Zusammenhang:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Alternative Berechnungsformel:

$$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$$

mit $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Korrelationskoeffizient nach Pearson Der Pearson-Korrelationskoeffizient normiert die Kovarianz:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Eigenschaften:

- $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- $r_{xy} \approx 1$: starker positiver linearer Zusammenhang
- $r_{xy} \approx -1$: starker negativer linearer Zusammenhang
- $r_{xy} \approx 0$: kein linearer Zusammenhang

Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman Für monotone Zusammenhänge wird der Spearman-Koeffizient verwendet:

$$r_{Sp} = \frac{s_{rg(xy)}}{s_{rg(x)} \cdot s_{rg(y)}}$$

Bei unterschiedlichen Rängen gilt vereinfacht:

$$r_{Sp} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

mit $d_i = rg(x_i) - rg(y_i)$ (Rangdifferenzen)

Unterschied Pearson und Spearman

- **Pearson:**
  - Misst linearen Zusammenhang
  - Empfindlich gegen Ausreißer
  - Für metrische Daten
- **Spearman:**
  - Misst monotonen Zusammenhang
  - Robust gegen Ausreißer
  - Auch für ordinale Daten

Scheinkorrelation Eine Korrelation zwischen zwei Merkmalen bedeutet nicht automatisch einen kausalen Zusammenhang:

- Ein drittes Merkmal könnte beide beeinflussen
- Der Zusammenhang könnte zufällig sein
- Ausreißer können das Ergebnis verzerren

Mehrere Merkmale

Darstellung multivariater Daten

- **Kategorielle Merkmale:**
  - Mehrdimensionale Kontingenztabellen
  - Farbliche Codierung zusätzlicher Dimensionen
- **Metrische Merkmale:**
  - Matrix von Streudiagrammen
  - Korrelationsmatrix

Kombinatorik

Bei vielen Wahrscheinlichkeitsproblemen ist es möglich, durch geschicktes Abzählen Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Dazu sind kombinatorische Überlegungen erforderlich.

Grundbegriffe

Fakultät Die Fakultät $n!$ ist für eine natürliche Zahl n rekursiv definiert:

- Startwert: $0! = 1$
- Für $n \geq 1$: $n! = n \cdot (n-1)!$

Beispiel: $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 24$

Binomialkoeffizient Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Er gibt die Anzahl Möglichkeiten an, aus n Objekten k Objekte auszuwählen.

Grundlegende Abzählmethoden

Systematik der Kombinatorik Man unterscheidet vier grundlegende Abzählprobleme:

	Mit Wiederholung	**Ohne Wiederholung**
Variation (Reihenfolge wichtig)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (Reihenfolge unwichtig)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Bestimmung der Abzählmethode 1. **Analysiere das Problem:**

- n: Anzahl verfügbarer Objekte
- k: Anzahl auszuwählender Objekte

2. **Prüfe die Reihenfolge:**
   - Ist die Reihenfolge wichtig? → Variation
   - Ist nur die Auswahl wichtig? → Kombination
3. **Prüfe Wiederholungen:**
   - Dürfen Objekte mehrfach vorkommen? → Mit Wiederholung
   - Darf jedes Objekt nur einmal? → Ohne Wiederholung
4. **Wähle die passende Formel**

Variation mit Wiederholung **Zahlenschloss:** 6 Stellen, Ziffern 0-9 möglich
- $n = 10$ Ziffern
- $k = 6$ Stellen
- Reihenfolge wichtig
- Wiederholung erlaubt
- Lösung: $10^6 = 1\,000\,000$ Möglichkeiten

Variation ohne Wiederholung **Schwimmwettkampf:** Erste 3 Plätze bei 10 Schwimmern
- $n = 10$ Schwimmer
- $k = 3$ Plätze
- Reihenfolge wichtig
- Keine Wiederholung möglich
- Lösung: $\frac{10!}{7!} = 720$ Möglichkeiten

Kombination mit Wiederholung **Zahnarzt:** 3 Spielzeuge aus 5 verschiedenen Arten
- $n = 5$ Arten
- $k = 3$ Spielzeuge
- Reihenfolge unwichtig
- Wiederholung möglich
- Lösung: $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten

Kombination ohne Wiederholung **Lotto:** 6 aus 49
- $n = 49$ Zahlen
- $k = 6$ Auswahl
- Reihenfolge unwichtig
- Keine Wiederholung
- Lösung: $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

Eigenschaften Für den Binomialkoeffizienten gelten:
- Leere Menge: $\binom{n}{0} = 1$
- Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Pascal'sche Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- Summe: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Berechnung von Binomialkoeffizienten 1. **Prüfe Spezialfälle:**
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$

2. **Nutze Symmetrie:**
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. **Pascal'sches Dreieck**
- Baue schrittweise auf
- Nutze Rekursionsformel

4. **Direkte Berechnung**
- Nur wenn nötig
- Kürze vor dem Ausrechnen

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Ergebnisraum und Zähldichte Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, bei dem folgende Bedingungen erfüllt sind:
- Der Vorgang lässt sich unter den gleichen äußeren Bedingungen beliebig oft wiederholen
- Es sind mehrere sich gegenseitig ausschließende Ergebnisse möglich
- Das Ergebnis lässt sich nicht mit Sicherheit voraussagen, sondern ist zufallsbedingt

Der **Ergebnisraum** Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments.
Die **Zähldichte** $\rho : \Omega \to [0, 1]$ ordnet jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ seine Wahrscheinlichkeit zu, wobei $\sum_{\omega\in\Omega} \rho(\omega) = 1$ gilt.

Ereignisse und Wahrscheinlichkeitsraum Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge des Ergebnisraums Ω. Der **Ereignisraum** 2^Ω ist die Menge aller möglichen Ereignisse (Potenzmenge von Ω).
Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ ist definiert durch:

$$P(M) = \sum_{\omega\in M} \rho(\omega) \text{ für } M \subseteq \Omega$$

Ein **Laplace-Raum** liegt vor, wenn alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind:

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen Für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) gelten:
- $(A1)$ Unmögliches Ereignis: $P(\emptyset) = 0$
- $(A2)$ Sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$
- $(A3)$ Komplementäres Ereignis: $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$
- $(A4)$ Vereinigung: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $(A5)$ Sigma-Additivität: Für paarweise disjunkte Ereignisse gilt: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen Eine **Zufallsvariable** X ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis eine reelle Zahl zuordnet.
Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (PMF) ist definiert durch:

$$f(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Die **Verteilungsfunktion** (CDF) ist definiert durch:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t\leq x} f(t)$$

Eigenschaften von PMF und CDF
- $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ und $F(x) = \sum_{t\leq x} f(t)$
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- Monotonie: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Kenngrössen

Erwartungswert und Varianz Für eine diskrete Zufallsvariable X sind definiert:
Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f(x)$$

Varianz:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x\in\mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x)$$

Standardabweichung:

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz
- Linearität: $E(aX + b) = aE(X) + b$
- Verschiebungssatz: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Lineare Transformation: $V(aX + b) = a^2V(X)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung A ist:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{für } P(A) > 0$$

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Ereignisbäume 1. **Aufbau**
- Von links nach rechts zeichnen
- Alle Verzweigungen vollständig angeben
- Übergangswahrscheinlichkeiten an Äste schreiben

2. **Pfadwahrscheinlichkeiten**
- Multiplikation entlang des Pfades
- Für jedes Endereignis alle Pfade addieren
- Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten $= 1$

Stochastische Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, falls:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen **stochastisch unabhängig**, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Eigenschaften der stochastischen Unabhängigkeit Für unabhängige Ereignisse A und B gilt:

- A und $\Omega \setminus B$ sind unabhängig
- $\Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B$ sind unabhängig
- $P(A|B) = P(A)$ falls $P(B) > 0$

Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y gilt:

- $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Spezielle Verteilungen

Diskrete und Stetige Zufallsvariablen

Diskrete und Stetige Zufallsvariablen Bei einer **diskreten Zufallsvariable** gibt es immer Lücken zwischen den Werten; sie kann nur bestimmte Werte annehmen.
Eine **stetige Zufallsvariable** hat ein kontinuierliches Spektrum von möglichen Werten.

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

- Diskret: $P(X = x) = f(x)$ (PMF)
- Stetig: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (CDF)

Gegenüberstellung von diskreten und stetigen Zufallsvariablen

	Diskrete ZV	Stetige ZV
Dichtefunktion	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'$
Verteilungsfunktion	$F(x) = \sum_{x \leq X} f(x)$	$F(x) = \int$
Wahrscheinlichkeiten	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a<x<b} f(x)$	$P(a \leq X$
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f(x)$	$E(X) = \int$
Varianz	$V(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x)$	$V(X) = \int$

Diskrete Verteilungen

Übersicht der diskreten Verteilungen

Verteilung	Notation	$E(X)$	$V(X)$
Hypergeometrisch	$H(N, M, n)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Binomial	$B(n, p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$
Poisson	$Poi(\lambda)$	λ	λ

Hypergeometrische Verteilung Ziehen **ohne Zurücklegen** aus einer endlichen Grundgesamtheit.

Parameter:

- N: Grundgesamtheit
- M: Anzahl Merkmalsträger
- n: Stichprobenumfang

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Kenngrößen:

- $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$
- $V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Notation: $X \sim H(N, M, n)$

Binomialverteilung n-malige **unabhängige Wiederholung** eines Bernoulli-Experiments.

Parameter:

- n: Anzahl Versuche
- p: Erfolgswahrscheinlichkeit
- $q = 1 - p$: Gegenwahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Kenngrößen:

- $E(X) = n \cdot p$
- $V(X) = n \cdot p \cdot q$

Notation: $X \sim B(n, p)$

Poissonverteilung Modelliert **seltene Ereignisse** in einem festen Intervall.

Parameter:

- λ: Erwartungswert/Rate pro Intervall

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Kenngrößen:

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Notation: $X \sim Poi(\lambda)$

Stetige Verteilungen

Normalverteilung Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Parameter:

- μ: Erwartungswert (Lage)
- σ: Standardabweichung (Streuung)

Eigenschaften:

- Symmetrisch um μ
- Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$
- Ca. 68% der Werte in $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- Ca. 95% der Werte in $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- Ca. 99,7% der Werte in $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Notation: $X \sim N(\mu, \sigma)$

Zentraler Grenzwertsatz und Approximationen

Zentraler Grenzwertsatz Für die Summe $S_n = X_1 + ... + X_n$ von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $V(X_i) = \sigma^2$ gilt:

- S_n ist approximativ normalverteilt
- $E(S_n) = n\mu$
- $V(S_n) = n\sigma^2$

Für das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ gilt:

- $\bar{X}_n$ ist approximativ normalverteilt
- $E(\bar{X}_n) = \mu$
- $V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

Approximationsregeln **Binomialverteilung → Normalverteilung:**

- Bedingung: $npq > 9$
- $B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$
- Stetigkeitskorrektur beachten!

Binomialverteilung → Poissonverteilung:

- Bedingung: $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$
- $B(n, p) \approx Poi(np)$

Hypergeometrisch → Binomialverteilung:

- Bedingung: $n \leq \frac{N}{20}$
- $H(N, M, n) \approx B(n, \frac{M}{N})$

Wahl der richtigen Verteilung 1. **Diskrete Verteilungen:**

- Ziehen ohne Zurücklegen: Hypergeometrisch
- Unabhängige Versuche: Binomial
- Seltene Ereignisse: Poisson

2. **Approximationen prüfen:**

- $npq > 9$: Normal-Approximation möglich
- $n \geq 50, p \leq 0.1$: Poisson-Approximation möglich
- $n \leq \frac{N}{20}$: Binomial-Approximation möglich

3. **Stetigkeitskorrektur:**

- Bei Normal-Approximation: ± 0.5 an den Grenzen
- $P(X \leq k) \approx P(X \leq k + 0.5)$
- $P(X = k) \approx P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$

Die Methode der kleinsten Quadrate

Einführung

Einführung

Die Methode der kleinsten Quadrate ist eine weit verbreitete Optimierungsmethode zur Modellierung mathematischer Zusammenhänge in großen Datenmengen. Das Ziel ist es, optimale Parameter zu finden, die den funktionalen Zusammenhang zwischen Messdaten am besten beschreiben. Bei der linearen Regression wird beispielsweise ein linearer Zusammenhang zwischen den Daten vermutet und versucht, eine optimale Gerade in die Datenmenge einzupassen.

Lineare Regression

Lineare Regression

Gegeben sind Datenpunkte $(x_i; y_i)$ mit $1 \leq i \leq n$, die näherungsweise auf einer Geraden liegen. Die Residuen oder Fehler $\epsilon_i = y_i - g(x_i)$ dieser Datenpunkte sind die Abstände in y-Richtung zwischen y_i und der Geraden g.

Die "bestmögliche"Gerade, die Ausgleichs- oder Regressionsgerade, ist diejenige Gerade, für die die Summe der quadrierten Residuen $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$ am kleinsten ist:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

mit:
y_i: beobachtete y-Werte
$\hat{y}_i$: prognostizierte bzw. erklärte y-Werte
ϵ_i: Residuen (oder auch Fehler)

Parameter der Regressionsgerade

Die Regressionsgerade $g(x) = mx + d$ mit den Parametern m und d ist die Gerade, für die die Residualvarianz $\tilde{s}_\epsilon^2$ minimal ist.
Parameter:
Steigung: $m = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x^2}$
y-Achsenabschnitt: $d = \bar{y} - m\bar{x}$

Wichtige Kenngrößen:
Arithmetische Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

Varianz der x_i-Werte:
$\tilde{s}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \bar{x}^2$

Varianz der y_i-Werte:
$\tilde{s}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - \bar{y}^2$

Kovarianz:
$\tilde{s}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - \bar{x}\bar{y}$

Residualvarianz:
$\tilde{s}_\epsilon^2 = \tilde{s}_y^2 - \frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2}$

Varianzzerlegung und Bestimmtheitsmass

Varianzzerlegung

Die Totale Varianz setzt sich zusammen aus der Residualvarianz und der Varianz der prognostizierten Werte:
$\tilde{s}_y^2 = \tilde{s}_\epsilon^2 + \tilde{s}_{\hat{y}}^2$
mit:
$\tilde{s}_y^2$: Totale Varianz
$\tilde{s}_{\hat{y}}^2$: prognostizierte (erklärte) Varianz
$\tilde{s}_\epsilon^2$: Residualvarianz

Bestimmtheitsmass

Das Bestimmtheitsmass R^2 beurteilt die globale Anpassungsgüte einer Regression über den Anteil der prognostizierten Varianz $\tilde{s}_{\hat{y}}^2$ an der totalen Varianz $\tilde{s}_y^2$:

$$R^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2} = \frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2 \tilde{s}_y^2} = r_{xy}^2$$

Das Bestimmtheitsmass R^2 stimmt überein mit dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten (nach Bravais-Pearson).
Interpretation:
- $R^2 = 0.75$ bedeutet, dass 75% der gesamten Varianz durch die Regression erklärt sind
- Die restlichen 25% sind Zufallsstreuung

Residuenbetrachtung

Residuenplot

Die Residuen werden bezogen auf die prognostizierten y-Werte $\hat{y}$ dargestellt. Auf der horizontalen Achse werden die prognostizierten y-Werte $\hat{y}$ und auf der vertikalen Achse die Residuen angetragen.
Beurteilungskriterien:
- Residuen sollten unsystematisch (d.h. zufällig) streuen
- Überall etwa gleich um die horizontale Achse streuen
- Betragsmäßig kleine Residuen sollten häufiger sein als große

Nichtlineares Verhalten

Linearisierung

Oft können nichtlineare Regressionsmodelle durch geeignete Transformation auf ein lineares Modell zurückgeführt werden.
Wichtige Transformationen:

Ausgangsfunktion	Transformation
$y = q \cdot x^m$	$\log(y) = \log(q) + m \cdot \log(x)$
$y = q \cdot m^x$	$\log(y) = \log(q) + \log(m) \cdot x$
$y = q \cdot e^{m \cdot x}$	$\ln(y) = \ln(q) + m \cdot x$
$y = \frac{1}{q + m \cdot x}$	$V = q + m \cdot x; V = \frac{1}{y}$
$y = q + m \cdot \ln(x)$	$y = q + m \cdot U; U = \ln(x)$
$y = \frac{1}{q \cdot m^x}$	$\log(\frac{1}{y}) = \log(q) + \log(m) \cdot x$

Allgemeines Vorgehen

Matrix-Darstellung

Für die Methode der kleinsten Quadrate mit mehreren Variablen wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt:
$y = Xp + \epsilon$
mit:
p: Vektor der Parameter
y: Vektor der Messwerte
ϵ: Vektor der Residuen
X: Matrix der Eingangswerte

Die Lösung ist:
$p = (X^T X)^{-1} X^T y$
falls $(X^T X)$ invertierbar

Vorgehen bei Mehrfachregression

1. Aufstellen der Matrix X mit den Eingangswerten 2. Berechnung der Parameter $p = (X^T X)^{-1} X^T y$ 3. Berechnung der Residuen $\epsilon = y - Xp$ 4. Überprüfung der Modellgüte durch:

- Bestimmtheitsmass R^2
- Residuenanalyse
- Plausibilität der Parameter

Schliessende Statistik – Parameter- und Intervallschätzung

Zufallsstichproben

Grundlagen der Zufallsstichproben

Die Grundgesamtheit ist eine Menge von gleichartigen Objekten oder Elementen. Sie kann endlich oder unendlich viele Objekte enthalten.
Eine Stichprobe vom Umfang n wird entnommen, um Informationen über die Grundgesamtheit zu gewinnen. Dies ist oft notwendig weil:

- Der Zeit- und Kostenaufwand für eine Vollerhebung zu hoch ist
- Die Anzahl Objekte zu groß ist
- Die Objekte bei der Untersuchung zerstört werden

Einfache Zufallsstichprobe

Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang n ist eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (Stichprobenvariablen). Dabei bezeichnet X_i die Merkmalsausprägung des i-ten Elements in der Stichprobe.
Die beobachteten Merkmalswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der n Elemente sind Realisierungen der Zufallsvariablen und heißen Stichprobenwerte.
Wichtige Eigenschaften:

- Jedes Element hat die gleiche Chance, ausgewählt zu werden
- Die Ziehungen sind stochastisch unabhängig
- Alle X_i folgen derselben Verteilung $F(x)$ der Grundgesamtheit

Parameterschätzungen

Schätzfunktionen

Schätzfunktion

Eine Schätzfunktion $\Theta = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ist eine spezielle Stichprobenfunktion zur Schätzung eines Parameters θ der Grundgesamtheit.
Der Schätzwert $\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ergibt sich durch Einsetzen der konkreten Stichprobenwerte.
Wichtig: θ ist der wahre, unbekannte Parameterwert der Grundgesamtheit.

Kriterien für eine optimale Schätzfunktion

Optimale Schätzfunktionen

Eine Schätzfunktion sollte folgende Eigenschaften haben:
1. Erwartungstreu: $E(\Theta) = \theta$ 2. Effizient: Kleinste Varianz unter allen erwartungstreuen Schätzern 3. Konsistent: $E(\Theta) \to \theta$ und $V(\Theta) \to 0$ für $n \to \infty$

Interpretation:

- Erwartungstreue bedeutet, dass im Mittel der richtige Wert geschätzt wird
- Effizienz bedeutet möglichst geringe Streuung der Schätzung
- Konsistenz bedeutet, dass die Schätzung mit wachsendem Stichprobenumfang immer genauer wird

Wichtige Schätzfunktionen

Schätzfunktionen für wichtige Parameter

Erwartungswert:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Eigenschaften:

- Erwartungstreu: $E(\bar{X}) = \mu$
- Konsistent: $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

Varianz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Eigenschaften:

- Erwartungstreu: $E(S^2) = \sigma^2$
- Konsistent: $V(S^2) \to 0$ für $n \to \infty$

Anteilswert: (bei Bernoulli-Verteilung)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

Likelihood-Funktion

Für eine Stichprobe vom Umfang n mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist die Likelihood-Funktion definiert als:

$$L(\theta) = f_X(x_1|\theta) \cdot f_X(x_2|\theta) \cdot \ldots \cdot f_X(x_n|\theta)$$

wobei $f_X(x|\theta)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung ist.

Maximum-Likelihood-Schätzung

1. Likelihood-Funktion $L(\theta)$ aufstellen 2. Log-Likelihood $\ln(L(\theta))$ bilden (vereinfacht die Rechnung) 3. Ableitung $\frac{d}{d\theta}\ln(L(\theta)) = 0$ setzen 4. Nach θ auflösen für $\hat{\theta}_{ML}$ 5. Maximum überprüfen durch zweite Ableitung

Beispiel für Normalverteilung:

1. $L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu)^2$
3. $\frac{\partial}{\partial\mu}\ln(L) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln(L) = 0$
4. Ergibt: $\hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$ und $\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$

Vertrauensintervalle

Vertrauensintervall

Ein Vertrauensintervall $[\Theta_u, \Theta_o]$ zum Niveau γ ist ein zufälliges Intervall mit:

$$P(\Theta_u \leq \theta \leq \Theta_o) = \gamma$$

γ: Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)
$\alpha = 1 - \gamma$: Irrtumswahrscheinlichkeit
Θ_u, Θ_o: Unter- und Obergrenze

Vertrauensintervall-Typen

Fall	Verteilung	Test-Statistik	Grenzen
μ (σ^2 bekannt)	Standard-normalvert.	$U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $c = u_p$
μ (σ^2 unbek.)	t-Verteilung mit $f = n-1$	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm c\frac{s}{\sqrt{n}}$ $c = t_{p,f}$
σ^2	χ^2-Verteilung mit $f = n-1$	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$[\frac{(n-1)s^2}{c_2}, \frac{(n-1)s^2}{c_1}]$ $c_1 = \chi^2_{p_1,f}, c_2 = \chi^2$

mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$, $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$, $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$

Vertrauensintervalle berechnen

1. Verteilungstyp bestimmen:
   - Parameter (μ oder σ^2)
   - σ^2 bekannt oder unbekannt
2. Quantile bestimmen:
   - γ und α beachten
   - Richtige Tabelle wählen
   - Freiheitsgrade $f = n - 1$ beachten
3. Intervallgrenzen berechnen:
   - Standardfehler berechnen
   - Grenzen Θ_u und Θ_o bestimmen

Stichprobenumfang bestimmen

1. Bei gegebener Genauigkeit d und Vertrauensniveau γ:
   - σ^2 bekannt: $n \geq (\frac{2c\sigma}{d})^2$
   - Auf nächste ganze Zahl aufrunden
   - c aus entsprechender Verteilung
2. Bei unbekannter Varianz:
   - Vorerhebung durchführen
   - Varianz schätzen
   - t-Verteilung verwenden

Vertrauensintervall für Mittelwert

Gegeben: $n = 25$ Messungen, $\bar{x} = 102$, $s = 4$, $\gamma = 0.95$
1. Verteilungstyp: t-Verteilung (σ^2 unbekannt)
   - $f = 24$ Freiheitsgrade
   - $p = 0.975$
   - $c = t_{(0.975;24)} = 2.064$
2. Grenzen berechnen:
   - $e = 2.064 \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} = 1.652$
   - $[102 - 1.652; 102 + 1.652]$
   - $[100.348; 103.652]$

Schliessende Statistik – Hypothesentests

Einführung

Problemstellung

Ein statistisches Verfahren zur Überprüfung einer Behauptung bzw. Hypothese auf Basis einer Stichprobe.
Die zentrale Frage lautet: Ist es plausibel, die in der Stichprobe beobachteten Abweichungen von der Behauptung als zufällig zu betrachten? Liegen sie 'im Rahmen'?
Typische Anwendungen:

- Überprüfung von Herstellerangaben (z.B. mittlerer Benzinverbrauch)
- Vergleich von Verfahren oder Methoden
- Qualitätskontrolle
- Wirksamkeitsanalysen

Vorgehen bei einem Hypothesentest

Ablauf eines Hypothesentests

1. Nullhypothese H_0 formulieren:
   - Zu überprüfende Behauptung
   - Im Zweifelsfall wird H_0 bevorzugt (Ïm Zweifel für den Angeklagten")
2. Alternativhypothese H_A formulieren:
   - Einseitig: $\mu > \mu_0$ oder $\mu < \mu_0$
   - Zweiseitig: $\mu \neq \mu_0$
3. Testvariable definieren:
   - Standardisierte Form wählen
   - Passende Zeile aus Tabelle wählen
4. Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen:
   - Normalverteilung, t-Verteilung oder χ^2-Verteilung
   - Freiheitsgrade beachten
5. Signifikanzniveau α festlegen:
   - Üblich: $\alpha = 5\%$ oder 1%
6. Kritische Grenzen bestimmen:
   - Einseitig: ein Wert c
   - Zweiseitig: zwei Werte c_u und c_o
7. Testwert berechnen:
   - Stichprobenwerte einsetzen
   - Standardisierung durchführen
8. Testentscheidung treffen:
   - Im Annahmebereich: H_0 wird angenommen
   - Im kritischen Bereich: H_0 wird abgelehnt

Übersicht über verschiedene Parametertests

Fall	Verteilung	Testvariable	Verteilung unter H_0
$\mu = \mu_0$ σ^2 bekannt	Normal	$U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standard-normalverteilung
$\mu = \mu_0$ σ^2 unbekannt	Normal	$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung $f = n-1$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	Normal	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	χ^2-Verteilung $f = n-1$
$p = p_0$	Bernoulli	$U = \frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$	Standard-normalverteilung

Hypothesentests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte

Abhängige Stichproben

Zwei Stichproben heissen voneinander abhängig, wenn:
- Die Stichproben den gleichen Umfang haben
- Jedem Wert der einen Stichprobe genau ein Wert der anderen Stichprobe entspricht und umgekehrt

Beispiele:
- Vorher-Nachher-Messungen
- Paarweise Vergleiche
- Messungen am gleichen Objekt

Testverfahren für zwei Stichproben

1. Abhängige Stichproben:
   - Differenzen bilden: $D_i = X_i - Y_i$
   - Test auf Mittelwert der Differenzen
   - t-Test für eine Stichprobe
2. Unabhängige Stichproben:
   - Beide Stichproben separat betrachten
   - Varianzen gleich oder verschieden?
   - Zweistichproben-t-Test

Mögliche Fehlerquellen

Fehlerarten

	H_0 annehmen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	Richtige Entscheidung	Fehler 1. Art (α)
H_0 falsch	Fehler 2. Art (β)	Richtige Entscheidung

Fehler 1. Art (Produzentenrisiko):
- H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist
- Wahrscheinlichkeit $= \alpha$ (Signifikanzniveau)

Fehler 2. Art (Konsumentenrisiko):
- H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist
- Wahrscheinlichkeit $= \beta$ (abhängig vom wahren Wert)

Zusammenhang:
- Verkleinerung von α führt zu Vergrößerung von β
- Teststärke $1 - \beta$ gibt Wahrscheinlichkeit für richtige Ablehnung an

Allgemeine Bemerkungen

p-Wert

Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, einen mindestens so extremen Testwert zu erhalten wenn H_0 wahr ist.

Interpretation:
- $p \geq \alpha$: H_0 wird angenommen
- $p < \alpha$: H_0 wird abgelehnt
- Je kleiner p, desto stärker die Evidenz gegen H_0

Wichtige Hinweise für Hypothesentests

1. SSignifikant"heißt "nicht zufallsbedingt:
   - Signifikante Unterschiede müssen nicht relevant sein
   - Bei großen Stichproben können kleine Unterschiede signifikant sein
2. Hypothesentests erklären keine Unterschiede:
   - Nur Feststellung der Signifikanz
   - Keine Erklärung der Ursachen
   - Keine Kontrolle des Studiendesigns
3. Zufallsstichproben sind essentiell:
   - Repräsentativität wichtig
   - "PraktischeSStichproben können verzerren
4. Vergleich zu Vertrauensintervallen:
   - Tests: Ausgangspunkt ist behaupteter Wert
   - Intervalle: Ausgangspunkt ist Schätzwert