

## Vektorgeometrie

**Vektor** Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$  = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
- $\vec{e}$  = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index  $\vec{e}_a$
- $\vec{PQ}$  = Vektor, der den Punkt  $P$  in  $Q$  verschiebt
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$  und  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  (selber Betrag und Richtung)

Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

**Gegenvektor**  $-\vec{a}$  ist parallel zu  $\vec{a}$ , hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \parallel -\vec{a}$$

**Länge/Betrag eines Vektors**  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

**Einheitsvektor/Normierung**  $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Der Vektor  $\vec{e}_a$  wird als **Einheitsvektor** oder auch **normiert** bezeichnet und der Übergang von  $\vec{a}$  nach  $\vec{e}_a$  heisst **Normierung**.

**Orthogonal (Senkrecht)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$  orthogonal

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen  $90^\circ$  beträgt

**Normalenvektor** Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene  $E$  ist, heisst *Normalenvektor* von  $E$ . Eine Koordinatendarstellung einer Ebene  $E$  heisst normiert, wenn gilt:  $\vec{n} = 1$ .

## Rechnen mit Vektoren

**Vektoraddition**

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

**Skalarmultiplikation**

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

**Skalarprodukt**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

**Winkelberechnung**  $\varphi$  = Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

**Winkel und Skalarprodukt**

Seien  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zwei Vektoren und  $\varphi$  der eingeschlossene Winkel,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &< \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ \varphi &> \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

**Eigenschaften des Skalarprodukts**

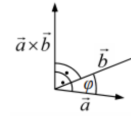
Für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  und  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz:  $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

**Vektorprodukt**  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



**Eigenschaften des Vektorprodukts**

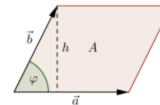
Für beliebige Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und Skalaren  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
  - Antikommutativ-Gesetz:  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
  - Distributiv-Gesetz:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
  - Gemischtes Assoziativ-Gesetz:  $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}!$

**Fläche des aufgespannten Parallelogramms**  $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

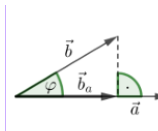
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



**Orthogonal Projektion** von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , die zweite für  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

## Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

**Linearkombination (LK)**  $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

mit  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  heisst *Linearkombination* der Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ .

**Lineare Abhängigkeit**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  sind linear unabhängig, wenn:

- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \neq \vec{0}$  ( $\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ )
- $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$  als einzige LK  $\vec{0}$  ergibt

**Komponentendarstellung**  $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (Komponente), so dass jeder Vektor  $\vec{a}$  als LK von  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  eindeutig dargestellt werden kann.

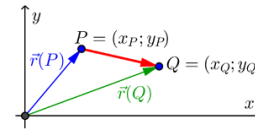
**Ortsvektor**  $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Zu jedem Punkt  $P$  des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung  $O$  angeheftet, wie jeder Vektor LK von  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen:

**Komponentendarstellung von  $\vec{OP}$**

$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \vdots \end{pmatrix}$$



## Geraden und Ebenen

## Kollinear und Komplanar

**Kollinear**  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

- $\exists$  eine Gerade  $g$ , zu der beide parallel sind
- Spezialfall: Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  (Kreuzprodukt)
- $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$  (einer ist Vielfaches des anderen)



**Lage** von Geraden im Raum

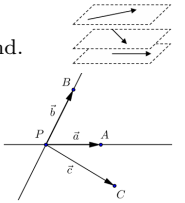
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

**Komplanar**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Es existiert eine Ebene  $E$ , zu der alle parallel sind.

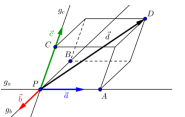
**LK komplanarer Vektoren**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  nicht kollinear sind lässt sich  $\vec{c}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  darstellen:  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$



**LK nicht komplanarer Vektoren**  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$

Jeder Vektor  $\vec{d}$  im  $\mathbb{R}^3$  lässt sich als Linearkombination von  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  eindeutig darstellen:  $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

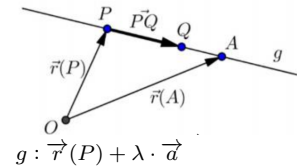


## Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

**Parameterdarstellung** einer Geraden

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$$

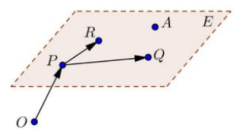
Der Punkt  $P$  heisst *Aufpunkt*, der Vektor  $\vec{a} = \vec{PQ}$  heisst *Richtungsvektor* von  $g$ .



**Parameterdarstellung** einer Ebene

$$E : \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$P$  = Aufpunkt,  $\vec{a} = \vec{PQ}$  und  $\vec{b} = \vec{PR}$  sind *Richtungsvektoren* von  $E$ .



Parameterdarstellung nicht eindeutig!

Richtungsvektoren zwei beliebige Vektoren: *parallel* zu  $E$  und *nicht kollinear*

$$\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PQ} \text{ komplanar}$$

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$$

**Koordinatendarstellung**  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$E : ax + by + cz + d = 0$$

Bedeutung: die Ebene  $E$  besteht aus allen Punkten  $P$ , deren Koordinaten  $x, y$  und  $z$  diese Gleichung erfüllen.  $|d|$  = Abstand zum Ursprung, wenn Gleichung normiert (sonst  $\frac{|d|}{n}$ )

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

**Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung**

Option 1: Berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  liefert.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene  $E$  ermittelt.

Option 2: LGS aufstellen und die Parameter eliminieren.

$$\vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung  $\rightarrow$  Koordinatendarstellung

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen:  $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

**Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung**

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Koordinatendarstellung  $\rightarrow$  Parameterdarstellung

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen:  $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4} \end{aligned} \quad E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

**Abstände berechnen**

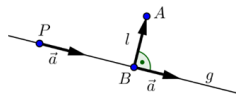
**Abstand Punkt-Gerade** Gesucht ist der Fußpunkt  $B \in g$

Gegeben: Gerade  $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$  in Parameterform und Punkt  $A$

$$1. \text{ Da } B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \begin{pmatrix} P_x + a\lambda_B \\ P_y + b\lambda_B \\ P_z + c\lambda_B \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Da } \vec{BA} \perp g \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{a} = 0$$

3. Jetzt kann ein LGS aufgestellt und aufgelöst werden.



**Abstand Punkt-Gerade** Weitere Möglichkeiten

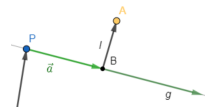
$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. 0 = \vec{BA} \cdot \vec{a}$$

$$3. \text{Length} = |\vec{BA}| = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

$$\begin{aligned} 1. \vec{BA} &= \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 13+5\lambda \end{pmatrix} \\ 2. 0 &= \begin{pmatrix} 3-1-3\lambda \\ -1-13-5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x \\ 3. \text{Length} &= \left| \begin{pmatrix} 2-3x \\ -14-5x \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

**Abstand Gerade-Gerade**

$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$$

$$3. \text{Length} = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

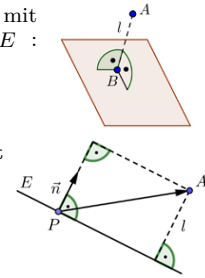
**Abstand Punkt-Ebene**  $l$  = Abstand von  $A$  zu  $E$ 

Gegeben: Punkt  $A = (x_A; y_A; z_A)$ , Ebene  $E$  mit der **normierten** Koordinatendarstellung  $E: ax + by + cz + d = 0$

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

Ist die Koordinatendarstellung nicht **nicht normiert**, so gilt:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

**Abstand Punkt-Ebene** Weitere Möglichkeiten

$$1. \vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$$

$$2. 0 = \vec{BA} \cdot \vec{n}$$

$$3. \text{Length} = |\vec{BA}| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

**Geometrische Transformationen**

$\mathbb{R}^2$

**Streckung**

- in  $x$ -Richtung um  $\lambda_1$
- in  $y$ -Richtung um  $\lambda_2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Spiegelung**

- Gerade  $g: ax + by = 0$
- mit  $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade  $g: x + 7y = 0$
- Normiert  $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

**Orthogonale Projektion**

- auf Gerade  $g: ax + by = 0$
- mit  $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade  $g: 2x - y = 0$
- Normiert  $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Rotation**

- um den Ursprung
- um Winkel  $\alpha$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Scherung**

- in  $x$ -Richtung um  $s_1$
- in  $y$ -Richtung um  $s_2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$

**Zentrische Streckung**

- in  $x$ -Richtung um  $\lambda_1$
- in  $y$ -Richtung um  $\lambda_2$
- in  $z$ -Richtung um  $\lambda_3$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Spiegelung** an der Ebene

- Ebene  $E: ax + by + cz = 0$
- mit  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene  $E: x + 2y + 3z = 0$
- Normiert  $E: \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

**Orthogonale Projektion** auf die Ebene

- Ebene  $E: ax + by + cz = 0$
- mit  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene  $E: 2x - y + 3z = 0$
- Normiert  $E: \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

**Rotation** um den Winkel  $\alpha$  um die  $x, y, z$  Achsen

$$x: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad y: \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$z: \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Rotation** um den Winkel  $\alpha$  um die Gerade  $g$ 

- Gerade  $g: \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
- mit  $|\vec{b}| = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1-\cos(\alpha)) & ab(1-\cos(\alpha)) - b\sin(\alpha) & a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) \\ ab(1-\cos(\alpha)) + b\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1-\cos(\alpha)) & -b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) \\ -a\sin(\alpha) + b(1-\cos(\alpha)) & b\sin(\alpha) + a(1-\cos(\alpha)) & \cos(\alpha) + (a^2+b^2)(1-\cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

## LGS und Matrizen

### Matrizen

#### Matrix, Element, Zeilen, Spalten und Typ

Eine *Matrix* ist (simpel gesagt) ein Vektor mit mehreren Spalten und wird mit Grossbuchstaben bezeichnet. Ein *Element*  $a_{ij}$  ist ein Wert aus dieser Matrix, auf den über die Zeile und Spalte zugegriffen wird (**Zeile** zuerst, **Spalte** später). Der einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihren Zeilen und Spalten. Matrizen mit  $m$ -Zeilen und  $n$ -Spalten werden  $m \times n$ -Matrizen genannt.

**Matrix** Tabelle mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

- $m \times n$ -Matrix
- $a_{ij}$ : Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte

**Nullmatrix** Eine Matrix, deren Elemente alle gleich 0 sind, heisst *Nullmatrix* und wird mit 0 bezeichnet.

**Spaltenmatrix** Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte, so heisst diese *Spaltenmatrix*. Können als Vektoren aufgefasst werden und können mit einem kleinen Buchstaben sowie einem Pfeil darüber notiert werden ( $\vec{a}$ ).

#### Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

#### Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

#### Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

- Kommutativ-Gesetz:  $A + B = B + A$
- Assoziativ-Gesetz:  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiv-Gesetz:  
 $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$  sowie  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

#### Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung:  $A$   $n$  Spalten,  $B$   $n$  Zeilen.

Resultat:  $C$  hat  $m$  Zeilen und  $k$  Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$

			0.1	0.2
			0.3	0.4
			0.5	0.6
1	2	3	2.2	2.8
4	5	6	4.9	6.4

#### Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

- Assoziativ-Gesetz:  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Distributiv-Gesetz:  
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  und  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- Skalar-Koeffizient:  $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

#### Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- $A^T$ : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

#### Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:**  $A^T = A$
- Einheitsmatrix:**  $E$  mit  $e_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $e_{ij} = 0$  für  $i \neq j$
- Diagonalmatrix:**  $a_{ij} = 0$  für  $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:**  $a_{ij} = 0$  für  $i > j$  (obere Dreiecksmatrix) oder  $i < j$  (untere Dreiecksmatrix)

## Lineare Gleichungssysteme (LGS)

**Lineares Gleichungssystem (LGS)** Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  dargestellt werden.

$A$ : Koeffizientenmatrix  
 $\vec{x}$ : Vektor der Unbekannten  
 $\vec{b}$ : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Rang einer Matrix**  $rg(A)$  von  $A^{m \times n}$

Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.

$$rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$$

#### Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
  - Die erste Zahl  $\neq 0$  in jeder Zeile ist eine führende Eins
  - Führende Einsen, die weiter unten stehen  $\rightarrow$  stehen weiter rechts
- Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)**  
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

#### Gauss-Jordan-Verfahren

- Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen  $\neq 0$ . Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
  - Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte = 0, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten, die in der Pivot-Spalte ein Element  $\neq 0$  hat.
  - Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl  $a \neq 0$ . Wir dividieren die erste Zeile durch  $a$ . So erhalten wir die führende Eins.
  - Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.
- Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.
- Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

#### Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar:  $rg(A) = rg(A|b)$
- Nicht lösbar:  $rg(A) \neq rg(A|b)$
- genau eine Lösung:  $rg(A) = n$
- unendlich viele Lösungen:  $rg(A) < n$

**Homogenes LGS**  $\vec{b}$  (rechte Seite) =  $\vec{0}$ :  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Bei einem homogenen LGS ist nach Definition  $\vec{c} = \vec{0}$ ; deswegen gilt immer:  $rg(A) = rg(A | \vec{c})$ . Daher gibt es bei homogenen LGS nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

#### Zusammenhänge invertierbarkeit und Homogenes LGS

Ist  $A$  invertierbar, so hat das homogene LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  die eindeutige Lösung  $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

**Parameterdarstellung** bei unendlich vielen Lösungen

- Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins
- Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \quad x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \quad x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Quadratische Matrizen

#### Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für  $n \times n$ -Matrix  $A$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- $A$  ist invertierbar
- Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.
- Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig.
- LGS  $A \cdot \vec{c} = \vec{c}$  hat eindeutige Lösung

**Matrizen umformen** bestimme die Matrix  $X$ :

$$A \cdot X + B = 2 \cdot X$$

- $A \cdot X = 2 \cdot X - B$
- $A \cdot X - 2 \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot (A - 2E)^{-1} \cdot X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$
- $X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$

## Inverse

**Inverse** Die Inverse einer quadratischen Matrix  $A$  ist eine Matrix  $A^{-1}$ , für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*.

#### Inverse einer quadratischen Matrix $A$

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $A^{-1}$  existiert, wenn  $rg(A) = n$

#### Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- Die Inverse einer invertierbaren Matrix ist eindeutig bestimmt.
- Die Inverse einer invertierbaren Matrix  $A$  ist invertierbar und es gilt:  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Multiplizieren wir zwei invertierbare Matrizen  $A$  und  $B$  miteinander, so ist das Produkt auch invertierbar und es gilt:  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .  
Die Reihenfolge ist relevant!
- Die Transponierte  $A^T$  einer quadratischen Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $A$  invertierbar ist. In diesem Fall gilt:  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### Zusammenhänge invertierbarkeit

Gegeben eines LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  mit  $n \times n$ -Koeffizientenmatrix  $A$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent ( $\Leftrightarrow$ ):

1.  $A$  ist invertierbar.
2.  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  hat genau eine Lösung.
3.  $rg(A) = n$

### Inverse einer $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit  $\det(A) = ad - bc$  NUR Invertierbar falls  $ad - bc \neq 0$

### Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E$$
$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

### LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

### Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

## Determinante

### Determinante

Die Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist.

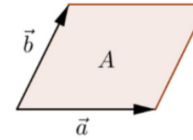
$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert.} \\ = 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht.} \end{cases}$$

### Geometrische Interpretation der Determinante:

- Fläche im  $\mathbb{R}^2$
- Volumen im  $\mathbb{R}^3$

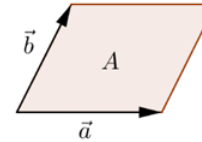
welche durch eine Matrix  $A$  aufgespannt wird.

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$

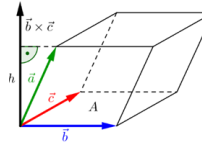


### Geometrische Bedeutung der Determinante

Die Spalten einer  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  spannen ein Parallelogramm auf. Die Determinante der Matrix  $A$  ist dabei gerade der **Flächeninhalt** des aufgespannten Parallelogramms.



Werden Spalten einer  $3 \times 3$ -Matrix  $B$  als Raumvektoren betrachtet, spannen diese einen Spat auf. Die Determinante der Matrix  $A$  ist dabei gerade das **Volumen** des aufgespannten Spats.



### Determinantenregeln

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$  ist singulär
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

**Eigenschaften von Determinanten** Gegeben zweier quadratischer Matrizen  $A, B$  sowie einer quadratischen Dreiecksmatrix  $D$ .

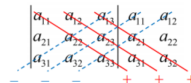
$$\begin{aligned} \det(E) &= 1 \\ \det(D) &= \prod_{i=1}^n d_{ii} \\ \det(A \cdot B) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A^T) &= \det(A) \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ \det(m \cdot A) &= m^n \cdot \det(A) \text{ mit } m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Determinante einer  $1 \times 1$ -Matrix**  $\det(A) = A_{11}$

**Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

**Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix**  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$



$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$$

### Determinante einer $n \times n$ -Matrix $A$

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen
- $|A_{ij}|$  ist die Determinante der  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die entsteht evtl. bsp hier

### Determinante einer $n \times n$ -Matrix nach Laplace

Gegeben einer  $n \times n$ -Matrix  $A$ , wird zum Berechnen der Determinante eine feste Zeile  $i$  oder Spalte  $j$  gewählt, nachher die Determinante entwickelt wird.

### Entwicklung nach Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

### Entwicklung nach Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bezeichnungen:

- $a_{ij}$  ist das Element der Matrix  $A$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte
- $A_{ij}$  ist die Matrix, die durch das Weglassen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.

! Um den Rechenaufwand zu minimieren, entwickelt man nach derjenigen Zeile oder Spalte, in der die meisten Nullen stehen.

### Lineare Abhängigkeit Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von  $A$  sind linear unabhängig
- Zeilen von  $A$  sind linear unabhängig
- $rg(A) = n$
- $A$  ist invertierbar
- Das LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$  hat eine eindeutige Lösung

## Vektorräume

**Vektorraum** Menge  $V$  mit zwei Verknüpfungen:

- Vektoraddition:  $\vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalarmultiplikation:  $\lambda \cdot \vec{a} \in V$
- Nullpunkt:  $\vec{0} \in V$

## Vektorraum

Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge  $V \neq \emptyset$  mit zwei Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b} \\ \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften: Gegeben  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , die Menge aller Vektoren  $V$  sowie dem Neutralelement  $\vec{0}$  gilt:

1. Es gibt ein Element  $\vec{0} \in V$ , für das gilt:  $\forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2. Für jedes Element in  $\vec{a} \in V$  gibt es genau ein  $-\vec{a} \in V$ , so dass  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
3. Es gilt  $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
4. Kommutativgesetz:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. Assoziativgesetz:  
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$   
 $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
6. Distributivgesetz:  
 $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$   
 $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

**Wichtig:** Die Betrachtung, dass ein Vektor ein Objekt mit *Betrag* und *Richtung* ist, stimmt in dieser allgemeinen Sichtweise nicht mehr unbedingt.

## Eigenschaften eines Vektorraums

Damit eine Menge  $V$  mit einer Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, muss gelten:

1. Die Regeln (1)-(8) aus der Definition werden eingehalten.
2.  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V : (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$

**Unterraum** Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$ , die selbst ein Vektorraum ist.

- $\vec{0} \in U$
- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U$  gilt  $\vec{a} + \vec{b} \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  und  $\forall \vec{a} \in U$  gilt  $\lambda \cdot \vec{a} \in U$

**Unterraum** Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  heisst *Unterraum*, wenn  $U$  selber auch ein Vektorraum ist. Nicht jede Teilmenge  $U \subseteq V$  ist ein Unterraum von  $V$ . Zwar erfüllt sie die Vektorraum-Eigenschaften aus der Definition, jedoch ist nicht garantiert, dass für  $\vec{a}, \vec{b} \in U$   $\vec{a} + \vec{b} \in U$  gilt.

**Unterraumkriterien** Eine Teilmenge  $U \neq \emptyset$  eines Vektorraums  $V$  ist genau dann ein Unterraum von  $V$ , wenn gilt:

1.  $\forall \vec{a}, \vec{a} \in U : \vec{a} + \vec{b} \in U$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in U : \lambda \cdot \vec{a} \in U$

**Wichtig:**  $U$  enthält  $\vec{0}$ . Falls  $\vec{0} \notin U$ , ist  $U$  kein Unterraum.

**Nullvektorraum** Die Teilmenge  $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$ , die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum  $V$  enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von  $V$ .

## Basis und Dimension

### Linearer Span

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  in einem reellen Vektorraum  $V$ .

$$\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \left\{ \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Schreibt man die Vektoren  $\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$  nebeneinander so entsteht die  $m \times n$ -Matrix  $B$

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  sind linear unabhängig
2. Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$  hat nur eine Lösung nämlich  $\vec{x} = \vec{0}$
3. Es gilt  $\text{rg}(B) = n$   
Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraums  $V$  heisst Unterraum von  $V$ , wenn  $U$  selbst auch ein Vektorraum ist.

**Erzeugendensystem** Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum aufspannen.

Eine Menge  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  von Vektoren  $\vec{b}_k$  im Vektorraum  $V$  heisst Erzeugendensystem von  $V$ , wenn gilt:

$$V = \text{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$$

Schreibt man die Vektoren  $\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$  nebeneinander so entsteht die  $m \times n$ -Matrix  $B$ .

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren  $\vec{b}_k$  bilden ein Erzeugendensystem  $\mathbb{R}^m$
2. Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$  ist für jedes  $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$  lösbar
3. Es gilt  $\text{rg}(B) = m$

**Dimensionen** Für jeden reellen Vektorraum  $V$  gilt: Jede Basis von  $V$  hat gleich viele Elemente.

Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von  $V$  bilden, heisst Dimension von  $V = \dim(V)$ .

- Eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  hat  $n$  Elemente  $\rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

**Basis** Eine Menge  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  von Vektoren  $\vec{b}_k$  im Vektorraum  $V$  heisst Basis von  $V$ , wenn gilt:

- $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$
- Die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  sind linear unabhängig

**Basis und Dimensionen** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Vektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^n$
- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- $B$  ist invertierbar
- Das LGS  $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$  hat eine eindeutige Lösung

**Basiswechsel** Beliebige Basis  $B \rightarrow$  Standard-Basis  $S$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$
$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

**Basiswechsel** Standard-Basis  $S \rightarrow$  Beliebige Basis  $B$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

## Lineare Abbildungen

**Lineare Abbildung** Gegeben sind zwei reelle Vektorräume  $V$  und  $W$  ( $V$  und  $W$  können auch gleich sein). Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heisst **linear Abbildung**, wenn für alle  $x, y \in V$  und jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad (1)$$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad (2)$$

Der Vektor  $f(\vec{x}) \in W$ , der herauskommt, wenn  $f$  auf einen Vektor  $\vec{x} \in V$  angewendet wird, heisst **Bild** von  $\vec{x}$  unter  $f$ .

**i** Linearität ist etwas Besonderes. Die allermeisten Abbildungen/Funktionen sind nicht linear.



### Lineare Abbildung

Eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  heisst linear, wenn für alle  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
- $f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a})$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar:  $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition:  $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Potenzieren:  $\vec{a}^2$
- Addition von Skalaren:  $\lambda + \vec{a}$
- Cosinus:  $\cos(\vec{a})$

### Überprüfung der Linearität

Für eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$ ,  $f(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$

Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &\bullet f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &\bullet f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \rightarrow OK \\ &\dots \text{ usw.} \end{aligned}$$

**Lineare Abbildung - Darstellung** Wir betrachten die Vektorräume  $R'''$  und  $R''$ , versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich jede lineare Abbildung  $f: R''' \rightarrow R''$  durch eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  darstellen:

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix  $A$  sind die Bilder der Basisvektoren von  $R'''$ :

$$A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n)$$

### Zentrische Streckung

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Kern** Der *Kern*  $\ker(A)$  einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist die Menge aller Vektoren  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ .

**Bild** Das *Bild* (auch Spaltenraum)  $\text{im}(A)$  einer  $m \times n$ -Matrix  $A$ , ist der Unterraum des  $m$ -dimensionalen Vektorraums  $W$ , der von den Spalten  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  der Matrix (aufgefasst als Vektoren in  $W$ ) aufgespannt wird.

$$\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

**Bild  $\text{im}(A)$**  einer  $m \times n$ -Matrix  $A$ , ist der Unterraum des  $m$ -dimensionalen Vektorraum  $W$ , der von den Spalten  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  der Matrix aufgespannt wird:

$$\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$$

Für jede  $m \times n$ -Matrix  $A$  gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \text{rg}(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \text{im}(A) &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu, v \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

**Kern  $\ker(A)$**  einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist die Lösungsmenge des homogenen LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ . Der Kern  $\ker(A)$  ist der folgende Unterraum von  $V$

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ x_1 &= 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda \end{aligned}$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Beziehung Kern und Bild** Für jede  $m \times n$ -Matrix  $A$  gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \text{rg}(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$$

**Bild und Kern** Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix  $A$ . Dann gilt:

- Die Spalten von  $A$  ergeben eine Basis des Bildes von  $f$
- Die Lösungsmenge des homogenen LGS  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  ist der Kern von  $f$

### Abbildungsmatrix

**Verknüpfungen** Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f: U \rightarrow V$  mit Abbildungsmatrix  $A$
- $g: V \rightarrow W$  mit Abbildungsmatrix  $B$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{g \circ f} & & & \\ U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung  $g \circ f$  ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix  $B \cdot A$ .

**Abbildungsmatrix** Vektorräume  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$ , mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix  $A$  sind die Bilder der Standardbasisvektoren von  $\mathbb{R}^n$ :

$$A = (f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)) = \left( f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

### Abbildungsmatrix und Basiswechsel

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\}, W \text{ mit Basis } C = \{\vec{c}_1; \dots; \vec{c}_m\}$$

Jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  lässt sich durch eine  $m \times n$ -Matrix  ${}_C A_B$  darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix  ${}_C A_B$  sind die Bilder der Elemente von  $B$  in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis  $C$ :

$${}_C A_B = {}_C \left( \left( f \left( \vec{b}_1 \right) \right)_C \left( f \left( \vec{b}_2 \right) \right)_C \dots \left( f \left( \vec{b}_n \right) \right)_C \right)_B$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

**Homogene Koordinaten** Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im  $\mathbb{R}^2$  wird durch einen Vektor  $(x, y, z)$  dargestellt, wobei  $z \neq 0$ . Die Punkte  $(x, y, z)$  und  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

**i** Homogene Koordinaten sind nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen.

## Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix  ${}_B T_S$  für den Basiswechsel von  $S$  nach  $B$

- Die Matrix  ${}_B T_S$  ist die Inverse von  ${}_S T_B : {}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lineare Abbildung } f} & \mathbb{R}^2 \\
 \begin{array}{c} \vec{x} \\ \downarrow {}_B T_S \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{{}_S A_S} \\ \xrightarrow{{}_B A_B} \end{array} & \begin{array}{c} f(\vec{x}) \\ \uparrow {}_S T_B \end{array} \\
 \vec{x} & & f(\vec{x})
 \end{array}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_B T_C = ({}_C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

## Vollständiges Beispiel

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C A_B = {}_C \left( \left( f \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)_C \left( f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right)_C \right)_B$$

$$\left( f \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)_C = \left( \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)_C = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left( f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right)_C = \left( \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)_C = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$