Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung:

seinen Ort (Vektor $\vec{r}$), seine Geschwindigkeit ($\vec{v}$) und seine Beschleunigung ($\vec{a}$)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

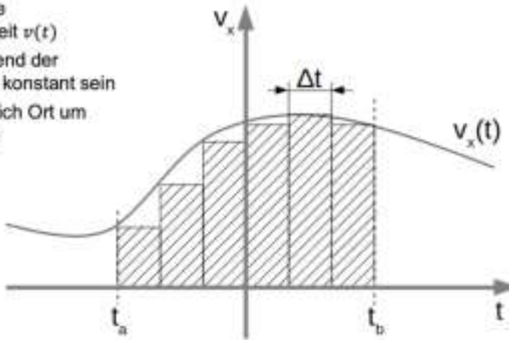
$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt \quad \vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

Geschwindigkeit → Weg: Flächen summieren:

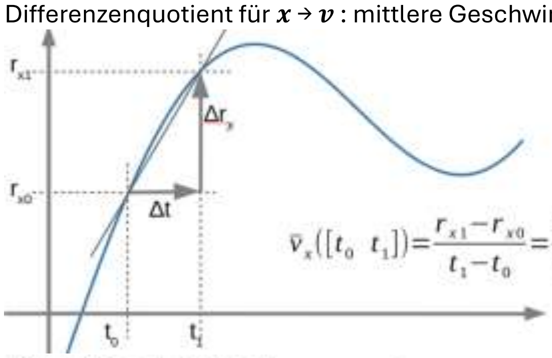
Wir kennen die Geschwindigkeit $v(t)$

$v(t)$ soll während der kurzen Zeit Δt konstant sein

Dann ändert sich Ort um $\Delta r = v(t) \cdot \Delta t$



Differenzenquotient für $x \to v$: mittlere Geschwindigkeit



$$\bar{v}_x([t_0 \quad t_1]) = \frac{r_{x1} - r_{x0}}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$$

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v}_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$

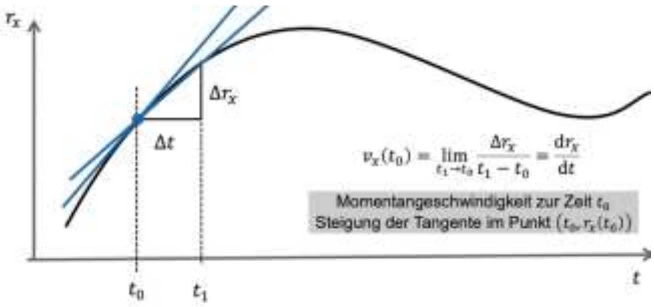
Mittlere Beschleunigung: $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$

Geschwindigkeit ist weg pro Zeit:

$[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{m}{s}]$

Momentangeschwindigkeit zur Zeit t

0: $\Delta t \to 0$:



Komponentenweise:

$$\vec{v}(t_0) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}r_x(t_0), \frac{d}{dt}r_y(t_0), \frac{d}{dt}r_z(t_0)\right)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Einheitsvektor(immer Länge 1):

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Aus der Geschwindigkeit die Position berechnen

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt$$

berechnet die **Position** (den zurückgelegten Weg) aus der **Geschwindigkeit.**

$$\vec{r}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) \cdot dt$$

Aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit berechnen:

$$v(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) \cdot dt$$

berechnet die **Geschwindigkeit** aus der **Beschleunigung.**

$$\vec{v}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) \cdot dt$$

Unabhängigkeitsprinzip der Bewegung (Superposition):

- Das Unabhängigkeitsprinzip gilt in 3D: x, y und z Bewegungen beeinflussen sich nicht und können separat betrachtet werden.
- x+z+y= Gesamtergebnis der Bewegung

Eulerwinkel:

Euler-Winkel sind ein Satz aus drei Winkeln φ (pitch), θ (yaw) und ψ (roll), welche die Drehwinkel entlang der drei Raumachsen angeben.

Wortmodell (Translation)

$$Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}, v = \frac{r}{t}$$

Wortmodell (Rotation)

$$Winkelgeschwindigkeit = \frac{Winkel}{Zeit}, \omega = \frac{\varphi}{t}$$

Damit lässt sich der Winkel als Funktion der Zeit ausdrücken: $\boxed{\varphi(t) = \omega \cdot t}$

Somit wird

$h(\varphi) = R \cdot \sin(\varphi) + \sqrt{L^2 - R^2 \cos^2(\varphi)}$

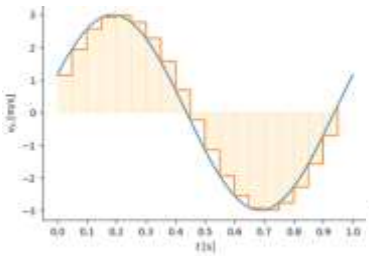
$$h(t) = R\sin(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\cos(\omega t)}$$

Konstante Geschwindigkeit(Geschwindigkeit mal Zeit):

$$v_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta r_x = v_x \cdot \Delta t$$

Tot zurückgelegte Strecke:

$$r_{x,t_1 \to t_2} = \sum_{i=1}^{N} v_x(t_i) \cdot \Delta t$$



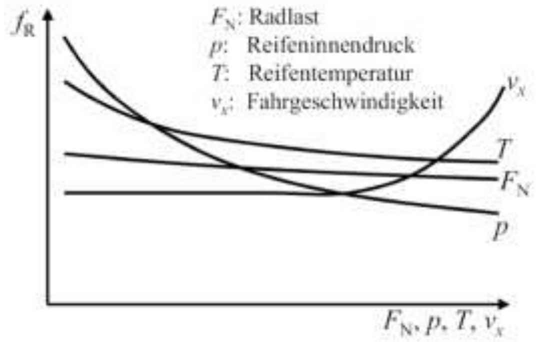
$$r_{x,0\to 1s} = \sum_{i=1}^{19} v_x(t_i) \cdot \Delta t$$

Frequenz:

Bahngeschwindigkeit:

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, mit $\omega = 2\pi f$, Einheiten: $f[\mathrm{Hz}]$, $T[\mathrm{s}]$, $\omega[\mathrm{rad/s}]$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$,	$v = \omega \cdot r$ Einheiten: $v[\mathrm{m/s}]$, $\omega[\mathrm{rad/s}]$, $r[\mathrm{m}]$
Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Einheiten: $\omega[\mathrm{rad/s}]$, $\varphi[\mathrm{rad}]$, $t[\mathrm{s}]$, $T[\mathrm{s}]$, $f[\mathrm{Hz}]$	**Zentripetalbeschleunigung (Radialbeschleunigung)** $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$ Einheiten: $a_r[\mathrm{m/s^2}]$, $v[\mathrm{m/s}]$, $r[\mathrm{m}]$, $\omega[\mathrm{rad/s}]$
Zentripetalkraft: $F_r = m \cdot a_r = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$ Einheiten: $F_r[\mathrm{N}]$, $m[\mathrm{kg}]$, $a_r[\mathrm{m/s^2}]$	**Ortsvektor** $\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$, $r[\mathrm{m}]$, $\omega[\mathrm{rad/s}]$, $t[\mathrm{s}]$
Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$, $v[\mathrm{m/s}]$ → Die Geschwindigkeit steht immer senkrecht auf dem Ortsvektor.	**Beschleunigungsvektor** $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$, $a[\mathrm{m/s^2}]$ → Die Beschleunigung zeigt immer zur Mitte (entgegengesetzt zum Ortsvektor). $a_{normal} = a_{zentripetal} = \omega^2 r = \frac{v_{Bahn}^2}{r}$
Gravitationskraft $F_g(R) = G\frac{m_{\mathrm{Erde}} \cdot m_{\mathrm{Sat}}}{R^2}$ Einheiten: $F_g[\mathrm{N}]$, $G[\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}]$, $m_{\mathrm{Erde}}, m_{\mathrm{Sat}}[\mathrm{kg}]$, $R[\mathrm{m}]$	**Bahngeschwindigkeit des Satelliten:** $v = \sqrt{\frac{G m_{\mathrm{Erde}}}{R}}$ Einheiten: $v[\mathrm{m/s}]$, $G[\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}]$, $m_{\mathrm{Erde}}[\mathrm{kg}]$, $R[\mathrm{m}]$
Zentripetalkraft $F_z = m_{\mathrm{Sat}} \cdot \frac{v^2}{R}$ Einheiten: $F_z[\mathrm{N}]$, $m_{\mathrm{Sat}}[\mathrm{kg}]$, $v[\mathrm{m/s}]$, $R[\mathrm{m}]$	**Zentripetalbeschleunigung** $a_z = \frac{v^2}{R}$ Einheiten: $a_z[\mathrm{m/s^2}]$, $v[\mathrm{m/s}]$, $R[\mathrm{m}]$
Rotation (Winkelgeschwindigkeit): $\omega = \frac{\varphi}{t}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ ω [rad/s], φ [rad], t, T [s], f [Hz]	**Umfangs- oder Bahngeschwindigkeit** $v_{\mathrm{Bahn}} = v_{\mathrm{Umfang}} = \omega r$ v_{Bahn} [m/s], ω [rad/s], r [m]
Normale, radiale oder Zentripetalbeschleunigung $a_{\mathrm{Zentripetal}} = \omega^2 r = \frac{v_{\mathrm{Bahn}}^2}{r}$ $a_{\mathrm{Zentripetal}}$ [$\mathrm{m/s^2}$], ω [rad/s], v_{Bahn} [m/s], r [m]	**Radial- oder Zentripetalkraft** $F_{\mathrm{Zentripetal}} = m \cdot a_{\mathrm{Zentripetal}}$ $F_{\mathrm{Zentripetal}}$ [N], m [kg], $a_{\mathrm{Zentripetal}}$ [$\mathrm{m/s^2}$]
Bewegungsgleichungen für gleichmäßig beschleunigte Bewegung $v(t) = v(0) + a \cdot t$ $v(t), v(0)$ [m/s], a [$\mathrm{m/s^2}$], t [s] $x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{1}{2}at^2$ $x(t), x(0)$ [m], $v(0)$ [m/s], a [$\mathrm{m/s^2}$], t [s]	**Gravitationskraft** $F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ F_g [N], $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}}$, m_1, m_2 [kg], r [m]
Elektrostatische Kraft (Coulomb-Kraft) $F_C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ F_C [N], $\varepsilon_0 = 8.859 \times 10^{-12} \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{Nm^2}}$, q_1, q_2 [C], r [m]	**Hookesches Gesetz (Federkraft)** $F = k_{\mathrm{Feder}} \cdot \Delta l$ F [N], k_{Feder} [N/m], $\Delta l = l - l_0$ [m]
Haftreibung $F_{\mathrm{HR}} = \mu_H \cdot F_N$ F_{HR} [N], μ_H [-], F_N [N]	**Gleitreibung** $F_{\mathrm{GR}} = \mu_G \cdot F_N$ F_{GR} [N], μ_G [-], F_N [N]
Laminare viskose Reibung (Dämpfergesetz) $F = k_{\mathrm{Dämpfer}} \cdot v$ F [N], $k_{\mathrm{Dämpfer}}$ [Ns/m], v [m/s]	**Turbulente viskose Reibung (Luftwiderstand)** $F_L = \frac{1}{2}c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$ F_L [N], c_w [-], ρ [$\mathrm{kg/m^3}$], A [$\mathrm{m^2}$], v [m/s]

Grundlagen der Kraftfahrzeugtechnik:



Kräfte bei der Kurvenfahrt

Vertikal	$F_N - F_G = m \cdot 0$ $[N] - [N] = [kg] \cdot [m/s^2] \cdot 0$ Da die rechte Seite 0 ist, folgt: $F_N = F_G$
Horizontal	$F_{HR} = m \cdot a_{hor} = F_{Res}$ $[N] = [kg] \cdot [m/s^2] = [N]$ Falls die resultierende Kraft eine Zentripetalkraft ist: $F_{Res} = F_{ZP} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ $[N] = [kg] \cdot \frac{[m^2/s^2]}{[m]}$

Äquivalenzprinzip

Schwach: Alle Körper fallen gleich schnell, unabhängig von ihrer Masse oder Zusammensetzung.

Stark: Alle physikalischen Gesetze sind in frei fallenden Systemen dieselben wie in der speziellen Relativitätstheorie, unabhängig von der Gravitation.

Trägheitskraft

$$\vec{F}_t = -m \cdot \vec{a}_{system}$$

$$F_t\,[N], \quad m\,[kg], \quad a_{system}\,[m/s^2]$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F_{ZF}} = m\omega^2 r \frac{\vec{r}}{r} = m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$F_{ZF}\,[N], \quad m\,[kg], \quad \omega\,[rad/s], \quad r\,[m], \quad v\,[m/s]$$

Corioliskraft

$$\vec{F_C} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

$$F_C\,[N], \quad m\,[kg], \quad \omega\,[rad/s], \quad v\,[m/s]$$

Trägheitsfeld

$$\vec{g_t} = -\vec{a}_{system}$$

$$g_t\,[m/s^2], \quad a_{system}\,[m/s^2]$$

$$\vec{g}_{lokal} = \vec{g} + \vec{g_t}$$

$$g_{lokal}\,[m/s^2], \quad g\,[m/s^2], \quad g_t\,[m/s^2]$$

Schwaches Äquivalenzprinzip

$$\underbrace{a}_{\mathrm{m/s^2}} = \frac{\overbrace{m_{\text{Schwere}}}^{\mathrm{kg}}}{\underbrace{m_{\text{träge}}}_{\mathrm{kg}}} \cdot \underbrace{g}_{\mathrm{m/s^2}}$$

Der Impuls $p(t)$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[\vec{p}] = \underbrace{\mathrm{kg}}_{m} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}_{\vec{v}} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Ns}$$

Impulserhaltung

$$p_{\text{ges}}(t) = p_1(t) + p_2(t)$$

$$[p_{\text{ges}}] = [p_1] = [p_2] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Ns}$$

Gemeinsame Geschwindigkeit = gesamter Impuls geteilt durch gesamte Masse:

$$\underbrace{[\mathrm{v_{gem}}]}_{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\overbrace{[\mathrm{p_{ges}}]}^{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}{\underbrace{[\mathrm{m_{ges}}]}_{\mathrm{kg}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Gemeinsame Geschwindigkeit = gesamter Impuls geteilt durch gesamte Masse:

$$v_{\text{gem}} = \frac{p_{\text{ges}}}{m_{\text{ges}}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$p_{\text{ges}} = \mathrm{kg \cdot m/s}, \quad m_{\text{ges}}, m_1, m_2 = \mathrm{kg}, \quad v_1, v_2, v_{\text{gem}} = \mathrm{m/s}$$

Impuls der einzelnen Körper:

$$p_1 = m_1 v_1 \quad \text{und} \quad p_2 = m_2 v_2$$

$$p_1, p_2 = \mathrm{kg \cdot m/s}, \quad m_1, m_2 = \mathrm{kg}, \quad v_1, v_2 = \mathrm{m/s}$$

Impuls beider Körper (= gesamtes System):

$$p_{\text{ges}} = p_1 + p_2$$

$$p_{\text{ges}} = \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Arbeit (Joule): $[E] = J$

$$1\,J = 1\,N \cdot 1\,m = 1\,Nm = 1\,W\,s$$

Potenzielle Energie:

$$\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = \mathrm{J}, \quad m = \mathrm{kg}, \quad g = \mathrm{m/s^2}, \quad \Delta h = \mathrm{m}$$

Mechanische Arbeit: Die Kraft leistet die Arbeit: Übertragung der Energie durch eine Kraft

$$E_F = F \cdot \Delta s$$

$$E_F = \mathrm{J}, \quad F = \mathrm{N} = \mathrm{kg \cdot m/s^2}, \quad \Delta s = \mathrm{m}$$

Leistung

$$P = \frac{E}{t}$$

$$P = \mathrm{W}, \quad E = \mathrm{J}, \quad t = \mathrm{s}$$

Momentane Leistung / Energieübertragungsrate:

Leistung über ein Zeitintervall integriert (liefert Energie)

$$P = \frac{dE}{dt} = \dot{E} = I_E$$

$P = \mathrm{W}, \quad E = \mathrm{J}, \quad t = \mathrm{s}, \quad I_E = \mathrm{W}$

$$E_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

$E = \mathrm{J}, \quad P(t) = \mathrm{W}, \quad t = \mathrm{s}$

Ortsabhängige Kraft

$$E_F = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

$E_F = \mathrm{J}, \quad \vec{F}(s) = \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}, \quad d\vec{s} = \mathrm{m}$

Zeitabhängige Kraft

$$E_F = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

$E_F = \mathrm{J}, \quad \vec{F}(t) = \mathrm{N}, \quad \vec{v}(t) = \mathrm{m/s}, \quad dt = \mathrm{s}$

Kraft in x-Richtung:

$F_x = F \cdot \cos(\theta)$

Kraft in y-Richtung:

$F_y = F \cdot \sin(\theta)$

Beschleunigung:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = [5+4, -9+5] = [9, -4]\,\mathrm{N}$$

. **Betrag der resultierenden Kraft:**

$$|\vec{F}_{\text{res}}| = \sqrt{9^2 + (-4)^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97} \approx 9{,}849\,\mathrm{N}$$

. **Beschleunigung:**

$$a = \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{9{,}849}{4} \approx 2{,}462$$

Kraft bei seilen:

$F_g = m \cdot g = 5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{N}$

$$2 \cdot T \cdot \sin(\alpha) = F_g \Rightarrow T = \frac{F_g}{2 \cdot \sin(58^\circ)} = \frac{50}{2 \cdot 0{,}848} \approx \frac{50}{1{,}696} \approx 29{,}48$$

Federkraft:

$F_F = k \cdot \Delta l$

F_F: Federkraft (N), k: Federkonstante (N/m), Δl: Längenänderung (m)

Zugehöriger Energiestrom = Impulsstrom mal Geschwindigkeit

$$I_E = I_p \cdot v$$

I_E: Energiestrom (W), I_p: Impulsstrom (N), v: Geschwindigkeit (m/s)

Energie:

$$E = p \cdot \overline{\Delta v} = m \cdot v \cdot \frac{v}{2} = \frac{mv^2}{2} = E_{\text{kin}}$$

mittleren Potenzialdifferenz

$$\overline{\Delta v} = \frac{1}{2}\left(\Delta v_{\text{Anfang}} + \Delta v_{\text{Ende}}\right) = \frac{v}{2}$$

$\overline{\Delta v}$: mittlere Potenzialdifferenz (m/s), Δv_{Anfang}: Anfangsdifferenz (m/s), Δv_{Ende}: Enddifferenz (m/s), v: Geschwindigkeit (m/s)

Kinetische Energie:

$$E_{\text{kin},P} = \frac{m_P v_P^2}{2}$$

$E_{\text{kin},P}$: [J], m_P: [kg], v_P: [m/s]

Impuls des Projektils vor dem Stoß:

$p_P = m_P \cdot v_P$

p_P: [kg·m/s], m_P: [kg], v_P: [m/s]

Gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoß:

$$v_{\text{gem}} = \frac{p_P}{m_P + m_K}$$

v_{gem}: [m/s], p_P: [kg·m/s], m_P, m_K: [kg]

Kinetische Energie nach dem Stoß:

$$E_{\text{kin},PK} = \frac{(m_P + m_K) \cdot v_{\text{gem}}^2}{2}$$

$E_{\text{kin},PK}$: [J], m_P, m_K: [kg], v_{gem}: [m/s]

Umwandlung in potenzielle Energie:

$E_{\text{kin},PK} = E_{\text{pot},PK} = (m_P + m_K) \cdot g \cdot h$

$E_{\text{pot},PK}$: [J], m_P, m_K: [kg], g: [m/s²], h: [m]

Höhe aus Energie berechnet:

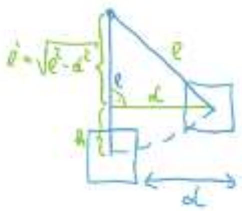
$$h = \frac{E_{\text{kin},PK}}{(m_P + m_K) \cdot g}$$

h: [m], $E_{\text{kin},PK}$: [J], m_P, m_K: [kg], g: [m/s²]

Höhe über Auslenkung:

$h = l - \sqrt{l^2 - d^2}$

h: [m], l: [m], d: [m]



Projektilgeschwindigkeit bei Aufprall:

$$v_P = \frac{m_P + m_K}{m_P} \cdot \sqrt{2gh} = 191.4\,\frac{m}{s}$$

$v_P : [\mathrm{m/s}], \quad m_P, m_K : [\mathrm{kg}], \quad g : [\mathrm{m/s^2}], \quad h : [\mathrm{m}]$

m_P: Masse des Projektils [kg], m_K: Masse des Klotzes [kg]

Klotz = das hängende Pendel

Luftwiderstandsformel:

$$F_{\text{Luft}} = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2$$

$F_{\text{Luft}} : [\mathrm{N}], \quad c_w : [1], \quad A : [\mathrm{m^2}], \quad \rho : [\mathrm{kg/m^3}], \quad v : [\mathrm{m/s}]$

Arbeit-Weg-Formel:

$$E(v) = F_{\text{Luft}}(v) \cdot s$$

$E(v) : [\mathrm{J}], \quad F_{\text{Luft}}(v) : [\mathrm{N}], \quad s : [\mathrm{m}]$

***Wirkungsgrad*:**

$$\eta = \frac{P_{\text{Nutzen}}}{P_{\text{Aufwand}}} = \frac{E_{\text{Nutzen}}}{E_{\text{Aufwand}}}$$

$\eta : [1], \quad P_{\text{Nutzen}}, P_{\text{Aufwand}} : [\mathrm{W}], \quad E_{\text{Nutzen}}, E_{\text{Aufwand}} : [\mathrm{J}]$

Der Wirkungsgrad kann nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Drehmoment M:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M} = \mathrm{N} \times \mathrm{m}, \quad \vec{r} = \mathrm{m}, \quad \vec{F} = \mathrm{N}$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\,\sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{F})$$

Analogien zwischen Translation & Rotation:

Aus	wird
Weg	Winkel
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Kraft	Drehmoment
Impuls	Drehimpuls
Masse	Trägheitsmoment
Kinetische Energie	Rotationsenergie
2. Newtonsche Gesetz	2. Newtonsche Gesetz inkl. Rotation

Winkel im Bogenmaß

$$\hat{\varphi} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r}$$

$$[b] = m, \quad [r] = m \quad \Rightarrow \quad [\hat{\varphi}] = \frac{[b]}{[r]} = \frac{m}{m} = 1 = 1\,\text{rad}$$

$$b = \hat{\varphi} \cdot r$$

$$\hat{\varphi} = 2\pi = 2\pi\,\text{rad}$$

$$b = 2\pi r$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = \frac{\text{Winkel}}{\text{Zeit}}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$$

$$1\,\text{Umdrehung} = 2\pi\,\text{rad}$$

Zusammenhang zwischen Umfangs- und Winkelgeschwindigkeit

Umfangsgeschwindigkeit (engl. *tangential velocity*):

$$v_u = |\vec{v}_u| = \frac{db}{dt} = \dot{b} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r$$

Zusammenhang mit Winkelgeschwindigkeit:

$$v_u = \omega \cdot r$$

Bogenlänge in kleinem Zeitintervall:

$$db = d\varphi \cdot r$$

Winkelgeschwindigkeit als Vektor

Bahngeschwindigkeit durch Kreuzprodukt (engl. *cross product*):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Betrag der Bahngeschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = \omega r \sin(\angle(\omega, r))$$

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \text{rad/s}^2$$

$$\text{Winkelbeschl.} = \frac{\text{Winkelgeschw.-änderung}}{\text{Zeit}}$$

Resultierendes Drehmoment eines Kräftepaars:

den Drehpunkt wird mit der Wahl der positiven Drehrichtung im UZS:

$$M_1 = l_1\,F$$
$$M_2 = l_2\,F$$

Das resultierende Drehmoment wird

$$M_{res} = M_1 + M_2 = l_1 F + l_2 F = (l_1 + l_2) F$$

Allgemein gilt

$$\vec{M} = \vec{r}_{1\to 2} \times \vec{F}$$

L = Kraftarm(m)

Massenmittelpunkt in x-Richtung:

$$x_{\text{MMP}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$x_i = \text{m}, \quad m_i = \text{kg}, \quad x_{\text{MMP}} = \text{m}$$

Schwerpunkt in drei Dimensionen (Vektorform):

$$\vec{r}_{\text{MMP}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$m_i = \text{kg}, \quad \vec{r}_i = \text{m}, \quad m = \text{kg}, \quad \vec{r}_{\text{MMP}} = \text{m}$$

Drehmoment M

Drehmoment = Kraft mal Abstand, wobei die Kraft normal auf den Abstand stehen muss.

Entweder
$F_t = F \sin(\theta)$
$M = F_t\, r = F \sin(\theta)\, r$
F_t ... Normalkomponente der Kraft

Oder
$l = r \sin(\theta)$
$M = F\, l = F\, r \sin(\theta)$
l ... Normalabstand

Beachte:
M ist immer auf eine Drehachse bezogen!

Wirkt dieselbe Kraft auf den Körper mit einer verschobenen Drehachse, ist auch das Drehmoment verschieden!

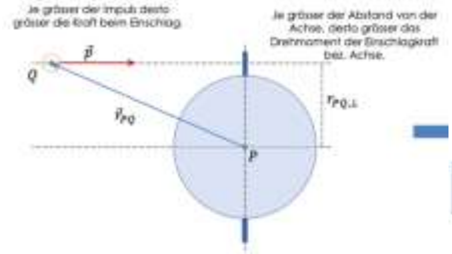
Behalten Sie das bitte im Hinterkopf, ich werde es nicht explizit aufschreiben.

Drehmoment Berchnungsmöglichkeit:

1. $$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \Delta x\, F_y - \Delta y\, F_x \end{pmatrix}$$
2. $$M_z = -F_x\,\Delta y + F_y\,\Delta x$$
3. $$M_z = |\vec{F}| \cdot s$$

S= Normalabstand

Drehimpuls einer Punktmasse:



$$\boxed{\vec{L}_{PQ} = \vec{r}_{PQ} \times \vec{p}}$$

Periode(Umdrehungsdauer)

$$\text{Periode} = \frac{60\ \text{Sekunden}}{\text{RPM}}$$

RPM = Umdrehungen pro Minute

Linearer Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[\vec{p}] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{kg\cdotpm/s}, \quad [m] = \text{kg}, \quad [\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Drehimpuls:

$$\vec{L}_{PQ} = J_{PQ} \cdot \vec{\omega}$$

$$[\vec{L}_{PQ}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}, \quad [J_{PQ}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2, \quad [\vec{\omega}] = \frac{1}{\text{s}}$$

Massenträgheitsmoment_

$$J_{PQ} = m \cdot r_{PQ}^2$$

$$[J_{PQ}] = \text{kg} \cdot \text{m}^2, \quad [m] = \text{kg}, \quad [r_{PQ}] = \text{m}$$

Trägheitsmoment eines starren Körpers:

$$J = \sum m_i\, r_i^2$$

$[J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [m_i] = \mathrm{kg}, \quad [r_i] = \mathrm{m}$

Steinerscher Satz (Parallelachsensatz), verknüpfung zwei parallele Trägheitsmomente.

$$J = J_S + m \cdot h^2$$

$[J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [m] = \mathrm{kg}, \quad [h] = \mathrm{m}$

Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls

Translation	Rotation
Impuls $p = m\, v$	Drehimpuls $L = J\, \omega$
Impulsänderungsrate $\sum F_{ext} = \dot{p}$	Drehimpulsänderungsrate $\sum M_{ext} = \dot{L}$
Ist $m = konst$ gilt $p = \frac{d}{dt}(m\, v) = \dot{m}\, v + m\, \dot{v} = m\, \dot{v} = m\, a$	Ist $J = konst$ gilt $\dot{L} = \frac{d}{dt}(J\, \omega) = \dot{J}\, \omega + J\dot{\omega} = J\, \dot{\omega} = J\, \alpha$
$\rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{MMP}}$	$\rightarrow \boxed{\sum \vec{M}_{ext} = J \cdot \vec{\alpha}}$

Translation (Kräftebilanz):

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{MMP}$$

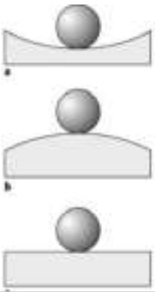
$[\vec{F}_{ext}] = \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad [m] = \mathrm{kg}, \quad [\vec{a}_{MMP}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Rotation (Momentenbilanz):

$$\sum \vec{M}_{ext} = J \cdot \vec{\alpha}$$

$[\vec{M}_{ext}] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg \cdot m^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}^2}, \quad [J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [\vec{\alpha}] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$

Stabilität des Gleichgewichts



Stabiles Gleichgewicht
Bei einer kleinen Auslenkung kehrt der Körper in die Ausgangslage zurück

Labiles Gleichgewicht
Bei der kleinsten Auslenkung verlässt der Körper die Ausgangsposition

Indifferentes Gleichgewicht
Nach einer Auslenkung bleibt der Körper in der neuen Gleichgewichtslage.

Federkraft einer linearen Feder:

$$F = k \cdot \Delta l$$

$[F] = \mathrm{N}, \quad [k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \quad [\Delta l] = \mathrm{m}$

Drehmoment einer Drehfeder:

$$M = D \cdot \Delta\varphi$$

$[M] = \mathrm{Nm}, \quad [D] = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}, \quad [\Delta\varphi] = \mathrm{rad}$

Drehimpulserhaltung und Trägheitsmoment

- Summe beider Drehimpulse ist jederzeit 0
- Halbe Dicke, gleicher Radius = doppelte
- Winkelgeschwindigkeit
- Gleiche Dicke, Radius/$\sqrt{2}$ = doppelte
- Winkelgeschwindigkeit

	Scheibe 1	Scheibe 2	Scheibe 3
Radius	R	R	$R/\sqrt{2}$
Dicke	2	$d/2$	$2d$
Masse	m	$m/2$	m
$J = 1/2\, m\, r^2$	J_0	$J_0/2$	$J_0/2$

Drehimpulsbilanz:

$$\sum \vec{I}_L = \sum \vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega})$$

$[\vec{I}_L] = \mathrm{kg \cdot m^2/s}, \quad [\vec{M}] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s}$

Bahndrehimpuls:

Bahndrehimpulse

Beispiel Vorderrad

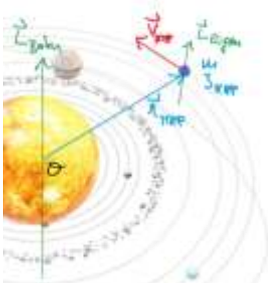
$$\vec{L}^B_{VR} = \vec{r}_{MMP_{VR}} \times m_{VR} \cdot \vec{v}_{MMP_{VR}}$$

Richtung: Senkrecht aus der Bildebene raus

Betrag:

$$L^B_{VR} = r_{MMP_{VR}} \cdot m_{VR} \cdot v_{MMP_{VR}} = m_{VR} \cdot r^2_{MMP_{VR}} \cdot \omega_{VR}$$

Drehimpuls um 0:



Gesamter Drehimpuls um O:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{Eigen} + \vec{L}_{Bahn} = J_{MMP} \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{MMP} \times m \cdot \vec{v}_{MMP}$$

J_{MMP} ... Trägheitsmoment um die Achse durch den MMP

$\vec{\omega}$ ... Winkelgeschwindigkeit um die Achse durch den MMP

$\vec{r}_{MMP}$ ... Abstand zwischen Drehpunkt O und dem MMP

$\vec{v}_{MMP}$ ... Bahngeschwindigkeit des Körpers um den Drehpunkt O

m ... Masse des Körpers

Eigendrehimpuls:

Eigendrehimpulse

Beispiel Vorderrad:

$$\vec{L}^E_{VR} = J_{VR} \cdot \vec{\omega}_{VR}$$

Richtung: Senkrecht aus der Bildebene raus

Betrag:

$$L^E_{VR} = J_{VR} \cdot \omega_{VR}$$

Analoges Vorgehen für alle anderen Eigend

Rotationsenergie:

$$W_{rot} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$[W_{rot}] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [\omega] = \mathrm{rad/s}$

Arbeit eines Drehmoments

$$E_M = M \cdot \Delta\theta$$

$[E_M] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [M] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [\Delta\theta] = \mathrm{rad}$

Leistung eines Drehmoments

$$P_M = M \cdot \omega$$

$[P_M] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^3}, \quad [M] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [\omega] = \mathrm{rad/s}$

Drehmoment (Kreuzprodukt)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g$$

$[\vec{M}] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [\vec{r}] = \mathrm{m}, \quad [\vec{F}_g] = \mathrm{kg \cdot m/s^2}$

Drehimpuls

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

$[\vec{L}] = \mathrm{kg \cdot m^2/s}, \quad [J] = \mathrm{kg \cdot m^2}, \quad [\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s}$

Newton 2 für Drehimpuls

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$[\vec{M}] = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}, \quad [\vec{L}] = \mathrm{kg \cdot m^2/s}, \quad [t] = \mathrm{s}$

Präzession (Kreuzprodukt) $$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$ $[\vec{M}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2, \quad [\vec{\Omega}] = \mathrm{rad/s}, \quad [\vec{L}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$	**Drehimpuls einer Punktmasse** $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$ $[\vec{L}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad [\vec{r}] = \mathrm{m}, \quad [\vec{p}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$
Impuls mit Geschwindigkeit $$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$ $[\vec{L}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad [m] = \mathrm{kg}, \quad [\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s}, \quad [\vec{r}] = \mathrm{m}$	**Drehimpuls eines starren Körpers (Summenformel)** $$\vec{L} = \sum \vec{r} \times m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$$ $[\vec{L}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$
Allgemeine Definition mit Trägheitstensor $$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$$ $[\vec{L}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad [\mathbf{I}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad [\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s}$	**Rotationsenergie (Standardform)** $$W_{\mathrm{rot}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$ $[W_{\mathrm{rot}}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2, \quad [J] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad [\omega] = \mathrm{rad/s}$
Umformung mit Drehimpuls $$W_{\mathrm{rot}} = \frac{L^2}{2J}$$ $[L] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad [J] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad [W_{\mathrm{rot}}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$	**Rotationsenergie um Hauptachsen** $$E_{\mathrm{rot,xx}} = \frac{L^2}{2I_{xx}}, \quad E_{\mathrm{rot,yy}} = \frac{L^2}{2I_{yy}}, \quad E_{\mathrm{rot,zz}} = \frac{L^2}{2I_{zz}}$$ $[L] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \quad [I_{xx}], [I_{yy}], [I_{zz}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad [E_{\mathrm{rot}}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$
Allgemeine Rotationsenergie (asymmetrischer Körper) $$W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I \vec{\omega}$$ $[\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s}, \quad [I] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2, \quad [W_{\mathrm{rot}}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$	