Höhere Mathematik 2

Jil Zerndt
FS 2025

Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

In diesem Kapitel geht es um die Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Abkürzung: NLGS = nichtlineares Gleichungssystem

Einleitendes Beispiel

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 11 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 - 7 = 0$$

Gesucht sind die Lösungen des Gleichungssystems. Diese lassen sich interpretieren als die Nullstellen der Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäss:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 11 \\ x_1 + x_2^2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich lässt sich ein solches System nicht in die Form $Ax = b$ bringen.

Geometrisch lassen sich die Lösungen als Schnittpunkte der beiden Funktionen interpretieren.
Explizite Darstellung der Kurven:

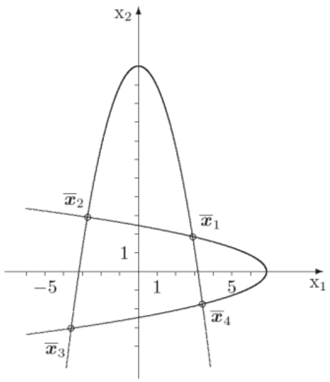
$$x_2 = 11 - x_1^2$$

$$x_2 = \sqrt{7 - x_1}$$

Schnittpunkte:

$$\overline{\mathbf{x}_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}_2} = \begin{pmatrix} -2.8 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{x}_3} = \begin{pmatrix} -3.8 \\ -3.3 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}_4} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ -1.7 \end{pmatrix}$$



Funktionen mit mehreren Variablen

Funktion mit abhängiger Variable x, unabhängiger Variable $y = f(x)$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Skalarwertige Funktionen mit mehreren Variablen

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Unter einer Funktion f mit n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und einer abhängigen Variablen y versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlentupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ genau ein Element $y \in W \subset \mathbb{R}$ zuordnet.

Da das Ergebnis $y \in \mathbb{R}$ ein Skalar (eine Zahl) ist, redet man auch von einer **skalarwertigen Funktion**.

Vektorwertige Funktion Erweiterung der obigen Definition, gibt einen **Vektor** zurück (anstatt eines Skalars).
Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit n Variablen. Dann ist die Funktion $\mathbf{f}$ definiert durch:

$$\mathbf{f}(x_1 \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

wobei die m Komponenten $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ von $\mathbf{f}$ wieder **skalarwertige** Funktionen sind.

Eigenschaften von skalar- und vektorwertigen Funktionen

- Skalar- und vektorwertige Funktionen mit mehreren Variablen werden auch **multivariat** genannt.
- Wie bei einem Vektor $\mathbf{x}$ stellen wir zur besseren Unterscheidbarkeit vektorwertige Funktionen $\mathbf{f}$ fett dar, im Gegensatz zu Skalaren x und skalarwertigen Funktionen f.
- Wir werden uns bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme auf vektorwertige Funktionen $\mathbf{f} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ konzentrieren.

Beispiele

Grundlegende Rechenoperationen können als Skalarwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oder als Vektorwertige Funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretiert werden

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x \cdot y, \quad h(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \cdot y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang mit der Elektrotechnik

Ohmsches Gesetz

Die an einem ohmschen Widerstand R abfallende Spannung U hängt vom Widerstand R und der Stromstärke I gemäss dem ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ ab. Also haben wir für die abhängige Variable $U = f(R, I) = RI$ die skalarwertige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den unabhängigen Variablen R und I. Häufig schreibt man auch direkt

$$U = U(R, I) = R \cdot I$$

und bringt dadurch die Abhängigkeit der Variable U von den unabhängigen Variablen R und I zum Ausdruck, wie wir es auch bereits vom eindimensionalen Fall kennen, z.B. $y = y(x)$.

Reihenschaltung von Widerständen

Bei der Reihenschaltung von n ohmschen Widerständen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ergibt sich der Gesamtwiderstand R gemäss

$$R = R(R_1, R_2, \ldots, R_n) = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

lineare Funktionen von LGS Gebe die lineare Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, für welche die Lösung $\mathbf{x}$ des LGS:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gerade $\mathbf{f(x)} = \mathbf{0}$ ergibt.

Vorgehen:

$$\vec{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = 0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{A}\vec{x} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}}_{\vec{\mathbf{f}}(\vec{x})}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} - \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\mathbf{f}$ ist gegeben durch: (**solved by copilot so no guarantees**)

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1 = 4x_1 - x_2 + x_3 - 5 \\ f_2 = -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 11 \\ f_3 = x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12 \end{pmatrix}$$

Darstellungsformen

Analytische Darstellung

- **Explizite Darstellung:** $y = f(x_1, \ldots, x_n)$
  - die Funktionsgleichung ist nach einer Variablen aufgelöst
  - Beispiel: $y = 2 \cdot e^(x_1^2 + x_2^2)$
- **Implizite Darstellung:** $F(x, y) = 0$
  - die Funktionsgleichung ist nicht nach einer Variablen aufgelöst
  - daher handelt es sich um eine Funktion mit nur $n - 1$ unabhängigen Variablen
  - Beispiel: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
- **Parameterdarstellung:** $x = x(t), y = y(t)$
  - die Funktion wird durch eine Kurve im Raum beschrieben
  - Beispiel: $x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)$

Darstellung durch Wertetabelle Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.
Vorgehen:
In die vorausgesetzte Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ werden die Werte der unabhängigen Variablen x und y eingesetzt (der Reihe nach).
So erhält man eine Wertetabelle, bzw. Matrix:

2. unabhängige Variable y

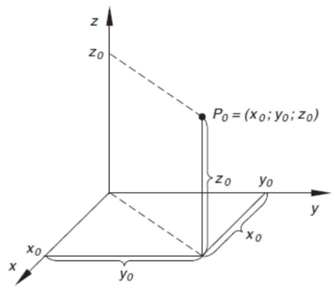
1. unabhängige Variable x

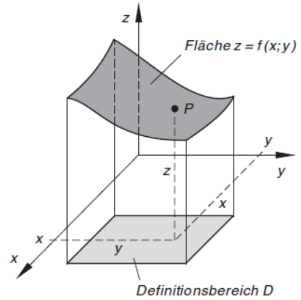
x \ y	y_1	y_2	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n	
x_1	z_{11}	z_{12}	$\dots$	z_{1k}	$\dots$	z_{1n}	
x_2	z_{21}	z_{22}	$\dots$	z_{2k}	$\dots$	z_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	
x_i	z_{i1}	z_{i2}	$\dots$	z_{ik}	$\dots$	z_{in}	← i-te Zeile
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	
x_m	z_{m1}	z_{m2}	$\dots$	z_{mk}	$\dots$	z_{mn}	
				↑ k-te Spalte			

Grafische Darstellung Wir beschränken uns hier auf skalarwertige Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Dazu betrachten wir die Funktion $z = f(x, y)$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem:

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

Die Funktion f ordnet jedem Punkt $(x, y) \in D$ in der Ebene einen Wert $z = f(x, y)$ zu, der als Höhenkoordinate verstanden werden kann. Durch die Anordnung der Punkte $(\ x, y, f(x, y)\ )$ im dreidimensionalen Koordinatensystem wird eine über dem Definitionsbereich D liegende Fläche ausgezeichnet:





Schnittkurvendiagramm

Wird die Fläche $z = f(x, y)$ bei einer konstanten Höhe $z =$ const. geschnitten, ergibt sich eine Schnittkurve. Wird diese in die (x, y)-Ebene projiziert, spricht man von einer Höhenlinie bzw. bei der Abbildung von einem Höhenliniendiagramm., wie wir es z.B. von Wanderkarten her kennen. Natürlich kann man auch andere Schnitte als $z =$ const. (Schnittebene parallel zur (x, y)-Ebene) wählen, z.B. $x =$ const. (Schnittebene parallel zur (y, z)-Ebene) oder $y =$ const. (Schnittebene parallel zur (x, z)-Ebene):