Analysis 2

Jil Zernt,Lucien Perret
May 2024

Integralrechnen

Stammfunktionen

Integraltabelle

Funktion | f(x)	Ableitung | f'(x)	Integral | F(x)
1	0	$x + C$
x	1	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
x^a *with* $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\ln(\sin(x)) + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x\ln(x) - x + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Ableitungsregeln

- Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \to f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

- Differenzregel

$$f(x) = g(x) - h(x) \to f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

- Faktorregel

$$f(x) = a \cdot g(x) \to f'(x) = a \cdot g'(x)$$

- Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \to f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

- Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

- Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \to f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'$$

Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_2 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Integral von verschobenen Funktionene

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimte integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

Partielle Integration

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x), v'(x)\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$Beispiel\ Integral: \int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

- Zuordnen der Nullstellen $x_k$vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \dots,\ 1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \dots$$

$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geignete x-Werte einsetzen

$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

$$Beispiel: 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x = 1\ bzw.\ x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert x+1\rvert + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Bemerkung
Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\to deg(r(x)) \geq deg(s(x))$ gilt:

Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int r(u)\mathrm{d}u = r(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$r(u) + C = r(g(x)) + C$$

Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

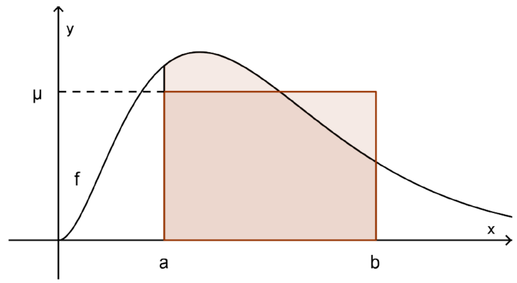
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u = r(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Mittelwert einer Funktion



Definition des Mittelwert μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das

- eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechteks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

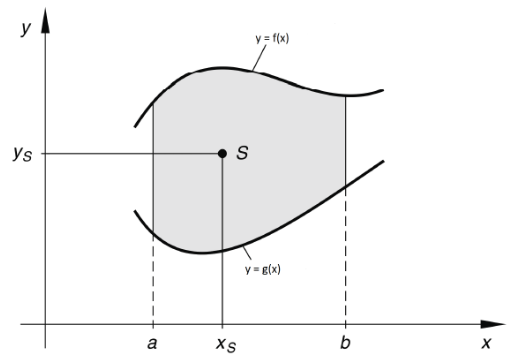
Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

Schwerpunkt ebener Fläche



Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:

$$xs = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

$$ys = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2)\mathrm{d}x$$

Berechnen von A ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$$

Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen V, geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 \mathrm{d}x$$

Uneigentliche Integrale

Definition Uneigentlich Integral Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Type:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

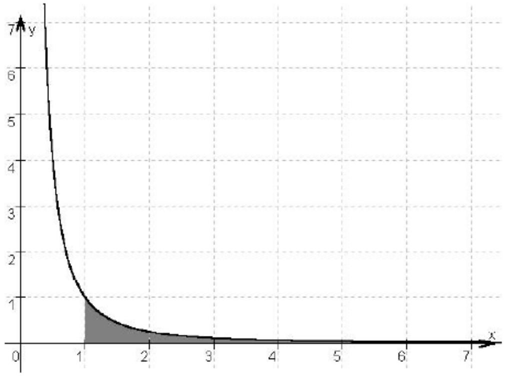
Uneigentliche Integrale erster Art

Definition

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Graphische Darstellung



Berechnung

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 1:

- Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Rechnen mit endlichem Invervall $[\lambda, b]$ mit $\lambda \leq b$ anstelle von unendlichem Integral $(-\infty, b]$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $(-\infty, b]$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \left(\int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 2:

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Einfügen einer künslichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

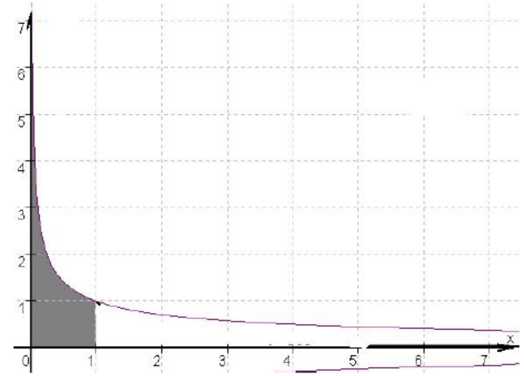
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Definition

Uneigentlich Integrale auf Interval $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \to \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$



Berechnung

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wen ein Pol existiert.

Taylorrreihen

Definition Potenzreihen

- *Spezielle Potenzreihe:* Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ sind die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

- *Allgemeine Potenzreihe:* Eine allgemeinere Form von Potenzreihen entsteht durch Verschiebung um x_0, man spricht dann von einer *Potenzreihe mit Zentrum* x_0:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$$

Definition Taylorreihe

Die *Taylorreihe* oder *Taylorentwicklung* einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist die Potenzreihe

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

deren Ableitungen an der Stelle x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ mit den Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 übereinstimmen.

Definition Taylorpolynom

Wenn die Taylorreihe $t_f(x)$ nach dem Term n-ter Ordnung abgebrochen wird, erhält man das *Taylorpolynom n-ter Ordnung* von $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k,$$

Bemerkung: Die Tangente an eine Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist also exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0!

Vorgehen Berechnen Taylorreihe

- *Ziel:* Berechnung der Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}$ der Taylorreihe $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ einer Funktion $y = f(x)$
- *Methode:* Wir nützen die Bedingung

  $$\underbrace{f^{(k)}(x_0)}_{\text{gegeben}} = \underbrace{t_f^{(k)}(x_0)}_{\text{da versteckt sich } a_k}$$

  zur Bestimmung des k-ten Koeffizienten a_k.
- Dazu müssen wir $t_f^{(k)}(x_0)$ berechnen für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und noch unbekannte a_k's.
- Wir beschränken uns in der Herleitung auf den Fall $x_0 = 0$; der Fall $x_0 \neq 0$ funktioniert genauso.
- Berechnung der Ableitungen $t_f^{(k)}$ von $t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ durch gliedweise Ableitung und Einsetzen von $x = 0$; dabei bleibt von den unendlich vielen Termen jeweils nur einer übrig, und dieser enthält gerade das gesuchte a_k!

Formel für Taylorkoeffizienten

- Formel für k-ten Taylorkoeffizienten der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig:

  $$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} t_f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Symetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

Symetrie von Funktionen

- *Gerade Funktionen:* Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine *gerade* Funktion, falls der Graph achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist, bzw. falls gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- *Ungerade Funktionen:* Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine *ungerade* Funktion, falls der Graph punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist, bzw. falls gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Symetrie von Potenzreihen

Symmetrie von Potenzreihen:

- Eine Potenzreihe

  $$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

  ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symmetrie von Taylorreihen:

- Falls die betrachtete Funktion eine *gerade* Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit *geraden* Exponenten, d.h. es gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- Falls die betrachtete Funktion eine *ungerade* Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit *ungeraden* Exponenten, d.h. es gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Binomialkoeffizienten

- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$, sind das die bekannten Binomialkoeffizienten:

  $$\frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \frac{\alpha!}{(\alpha - k)! \cdot k!} = \binom{\alpha}{k}$$

- Taylorkoeffizienten:

  $$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

- Taylorreihe:

  $$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

- Diese Reihe heisst *Binomialreihe*: Verallgemeinerung der binomischen Formel

  $$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n$$

  auf nicht-natürliche Exponenten

Regel von Bernoulli- de l'Hospital

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien an der Stelle x_0 stetig differenzierbar. Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt die Regel

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls der neue Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ immer noch von einer unbestimmten Form ist, muss man die Regel nochmals anwenden, d.h. $\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ betrachten. Es gibt aber auch Fälle, wo die Regel versagt, d.h. wo man nach beliebig vielen Ableitungen immer bei unbestimmten Ausdrücken bleibt. Dann muss man versuchen, den verlangten Grenzwert mit anderen Methoden zu bestimmen.

Varianten von l'Hospital

- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$ ist, schreiben wir

  $$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

  und wenden dann die Regel an.
- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$ ist, schreiben wir

  $$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

  und wenden dann die Regel an.

Genauigkeit der Approximation

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und sei $p_n(x)$ das Taylorpolynom n-ten Grades von $f(x)$ an der Stelle x_0. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|.$$

Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenzradius

Der *Konvergenzradius* ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$.

Satz

Sei $\rho \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Der (reelle) Konvergenzbereich von $p(x)$ ist das Intervall

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

zusammen mit 0,1 oder 2 Randpunkten dieses Intervalls.

Bemerkung

Es können also auch folgende Extremfälle von Konvergenzradien auftreten:

- Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
- Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konvergenzradius Formel

Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad \text{oder} \qquad \rho = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Differentialgleichungen

Definition Differentialgleichung

- Eine *Differentialgleichung* n-ter Ordnung ist eine Gleichung

  $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

  für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man die DGL *explizit*, ansonsten *implizit*.

Definition Anfangswertproblem

- Ein *Anfangswertproblem* einer DGL n-ter Ordnung ist

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) &= 0, \quad (x,y,\dots y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{cases}$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' &= G(x,y), \quad (x,y,y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

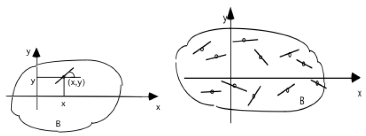
- Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.
- Die Lösung eines Anfangswertproblems nennt man eine *spezielle* bzw. *partikuläre Lösung* der DGL.

Definition Richtungsfeld

Ziel: **Geometrisches** Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h.

$$y' = f(x,y).$$

Idee: $f(x,y)$ gibt die **Steigung** der Lösungskurve im Punkt (x,y) an!



- Alle Steigungen ergeben ein *Vektorfeld* in der Ebene an, das **Richtungsfeld** der DGL $y' = f(x,y)$. Wir erhalten so die **Tangenten** an die Lösungskurven!
- Wir müssen Kurven mit vorgegebenen Tangentenstücken finden. Dies bedeutet "DGL lösen" geometrisch.

Spezielle Typen von DGL:

- *Unbestimmtes Integral:* $y' = f(x)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von y, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in y-Richtung ineinander über
- *Autonome DGL:* $y' = f(y)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von x, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in x-Richtung ineinander über

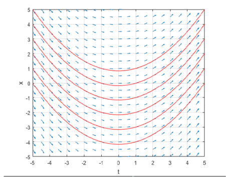


Abbildung: Unbestimmtes Integral

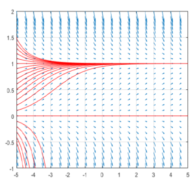


Abbildung: Autonome DGL

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine konstante Lösung der autonomen DGL $y' = f(y)$.

- Um die konstanten Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$ zu finden, müssen wir also die (algebraische) Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

Seperierbare Differentialgleichungen

- Die DGL heisst *separierbar*, falls $F(x,y)$ also Produkt eines x- und eines y-Anteils geschrieben werden kann, d.h. falls die DGL von der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

ist, für irgendwelche Funktionen $g(x)$ und $h(y)$.

- Die DGL heisst *autonom*, falls $F(x,y)$ nur von y abhängt, d.h. falls die DGL von der Form

$$y' = f(y)$$

ist.

Lösen von Seperiaerbaren Differentialgleichungen

- DGL:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$

- Falls $h(y_0) = 0$: Dann ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL (vgl. die Diskussion konstanter Lösungen in Vorlesung 10).
- Trennung aller x- und y-Terme:

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \mathrm{d}y = g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

- Integration auf beiden Seiten:

$$\int \frac{1}{h(y)} \,\mathrm{d}y = \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

- Auflösen nach y, Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \,\mathrm{d}t$$

- *Vorsicht:* Die gesuchte spezielle Lösung der DGL könnte evtl. auch eine der vorab diskutierten konstanten Lösungen sein.

Formel für inhomogene Differentialgleichungen

- Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

- Einsetzen des Ansatzes $y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$, mit Benützung von Produkt- und Kettenregel für die Berechnung von y':

$$\underbrace{K'(x)e^{-F(x)} - K(x)\underbrace{f(x)}_{=F'(x)}e^{-F(x)}}_{y'} + f(x)\underbrace{K(x)e^{-F(x)}}_{y} = g(x)$$

- Vereinfachung:

$$K'(x)e^{-F(x)} = g(x)$$

- Auflösen nach $K'(x)$:

$$K'(x) = g(x)e^{F(x)}$$

- Integration:

$$K(x) = \int g(x)e^{F(x)} \,\mathrm{d}x$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

ist gegeben durch

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x)e^{F(x)} \,\mathrm{d}x,$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Lösung von Anfangswertproblemen mit seperiarbaren DGL

Theoretische Formulierung des Verfahrens zur Lösung von AWP der Form $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$:

Satz

Seien $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen, und sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \,\mathrm{d}t$$

berechnet werden und dann nach y aufgelöst wird.

Numerische Verfahren

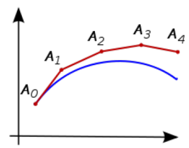
Eulerverfahren

Gleichung der Gerade mit Steigung m im Punkt (x_k, y_k):

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$

DGL: $y' = f(x,y)$; also erhalten wir mit $m = f(x_k, y_k)$ die Tangente an die Lösungskurve im Punkt (x_k, y_k):

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$



Für $k = 0$ und $x = x_1$:

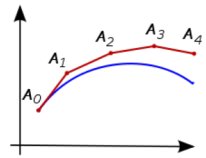
$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

Algorithmus des expliziten Euler-Verfahrens, für k beliebig und $x = x_{k+1}$:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

Probleme des Eulerverfahren

- Explizites Euler-Verfahren:



Algorithmus:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

- *Problem:* Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls $[x_k, x_k + h]$ berücksichtigt!
- *Lösung:* Verbesserte numerische Verfahren!