

## Vektorgeometrie

**Vektor** Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$  = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
  - $\vec{e}$  = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index  $\vec{e}_a$
  - $\vec{PQ}$  = Vektor, der den Punkt  $P$  in  $Q$  verschiebt
  - $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$  und  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  (selber Betrag und Richtung)
- Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

**Gegenvektor**  $-\vec{a}$  ist parallel zu  $\vec{a}$ , hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \parallel -\vec{a}$$

**Länge/Betrag eines Vektors**  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

**Einheitsvektor/Normierung**  $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Der Vektor  $\vec{e}_a$  wird als **Einheitsvektor** oder auch **normiert** bezeichnet und der Übergang von  $\vec{a}$  nach  $\vec{e}_a$  heisst **Normierung**.

**Orthogonal (Senkrecht)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$  orthogonal

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen  $90^\circ$  beträgt

**Normalenvektor** Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene  $E$  ist, heisst *Normalenvektor* von  $E$ . Eine Koordinatendarstellung einer Ebene  $E$  heisst normiert, wenn gilt:  $\vec{n} = 1$ .

## Rechnen mit Vektoren

## Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

## Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

**Skalarprodukt**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

**Winkelberechnung**  $\varphi$  = Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

## Winkel und Skalarprodukt

Seien  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zwei Vektoren und  $\varphi$  der eingeschlossene Winkel,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &< \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ \varphi &> \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

## Eigenschaften des Skalarprodukts

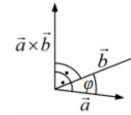
Für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  und  $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz:  $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

**Kreuzprodukt**  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



Für  $\mathbb{R}^2$  gilt:  $\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$

**Eigenschaften des Kreuzprodukts** auch genannt Vektorprodukt

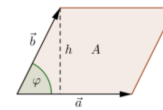
Für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
  - Antikommutativ-Gesetz:  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
  - Distributiv-Gesetz:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
  - Gemischtes Assoziativ-Gesetz:  $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}!$

**Fläche des aufgespannten Parallelogramms**  $= \vec{a} \times \vec{b}$

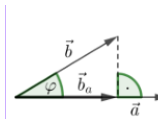
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



**Orthogonal Projektion** von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , die zweite für  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

## Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

**Linearkombination (LK)**  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

mit  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  heisst *Linearkombination* der Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ .

**Lineare Abhängigkeit**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  sind linear unabhängig, wenn:

- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \neq \vec{0}$  ( $\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ )
- $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$  als einzige LK  $\vec{0}$  ergibt

**Komponentendarstellung**  $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (Komponente), so dass jeder Vektor  $\vec{a}$  als LK von  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  eindeutig dargestellt werden kann.

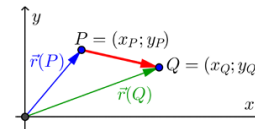
**Ortsvektor**  $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Zu jedem Punkt  $P$  des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung  $O$  angeheftet, wie jeder Vektor LK von  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen:

**Komponentendarstellung von  $\vec{OP}$**

$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \vdots \end{pmatrix}$$



## Geraden und Ebenen

## Kollinear und Komplanar

**Kollinear**  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

- $\exists$  eine Gerade  $g$ , zu der beide parallel sind
- Spezialfall: Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  (Kreuzprodukt)
- $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$  (einer ist Vielfaches des anderen)



**Lage** von Geraden im Raum

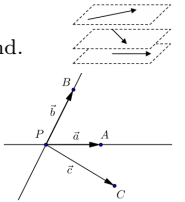
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

**Komplanar**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Es existiert eine Ebene  $E$ , zu der alle parallel sind.

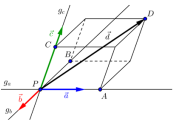
**LK komplanarer Vektoren**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  nicht kollinear sind lässt sich  $\vec{c}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  darstellen:  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$



**LK nicht komplanarer Vektoren**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Jeder Vektor  $\vec{d}$  im  $\mathbb{R}^3$  lässt sich als Linearkombination von  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  eindeutig darstellen:  $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

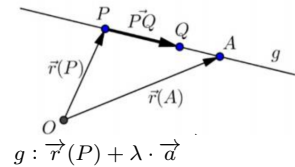


## Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

**Parameterdarstellung** einer Geraden

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$$

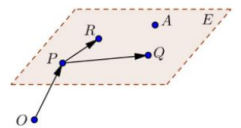
Der Punkt  $P$  heisst *Aufpunkt*, der Vektor  $\vec{a} = \vec{PQ}$  heisst *Richtungsvektor* von  $g$ .



**Parameterdarstellung** einer Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$P$  = *Aufpunkt*,  $\vec{a} = \vec{PQ}$  und  $\vec{b} = \vec{PR}$  sind *Richtungsvektoren* von  $E$ .



Parameterdarstellung nicht eindeutig!

Richtungsvektoren zwei beliebige Vektoren: *parallel* zu  $E$  und *nicht kollinear*

$$\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PQ} \text{ komplanar}$$

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$$

**Koordinatendarstellung**  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Bedeutung: die Ebene  $E$  besteht aus allen Punkten  $P$ , deren Koordinaten  $x, y$  und  $z$  diese Gleichung erfüllen.  $|d|$  = Abstand zum Ursprung, wenn Gleichung normiert (sonst  $\frac{|d|}{n}$ )

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

**Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung**

Berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  liefert. Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene  $E$  ermittelt.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

**Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung**

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 \\ 2+4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen:  $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

**Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung**

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

**Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung**

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

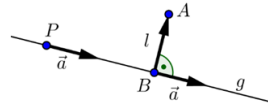
Punkte einsetzen:  $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4} \end{aligned} \quad E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

**Abstände berechnen****Abstand Punkt-Gerade** Gesucht ist der Fußpunkt  $B \in g$ 

Gegeben: Gerade  $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$  in Parameterform und Punkt  $A$

- Da  $B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \vec{r}(P) + \lambda_B \cdot \vec{a}$
- $\vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
- $\vec{BA} \perp g \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{a} = 0$
- $l = |\vec{BA}|$  ( $\lambda_B$  in  $\vec{BA}$  einsetzen)



$$\text{Meist einfacher: } \vec{PA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(P) \Rightarrow l = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

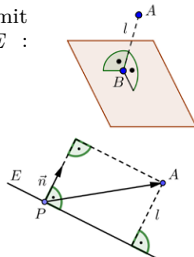
**Abstand Punkt-Ebene**  $l$  = Abstand von  $A$  zu  $E$ 

Gegeben: Punkt  $A = (x_A; y_A; z_A)$ , Ebene  $E$  mit der **normierten** Koordinatendarstellung  $E: ax + by + cz + d = 0$

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

**nicht normierte** Koordinatendarstellung:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

**Geometrische Transformationen** $\mathbb{R}^2$ **Streckung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } \lambda_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } \lambda_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Spiegelung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g: ax + by = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g: x + 7y = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

**Orthogonale Projektion**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ auf Gerade } g: ax + by = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g: 2x - y = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Rotation**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ um den Ursprung} \\ & \bullet \text{ um Winkel } \alpha \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Scherung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } s_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } s_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

 $\mathbb{R}^3$ **Zentrische Streckung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } \lambda_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } \lambda_2 \\ & \bullet \text{ in } z\text{-Richtung um } \lambda_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Spiegelung** an der Ebene

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E: ax + by + cz = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E: x + 2y + 3z = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } E: \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

**Orthogonale Projektion** auf die Ebene

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E: ax + by + cz = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E: 2x - y + 3z = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } E: \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

**Rotation** um den Winkel  $\alpha$  um die x, y, z Achsen

$$\begin{aligned} x: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} & y: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ z: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Rotation** um den Winkel  $\alpha$  um die Gerade  $g$ 

Gerade  $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$  mit  $|\vec{b}| = 1$

$\vec{a}$  ist ein Punkt auf der Geraden  $g$ ,  $\vec{b}$  ist der Richtungsvektor der Geraden  $g$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1 - \cos(\alpha)) & ab(1 - \cos(\alpha)) - b \sin(\alpha) & \dots \\ ab(1 - \cos(\alpha)) + b \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1 - \cos(\alpha)) & \dots \\ -a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) & b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & -b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & \cos(\alpha) + (a^2 + b^2)(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

↑ 3x3 Matrix, die die Rotation um die Gerade  $g$  beschreibt (hat nicht auf eine Zeile gepasst)

## LGS und Matrizen

### Matrizen

#### Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ

Eine *Matrix* ist (simpel gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element*  $a_{ij}$  ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Zeile** zuerst, **Spalte** später). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit  $m$ -Zeilen und  $n$ -Spalten werden  $m \times n$ -Matrizen genannt.

**Matrix** Tabelle mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

- $m \times n$ -Matrix
- $a_{ij}$ : Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte

**Nullmatrix** Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

**Spaltenmatrix** Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden ( $\vec{a}$ ).

#### Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

#### Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

#### Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

- Kommutativ-Gesetz:  $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz:  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:  
 $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$  sowie  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

#### Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung:  $A$   $n$  Spalten,  $B$   $n$  Zeilen.

Resultat:  $C$  hat  $m$  Zeilen und  $k$  Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 2.2 & 2.8 \\ 4.9 & 6.4 \end{pmatrix}$

#### Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

- Assoziativ-Gesetz:  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:  
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  und  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient:  $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

#### Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- $A^T$ : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{Z_1 \rightarrow} \\ \boxed{Z_2 \rightarrow} \\ \boxed{Z_3 \rightarrow} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{\leftarrow Z_1} \\ \boxed{\leftarrow Z_2} \\ \boxed{\leftarrow Z_3} \end{pmatrix}$$

#### Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:**  $A^T = A$
- Einheitsmatrix:**  $E$  mit  $e_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $e_{ij} = 0$  für  $i \neq j$
- Diagonalmatrix:**  $a_{ij} = 0$  für  $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:**  $a_{ij} = 0$  für  $i > j$  (obere Dreiecksmatrix) oder  $i < j$  (untere Dreiecksmatrix)

## Lineare Gleichungssysteme (LGS)

**Lineares Gleichungssystem (LGS)** Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  dargestellt werden.

$A$ : Koeffizientenmatrix

$\vec{x}$ : Vektor der Unbekannten

$\vec{b}$ : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Rang einer Matrix**  $rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$

$\Rightarrow$  Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

#### Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl  $\neq 0$  in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen  $\rightarrow$  stehen weiter rechts

#### Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)

Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

#### Gauss-Jordan-Verfahren

- bestimme linkeste Spalte mit Elementen  $\neq 0$  (Pivot-Spalte)
- oberste Zahl in Pivot-Spalte = 0  
 $\rightarrow$  vertausche Zeilen so dass  $a_{11} \neq 0$
- teile erste Zeile durch  $a_{11} \rightarrow$  so erhalten wir führende Eins
- Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenoperationen)  
nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

**Zeilenoperationen** erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

#### Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar:  $rg(A) = rg(A|b)$       • unendlich viele Lösungen:
- genau eine Lösung:  $rg(A) = n$        $rg(A) < n$

**Parameterdarstellung** bei unendlich vielen Lösungen

Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins

Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5$      $x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$      $x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Homogenes LGS**  $\vec{b} = \vec{0} \rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow rg(A) = rg(A | \vec{b})$

nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

#### Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für  $n \times n$ -Matrix  $A$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- $A$  ist invertierbar
- Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.
- Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig.
- LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  hat eindeutige Lösung  $x = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

## Quadratische Matrizen

**Umformen** bestimme die Matrix  $X$ :  $A \cdot X + B = 2 \cdot X$

$$\Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot X - B \Rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = -B \Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot X = -B$$

$$\Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$$

$$\Rightarrow X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$$

### Inverse

**Inverse einer quadratischen Matrix  $A$**   $A^{-1}$

$A^{-1}$  existiert, wenn  $rg(A) = n$ .  $A^{-1}$  ist eindeutig bestimmt.

Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

#### Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  Die Reihenfolge ist relevant!  
 $A$  und  $B$  invertierbar  $\Rightarrow AB$  invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$   $A$  invertierbar  $\Rightarrow A^T$  invertierbar

**Inverse einer  $2 \times 2$ -Matrix**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $\det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls  $ad - bc \neq 0$

**Inverse berechnen** einer quadratischen Matrix  $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E$$
$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

**LGS mit Inverse lösen**  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

## Determinante

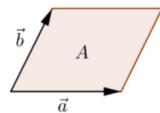
**Determinante** gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist

$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert} \\ = 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht} \end{cases}$$

**Geometrische Interpretation** der Determinante:

Fläche im  $\mathbb{R}^2$  und Volumen im  $\mathbb{R}^3$   
durch eine Matrix A aufgespannt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$



**Eigenschaften von Determinanten** mit  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

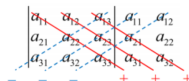
- $\det(E) = 1$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$  ist singulär
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$E$  = Einheitsmatrix

**Determinante 1 x 1-Matrix**  $\det(A) = A_{11}$

**Determinante 2 x 2-Matrix**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   
 $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

**Determinante 3 x 3-Matrix**  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$   
 $|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$



**Determinante n x n-Matrix**

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^n \text{oder } j=1^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Entwicklung nach Zeile:  $j$  bei  $\Sigma$  und wähle eine feste Zeile  $i$
- Entwicklung nach Spalte:  $i$  bei  $\Sigma$  und wähle eine feste Spalte  $j$
- $a_{ij}$  ist das Element der Matrix  $A$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte
- $|A_{ij}|$  ist die Determinante der  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die entsteht

**Tipp:** Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen!

**Tricks und Tipps**

- hat  $A$  eine Nullzeile oder -spalte, so ist  $\det(A) = 0$
- hat  $A$  zwei gleiche Zeilen oder Spalten, so ist  $\det(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$  Spalten/Zeilen sind linear unabhängig

**Determinante mit Gauss** Spezialfall **Dreiecks-/Diagonalmatrix**  
Wende Gauss-Algorithmus an, um  $A$  in Dreiecksform zu bringen.  
Es gilt für jede Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix  $D$ :

$$\det(D) = (-1)^k \prod_{i=1}^n d_{ii}$$

$k$  = Anzahl der Zeilen-Vertauschungen

Bei Zeilen-Vertauschungen ändert sich das Vorzeichen von  $\det(A)$   
 $\det(A)$  verändert sich nicht bei Zeilen-Additionen/-Multiplikationen

Bei Skalarmultiplikationen ändert sich  $\det(A)$  um den Skalierungsfaktor  
(am besten einfach keine Skalarmultiplikationen durchführen)

## Vektorräume

**Reeller Vektorraum** ist eine Menge  $V \neq \emptyset$  mit zwei Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} \text{Addition: } + : V \times V &\rightarrow V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b} \\ \text{Skalarmultiplikation: } \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Eigenschaften: ( $V$  = die Menge aller Vektoren,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ )

- Addition:  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
- Skalarmultiplikation:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$
- Neutralement  $\vec{0} \in V : \forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Inverses Element  $-\vec{a} \in V : \forall \vec{a} \in V \exists -\vec{a}$  so dass  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- Kommutativgesetz:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz:  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  und  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
- Distributivgesetz:  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$  und  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

**Unterraum**  $U \subseteq V$

Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$ , die selbst ein Vektorraum ist.

**Nullvektorraum** Die Teilmenge  $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$ , die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum  $V$  enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von  $V$ .

**Unterraumkriterien** für Beweis dass  $U$  ein Unterraum von  $V$  ist

Eine Teilmenge  $U \neq \emptyset$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann ein Unterraum von  $V$ , wenn gilt:

- $\vec{0} \in U$
  - $\vec{a} + \vec{b} \in U \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in U$
  - $\lambda \cdot \vec{a} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \vec{a} \in U$
- Um zu zeigen dass eine Menge  $V$  ein Vektorraum ist, beweisen wir genau auch diese Kriterien!!

**Unterraum Beweis**  $U = \{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- $\vec{0} = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \in U$
  - $\vec{a} = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$  und  $\vec{b} = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$   
 $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + a_2) \cdot x^2 + (b_1 + b_2) \cdot x + (c_1 + c_2) \in U$
  - $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1) = (\lambda \cdot a_1) \cdot x^2 + (\lambda \cdot b_1) \cdot x + (\lambda \cdot c_1) \in U$
- $\Rightarrow U \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Unterraum von  $\mathbb{R}$

## Basis und Dimension

**Linearer Span**  $\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \{\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

Menge aller Linearkombinationen von  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  in Vektorraum  $V$

$\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$  nebeneinander schreiben  $\Rightarrow$  Matrix  $B^{m \times n}$

- Die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  sind linear unabhängig
- Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$  hat nur eine Lösung nämlich  $\vec{x} = \vec{0}$
- Es gilt  $\text{rg}(B) = n$

**Erzeugendensystem**  $V = \text{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum  $V$  aufspannen

$\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$  nebeneinander schreiben  $\Rightarrow$  Matrix  $B^{m \times n}$

- Die Vektoren  $\vec{b}_k$  bilden ein Erzeugendensystem  $\mathbb{R}^m$
- Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$  ist für jedes  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$  lösbar
- Es gilt  $\text{rg}(B) = m$

**Dimension**  $\dim(V)$  Anzahl Vektoren, die eine Basis von  $V$  bilden  
Eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  hat  $n$  Elemente  $\rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

**Basis**  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  von  $\vec{b}_k \in V$  heisst Basis von  $V$  wenn gilt:

- $B$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$
- Die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  sind linear unabhängig
- $\vec{b}_k$  nebeneinander schreiben  $\Rightarrow$  Matrix  $B^{n \times n}$

Für  $B^{n \times n}$  gilt:

- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- $B$  ist invertierbar
- Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$  hat eine eindeutige Lösung

**Ist B eine Basis von V?** Gegeben:  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$

- Stelle die Vektoren als Spalten einer Matrix  $B$  dar
- Gauss Algorithmus: Stelle  $B$  in Zeilenstufenform
- Berechne den Rang  $\Rightarrow \text{rg}(B) = \dim(\text{span}(B))$

Nun gilt:

- $\text{rg}(B) = n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  sind linear unabhängig
- $\text{rg}(B) < n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  sind linear abhängig
- $\text{rg}(B) = \dim(V) \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} = \text{Erzeugendensystem von } V$

$$\text{rg}(B) = \dim(V) = n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \text{ ist eine Basis von } V$$

**Basiswechsel** Beliebige Basis  $B \rightarrow$  Standard-Basis  $S$

Gegeben: Basis  $B$ , aus  $\vec{b}_S$  und Vektor  $\vec{a}_B$  in Basis  $B$   
(die Vektoren  $\vec{b}$  der Basis  $B$  sind in Standardbasis!)

$$B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S \cdots \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$\vec{a}_B \rightarrow \vec{a}_S$  umrechnen:

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow \vec{a}_S = \vec{b}_1 \cdot (a_1)_B + \dots + \vec{b}_n \cdot (a_n)_B$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

**Basiswechsel** Standard-Basis  $S \rightarrow$  Beliebige Basis  $B$

Gegeben: Basis  $B$ , aus  $\vec{b}_S$  und Vektor  $\vec{a}_S$  in Standardbasis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a}_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$\vec{a}_S \rightarrow \vec{a}_B$  umrechnen:

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

1. Finde Inverse  $B^{-1}$  von  $B$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -7+1 & -4 \\ -1 & -7+1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$



## Lineare Abbildungen

**Lineare Abbildung**  $f: V \rightarrow W$  wo  $V, W$  reelle Vektorräume  
Eine Abbildung  $f$  heisst linear, wenn  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \text{ und } f(\lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b})$$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar:  $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition:  $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Potenzieren:  $\vec{a}^2$
- Addition von Skalaren:  $\lambda + \vec{a}$
- Cosinus:  $\cos(\vec{a})$

**Überprüfung der Linearität**  $f: V \rightarrow W, f(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1) \cdot f(\vec{x}_2)$
- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$

$\Rightarrow$  Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \checkmark$$

... usw.

**Bild im(A)** einer  $m \times n$ -Matrix  $A$ , ist der Unterraum des  $m$ -dimensionalen Vektorraum  $W$ , der von den Spalten  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  der Matrix aufgespannt wird:

$$\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

**Kern ker(A)** einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist die Lösungsmenge des homogenen LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ . Der Kern  $\ker(A)$  ist der folgende Unterraum von  $V$

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$$

**Basis für Bild und Kern** 1. Bringe  $A$  in Zeilenstufenform (ZSF)

**Bild:**

- Pivotspalten in der ZSF?
- Pivotspalten von  $A$  (nicht ZSF!) ergeben eine Basis für den Kern

**Kern:**

- LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  aufstellen
- Lösungsmenge als LK von Vektoren mit freien Variablen als Koeffizienten ergibt Basis für Kern

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & \mid & 0 \\ 1 & 6 & 4 & \mid & 0 \\ 3 & 3 & -3 & \mid & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\text{im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot v \mid \mu, v \in \mathbb{R} \right\} \quad \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Zauberzahlen m, n, r** Für  $A^{m \times n}$  mit  $\text{rg} A = r$  gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \dim(\text{im}(A^{-1})) = r$$

$$\dim(\ker(A)) = n - r \text{ und } \dim(\ker(A^{-1})) = m - r$$

## Abbildungsmatrix

**Homogene Koordinaten** Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im  $\mathbb{R}^2$  wird durch einen Vektor  $(x, y, z)$  dargestellt, wobei  $z \neq 0$ . Die Punkte  $(x, y, z)$  und  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen

**Abbildungsmatrix Standardbasis** Vektorräume  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$ , mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix  $A$  sind die Bilder der Standardbasisvektoren von  $\mathbb{R}^n$ :

$$A = (f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)) = \left( f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Abbildungsmatrix beliebiger Basis**

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \{ \vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n \}, W \text{ mit Basis } C = \{ \vec{c}_1; \dots; \vec{c}_n \}$$

Jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  lässt sich durch eine  $m \times n$ -Matrix  ${}^C A_B$  darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}^C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix  ${}^C A_B$  sind die Bilder der Elemente von  $B$  in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis  $C$ :

$${}^C A_B = {}^C \left( \left( f(\vec{b}_1) \right)_C \left( f(\vec{b}_2) \right)_C \dots \left( f(\vec{b}_n) \right)_C \right)_B$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow {}^C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Verknüpfungen** Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f: U \rightarrow V$  mit Abbildungsmatrix  $A$
- $g: V \rightarrow W$  mit Abbildungsmatrix  $B$

$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{f \quad g}^{g \circ f} & & & \\ U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung  $g \circ f$  ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix  $B \cdot A$ .

## Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix  ${}_B T_S$  für den Basiswechsel von  $S$  nach  $B$

- Die Matrix  ${}_B T_S$  ist die Inverse von  ${}_S T_B: {}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lineare Abbildung } f} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow {}_S T_S & \begin{array}{c} \xrightarrow{{}_S A_S} \\ \xrightarrow{{}_B A_B} \end{array} & \uparrow {}_S T_B \\ \vec{x} & & f(\vec{x}) \end{array}$$

**Basiswechsel mit Koordinatentransformation**

Von Basis  $B$  nach Basis  $C$

Von Basis  $C$  nach Basis  $B$

$$\vec{x}_C = {}^C T_B \cdot \vec{x}_B$$

$$\vec{x}_B = {}^B T_C \cdot \vec{x}_C$$

${}^C T_B$  := Abbildungsmatrix von  $B$  nach  $C$

${}^B T_C$  := Abbildungsmatrix von  $C$  nach  $B$

$${}^C T_B = {}^C A_S \cdot {}_S T_B$$

$${}^B T_C = {}^B A_S \cdot {}_S T_C$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}^C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, {}^B T_C = ({}^C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

**Vollständiges Beispiel**

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}^C A_B = {}^C \left( \left( f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\right)_C \left( f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right)_C \right)_B$$

$$\left( f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\right)_C = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left( f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right)_C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$${}^C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$