Lineare Algebra

Tobïas Kugel, Jil Zerndt
FS 2024

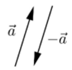
Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
- $\vec{e}$ = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index $\vec{e_a}$
- $\vec{PQ}$ = Vektor, der den Punkt P in Q verschiebt
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (selber Betrag und Richtung)

Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

Gegenvektor $-\vec{a}$ ist parallel zu $\vec{a}$, hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.
$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$



Länge/Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

Einheitsvektor/Normierung $\vec{e_a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Der Vektor $\vec{e_a}$ wird als **Einheitsvektor oder auch normiert** bezeichnet und der Übergang von $\vec{a}$ nach $\vec{e_a}$ heisst **Normierung**.

Orthogonal (Senkrecht) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ orthogonal
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt

Normalenvektor Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene E ist, heisst *Normalenvektor* von E. Eine Koordinatendarstellung einer Ebene E heisst normiert, wenn gilt: $\vec{n} = 1$.

Rechnen mit Vektoren

Vektoraddition
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation
$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

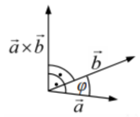
Winkelberechnung φ = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(0 \leq \phi \leq \pi)$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Winkel und Skalarprodukt Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren und φ der eingeschlossene Winkel, $0 \leq \varphi \leq \pi$, dann gilt:
$$\varphi < \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$
$$\varphi > \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$
$$\varphi = \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Eigenschaften des Skalarprodukts
Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - & a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - & a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - & a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \qquad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

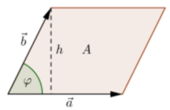


Eigenschaften des Vektorprodukt
Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

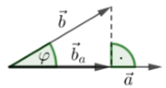
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- Distributiv-Gesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!!

Fläche des aufgespannten Parallelogramms $= \vec{a} \times \vec{b}$
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$
$$A = |\vec{a} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Orthogonal Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$
$$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \text{ und } |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, die zweite für $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

Linearkombination (LK) $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$

mit $\lambda_n \in R$ heisst *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$.

Lineare Abhängigkeit $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ sind linear unabhängig, wenn:

- $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{a_k} \neq \vec{0} (\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$
- $0 \cdot \vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + \cdots + 0 \cdot \vec{a_k}$ als einzige LK $\vec{0}$ ergibt

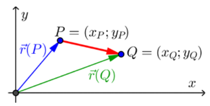
Komponentendarstellung $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + \cdots + a_n \cdot \vec{e_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\exists a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ (Komponente), so dass jeder Vektor $\vec{a}$ als LK von $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ eindeutig dargestellt werden kann.

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e_1} + \ldots + x_n \cdot \vec{e_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Zu jedem Punkt P des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung O angeheftet, wie jeder Vektor LK von $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen.

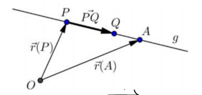
Komponentendarstellung von $\vec{OP}$
$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$
$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \cdots - \cdots \end{pmatrix}$$



Geraden und Ebenen

Gerade in der Ebene und im Raum

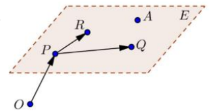
- $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$
- $g : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$



Der Punkt P heisst Aufpunkt, der Richtungsvektor $\vec{a} = \vec{PQ}$ von g.

Ebene kann durch 3 Punkte festgelegt werden

- Die Vektoren $\vec{PA}$, $\vec{PR}$, $\vec{PQ}$ sind komplanar
- $\vec{PA} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$
  $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$

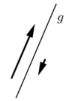


Kollinear und Komplanar

Lage von Geraden im Raum

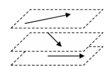
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Kollinear
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen **kollinear**, wenn es eine Gerade g gibt, zu denen beide parallel sind. Ein **Spezialfall** bildet dabei der Nullvektor, welcher zu jedem Vektor kollinear ist.
$\vec{a}, \vec{b}$ **sind genau dann kollinear, wenn** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$



Eigenschaften kollinear Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
so ist einer ein Vielfaches des anderen; es gibt also eine reelle Zahl λ, sodass gilt: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$

Komplanar
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen **komplanar**, wenn es eine Ebene E gibt, zu denen alle drei parallel sind.

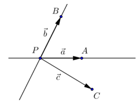


Eigenschaften komplanarer Vektoren

Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, für die gilt:

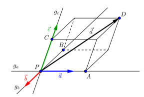
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear.

Dann lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen; es gibt also reelle Zahlen λ und μ, sodass gilt:
$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$



Eigenschaften nicht komplanarer Vektoren

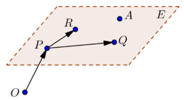
Sind drei *nicht komplanare* Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$, dann lässt sich jeder Vektor $\vec{d}$ im $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ eindeutig darstellen; es gibt also reelle Zahlen λ, μ und ν, so dass gilt:
$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$$



Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

Parameterdarstellung

Eine Gerade oder Ebene E lässt sich durch eine Gleichung der folgenden Form beschreiben:



$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}\,(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Der Punkt P heisst *Aufpunkt*, die Vektoren $a = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ heissen *Richtungsvektoren* von E. Die Parameterdarstellung ist nicht eindeutig. Als Richtungsvektoren werden zwei beliebige Vektor gewählt, die *parallel* zu E sind und *nicht kollinear* sind.

Koordinatendarstellung

Eine Ebene E im Raum lässt sich durch eine Gleichung der folgenden Form Beschreiben:

$$E:\ ax + by + cz + d = 0, \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Dait ist gemeint, dass die Ebene E aus allen Punkten P besteht, deren Koordinaten x, y und z diese Gleichung erfüllen. Das $|d|$ stellt den Abstand zum Ursprung dar, wenn die Gleichung normiert ist. Ansonsten ist es $\frac{d}{\vec{n}}$

Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Für das Berechnen der Koordinatendarstellung aus der Parameterdarstellung gibt es mehrere Möglichkeiten.
Die Einfachste ist das berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten a, b und c liefert.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene E ermittelt.
Die zweite Möglichkeit ist es, ein LGS aufzustellen und die Parameter zu eliminieren.

$$\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung $\rightarrow$ Koordinatendarstellung

$$E: \overrightarrow{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{b}$$

$$E: \overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$$

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$
- $2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4}$
- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4}$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Koordinatendarstellung $\rightarrow$ Parameterdarstellung

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

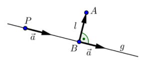
Abstände berechnen

Abstand Punkt-Gerade

Für das finden des Abstandes zu einer Geraden gibt es verschiedene Möglichkeit.
Hier der Weg über den Fusspunkt. Gegeben Gerade $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ in Parameterform und Punkt A. Gesucht ist der Fusspunkt $B \in g$.

1. Da $B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \begin{pmatrix} P_x + a\lambda_B \\ P_y + b\lambda_B \\ P_z + c\lambda_B \end{pmatrix}$.
2. Da $\overrightarrow{BA} \perp g \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a} = 0$
3. Jetzt kann ein LGS aufgestellt und aufgelöst werden.

Weiter Möglichkeit gehen über die Projektion oder die Fläche des Kreuzprodukt.

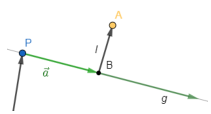


Abstand Punkt-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{r}(A) - \overrightarrow{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{a}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{a}|}$

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3\lambda \\ 13 + 5\lambda \end{pmatrix}$
2. $0 = \begin{pmatrix} 3 - 1 - 3\lambda \\ -1 - 13 - 5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$
3. Length $= \left| \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ -14 - 5x \end{pmatrix} \right|$



Abstand Gerade-Gerade

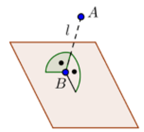
1. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{r}(A) - \overrightarrow{r}(B)$
2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n}$
3. Length $= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$

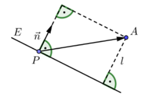
Abstand Punkt-Ebene

Gegeben ein Punkt $A = (x_A; y_A; z_A)$ sowie eine Ebene E mit der **normierten** Koordinatendarstellung $E:\ ax + by + cz + d = 0$. Dann gilt für den Abstand l des Punktes A von der Ebene E die gleichung (1). Ist die Koordinatendarstellung nicht **nicht normiert**, so gilt (2).

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d| \tag{1}$$

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|} \tag{2}$$





Abstand Punkt-Ebene

1. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{r}(A) - \overrightarrow{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$

Geometrische Transformationen

$\mathbb{R}^2$

Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

- Gerade $g: ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g: x + 7y = 0$
- Normiert $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

- auf Gerade $g: ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g: 2x - y = 0$
- Normiert $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotation

- um den Ursprung
- um Winkel α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scherung

- in x-Richtung um s_1
- in y-Richtung um s_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

Zentrische Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2
- in z-Richtung um λ_3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

- Ebene $E: ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E: x + 2y + 3z = 0$
- Normiert $E: \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- Ebene $E: ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E: 2x - y + 3z = 0$
- Normiert $E: \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die x, y, z Achsen

$$\text{x: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{y: } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{z: } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die Gerade g

- Gerade $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
- mit $|\vec{b}| = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1-\cos(\alpha)) & ab(1-\cos(\alpha)) - b\sin(\alpha) & a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) \\ ab(1-\cos(\alpha)) + b\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1-\cos(\alpha)) & -b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) \\ -a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) & b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) & \cos(\alpha) + (a^2+b^2)(1-\cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ
Eine *Matrix* ist (simpel gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element* a_ij ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Z**eile **z**uerst, **Sp**alte **Sp**äter). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit m-Zeilen und n-Spalten werden $m \times n$-Matrizen genannt.

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.
- $m \times n$-Matrix
- a_{ij}: Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte

Nullmatrix Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

Spaltenmatrix
Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Spaltenmatrix können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden ($\vec{a}$).

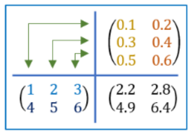
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion
- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation
- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen
- Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:
  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ sowie $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

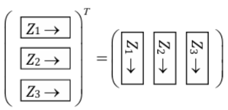
Matrixmultiplikation $A^{m \times n}$, $B^{k \times n}$
Bedingung: A hat n Spalten und B hat n Zeilen.
Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.
- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$



Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen
- Assoziativ-Gesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:
  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Transponierte Matrix
- A^T: Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Transponieren
Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix ist eine $n \times m$-Matrix. Diese wird erhalten, indem die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen gemacht werden.



Transposition Regeln

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit Wir betrachten Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ mit n Komponenten. Diese Vektoren heissen *linear unabhängig* wenn $\sum_{i=1}^{k} 0 \cdot a_i$ die einzige Linearkombination deren ist, die $\vec{0}$ ergibt. Anderenfalls heissen sie *linear abhängig*.

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS Für eine quadratische $n \times n$-Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:
1. $\det(A) \neq 0$
2. $rg(A) = n$
3. A ist invertierbar
4. Das LGS $A \cdot \vec{c} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.
5. Die Spalten von A sind linear unabhängig.
6. Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

Rang einer Matrix
Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.
Rang $rg(A)$ einer Matrix $A^{m \times n}$:

$$rg(A) = \text{Anzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen}$$

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$
- Nicht lösbar: $rg(A) \neq rg(A|b)$
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$
- unendlich viele Lösungen: $rg(A) < n$

Gauss-Verfahren

Zeilenstufenform (Gauss)
- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen → stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen
- Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins
- Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:
- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \quad x_2 = \lambda \to x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \quad x_4 = \mu \to x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Verfahren
Für das Gauss-Verfahren wird Schritt 1.-4 des Gauss-Jordan-Verfahren angewendet. Das resultierende LGS wird durch Rückwärtssubstitution gelöst.

Gauss-Jordan-Verfahren
1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte $= 0$, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
1. Ein LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ ist genau dann lösbar, wenn $rg(A) = rg(A \mid \vec{c})$
2. Es hat genau eine Lösung, falls **zusätzlich** zu 1. gilt: $rg(A) = n$
3. Es hat unendlich viele Lösungen, falls **zusätzlich** gilt: $(rg(A) < n)$

i Bei einem homogenen LGS ist nach Definition $\vec{c} = \vec{0}$; deswegen gilt immer: $rg(A) = rg(A \mid \vec{c})$. Daher gibt es bei homogenen LGS nur zwei Möglichkeiten:
- Das LGS hat **eine Lösung** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**.

Homogenes LGS
Ein LGS heisst *homogen*, wenn die rechte Seite $= \vec{0}$ ist: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Zusammenhänge invertierbarkeit und Homogenes LGS
Ist A invertierbar, so hat das homogene LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

Quadratische Matrizen

Matrizen umformen bestimme die Matrix X:

$$A \cdot X + B = 2 \cdot X$$

- $A \cdot X = 2 \cdot X - B$
- $A \cdot X - 2 \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot (A - 2E)^{-1} \cdot X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$
- $X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$

Inverse Die Inverse einer quadratischen Matrix A ist eine Matrix A^{-1}, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

. Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*.

Inverse einer quadratischen Matrix A

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

1. Die Inverse einer invertierbaren Matrix ist eindeutig bestimmt.
2. Die Inverse einer invertierbaren Matrix A ist invertierbar und es gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Multiplizieren wir zwei invertierbare Matrizen A und B miteinander, so ist das Produkt auch invertierbar und es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   Die Reihenfolge ist relevant!
4. Die Transponierte A^T einer quadratischen Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. In diesem Fall gilt: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Zusammenhänge invertierbarkeit

Gegeben eines LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit $n \times n$-Koeffizientenmatrix A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent ($\Leftrightarrow$):

1. A ist invertierbar.
2. $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat genau eine Lösung.
3. $rg(A) = n$

Inverse einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit $det(A) = ad - bc$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen

einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow \left(A|E\right) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow \left(E|A^{-1}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Determinante

Determinante

Die Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist.

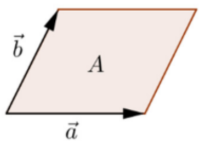
$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert.} \\ = 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert nicht.} \end{cases}$$

Geometrische Interpretation

der Determinante:

- Fläche im $\mathbb{R}^2$
- Volumen im $\mathbb{R}^3$

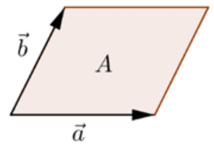
welche durch eine Matrix A aufgespannt wird.



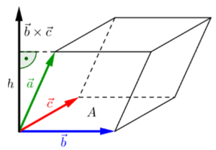
$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$

Geometrische bedeutung der Determinante

Die Spalten einer 2×2-Matrix A spannen ein Parallelogram auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade der **Flächeninhalt** des aufgespannte Parallelogram.



Werden Spalten einer 3×3-Matrix B als raum Vektoren betrachtet, spannen diese einen Spat auf. Die Determinante der Matrix A ist dabei gerade das $Volumen$ des aufgespannten Spat.



Determinantenregeln

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär

Eigenschaften von Determinanten

Gegeben zweier *quadratischer Matrizen* A, B sowie einer *quadratischen Dreiecksmatrix* D.

$$\begin{aligned} \det(E) &= 1 \\ \det(D) &= \prod_{i=1}^{n} d_{ii} \\ \det(A \cdot B) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A^T) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ \det(m \cdot A) &= m^n \cdot \det(A) \text{ mit } m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Determinante einer 1×1-Matrix

$\det(A) = A_{11}$

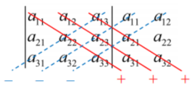
Determinante einer 2×2-Matrix

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

Determinante einer 3×3-Matrix

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$



$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$$

Determinante einer $n \times n$-Matrix

A

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen
- $|A_{ij}|$ ist die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht evtl. bsp hier

Determinante einer $n \times n$-Matrix nach Laplace

Gegeben einer $n \times n$-Matrix A, wird zum berechnen der Determinante eine feste Zeile i oder Spalte j gewählt, nachder die Determinante entwickelt wird.

Entwicklung nach Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bezeichnungen:

- a_{ij} ist das Element der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Splate
- A_{ij} ist die Matrix, die durch das Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

! Um den Rechenaufwand zu minimieren, entwickelt man nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen.

Lineare Abhängigkeit

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind linear unabhängig
- Zeilen von A sind linear unabhängig
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Vektorräume

Vektorraum Menge V mit zwei Verknüpfungen:
- Vektoraddition: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in V$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot \overrightarrow{a} \in V$
- Nullpunkt: $\overrightarrow{0} \in V$

Vektorraum
Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge $V \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen:

$$+ : V \times V \to V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \to V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$$

mit folgenden Eigenschaften: Gegeben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, die Menge aller Vektoren V sowie dem Neutralelement $\vec{0}$ gilt:
1. Es gibt ein Element $\vec{0} \in V$, für das gilt: $\forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2. Für jedes Element in $\vec{a} \in V$ gibt es genau ein $-\vec{a} \in V$, so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
3. Es gilt $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
4. Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. Assoziativgesetz:
   $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
   $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
6. Distributivgesetz:
   $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
   $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Wichtig: Die Betrachtung, dass ein Vektor ein Objekt mit *Betrag* und *Richtung* ist, stimmt in dieser allgemeinen Sichtweise nicht mehr umbedingt.

Eigenschaften eines Vektorraums
Dammit eine Menge V mit einer Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, muss gelten:
1. Die Regeln (1)-(8) aus der Definition werden eingehalten.
2. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$

Unterraum Teilmenge U eines Vektorraums V, die selbst ein Vektorraum ist.
- $\overrightarrow{0} \in U$
- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U$ gilt $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \vec{a} \in U$ gilt $\lambda \cdot \overrightarrow{a} \in U$

Unterraum Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst *Unterraum*, wenn U selber auch ein Vektorraum ist. Nich jede Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Unterraum von V. Zwar erfüllt sie die Vektorraum-Eigenschaften aus der Definition, jedoch ist nicht garantiert, dass für $\vec{a}, \vec{b} \in U$ $\vec{a} + \vec{b} \in U$ gilt.

Unterraumkriterien Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:
1. $\forall \vec{a}, \vec{a} \in U : \vec{a} + \vec{b} \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in U : \lambda \cdot \vec{a} \in U$

Wichtig: U enthält $\vec{0}$. Falls $\vec{0} \notin U$, ist U kein Unterraum.

Nullvektorraum Die Teilmenge $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$, die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum V enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von V.

Basis und Dimension

Linearer Span
Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ in einem reellen Vektorraum V.

$$\text{span}\left(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right) = \left\{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{b_n} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}$$

Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n-$ Matrix B
Folgende Aussagen sind dann äquivalent:
1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ sind linear unabhängig
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \overrightarrow{0}$
3. Es gilt $\text{rg}(B) = n$
   Eine Teilmenge U eine Vektorraums V heisst Unterraum von V, wenn U selbst auch ein Vektorraum ist.

Erzeugendensystem Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum aufspannen.
Eine Menge $\left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ von Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ im Vektorraum V heisst Erzeugendensystem von V, wenn gilt:

$$V = \text{span}\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right)$$

Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ - Matrix B.
Folgende Aussagen sind dann äquivalent:
1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ bilden ein Erzeugendensystem $\mathbb{R}^m$
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
3. Es gilt $rg(B) = m$

Dimensionen Für jeden reellen Vektorraum V gilt: Jede Basis von V hat gleich viele Elemente.
Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden, heisst Dimension von $V = \dim(V)$.
- Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente $\to \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basis Eine Menge $B = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ von Vektoren $\vec{b}_k$ im Vektorraum V heisst Basis von V, wenn gilt:
- $B = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ ist ein Erzeugendensystem von V
- Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ sind linear unabhängig

Basis und Dimensionen Folgende Aussagen sind äquivalent:
- Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Basiswechsel Beliebige Basis $B \to$ Standard-Basis S

$$B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S\right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$
$$\vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + a_n \cdot \overrightarrow{b_n}$$

$$B = \left\{\binom{3}{1}_S ; \binom{-1}{0}_S\right\}, \vec{a} = \binom{2}{3}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \binom{3}{1} + 3 \cdot \binom{-1}{0} = \binom{3}{2}_S$$

Basiswechsel Standard-Basis $S \to$ Beliebige Basis B

$$B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{\binom{1}{1}_S ; \binom{-1}{0}_S\right\}, \quad \vec{a} = \binom{-7}{-4}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \binom{a_1}{a_2}_B = \binom{-7}{-4}_S$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{a_1}{a_2}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{-7}{-4}_S$$
$$\binom{a_1}{a_2}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{-7}{-4}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \binom{-4}{3}_B$$

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (V und W können auch gleich sein). Eine Abbildung $f : V \to W$ heisst **linear Abbildung**, wenn für alle $x, y \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \tag{3}$$
$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \tag{4}$$

Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ angewendet wird, heisst **Bild** von $\vec{x}$ unter f.

i Linearität ist etwas Besonderes. Die allermeistne Abbildungen/Funktionen sind nicht linear.

Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heisst linear, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
- $f(\lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b})$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Potenzieren: $\vec{a}^2$
- Addition von Skalaren: $\lambda + \vec{a}$
- Cosinus: $\cos(\vec{a})$

Überprüfung der Linearität

Für eine Abbildung $f : V \to W$, $f(\vec{x}) \to \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x_1} \cdot \vec{x_2}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b})$
- $f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \binom{x_1}{x_2} \to \binom{x_1 + 2x_2}{x_2}$

- $f\binom{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} = \binom{x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2)}{x_2 + y_2}$
- $f\binom{x_1}{x_2} + f\binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2}{x_2 + y_2} \to OK$

... usw.

Lineare Abbildung - Darstellung

Wir betrachten die Vektorräume R''' und R'', versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : R'' \to R'''$ durch eine $m \times n$-Matrix A darstellen:

$$f(\vec{x}) = A \times \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Basisvektoren von R'':

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kern

Der *Kern* $\ker(A)$ einer $m \times n$-Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in R^n$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Bild

Das *Bild* (auch Spaltenraum) $im(A)$ einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des $m-$dimensionalen Vektorraums W, der von den Spalten $\vec{a_1}, veca_2, \ldots, \vec{a_n}$ der Matrix (aufgefasst als Vektoren in W) aufgespannt wird.

$$im(A) = span(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}) = \{\lambda \vec{a_1} + \lambda \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_n} \mid \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Bild im(A)

einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\right) = \left\{\lambda_1 \vec{a_1} + \cdots + \lambda_n \vec{a_n} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

Für jede $m \times n-$ Matrix A gilt:

$$\dim(\operatorname{im}(A)) = rg(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\operatorname{im}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Kern ker(A)

einer $m \times n$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Der Kern $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Beziehung Kern und Bild

Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\dim(im(A)) = rg(A) \text{ und } \dim(ker(A)) + dim(im(A)) = n$$

Bild und Kern

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A. Dann gilt:

- Die Spalten von A ergeben eine Basis des Bildes von f
- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ist der Kern von f

Abbildungsmatrix

Verknüpfungen

Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f : U \to V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g : V \to W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{U \quad \xrightarrow{f} \quad V \quad \xrightarrow{g} \quad W}}^{g \circ f}} \\ U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g\big(f(\vec{x})\big) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Abbildungsmatrix

Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ - Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \left(f(\vec{e_1}) \ldots f(\vec{e_n})\right) = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{x_1}{x_2} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix und Basiswechsel

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \left\{\vec{b_1}; \ldots; \vec{b_n}\right\}, W \text{ mit Basis } C = \left\{\vec{c_1}; \ldots; \vec{c_n}\right\}$$

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ lässt sich durch eine $m \times n$ - Matrix ${}_C A_B$ darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_C A_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C :

$${}_C A_B = {}_C \left(\left(f\left(\vec{b_1}\right) \right)_C \left(f\left(\vec{b_2}\right) \right)_C \cdots \left(f\left(\vec{b_n}\right) \right)_C \right)_B$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \binom{x_1}{x_2} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\binom{1}{0}; \binom{0}{1}\right\}, C = \left\{\binom{1}{0}; \binom{1}{1}; \binom{1}{2}\right\} \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ wird durch einen Vektor (x, y, z) dargestellt, wobei $z \neq 0$. Die Punkte (x, y, z) und $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

i Homogene Koordinaten sind nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen.

Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix ${}_BT_S$ für den Basiswechsel von S nach B

- Die Matrix ${}_BT_S$ ist die Inverse von ${}_ST_B$: ${}_BT_S = ({}_ST_B)^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\text{lineare Abbildung } f"] & & \mathbb{R}^2 \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_SA_S"] \arrow[d, mapsto, "{}_BT_S"'] & & f(\vec{x}) \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_BA_B"'] & & f(\vec{x}) \arrow[u, mapsto, "{}_ST_B"']
\end{tikzcd}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_CT_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_BT_C = ({}_CT_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vollständiges Beispiel

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_CA_B = {}_C\left(\left(f\left(\frac{2}{5}\right)\right)_C \left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C \right)_B$$

$$\left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$${}_CA_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$