Lineare Algebra

Tobïas Kugel, Jil Zerndt
FS 2024

Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.
- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
- $\vec{e}$ = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index $\vec{e_a}$
- $\vec{PQ}$ = Vektor, der den Punkt P in Q verschiebt
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (selber Betrag und Richtung)

Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

Gegenvektor $-\vec{a}$ ist parallel zu $\vec{a}$, hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.
$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

Länge/Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

Einheitsvektor/Normierung $\vec{e_a} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
Der Vektor $\vec{e_a}$ wird als **Einheitsvektor oder auch normiert** bezeichnet und der Übergang von $\vec{a}$ nach $\vec{e_a}$ heisst **Normierung**.

Orthogonal (Senkrecht) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ orthogonal
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt

Normalenvektor Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene E ist, heisst *Normalenvektor* von E. Eine Koordinatendarstellung einer Ebene E heisst normiert, wenn gilt: $\vec{n} = 1$.

Rechnen mit Vektoren

Vektoraddition
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation
$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

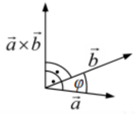
Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Winkelberechnung φ = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $(0 \leq \phi \leq \pi)$
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Winkel und Skalarprodukt
Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren und φ der eingeschlossene Winkel, $0 \leq \varphi \leq \pi$, dann gilt:
$$\varphi < \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$
$$\varphi > \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$
$$\varphi = \frac{pi}{2}, \text{ wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Eigenschaften des Skalarprodukts
Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

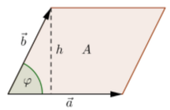
Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - & a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - & a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - & a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \qquad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



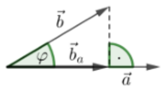
Eigenschaften des Vektorprodukt
Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- Distributiv-Gesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!!

Fläche des aufgespannten Parallelogramms $= \vec{a} \times \vec{b}$
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$
$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Orthogonal Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$
$$\vec{b_a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \text{ und } |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, die zweite für $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

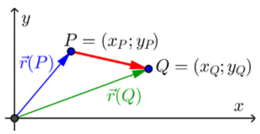
Linearkombination (LK) $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$
mit $\lambda_n \in R$ heisst *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$.

Lineare Abhängigkeit $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ sind linear unabhängig, wenn:
- $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{a_k} \neq \vec{0}$ $(\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$
- $0 \cdot \vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + \cdots + 0 \cdot \vec{a_k}$ als einzige LK $\vec{0}$ ergibt

Komponentendarstellung $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + \cdots + a_n \cdot \vec{e_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
$\exists a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ (Komponente), so dass jeder Vektor $\vec{a}$ als LK von $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ eindeutig dargestellt werden kann.

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e_1} + \ldots + x_n \cdot \vec{e_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Zu jedem Punkt P des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung O angeheftet, wie jeder Vektor LK von $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen.

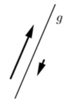
Komponentendarstellung von $\vec{OP}$
$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$
$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \cdots - \cdots \end{pmatrix}$$



Geraden und Ebenen

Kollinear und Komplanar

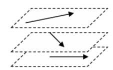
Kollinear $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $\exists$ eine Gerade g, zu der beide parallel sind
- Spezialfall: Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (Kreuzprodukt)
- $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ (einer ist Vielfaches des anderen)



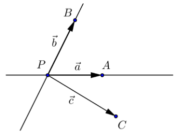
Lage von Geraden im Raum

	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

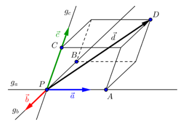
Komplanar $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$
Es existiert eine Ebene E, zu der alle parallel sind.



LK komplanarer Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$
Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ darstellen: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

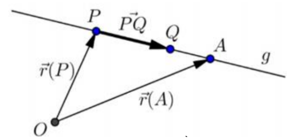


LK nicht komplanarer Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$
Jeder Vektor $\vec{d}$ im $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eindeutig darstellen:
$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$



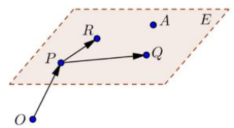
Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

Parameterdarstellung einer Geraden
$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$$
Der Punkt P heisst *Aufpunkt*, der Vektor $\vec{a} = \vec{PQ}$ heisst *Richtungsvektor* von g.



$g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

Parameterdarstellung einer Ebene
$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$
P = *Aufpunkt*, $a = \vec{PQ}$ und $\vec{b} = \vec{PR}$ sind *Richtungsvektoren* von E.



Parameterdarstellung nicht eindeutig! Richtungsvektoren zwei beliebige Vektoren: *parallel* zu E und *nicht kollinear*

$\vec{PA}$, $\vec{PR}$, $\vec{PQ}$ komplanar
$\vec{PA} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$

Koordinatendarstellung $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$$E: ax + by + cz + d = 0$$
Bedeutung: die Ebene E besteht aus allen Punkten P, deren Koordinaten x, y und z diese Gleichung erfüllen. $|d|$ = Abstand zum Ursprung, wenn Gleichung normiert (sonst $\frac{d}{\vec{n}}$)
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Umrechnung von Parameter- und Koordinatendarstellung

Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten a, b und c liefert. Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene E ermittelt.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 \\ 2+4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E : -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Option 2: LGS aufstellen, Parameter eliminieren: $\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung

$$E : 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$
- $2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4}$
- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4}$

$$E : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

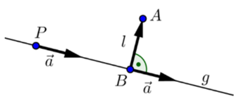
Abstände berechnen

Abstand Punkt-Gerade

Gesucht ist der Fusspunkt $B \in g$

Gegeben: Gerade $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ in Parameterform und Punkt A

1. Da $B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \begin{pmatrix} P_x + a\lambda_B \\ P_y + b\lambda_B \\ P_z + c\lambda_B \end{pmatrix}$.
2. Da $\overrightarrow{BA} \perp g \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a} = 0$
3. Jetzt kann ein LGS aufgestellt und aufgelöst werden.

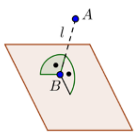


Abstand Punkt-Ebene

l = Abstand von A zu E

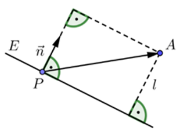
Gegeben: Punkt $A = (x_A; y_A; z_A)$, Ebene E mit der **normierten** Koordinatendarstellung $E : ax + by + cz + d = 0$

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$



nicht normierte Koordinatendarstellung:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$



Abstand Punkt-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

Abstand Gerade-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$
3. Length $= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

Abstand Punkt-Ebene

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

Beispiel Abstand Punkt-Gerade

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 13+5\lambda \end{pmatrix}$

2. $0 = \begin{pmatrix} 3-1-3\lambda \\ -1-13-5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$

3. Length $= \left| \begin{pmatrix} 2-3x \\ -14-5x \end{pmatrix} \right|$

Geometrische Transformationen

$\mathbb{R}^2$

Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

- Gerade $g : ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g : x + 7y = 0$
- Normiert $g : \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

- auf Gerade $g : ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g : 2x - y = 0$
- Normiert $g : \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotation

- um den Ursprung
- um Winkel α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scherung

- in x-Richtung um s_1
- in y-Richtung um s_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

Zentrische Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2
- in z-Richtung um λ_3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

- Ebene $E : ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E : x + 2y + 3z = 0$
- Normiert $E : \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- Ebene $E : ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E : 2x - y + 3z = 0$
- Normiert $E : \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die x, y, z Achsen

$$\text{x: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{y: } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{z: } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die Gerade g

Gerade $g : \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 1$

$\vec{a}$ ist ein Punkt auf der Geraden g, $\vec{b}$ ist der Richtungsvektor der Geraden g

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1-\cos(\alpha)) & ab(1-\cos(\alpha)) - b\sin(\alpha) & \dots \\ ab(1-\cos(\alpha)) + b\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1-\cos(\alpha)) & \dots \\ -a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) & b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & -b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & \cos(\alpha) + (a^2+b^2)(1-\cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

↑ 3x3 Matrix, die die Rotation um die Gerade g beschreibt (hat nicht auf eine Zeile gepasst)

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ Eine *Matrix* ist (simpel gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element* a_{ij} ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Z**eile **z**uerst, **Sp**alte **Sp**äter). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit m-Zeilen und n-Spalten werden $m \times n$-Matrizen genannt.

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.
- $m \times n$-Matrix
- a_{ij}: Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte

Nullmatrix Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

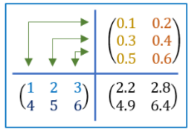
Spaltenmatrix Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden ($\vec{a}$).

Addition und Subtraktion
- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation
- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen
- Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:
  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ sowie $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

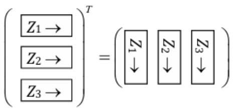
Matrixmultiplikation $A^{m\times n}$, $B^{n\times k}$
Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.
Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.
- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$



Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen
- Assoziativ-Gesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:
  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Transponierte Matrix $A^{m\times n} \to (A^T)^{n\times m}$
- A^T: Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$



Spezielle Matrizen
- **Symmetrische Matrix**: $A^T = A$
- **Einheitsmatrix**: E mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- **Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.
A: Koeffizientenmatrix
$\vec{x}$: Vektor der Unbekannten
$\vec{b}$: Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A) =$ Anzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen
$\Rightarrow$ Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)
- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen $\to$ stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Gauss-Jordan-Verfahren
1. bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
2. oberste Zahl in Pivot-Spalte $= 0$
   $\to$ vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
3. teile erste Zeile durch a_{11} $\to$ so erhalten wir führende Eins
4. Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenperationen)

nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Zeilenperationen erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)
- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$
- unendlich viele Lösungen: $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen
Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins
Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:
- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \quad x_2 = \lambda \to x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \quad x_4 = \mu \to x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \to A \cdot \vec{x} = \vec{0} \to rg(A) = rg(A \mid \vec{b})$
nur zwei Möglichkeiten:
- eine Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS
Für $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

Quadratische Matrizen

Umformen bestimme die Matrix X: $A \cdot X + B = 2 \cdot X$
$\Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot X - B \Rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = -B \Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot X = -B$
$\Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$
$\Rightarrow X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}
A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.
Eine Matrix heisst *invertierbar / regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
  A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\quad A$ invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n\times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \to \big(A|E\big) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow \big(E|A^{-1}\big)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \to \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Determinante

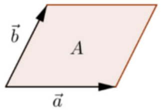
Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist

$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert} \\ = 0 & \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert nicht} \end{cases}$$

Geometrische Interpretation der Determinante:

Fläche im $\mathbb{R}^2$ und Volumen im $\mathbb{R}^3$ durch eine Matrix A aufgespannt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$



Eigenschaften von Determinanten mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär

- $\det(E) = 1$
-
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

E = Einheitsmatrix

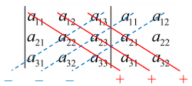
Determinante 1×1-Matrix $\det(A) = A_{11}$

Determinante 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

Determinante 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$



Determinante $n \times n$-Matrix

$\det(A) = |A| = \sum_{i=1 \text{ oder } j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

- Entwicklung nach Zeile: j bei Σ und wähle eine feste Zeile i
- Entwicklung nach Spalte: i bei Σ und wähle eine feste Spalte j
- a_{ij} ist das Element der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte
- $|A_{ij}|$ ist die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht

Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen!

Tricks und Tipps

- hat A eine Nullzeile oder -spalte, so ist $\det(A) = 0$
- hat A zwei gleiche Zeilen oder Spalten, so ist $\det(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Spalten/Zeilen sind linear unabhängig

Determinante mit Gauss Spezialfall Dreiecks- /Diagonalmatrix

Wende Gauss-Algorithmus an, um A in Dreiecksform zu bringen. Es gilt für jede Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix D:

$$\det(D) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$

k = Anzahl der Zeilen-Vertauschungen

Bei Zeilen-Vertauschungen ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$

$\det(A)$ verändert sich nicht bei Zeilen-Additionen/-Multiplikationen

Bei Skalarmultiplikationen ändert sich $\det(A)$ um den Skalierungsfaktor (am besten einfach keine Skalarmultiplikationen durchführen)

Vektorräume

Reeller Vektorraum ist eine Menge $V \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen:

$$\text{Addition: } + : V \times V \to V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$
$$\text{Skalarmultiplikation: } \cdot : \mathbb{R} \times V \to V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$$

Eigenschaften: (V = die Menge aller Vektoren, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

- Addition: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \ : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
- Skalarmultiplikation: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V \ : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$
- Neutralelement $\vec{0} \in V$: $\forall \vec{a} \in V \ : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Inverses Element $-\vec{a} \in V$: $\forall \vec{a} \in V \ \exists -\vec{a}$ so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ und $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
- Distributivgesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ und $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Unterraum $U \subseteq V$

Teilmenge U eines Vektorraums V, die selbst ein Vektorraum ist.

Nullvektorraum Die Teilmenge $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$, die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum V enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von V.

Unterraumkriterien für Beweis dass U ein Unterraum von V ist

Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:

- $\vec{0} \in U$
- $\vec{a} + \vec{b} \in U \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in U$
- $\lambda \cdot \vec{a} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \vec{a} \in U$

Um zu zeigen dass eine Menge V ein Vektorraum ist, beweisen wir genau auch diese Kriterien!!

Unterraum Beweis $U = \{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- $\vec{0} = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \in U$
- $\vec{a} = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ und $\vec{b} = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$
  $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + a_2) \cdot x^2 + (b_1 + b_2) \cdot x + (c_1 + c_2) \in U$
- $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1) = (\lambda \cdot a_1) \cdot x^2 + (\lambda \cdot b_1) \cdot x + (\lambda \cdot c_1) \in U$

$\Rightarrow U \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}$

Basis und Dimension

Linearer Span $\text{span}(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}) = \{\lambda_1 \cdot \vec{b_1} + ... + \lambda_n \cdot \vec{b_n} \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

Menge aller Linearkombinationen von $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ in Vektorraum V

$\vec{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander schreiben $\Rightarrow$ Matrix $B^{m \times n}$

- Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}$ sind linear unabhängig
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \vec{0}$
- Es gilt $\text{rg}(B) = n$

Erzeugendensystem $V = \text{span}(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n})$

Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum V aufspannen

$\vec{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander schreiben $\Rightarrow$ Matrix $B^{m \times n}$

- Die Vektoren $\vec{b_k}$ bilden ein Erzeugendensystem $\mathbb{R}^m$
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
- Es gilt $rg(B) = m$

Dimension $\dim(V)$ Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden

Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente $\to \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basis $B = \{\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}\}$ von $\vec{b_k} \in V$ heisst Basis von V wenn gilt:

- B ist ein Erzeugendensystem von V
- Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}$ sind linear unabhängig
- $\vec{b_k}$ nebeneinander schreiben $\Rightarrow$ Matrix $B^{n \times n}$

Für $B^{n \times n}$ gilt:

- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Ist B eine Basis von V? Gegeben: $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}$

1. Stelle die Vektoren als Spalten einer Matrix B dar
2. Gauss Algorithmus: Stelle B in Zeilenstufenform
3. Berechne den Rang $\Rightarrow rg(B) = \dim(\text{span}(B))$

Nun gilt:

- $rg(B) = n \Rightarrow \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ sind linear unabhängig
- $rg(B) < n \Rightarrow \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ sind linear abhängig
- $rg(B) = \dim(V) \Rightarrow \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ = Erzeugendensystem von V

$rg(B) = \dim(V) = n \Rightarrow \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ ist eine Basis von V

Basiswechsel Beliebige Basis $B \to$ Standard-Basis S

Gegeben: Basis B, aus $\vec{b}_S$ und Vektor $\vec{a}_B$ in Basis B
(die Vektoren $\vec{b}$ der Basis B sind in Standardbasis!)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S \cdots \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$\vec{a}_B \to \vec{a}_S$ umrechnen:

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow \vec{a}_S = a_1 \cdot \vec{b_1} + a_2 \cdot \vec{b_2} + \cdots + a_n \cdot \vec{b_n}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

Basiswechsel Standard-Basis $S \to$ Beliebige Basis B

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (V und W können auch gleich sein). Eine Abbildung $f: V \to W$ heisst **linear Abbildung**, wenn für alle $x, y \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad (1)$$
$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad (2)$$

Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ angewendet wird, heisst **Bild** von $\vec{x}$ unter f.

> **i** Linearität ist etwas Besonderes. Die allermeistne Abbildungen/Funktionen sind nicht linear.

Lineare Abbildung
Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heisst linear, wenn für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b})$
- $f(\lambda \cdot \overrightarrow{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{a}) \cdot f(\vec{b})$

Erlaubte Operationen:
- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:
- Multiplikation von Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Addition von Skalaren: $\lambda + \vec{a}$
- Potenzieren: $\vec{a}^2$
- Cosinus: $\cos(\vec{a})$

Überprüfung der Linearität
Für eine Abbildung $f: V \to W$, $f(\vec{x}) \to \vec{y}$
- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x_1} \cdot \vec{x_2}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{a}) \cdot f(\vec{b})$
- $f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \binom{x_1}{x_2} \to \binom{x_1+2x_2}{x_2}$
- $f\binom{x_1+y_1}{x_2+y_2} = \binom{x_1+y_1+2\cdot(x_2+y_2)}{x_2+y_2}$
- $f\binom{x_1}{x_2} + f\binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1+y_1+2x_2+2y_2}{x_2+y_2} \to OK$

... usw.

Lineare Abbildung - Darstellung Wir betrachten die Vektorräume R''' und R'', versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f: R'' \to R'''$ durch eine $m \times n$-Matrix A darstellen:

$$f(\vec{x}) = A \times \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Basisvektoren von R'':

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

Zentrische Streckung

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kern Der *Kern* $\ker(A)$ einer $m \times n$-Matrix A ist die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in R^n$ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Bild Das *Bild* (auch Spaltenraum) $im(A)$ einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des $m-$dimensionalen Vektorraums W, der von den Spalten $\vec{a_1}, veca_2, \ldots, \vec{a_n}$ der Matrix (aufgefasst als Vektoren in W) aufgespannt wird.

$$im(A) = span(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}) = \{\lambda\vec{a_1} + \lambda\vec{a_2} + \ldots + \vec{a_n} \mid \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Bild im(A) einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right) = \left\{\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

Für jede $m \times n-$ Matrix A gilt:

$$\dim(\mathrm{im}(A)) = rg(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{im}(A)) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{im}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Kern ker(A) einer $m \times n$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$. Der Kern $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Beziehung Kern und Bild Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\dim(im(A)) = rg(A) \text{ und } \dim(ker(A)) + dim(im(A)) = n$$

Bild und Kern Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A. Dann gilt:
- Die Spalten von A ergeben eine Basis des Bildes von f
- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$ ist der Kern von f

Abbildungsmatrix

Verknüpfungen Wir betrachten zwei lineare Abbildungen
- $f: U \to V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g: V \to W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{g \circ f}} \\ U & \overset{f}{\rightrightarrows} & V & \overset{g}{\rightrightarrows} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Abbildungsmatrix Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ - Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \left(f(\vec{e_1}) \ldots f(\vec{e_n})\right) = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \binom{x_1}{x_2} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix und Basiswechsel
Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \left\{\overrightarrow{b_1}; \ldots; \overrightarrow{b_n}\right\}, W \text{ mit Basis } C = \left\{\overrightarrow{c_1}; \ldots; \overrightarrow{c_n}\right\}$$

Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ lässt sich durch eine $m \times n$ - Matrix ${}_CA_B$ darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_CA_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_CA_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C :

$${}_CA_B = {}_C\left(\left(f\left(\overrightarrow{b_1}\right)\right)_C \left(f\left(\overrightarrow{b_2}\right)\right)_C \cdots \left(f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right)_C \right)_B$$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \binom{x_1}{x_2} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\binom{1}{0}; \binom{0}{1}\right\}, C = \left\{\binom{1}{0}; \binom{1}{1}; \binom{1}{2}\right\} \Rightarrow {}_CA_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ wird durch einen Vektor (x, y, z) dargestellt, wobei $z \neq 0$. Die Punkte (x, y, z) und $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

> **i** Homogene Koordinaten sind nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen.

Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ für den Basiswechsel von S nach B

- Die Matrix ${}_B T_S$ ist die Inverse von ${}_S T_B$: ${}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\text{lineare Abbildung } f"] & & \mathbb{R}^2 \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_S A_S"] \arrow[d, mapsto, "{}_B T_S"'] & & f(\vec{x}) \\
\vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_B A_B"'] & & f(\vec{x}) \arrow[u, mapsto, "{}_S T_B"']
\end{tikzcd}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_B T_C = ({}_C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vollständiges Beispiel

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C A_B = {}_C\left(\left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \right)_C \left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \right)_C \right)_B$$

$$\left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C = \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$