# Höhere Mathematik

Jil Zerndt, Lucien Perret
May 2024

## Rechnerarithmetik

### Zahlendarstellung und Maschinenzahlen

Maschinendarstellbare Zahlen $M$ zur Basis $B$ :

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \dots m_n \cdot B^{\pm e_1 e_2 \dots e_l} \right\} \cup \{0\}$$

Dabei gilt $m_1 \neq 0, m_i, e_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ für $i \neq 0$ und $B \in \mathbb{N}(B > 1)$

### Der Wert $\widehat{\omega}$ einer solchen Zahl ist definiert als

$$\widehat{\omega} = \sum_{i=1}^{n} m_i B^{\hat{e}-i}, \quad \hat{e} = \sum_{l=1}^{l} e_i B^{l-i}$$

$x$ wird als n -stellige Gleitpunktzahl zur Basis $B$ bezeichnet.
Beispiel: $\underbrace{0.3211}_{n=4} \cdot \underbrace{4^{12}}_{l=2}$

1. $\hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$
2. $\widehat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$

### Gleitpunktzahlen

- Single Precision (32 Bit) $V = 1$ Bit $E = 8$ Bit $M = 23$ Bit
- Double Precision (64 Bit) $V = 1$ Bit $E = 11$ Bit $M = 52$ Bit

Bei allgemeiner Basis $B$ gilt (Maschinengenauigkeit = *eps* )

$$\text{eps} := \frac{B}{2} \cdot B^{-n}, \quad eps_{10} := 5 \cdot 10^{-n}$$

Sie bezeichnet den maximalen relativen Fehler, der durch Rundungen entstehen kann.

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq 5 \cdot 10^{-n} \quad \left( \text{da } x \geq 10^{e-1} \right)$$

### Approximations- und Rundungsfehler

Die Maschinenzahlen sind nicht gleichmässig verteilt. Bei jedem Rechner gibt es eine grösste ($x_{\max}$) und kleinste ($x_{\min}$) positive Maschinenzahl.

- $x_{\max} = B^{e_{\max}} - B^{e_{\max}-n} = \left(1 - B^{-n}\right) \cdot B^{e_{\max}}$
- $x_{\min} = B^{e_{\min}-1}$

### Definition

Gegeben sei eine Näherung $\tilde{x}$ zu einem exakten Wert $x$

- Absoluter Fehler
  $|\tilde{x} - x|$
- Relativer Fehler
  $\left| \frac{\tilde{x}-x}{x} \right| bzw \cdot \frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$

### Fehlerfortpflanzung bei Funktionsauswertungen / Konditionierung

Näherung für den absoluten und relativen Fehler bei Funktionsauswertungen

$$\underbrace{|f(\tilde{x}) - f(x)|}_{\text{absoluter Fehler von } f(x)} \approx \left|f'(x)\right| \cdot \underbrace{|\tilde{x} - x|}_{\text{absoluter Fehler von } x}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx \underbrace{\frac{\left|f'(x)\right| \cdot |x|}{|f(x)|}}_{\text{Konditionszahl } K} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

Den Faktor $K$ nennt man Konditionszahl.

$$K := \frac{\left|f'(x)\right| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

Relative Fehlervergrösserung von $x$, bei einer Funktionsauswertung von $f(x)$.

- Gut konditionierte Probleme — Konditionszahl ist klein ($\leq 1$)
- Schlecht konditionierte Probleme — Konditionszahl ist gross ($> 1$)

## Lösung von Nullstellenproblemen

### Problemstellung NSP

Eine Gleichung der Form $F(x) = x$ heisst Fixpunktgleichung.

- Ihre Lösungen $\bar{x}$, für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist, heissen Fixpunkte.

### Fixpunktiteration

Gegeben sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, mit $x_0 \in [a, b]$. Die rekursive Folge

$$x_{x+1} \equiv F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Heisst Fixpunktiteration von $F$ zum Startwert $x_0$.
Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung $F'$ und $\bar{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von $F$. Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$

- $\left|F'(\bar{x})\right| < 1$ $x_n$ konvergiert gegen $\bar{x}$, falls $x_0$ nahe genug bei $\bar{x}$ liegt anziehend
- $\left|F'(\bar{x})\right| > 1$ $x_n$ konvergiert für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$ abstossend

## Banachscher Fixpunktsatz

Sei $F : [a, b] \to [a, b]$ und es existiere eine Konstante $\alpha$, wobei gilt

- $\alpha (0 < \alpha < 1)$ : Lipschitz-Konstante
- $\forall_{x,y}(x, y \in [a, b])$

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|} \leq \alpha$$

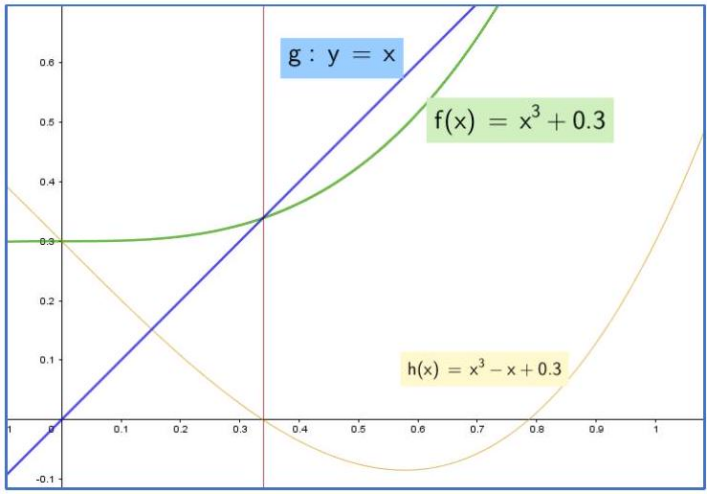
Dann gilt

- $F$ hat genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert gegen $\bar{x}$ für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$
- Es gelten die Fehlerabschätzungen
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$ a-priori Abschätzung
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$ a-posteriori Abschätzung

Berechne die Nullstellen von $p(x) = x^3 - x + 0.3$
Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$$

$F(x_n)$ steigt stetig an




$F : I \to I$ gilt wenn...

$$F(a) > a, \quad F(b) < b$$

Alpha bestimmen / überprüfen

$$\alpha = \max_{x \in I} \left|F'(x)\right| \leq 1$$

Anzahl Iterationen $n$ berechnen

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{tol \cdot (1-\alpha)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln \alpha}$$

### Newton-Verfahren

Sukzessive Approximation der Funktionskurve $y = f(x)$ durch Tangenten, deren Schnittpunkt mit der x-Achse problemlos berechnet werden kann
Lösung $\xi$ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.
> Startwert $x_0$ geeignet wählen (nahe bei $\xi$ )
> Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Lösung $\xi$ der Gleichung $f(x) = 0$.
$(x_0, x_1, x_2, \dots)$ ist sicher gegeben, wenn im Intervall $[a, b]$, in dem alle Näherungswerte (und die Nullstellen selbst) liegen sollen, die Bedingung

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \right| < 1$$

Erfüllt ist (hinreichende Konvergenzbedingung).

## Vereinfachtes Newton-Verfahren

Statt in jedem Schritt $f'(x_n)$ auszurechnen, kann man immer wieder $f'(x_0)$ verwenden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

## Sekantenverfahren

Der Schnittpunkt von Sekanten durch jeweils zwei Punkte $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ und $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ mit der $x$-Achse, wird berechnet.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)} \cdot f\left(x_n\right)$$

### Konvergenzgeschwindigkeit

Sei $(x_n)$ eine gegen $\bar{x}$ konvergierende Folge. Dann hat das Verfahren die Konvergenzordnung $q \geq 1$ wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

Für alle $n$.

- $q = 1$ lineare Konvergenz verlangt man noch $c < 1$.
- $q = 2$ quadratische Konvergenz

### Fehlerabschätzung

Nullstellensatz von Bolzano
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$. Dann muss $f$ in $[a, b]$ eine Nullstelle besitzen.
Sei $x_n$ also ein iterativ bestimmter Näherungswert einer exakten Nullstelle $\xi$ der stetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte für ein vorgegebene Fehlerschranke / Fehlertolerant $\epsilon > 0$

$$f\left(x_n - \epsilon\right) \cdot f\left(x_n + \epsilon\right) < 0$$

Dann muss gemäss dem Nullstellensatz im offenen Intervall $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$ eine Nullstelle $\xi$ liegen und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| < \epsilon$$

## Lineare Gleichungssysteme

### Gauss-Algorithmus

Gauss-Algorithmus für ein Gleichungssystem $Ax = b$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Umformung des Gleichungssystems $Ax = b$, in ein äquivalentes Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$, so dass die Matrix $\tilde{A}$ als obere Dreiecksmatrix vorliegt.

- $z_j := z_j - \lambda z_i \quad i < j (\lambda \in \mathbb{R}), z_i$ ist die $i$-te Zeile des Gleichungssystems
- $z_i \to z_j$ Vertauschen der $i$-ten und $j$-ten Zeile im System

Rekursive Vorschrift für ein Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$ :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot x_n}{a_{n-1n-1}}, \ldots, x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \cdots - a_{1n} \cdot x_n}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

### Fehlerfortpflanzung und Pivotisierung

Für $i = 1, ..n$ :
Erzeuge Nullen unterhalb des Diagonalelements in der i-ten Spalte

- Suche das betragsgrösste Element unterhalb der Diagonalen in der i-ten Spalte: Wähle $k$ so, dass $|a_{ki}| = \max\left\{\left|a_{ji}\right| \mid j = i, \ldots n\right\}$

$$\begin{cases} \text{falls } a_{ki} = 0: & \text{A ist nicht regulär; stop;} \\ \text{falls } a_{ki} \neq 0: & z_k \leftrightarrow z_i \end{cases}$$

- Eliminationsschritt:

Für $j = i + 1, \ldots, n$ eliminiere das Element $a_{ji}$ durch

$$z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \cdot z_i$$

### Dreieckszerlegung von Matrizen

#### Determinante

Gegeben sei eine Matrix $A$, woraus die obere Dreiecksmatrix $\tilde{A}$ entsteht.

- $\tilde{a}_{ii}$ : Diagonalelemente von $\tilde{A}$
- $l$ : Anzahl Zeilenvertauschungen

$$\det(A) = (-1)^l \cdot \det(\tilde{A}) = (-1)^l \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3) \cdot (2) \cdot (2) = 12$$

#### LR-Zerlegung

Das ursprüngliche Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lautet mit der $LR$-Zerlegung

$$LRx = b \Leftrightarrow Ly = b \text{ und } Rx = y$$

Für eine $n \times n$ Matrix $A$, gibt es $n \times n$ Matrizen $L$ und $R$ mit den Eigenschaften

- $L$ ist eine normierte untere Dreiecksmatrix mit $l_{ii} = 1 (i = 1, \ldots, n)$
- $R$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit $r_{ii} \neq 0 (i = 1, \ldots, n)$
- $A = L \cdot R$ ist die $LR$-Zerlegung von $A$.

## Zerlegung mit Zeilenvertauschung

$P_K$ erhält man aus der Einheitsmatrix $I_n$ durch Vertauschen der $i$-ten und $j$-ten Zeile.
Zeilen-Vertauschungen werden durch $P_1 \ldots P_n$ ausgedrückt.

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_{n-i+1}$$

Mit dieser Permutationsmatrix erhält man dann als $RL-$ Zerlegung

$$PA = LR$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lässt sich schreiben als $PAx = Pb$ bzw. $LRx = Pb$ und in den zwei Schritten lösen

$$Ly = Pb \to y = \cdots$$

$$Rx = y \to x = \cdots$$

Vertauschung der 1. Und 3. Zeile bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to A^* = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I^* \cdot A = P_1 \cdot A = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = LR$$

$$i = 1, j = 2 \to z_2 = z_2 - \frac{1}{(-1)} \cdot z_1 \to A_1 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 1-1 & -3+1 & -1+1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, j = 3 \to z_3 = z_3 - \underbrace{\frac{5}{(-1)}}_{l_{21}} \cdot z_1 \to A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5-5 & 1+5 & 4+5 \end{pmatrix}$$

$$i = 2, j = 3 \to z_3 \equiv z_3 - \underbrace{\frac{6}{(-2)}}_{l_{32}} \cdot z_2 \to A_3 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 0 & & \\ 0+0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$R = 2$$

Einsetzen in $L$

$$l_{21} = \frac{1}{-1} = -1, \quad l_{31} = \frac{5}{-1} = -5, \quad l_{32} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

#### QR-Zerlegung

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst orthogonal, wenn $Q^T \cdot Q = I_n$ ist. Dabei ist $I_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine $QR$-Zerlegung von $A$ ist eine Darstellung von $A$ als Produkt einer orthogonalen $n \times n$ Matrix $Q$ und einer rechtsoberen $n \times n$ Dreiecksmatrix $R$

$$A = QR$$

Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$$

Algorithmus zur QR-Zerlegung

$$R := A, \quad Q := I_n$$

Für $i = 1, \ldots, n-1$ :
erzeuge Nullen in $R$ in der $i$-ten Spalte unterhalb der Diagonalen
1. $H_i$ mit $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$ berechnen
2. $H_i$ mit $I_{i-1}$ Block links oben erweitern $\to Q_i$
3. $R := Q_i \cdot R$
4. $Q := Q \cdot Q_i^T$

Ablauf

$$H_1 \cdot A_1 = H_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{A_1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $v_1 := a_1 + \operatorname{sign}(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
2. $u_1 := \frac{1}{|v_1|} \cdot v_1$
3. $H_1 := I_n - 2u_1u_1^T = Q_1$

$$H_2 \cdot A_2 = H_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A_2} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & H_2 \\ 0 & H_2 & H_2 \end{pmatrix}$$

$$Q := Q_1^T \cdot Q_2^T, \quad R := \underbrace{Q_2 \cdot Q_1}_{Q^{-1}} \cdot A$$

## Fehlerrechnung und Aufwandabschätzung

Eine Abbildung $\|\| : .\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Vektornorm, wenn die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt sind:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ "Dreiecksgleichung"

Für Vektoren $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gibt es die folgenden Vektornormen

- 1-Norm Summennorm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

- 2-Norm Euklidische Norm
- $\infty$-Norm Maximumnorm

Für eine $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es die folgenden Matrixnormen

- 1-Norm Spaltensummennorm $\|A\|_1 = \max_{j-1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- 2-Norm Spektralnorm $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$
- $\infty$-Norm Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$

### Fehlerabschätzung

#### Abschätzung für Fehlerhafte Matrizen

Sei $\|.\| eine Norm, A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Falls

$$\operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < 1$$

Dann gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right)$$

#### Abschätzung für Fehlerhafte Vektoren

Sei $\|.\|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix und $x, \tilde{x}, b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Dann gilt für den absoluten und den relativen Fehler in $x$ :

- $\|x - \tilde{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$
- $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$, falls $\|b\| \neq 0$
  Die Zahl cond $(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ nennt man Konditionszahl der Matrix $A$
- cond$(A)$ gross $\rightarrow$ schlechte Konditionierung

Untersuchen Sie die Fehlerfortpflanzung im linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Für den Fall, dass die rechte Seite von $\tilde{b}$ in jeder Komponente um maximal 0.1 von $b$ abweicht.

$$\|\tilde{b} - b\|_\infty \leq 0.1, \quad \|A\|_\infty = \max\{2 + 4, 4 + 8.1\} = 12.1$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 40.5 & -20 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 60.5$$

$$\operatorname{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \cdot \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 12.1 \cdot 60.5 = 732.05$$

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \cdot \|b - \tilde{b}\|_\infty \leq 60.5 \cdot 0.1 = \underbrace{6.05}_{\text{absoluter Fehler}}$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \operatorname{cond}(A)_\infty \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \leq 732 \cdot \frac{0.1}{1.5} = \underbrace{48.8}_{\text{relativer Fehler}}$$

### Aufwandabschätzung

Die Anzahl Gleitkommaoperationen werden in Abhängigkeit von $n$ bestimmt.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \text{ und } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \quad n = \text{ Dimension}$$

Ein Algorithmus hat die Ordnung $O\left(n^q\right)$, wenn $q > 0$ die minimale Zahl ist, für die es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass der Algorithmus für alle $n \in N$ weniger als

## Beispiel

Wie viele Gleitkommaoperationen benötigt das Rückwärtseinsetzen gemäss Gauss?

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

Multiplikation und Division

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Addition und Subtraktion

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n - 1 + 1) \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Summe beider Operationstypen

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2$$

## Iterative Verfahren

Iterative Verfahren sind effizienter, jedoch kann man keine genauen Lösungen erwarten. Ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)}$ berechnet man mittels einer Rechenvorschrift $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ iterativ eine Folge von Vektoren

$$x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right) \text{ mit } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zu lösen sei $Ax = b$. Die Matrix $A = \left(a_{ij}\right)$ sei zerlegt in der Form $A = L + D + R =$

### Jacobi-Verfahren

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}\left(19 - \sum_{j=1, j\neq 1}^{3} a_{1j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{8}(19 - (5 \cdot -1 + 2 \cdot 3)) = \frac{18}{8}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{9}\left(5 - \sum_{j=1, j\neq 2}^{3} a_{2j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{9}(5 - (5 \cdot 1 + 1 \cdot 3)) = -\frac{1}{3}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{7}\left(34 - \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} a_{3j} \cdot x_j^{(0)}\right) = \frac{1}{7}(34 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -1)) = \frac{32}{7}$$

Fixpunktiteration gemäss Jacobi (Gesamtschritt-Verfahren):

$$Dx^{(k+1)} = -(L + R)x^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Implementation /Allgemeine Form gemäss Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n$$

### Gauss-Seidel-Verfahren

Fixpunktiteration gemäss Gauss-Seidel (Einzelschritt-Verfahren):

$$(D+L)x^{(k+1)} = -Rx^{(k)} + b$$
$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} \cdot Rx^{(k)} + (D+L)^{-1} \cdot b$$

Implementation / Allgemeine Form gemäss Gauss-Seidel
$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n$

### Konvergenz der Fixpunktiteration

Gegeben sei eine Fixpunktiteration

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c =: F\left(x^{(n)}\right)$$

Für das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) gilt

$$B = -D^{-1}(L+R)$$

Für das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) gilt $B = -(D+L)^{-1}R$
Wobei $B$ eine $n \times n$ Matrix ist und $c \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\|$. $\|$ eine der eingeführten Normen und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ erfülle $\bar{x} = B\bar{x} + c = F(\bar{x})$. Dann heisst

- $\bar{x}$ anziehender Fixpunkt, falls $\|B\| < 1$
- $\bar{x}$ abstossender Fixpunkt, falls $\|B\| > 1$
- $\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \leq \frac{\|B\|^n}{1-\|B\|} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$ a-priori Abschätzung
- $\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \cdot \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|$ a-posteriori Abschätzung

$A$ ist eine diagonaldominante Matrix, falls eines der beiden folgenden Kriterien gilt

- $f$ für alle $i = 1, \ldots, n : |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|a_{i,j}\right|$ (Zeilensummenkriterium)
- für alle $j = 1, \ldots, n : \left|a_{jj}\right| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left|a_{i,j}\right|$ (Spaltensummenkriterium)

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}\right| \rightarrow \begin{cases} i = 1 \rightarrow 4 > 2 \\ i = 2 \rightarrow 5 > 3 \\ i = 3 \rightarrow 5 > 3 \end{cases}$$

Fall $A$ diagonaldominant ist, konvergiert das Gesamtschrittverfahren (Jacobi) und auch das Einzelschrittverfahren (Gauss-Seidel) für $Ax = b$. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Konvergenz ist Spektralradius $\rho(B) < 1$

## Eigenwerte und Eigenvektoren

## Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so dass nun also auch Gleichungen der folgenden Art lösbar werden

$$x^2 + 1 = 0$$

Dafür wird die imaginäre Einheit $i$ mit der folgenden Eigenschaft eingeführt.

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl $z$ ist ein geordnetes Paar $(x, y)$ zweier Zahlen $x$ und $y$.

$$z = x + iy$$

Die imaginäre Einheit $i$ ist definiert durch

$$i^2 = -1$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + \text{ iy mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die reellen Bestandteile $x$ und $y$ von $z$ werden als Real- und Imaginärteil bezeichnet

- Realteil von $z$ $\quad \mathrm{Re}(z) = x$
- Imaginärteil von $z$ $\quad \mathrm{Im}(z) = y$

Die zu $z$ konjugierte komplexe Zahl ist definiert als $z^* = x - iy$. Dies entspricht der an der $x$ - Achse gespiegelten Zahl.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$. Dies entspricht der Länge des Zeigers.

### Darstellungsformen

- Normalform $z = x + iy$
- Trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
- Exponentialform $\quad z = re^{i\varphi}$

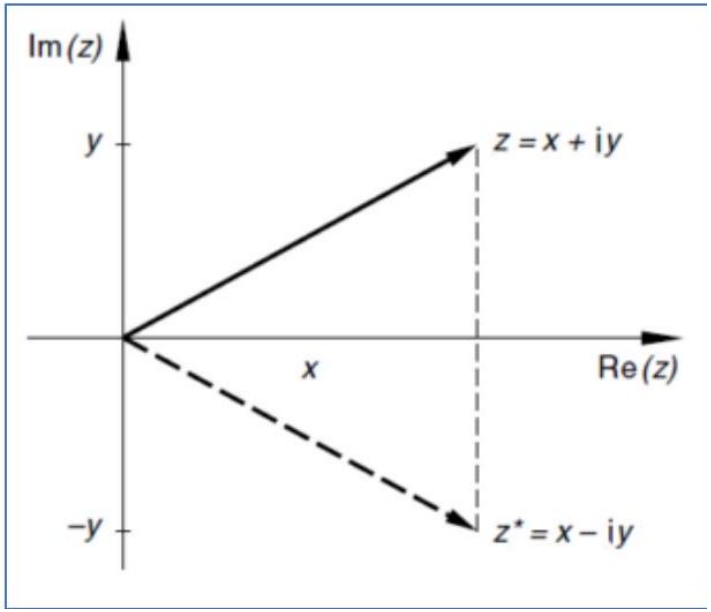
$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Beispiel

$$z = 3 - 11i$$

$$3 = r \cdot \cos\varphi, \quad 11 = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$$
$$\arcsin\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \varphi = 1.3$$

$$z = \cos(1.3) + i \cdot \sin(1.3), \quad z = \sqrt{130} \cdot e^{i \cdot 1.3}$$




### Grundrechenarten

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

- Summation $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
- Subtraktion $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

### Potenzieren und Radizieren

Die $n$-te Potenz einer komplexen Zahl lässt sich einfach berechnen, wenn diese in der trigonometrischen oder der Exponentialform vorliegt (Sei $n \in \mathbb{N}$ ):

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \rightarrow z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Fundamentalgesetz der Algebra
Eine algebraische Gleichung $n$-ten Grades mit komplexen Koeffizienten und Variablen $a_i, z \in \mathbb{C}$

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$$

Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen genau $n$ Lösungen

### Wurzel einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl $z$ wird als $n$-te Wurzel von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wenn

$$z^n = a \to z = \sqrt[n]{a}$$

Lösungen der algebraischen Gleichung $z^n = a$

$$z^n = a = r_0 e^{i\varphi} \; (r_0 > 0; n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ genau $n$ verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r\left(\cos\varphi_k + i \cdot \sin\varphi_k\right) = re^{i\varphi_k}$$

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad (f\ddot{u}r k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{r_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen $n$-Ecks.

## Intro EW und EV

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.$\lambda \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von $A$, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

$x$ heisst dann Eigenvektor von $A$.

### Eigenschaften von Eigenwerten

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

Die Eigenwerte einer Diagonal- oder eine Dreiecksmatrix sind deren Diagonalelemente.

### Polynom und Spur

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \Leftrightarrow \det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$$

Die Abbildung $p$ ist definiert durch

$$p(\lambda) \to \det\left(A - \lambda I_n\right)$$

Ist ein Polynom vom Grad $n$ und wird charakteristisches Polynom von $A$ genannt. Die Eigenwerte von $A$ sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit hat $A$ also genau $n$ Eigenwerte, von denen manche mehrfach vorliegen können.
Die Determinante der Matrix $A$ ist gerade das Produkt ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von $A$, d.h. gleich der Spur (tr) von $A$ :

- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Ist $\lambda_i$ ein Eigenwert der regulären Matrix $A$, so ist der Kehrwert $\frac{1}{\lambda_i}$ ein Eigenwert der inversen Matrix $A^{-1}$.

### Vielfachheit und Spektrum

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Vielfachheit, mit der $\lambda$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $A$ auftritt, heisst algebraische Vielfachheit von $\lambda$.
Das Spektrum $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von $A$.

### Beispiel

Berechne Spektrum, Determinante und Spur von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6$$

Spur

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

Spektrum

$$\sigma(A) = 3$$

### Eigenschaften von Eigenvektoren

Seien zwei Eigenvektoren $x, y$ zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so ist $x + y$ und auch jedes Vielfach von $x$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ :

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda = \lambda(x + y)$$
$$A(\mu x) = \mu Ax = \mu\lambda x = \lambda\mu x$$

### Eigenraum

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$ zusammen mit dem Nullvektor 0 einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$, den sogenannten Eigenraum
Der Eigenraum des Eigenwertes $\lambda$ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$\left(A - \lambda I_n\right) x = 0$$

Welches nur dann eine nicht-triviale Lösung aufweist, wenn $rg\left(A - \lambda I_n\right) < n$.
Die Dimension des Eigenraumes von $\lambda$ wird die geometrische Vielfachheit von $\lambda$ genannt. Sie berechnet sich als

$$n - rg\left(A - \lambda I_n\right)$$

Und gibt die Anzahl der lin. Unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$.
Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein. Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
Beispiel: Berechne Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 \cdot -1$$
$$p(\lambda) = -4 + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda^2 = -1 = i^2$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Eigenvektor für $\boldsymbol{\lambda_1 = i}$

$$\begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ 0 & -2-i+\frac{5}{2-i} \end{pmatrix}$$
$$-2 - i + \frac{5}{2-i} = (2-i)(-2-i) + 5 = 1 + i^2 = 0$$
$$0 = (2-i) \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$
$$x_1 = -\frac{5x_2}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = -\frac{5 \cdot (2+i)}{4-i^2} = -\frac{10+5i}{5} = -2 - i$$
$$x_1 = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \,\middle|\, x = \mu = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E_{\lambda_2} = \left\{ x \,\middle|\, x = \mu = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

## Numerische Berechnung EW und EV

### Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $T$ eine reguläre Matrix mit ... so heissen $B$ und $A$ zueinander ähnliche Matrizen.

$$B = T^{-1}AT$$

Im Spezialfall, dass $B = D$ ein Diagonalmatrix ist, also ... nennt man $A$ diagonalisierbar.

$$D = T^{-1}AT$$

### Eigenwerte und Eigenvektoren ähnlicher / diagonalisierbarer Matrizen

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zueinander ähnliche Matrizen. Dann gilt

1. $A$ und $B$ haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraische Vielfachheit
2. Ist $x$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ von $B$, dann ist $Tx$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ von $A$.
3. Falls $A$ diagonalisierbar ist

- Diagonalelemente von $D$ sind die Eigenwerte von $A$
- Die linear unabhängigen Eigenvektoren von $A$ stehen in den Spalten von $T$

Der Spektralradius $p(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$p(A) = \max\left\{ |\lambda| \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \right\}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und dem betragsmässig grössten Eigenwert $\lambda_1$ mit

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

## Vektoriteration / von-Mises-Iteration

So konvergieren für (fast) jeden Startvektor $v^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit Länge 1 die Folgen

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\left\|Av^{(k)}\right\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{\left(v^{(k)}\right)^T Av^{(k)}}{\left(v^{(k)}\right)^T v^{(k)}}$$

Für $k \to \infty$ gegen einen Eigenvektor $v$ zum Eigenwert $\lambda_1$ von $A$ (also $v^{(k)} \to v$ und $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$ )

## $QR$-Verfahren

Sei $A \in R^{n \times n}$

$$A_0 := A, \quad P_0 := I_n$$

Für $i = 0, 1, 2, \ldots$

- $A_i := Q_i \cdot R_i$
  $QR$-Zerlegung von $A_i$
- $A_{i+1} := R_i \cdot Q_i$
- $P_{i+1} := P_i \cdot Q_i$