4 Zusammenfassung: Vektorräume

4.1 Definition

Definition: Reeller Vektorraum
Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V $(\neq \emptyset)$ mit zwei Verknüpfungen:

$$+: \ V \times V \to V: \ \left(\vec{a};\vec{b}\right) \mapsto \vec{a}+\vec{b} \qquad \text{(Addition)}$$
$$\cdot: \ \mathbb{R} \times V \to V: \ (\lambda,\vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \qquad \text{(skalare Multiplikation)}$$

mit folgenden Eigenschaften:

Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und für beliebige Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) *Kommutativgesetz*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
(2) *Assoziativgesetz*: $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$

(3) Es gibt ein Element $\vec{0} \in V$, für das gilt: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ für jedes Element $\vec{a} \in V$.
(4) Für jedes Element $\vec{a} \in V$ gibt es ein Element $-\vec{a} \in V$, so dass gilt: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

(5) *Assoziativgesetz*: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
(6) *Distributivgesetz*: $\lambda \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
(7) *Distributivgesetz*: $(\lambda+\mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
(8) Für jedes Element $\vec{a} \in V$ gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Die Elemente von V werden als *Vektoren* bezeichnet. Das Element $\vec{0}$ heisst *Neutralelement*.

Bemerkung
Damit eine Menge V mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, muss also gelten:

(a) Wenn ich zwei beliebige Elemente aus V addiere, liegt das Ergebnis wieder in V.
(b) Wenn ich ein beliebiges Element aus V mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziere, liegt das Ergebnis wieder in V.
(c) Die Regeln (1)-(8) aus der Definition werden eingehalten.

Satz
Für einen Vektorraum V gilt:
(1) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ für jeden Vektor $\vec{a} \in V$.
(2) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ für jeden Vektor $\vec{a} \in V$.

Beispiele

$\mathbb{P}_n[x]$	Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Der Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen
$\mathbb{R}^n$	Der Vektorraum der Vektoren mit n reellen Komponenten; Addition und skalare Multiplikation sind komponentenweise definiert (wie in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$).

4.2 Unterräume

Definition: Unterraum
Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heisst *Unterraum* von V, wenn U selber auch ein Vektorraum ist.

Satz (Unterraumkriterien)
Eine Teilmenge $U \neq \varnothing$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:

(1) Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in U$.
(2) Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\lambda \cdot \vec{a} \in U$.

Bemerkung
Aus dem Satz folgt insbesondere, dass jeder Unterraum U das Neutralelement $\vec{0}$ enthält:
Also gilt: Falls $\vec{0} \notin U$, dann ist U **kein** Unterraum.

Definition: Linearer Spann
Gegeben sind ein reeller Vektorraum V sowie Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n \in V$.
Die Menge aller Linearkombinationen

$$\operatorname{span}\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right) = \left\{ \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + ... + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

heisst *linearer Spann* (auch: *lineare Hülle*) der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$.

Beispiele
- $\{\vec{0}\}$ ist ein Unterraum von jedem Vektorraum V.
- $\mathbb{P}_2[x]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_4[x]$.
- Die Menge aller symmetrischen 2×2-Matrizen $S^{2\times 2}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
- Eine Gerade ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, wenn sie durch den Ursprung geht.
- Eine Ebene ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, wenn sie durch den Ursprung geht.
- Der lineare Spann $\operatorname{span}\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right)$ von Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n \in V$ ist ein Unterraum von V.

4.3 Basis und Dimension

Definition: Erzeugendensystem
Wir betrachten einen reellen Vektorraum V. Eine Menge $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right\}$ von Vektoren $\vec{b}_k \in V$ heisst *Erzeugendensystem* von V, wenn gilt: $V = \operatorname{span}\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right)$.

Definition: Basis
Wir betrachten einen reellen Vektorraum V. Eine Menge $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right\}$ von Vektoren $\vec{b}_k \in V$ heisst *Basis* von V, wenn gilt:

(1) $\mathcal{B} = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(2) Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ sind linear unabhängig.

Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

Die Vektormenge $\mathcal{B}=\left\{\vec{b}_1;\vec{b}_2;...;\vec{b}_n\right\}$ ist eine Basis des Vektorraums V.

$\Updownarrow$

$\mathcal{B}$ definiert ein Koordinatensystem für den Vektorraum V.

$\Uparrow$

Jeder Vektor $\vec{a}\in V$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ schreiben: $\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{b}_1+\lambda_2\cdot\vec{b}_2+...+\lambda_n\cdot\vec{b}_n$	Die Koeffizienten $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ dieser Linearkombination sind eindeutig.
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$V=\operatorname{span}\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n\right)$, d.h. $\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n\right\}$ ist ein *Erzeugendensystem* von V.	$\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ sind linear unabhängig.

für den Fall $V=\mathbb{R}^m$

$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
Das lineare Gleichungssystem $B\cdot\vec{x}=\vec{a}$ ist für jedes $\vec{a}\in\mathbb{R}^m$ lösbar.	Das lineare Gleichungssystem $B\cdot\vec{x}=\vec{0}$ hat genau eine Lösung: $\vec{x}=\vec{0}$.
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\operatorname{rg}(B)=m$	$\operatorname{rg}(B)=n$

Dabei ist B die $m\times n$-Matrix, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.

Satz
Wir betrachten die Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n\in\mathbb{R}^n$ sowie die $n\times n$-Matrix B, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Die Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(2) $\operatorname{rg}(B)=n$

(3) $\det(B)\neq 0$

(4) B ist invertierbar.

(5) Das LGS $B\cdot\vec{x}=\vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Bemerkung
Ein Vektorraum hat i.A. unendlich viele verschiedene Basen.

Wichtige Basen
Für $\mathbb{R}^n$: *Standardbasis* $\mathcal{S}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ mit

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

Für $\mathbb{P}_n[x]$: *Monombasis* $\mathcal{M}=\{1,x,x^2,...,x^n\}$

Definition
Wir betrachten einen reellen Vektorraum V. Jede Basis von V besteht aus gleich vielen Vektoren; die Anzahl Vektoren in einer Basis von V heisst *Dimension* von V.
Bezeichnung: $\dim(V)$.

4.4 Komponentendarstellung bezüglich beliebiger Basen

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ und $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n$
in ihrer Komponentendarstellung
bzgl. $\mathcal{S}$ einsetzen in
$\vec{a}=\alpha_1\cdot\vec{b}_1+\alpha_2\cdot\vec{b}_2+\ldots+\alpha_n\cdot\vec{b}_n$

Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{S}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

Komponentendarstellung bzgl $\mathcal{B}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

LGS $B\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$

nach $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ auflösen.

Dabei ist B die Matrix, die entsteht, wenn wir die Vektoren $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ nebeneinander schreiben.