

Rechnerarithmetik

Zahlendarstellung

Maschinenzahlen Eine maschinendarstellbare Zahl zur Basis B ist ein Element der Menge:

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \dots m_n \cdot B^{\pm e_1 e_2 \dots e_l}\} \cup \{0\}$$

- $m_1 \neq 0$ (Normalisierungsbedingung)
- $m_i, e_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ für $i \neq 0$
- $B \in \mathbb{N}, B > 1$ (Basis)

Zahlenwert $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i B^{\hat{e}-i}$, mit $\hat{e} = \sum_{i=1}^l e_i B^{l-i}$

Werteberechnung einer Maschinenzahl

- Normalisierung überprüfen: $m_1 \neq 0$ (für $x \neq 0$)
 - Sonst: Mantisse verschieben und Exponent anpassen
- Exponent berechnen: $\hat{e} = \sum_{i=1}^l e_i B^{l-i}$
 - Von links nach rechts: Stelle \cdot Basis hochgestellt zur Position
- Wert berechnen: $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i B^{\hat{e}-i}$
 - Mantissenstellen \cdot Basis hochgestellt zu (Exponent - Position)
- Vorzeichen berücksichtigen

Werteberechnung Berechnung einer vierstelligen Zahl zur Basis 4:

$$\underbrace{0.3211}_{n=4} \cdot \underbrace{4^{12}}_{l=2} \quad \text{Exponent: } \hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$$
$$\text{Wert: } \hat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$$

IEEE-754 Standard definiert zwei wichtige Gleitpunktformate:

Single Precision (32 Bit)	Double Precision (64 Bit)
Vorzeichen(V): 1 Bit	Vorzeichen(V): 1 Bit
Exponent(E): 8 Bit (Bias 127)	Exponent(E): 11 Bit (Bias 1023)
Mantisse(M):	Mantisse(M):
23 Bit + 1 hidden bit	52 Bit + 1 hidden bit

Darstellungsbereich Für jedes Gleitpunktsystem existieren:

- Grösste darstellbare Zahl: $x_{\max} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{\max}}$
- Kleinste darstellbare positive Zahl: $x_{\min} = B^{e_{\min}-1}$

Approximations- und Rundungsfehler

Fehlerarten Sei \tilde{x} eine Näherung des exakten Wertes x :

Absoluter Fehler:

$$|\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler:

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \text{ bzw. } \left| \frac{\tilde{x} - x}{|x|} \right| \text{ für } x \neq 0$$

Maschinengenauigkeit eps ist die kleinste positive Zahl, für die gilt:

Allgemein: $\text{eps} := \frac{B}{2} \cdot B^{-n}$ **Dezimal:** $\text{eps}_{10} := 5 \cdot 10^{-n}$

Sie begrenzt den maximalen relativen Rundungsfehler:

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \text{eps}$$

Rundungseigenschaften Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_{\min}$ gilt:

Absoluter Fehler:

$$|rd(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-n-1}$$

Relativer Fehler:

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \text{eps}$$

Fehlerfortpflanzung

Konditionierung Die Konditionszahl K beschreibt die relative Fehlervergrößerung bei Funktionsauswertungen:

$$K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

- $K \leq 1$: gut konditioniert
- $K > 1$: schlecht konditioniert
- $K \gg 1$: sehr schlecht konditioniert

Fehlerfortpflanzung Für f (differenzierbar) gilt näherungsweise:

Absoluter Fehler:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler:

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx K \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

Analyse der Fehlerfortpflanzung einer Funktion

- Berechnen Sie $f'(x)$
- Bestimmen Sie die Konditionszahl K
- Schätzen Sie den absoluten Fehler ab
- Schätzen Sie den relativen Fehler ab
- Beurteilen Sie die Konditionierung anhand von K

$$\underbrace{|f(\tilde{x}) - f(x)|}_{\text{absoluter Fehler von } f(x)} \approx |f'(x)| \cdot \underbrace{|\tilde{x} - x|}_{\text{absoluter Fehler von } x}$$
$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx \underbrace{\frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}}_{\text{Konditionszahl } K} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

Fehleranalyse Beispiel: Fehleranalyse von $f(x) = \sin(x)$

- $f'(x) = \cos(x)$
- $K = \frac{|x \cos(x)|}{|\sin(x)|}$
- Für $x \rightarrow 0$: $K \rightarrow 1$ (gut konditioniert)
- Für $x \rightarrow \pi$: $K \rightarrow \infty$ (schlecht konditioniert)
- Für $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} K = 1$ (gut konditioniert)
- Der absolute Fehler wird nicht vergrößert, da $|\cos(x)| \leq 1$

Praktische Fehlerquellen der Numerik

Kritische Operationen häufigste Fehlerquellen:

- Auslöschung bei Subtraktion ähnlich großer Zahlen
- Überlauf (overflow) bei zu großen Zahlen
- Unterlauf (underflow) bei zu kleinen Zahlen
- Verlust signifikanter Stellen durch Rundung

Vermeidung von Auslöschung

- Identifizieren Sie Subtraktionen ähnlich großer Zahlen
- Suchen Sie nach algebraischen Umformungen
- Prüfen Sie alternative Berechnungswege
- Verwenden Sie Taylorentwicklungen für kleine Werte

Auslöschung Kritische Berechnungen für kleine x (Auslöschung):

- $\sqrt{1+x^2} - 1$: **Besser:** $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$
- $1 - \cos(x)$: **Besser:** $2 \sin^2(x/2)$

Auslöschung Bei der Subtraktion fast gleich großer Zahlen können signifikante Stellen verloren gehen. Beispiel:

- $1.234567 - 1.234566 = 0.000001$
- Aus 7 signifikanten Stellen wird 1 signifikante Stelle

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Nullstellensatz von Bolzano Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

dann existiert mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Systematisches Vorgehen bei Nullstellenproblemen

- Newton-Verfahren: wenn Ableitung leicht berechenbar
- Sekantenverfahren: wenn Ableitung schwierig
- Fixpunktiteration: wenn geeignete Umformung möglich

NSP: Nullstellenproblem, NS: Nullstelle

Fixpunktiteration

Fixpunktgleichung ist eine Gleichung der Form: $F(x) = x$
Die Lösungen \tilde{x} , für die $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ erfüllt ist, heissen Fixpunkte.

Grundprinzip der Fixpunktiteration sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a, b]$

Die rekursive Folge $x_{n+1} \equiv F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

heisst Fixpunktiteration von F zum Startwert x_0 .

Konvergenzverhalten

Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung F' und $\tilde{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von F . Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$:

Anziehender Fixpunkt:

$$|F'(\tilde{x})| < 1$$

x_n konvergiert gegen \tilde{x} ,
falls x_0 nahe genug bei \tilde{x}

Abstossender Fixpunkt:

$$|F'(\tilde{x})| > 1$$

x_n konvergiert für keinen
Startwert $x_0 \neq \tilde{x}$

Banachscher Fixpunktsatz $F: [a, b] \rightarrow [a, b]$ und \exists Konstante α :

- $0 < \alpha < 1$ (Lipschitz-Konstante)
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$

Dann gilt:

- F hat genau einen Fixpunkt \tilde{x} in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration konvergiert gegen \tilde{x} für alle $x_0 \in [a, b]$

Fehlerabschätzungen:

a-priori: $|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot |x_1 - x_0|$

a-posteriori: $|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

Konvergenznachweis für Fixpunktiteration

- Bringe die Gleichung in Fixpunktform: $f(x) = 0 \Rightarrow x = F(x)$
- Prüfe, ob F das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet:
 - Wähle geeignetes Intervall ($[a, b]$ $F(a) \geq a$ und $F(b) \leq b$)
- Bestimme die Lipschitz-Konstante α : \rightarrow Berechne $F'(x)$
 - Finde $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$ und prüfe $\alpha < 1$
- Berechnen Sie die nötigen Iterationen für Genauigkeit tol:
$$n \geq \frac{\ln(\frac{\text{tol} \cdot (1 - \alpha)}{|x_1 - x_0|})}{\ln \alpha}$$

Fixpunktiteration Nullstellen von $f(x) = e^x - x - 2$

Umformung in Fixpunktform: $x = \ln(x + 2)$, also $F(x) = \ln(x + 2)$

- $F'(x) = \frac{1}{x+2}$ monoton fallend
- Für $I = [1, 2]$: $F(1) = 1.099 > 1$, $F(2) = 1.386 < 2$
- $\alpha = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1}{x+2} \right| = \frac{1}{3} < 1$
- Konvergenz für Startwerte in $[1, 2]$ gesichert
- Für Genauigkeit 10^{-6} benötigt: $n \geq 12$ Iterationen

Grundprinzip Newton-Verfahren

Approximation der NS durch sukzessive Tangentenberechnung:
Konvergiert, wenn für alle x im relevanten Intervall gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Newton-Verfahren anwenden

- Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ aufstellen
- Geeigneten Startwert x_0 nahe der Nullstelle wählen
 - Prüfen, ob $f'(x_0) \neq 0$
- Iterieren bis zur gewünschten Genauigkeit: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Abbruchkriterien prüfen:
 - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
 - Änderung aufeinanderfolgenden Werte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
 - Maximale Iterationszahl nicht überschritten

Newton-Verfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$

Ableitung: $f'(x) = 2x$, Startwert $x_0 = 1$

- $x_1 = 1 - \frac{1^2-2}{2 \cdot 1} = 1.5 \rightarrow$ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- $x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2 \cdot 1.5} = 1.4167$
- $x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2-2}{2 \cdot 1.4167} = 1.4142$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Alternative Variante mit konstanter Ableitung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Konvergiert langsamer, aber benötigt weniger Rechenaufwand.

Sekantenverfahren

Alternative zum Newton-Verfahren ohne Ableitungsberechnung. Verwendet zwei Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Benötigt zwei Startwerte x_0 und x_1 .

Sekantenverfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$

Startwerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

- $x_2 = 1 - \frac{1-2}{1^2-2} \cdot 1 = 1.5 \rightarrow$ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- $x_3 = 1.5 - \frac{1.5-2}{1.5^2-2} \cdot 1.5 = 1.4545$
- $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545-2}{1.4545^2-2} \cdot 1.4545 = 1.4143$

Fehlerabschätzung

Fehlerabschätzung für Nullstellen

- So schätzen Sie den Fehler einer Näherungslösung ab:
- Sei x_n der aktuelle Näherungswert
 - Wähle Toleranz $\epsilon > 0$
 - Prüfe Vorzeichenwechsel: $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$
 - Falls ja: Nullstelle liegt in $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$
 - Damit gilt: $|x_n - \xi| < \epsilon$

Praktische Fehlerabschätzung Fehlerbestimmung bei $f(x) = x^2 - 2$

- Näherungswert: $x_3 = 1.4142157$
- Mit $\epsilon = 10^{-5}$: **Also:** $|x_3 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$
- $f(x_3 - \epsilon) = 1.4142057^2 - 2 < 0 \rightarrow$ Nullstelle liegt in $(1.4142057, 1.4142257)$
- $f(x_3 + \epsilon) = 1.4142257^2 - 2 > 0$

Konvergenzordnung Sei (x_n) eine gegen \bar{x} konvergierende Folge. Die Konvergenzordnung $q \geq 1$ ist definiert durch:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

wo $c > 0$ eine Konstante. Für $q = 1$ muss zusätzl. $c < 1$ gelten.

Konvergenzordnungen der Verfahren Konvergenzgeschwindigkeiten

Newton-Verfahren: Quadratische Konvergenz: $q = 2$

Vereinfachtes Newton: Lineare Konvergenz: $q = 1$

Sekantenverfahren: Superlineare Konvergenz: $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Konvergenzgeschwindigkeit Vergleich der Verfahren:

Startwert $x_0 = 1$, Funktion $f(x) = x^2 - 2$, Ziel: $\sqrt{2}$

n	Newton	Vereinfacht	Sekanten
1	1.5000000	1.5000000	1.5000000
2	1.4166667	1.4500000	1.4545455
3	1.4142157	1.4250000	1.4142857
4	1.4142136	1.4125000	1.4142136

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten: $m \times n$ -Matrix A
 a_{ij} : Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte

Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

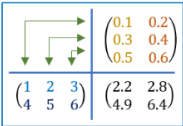
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetz gelten für Matrix-Addition

Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.

Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$

	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2 & 2.8 \\ 4.9 & 6.4 \end{pmatrix}$

Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen Assoziativ, Distributiv, nicht Kommutativ!

Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- A^T : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:** $A^T = A$
- Einheitsmatrix/Identitätsmatrix:** E bzw. I mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein lineares Gleichungssystem ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.

A : Koeffizientenmatrix

\vec{x} : Vektor der Unbekannten

\vec{b} : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$
 \Rightarrow Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
 - Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
 - Führende Einsen, die weiter unten stehen \rightarrow stehen weiter rechts
- Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)**
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Gauss-Jordan-Verfahren

- bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
- oberste Zahl in Pivot-Spalte = 0
 \rightarrow vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
- teile erste Zeile durch $a_{11} \rightarrow$ so erhalten wir führende Eins
- Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenoperationen)
nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Zeilenoperationen erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$ \bullet unendlich viele Lösungen:
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$ $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen

Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 5 \\ 3 \end{matrix}$
Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5$ $x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$ $x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow rg(A) = rg(A | \vec{b})$

nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für $n \times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

Umformen bestimme die Matrix X : $A \cdot X + B = 2 \cdot X$
 $\Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot X - B \Rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = -B \Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot X = -B$
 $\Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$
 $\Rightarrow X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}
 A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
 A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse einer 2 x 2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Permutationsmatrix P ist eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Zeilenvertauschungen entsteht.

Für die Vertauschung der i -ten

und j -ten Zeile hat P_k die **Form:**

- $p_{ii} = p_{jj} = 0$
- $p_{ij} = p_{ji} = 1$
- Sonst gleich wie in E_n

Wichtige Eigenschaften:

- $P^{-1} = P^T = P$
- Mehrere Vertauschungen:
 $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_l$

Zeilenvertauschung für Matrix A mit Permutationsmatrix P_1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot P_1 \text{ bewirkt die Vertauschung von Zeile 1 und 3}$$

Pivotisierung

Spaltenpivotisierung

Strategie zur numerischen Stabilisierung des Gauss-Algorithmus durch Auswahl des betragsmäßig größten Elements als Pivotelement. Vor jedem Eliminationsschritt in Spalte i :

- Suche k mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
- Falls $a_{ki} \neq 0$: Vertausche Zeilen i und k
- Falls $a_{ki} = 0$: Matrix ist singulär

Gauss-Algorithmus mit Pivotisierung

1. Elimination (Vorwärts):

- Für $i = 1, \dots, n - 1$:
 - Finde $k \geq i$ mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
 - Falls $a_{ki} = 0$: Stop (Matrix singulär)
 - Vertausche Zeilen i und k
- Für $j = i + 1, \dots, n$:
 - $* z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} z_i$

$$2. \text{ Rückwärtseinsetzen: } x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n - 1, \dots, 1$$

$$\text{Gauss mit Pivotisierung } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Eliminationsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-8}{-2} = 4 \\ x_2 &= \frac{36 - 15(4)}{3} = 1 \\ x_1 &= \frac{2 - 4(4) + 2}{2} = -6 \end{aligned}$$

Vorteile der Permutationsmatrix

- Exakte Nachverfolgung aller Zeilenvertauschungen
- Einfache Rückführung auf ursprüngliche Reihenfolge durch P^{-1}
- Kompakte Darstellung mehrerer Vertauschungen
- Numerisch stabile Implementierung der Pivotisierung

Zeilenvertauschungen verfolgen

- Initialisiere $P = I_n$
- Für jede Vertauschung von Zeile i und j :
 - Erstelle P_k durch Vertauschen von Zeilen i, j in I_n
 - Aktualisiere $P = P_k \cdot P$
 - Wende Vertauschung auf Matrix an: $A := P_k A$
- Bei der LR-Zerlegung mit Pivotisierung:
 - $PA = LR$
 - Löse $Ly = Pb$ und $Rx = y$

Dreieckszerlegung Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann zerlegt werden in:

Untere Dreiecksmatrix L:
 $l_{ij} = 0$ für $j > i$
Diagonale normiert ($l_{ii} = 1$)

Obere Dreiecksmatrix R:
 $r_{ij} = 0$ für $i > j$
Diagonalelemente $\neq 0$

LR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Jede reguläre Matrix A , für die der Gauss-Algorithmus ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, lässt sich zerlegen in: $A = LR$ wobei L eine normierte untere und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Berechnung der LR-Zerlegung

So berechnen Sie die LR-Zerlegung:

- Führen Sie Gauss-Elimination durch
- R ist die resultierende obere Dreiecksmatrix
- Die Eliminationsfaktoren $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ bilden L
- Lösen Sie dann nacheinander:
 - $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen)
 - $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen)

$$\text{LR-Zerlegung } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Erste Spalte

Max. Element in 1. Spalte: $|a_{31}| = 5$, also Z1 und Z3 tauschen:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechne Eliminationsfaktoren: $l_{21} = \frac{1}{5}, \quad l_{31} = -\frac{1}{5}$

$$\text{Nach Elimination: } A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 1.2 & 1.8 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Zweite Spalte

Max. Element in 2. Spalte unter Diagonale: $|-3.2| > |1.2|$, keine Vertauschung nötig.

Berechne Eliminationsfaktor: $l_{32} = -\frac{1.2}{-3.2} = \frac{3}{8}$

$$\text{Nach Elimination: } R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 2.85 \end{pmatrix}$$

Endergebnis

Die LR-Zerlegung mit $PA = LR$ ist:

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 2.85 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

- $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.85 \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix}$
- Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Probe

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = b$$

QR-Zerlegung

Eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt: $Q^T Q = Q Q^T = I_n$
Die QR-Zerlegung einer Matrix A ist: $A = QR$
wobei Q orthogonal und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Householder-Transformation

Eine Householder-Matrix hat die Form: $H = I_n - 2uu^T$
mit $u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$. Es gilt:
• H ist orthogonal ($H^T = H^{-1}$) und symmetrisch ($H^T = H$)
• $H^2 = I_n$

QR-Zerlegung mit Householder

1. Initialisierung: $R := A, Q := I_n$
2. Für $i = 1, \dots, n - 1$:
 - Bilde Vektor v_i aus i-ter Spalte von R ab Position i
 - $w_i := v_i + \text{sign}(v_{i1})\|v_i\|e_1$
 - $u_i := w_i / \|w_i\|$
 - $H_i := I_{n-i+1} - 2u_i u_i^T$
 - Erweitere H_i zu Q_i durch I_{i-1} links oben
 - $R := Q_i R$ und $Q := Q Q_i^T$

QR-Zerlegung mit Householder

Schritt 1: Erste Spalte

Erste Spalte a_1 und Einheitsvektor e_1 : $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Householder-Vektor für erste Spalte:

1. Berechne Norm: $|a_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
2. Bestimme Vorzeichen: $\text{sign}(a_{11}) = \text{sign}(2) = 1$
 - Wähle positives Vorzeichen, da erstes Element positiv
 - Dies maximiert die erste Komponente von v_1
 - Verhindert Auslöschung bei der Subtraktion
3. $v_1 = a_1 + \text{sign}(a_{11})|a_1|e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Normiere v_1 : $|v_1| = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + 1} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ -0.41 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Matrix berechnen: $H_1 = I - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -0.67 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A nach 1. Transformation: $A^{(1)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -0.89 & 1.79 \\ 0 & 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Zweite Spalte

Untermatrix für zweite Transformation: $A_2 = \begin{pmatrix} -0.89 & 1.79 \\ 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$
Householder-Vektor für zweite Spalte:

1. $|a_2| = \sqrt{(-0.89)^2 + 2^2} = 2.19$
2. $\text{sign}(a_{22}) = \text{sign}(-0.89) = -1$ (da erstes Element negativ)
3. $v_2 = \begin{pmatrix} -0.89 \\ 2.00 \end{pmatrix} - 2.19\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.09 \\ 2.00 \end{pmatrix}$
4. $u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix}$

Erweiterte Householder-Matrix: $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.41 & -0.91 \\ 0 & -0.91 & 0.41 \end{pmatrix}$

nach 2. Transformation: $R = Q_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Endergebnis

Die QR-Zerlegung $A = QR$ ist:

$Q = H_1^T Q_2^T = \begin{pmatrix} -0.89 & -0.45 & 0 \\ 0.45 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Probe

1. $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
2. $Q^T Q = Q Q^T = I$ (Orthogonalität)
3. R ist obere Dreiecksmatrix

Wichtige Beobachtungen

- Vorzeichenwahl bei v_k ist entscheidend für numerische Stabilität
- Ein falsches Vorzeichen kann zu Auslöschung führen
- Betrag der Diagonalelemente in R = Norm transformierter Spalten
- Q ist orthogonal: Spaltenvektoren sind orthonormal

Fehleranalyse

Matrix- und Vektornormen

Eine Vektornorm $\|\cdot\|$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Wichtige Normen

1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

∞ -Norm: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Fehlerabschätzung für LGS

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $Ax = b, A\tilde{x} = \tilde{b}$

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$ **Relativer Fehler:** $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

Mit der Konditionszahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Konditionierung

Die Konditionszahl beschreibt die numerische Stabilität eines LGS:

- $\text{cond}(A) \approx 1$: gut konditioniert
- $\text{cond}(A) \gg 1$: schlecht konditioniert
- $\text{cond}(A) \rightarrow \infty$: singular

Konditionierung $A = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$

Konditionszahl: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 400$

Fehlerabschätzung

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq 400 \cdot 0.01 = 4$

Relativer Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 400 \cdot \frac{0.01}{2} = 2$

Vergleich Lösungsverfahren $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matrix ist symmetrisch und nicht streng diagonaldominant
- $\text{cond}_\infty(A) \approx 12.5$

Verfahren	Iterationen	Residuum	Zeit
LR mit Pivot	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.0
QR	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	2.3
Jacobi	12	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.8
Gauss-Seidel	7	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.4

- Direkte Verfahren erreichen höhere Genauigkeit
- Iterative Verfahren brauchen mehrere Schritte

Iterative Verfahren

Zerlegung der Systemmatrix A zerlegt in: $A = L + D + R$

- L : streng untere Dreiecksmatrix
- D : Diagonalmatrix
- R : streng obere Dreiecksmatrix

Jacobi-Verfahren Gesamtschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$

Komponentenweise: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Gauss-Seidel-Verfahren Einzelschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} R x^{(k)} + (D + L)^{-1} b$

Komponentenweise:
 $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Implementierung von Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren

Vorbereitungsphase

- Matrix zerlegen in $A = L + D + R$
- Diagonaldominanz prüfen: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- Sinnvolle Startwerte wählen (z.B. $x^{(0)} = 0$ oder $x^{(0)} = b$)
- Toleranz ϵ und max. Iterationszahl n_{max} festlegen

Verfahren durchführen

- **Jacobi**: Komponentenweise parallel berechnen
- **Gauss-Seidel**: Komponentenweise sequentiell berechnen

Konvergenzprüfung

- Absolute Änderung: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$
- Relatives Residuum: $\frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\|} < \epsilon$
- Maximale Iterationszahl: $k < n_{max}$

A-priori Fehlerabschätzung

- Spektralradius ρ der Iterationsmatrix bestimmen
- Benötigte Iterationen n für Genauigkeit ϵ :

$n \geq \frac{\ln(\epsilon(1-\rho)/\|x^{(1)} - x^{(0)}\|)}{\ln(\rho)}$

Konvergenzkriterien Ein iteratives Verfahren konvergiert, wenn:

1. Die Matrix A diagonaldominant ist:
 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
2. Der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner 1 ist:
 $\rho(B) < 1$ mit B als jeweilige Iterationsmatrix

Konvergenzverhalten $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist diagonaldominant: $|a_{ii}| = 4 > 1 = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

k	Residuum		Rel. Fehler	
	Jacobi	G-S	Jacobi	G-S
0	3.74	3.74	-	-
1	0.94	0.47	0.935	0.468
2	0.23	0.06	0.246	0.125
3	0.06	0.01	0.065	0.017
4	0.01	0.001	0.016	0.002

Beobachtungen:

- Gauss-Seidel konvergiert etwa doppelt so schnell wie Jacobi
- Das Residuum fällt linear (geometrische Folge)
- Die Konvergenz ist gleichmäßig (keine Oszillationen)

Komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in \mathbb{C} genau n Lösungen (mit Vielfachheiten gezählt).

Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} erweitert die reellen Zahlen \mathbb{R} durch Einführung der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft:

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z = x + iy$$

Die Menge aller komplexen Zahlen ist definiert als:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Bestandteile komplexer Zahlen

Realteil: $\operatorname{Re}(z) = x$

Imaginärteil: $\operatorname{Im}(z) = y$

Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

Konjugation: $\bar{z} = x - iy$



Darstellungsformen

- Normalform: $z = x + iy$
- Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Umrechnung zwischen Darstellungsformen komplexer Zahlen

Von Normalform in trigonometrische Form/Exponentialform

1. Berechne Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. Berechne Winkel mit einer der Formeln:
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$
 - $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y > 0$
 - $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y < 0$
 - φ unbestimmt falls $x = y = 0$
3. Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
4. Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Von trigonometrischer Form in Normalform

1. Realteil: $x = r \cos \varphi$
2. Imaginärteil: $y = r \sin \varphi$
3. Normalform: $z = x + iy$

Von Exponentialform in Normalform/trigonometrische Form

1. Trigonometrische Form durch Euler-Formel:
 $re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
2. Dann wie oben in Normalform umrechnen

Wichtige Hinweise:

- Achten Sie auf das korrekte Quadranten beim Winkel
- Winkelfunktionen im Bogenmaß verwenden
- Bei Umrechnung in Normalform Euler-Formel nutzen
- Vorzeichen bei Exponentialform beachten

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt:

Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{in Exponentialform}) \end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{in Exponentialform}) \end{aligned}$$

Potenzen und Wurzeln

Für eine komplexe Zahl in Exponentialform $z = re^{i\varphi}$ gilt:

- n-te Potenz: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$
- n-te Wurzel: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Der Vektor x heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Bestimmung von Eigenwerten

Ein Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung. Das zugehörige Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

ist das charakteristische Polynom von A.

Eigenschaften von Eigenwerten Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{Produkt der Eigenwerte})$$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{Summe der Eigenwerte})$$

- Bei Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente die Eigenwerte
- Ist λ Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}

Vielfachheiten Für einen Eigenwert λ unterscheidet man:

- Algebraische Vielfachheit:
Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- Geometrische Vielfachheit:
Dimension des Eigenraums $= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$

Die geometrische Vielfachheit ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Vorbereitung

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aufschreiben
- Charakteristische Matrix $(A - \lambda I)$ aufstellen

Eigenwerte bestimmen

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:
 - Bei 2×2 Matrizen direkt: $\det(A - \lambda I)$
 - Bei 3×3 Matrizen: Entwicklung nach einer Zeile/Spalte
 - Bei größeren Matrizen: Spezielle Eigenschaften nutzen (z.B. Dreiecksform, Symmetrie)
2. Polynom vereinfachen und auf Nullform bringen:
 - Ausmultiplizieren
 - Zusammenfassen nach Potenzen von λ
 - Form: $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$
3. Nullstellen bestimmen:
 - Bei quadratischer Gleichung: Mitternachtsformel
 - Bei Grad 3: Substitution oder Cardanische Formeln
 - Bei höherem Grad: Numerische Verfahren

Eigenvektoren bestimmen

1. Für jeden Eigenwert λ_i :
 - Matrix $(A - \lambda_i I)$ aufstellen
 - Homogenes LGS $(A - \lambda_i I)x = 0$ lösen
 - Lösungsvektor normieren falls gewünscht
2. Bei mehrfachen Eigenwerten:
 - Basis des Eigenraums bestimmen
 - Linear unabhängige Eigenvektoren finden

Kontrolle

- Für jeden Eigenvektor x_i prüfen: $Ax_i = \lambda_i x_i$
- Bei 2×2 Matrix: $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$
- Bei 3×3 Matrix zusätzlich: $\sum \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$ und $\prod \lambda_i = \det(A)$
- Bei reellen Matrizen: Komplexe Eigenwerte treten in konjugierten Paaren auf

Spezialfälle beachten

- Bei Dreiecksmatrizen: Eigenwerte sind die Diagonalelemente
- Bei symmetrischen Matrizen: Alle Eigenwerte sind reell
- Bei orthogonalen Matrizen: $|\lambda_i| = 1$ für alle Eigenwerte
- Bei nilpotenten Matrizen: Alle Eigenwerte sind 0

Eigenwertberechnung Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Entwicklung nach 1. Zeile:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - ((2 - \lambda) - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

4. Nullstellen bestimmen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

5. Eigenvektoren bestimmen für $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)x = 0 \text{ führt zu } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine reguläre Matrix T gibt mit:

$$B = T^{-1}AT$$

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist:

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenschaften ähnlicher Matrizen

Für ähnliche Matrizen A und $B = T^{-1}AT$ gilt:

- 1. A und B haben dieselben Eigenwerte mit gleichen algebraischen Vielfachheiten
- 2. Ist x Eigenvektor von B zum Eigenwert λ , so ist Tx Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
- 3. Bei Diagonalisierbarkeit:
 - Die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
 - Die Spalten von T sind die Eigenvektoren von A

Spektralradius Der Spektralradius einer Matrix A ist definiert als:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

Er gibt den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts an.

Von-Mises-Iteration

Von-Mises-Iteration (Vektoriteration)

Für eine diagonalisierbare Matrix A mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ konvergiert die Folge:

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

gegen einen Eigenvektor v zum betragsmäßig größten Eigenwert λ_1 .

Von-Mises-Iteration / Vektoriteration

Algorithmus

- 1. Startvektor $v^{(0)}$ wählen:
 - Zufälligen Vektor oder $(1, \dots, 1)^T$ wählen
 - Auf Länge 1 normieren: $\|v^{(0)}\|_2 = 1$
- 2. Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - Iterationsvektor berechnen: $w^{(k)} = Av^{(k)}$
 - Normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
 - Eigenwertapproximation (Rayleigh-Quotient):

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

- 3. Abbruchkriterien prüfen:
 - Änderung des Eigenvektors: $\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\| < \varepsilon$
 - Änderung des Eigenwertes: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < \varepsilon$
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Verifikation

- Prüfen ob $Av^{(k)} \approx \lambda^{(k)}v^{(k)}$
- Residuum berechnen: $\|Av^{(k)} - \lambda^{(k)}v^{(k)}\|$
- Orthogonalität zu anderen Eigenvektoren prüfen

Von-Mises-Iteration Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Mit Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$:

- 1. Erste Iteration:
 - $w^{(0)} = Av^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4, 0, 2)^T$
 - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4, 0, 2)^T$
 - $\lambda^{(1)} = (v^{(0)})^T Av^{(0)} = 3.33$
- 2. Zweite Iteration:
 - $w^{(1)} = Av^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{20}}(18, -2, 8)^T$
 - $v^{(2)} = \frac{w^{(1)}}{\|w^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{388}}(18, -2, 8)^T$
 - $\lambda^{(2)} = 5.12$

Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5.17$ und $v = (0.89, -0.10, 0.39)^T$

QR-Verfahren

QR-Verfahren

Das QR-Verfahren transformiert die Matrix A iterativ in eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind:

- 1. Initialisierung: $A_0 := A, P_0 := I_n$
- 2. Für $i = 0, 1, 2, \dots$:
 - QR-Zerlegung: $A_i = Q_i R_i$
 - Neue Matrix: $A_{i+1} = R_i Q_i$
 - Update: $P_{i+1} = P_i Q_i$

QR-Verfahren

Voraussetzungen

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Eigenwerte sollten verschiedene Beträge haben für gute Konvergenz

Algorithmus

- 1. Initialisierung:
 - $A_0 := A$
 - $Q_0 := I_n$
- 2. Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - QR-Zerlegung von A_k berechnen: $A_k = Q_k R_k$
 - Neue Matrix berechnen: $A_{k+1} = R_k Q_k$
 - Transformationsmatrix aktualisieren: $P_{k+1} = P_k Q_k$
- 3. Abbruchkriterien prüfen:
 - Subdiagonalelemente nahe Null: $|a_{i+1,i}| < \varepsilon$
 - Änderung der Diagonalelemente klein
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Auswertung

- Eigenwerte: Diagonalelemente von A_k
- Eigenvektoren: Spalten der Matrix P_k
- Bei 2×2 -Blöcken: Komplexe Eigenwertpaare

QR-Verfahren Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1. Erste Iteration:
 - QR-Zerlegung: $Q_1 = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.89 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 2.24 & 0.45 \\ 0 & -1 & 0.89 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 0.45 & 0.45 \\ 0.45 & 0.38 & 0.89 \\ 0.45 & 0.89 & 1 \end{pmatrix}$
- 2. Nach Konvergenz: $A_k \approx \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

Numerische Aspekte

- 1. Wahl des Startpunkts:
 - Von-Mises: zufälliger normierter Vektor
 - Inverse Iteration: Näherung für μ wichtig
 - QR: Matrix vorher auf Hessenberg-Form
- 2. Konvergenzprüfung:
 - Residuum $\|Ax^{(k)} - \lambda^{(k)}x^{(k)}\|$
 - Änderung in aufeinanderfolgenden Iterationen
 - Subdiagonalelemente bei QR
- 3. Spezialfälle:
 - Mehrfache Eigenwerte
 - Komplexe Eigenwerte/vektoren
 - Schlecht konditionierte Matrizen

Prüfungstipps

Allgemeine Hinweise

- Prüfungszeit: 120 Minuten für 6 Aufgaben → ca. 20 min pro Aufgabe
- Alle Aufgaben gleich gewichtet (10 Punkte)
- Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar sein
- Zwischenschritte sind wichtig - auch bei falschen Endergebnissen gibt es Punkte
- Python-Code muss lauffähig sein und kommentiert werden

Was ist immer dabei?

1. Rechnerarithmetik/Konditionierung:
 - Maschinengenauigkeit berechnen
 - Darstellungsbereich bestimmen
 - Konditionszahl analysieren
 - Fehlerfortpflanzung abschätzen
2. Nullstellenverfahren:
 - Newton oder Fixpunktiteration
 - Konvergenznachweis (Banach)
 - A-priori/a-posteriori Abschätzungen
 - 2-3 Iterationsschritte von Hand
3. Lineare Gleichungssysteme:
 - Direkte Verfahren (Gauss, LR)
 - Iterative Verfahren (Jacobi, Gauss-Seidel)
 - Konvergenzbetrachtungen
 - Praktische Anwendungen
4. Eigenwerte:
 - Charakteristisches Polynom
 - Eigenvektoren berechnen
 - QR-Verfahren
 - Von-Mises Iteration

Typische Fallstricke

- Bei Konditionierung:
 - Vorzeichen bei Fehlerabschätzungen beachten
 - Grenzwertbetrachtungen durchführen
 - Auf Sonderfälle achten (z.B. $x \rightarrow 0$)
- Bei Nullstellenproblemen:
 - Konvergenzradius beachten
 - Startwert sinnvoll wählen
 - Abbruchkriterien definieren
- Bei LGS:
 - Pivotisierung nicht vergessen
 - Zeilenvertauschungen dokumentieren
 - Diagonaldominanz prüfen
- Bei Eigenwerten:
 - Vielfachheiten unterscheiden
 - Auf komplexe Eigenwerte achten
 - QR-Schritte sauber durchführen

Effiziente Prüfungsstrategie

1. Erste Durchsicht:
 - Alle Aufgaben überfliegen
 - Schwierigkeitsgrad einschätzen
 - Zeitplan erstellen
2. Bei jeder Aufgabe:
 - Methode identifizieren
 - Zwischenschritte planen
 - Ergebnisse verifizieren
3. Zeit einteilen:
 - Einfache Aufgaben zuerst
 - Zeit für Kontrolle einplanen
 - Nicht zu lange an einer Aufgabe festbeißen
4. Python-Code:
 - Grundgerüst schnell erstellen
 - Gut kommentieren
 - Ausgabe klar kennzeichnen

Musterlösung strukturieren Für eine typische Aufgabe:

1. Aufgabenstellung analysieren:
 - Welche Methode ist gefragt?
 - Was sind die gegebenen Größen?
 - Was ist das Ziel?
2. Lösungsweg skizzieren:
 - Formeln aufschreiben
 - Zwischenschritte planen
 - Benötigte Berechnungen identifizieren
3. Berechnung durchführen:
 - Schrittweise vorgehen
 - Zwischenergebnisse notieren
 - Einheiten mitführen
4. Ergebnis überprüfen:
 - Plausibilitätskontrolle
 - Dimensionskontrolle
 - Eventuell Probe durchführen