# Analysis 2

Jil Zerndt
May 2024

## Wichtige Ableitungen, Stammfunktionen und Grenzwerte

### Integraltabelle

| Ableitung \| f'(x) | Funktion \| f(x) | Integral \| F(x) |
|---|---|---|
| $0$ | $C$ | $x+C$ |
| $1$ | $x$ | $\frac{1}{2}x^2+C$ |
| $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+C$ |
| $ax^{a-1}$ | $x^a \; with \; a \in \mathbb{R}$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$ |
| $x^x\cdot(1+\ln x) \quad x>0$ | $x^x$ | |
| $(x^x)^x\,(x+2x\ln(x)) \quad x>0$ | $x^{(x^x)}$ | |
| $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ |
| $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ | $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$ |
| $\ln(a)\cdot a^x$ | $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln(a)}+C$ |
| $a^{bx}\cdot c\ln a$ | $a^{bx}$ | $\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x+C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $x\ln(x)-x+C$ |
| $\frac{1}{x\ln(a)}$ | $\log_a(x)$ | $x\log_a(x)-\frac{x}{\ln(a)}+C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $-\cos(x)+C$ |
| $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\sin(x)+C$ |
| $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$ |
| $-1-\cot^2(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $\cot(x)$ | $\ln(\sin(x))+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)$ | $x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos(x)$ | $x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ | $x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ |
| $\sin^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$ | $\sin(x)\cos(x)+C$ |
| $\cos^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$ | $\cos(x)\sin(x)+C$ |
| $\tan^2(x)$ | $\tan(x)-x$ | $\tan(x)+C$ |
| $\cot^2(x)$ | $-\cot(x)-x$ | $\cot(x)+C$ |
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln\lvert f(x)\rvert$ | $x\cdot(\ln\lvert x\rvert-1)+C$ |
| $\frac{1}{x}(\ln x)^n$ | $\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \quad n\neq-1$ | $\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2 \quad n\neq 0+C$ |
| $\frac{1}{x\ln x}$ | $\ln\lvert\ln x\rvert \quad x>0, x\neq 1$ | $\frac{1}{b\ln a}a^{bx}+C$ |
| $x\cdot e^{cx}$ | $\frac{cx-1}{c^2}\cdot e^{cx}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right) \quad n\neq-1+C$ |
| $x^n\ln x$ | $\ln(\cosh(x))$ | $\ln\lvert f(x)\rvert+C$ |
| $\sin(x)\cos(x)$ | $\frac{\sin^2(x)}{2}$ | |
| $\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ | $\frac{1}{f(x)}$ | |
| $(ax+b)^n$ | $\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$ | |

### Trick Gerade/Ungerade bei Integralen

Für ungerade Funktionen gilt $\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

- Summe/Komposition: ungerade und ungerade $\to$ ungerade
- Produkt/Quotient: ungerade und gerade $\to$ ungerade
- Ableitung: gerade $\longrightarrow$ ungerade

Bsp ungerade: $f(x)=-x$, $x$, $sin(x)$, $tan(x)$, Polynomfunktionen mit ungeradem Exponent
gerade: 1, $x^2$, $cos(x)$, $sec(x)$, Polynomf. mit geradem Exponent
gerade und ungerade!! $f(x)=0$

### Ableitungsregeln

- Summenregel

$$f(x)=g(x)+h(x)\to f'(x)=g'(x)+h'(x)$$

- Differenzregel

$$f(x)=g(x)-h(x)\to f'(x)=g'(x)-h'(x)$$

- Faktorregel

$$f(x)=a\cdot g(x)\to f'(x)=a\cdot g'(x)$$

- Produktregel

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)\to f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

- Quotientenregel

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\to f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

- Kettenregel

$$f(x)=g(h(x))\to f'(x)=g'(h(x))\cdot h'$$

- Potenz/Logarithmus

$$(a^{f(x)})'=ln(a)\cdot a^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$(f(x)^{g(x)})'=f(x)^{g(x)}\cdot(ln(f(x))\cdot g(x))'=f(x)^{g(x)}\cdot\left(ln(f(x))\cdot g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

### Differentialrechnung Tricks

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an einer Stelle x0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (Linearisierung): $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

### Integralregeln

- Addition/Subtraktion:

$$\int f(x-k)dx=F(x-k)+C$$

- Multiplikation:

$$\int f(x\cdot k)dx=\frac{1}{k}F(x\cdot k)+C$$

- Skalarmultiplikation:

$$\int \lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)dx=\lambda_1 F(x)+\lambda_2 G(x)+C$$

### Grenzwert Berechnen Tricks

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^6-n^3}{7n^6+n^5-3}\cdot\frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}}=\frac{2}{7}$

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent) $\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n-1}+2^{n+1}}{7^n+5}\cdot\frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}}=\frac{1}{7}$
- "$\infty-\infty$ "Trick: Erweitern mit $\sqrt{\cdots}+\sqrt{\cdots}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=1/2$

- e-like...: Trick: umformen zu $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\Rightarrow e^a$

### Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$
- Sei $f\leq g$, so ist $\lim_{x\to x_0}f(x)\leq\lim_{x\to x_0}g(x)$
- Falls $g_1\leq f\leq g_2$ und $\lim_{x\to x_0}g_1(x)=\lim_{x\to x_0}g_2(x)$, so existiert $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g_1(x)$

### Spezielle Grenzwerte

$n\to\infty$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{n}\to 0$ | $e^n\to\infty$ | $\frac{1}{n^k}\to 0 \quad \forall k\in\mathbb{R}^+$ |
| $c+\frac{1}{n}\to c$ | $e^{-n}\to 0$ | $(1+n)^{\frac{1}{n}}\to 1$ |
| $\frac{c\cdot n}{c^n}\to 0$ | $\frac{e^n}{n^c}\to\infty$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^c\to 1$ |
| $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}\to 1$ | $\frac{\sin n}{n}\to 0$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$ |
| $\sqrt[n]{n!}\to\infty$ | $\arctan n\to\frac{\pi}{2}$ | $\left(1+\frac{c}{n}\right)^n\to e^c$ |
| $\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\to\frac{1}{e}$ | $\ln n\to\infty$ | $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{e}$ |
| $\frac{c^n}{n!}\to 0$ | $\frac{\ln n}{n}\to 0$ | $\left(\frac{n}{n+c}\right)^n\to e^{-c}$ |
| $\frac{n^n}{n!}\to\infty$ | $\frac{\log n}{n-1}\to 1$ | |

$$n^c\cdot q^n\to 0 \quad \forall c\in\mathbb{Z}, 0\leq q\leq 1$$

$$n(\sqrt[n]{c}-1)\to\ln c \quad \forall c>0$$

$n\to 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\ln n\to-\infty$ | $\frac{\sin n}{n}\to 1$ | $\frac{1}{\arctan n}\to 1$ |
| $n\log n\to 0$ | $\frac{\cos(n)-1}{n}\to 0$ | $\frac{e^n-1}{n}\to 1$ |
| $\frac{\log 1-n}{n}\to -1$ | $\frac{1}{\cos n}\to 1$ | $\frac{e^c n-1}{n}\to c$ |
| $\frac{c^n-1}{n}\to\ln c, \forall c>0$ | $\frac{1-\cos n}{n^2}\to\frac{1}{2}$ | $(1+n)^{\frac{1}{n}}\to e$ |

### Reihen - Funktionen

$\sum_{k=1}^n k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^n 2k-1=n^2$

$\sum_{k=1}^n 2k=n(n+1)$

$\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+2)}{6}$

$\sum_{k=1}^n(2k-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$

$\sum_{k=1}^n k^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

# Integralrechnen

### Integrale von Linearkombinationen
Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_2 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

### Integral von verschobenen Funktionene
Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimte integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

### Integrale von gestreckten Funktionen
Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

### Strategie zur Berechnung von Integralen
**Bruchform:**
1. Vereinfache, so dass ein einfacher Nenner entsteht
2. Partialbruchzerlegung
3. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen $\Rightarrow \sqrt{u}$ oder $log|u|$

**Produktform:**
1. Partielle Integration anwenden (evtl. mehrmals)
2. Kettenregel verwenden

**Potenzen:**
$\int_a^b f(x)^c dx$ umformen in $\int_a^b (f(x)^c \cdot 1) dx$ oder $\int_a^b (f(x)^{c-1} \cdot f(x)) dx$ um dann partielle Integration anzuwenden

**Exponentenform:**
$e/\log$ Trick verwenden, wenn Variabel im Exponenten ist.

**Produkt mit $e, \sin, \cos$**
Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei sin, cos immer $g'$ und immer $f$ ist.

**Summe im Integral:**
Summe aus dem Integral herausziehen (dafür muss die Reihe gleichmässig konvergieren)

Symmetrie ungerader Funktionen beachten: (alls Funktion ungerade ist und symmetrische Grenzen hat) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^7 \cos x}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}x = 0$

## Integrationsmethoden

### Partielle Integration

**Partielle Integration** Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int \Big(f(x) \cdot g'(x)\Big)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int \Big(f'(x) \cdot g(x)\Big)\, dx$$

$\uparrow$ 1 falls arc- oder log-Funktion vorkommt, $x^n$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$

$\downarrow x^n, \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x),$

**Prioritäten** $f(x)$ nach folgender Priorität auswählen:
1. $\log_e, \log_a$ 2. $\arcsin, \arccos$ 3. $x^2, 5x^3$ 4. $\sin, \cos, \tan$ 5. $e^x, 5a^x$

### Substitution

**Substitution**
Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

$$\int_{g(b)}^{g(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=g(t)}$$

**Nützliche Regeln** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.
1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten $a+c$, $b+c$ in $I$ enthalten ist. Dann gilt
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+c)\,\mathrm{d}t$$
2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $ac$, $bc$ in $I$ enthalten ist. Dann gilt
$$\int_a^b f(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Nützliche Substitutionen**
- $\log(x)$ subst: $t = \log(x), x = e^t, dx = e^t dt$
- für gerade $n : \cos^n(x), \sin^n(x), \tan(x)$
  Sub: $t = \tan(x)$, $dy = \frac{1}{1+t^2}dt, \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$
- für ungerade $n : \cos^n(x), \sin^n(x)$,
  Sub: $t = \tan(x/2)$, $dy = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\int \sqrt{1-x^2}dx$ sub: $x = \sin(x)$ oder $\cos(x)$
- $\int \sqrt{1+x^2}dx$ sub: $x = \sinh(x)$

### Substitution unbestimmtes Integral
- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen: $u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int r(u)\mathrm{d}u$$
- Berechnen des Integrals mit Variable u:
$$\int r(u)\mathrm{d}u = R(u) + C$$
- Rücksubstitution: $R(u) + C = R(g(x)) + C$

Bsp. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$ Substitution mit $t = \sqrt{9-x^2}$.

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-t^2} \Rightarrow x' = \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-t \cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -dt = -t$ Rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

### Substitution bestimmtes Integral
- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen: $u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u$$
- Berechnen des Integrals mit Variable u:
$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u = R(u) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$
- Rücksubstitution:
$$R(u) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)} = R(g(x)) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

# Partialbruchzerlegung

## Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$Beispiel\ Integral: \int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

- Zuordnen der Nullstellen $x_k$vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \dots$, $1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \dots$$

$$Beispiel: \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$Beispiel: 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x = 1\ bzw.\ x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Bemerkung
Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\rightarrow deg(r(x)) \geq deg(s(x))$ gilt: Zuerst $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = n(x) + r(x)$$

wobei $n(x)$ ein Polynom und $r(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{\tilde{t}(x)}$ eine echt gebrochene-rationale Funktion ist, d.h. $deg(\tilde{s}(x)) < deg(\tilde{t}(x))$

Berechne $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x$ mittels PBZ.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow A + B + C = 0 \quad A + 3B - 2C = 1 \quad -6A = 1$$

Daraus folgt: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{10}$, $C = -\frac{2}{15}$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{6}\log|x| + \frac{3}{10}\log|x-2| - \frac{2}{5}\log|x+3| + C$$

# Spezifische Aufgabenstellungen

**Integrieren von Flächen** Nullstellen bestimmen: => Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

## Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ = Nullstellen

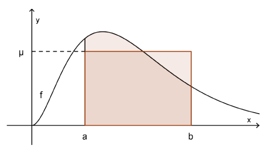
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|$$

## Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ = Schnittpunkte

$$\left|\int_a^{x_1} (f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))\right| + \dots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x)-g(x))\right|$$

## Mittelwert einer Funktion




Definition des Mittelwert $\mu$ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das
- eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechteks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

## Rotationsvolumen

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

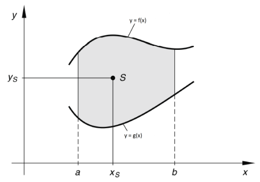
## Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

## Mantelfläche

$$M = 2\pi\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

## Schwerpunkt ebener Fläche




Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:

$$xs = \frac{1}{A}\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

$$ys = \frac{1}{2A}\int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2)\mathrm{d}x$$

Berechnen von $A$ ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$$

## Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen $V$, geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V}\int_a^b x \cdot f(x)^2\mathrm{d}x$$

## Uneigentliche Integrale

**Definition Uneigentliches Integral** Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Type:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a,b])$$

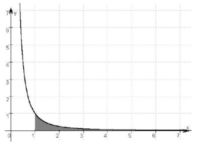
### Uneigentliche Integrale erster Art

**Definition**

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Graphische Darstellung:



**Berechnung**

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x\right)$$

**Variante 1**

- Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Rechnen mit endlichem Invervall $[\lambda, b]$ mit $\lambda \leq b$ anstelle von unendlichem Integral $(-\infty, b]$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $(-\infty, b]$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

**Variante 2**

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Einfügen einer künslichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

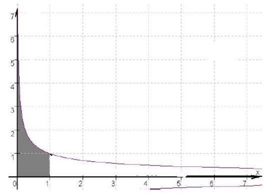
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

### Uneigentliche Integrale zweiter Art

**Definition**

Uneigentlich Integrale auf Interval $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \to \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$ Graphische Darstellung:



**Berechnung**

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wen ein Pol existiert.

# Taylorrreihen

**Potenzreihe** undendliche Reihe vom Typ:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe

Allgemein kann eine Potenzreihe mit einer Verschiebung von $x_0$ beschrieben werden $\Rightarrow$ Potenzreihe mit Zentrum $x_0$:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

**Taylorreihe** oder Taylorentwicklung einer Funktion $y = f(x)$ and der Stelle $x_0$ ist die Potenzreihe:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

welche die gleiche Ableitung an der Stelle $x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ hat wie die Funktion $f(x)$

**Taylorpolynom** ist eine Taylorreihe $t_f(x)$ welche nach $n$-ter Ordnung abgebrochen wird. Somit erhällt man das Taylorpolynom $n$-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x_0$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Bemerkung: Die Tangente der Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle $x_0$ ist exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x_0$

**Vorgehen Berechnen Taylorreihe** Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $t(x)$ an der Stelle $x_0$ ist:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

**Formel für Taylorkoeffizienten** Formel für $k$-ten Taylorkoeffizientn der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

**Taylorreihen wichtiger Funktionen**

$$f(x) = e^x \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

---

$$f(x) = \sin(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

---

$$f(x) = \cos(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

---

$$f(x) = \ln(x) \text{ mit } x_0 = 1,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x - 1)^k = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

## Symmetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

**Symmetrie von Funktionen Repetition**

- Gerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \to$ Funktion ist achsensymetrisch bzgl. $y$-Achse
- Ungerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \to$ Funktion ist punktsymetrisch bzgl. des Ursprungs

**Symmetrie von Potenzreihen** Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

**Symmetrie von Taylorreihen**

- Falls die Funktion eine gerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit geraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Falls die Funktion eine ungerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungeraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

## Binomialkoeffizienten

**Taylorreihen mit Binomialkoeffizienten bestimmen**

- Ziel: Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. Funktionen vom Typ $f(x = x^\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchen der Funktion bei $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$
- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \le k \le n)$$

- In diesem fall ist die binomische Formel auch die Taylorreihe, es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$:
  Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

  Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

  Auch bekannt als Binomialreihe

## Konvergenz von Potenzreihen

**Konvergenzradius**

- Der Konvergenzradius $\rho$ einer Potenzreih $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit Folgenden Eigenschaften:
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$
- Es existieren folgende Extremfälle:
  - Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
  - Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Konvergenzradius Formel**

Für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

**Konvergenzbereich Formel**
Der Konvergenzbereich in dem die Approximation der Funktion gilt ist definiert durch:

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

## Bernoulli- de l'Hospital

**Regel von Bernoulli- de l'Hospital** Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x_0$ stetig differenzierbar sind aber der Grenzwert auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, kann der Limes der Ableitung beider Funktionen ausgewerted werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dies kann beliebig oft Wiederholt werden, es gibt jedoch Fälle wo die Regel versagt, dann müssen andere Methoden verwendet werden.

**Varianten von l'Hospital**

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

## Differentialgleichungen

**Differentialgleichung** $n$-ter Ordnung ist ein Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

- Eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur $n$-ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man sie explizit, ansonsten implizit. Oft können implizite DGL durch einfaches Umformen in explizite DGL umgewandelt werden.

**Arten von DGL**

- **Separierbar:** falls $F(x,y)$ als Produkt eines $x$- und eines $y$-Anteils geschrieben werden kann, d.h. es hat die Form:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

- **Autonom:** falls $F(x,y)$ nur von $y$ abhängt, d.h. es hat die Form:

$$y' = f(y)$$

- **Linear:** falls die Variabel welche abgeleitet wird, nur in der ersten Potenz vorkommt und nicht multipliziert miteinander oder mit der unabhängigen Variabel wird.

**Lösen von Separierbaren DGL**

$$\text{DGL: } \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$\rightarrow$ Falls $h(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL.

- Trennung aller $x$- und $y$-Terme: $\frac{1}{h(y)} \cdot \mathrm{d}y = g(x) \cdot \mathrm{d}x$
- Integration auf beiden Seiten: $\int \frac{1}{h(y)} \mathrm{d}y = \int g(x) \mathrm{d}x$

Auflösen nach $y$, Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \mathrm{d}t$$

**Homogenität von DGL**

- Homogene DGL: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
- Inhomogene DGL: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = g(x)$
  - $g(x)$ ist die Störfunktion

**Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL** $y' + f(x)y = g(x)$ ist gegeben durch:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} \mathrm{d}x$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

**Anfangswertproblem** DGL mit Anfangsbedingung

Anfangswertproblem $n$-ter Ordnung:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) &= 0, \ (x, y, \ldots, y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{n-1}(x_0) &= y_{n-1} \end{cases}$$

Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' &= G(x,y), \quad (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

- Allgemeine Lösung: Menge aller Lösungen einer DGL
- Spezielle/partikuläre Lösung: Lösung eines Anfangswertproblems

**Lösung von Anfangswertproblemen mit seperiarbaren DGL**

- Sind $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$, hat das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

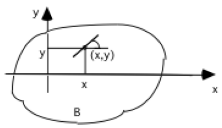
  genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \mathrm{d}t$$

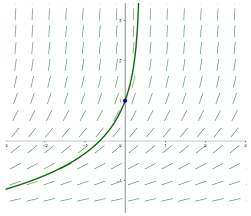
  berechnet werden und nach $y$ aufgelöst werden.

### Richtungsfeder

**Richtungsfeld** geometrisches Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. DGL der Form: $y' = f(x,y)$



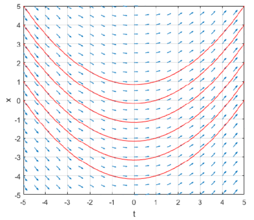

$f(x,y)$ gibt also die Steigung der Lösungskurve am Punkt $(x,y)$ an



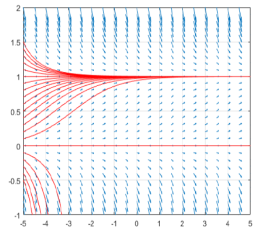
Jeder Punkt ist somit die Tangente einer spezifischen Lösungskurve

**Richtungsfelder von Speziellen DGL**

Unbestimmtes Integral: $y' = f(x)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von $y$ die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine verschiebung in $y$-Richtung durch die Konstante $C$.



Autonome DGL:$y' = f(y)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von $x$ die Verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in $x$-Richtung in einander über.



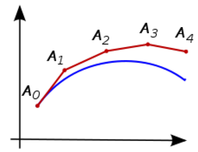
### Numerische Verfahren

**Eulerverfahren** Gleichung einer beliebigen Geraden mit Steigung $m$ am Punkt $(x_k, y_k)$:

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$

DGL am Punkt $(x_k, y_k)$:

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$




- Für $k = 0$ und $x = x_0$:

$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

- Algorithmus für beliebige $k$:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

Problem: Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls berücksichtigt!
$\Rightarrow$ Lösung: Verbesserte numerische Verfahren!

## Sonstige Formeln

**Mitternachtsformel** $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

**Polynomdivision**
$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ $\quad P, q, S, r$ Polynome
**!** Vorzeichen von Nullstellen umdrehen.

$$\begin{array}{ll}
\left(x^3 - 2x^2 - 5x - 6\right) : (x-1) = x^2 - x - 6 & \mid x^3 : x = x^2 \\
-\left(x^3 - x^2\right) & \mid -x^2 : x = -x \\
-x^2 - 5x & \\
-\left(x^2 - x\right) & \mid -6x : x = -6 \\
\hline
-(-6x+6) &
\end{array}$$

Eine Polynomfunktion vom Grad $n$ hat höchstens $n$ reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

**Kardinalität**
- X, Y **gleichmächtig**, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.
- X **endlich**, falls entweder $X = \emptyset$ ($\operatorname{card} X = 0$) oder $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass $X$ und $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($\operatorname{card} X = n$) gleichmächtig sind.
- X **abzählbar**, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

**Beschränktheit** $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.
- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq c$ (*A nach oben beschränkt*).
- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **untere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \geq c$ (*A nach unten beschränkt*).
- $A$ heisst *beschränkt*, wenn nach oben und unten beschränkt.
- **Maximum** von $A$ falls $m \in A$ und $m$ obere Schranke.
- **Minimum** von $A$ falls $m \in A$ und $m$ untere Schranke.

**Intervalle** Ein **abgeschlossenes Intervall** ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form
- Abgeschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Offen: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Halboffen: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- Unendlich: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

**Supremum und Infimum** $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$
(i) $A$ nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von $A$: $c := \sup A$. Das **Supremum** von $A$.
(ii) $A$ nach unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste untere Schranke von $A$: $c := \inf A$. Das **Infimum** von $A$.

Vereinfacht formuliert: Für ein abgeschlossenes, halboffenes oder offenes Intervall $[a, b], [a, b), (a, b]$ oder $(a, b)$ gilt $inf = a$, $sup = b$ (solange $a, b \neq \infty$)

**Monotonie**
1. $(a_n)_{n\geq1}$ **monoton wachsend** falls: $\quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$
2. $(a_n)_{n\geq1}$ **monoton fallend** falls: $\quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$

**Monotonie zeigen**
- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend (bzw. umgekehrt fallend)
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0$ dann monoton wachsend

## Trigonometrische Funktionen

ungerade
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots \quad \text{stetig}$$
gerade
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \quad \text{stetig}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\pi$: kleinste strikt positive Nullstelle von sin.

| Grad | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $\sin(\varphi)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos(\varphi)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\tan(\varphi)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | -$\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**Eigenschaften sin/cos**
1. $\exp ix = \cos(x) + i\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$
2. $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{C}$
3. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
4. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
5. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$
6. $\sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

**Winkelverdopplung**
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

**Potenz der Winkelfunktion**
$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

**Eigenschaften mit $\pi$**
1. $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
3. $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

**Nullstellen von trigonometrischen Funktionen**
1. Nullstellen Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in ]2k\pi,\ (2k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$
   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ](2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$
2. Nullstellen Cosinus $= \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
   $\cos(x) > 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) < 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$

Für $\tan(x)$ gilt $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ $\qquad$ Für $\cot(x)$ gilt $x \notin \pi\mathbb{Z}$

## Relle Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Eigenschaften** $\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Aber nicht: $\exp(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\exp(-x)\exp(x) &= 1 \\
\exp(x) &> 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\
\exp(x) &> 1 \qquad \forall x > 0 \\
\exp(a+b) &= \exp(a) \cdot \exp(b) \\
\exp(a-b) &= \exp(a) \div \exp(b)
\end{aligned}$$

$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$

$\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y)\exp(z - y)$
$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$

$$\begin{aligned}
\exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b) \\
\exp(\ln a)\exp(\ln b) &= ab = \exp(\ln ab) \\
\exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln ab) \\
\ln a + \ln b &= \ln(ab)
\end{aligned}$$

$x^a := \exp(a \ln x)$

## Logarithmen

**Rechnen mit Logarithmen**
1. Für $a > 0$ ist $]0, \infty[ \to ]0 + \infty[ \quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für $a < 0$ ist $]0, \infty[ \to ]0 + \infty[ \quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
3. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in ]0 + \infty[$
4. $\ln(a \div b) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in ]0 + \infty[$
5. $\ln(x^a) = a\ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
6. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
7. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

Im Allgemeinen gilt: $log_b(a) = \frac{ln(a)}{ln(b)}$

**ln(1 + x)** $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ für $|x| < 1$

## Werte von log

| | 0 | 1 | 2 | $e$ | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ln | $-\infty$ | 0 | 0.693 | 1 | 1.09 | 1.609 | 2.303 |
| $\log_2$ | $-\infty$ | 0 | 1 | 1.443 | 1.585 | 2.321 | 3.321 |
| $\log_{10}$ | $-\infty$ | 0 | 0.301 | 0.434 | 0.477 | 0.699 | 1 |