

Rechnerarithmetik

Maschinenzahlen Eine maschinendarstellbare Zahl zur Basis B ist ein Element der Menge:

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 0.m_1m_2m_3 \dots m_n \cdot B^{\pm e_1e_2 \dots e_l}\} \cup \{0\}$$

- $m_1 \neq 0$ (Normalisierungsbedingung)
- $m_i, e_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ für $i \neq 0$
- $B \in \mathbb{N}, B > 1$ (Basis)

Zahlenwert $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i B^{\hat{e}-i}$, mit $\hat{e} = \sum_{i=1}^l e_i B^{l-i}$

B = Basis, n = Mantissenlänge, l = Exponentenlänge
 m_i = Mantissenstelle, e_i = Exponentenstelle

Werteberechnung einer Maschinenzahl

- Normalisierung überprüfen: $m_1 \neq 0$ (für $x \neq 0$)
 - Sonst: Mantisse verschieben und Exponent anpassen
- Exponent berechnen: $\hat{e} = \sum_{i=1}^l e_i B^{l-i}$
 - Von links nach rechts: Stelle \cdot Basis hochgestellt zur Position
- Wert berechnen: $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i B^{\hat{e}-i}$
 - Mantissenstellen \cdot Basis hochgestellt zu (Exponent - Position)
- Vorzeichen berücksichtigen

Werteberechnung Berechnung einer vierstelligen Zahl zur Basis 4:

$$\underbrace{0.3211}_{n=4} \cdot \underbrace{4^{12}}_{l=2} \quad \text{Exponent: } \hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$$
$$\text{Wert: } \hat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$$

IEEE-754 Standard definiert zwei wichtige Gleitpunktformate:

Single Precision (32 Bit)	Double Precision (64 Bit)
Vorzeichen(V): 1 Bit	Vorzeichen(V): 1 Bit
Exponent(E): 8 Bit (Bias 127)	Exponent(E): 11 Bit (Bias 1023)
Mantisse(M):	Mantisse(M):
23 Bit + 1 hidden bit	52 Bit + 1 hidden bit

IEEE-754 Details

- Overflow:** Zahlen $\notin [-x_{max}, x_{max}]$ führen zum Abbruch mit \inf
- Underflow:** Zahlen in $[-x_{min}, x_{min}]$ werden zu 0 gerundet

Darstellungsbereich Für jedes Gleitpunktsystem existieren:

- Grösste darstellbare Zahl: $x_{max} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{max}}$
- Kleinste darstellbare positive Zahl: $x_{min} = B^{e_{min}-1}$

Maschinengenauigkeit analysieren

- Anzahl Maschinenzahlen bestimmen: $2 \cdot (B-1) \cdot B^{n-1} \cdot (B^l - 1)$
- Darstellungsbereich bestimmen: x_{max}, x_{min}
- Maschinengenauigkeit berechnen: $eps = \frac{B}{2} B^{-n}$

Maschinenzahlen analysieren Gegeben: 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligem Exponenten im Dualsystem.

- Basis $B = 2$, $n = 15$, $l = 5$
- Anzahl verschiedener Zahlen:
 - Pro Stelle: $B - 1 = 1$ mögliche Ziffern
 - Mantisse: $(B-1)B^{n-1} = 2^{14}$ Kombinationen
 - Exponent: $B^l = 2^5 = 32$ Kombinationen
 - Mit Vorzeichen: $2 \cdot 2^{14} \cdot 31 = 1\,015\,808$ Zahlen
- Maschinengenauigkeit: $eps = \frac{2}{2} 2^{-15} = 2^{-15} \approx 3.052 \cdot 10^{-5}$
→ kleineres eps bedeutet höhere Genauigkeit

Approximations- und Rundungsfehler

Fehlerarten Sei \tilde{x} eine Näherung des exakten Wertes x :

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$ **Relativer Fehler:** $\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$ bzw. $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$ für $x \neq 0$

Maschinengenauigkeit eps ist die kleinste positive Zahl, für die gilt:
Allgemein: $eps := \frac{B}{2} \cdot B^{-n}$ **Dezimal:** $eps_{10} := 5 \cdot 10^{-n}$

Sie begrenzt den maximalen relativen Rundungsfehler: $\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq eps$

Rundungseigenschaften Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_{min}$ gilt:

Absoluter Fehler: $|rd(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-n-1}$ **Relativer Fehler:** $\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq eps$

Fehlerfortpflanzung

Konditionierung Die Konditionszahl K beschreibt die relative Fehlervergrößerung bei Funktionsauswertungen:

$K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$

- $K \leq 1$: gut konditioniert
- $K > 1$: schlecht konditioniert
- $K \gg 1$: sehr schlecht konditioniert

Fehlerfortpflanzung Für f (differenzierbar) gilt näherungsweise:

Absoluter Fehler: $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$ **Relativer Fehler:** $\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx K \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

Analyse der Fehlerfortpflanzung einer Funktion

- Berechnen Sie $f'(x)$ und die Konditionszahl K
- Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler ab
- Beurteilen Sie die Konditionierung anhand von K

Konditionierung berechnen Für $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $x_0 = 10^{-8}$:

- $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $K = \frac{|x \cdot x|}{|\sqrt{1+x^2} \cdot (1+x^2)|} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$
- Für $x_0 = 10^{-8}$:
 - $K(10^{-8}) \approx 10^{-16}$ (gut konditioniert)
 - Relativer Fehler wird um Faktor 10^{-16} verkleinert

Fehleranalyse Beispiel: Fehleranalyse von $f(x) = \sin(x)$

- $f'(x) = \cos(x)$, $K = \frac{|x \cos(x)|}{|\sin(x)|}$
- Konditionierung:
 - Für $x \rightarrow 0$: $K \rightarrow 1$ (gut konditioniert)
 - Für $x \rightarrow \pi$: $K \rightarrow \infty$ (schlecht konditioniert)
 - Für $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} K = 1$ (gut konditioniert)
- Der absolute Fehler wird nicht vergrößert, da $|\cos(x)| \leq 1$

Praktische Fehlerquellen der Numerik

Kritische Operationen häufigste Fehlerquellen:

- Auslöschung bei Subtraktion ähnlich großer Zahlen
- Überlauf (overflow) bei zu großen Zahlen
- Unterlauf (underflow) bei zu kleinen Zahlen
- Verlust signifikanter Stellen durch Rundung

Vermeidung von Auslöschung

- Identifizieren Sie Subtraktionen ähnlich großer Zahlen
 - Suchen Sie nach algebraischen Umformungen
 - Prüfen Sie alternative Berechnungswege
 - Verwenden Sie Taylorentwicklungen für kleine Werte
- Beispiele für bessere Formeln:
- $\sqrt{1+x^2} - 1 \rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}$
 - $1 - \cos(x) \rightarrow 2 \sin^2(x/2)$
 - $\ln(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2}$ für kleine x

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Nullstellensatz von Bolzano Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls

$f(a) \cdot f(b) < 0$

dann existiert mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Nullstellenproblem systematisch lösen

- Existenz prüfen:
 - Intervall $[a, b]$ identifizieren
 - Vorzeichenwechsel prüfen: $f(a) \cdot f(b) < 0$
 - Stetigkeit von f sicherstellen
- Verfahren auswählen:
 - Fixpunktiteration: einfache Umformung $x = F(x)$ möglich
 - Newton: $f'(x)$ leicht berechenbar
 - Sekantenverfahren: $f'(x)$ schwer berechenbar
- Konvergenz sicherstellen:
 - Fixpunktiteration: $|F'(x)| < 1$ im relevanten Bereich
 - Newton: $\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$ im relevanten Bereich
 - Sekanten: Konvergenzgeschwindigkeit beachten
- Geeigneten Startwert wählen:
 - Fixpunkt: x_0 im Intervall und nahe Fixpunkt ($|f'(x)| < 1$)
 - Newton: $f'(x_0) \neq 0$
 - Bei mehrfachen Nullstellen: Start zwischen Wendepunkt und Nullstelle
 - Für Polynome: Startwerte zwischen -1 und 1 oft geeignet
 - Sekanten: Zwei Startwerte x_0 und x_1 : $f(x_0) \neq f(x_1)$
 - Idealerweise auf verschiedenen Seiten der Nullstelle
- Abbruchkriterien festlegen:
 - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
 - Iterationsschritte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
 - Maximale Iterationszahl

Verfahrensauswahl

Finden Sie die positive Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Vorgehen:

- Existenz:
 - $f(2) = -1 < 0$ und $f(3) = 16 > 0$
 - ⇒ Nullstelle in $[2, 3]$
- Verfahrenswahl:
 - $f'(x) = 3x^2 - 2$ leicht berechenbar
 - ⇒ Newton-Verfahren geeignet
- Konvergenzcheck:
 - $f'(x) > 0$ für $x > 0.82$
 - $f''(x) = 6x$ monoton
 - ⇒ Newton-Verfahren konvergiert

Fixpunktgleichung ist eine Gleichung der Form: $F(x) = x$
Die Lösungen \bar{x} , für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist, heissen Fixpunkte.

Grundprinzip der Fixpunktiteration sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a, b]$
Die rekursive Folge $x_{n+1} \equiv F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
heisst Fixpunktiteration von F zum Startwert x_0 .

Konvergenzverhalten
Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung F' und $\bar{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von F . Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$:

Anziehender Fixpunkt: $|F'(\bar{x})| < 1$
 x_n konvergiert gegen \bar{x} , falls x_0 nahe genug bei \bar{x}

Abstossender Fixpunkt: $|F'(\bar{x})| > 1$
 x_n konvergiert für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$

Banachscher Fixpunktsatz $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ und \exists Konstante α :

- $0 < \alpha < 1$ (Lipschitz-Konstante)
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$

Dann gilt:

Fehlerabschätzungen:

a-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot |x_1 - x_0|$

a-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

Die Fixpunktiteration konvergiert gegen \bar{x} für alle $x_0 \in [a, b]$

Konvergenznachweis für Fixpunktiteration

- Bringe die Gleichung in Fixpunktform: $f(x) = 0 \Rightarrow x = F(x)$
 - Form mit kleinstem $|F'(x)|$ wählen
- Prüfe, ob F das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet:
 - Wähle geeignetes Intervall ($[a, b]$ $F(a) \geq a$ und $F(b) \leq b$)
- Bestimme die Lipschitz-Konstante α : \rightarrow Berechne $F'(x)$
 - Finde $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$ und prüfe $\alpha < 1$
- Fehlerabschätzung:
 - A-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$
 - A-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_n - x_{n-1}|$
- Berechnen Sie die nötigen Iterationen für Genauigkeit tol: $n \geq \frac{\ln(\frac{tol \cdot (1 - \alpha)}{|x_1 - x_0|})}{\ln \alpha}$

Fixpunktiteration Nullstellen von $f(x) = e^x - x - 2$
Umformung in Fixpunktform: $x = \ln(x + 2)$, also $F(x) = \ln(x + 2)$

- $F'(x) = \frac{1}{x+2}$ monoton fallend
- Für $I = [1, 2]$: $F(1) = 1.099 > 1$, $F(2) = 1.386 < 2$
- $\alpha = \max_{x \in [1, 2]} |\frac{1}{x+2}| = \frac{1}{3} < 1$
- Konvergenz für Startwerte in $[1, 2]$ gesichert
- Für Genauigkeit 10^{-6} benötigt: $n \geq 12$ Iterationen

Fixpunktiteration Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ mittels Fixpunktiteration.

- Umformung: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{x^2+3}{2x} =: F(x)$
- Konvergenznachweis für $[1, 2]$: $F'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$
- $F([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ und $|F'(x)| \leq \alpha = 0.25 < 1$ für $x \in [1, 2]$
- Für Genauigkeit 10^{-6} :
 - $|x_1 - x_0| = |1.5 - 2| = 0.5$
 - $n \geq \frac{\ln(10^{-6} \cdot 0.75 / 0.5)}{\ln 0.25} \approx 12$

Grundprinzip Newton-Verfahren
Approximation der NS durch sukzessive Tangentenberechnung:
Konvergiert, wenn für alle x im relevanten Intervall gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Newton-Verfahren anwenden

- Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ aufstellen
- Geeigneten Startwert x_0 nahe der Nullstelle wählen
 - Prüfen, ob $f'(x_0) \neq 0$
- Iterieren bis zur gewünschten Genauigkeit: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Abbruchkriterien prüfen:
 - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
 - Änderung aufeinanderfolgenden Werte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
 - Maximale Iterationszahl nicht überschritten
- Fehlerabschätzung:
 - $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ falls
 - $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$

Newton-Verfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Ableitung: $f'(x) = 2x$, Startwert $x_0 = 1$

- $x_1 = 1 - \frac{1^2-2}{2 \cdot 1} = 1.5$ \rightarrow Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- $x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2 \cdot 1.5} = 1.4167$
- $x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2-2}{2 \cdot 1.4167} = 1.4142$

Vereinfachtes Newton-Verfahren
Alternative Variante mit konstanter Ableitung:
Konvergiert langsamer, aber benötigt weniger Rechenaufwand.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Sekantenverfahren
Alternative zum Newton-Verfahren ohne Ableitungsberechnung.
Verwendet zwei Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Benötigt zwei Startwerte x_0 und x_1 .

Sekantenverfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Startwerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

- $x_2 = 1 - \frac{1^2-2}{2^2-1^2} \cdot 1 = 1.5$ \rightarrow Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- $x_3 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2^2-1^2} \cdot 1.5 = 1.4545$
- $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545^2-2}{2^2-1^2} \cdot 1.4545 = 1.4143$

Newton für Nichtlineare Systeme Bestimmen Sie die Nullstelle des Systems: $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ $f_2(x, y) = y - x^2 = 0$

Lösung:

- Jacobi-Matrix aufstellen: $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$
- Newton-Iteration:
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1}(x_k, y_k) \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$
- Mit Startwert $(0.5, 0.25)$ erste Iteration durchführen

Fehlerabschätzung für Nullstellen
So schätzen Sie den Fehler einer Näherungslösung ab:

- Sei x_n der aktuelle Näherungswert
- Wähle Toleranz $\epsilon > 0$
- Prüfe Vorzeichenwechsel: $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$
- Falls ja: Nullstelle liegt in $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$
- Damit gilt: $|x_n - \xi| < \epsilon$

Praktische Fehlerabschätzung Fehlerbestimmung bei $f(x) = x^2 - 2$

- Näherungswert: $x_3 = 1.4142157$ **Also:** $|x_3 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$
- Mit $\epsilon = 10^{-5}$:
- $f(x_3 - \epsilon) = 1.4142057^2 - 2 < 0 \rightarrow$ Nullstelle liegt in
- $f(x_3 + \epsilon) = 1.4142257^2 - 2 > 0$ $(1.4142057, 1.4142257)$

Konvergenzordnung Sei (x_n) eine gegen \bar{x} konvergierende Folge.
Die Konvergenzordnung $q \geq 1$ ist definiert durch:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

wo $c > 0$ eine Konstante. Für $q = 1$ muss zusätzl. $c < 1$ gelten.

Konvergenzordnungen der Verfahren Konvergenzgeschwindigkeiten

Newton-Verfahren: Quadratische Konvergenz: $q = 2$

Vereinfachtes Newton: Lineare Konvergenz: $q = 1$

Sekantenverfahren: Superlineare Konvergenz: $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Konvergenzgeschwindigkeit Vergleich der Verfahren:
Startwert $x_0 = 1$, Funktion $f(x) = x^2 - 2$, Ziel: $\sqrt{2}$

n	Newton	Vereinfacht	Sekanten
1	1.5000000	1.5000000	1.5000000
2	1.4166667	1.4500000	1.4545455
3	1.4142157	1.4250000	1.4142857
4	1.4142136	1.4125000	1.4142136

Fehleranalyse der Verfahren Vergleich der Fehlerkonvergenz für $f(x) = e^x - x - 2$:

Theoretisch:

- Newton: $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2$ mit $e_n = x_n - \xi$
- Sekanten: $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^{1.618}$
- Fixpunkt: $|e_{n+1}| \leq \alpha|e_n|$ mit $\alpha < 1$

Praktisch:

Mit $x_0 = 1$:

n	$ x_n - \xi _{Newton}$	$ x_n - \xi _{Sekanten}$	$ x_n - \xi _{Fixpunkt}$
1	1.0e-1	2.3e-1	3.1e-1
2	5.2e-3	4.5e-2	9.6e-2
3	1.4e-5	3.8e-3	3.0e-2

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten: $m \times n$ -Matrix A
 a_{ij} : Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte

Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

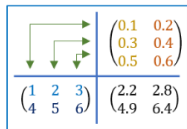
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetz gelten für Matrix-Addition

Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.

Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$



Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

Assoziativ, Distributiv, nicht Kommutativ!

Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- A^T : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$\begin{pmatrix} \boxed{Z_1} \rightarrow \\ \boxed{Z_2} \rightarrow \\ \boxed{Z_3} \rightarrow \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{\leftarrow Z_1} \\ \boxed{\leftarrow Z_2} \\ \boxed{\leftarrow Z_3} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:** $A^T = A$
- Einheitsmatrix/Identitätsmatrix:** E bzw. I mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.

A : Koeffizientenmatrix

\vec{x} : Vektor der Unbekannten

\vec{b} : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$

\Rightarrow Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen \rightarrow stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)

Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Zeilenoperationen

- erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)
- Vertauschen von Zeilen
 - Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
 - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Gauss-Jordan-Verfahren

- bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
 - oberste Zahl in Pivot-Spalte = 0
 \rightarrow vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
 - teile erste Zeile durch $a_{11} \rightarrow$ so erhalten wir führende Eins
 - Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenoperationen)
- nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$
- unendlich viele Lösungen: $rg(A) < n$
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$

Parameterdarstellung

bei unendlich vielen Lösungen

Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins

Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5$ $x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$ $x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow rg(A) = rg(A | \vec{b})$

nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für $n \times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- $rg(A) = n$
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- A ist invertierbar
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Quadratische Matrizen

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}

A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

A ist *invertierbar* / *regulär*, wenn A^{-1} existiert, sonst A *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ und $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
- A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse berechnen

einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

Inverse einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ NUR Invertierbar falls } ad - bc \neq 0$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Permutationsmatrix P ist eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Zeilenvertauschungen entsteht.

Für die Vertauschung der i -ten

und j -ten Zeile hat P_k die Form:

Wichtige Eigenschaften:

- $p_{ii} = p_{jj} = 0$
- $P^{-1} = P^T = P$
- $p_{ij} = p_{ji} = 1$
- Mehrere Vertauschungen: $P = P_l \cdot \dots \cdot P_1$
- Sonst gleich wie in E_n

Zeilenvertauschung für Matrix A mit Permutationsmatrix P_1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot P_1 \text{ bewirkt die Vertauschung von Zeile 1 und 3}$$

Pivotisierung

Spaltenpivotisierung

Strategie zur numerischen Stabilisierung des Gauss-Algorithmus durch Auswahl des betragsmäßig größten Elements als Pivotelement.

Vor jedem Eliminationsschritt in Spalte i :

- Suche k mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
- Falls $a_{ki} \neq 0$: Vertausche Zeilen i und k
- Falls $a_{ki} = 0$: Matrix ist singulär

Gauss-Algorithmus mit Pivotisierung

1. Elimination (Vorwärts):

- Für $i = 1, \dots, n-1$:
 - Finde $k \geq i$ mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
 - Falls $a_{ki} = 0$: Stop (Matrix singulär)
 - Vertausche Zeilen i und k
 - Für $j = i+1, \dots, n$:
 - $* z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} z_i$

$$2. \text{ Rückwärtseinsetzen: } x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

$$\text{Gauss mit Pivotisierung } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Eliminationsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right)$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-8}{-2} = 4 \\ x_2 &= \frac{36 - 15(4)}{-2} = 1 \\ x_1 &= \frac{2 - 4(4) + 2}{2} = -6 \end{aligned}$$

Vorteile der Permutationsmatrix

- Exakte Nachverfolgung aller Zeilenvertauschungen
- Einfache Rückführung auf ursprüngliche Reihenfolge durch P^{-1}
- Kompakte Darstellung mehrerer Vertauschungen
- Numerisch stabile Implementierung der Pivotisierung

Matrix-Zerlegungen

Dreieckszerlegung Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann zerlegt werden in:
Untere Dreiecksmatrix L: $l_{ij} = 0$ für $j > i$
Diagonale normiert ($l_{ii} = 1$)
Obere Dreiecksmatrix R: $r_{ij} = 0$ für $i > j$
Diagonalelemente $\neq 0$

LR-Zerlegung

LR-Zerlegung
Jede reguläre Matrix A , für die der Gauss-Algorithmus ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, lässt sich zerlegen in: $A = LR$ wobei L eine normierte untere und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

LR-Zerlegung durchführen $(E|A|E) \overset{\sim}{\sim} (P|R|L)$
Gauss

- 1. Zerlegung bestimmen:
 - Gauss-Elimination durchführen
 - Eliminationsfaktoren $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ in L speichern
 - Resultierende obere Dreiecksmatrix ist R
- 2. System lösen:
 - Vorwärtseinsetzen: $Ly = b$
 - Rückwärtseinsetzen: $Rx = y$
- 3. Bei Pivotisierung:
 - Permutationsmatrix P erstellen
 - $PA = LR$ speichern
 - $Ly = Pb$ lösen

E = Einheitsmatrix, P = Permutationsmatrix

LR-Zerlegung $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0 \\ 5 \\ 3\end{smallmatrix}\right) \rightarrow \left|\begin{smallmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}-1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right|$

Schritt 1: Erste Spalte
Max. Element in 1. Spalte: $|a_{31}| = 5$, also Z1 und Z3 tauschen:

$\left|\begin{smallmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}5 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right|$ Eliminationsfaktoren:
 $l_{21} = \frac{1}{5}, \quad l_{31} = -\frac{1}{5}$
Nach Elimination: $\left|\begin{smallmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 1.2 & 1.8\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1\end{smallmatrix}\right|$

Schritt 2: Zweite Spalte
Max. Element in 2. Spalte unter Diagonale: $|-3.2| > |1.2|$, keine Vertauschung nötig. Eliminationsfaktor: $l_{32} = \frac{-1.2}{-3.2} = -\frac{3}{8}$

Nach Elimination: $\left|\begin{smallmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 0.75\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{8} & 1\end{smallmatrix}\right|$
P R L

Lösung des Systems

- 1. $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - 2. Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.4 \\ 2.25 \end{pmatrix}$
 - 3. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Probe: $Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = b$

QR-Zerlegung

QR-Zerlegung
Eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt: $Q^T Q = Q Q^T = I_n$
Die QR-Zerlegung einer Matrix A ist: $A = QR$
wobei Q orthogonal und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Householder-Transformation

Eine Householder-Matrix hat die Form: $H = I_n - 2uu^T$ mit $u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$. Es gilt:

- H ist orthogonal ($H^T = H^{-1}$) und symmetrisch ($H^T = H$)
- $H^2 = I_n$

QR-Zerlegung mit Householder

- 1. Initialisierung: $R := A, Q := I_n$
- 2. Für $i = 1, \dots, n - 1$:
 - Bilde Vektor v_i aus i -ter Spalte von R ab Position i
 - $w_i := v_i + \text{sign}(v_{i1})\|v_i\|e_1$
 - $u_i := w_i / \|w_i\|$
 - $H_i := I_{n-i+1} - 2u_i u_i^T$
 - Erweitere H_i zu Q_i durch I_{i-1} links oben
 - $R := Q_i R$ und $Q := Q Q_i^T$

QR-Zerlegung mit Householder $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Erste Spalte

Erste Spalte a_1 und Einheitsvektor e_1 : $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Householder-Vektor für erste Spalte:

- 1. Berechne Norm: $|a_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
- 2. Bestimme Vorzeichen: $\text{sign}(a_{11}) = \text{sign}(2) = 1$
 - Wähle positives Vorzeichen, da erstes Element positiv
 - Dies maximiert die erste Komponente von v_1
 - Verhindert Auslöschung bei der Subtraktion
- 3. $v_1 = a_1 + \text{sign}(a_{11})|a_1|e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- 4. Normiere v_1 : $|v_1| = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + 1} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} \frac{0.91}{-0.41} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Matrix berechnen: $H_1 = I - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -0.67 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A nach 1. Transformation: $A^{(1)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -0.89 & 1.79 \\ 0 & 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Zweite Spalte

Untermatrix für zweite Transformation: $A_2 = \begin{pmatrix} -0.89 & 1.79 \\ 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$
Householder-Vektor für zweite Spalte:

- 1. $|a_2| = \sqrt{(-0.89)^2 + 2^2} = 2.19$
- 2. $\text{sign}(a_{22}) = \text{sign}(-0.89) = -1$ (da erstes Element negativ)
- 3. $v_2 = \begin{pmatrix} -0.89 \\ 2.00 \end{pmatrix} - 2.19\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.09 \\ 2.00 \end{pmatrix}$
- 4. $u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix}$

Erweiterte Householder-Matrix: $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.41 & -0.91 \\ 0 & -0.91 & 0.41 \end{pmatrix}$

nach 2. Transformation: $R = Q_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Endergebnis

Die QR-Zerlegung $A = QR$ ist:

$Q = H_1^T Q_2^T = \begin{pmatrix} -0.89 & -0.45 & 0 \\ 0.45 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Probe

- 1. $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
- 2. $Q^T Q = Q Q^T = I$ (Orthogonalität)
- 3. R ist obere Dreiecksmatrix

Wichtige Beobachtungen

- Vorzeichenwahl bei v_k ist entscheidend für numerische Stabilität
- Ein falsches Vorzeichen kann zu Auslöschung führen
- Betrag der Diagonalelemente in R = Norm transformierter Spalten
- Q ist orthogonal: Spaltenvektoren sind orthonormal

Iterative Verfahren

Zerlegung der Systemmatrix A zerlegt in: $A = L + D + R$

- L : streng untere Dreiecksmatrix
- D : Diagonalmatrix
- R : streng obere Dreiecksmatrix

Jacobi-Verfahren Gesamtschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$

Komponentenweise: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Gauss-Seidel-Verfahren Einzelschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} R x^{(k)} + (D + L)^{-1} b$

Komponentenweise:
 $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Konvergenzkriterien Ein iteratives Verfahren konvergiert, wenn:

- 1. Die Matrix A diagonaldominant ist:
 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- 2. Der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner 1 ist:
 $\rho(B) < 1$ mit B als jeweilige Iterationsmatrix

Implementierung von Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren

Vorbereitungsphase

- Matrix zerlegen in $A = L + D + R$
- Diagonaldominanz prüfen: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- Sinnvolle Startwerte wählen (z.B. $x^{(0)} = 0$ oder $x^{(0)} = b$)
- Toleranz ϵ und max. Iterationszahl n_{max} festlegen

Verfahren durchführen

- Jacobi**: Komponentenweise parallel berechnen
- Gauss-Seidel**: Komponentenweise sequentiell berechnen

Konvergenzprüfung / Abbruchkriterien

- Absolute Änderung: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$
- Relatives Residuum: $\frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\|} < \epsilon$
- Maximale Iterationszahl: $k < n_{max}$

A-priori Fehlerabschätzung

- Spektralradius ρ der Iterationsmatrix bestimmen
- Benötigte Iterationen n für Genauigkeit ϵ :
 $n \geq \frac{\ln(\epsilon(1-\rho)/\|x^{(1)} - x^{(0)}\|)}{\ln(\rho)}$

Matrix- und Vektornormen

Eine Vektornorm $\| \cdot \|$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Wichtige Normen

1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
 ∞ -Norm: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Fehlerabschätzung für LGS

Sei $\| \cdot \|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $Ax = b, A\tilde{x} = \tilde{b}$

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$ **Relativer Fehler:** $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

Mit der Konditionszahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Konditionierung

Die Konditionszahl beschreibt die numerische Stabilität eines LGS:

- $\text{cond}(A) \approx 1$: gut konditioniert
- $\text{cond}(A) \gg 1$: schlecht konditioniert
- $\text{cond}(A) \rightarrow \infty$: singular

Konditionierung $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$
Konditionszahl: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 400$

Fehlerabschätzung

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq 400 \cdot 0.01 = 4$
Relativer Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 400 \cdot \frac{0.01}{2} = 2$

Vergleich Lösungsverfahren $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matrix ist symmetrisch und nicht streng diagonaldominant
- $\text{cond}_\infty(A) \approx 12.5$

Verfahren	Iterationen	Residuum	Zeit
LR mit Pivot	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.0
QR	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	2.3
Jacobi	12	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.8
Gauss-Seidel	7	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.4

- Direkte Verfahren erreichen höhere Genauigkeit
- Iterative Verfahren brauchen mehrere Schritte

Konvergenzverhalten $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist diagonaldominant: $|a_{ii}| = 4 > 1 = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

k	Residuum		Rel. Fehler	
	Jacobi	G-S	Jacobi	G-S
0	3.74	3.74	-	-
1	0.94	0.47	0.935	0.468
2	0.23	0.06	0.246	0.125
3	0.06	0.01	0.065	0.017
4	0.01	0.001	0.016	0.002

Beobachtungen:

- Gauss-Seidel konvergiert etwa doppelt so schnell wie Jacobi
- Das Residuum fällt linear (geometrische Folge)
- Die Konvergenz ist gleichmäßig (keine Oszillationen)

Systematisches Vorgehen bei LGS

- Eigenschaften der Matrix analysieren:
 - Diagonaldominanz prüfen
 - Konditionszahl berechnen oder abschätzen
 - Symmetrie erkennen
- Verfahren auswählen:
 - Direkte Verfahren: für kleinere Systeme
 - Iterative Verfahren: für große, dünnbesetzte Systeme
 - Spezialverfahren: für symmetrische/bandförmige Matrizen
- Implementation planen:
 - Pivotisierung bei Gauss berücksichtigen
 - Speicherbedarf beachten
 - Abbruchkriterien festlegen

Zeilenvertauschungen verfolgen

- Initialisiere $P = I_n$
- Für jede Vertauschung von Zeile i und j :
 - Erstelle P_k durch Vertauschen von Zeilen i, j in I_n
 - Aktualisiere $P = P_k \cdot P$
 - Wende Vertauschung auf Matrix an: $A := P_k A$
- Bei der LR-Zerlegung mit Pivotisierung:
 - $PA = LR$
 - Löse $Ly = Pb$ und $Rx = y$

Komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in \mathbb{C} genau n Lösungen (mit Vielfachheiten gezählt).

Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} erweitert die reellen Zahlen \mathbb{R} durch Einführung der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft:

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z = x + iy$$

Die Menge aller komplexen Zahlen ist definiert als:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

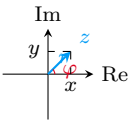
Bestandteile komplexer Zahlen

Realteil: $\text{Re}(z) = x$

Imaginärteil: $\text{Im}(z) = y$

Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

Konjugation: $\bar{z} = x - iy$



Darstellungsformen

- Normalform: $z = x + iy$
- Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Umrechnung zwischen Darstellungsformen komplexer Zahlen

Von Normalform in trigonometrische Form/Exponentialform

- Berechne Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Berechne Winkel mit einer der Formeln:
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$
 - $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y > 0$
 - $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y < 0$
 - φ unbestimmt falls $x = y = 0$
- Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Von trigonometrischer Form in Normalform

- Realteil: $x = r \cos \varphi$
- Imaginärteil: $y = r \sin \varphi$
- Normalform: $z = x + iy$

Von Exponentialform in Normalform/trigonometrische Form

- Trigonometrische Form durch Euler-Formel:
 $re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Dann wie oben in Normalform umrechnen

Wichtige Hinweise:

- Achten Sie auf das korrekte Quadranten beim Winkel
- Winkelfunktionen im Bogenmaß verwenden
- Bei Umrechnung in Normalform Euler-Formel nutzen
- Vorzeichen bei Exponentialform beachten

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt:

Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ **Subtraktion:** $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
 $= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (in Exponentialform)

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \text{ (in Exponentialform)}$$

Potenzen und Wurzeln

Für eine komplexe Zahl in Exponentialform $z = re^{i\varphi}$ gilt:

- n-te Potenz: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$
- n-te Wurzel: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$

Komplexe Operationen Gegeben $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 - i$:

Umrechnung in Polarform:

- $z_1 : r_1 = \sqrt{2}, \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- $z_2 : r_2 = \sqrt{5}, \varphi_2 = -\arctan(\frac{1}{2})$

Berechnungen:

- $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(1 + i) = (2 + 1) + i(2 - 1) = 3 + i$
- $z_1^3 = (\sqrt{2})^3 (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4}))$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A , wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Der Vektor x heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Bestimmung von Eigenwerten

Ein Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A , wenn gilt:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \text{ (charakteristische Gleichung)}$$

charakteristisches Polynom von A : $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Eigenschaften von Eigenwerten Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

Determinante: $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ Spur: $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

- Bei Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente die Eigenwerte
- Ist λ Eigenwert von A , so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}

Vielfachheiten Für einen Eigenwert λ unterscheidet man:

- Algebraische Vielfachheit: Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- Geometrische Vielfachheit: Dimension des Eigenraums $= n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$

Die geometrische Vielfachheit ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Diagonalisierbarkeit Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Dies ist äquivalent zu:

- Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte entsprechen den geometrischen Vielfachheiten
- Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist n
- Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix
- Die Matrix A hat n linear unabhängige Eigenvektoren

Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine reguläre Matrix T gibt mit:

$$B = T^{-1}AT$$

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist:

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenschaften ähnlicher Matrizen

Für ähnliche Matrizen A und $B = T^{-1}AT$ gilt:

- A und B haben dieselben Eigenwerte mit gleichen algebraischen Vielfachheiten
- Ist x Eigenvektor von B zum Eigenwert λ , so ist Tx Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
- Bei Diagonalisierbarkeit:
 - Die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
 - Die Spalten von T sind die Eigenvektoren von A

Bestimmung von Eigenwerten

Charakteristisches Polynom aufstellen

- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ berechnen und auf Standardform bringen
- Spezialfälle:
 - Bei 2×2 Matrizen direkt: $\det(A - \lambda I)$
 - Bei 3×3 Matrizen: Entwicklung nach einer Zeile/Spalte
 - Bei größeren Matrizen: Spezielle Eigenschaften nutzen (z.B. Dreiecksform, Symmetrie)

Polynom vereinfachen und auf Nullform bringen

- Ausmultiplizieren
- Zusammenfassen nach Potenzen von λ
- Form: $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Nullstellen bestimmen

- Quadratische Formel für $n = 2$ (Grad des Polynoms)
- Cardano-Formel oder Substitution für $n = 3$
- Numerische Verfahren für $n > 3$

Vielfachheiten bestimmen

- Algebraische Vielfachheit: Nullstellenordnung
- Geometrische Vielfachheit: $n - \text{rang}(A - \lambda I)$

Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie die Eigenwerte von: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I): \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$
- Determinante: $p(\lambda) = (2 - \lambda)^3 - 2(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$
- Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Bestimmung von Eigenvektoren

Eigenvektoren bestimmen

- Für jeden Eigenwert λ_i :
 - Matrix $(A - \lambda_i I)$ aufstellen
 - Homogenes LGS $(A - \lambda_i I)x = 0$ lösen
 - Lösungsvektor normieren falls gewünscht
- Bei mehrfachen Eigenwerten:
 - Geometrische Vielfachheit bestimmen
 - Basis des Eigenraums bestimmen
 - Linear unabhängige Eigenvektoren finden

Kontrolle

- Für jeden Eigenvektor x_i prüfen: $Ax_i = \lambda_i x_i$
- Bei symmetrischen Matrizen: Orthogonalität der Eigenvektoren prüfen
- Linear unabhängigkeit der Eigenvektoren überprüfen
- Bei 2×2 Matrix: $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$
- Bei 3×3 Matrix zusätzlich: $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$ und $\prod \lambda_i = \det(A)$
- Bei reellen Matrizen: Komplexe Eigenwerte treten in konjugierten Paaren auf

Spezialfälle beachten

- Bei Dreiecksmatrizen: Eigenwerte sind die Diagonalelemente
- Bei symmetrischen Matrizen: Alle Eigenwerte sind reell
- Bei orthogonalen Matrizen: $|\lambda_i| = 1$ für alle Eigenwerte
- Bei nilpotenten Matrizen: Alle Eigenwerte sind 0
- nilpotente Matrix: $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Eigenwertberechnung Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Entwicklung nach 1. Zeile:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - ((2 - \lambda) - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

4. Nullstellen bestimmen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

5. Eigenvektoren bestimmen für $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)x = 0 \text{ führt zu } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren Bestimmen Sie die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$ der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. $(A - 2I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Homogenes System lösen:

- $x_2 = 0$ (aus 1. Zeile)
- x_1, x_3 frei wählbar

3. Basis des Eigenraums:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren von:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

2. Eigenwerte: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

3. Eigenvektoren für $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Eigenvektoren für $\lambda_2 = 1$:

$$(A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Numerische Berechnung von Eigenwerten

QR-Verfahren

QR-Verfahren

Das QR-Verfahren transformiert die Matrix A iterativ in eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind:

- 1. Initialisierung: $A_0 := A, P_0 := I_n$
- 2. Für $i = 0, 1, 2, \dots$:
 - QR-Zerlegung: $A_i = Q_i R_i$
 - Neue Matrix: $A_{i+1} = R_i Q_i$
 - Update: $P_{i+1} = P_i Q_i$

QR-Verfahren

Voraussetzungen

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Eigenwerte sollten verschiedene Beträge haben für gute Konvergenz

Algorithmus

- 1. Initialisierung:
 - $A_0 := A$ und $Q_0 := I_n$
 - Maximale Iterationszahl und Toleranz festlegen
- 2. Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - QR-Zerlegung von A_k berechnen: $A_k = Q_k R_k$
 - Neue Matrix berechnen: $A_{k+1} = R_k Q_k$
 - Transformationsmatrix aktualisieren: $P_{k+1} = P_k Q_k$
- 3. Abbruchkriterien prüfen:
 - Subdiagonalelemente nahe Null: $|a_{i+1,i}| < \varepsilon$
 - Änderung der Diagonalelemente klein
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Auswertung

- Eigenwerte: Diagonalelemente von A_k
- Eigenvektoren: Spalten der Matrix P_k
- Bei 2×2 -Blöcken: Komplexe Eigenwertpaare

QR-Verfahren Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1. Erste Iteration:
 - QR-Zerlegung: $Q_1 = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.89 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 2.24 & 0.45 \\ 0 & -1 & 0.89 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 0.45 & 0.45 \\ 0.45 & 0.38 & 0.89 \\ 0.45 & 0.89 & 1 \end{pmatrix}$
- 2. Nach Konvergenz: $A_k \approx \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

QR-Iteration Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

- 1. QR-Zerlegung von A : $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 2. Neue Matrix: $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$
- 3. Konvergenz nach mehreren Iterationen gegen:
 $A_\infty \approx \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{pmatrix}$ mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- 4. Eigenwerte: $\lambda_1 = \phi, \lambda_2 = -\phi^{-1}$

Von-Mises-Iteration

Von-Mises-Iteration (Vektoriteration)

Für eine diagonalisierbare Matrix A mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ konvergiert die Folge:

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

gegen einen Eigenvektor v zum betragsmäßig größten Eigenwert λ_1 .
⇒ sehe [Spektralradius](#) auf nächster Seite

Von-Mises-Iteration / Vektoriteration

Voraussetzungen

- Matrix diagonalisierbar und $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Iteration durchführen

- Startvektor $v^{(0)}$ wählen:
 - Zufälligen Vektor oder $(1, \dots, 1)^T$ wählen
 - Auf Länge 1 normieren: $\|v^{(0)}\|_2 = 1$
- Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - 1. Iterationsvektor berechnen: $w^{(k)} = Av^{(k)}$
 - 2. Normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
 - 3. Eigenwertapproximation: $\lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$ (Rayleigh-Quotient)
- Abbruchkriterien prüfen:
 - Änderung des Eigenvektors: $\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\| < \varepsilon$
 - Änderung des Eigenwertes: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < \varepsilon$
 - Maximale Iterationszahl erreicht
- Konvergenz:
 - $v^{(k)} \rightarrow$ Eigenvektor zu $|\lambda_1|$
 - $\lambda^{(k)} \rightarrow |\lambda_1|$

Verifikation

- Prüfen ob $Av^{(k)} \approx \lambda^{(k)}v^{(k)}$
- Residuum berechnen: $\|Av^{(k)} - \lambda^{(k)}v^{(k)}\|$
- Orthogonalität zu anderen Eigenvektoren prüfen

Von-Mises-Iteration Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Mit Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$:

- 1. Erste Iteration:
 - $w^{(0)} = Av^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4, 0, 2)^T$
 - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4, 0, 2)^T$
 - $\lambda^{(1)} = (v^{(0)})^T Av^{(0)} = 3.33$
- 2. Zweite Iteration:
 - $w^{(1)} = Av^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{20}}(18, -2, 8)^T$
 - $v^{(2)} = \frac{w^{(1)}}{\|w^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{388}}(18, -2, 8)^T$
 - $\lambda^{(2)} = 5.12$

Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5.17$ und $v = (0.89, -0.10, 0.39)^T$

Inverse Iteration

Inverse Iteration Die inverse Iteration berechnet einen Eigenvektor zu einem bekannten oder geschätzten Eigenwert μ durch:

$$v^{(k+1)} = \frac{(A - \mu I)^{-1}v^{(k)}}{\|(A - \mu I)^{-1}v^{(k)}\|_2}$$

Konvergiert typischerweise gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert $\lambda_i - \mu$.

Inverse Iteration anwenden

- 1. Vorbereitung:
 - Näherungswert μ für Eigenwert wählen
 - Zufälligen Startvektor $v^{(0)}$ normieren
 - LR-Zerlegung von $(A - \mu I)$ berechnen
- 2. Iteration durchführen:
 - LR-System $(A - \mu I)w^{(k)} = v^{(k)}$ lösen
 - Neuen Vektor normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
 - Rayleigh-Quotient berechnen für Eigenwert
- 3. Abbruch wenn:
 - Residuum $\|(A - \lambda^{(k)}I)v^{(k)}\| < \epsilon$
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Inverse Iteration Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \approx 2$ der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 2.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1.9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- 1. $\mu = 2.0$ als Näherung wählen
- 2. Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$
- 3. Erste Iteration:
 - $(A - 2I)w^{(0)} = v^{(0)}$ lösen
 - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} \approx (0.61, 0.63, 0.48)^T$
 - $\lambda^{(1)} \approx 2.01$

Vergleich der Eigenwertverfahren

Vergleich der Eigenwertverfahren

- 1. Von-Mises Iteration: Findet betragsmäßig größten Eigenwert
 - Einfach zu implementieren, Langsame lineare Konvergenz
- 2. Inverse Iteration: Braucht Näherung für Eigenwert
 - Schnelle Konvergenz, LR-Zerlegung pro Schritt nötig
- 3. QR-Verfahren: Berechnet alle Eigenwerte
 - Kubischer Aufwand pro Iteration, Globale und stabile Konvergenz

Numerische Aspekte der Verfahren

- Wahl des Startpunkts:
 - Von-Mises: zufälliger normierter Vektor
 - Inverse Iteration: Näherung für μ wichtig
 - QR: Matrix vorher auf Hessenberg-Form
- Konvergenzprüfung:
 - Residuum $\|Ax^{(k)} - \lambda^{(k)}x^{(k)}\|$
 - Änderung in aufeinanderfolgenden Iterationen
 - Subdiagonalelemente bei QR

Spektralradius Der Spektralradius einer Matrix A ist definiert als:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

Er gibt den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts an.

Bedeutung des Spektralradius Der Spektralradius ist wichtig für:

- Konvergenz von Iterationsverfahren
- Stabilität dynamischer Systeme
- Abschätzung von Matrixnormen
- Konvergenz von Potenzreihen mit Matrizen

Konvergenzsatz Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

- $\rho(A) < 1$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$
- Die Neumannsche Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^k$ konvergiert
- $(I - A)$ ist invertierbar mit $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty A^k$

Spektralradius bestimmen und anwenden

1. Berechnung:
 - Eigenwerte λ_i bestimmen
 - Maximum der Absolutbeträge bilden
 - Bei großen Matrizen: numerische Verfahren
2. Konvergenzanalyse:
 - Bei Iterationsverfahren: $\rho(M) < 1$ prüfen
 - Bei Matrixpotenzen: $\rho(A) < 1$ prüfen
 - Konvergenzgeschwindigkeit $\approx |\rho(A)|^k$
3. Abschätzungen:
 - $\rho(A) \leq \|A\|$ für jede Matrixnorm
 - $\rho(AB) = \rho(BA)$ für beliebige Matrizen
 - $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$ für $k \in \mathbb{N}$

Anwendungen des Spektralradius

1. Iterative Verfahren:
 - Jacobi: $\rho(-D^{-1}(L + R)) < 1$
 - Gauss-Seidel: $\rho(-(D + L)^{-1}R) < 1$
 - SOR: Optimaler Parameter ω bestimmen
2. Matrixreihen:
 - Konvergenz von $\sum_{k=0}^\infty A^k$ und Existenz von $(I - A)^{-1}$
 - Abschätzung der Reihensumme

Spektralradius und Konvergenz Untersuchen Sie die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens für: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

1. Zerlegung $A = D + L + R$: $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, L + R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Jacobi-Matrix $M = -D^{-1}(L + R)$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
3. Eigenwerte von M : $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.5$
4. Spektralradius: $\rho(M) = 0.5 < 1$
5. Schlussfolgerung:
 - Jacobi-Verfahren konvergiert (Konvergenzrate ist linear)
 - Fehler reduziert sich pro Iteration etwa um Faktor 0.5

Rechnerarithmetik

Rechnerarithmetik Sie arbeiten auf einem Rechner mit 5-stelliger Gleitpunktarithmetik im Dualsystem. Für den Exponenten haben Sie zusätzlich zum Vorzeichen 3 Stellen zur Verfügung.

1. Was ist der grösste Exponent, den Sie speichern können?
2. Welches ist die kleinste darstellbare positive Zahl, welche die grösste? Approximieren Sie diese durch normierte 4-stellige Maschinenzahlen im Dezimalsystem.
3. Vergleichen Sie Ihren Rechner mit dem Ihres Kollegen, der mit einem 2-stelligen Hexadezimalsystem arbeitet. Wer rechnet genauer?

Solution Rechnerarithmetik 1

1. $e_{max} = (111)_2 = 4 + 2 + 1 = 7$
2. $x_{min} = B^{e_{min}-1} = 2^{-8} = 0.00390625 = 0.3906 \cdot 10^{-2}$
 $x_{max} = (1 - B^{-n})B^{e_{max}} = (1 - 2^{-5})2^7 = 2^7 - 2^2 = 124 = 0.1240 \cdot 10^3$
3. Maschinengenauigkeit für beide Systeme:
Binary: $eps_1 = \frac{B}{2}B^{-n} = 2^{-5} = 0.03125$
Hex: $eps_2 = \frac{B}{2}B^{-n} = 8 \cdot 16^{-2} = 0.03125$
Beide Systeme rechnen mit derselben Maschinengenauigkeit.

Rechnerarithmetik und Gleitpunktdarstellung Gegeben seien zwei verschiedene Rechenmaschinen. Die erste davon arbeite mit einer 46-stelligen Binärarithmetik und die zweite einer 14-stelligen Dezimalarithmetik.

1. Welche Maschine rechnet genauer? (Mit Begründung!)
2. Stellen Sie die Zahl $x = \sqrt{3}$ korrekt gerundet als Maschinenzahl \tilde{x} in einer Fließkomma-Arithmetik mit 5 Binärstellen dar, und geben Sie den relativen Fehler von \tilde{x} im Dezimalformat an.

Solution Rechnerarithmetik 2

1. Maschinengenauigkeit:
Binary: $eps_1 = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{2}{2}2^{-46} = 1.4211 \cdot 10^{-14}$
Decimal: $eps_2 = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{10}{2}10^{-14} = 5 \cdot 10^{-14}$
Da $eps_1 < eps_2$ rechnet die erste Maschine genauer.
2. $\sqrt{3} = 1.7320508... \text{ and } (x)_2 = 1.10110111..._2$
Gerundet: $\tilde{x} = 1.11000_2 = 1.75_{10}$
Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = 0.01036297$

Gleitpunktarithmetik

1. Bestimme die Anzahl verschiedener Maschinenzahlen auf einem Rechner, der 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet.
2. Geben Sie die Maschinengenauigkeit einer Rechenmaschine an, die mit 16-stelliger Dezimalarithmetik arbeitet.

Solution Gleitpunktarithmetik

1. Für die 15-stellige Mantisse im Dualsystem: 2^{14} Möglichkeiten (erste Stelle muss 1 sein)
Mit Vorzeichen: 2^{15} Möglichkeiten
5-stelliger Exponent mit Vorzeichen: $2^6 - 1$ Möglichkeiten
Total: $2^{15} \cdot (2^6 - 1) + 1 = 2064385$ Möglichkeiten (inkl. Null)
2. $B = 10, n = 16$
 $eps = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{10}{2}10^{-16} = 5 \cdot 10^{-16}$

Konditionierung

Gegeben ist die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Das Argument x sei mit einem betragsmässigen relativen Fehler von bis zu 5% behaftet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kondition alle x , für welche unter dieser Voraussetzung der Betrag des relativen Fehlers des Funktionswertes $y = f(x)$ ebenfalls höchstens 5% wird.

Lösung:

Die Konditionszahl ist $K = \frac{|f'(x) \cdot x|}{|f(x)|} = \left| \frac{2 \sin(x) + x \cos(x)}{\sin(x)} \right|$

Für einen relativen Fehler von maximal 5% muss gelten:
 $|K| \cdot \frac{|\Delta x|}{|x|} \leq 0.05, |2 - x| \cdot 0.05 \leq 0.05, |x - 2| \leq 1$ Daher: $1 \leq x \leq 3$

Konditionierung Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ mit ihrer Ableitung $f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$ und $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmass.

1. Bestimme die Konditionszahl von $f(x)$ in Abhängigkeit von x .
2. Berechnen Sie näherungsweise, mit welchem absoluten Fehler $x_0 = \pi/3$ höchstens behaftet sein darf, damit der relative Fehler von $f(x_0)$ höchstens 10% beträgt.
3. Bestimmen Sie numerisch das Verhalten der Konditionszahl von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x = 0$ aussagt.
4. Plotten Sie die Konditionszahl von $f(x)$ halblogarithmisch im Bereich $x \in [-2\pi, 3\pi]$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ aussagt.

Lösung:

1. $K(x) = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right| = \left| \frac{(2x \sin(x) + x^2 \cos(x)) \cdot x}{x^2 \sin(x)} \right| = \left| \frac{2 \sin(x) + x \cos(x)}{\sin(x)} \right|$
2. Für $x_0 = \pi/3$:
 $|f(x) - f(x_0)|/|f(x_0)| \approx K(x_0) \cdot |x - x_0|/|x_0|$
 $0.1 \geq K(x_0) \cdot |x - x_0|/|x_0|$ und $|x - x_0| \leq 0.1/K(x_0) \cdot x_0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} K(x) = 3 \rightarrow$ Daher ist $f(x)$ in $x = 0$ gut konditioniert.
4. Große Konditionszahlen (schlecht konditioniert) treten auf bei $x \approx \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ da dort $\sin(x) = 0$ ist.

Nullstellenprobleme

Fixpunktiteration Die Gleichung $2^x = 2x$ hat eine Lösung im Intervall $I = [0.5, 1.5]$ für die zugehörige Fixpunktiteration $x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x_k}, x_0 = 1.5$

1. Überprüfen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und mit obigem Intervall, dass die angegebene Fixpunktiteration tatsächlich konvergiert.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Fehlerabschätzung, wieviele Schritte es höchstens braucht, um einen absoluten Fehler von maximal 10^{-8} garantieren zu können.

Solution Fixpunktiteration

1. Setze $F(x) = \frac{1}{2}2^x$. Zu zeigen:
 - $F([0.5, 1.5]) \subseteq [0.5, 1.5]$: $F(0.5) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 > 0.5$
 $F(1.5) = \sqrt{2} = 1.4142 < 1.5 \checkmark$
 - $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ für alle $x \in [0.5, 1.5]$: $|F'(x)| = |\frac{\ln 2}{2} \cdot 2^x|$
Maximum bei $x = 1.5$: $\alpha = \ln 2 \cdot \sqrt{2} = 0.9802 < 1 \checkmark$
2. A-priori Abschätzung für $|x_n - x| \leq 10^{-8}$:
 $|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \leq 10^{-8}$
Mit $x_1 = \frac{1}{2}2^{1.5} = \sqrt{2}$: $n \geq \frac{\ln(10^{-8}(1-\alpha)/|x_1-x_0|)}{\ln \alpha} = 998$ Schritte

Nullstellenprobleme Gesucht ist der Schnittpunkt der Funktionen $g(x) = \exp(x)$ und $h(x) = \sqrt{x+2}$.

- Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0.5$ den Schnittpunkt bis auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-7} genau.
- Zeigen Sie, dass der Fixpunkt der Iteration $x_{k+1} = \ln(\sqrt{x_k+2})$ gerade dem Schnittpunkt von $g(x)$ und $h(x)$ entspricht, und dass die Iteration für jeden Startwert x_0 im Intervall $[0.5, 1.5]$ konvergiert. Prüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
Der Startwert sei $x_0 = 0.5$. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Abschätzung die Anzahl der benötigten Schritte, wenn der absolute Fehler der Näherung kleiner als 10^{-7} sein soll.

Solution Nullstellenproblem

- Setze $f(x) = \exp(x) - \sqrt{x+2}$
 $f'(x) = \exp(x) - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$$\text{Newton-Iteration: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nach Einsetzen konvergiert die Folge gegen $x \approx 1.1174679154$

- Die Fixpunktiteration konvergiert wenn:
 - $F([a, b]) \subseteq [a, b]$ mit $[a, b] = [0.5, 1.5]$
 $F(0.5) = 0.996 > 0.5$ und $F(1.5) = 1.171 < 1.5$ ✓
 - $|F'(x)| \leq L < 1$ für alle $x \in [a, b]$
 $|F'(x)| = \frac{1}{(2\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x+2})}$
Maximum bei $x = 0.5$: $L = 0.2612 < 1$ ✓
- A-priori Abschätzung für $|x_n - x| \leq \varepsilon = 10^{-7}$:
 $n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1-L)/|x_1-x_0|)}{\ln(L)} \approx 12$ Schritte

Bakterienpopulation Die folgende Abbildung zeigt den gemessenen Verlauf einer Bakterienpopulation $g(t)$ (Einheit: Mio. Bakterien) als Funktion der Zeit t (Einheit: Stunden).

Es wird vermutet, dass sich $g(t)$ darstellen lässt als Funktion mit den drei (vorerst unbekannten) Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ gemäß $g(t) = a + b \cdot e^{c \cdot t}$

- Bestimmen Sie eine Näherung für die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie 3 Messpunkte $(t_i, g(t_i))$ (für $i = 1, 2, 3$) aus der Abbildung herauslesen, das zugehörige Gleichungssystem aufstellen und für das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme die erste Iteration angeben (inkl. Jacobi-Matrix und $\delta^{(0)}$). Verwenden Sie als Startvektor $(1, 2, 3)^T$.
- Bestimmen Sie mit Ihrer Näherung aus a) den Zeitpunkt t , an dem die Population auf 1600 [Mio. Bakterien] angewachsen ist. Verwenden Sie dafür das Newton-Verfahren mit einem sinnvollen Startwert t_0 und einer Genauigkeit von $|t_n - t_{n-1}| < 10^{-4}$. Geben Sie die verwendete Iterationsgleichung explizit an. Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, so verwenden Sie $g(t) = 5 + 3 \cdot e^{4t}$.

Solution Bakterienpopulation

- Aus drei Messpunkten $(t_i, g(t_i))$ ergibt sich:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b \cdot e^{c \cdot t_1} - g(t_1) \\ a+b \cdot e^{c \cdot t_2} - g(t_2) \\ a+b \cdot e^{c \cdot t_3} - g(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobi-Matrix: } Df = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{ct_1} & b t_1 e^{ct_1} \\ 1 \cdot e^{ct_2} & b t_2 e^{ct_2} \\ 1 \cdot e^{ct_3} & b t_3 e^{ct_3} \end{pmatrix}$$

- Newton-Iteration für $g(t) = 1600$: $t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n) - 1600}{g'(t_n)}$
Mit $t_0 = 2.2$ konvergiert die Folge gegen $t \approx 2.2507$

Lineare Gleichungssysteme

LGS und Kondition Gegeben: $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der exakten Lösung $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ der Matrix A in der 1-Norm.
- Gegeben ist nun die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die entsprechende Lösung \tilde{x} .
- Bestimmen Sie für die Lösung aus b) den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1}$, und vergleichen Sie diesen mit der Abschätzung aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Solution LGS und Kondition

- $\text{cond}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 1.5 \cdot 10^6$
- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Relativer Fehler: $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{5}{2} = 2.5$
Abschätzung durch Kondition:
 $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_1}{\|b\|_1} = 1.5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-5} = 15$
Der tatsächliche Fehler ist deutlich kleiner als die Abschätzung.

Chilli-Festival Für ein Chilli-Festival werden BBQ-Saucen in den drei verschiedenen Schärfegraden sehr scharf (SS), scharf (S) und mild (M) benötigt, zudem sollen drei verschiedene Hersteller dem Publikum zur Blindverkostung vorgelegt werden können. Die entsprechenden Marketing Pakete der drei Hersteller reichen für die folgende Anzahl Portionen:

Hersteller	SS	S	M
Blair's Extreme	240	60	60
Mad Dog	120	180	90
Dave's Gourmet	80	170	500

Aus früheren Jahren weiss man, dass das Publikum die verschiedenen Schärfegrade ungefähr im Verhältnis 3/4/5 konsumiert und ca. 12'000 Portionen erwartet werden. Der Einfachheit halber rechnet das Komitee deshalb mit folgender Portionierung: SS 3080, S 4070, M 5030.

- Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.
- Wie viele Marketing Pakete von den einzelnen Herstellern werden benötigt um den voraussehbaren Bedarf abzudecken, ohne Überschuss zu generieren? Berechnen Sie die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.
- Wie hoch ist der absolute und relative Fehler, wenn die Besucherzahlen die Erwartung um 5% übersteigt?
- Was können Sie über die Konditionierung des Problems sagen?

Lösung:

- Gleichungssystem: $A = \begin{pmatrix} 240 & 60 & 60 \\ 120 & 180 & 90 \\ 80 & 170 & 500 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3080 \\ 4070 \\ 5030 \end{pmatrix}$
- Gauss-Elimination: $R = \begin{pmatrix} 240 & 120 & 80 \\ 0 & 150 & 150 \\ 0 & 0 & 420 \end{pmatrix}$ $x_1 = 3, x_2 = 15, x_3 = 7$
- Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| = 0.0113 \cdot 609 = 6.8875$
Relativer Fehler:
 $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 650 \cdot 0.0113 \cdot \frac{609}{5030} = 0.89$ (89%)
- $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 7.3512 \rightarrow$ relativ gut konditioniert

LR-Zerlegung Gegeben ist LGS $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+\varepsilon & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \varepsilon \text{ eine reelle Zahl ist.}$$

- Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung der Matrix A für ein allgemeines $\varepsilon \neq 0$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizen L und R aus (a) die Lösung von $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ (Maschinengenauigkeit). Schreiben Sie dazu ein Python-Skript und verwenden Sie `numpy.linalg.solve()`.
- Lösen Sie nun das lin. Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ direkt mit `numpy.linalg.solve()`. Weshalb erhalten Sie nicht das gleiche Resultat wie bei b)? Begründen Sie!

Solution LR-Zerlegung

- LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

- Für $\varepsilon = 2^{-52}$ ergibt sich:

$$\text{Vorwärtseinsetzen: } Ly = b \text{ mit } y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1.80144 \cdot 10^{16} \\ 2.66667 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rückwärtseinsetzen: } Rx = y \text{ mit } x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -0.66667 \\ -0.66667 \end{pmatrix}$$

- Direkte Lösung für $\varepsilon = 2^{-52}$ ergibt: $x = \begin{pmatrix} 2.33333 \\ -0.66667 \\ -0.66667 \end{pmatrix}$
Unterschied weil $2 + \varepsilon = 2$, die Lösung ist identisch mit $\varepsilon = 0$

Gauss-Seidel Verfahren Sie messen den Gesamtwiderstand von 3 verschiedenen, in Serie geschalteten Widerstände. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der jeweiligen Widerstände R_i :

$$67 = 1R_1 + 3R_2 + 7R_3$$

$$21 = 1R_3 + 15R_1$$

$$44 = 1R_2 + 6R_3$$

Aufgaben:

- Konvertieren Sie die Gleichung in die Form: $y = Ax$ und zerlegen Sie die Matrix A zur Lösung mit dem Gauss-Seidel-Verfahren in die Form: $A = L + R + D$. Schreiben Sie alle Matrizen (A, L, R, D) auf!
- Was ist der Vorteil eines iterativen Lösungsverfahrens wie Gauss-Seidel gegenüber direkten Lösungsverfahren?

Solution Gauss-Seidel Verfahren

- Systemmatrix und Zerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vorteile iterativer Verfahren:
 - Geringerer Rechenaufwand bei großen Systemen
 - Speichereffizienter
 - Gut für dünn besetzte Matrizen
 - Numerisch stabiler bei gut konditionierten Systemen

Jacobi Verfahren Mit Hilfe des Jacobiverfahrens soll die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer n-dimensionalen tridiagonalen Systemmatrix A bestimmt werden. Die Matrix und die rechte Seite sind definiert mit $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & & & \\ -1 & c & -1 & & \\ & -1 & c & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Matrix B für $n = 6, c = 4.0$ und daraus $\|B\|_\infty$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt $\|B\|_\infty < 1$?
- Welche Anzahl Iterationen benötigt man maximal, um eine numerische Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-3} in der ∞ -Norm zu erhalten? (a priori Abschätzung)
- Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe einer Implementierung des Jacobiverfahrens. Führen Sie die vorher bestimmte Anzahl von Iterationen aus!
- Bestimmen Sie die Genauigkeit der errechneten Lösung mit Hilfe der a posteriori Abschätzung?

Solution Jacobi Verfahren

- Matrix B für Jacobi-Verfahren bei $n = 6, c = 4.0$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\|B\|_\infty = 0.5 \rightarrow$ Konvergiert für $c > 2$
- A-priori Abschätzung für Genauigkeit 10^{-3} :
 $\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^n}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-3}$ Ergibt $n \geq 11$ Iterationen
 - A-posteriori Abschätzung für erreichte Genauigkeit:
 $\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \approx 8.49 \cdot 10^{-5}$

Jacobi für LGS mit Parameter

$$Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & a & 20 \\ 5 & 20 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ 5a \end{pmatrix}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliger Parameter.

- Welche Bedingung muss a erfüllen, damit A diagonal dominant ist und also das Jacobi-Verfahren konvergiert?
- Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$.
- Bestimmen Sie für $a \geq 60$ mittels der a priori Abschätzung und bezüglich der ∞ -Norm die Anzahl Iterationsschritte $n = n(a)$ als Funktion von a , um eine vorgegebene Fehlerschranke ϵ zu erreichen.

Solution Jacobi für LGS mit Parameter

- Für Diagonaldominanz muss gelten: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
Dies führt zu: $a > 10 + 20 = 30$
- Jacobi-Iter. für $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$: $x^{(1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(0)} + D^{-1}b$
Mit $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{30}, \frac{1}{a}, \frac{1}{50})$ Ergibt: $x^{(1)} = (0, -29, 0)^T$
- Für $a \geq 60$ gilt $\|B\|_\infty = \frac{1}{2}$
A-priori Fehlerabschätzung ϵ : $n(a) \geq \frac{\log(\frac{\epsilon}{2a})}{\log(\frac{1}{2})} = 1 + \frac{\log(\frac{\epsilon}{a})}{\log(\frac{1}{2})}$

Nichtlineares Gleichungssystem

Das nichtlineare Gleichungssystem
 $1 - x^2 = y^2, \quad \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} = 1$
soll mit dem Newton-Verfahren mit $x^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})^T = (2, -1)^T$ gelöst werden.

- Führen Sie den ersten Iterationsschritt manuell aus und bestimmen Sie $x^{(1)}$.
- Bestimmen Sie die Näherungslösung für $a = 2$ und $b = 4$ auf $\|f(x^{(k)})\|_\infty < 10^{-8}$ genau.
- Wie viele Lösungen besitzt das Gleichungssystem aus b) insgesamt? Begründen Sie Ihre Antwort, z.B. mit einem geeigneten Plot.

Solution Nichtlineares Gleichungssystem

$$1. \text{ Newton-Verfahren: } f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 - y^2 \\ \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobi-Matrix: } Df(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ \frac{2(x-2)}{a} & \frac{2(y-1)}{b} \end{pmatrix}$$

- $x^{(1)} = x^{(0)} - [Df(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(0)})$
- Für $a = 2, b = 4$ konvergiert das Verfahren gegen eine der vier Lösungen, abhängig vom Startwert.
- System hat 4 Lösungen aufgrund geometrischer Interpretation:
- Schnitt eines Kreises ($1 - x^2 = y^2$) mit einer Ellipse
- Symmetrisch bzgl. der Geraden $y = 1$

Nichtlineare Gleichung mit zwei Methoden

Für die Gleichung $x^2 \cos(x) = 1$ sind mit $x_0 = 1$ der erste Schritt des Newton-Verfahrens sowie des Sekantenverfahrens durchzuführen.

- Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt für beide Verfahren. Für das Sekantenverfahren ist zusätzlich $x_{-1} = 0$ gegeben.
- Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und diskutieren Sie mögliche Vor- und Nachteile der beiden Verfahren.

Solution Nichtlineare Gleichung

$$1. \text{ Newton-Verfahren: } f(x) = x^2 \cos(x) - 1$$

$$f'(x) = 2x \cos(x) - x^2 \sin(x) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1.0355$$

$$\text{Sekantenverfahren: } x_1 = x_0 - \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})} f(x_0) \approx 1.0412$$

- Vergleich:
 - Newton: schnellere Konvergenz (quadratisch)
 - Newton: benötigt Ableitung
 - Sekanten: keine Ableitung nötig
 - Sekanten: zwei Startwerte nötig
 - Sekanten: langsamere Konvergenz (≈ 1.618)

Numerischer Vergleich von Eigenwertverfahren Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

Verfahren	Iterationen	Genauigkeit	Zeit
Von-Mises	23	10^{-8}	1.0
Inverse Iteration	6	10^{-8}	1.5
QR	8	10^{-12}	2.3

Beobachtungen:

- Von-Mises braucht viele Iterationen
- Inverse Iteration konvergiert schnell
- QR liefert höchste Genauigkeit

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte Gegeben ist die Matrix: $A = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 30 & -9 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte von A , und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.
- Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix T , deren Spalten bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen. Es soll dann also gelten: $D = T^{-1}AT$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der von Mises Iteration numerisch den betragsmäßig grössten Eigenwert von A , sowie einen zugehörigen Eigenvektor. Iterieren Sie dabei 40 Mal, ausgehend vom Startvektor $v = (1, 0)^T$. Stellen Sie den absoluten Fehler der numerischen Näherung des Eigenwertes in Abhängigkeit der Iterationszahl halblogarithmisch dar.

Solution Eigenwerte

- Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$
Eigenwerte: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$
Eigenräume: $E_{\lambda_1} = \text{span}\{(2, 5)^T\}, E_{\lambda_2} = \text{span}\{(1, 3)^T\}$
- $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Von-Mises Iteration konvergiert gegen $\lambda_1 = 3$
Fehler zeigt quadratische Konvergenz

Matrix-Eigenwerte Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.
- Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert ist und bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.
- Zeigen Sie, dass die Matrix A drei reelle Eigenwerte besitzt. Geben Sie diese an.
- Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit.

Solution Matrix-Eigenwerte

- $p(\lambda) = (\lambda - 3)^3 + 8 = (\lambda - 3)^3 + 2^3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3 + \sqrt[3]{4})(\lambda - 3 - \sqrt[3]{4})$
- $\lambda = 1$ ist Eigenwert, da $p(1) = 0$
Eigenvektor: $v = (1, -1, 1)^T$
- Die drei Eigenwerte sind reell: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 + \sqrt[3]{4}, \lambda_3 = 3 - \sqrt[3]{4}$
- Alle Eigenwerte haben algebraische und geometrische Vielfachheit 1

QR-Zerlegung und Eigenwerte Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Führen Sie drei Schritte des QR-Verfahrens durch.
- Was beobachten Sie bezüglich der Konvergenz?
- Vergleichen Sie die Diagonalelemente der resultierenden Matrix mit den tatsächlichen Eigenwerten von A .

Solution QR-Zerlegung

- Nach drei QR-Iterationen: $A_3 \approx \begin{pmatrix} 5 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Die Diagonalelemente konvergieren gegen die Eigenwerte
Schnelle Konvergenz da Eigenwerte betragsmäßig verschieden
- Tatsächliche Eigenwerte: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$