Höhere Mathematik

Jil Zerndt, Lucien Perret
January 2025

Rechnerarithmetik

Zahlendarstellung

Maschinenzahlen Eine maschinendarstellbare Zahl zur Basis B ist ein Element der Menge:

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \dots m_n \cdot B^{\pm e_1 e_2 \dots e_l}\} \cup \{0\}$$

- $m_1 \neq 0$ (Normalisierungsbedingung)
- $m_i, e_i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ für $i \neq 0$
- $B \in \mathbb{N}, B > 1$ (Basis)

Zahlenwert $\hat{\omega}$ $= \sum_{i=1}^{n} m_i B^{\hat{e}-i}$, mit $\hat{e} = \sum_{i=1}^{l} e_i B^{l-i}$

Werteberechnung einer Maschinenzahl

1. Normalisierung überprüfen: $m_1 \neq 0$ (für $x \neq 0$)
   - Sonst: Mantisse verschieben und Exponent anpassen
2. Exponent berechnen: $\hat{e} = \sum_{i=1}^{l} e_i B^{l-i}$
   - Von links nach rechts: Stelle · Basis hochgestellt zur Position
3. Wert berechnen: $\hat{\omega} = \sum_{i=1}^{n} m_i B^{\hat{e}-i}$
   - Mantissenstellen · Basis hochgestellt zu (Exponent - Position)
4. Vorzeichen berücksichtigen

Werteberechnung Berechnung einer vierstelligen Zahl zur Basis 4:

$\underbrace{0.3211}_{n=4} \cdot \underbrace{4^{12}}_{l=2}$

Exponent: $\hat{e} = 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 6$

Wert: $\hat{\omega} = 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 = 3664$

IEEE-754 Standard definiert zwei wichtige Gleitpunktformate:

Single Precision (32 Bit)	**Double Precision** (64 Bit)
Vorzeichen(V): 1 Bit	Vorzeichen(V): 1 Bit
Exponent(E): 8 Bit (Bias 127)	Exponent(E): 11 Bit (Bias 1023)
Mantisse(M):	Mantisse(M):
23 Bit + 1 hidden bit	52 Bit + 1 hidden bit

Darstellungsbereich Für jedes Gleitpunktsystem existieren:

- Grösste darstellbare Zahl: $x_{\max} = (1 - B^{-n}) \cdot B^{e_{\max}}$
- Kleinste darstellbare positive Zahl: $x_{\min} = B^{e_{\min}-1}$

Approximations- und Rundungsfehler

Fehlerarten Sei $\tilde{x}$ eine Näherung des exakten Wertes x:

Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|$ bzw. $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$ für $x \neq 0$

Maschinengenauigkeit eps ist die kleinste positive Zahl, für die gilt:

Allgemein: $\text{eps} := \frac{B}{2} \cdot B^{-n}$ **Dezimal:** $\text{eps}_{10} := 5 \cdot 10^{-n}$

Sie begrenzt den maximalen relativen Rundungsfehler: $\left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| \leq \text{eps}$

Rundungseigenschaften Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq x_{\min}$ gilt:

Absoluter Fehler: $|rd(x) - x| \leq \frac{B}{2} \cdot B^{e-n-1}$

Relativer Fehler: $\left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| \leq \text{eps}$

Fehlerfortpflanzung

Konditionierung Die Konditionszahl K beschreibt die relative Fehlervergrösserung bei Funktionsauswertungen:

$$K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

- $K \leq 1$: gut konditioniert
- $K > 1$: schlecht konditioniert
- $K \gg 1$: sehr schlecht konditioniert

Fehlerfortpflanzung Für f (differenzierbar) gilt näherungsweise:

Absoluter Fehler: $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$

Relativer Fehler: $\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx K \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

Analyse der Fehlerfortpflanzung einer Funktion

1. Berechnen Sie $f'(x)$
2. Bestimmen Sie die Konditionszahl K
3. Schätzen Sie den absoluten Fehler ab
4. Schätzen Sie den relativen Fehler ab
5. Beurteilen Sie die Konditionierung anhand von K

$$\underbrace{|f(\tilde{x}) - f(x)|}_{\text{absoluter Fehler von } f(x)} \approx \left|f'(x)\right| \cdot \underbrace{|\tilde{x} - x|}_{\text{absoluter Fehler von } x}$$

$$\underbrace{\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|}}_{\text{relativer Fehler von } f(x)} \approx \underbrace{\frac{\left|f'(x)\right| \cdot |x|}{|f(x)|}}_{\text{Konditionszahl } K} \cdot \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}}_{\text{relativer Fehler von } x}$$

Fehleranalyse Beispiel: Fehleranalyse von $f(x) = \sin(x)$

1. $f'(x) = \cos(x)$
2. $K = \frac{|x \cos(x)|}{|\sin(x)|}$
3. Für $x \to 0$: $K \to 1$ (gut konditioniert)
4. Für $x \to \pi$: $K \to \infty$ (schlecht konditioniert)
5. Für $x = 0$: $\lim_{x \to 0} K = 1$ (gut konditioniert)
6. Der absolute Fehler wird nicht vergrössert, da $|\cos(x)| \leq 1$

Praktische Fehlerquellen der Numerik

Kritische Operationen häufigste Fehlerquellen:

- Auslöschung bei Subtraktion ähnlich großer Zahlen
- Überlauf (overflow) bei zu großen Zahlen
- Unterlauf (underflow) bei zu kleinen Zahlen
- Verlust signifikanter Stellen durch Rundung

Vermeidung von Auslöschung

1. Identifizieren Sie Subtraktionen ähnlich großer Zahlen
2. Suchen Sie nach algebraischen Umformungen
3. Prüfen Sie alternative Berechnungswege
4. Verwenden Sie Taylorentwicklungen für kleine Werte

Auslöschung Kritische Berechnungen für kleine x (Auslöschung):

1. $\sqrt{1+x^2} - 1$: **Besser**: $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$
2. $1 - \cos(x)$: **Besser**: $2\sin^2(x/2)$

Auslöschung Bei der Subtraktion fast gleich großer Zahlen können signifikante Stellen verloren gehen. Beispiel:

- $1.234567 - 1.234566 = 0.000001$
- Aus 7 signifikanten Stellen wird 1 signifikante Stelle

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Nullstellensatz von Bolzano Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Falls

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

dann existiert mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Systematisches Vorgehen bei Nullstellenproblemen

- Newton-Verfahren: wenn Ableitung leicht berechenbar
- Sekantenverfahren: wenn Ableitung schwierig
- Fixpunktiteration: wenn geeignete Umformung möglich

NSP: Nullstellenproblem, NS: Nullstelle

Fixpunktiteration

Fixpunktgleichung ist eine Gleichung der Form: $F(x) = x$
Die Lösungen $\bar{x}$, für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist, heissen Fixpunkte.

Grundprinzip der Fixpunktiteration sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a, b]$

Die rekursive Folge $x_{n+1} \equiv F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$

heisst Fixpunktiteration von F zum Startwert x_0.

Konvergenzverhalten
Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung F' und $\bar{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von F. Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$:

Anziehender Fixpunkt: $|F'(\bar{x})| < 1$

x_n konvergiert gegen $\bar{x}$, falls x_0 nahe genug bei $\bar{x}$

Abstossender Fixpunkt: $|F'(\bar{x})| > 1$

x_n konvergiert für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$

Banachscher Fixpunktsatz $F : [a, b] \to [a, b]$ und $\exists$ Konstante α:

- $0 < \alpha < 1$ (Lipschitz-Konstante)
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$

Dann gilt:

- F hat genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration konvergiert gegen $\bar{x}$ für alle $x_0 \in [a, b]$

Fehlerabschätzungen:

a-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$

a-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

Konvergenznachweis für Fixpunktiteration

1. Bringe die Gleichung in Fixpunktform: $f(x) = 0 \Rightarrow x = F(x)$
2. Prüfe, ob F das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet:
   - Wähle geeignetes Intervall ($[a, b]$ $F(a) \geq a$ und $F(b) \leq b$)
3. Bestimme die Lipschitz-Konstante α: $\to$ Berechne $F'(x)$
   - Finde $\alpha = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)|$ und prüfe $\alpha < 1$
4. Berechnen Sie die nötigen Iterationen für Genauigkeit tol: $n \geq \frac{\ln(\frac{tol \cdot (1-\alpha)}{|x_1 - x_0|})}{\ln \alpha}$

Fixpunktiteration Nullstellen von $f(x) = e^x - x - 2$
Umformung in Fixpunktform: $x = \ln(x + 2)$, also $F(x) = \ln(x + 2)$

1. $F'(x) = \frac{1}{x+2}$ monoton fallend
2. Für $I = [1, 2]$: $F(1) = 1.099 > 1$, $F(2) = 1.386 < 2$
3. $\alpha = \max_{x \in [1,2]} |\frac{1}{x+2}| = \frac{1}{3} < 1$
4. Konvergenz für Startwerte in $[1, 2]$ gesichert
5. Für Genauigkeit 10^{-6} benötigt: $n \geq 12$ Iterationen

Newton-Verfahren

Grundprinzip Newton-Verfahren
Approximation der NS durch sukzessive Tangentenberechnung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Konvergiert, wenn für alle x im relevanten Intervall gilt:

$$\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

Newton-Verfahren anwenden
1. Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ aufstellen
2. Geeigneten Startwert x_0 nahe der Nullstelle wählen
   - Prüfen, ob $f'(x_0) \neq 0$
3. Iterieren bis zur gewünschten Genauigkeit: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
4. Abbruchkriterien prüfen:
   - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
   - Änderung aufeinanderfolgenden Werte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
   - Maximale Iterationszahl nicht überschritten

Newton-Verfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Ableitung: $f'(x) = 2x$, Startwert $x_0 = 1$

1. $x_1 = 1 - \frac{1^2-2}{2\cdot 1} = 1.5$
2. $x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2\cdot 1.5} = 1.4167$
3. $x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2-2}{2\cdot 1.4167} = 1.4142$

→ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten

Vereinfachtes Newton-Verfahren
Alternative Variante mit konstanter Ableitung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Konvergiert langsamer, aber benötigt weniger Rechenaufwand.

Sekantenverfahren
Alternative zum Newton-Verfahren ohne Ableitungsberechnung. Verwendet zwei Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Benötigt zwei Startwerte x_0 und x_1.

Sekantenverfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Startwerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

1. $x_2 = 1 - \frac{1-2}{1^2-2} \cdot 1 = 1.5$
2. $x_3 = 1.5 - \frac{1.5-1}{1.5^2-2} \cdot 1.5 = 1.4545$
3. $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545-1.5}{1.4545^2-2} \cdot 1.4545 = 1.4143$

→ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten

Fehlerabschätzung

Fehlerabschätzung für Nullstellen
So schätzen Sie den Fehler einer Näherungslösung ab:
1. Sei x_n der aktuelle Näherungswert
2. Wähle Toleranz $\epsilon > 0$
3. Prüfe Vorzeichenwechsel: $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$
4. Falls ja: Nullstelle liegt in $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$
5. Damit gilt: $|x_n - \xi| < \epsilon$

Praktische Fehlerabschätzung Fehlerbestimmung bei $f(x) = x^2 - 2$

1. Näherungswert: $x_3 = 1.4142157$
2. Mit $\epsilon = 10^{-5}$:
3. $f(x_3 - \epsilon) = 1.4142057^2 - 2 < 0$
4. $f(x_3 + \epsilon) = 1.4142257^2 - 2 > 0$

Also: $|x_3 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$

→ Nullstelle liegt in $(1.4142057, 1.4142257)$

Konvergenzverhalten

Konvergenzordnung Sei (x_n) eine gegen $\bar{x}$ konvergierende Folge. Die Konvergenzordnung $q \geq 1$ ist definiert durch:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

wo $c > 0$ eine Konstante. Für $q = 1$ muss zusätzl. $c < 1$ gelten.

Konvergenzordnungen der Verfahren Konvergenzgeschwindigkeiten

Newton-Verfahren: Quadratische Konvergenz: $q = 2$

Vereinfachtes Newton: Lineare Konvergenz: $q = 1$

Sekantenverfahren: Superlineare Konvergenz: $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Konvergenzgeschwindigkeit Vergleich der Verfahren:
Startwert $x_0 = 1$, Funktion $f(x) = x^2 - 2$, Ziel: $\sqrt{2}$

n	Newton	Vereinfacht	Sekanten
1	1.5000000	1.5000000	1.5000000
2	1.4166667	1.4500000	1.4545455
3	1.4142157	1.4250000	1.4142857
4	1.4142136	1.4125000	1.4142136

LGS und Matrizen

Matrizen

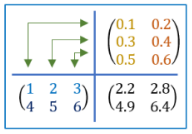
Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten: $m \times n$-Matrix A
a_{ij}: Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte

Addition und Subtraktion
- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation
- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

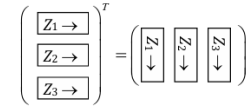
Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetz gelten für Matrix-Addition

Matrixmultiplikation $A^{m\times n}$, $B^{n\times k}$
Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.
Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.
- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$



Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen Assoziativ, Distributiv, nicht Kommutativ!

Transponierte Matrix $A^{m\times n} \to (A^T)^{n\times m}$
- A^T: Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$



Spezielle Matrizen
- **Symmetrische Matrix**: $A^T = A$
- **Einheitsmatrix/Identitätsmatrix**: E bzw. I mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- **Dreiecksmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.
A: Koeffizientenmatrix
$\vec{x}$: Vektor der Unbekannten
$\vec{b}$: Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A)$ = Anzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen
⇒ Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)
- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen → stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Gauss-Jordan-Verfahren
1. bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
2. oberste Zahl in Pivot-Spalte $= 0$
   → vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
3. teile erste Zeile durch a_{11} → so erhalten wir führende Eins
4. Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenperationen)

nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Zeilenperationen erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)
- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen
- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$
- unendlich viele Lösungen: $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen
Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins
Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:
- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \quad x_2 = \lambda \to x_1 = 5 + 2\cdot\lambda - 3\cdot\mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \quad x_4 = \mu \to x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \to A \cdot \vec{x} = \vec{0} \to rg(A) = rg(A \mid \vec{b})$
nur zwei Möglichkeiten:
- eine Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung.*
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS
Für $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot 0 = 0$

Quadratische Matrizen

Umformen bestimme die Matrix X: $A \cdot X + B = 2 \cdot X$

$\Rightarrow A \cdot X = 2 \cdot X - B \Rightarrow A \cdot X - 2 \cdot X = -B \Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot X = -B$
$\Rightarrow (A - 2 \cdot E) \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$
$\Rightarrow X = (A - 2 \cdot E)^{-1} \cdot -B$

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}
A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Eine Matrix heisst *invertierbar / regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
  A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse einer 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow \left(A|E\right) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow \left(E|A^{-1}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Permutationsmatrix P ist eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Zeilenvertauschungen entsteht.

Für die Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile hat P_k die **Form**:
- $p_{ii} = p_{jj} = 0$
- $p_{ij} = p_{ji} = 1$
- Sonst gleich wie in E_n

Wichtige Eigenschaften:
- $P^{-1} = P^T = P$
- Mehrere Vertauschungen: $P = P_l \cdot ... \cdot P_1$

Zeilenvertauschung für Matrix A mit Permutationsmatrix P_1:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \cdot P_1$ bewirkt die Vertauschung von Zeile 1 und 3

Pivotisierung

Spaltenpivotisierung
Strategie zur numerischen Stabilisierung des Gauss-Algorithmus durch Auswahl des betragsmäßig größten Elements als Pivotelement.
Vor jedem Eliminationsschritt in Spalte i:
- Suche k mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \ldots, n\}$
- Falls $a_{ki} \neq 0$: Vertausche Zeilen i und k
- Falls $a_{ki} = 0$: Matrix ist singulär

Gauss-Algorithmus mit Pivotisierung

1. Elimination (Vorwärts):
- Für $i = 1, \ldots, n-1$:
  - Finde $k \geq i$ mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \ldots, n\}$
  - Falls $a_{ki} = 0$: Stop (Matrix singulär)
  - Vertausche Zeilen i und k
  - Für $j = i+1, \ldots, n$:
    - $z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} z_i$

2. Rückwärtseinsetzen: $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$

Gauss mit Pivotisierung $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 36 \end{pmatrix}$

Eliminationsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 36 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = \frac{-8}{-2} = 4$$
$$x_2 = \frac{36 - 15(4)}{3} = 1$$
$$x_1 = \frac{2 - 4(4) + 2}{2} = -6$$

Vorteile der Permutationsmatrix
- Exakte Nachverfolgung aller Zeilenvertauschungen
- Einfache Rückführung auf ursprüngliche Reihenfolge durch P^{-1}
- Kompakte Darstellung mehrerer Vertauschungen
- Numerisch stabile Implementierung der Pivotisierung

Zeilenvertauschungen verfolgen
1. Initialisiere $P = I_n$
2. Für jede Vertauschung von Zeile i und j:
   - Erstelle P_k durch Vertauschen von Zeilen i, j in I_n
   - Aktualisiere $P = P_k \cdot P$
   - Wende Vertauschung auf Matrix an: $A := P_k A$
3. Bei der LR-Zerlegung mit Pivotisierung:
   - $PA = LR$
   - Löse $Ly = Pb$ und $Rx = y$

Matrix-Zerlegungen

Dreieckszerlegung Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann zerlegt werden in:

Untere Dreiecksmatrix L:
$l_{ij} = 0$ für $j > i$
Diagonale normiert ($l_{ii} = 1$)

Obere Dreiecksmatrix R:
$r_{ij} = 0$ für $i > j$
Diagonalelemente $\neq 0$

LR-Zerlegung

LR-Zerlegung
Jede reguläre Matrix A, für die der Gauss-Algorithmus ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, lässt sich zerlegen in: $A = LR$ wobei L eine normierte untere und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Berechnung der LR-Zerlegung
So berechnen Sie die LR-Zerlegung:
1. Führen Sie Gauss-Elimination durch
2. R ist die resultierende obere Dreiecksmatrix
3. Die Eliminationsfaktoren $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ bilden L
4. Lösen Sie dann nacheinander:
   - $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen)
   - $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen)

LR-Zerlegung $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Erste Spalte

Max. Element in 1. Spalte: $|a_{31}| = 5$, also Z1 und Z3 tauschen:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne Eliminationsfaktoren: $l_{21} = \frac{1}{5}, \quad l_{31} = -\frac{1}{5}$

Nach Elimination: $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 1.2 & 1.8 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Zweite Spalte

Max. Element in 2. Spalte unter Diagonale: $|-3.2| > |1.2|$, keine Vertauschung nötig.

Berechne Eliminationsfaktor: $l_{32} = -\frac{1.2}{-3.2} = \frac{3}{8}$

Nach Elimination: $R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 2.85 \end{pmatrix}$

Endergebnis

Die LR-Zerlegung mit $PA = LR$ ist:

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{8} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -3.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 2.85 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

1. $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.4 \\ 2.85 \end{pmatrix}$
3. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Probe

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = b$$

QR-Zerlegung

QR-Zerlegung

Eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erfüllt: $Q^TQ = QQ^T = I_n$

Die QR-Zerlegung einer Matrix A ist: $A = QR$

wobei Q orthogonal und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Householder-Transformation

Eine Householder-Matrix hat die Form: $H = I_n - 2uu^T$

mit $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Es gilt:

- H ist orthogonal ($H^T = H^{-1}$) und symmetrisch ($H^T = H$)
- $H^2 = I_n$

QR-Zerlegung mit Householder

1. Initialisierung: $R := A$, $Q := I_n$
2. Für $i = 1, \dots, n-1$:
   - Bilde Vektor v_i aus i-ter Spalte von R ab Position i
   - $w_i := v_i + \text{sign}(v_{i1})\|v_i\|e_1$
   - $u_i := w_i/\|w_i\|$
   - $H_i := I_{n-i+1} - 2u_iu_i^T$
   - Erweitere H_i zu Q_i durch I_{i-1} links oben
   - $R := Q_iR$ und $Q := QQ_i^T$

QR-Zerlegung mit Householder $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Erste Spalte

Erste Spalte a_1 und Einheitsvektor e_1: $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Vektor für erste Spalte:

1. Berechne Norm: $|a_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
2. Bestimme Vorzeichen: $\text{sign}(a_{11}) = \text{sign}(2) = 1$
   - Wähle positives Vorzeichen, da erstes Element positiv
   - Dies maximiert die erste Komponente von v_1
   - Verhindert Auslöschung bei der Subtraktion
3. $v_1 = a_1 + \text{sign}(a_{11})|a_1|e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Normiere v_1: $|v_1| = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + 1} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ -0.41 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Matrix berechnen: $H_1 = I - 2u_1u_1^T = \begin{pmatrix} -0.67 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A nach 1. Transformation: $A^{(1)} = H_1A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -0.89 & 1.79 \\ 0 & 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Zweite Spalte

Untermatrix für zweite Transformation: $A_2 = \begin{pmatrix} -0.89 & 1.79 \\ 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Householder-Vektor für zweite Spalte:

1. $|a_2| = \sqrt{(-0.89)^2 + 2^2} = 2.19$
2. $\text{sign}(a_{22}) = \text{sign}(-0.89) = -1$ (da erstes Element negativ)
3. $v_2 = \begin{pmatrix} -0.89 \\ 2.00 \end{pmatrix} - 2.19\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.09 \\ 2.00 \end{pmatrix}$
4. $u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix}$

Erweiterte Householder-Matrix: $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.41 & -0.91 \\ 0 & -0.91 & 0.41 \end{pmatrix}$

nach 2. Transformation: $R = Q_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Endergebnis

Die QR-Zerlegung $A = QR$ ist:

$Q = H_1^TQ_2^T = \begin{pmatrix} -0.89 & -0.45 & 0 \\ 0.45 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Probe

1. $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
2. $Q^TQ = QQ^T = I$ (Orthogonalität)
3. R ist obere Dreiecksmatrix

Wichtige Beobachtungen

- Vorzeichenwahl bei v_k ist entscheidend für numerische Stabilität
- Ein falsches Vorzeichen kann zu Auslöschung führen
- Betrag der Diagonalelemente in R = Norm transformierter Spalten
- Q ist orthogonal: Spaltenvektoren sind orthonormal

Fehleranalyse

Matrix- und Vektornormen

Eine Vektornorm $\|\cdot\|$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Wichtige Normen

1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$

∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Fehlerabschätzung für LGS

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $Ax = b$, $A\tilde{x} = \tilde{b}$

Absoluter Fehler:

$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$

Relativer Fehler:

$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$

Mit der Konditionszahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Konditionierung

Die Konditionszahl beschreibt die numerische Stabilität eines LGS:

- $\text{cond}(A) \approx 1$: gut konditioniert
- $\text{cond}(A) \gg 1$: schlecht konditioniert
- $\text{cond}(A) \to \infty$: singulär

Konditionierung $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$

Konditionszahl: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 400$

Fehlerabschätzung

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq 400 \cdot 0.01 = 4$

Relativer Fehler: $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 400 \cdot \frac{0.01}{2} = 2$

Vergleich Lösungsverfahren $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matrix ist symmetrisch und nicht streng diagonaldominant
- $\text{cond}_\infty(A) \approx 12.5$

Verfahren	Iterationen	Residuum	Zeit
LR mit Pivot	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.0
QR	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	2.3
Jacobi	12	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.8
Gauss-Seidel	7	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.4

- Direkte Verfahren erreichen höhere Genauigkeit
- Iterative Verfahren brauchen mehrere Schritte

Iterative Verfahren

Zerlegung der Systemmatrix A zerlegt in: $A = L + D + R$

- L: streng untere Dreiecksmatrix
- D: Diagonalmatrix
- R: streng obere Dreiecksmatrix

Jacobi-Verfahren Gesamtschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$

Komponentenweise: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

Gauss-Seidel-Verfahren Einzelschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Rx^{(k)} + (D + L)^{-1}b$

Komponentenweise:

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

Implementierung von Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren

Vorbereitungsphase

- Matrix zerlegen in $A = L + D + R$
- Diagonaldominanz prüfen: $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- Sinnvolle Startwerte wählen (z.B. $x^{(0)} = 0$ oder $x^{(0)} = b$)
- Toleranz ϵ und max. Iterationszahl n_{max} festlegen

Verfahren durchführen

- **Jacobi**: Komponentenweise parallel berechnen
- **Gauss-Seidel**: Komponentenweise sequentiell berechnen

Konvergenzprüfung

- Absolute Änderung: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$
- Relatives Residuum: $\frac{\|Ax^{(k)}-b\|}{\|b\|} < \epsilon$
- Maximale Iterationszahl: $k < n_{max}$

A-priori Fehlerabschätzung

- Spektralradius ρ der Iterationsmatrix bestimmen
- Benötigte Iterationen n für Genauigkeit ϵ:

  $n \geq \frac{\ln(\epsilon(1-\rho)/\|x^{(1)}-x^{(0)}\|)}{\ln(\rho)}$

Konvergenzkriterien Ein iteratives Verfahren konvergiert, wenn:

1. Die Matrix A diagonaldominant ist:
   $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für alle i
2. Der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner 1 ist:
   $\rho(B) < 1$ mit B als jeweilige Iterationsmatrix

Konvergenzverhalten $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist diagonaldominant: $|a_{ii}| = 4 > 1 = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

k	Residuum		Rel. Fehler	
	Jacobi	G-S	Jacobi	G-S
0	3.74	3.74	-	-
1	0.94	0.47	0.935	0.468
2	0.23	0.06	0.246	0.125
3	0.06	0.01	0.065	0.017
4	0.01	0.001	0.016	0.002

Beobachtungen:

- Gauss-Seidel konvergiert etwa doppelt so schnell wie Jacobi
- Das Residuum fällt linear (geometrische Folge)
- Die Konvergenz ist gleichmäßig (keine Oszillationen)

Komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen (mit Vielfachheiten gezählt).

Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch Einführung der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft:

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$:

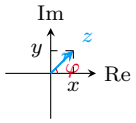
$$z = x + iy$$

Die Menge aller komplexen Zahlen ist definiert als:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Bestandteile komplexer Zahlen

Realteil: $\mathrm{Re}(z) = x$
Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = y$
Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$
Konjugation: $\overline{z} = x - iy$



Darstellungsformen

- Normalform: $z = x + iy$
- Trigonometrische Form: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Umrechnung zwischen Darstellungsformen komplexer Zahlen

Von Normalform in trigonometrische Form/Exponentialform

1. Berechne Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. Berechne Winkel mit einer der Formeln:
   - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$
   - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$
   - $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y > 0$
   - $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y < 0$
   - φ unbestimmt falls $x = y = 0$
3. Trigonometrische Form: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
4. Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

Von trigonometrischer Form in Normalform

1. Realteil: $x = r\cos\varphi$
2. Imaginärteil: $y = r\sin\varphi$
3. Normalform: $z = x + iy$

Von Exponentialform in Normalform/trigonometrische Form

1. Trigonometrische Form durch Euler-Formel:
   $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
2. Dann wie oben in Normalform umrechnen

Wichtige Hinweise:

- Achten Sie auf das korrekte Quadranten beim Winkel
- Winkelfunktionen im Bogenmaß verwenden
- Bei Umrechnung in Normalform Euler-Formel nutzen
- Vorzeichen bei Exponentialform beachten

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt:

Addition:
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Subtraktion:
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$= r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \text{ (in Exponentialform)}$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \text{ (in Exponentialform)}$$

Potenzen und Wurzeln

Für eine komplexe Zahl in Exponentialform $z = re^{i\varphi}$ gilt:

- n-te Potenz: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$
- n-te Wurzel: $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Der Vektor x heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Bestimmung von Eigenwerten

Ein Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung. Das zugehörige Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

ist das charakteristische Polynom von A.

Eigenschaften von Eigenwerten

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ (Produkt der Eigenwerte)}$$

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ (Summe der Eigenwerte)}$$

- Bei Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente die Eigenwerte
- Ist λ Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}

Vielfachheiten

Für einen Eigenwert λ unterscheidet man:

- Algebraische Vielfachheit:
  Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- Geometrische Vielfachheit:
  Dimension des Eigenraums $= n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$

Die geometrische Vielfachheit ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Vorbereitung

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aufschreiben
- Charakteristische Matrix $(A - \lambda I)$ aufstellen

Eigenwerte bestimmen

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:
   - Bei 2×2 Matrizen direkt: $\det(A - \lambda I)$
   - Bei 3×3 Matrizen: Entwicklung nach einer Zeile/Spalte
   - Bei größeren Matrizen: Spezielle Eigenschaften nutzen (z.B. Dreiecksform, Symmetrie)
2. Polynom vereinfachen und auf Nullform bringen:
   - Ausmultiplizieren
   - Zusammenfassen nach Potenzen von λ
   - Form: $p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$
3. Nullstellen bestimmen:
   - Bei quadratischer Gleichung: Mitternachtsformel
   - Bei Grad 3: Substitution oder Cardanische Formeln
   - Bei höherem Grad: Numerische Verfahren

Eigenvektoren bestimmen

1. Für jeden Eigenwert λ_i:
   - Matrix $(A - \lambda_i I)$ aufstellen
   - Homogenes LGS $(A - \lambda_i I)x = 0$ lösen
   - Lösungsvektor normieren falls gewünscht
2. Bei mehrfachen Eigenwerten:
   - Basis des Eigenraums bestimmen
   - Linear unabhängige Eigenvektoren finden

Kontrolle

- Für jeden Eigenvektor x_i prüfen: $Ax_i = \lambda_i x_i$
- Bei 2×2 Matrix: $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$
- Bei 3×3 Matrix zusätzlich: $\sum \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$ und $\prod \lambda_i = \det(A)$
- Bei reellen Matrizen: Komplexe Eigenwerte treten in konjugierten Paaren auf

Spezialfälle beachten

- Bei Dreiecksmatrizen: Eigenwerte sind die Diagonalelemente
- Bei symmetrischen Matrizen: Alle Eigenwerte sind reell
- Bei orthogonalen Matrizen: $|\lambda_i| = 1$ für alle Eigenwerte
- Bei nilpotenten Matrizen: Alle Eigenwerte sind 0

Eigenwertberechnung Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Entwicklung nach 1. Zeile:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - ((2-\lambda) - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

4. Nullstellen bestimmen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$
5. Eigenvektoren bestimmen für $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)x = 0 \text{ führt zu } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Numerische Berechnung von Eigenwerten

Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine reguläre Matrix T gibt mit:

$$B = T^{-1}AT$$

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist:

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenschaften ähnlicher Matrizen

Für ähnliche Matrizen A und $B = T^{-1}AT$ gilt:

1. A und B haben dieselben Eigenwerte mit gleichen algebraischen Vielfachheiten
2. Ist x Eigenvektor von B zum Eigenwert λ, so ist Tx Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
3. Bei Diagonalisierbarkeit:
   - Die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
   - Die Spalten von T sind die Eigenvektoren von A

Spektralradius

Der Spektralradius einer Matrix A ist definiert als:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

Er gibt den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts an.

Von-Mises-Iteration

Von-Mises-Iteration (Vektoriteration)

Für eine diagonalisierbare Matrix A mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ konvergiert die Folge:

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

gegen einen Eigenvektor v zum betragsmäßig größten Eigenwert λ_1.

Von-Mises-Iteration / Vektoriteration

Algorithmus

1. Startvektor $v^{(0)}$ wählen:
   - Zufälligen Vektor oder $(1, \ldots, 1)^T$ wählen
   - Auf Länge 1 normieren: $\|v^{(0)}\|_2 = 1$
2. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ bis zur Konvergenz:
   - Iterationsvektor berechnen: $w^{(k)} = Av^{(k)}$
   - Normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
   - Eigenwertapproximation (Rayleigh-Quotient):

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

3. Abbruchkriterien prüfen:
   - Änderung des Eigenvektors: $\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\| < \varepsilon$
   - Änderung des Eigenwertes: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < \varepsilon$
   - Maximale Iterationszahl erreicht

Verifikation

- Prüfen ob $Av^{(k)} \approx \lambda^{(k)} v^{(k)}$
- Residuum berechnen: $\|Av^{(k)} - \lambda^{(k)} v^{(k)}\|$
- Orthogonalität zu anderen Eigenvektoren prüfen

Von-Mises-Iteration

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Mit Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$:

1. Erste Iteration:
   - $w^{(0)} = Av^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4,0,2)^T$
   - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4,0,2)^T$
   - $\lambda^{(1)} = (v^{(0)})^T Av^{(0)} = 3.33$
2. Zweite Iteration:
   - $w^{(1)} = Av^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{20}}(18,-2,8)^T$
   - $v^{(2)} = \frac{w^{(1)}}{\|w^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{388}}(18,-2,8)^T$
   - $\lambda^{(2)} = 5.12$

   Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5.17$ und $v = (0.89, -0.10, 0.39)^T$

QR-Verfahren

QR-Verfahren

Das QR-Verfahren transformiert die Matrix A iterativ in eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind:

1. Initialisierung: $A_0 := A$, $P_0 := I_n$
2. Für $i = 0, 1, 2, \ldots$:
   - QR-Zerlegung: $A_i = Q_i R_i$
   - Neue Matrix: $A_{i+1} = R_i Q_i$
   - Update: $P_{i+1} = P_i Q_i$

QR-Verfahren

Voraussetzungen

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Eigenwerte sollten verschiedene Beträge haben für gute Konvergenz

Algorithmus

1. Initialisierung:
   - $A_0 := A$
   - $Q_0 := I_n$
2. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ bis zur Konvergenz:
   - QR-Zerlegung von A_k berechnen: $A_k = Q_k R_k$
   - Neue Matrix berechnen: $A_{k+1} = R_k Q_k$
   - Transformationsmatrix aktualisieren: $P_{k+1} = P_k Q_k$
3. Abbruchkriterien prüfen:
   - Subdiagonalelemente nahe Null: $|a_{i+1,i}| < \varepsilon$
   - Änderung der Diagonalelemente klein
   - Maximale Iterationszahl erreicht

Auswertung

- Eigenwerte: Diagonalelemente von A_k
- Eigenvektoren: Spalten der Matrix P_k
- Bei 2×2-Blöcken: Komplexe Eigenwertpaare

QR-Verfahren

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Erste Iteration:
   - QR-Zerlegung: $Q_1 = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.89 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 2.24 & 0.45 \\ 0 & -1 & 0.89 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 0.45 & 0.45 \\ 0.45 & 0.38 & 0.89 \\ 0.45 & 0.89 & 1 \end{pmatrix}$
2. Nach Konvergenz: $A_k \approx \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

Numerische Aspekte

1. Wahl des Startpunkts:
   - Von-Mises: zufälliger normierter Vektor
   - Inverse Iteration: Näherung für μ wichtig
   - QR: Matrix vorher auf Hessenberg-Form
2. Konvergenzprüfung:
   - Residuum $\|Ax^{(k)} - \lambda^{(k)} x^{(k)}\|$
   - Änderung in aufeinanderfolgenden Iterationen
   - Subdiagonalelemente bei QR
3. Spezialfälle:
   - Mehrfache Eigenwerte
   - Komplexe Eigenwerte/vektoren
   - Schlecht konditionierte Matrizen

Python Implementationen

Hilfsfunktionen

Matrixoperationen

```python
def matrix_vector_mult(A, v): # Matrix-Vektor Mult.
    n = len(A)
    result = [0] * n
    for i in range(n):
        result[i] = sum(A[i][j] * v[j] for j in
            range(n))
    return result

def matrix_mult(A, B): # Matrix-Matrix Multiplikation
    m, n = len(A), len(B[0])
    p = len(B)
    C = [[0.0] * n for _ in range(m)]
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            C[i][j] = sum(A[i][k] * B[k][j] for k in
                range(p))
    return C

def transpose(A): # Matrix transponieren
    n = len(A)
    return [[A[j][i] for j in range(n)] for i in
        range(n)]

def vector_norm(v): # Euklidische Norm eines Vektors
    return sum(x*x for x in v) ** 0.5

def normalize_vector(v): # Vektor auf L. 1 normieren
    norm = vector_norm(v)
    return [x/norm for x in v] if norm > 0 else v

def copy_matrix(A): # Tiefe Kopie einer Matrix
    return [[A[i][j] for j in range(len(A[0]))] for i
        in range(len(A))]
```

is_diagonally_dominant

Diagonaldominanz prüfen

```python
def is_diagonally_dominant(A):
    n = len(A)
    for i in range(n):
        if abs(A[i][i]) <= sum(abs(A[i][j]) for j in
            range(n) if j != i):
            return False
    return True
```

convergence_check Konvergenzkriterien

```python
def convergence_check(x_new, x_old, f_new, f_old,
    tol=1e-6):
    # Absoluter Fehler im Funktionswert
    if abs(f_new) < tol:
        return True, "Funktionswert < tol"
    # Relative Aenderung der x-Werte
    if abs(x_new - x_old) < tol * (1 + abs(x_new)):
        return True, "Relative Aenderung < tol"
    # Relative Aenderung der Funktionswerte
    if abs(f_new - f_old) < tol * (1 + abs(f_new)):
        return True, "Funktionsaenderung < tol"
    # Divergenzcheck
    if abs(f_new) > 2 * abs(f_old):
        return False, "Divergenz detektiert"

    return False, "Noch nicht konvergiert"
```

error_estimate Fehlerabschätzung durch Vorzeichenwechsel

```python
def error_estimate(f, x, eps=1e-5):
    fx_left = f(x - eps)
    fx_right = f(x + eps)

    if fx_left * fx_right < 0:
        return eps  # Nullstelle liegt in (x-eps,
            x+eps)
    return None
```

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

root_finder_with_error Nullstellensuche mit Fehlerabschaetzung

```python
def root_finder_with_error(f, x0, tol=1e-6,
    max_iter=100):
    x_old = x0
    f_old = f(x_old)

    for i in range(max_iter):
        # Iterationsschritt (hier Newton als Beispiel)
        x_new = x_old - f_old/derivative(f, x_old)
        f_new = f(x_new)

        # Pruefe Konvergenzkriterien
        converged, reason = convergence_check(
            x_new, x_old, f_new, f_old, tol)

        if converged:
            # Schaetze finalen Fehler
            error = error_estimate(f, x_new, tol)
            return {
                'root': x_new,
                'iterations': i+1,
                'error_bound': error,
                'convergence_reason': reason
            }

        x_old, f_old = x_new, f_new

    raise ValueError(f"Keine Konvergenz nach
        {max_iter} Iterationen")
```

fixed_point_it Fixpunktiteration

```python
def fixed_point_it(f, x0, tol=1e-6, max_it=100):
    x = x0
    for i in range(max_it):
        x_new = f(x)
        if abs(x_new - x) < tol:
            return x_new, i+1
        x = x_new
    raise ValueError("Keine Konvergenz")

# Optimierte Version mit Fehlerschaetzung
def fixed_point_it_opt(f, x0, tol=1e-6, max_it=100):
    x = x0
    alpha = None  # Schaetzung fuer Lipschitz-Konstante
    for i in range(max_iter):
        x_new = f(x)
        dx = abs(x_new - x)
        # Lipschitz-Konstante schaetzen
        if i > 0 and dx > 0:
            alpha_new = dx / dx_old
            if alpha is None or alpha_new > alpha:
                alpha = alpha_new
        # A-posteriori Fehlerabschaetzung
        if alpha is not None and alpha < 1:
            error = alpha * dx / (1 - alpha)
            if error < tol:
                return x_new, i+1
        x = x_new
        dx_old = dx
    raise ValueError("Keine Konvergenz")
```

newton Newton-Verfahren mit Konvergenzprüfung

```python
def newton(f, df, x0, tol=1e-6, max_iter=100):
    x = x0
    fx = f(x)

    for i in range(max_iter):
        dfx = df(x)
        if abs(dfx) < 1e-10:
            raise ValueError("Ableitung nahe Null")

        dx = fx/dfx
        x_new = x - dx
        fx_new = f(x_new)

        # Konvergenzpruefung
        converged, reason = convergence_check(
            x_new, x, fx_new, fx, tol)
        if converged:
            return {
                'root': x_new,
                'iterations': i+1,
                'residual': abs(fx_new),
                'convergence_reason': reason
            }

        if abs(fx_new) >= abs(fx):
            raise ValueError("Divergenz detektiert")

        x, fx = x_new, fx_new

    raise ValueError("Keine Konvergenz")
```

secant Sekantenverfahren mit Konvergenzprüfung

```python
def secant(f, x0, x1, tol=1e-6, max_iter=100):
    fx0 = f(x0)
    fx1 = f(x1)

    # Stelle mit kleinerem f-Wert als x1
    if abs(fx0) < abs(fx1):
        x0, x1 = x1, x0
        fx0, fx1 = fx1, fx0

    for i in range(max_iter):
        if abs(fx1) < tol:
            return x1, i+1
        if fx1 == fx0:
            raise ValueError("Division durch Null")
        # Sekanten-Schritt
        d = fx1 * (x1 - x0)/(fx1 - fx0)
        x2 = x1 - d

        # Konvergenzpruefungen
        if abs(d) < tol * (1 + abs(x1)): # Relative
            Aenderung
            return {
                'root': x2,
                'iterations': i+1,
                'residual': abs(f(x2))
            }
        fx2 = f(x2)
        if abs(fx2) >= abs(fx1): # Divergenzcheck
            if i == 0:
                raise ValueError("Schlechte
                    Startwerte")
            return {
                'root': x1,
                'iterations': i+1,
                'residual': abs(fx1)
            }

        x0, x1 = x1, x2
        fx0, fx1 = fx1, fx2

    raise ValueError("Keine Konvergenz")
```

Nullstellenverfahren - Praktisches Vorgehen

1. Voraussetzungen prüfen:
   - Existiert Nullstelle? (z.B. Vorzeichenwechsel)
   - Sind Startwerte geeignet?
   - Ist Funktion ausreichend glatt? (für Newton)
2. Verfahren wählen:
   - Newton: Wenn Ableitung verfügbar und Startwert nahe Lösung
   - Sekanten: Wenn keine Ableitung aber zwei Startwerte nahe Lösung
   - Fixpunkt: Wenn Funktion kontraktiv
3. Implementierung:
   - Konvergenzkriterien definieren
   - Maximale Iterationszahl festlegen
   - Fehlerabschätzung einbauen
   - Divergenzschutz implementieren
4. Auswertung:
   - Konvergenzverhalten prüfen
   - Fehler abschätzen
   - Ergebnis validieren

root_finder_with_error Nullstellensuche mit Fehlerabschaetzung

```python
def root_finder_with_error(f, x0, tol=1e-6,
    max_iter=100):
    x_old = x0
    f_old = f(x_old)

    for i in range(max_iter):
        # Iterationsschritt (hier Newton als Beispiel)
        x_new = x_old - f_old/derivative(f, x_old)
        f_new = f(x_new)

        # Pruefe Konvergenzkriterien
        converged, reason = convergence_criteria(
            x_new, x_old, f_new, f_old, tol)
        if converged:
            # Schaetze finalen Fehler
            error = error_estimate(f, x_new, tol)
            return {
                'root': x_new, 'iterations': i+1,
                'error_bound': error,
                'convergence_reason': reason
            }
        x_old, f_old = x_new, f_new

    raise ValueError(f"Keine Konvergenz nach
        {max_iter} Iterationen")
    # Returns: Dictionary mit Ergebnissen
```

Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

gauss_elimination Gauss-Elimination mit Spaltenpivotisierung

```python
def gauss_elimination(A, b, tol=1e-10):
    n = len(A)
    M = copy_matrix(A) # Tiefe Kopie von A und b
    x = [0] * n
    b = b.copy()

    # Vorwaertselimination mit Pivotisierung
    for i in range(n):
        # Pivotisierung
        pivot_row = i
        for j in range(i+1, n):
            if abs(M[j][i]) > abs(M[pivot_row][i]):
                pivot_row = j
        if pivot_row != i:
            M[i], M[pivot_row] = M[pivot_row], M[i]
            b[i], b[pivot_row] = b[pivot_row], b[i]
        # Pruefe auf singulaere Matrix
        if abs(M[i][i]) < tol:
            raise ValueError("Matrix (fast) singulaer")
        # Elimination
        for j in range(i+1, n):
            factor = M[j][i] / M[i][i]
            for k in range(i, n):
                M[j][k] -= factor * M[i][k]
            b[j] -= factor * b[i]

    # Rueckwaertssubstitution
    for i in range(n-1, -1, -1):
        x[i] = (b[i] - sum(M[i][j] * x[j]
                for j in range(i+1, n))) / M[i][i]
    return {
        'solution': x, 'matrix': M,
        'condition': estimate_condition(A)
    }
```

lr_decomposition LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung

```python
def lr_decomposition(A, tol=1e-10):
    n = len(A)

    # Initialisiere L, R und P
    R = copy_matrix(A)
    L = [[1.0 if i == j else 0.0 for j in range(n)]
         for i in range(n)]
    P = [[1.0 if i == j else 0.0 for j in range(n)]
         for i in range(n)]

    for k in range(n-1):
        # Pivotisierung
        pivot = k
        for i in range(k+1, n):
            if abs(R[i][k]) > abs(R[pivot][k]):
                pivot = i

        if abs(R[pivot][k]) < tol:
            raise ValueError("Matrix (fast) singulaer")

        # Zeilenvertauschung falls noetig
        if pivot != k:
            R[k], R[pivot] = R[pivot], R[k]

            # L und P anpassen fuer Zeilen < k
            for j in range(k):
                L[k][j], L[pivot][j] = L[pivot][j],
                    L[k][j]
            P[k], P[pivot] = P[pivot], P[k]

        # Elimination
        for i in range(k+1, n):
            factor = R[i][k] / R[k][k]
            L[i][k] = factor
            for j in range(k, n):
                R[i][j] -= factor * R[k][j]

    return {
        'L': L,
        'R': R,
        'P': P
    }
```

solve_lr LGS mit LR-Zerlegung lösen

```python
def solve_lr(L, R, P, b):
    n = len(L)
    # Pb berechnen
    pb = matrix_vector_mult(P, b)

    # Vorwaertseinsetzen Ly = Pb
    y = [0] * n
    for i in range(n):
        y[i] = pb[i] - sum(L[i][j] * y[j] for j in
            range(i))

    # Rueckwaertseinsetzen Rx = y
    x = [0] * n
    for i in range(n-1, -1, -1):
        x[i] = (y[i] - sum(R[i][j] * x[j]
                for j in range(i+1, n))) / R[i][i]

    return x
```

householder_vector Householder-Vektor zu x berechnen

```python
def householder_vector(x):
    n = len(x)
    v = x.copy()
    sigma = sum(v[i]*v[i] for i in range(1, n))

    if sigma == 0 and x[0] >= 0:
        return [0] * n, 0
    elif sigma == 0 and x[0] < 0:
        return [2] + [0]*(n-1), -2
    mu = (x[0]*x[0] + sigma)**0.5
    if x[0] <= 0:
        v[0] = x[0] - mu
    else:
        v[0] = -sigma/(x[0] + mu)
    beta = 2*v[0]*v[0]/(sigma + v[0]*v[0])
    return normalize_vector(v), beta
```

qr_decomposition QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen

```python
def qr_decomposition(A):
    m = len(A)
    n = len(A[0])
    R = copy_matrix(A)
    Q = [[1.0 if i == j else 0.0 for j in range(m)]
         for i in range(m)]

    for k in range(min(m-1, n)):
        # Extrahiere k-te Spalte ab k-ter Zeile
        x = [R[i][k] for i in range(k, m)]
        # Berechne Householder-Transformation
        v, beta = householder_vector(x)

        # Wende Householder auf R an
        for j in range(k, n):
            # w = beta * (v^T * R_j)
            w = beta * sum(v[i-k]*R[i][j]
                           for i in range(k, m))
            for i in range(k, m): # Update R
                R[i][j] -= v[i-k] * w
        for j in range(m): # Update Q
            w = beta * sum(v[i-k]*Q[j][i+k]
                           for i in range(len(v)))
            for i in range(len(v)):
                Q[j][k+i] -= v[i] * w

    Q = transpose(Q) # Transponiere Q am Ende
    return {
        'Q': Q,'R': R
    }
```

solve_qr Lösen von QRx = b

```python
def solve_qr(Q, R, b):
    # Berechne Q^T * b
    y = matrix_vector_mult(transpose(Q), b)
    # Rueckwaertseinsetzen
    n = len(R)
    x = [0] * n
    for i in range(n-1, -1, -1):
        x[i] = (y[i] - sum(R[i][j] * x[j] for j in
            range(i+1, n))) / R[i][i]
    return x
```

Iterative Löser für lineare Gleichungssysteme

jacobi_method Jacobi-Verfahren

```python
def jacobi_method(A, b, tol=1e-6, max_iter=100):
    n = len(A)
    # Pruefe Diagonaldominanz
    if not is_diagonally_dominant(A):
        print("Warnung: Matrix nicht diagonaldominant")
    # Initialisiere mit Nullvektor
    x = [0.0] * n
    iterations = []
    residuals = []
    for iter in range(max_iter):
        x_new = [0.0] * n
        # Jacobi-Iteration
        for i in range(n):
            sum_term = sum(A[i][j] * x[j]
                           for j in range(n) if j != i)
            x_new[i] = (b[i] - sum_term) / A[i][i]
        # Berechne Residuum
        res = max(abs(sum(A[i][j] * x_new[j]
                  for j in range(n)) - b[i])
                  for i in range(n))
        # Konvergenzcheck
        diff = max(abs(x_new[i] - x[i]) for i in
             range(n))

        iterations.append(x_new.copy())
        residuals.append(res)
        if diff < tol:
            return {
                'solution': x_new,
                'iterations': iterations,
                'residuals': residuals,
                'iteration_count': iter + 1
            }
        x = x_new.copy()
    raise ValueError("Keine Konvergenz nach
        {max_iter}, Iterationen\nLetztes Residuum:
        {res}")
```

gauss_seidel_method Gauss-Seidel-Verfahren

```python
def gauss_seidel_method(A, b, tol=1e-6, max_iter=100):
    n = len(A)
    iterations = []
    residuals = []

    # Pruefe Diagonaldominanz
    if not is_diagonally_dominant(A):
        print("Warnung: Matrix nicht diagonaldominant")
    x = [0.0] * n
    # Gauss-Seidel-Iteration
    for iter in range(max_iter):
        x_old = x.copy()
        for i in range(n):
            sum1 = sum(A[i][j] * x[j] for j in
                 range(i))
            sum2 = sum(A[i][j] * x_old[j]
                       for j in range(i+1, n))
            x[i] = (b[i] - sum1 - sum2) / A[i][i]
        # Berechne Residuum und relative Aenderung
        res = max(abs(sum(A[i][j] * x[j]
                  for j in range(n)) - b[i])
                  for i in range(n))
        diff = max(abs(x[i] - x_old[i]) for i in
             range(n))

        iterations.append(x.copy())
        residuals.append(res)
        if diff < tol:
            return {
                'solution': x,
                'iterations': iterations,
                'residuals': residuals,
                'iteration_count': iter + 1
            }

    raise ValueError(f"Keine Konvergenz nach
        {max_iter} "
                     f"Iterationen\nLetztes Residuum:
                         {res}")
```

analyze_convergence Konvergenzanalyse

```python
def analyze_convergence(method_name, iterations,
     residuals):
    """Analysiert Konvergenzverhalten eines iterativen
         Verfahrens"""
    n = len(residuals)
    if n < 2:
        return {
            'method': method_name,
            'converged': False,
            'reason': 'Zu wenige Iterationen'
        }

    # Schaetze Konvergenzrate
    rates = [abs(residuals[i]/residuals[i-1])
             for i in range(1, n)]
    avg_rate = sum(rates) / len(rates)

    # Schaetze asymptotische Konvergenzrate
    asymp_rate = rates[-1] if rates else None

    # Berechne empirische Konvergenzordnung
    if n > 2:
        q = [abs(log(residuals[i+1]/residuals[i]) /
                 log(residuals[i]/residuals[i-1]))
             for i in range(n-2)]
        avg_order = sum(q) / len(q) if q else None
    else:
        avg_order = None

    return {
        'method': method_name,
        'converged': residuals[-1] < residuals[0],
        'iterations': n,
        'final_residual': residuals[-1],
        'avg_rate': avg_rate,
        'asymp_rate': asymp_rate,
        'conv_order': avg_order
    }
```

Implementation iterativer Verfahren

1. Wählen Sie Startvektor $x^{(0)}$
2. Wählen Sie Abbruchkriterien:
   - Maximale Iterationszahl k_{max}
   - Toleranz ϵ für Änderung $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$
   - Toleranz für Residuum $\|Ax^{(k)} - b\|$
3. Führen Sie Iteration durch bis Kriterien erfüllt

Eigenwerte und Eigenvektoren

complex_operations Komplexe Zahlen

```python
def complex_operations(z1, z2):
    """Grundlegende Operationen mit komplexen
         Zahlen."""
    # Basisfunktionen
    def to_polar(z):
        r = (z.real**2 + z.imag**2)**0.5
        phi = math.atan2(z.imag, z.real)
        return r, phi

    def from_polar(r, phi):
        return r * (math.cos(phi) + 1j*math.sin(phi))

    try:
        # Addition und Subtraktion
        z_add = z1 + z2
        z_sub = z1 - z2
        # Multiplikation und Division
        z_mul = z1 * z2
        z_div = z1 / z2 if z2 != 0 else None
        # Polarform
        r1, phi1 = to_polar(z1)
        r2, phi2 = to_polar(z2)
        # Exponentialform
        z1_exp = from_polar(r1, phi1)
        z2_exp = from_polar(r2, phi2)

        return {
            'addition': z_add,
            'subtraktion': z_sub,
            'multiplikation': z_mul,
            'division': z_div,
            'polar_z1': (r1, phi1),
            'polar_z2': (r2, phi2)
        }

    except Exception as e:
        print(f"Fehler bei Berechnung: {e}")
        return None
```

Determinante

```python
def det_2x2(matrix):
    return matrix[0][0]*matrix[1][1] -
         matrix[0][1]*matrix[1][0]

def det_3x3(matrix):
    det = 0
    # Entwicklung nach erster Zeile
    for i in range(3):
        minor = []
        for j in range(1,3):
            row = []
            for k in range(3):
                if k != i:
                    row.append(matrix[j][k])
            minor.append(row)
        det += ((-1)**i) * matrix[0][i] *
             det_2x2(minor)
    return det
```

characteristic_polynomial
Charakteristisches Polynom einer 2x2 oder 3x3 Matrix

```python
def characteristic_polynomial(A):
    n = len(A)
    if n == 2:
        a, d = A[0][0], A[1][1]
        # det(A - lambda*I) = lambda^2 - tr(A)*lambda + det(A)
        return [1, -(a + d), det_2x2(A)]
    elif n == 3:
        # Hier nur Koeffizienten, keine Polynomauswertung
        trace = sum(A[i][i] for i in range(3))
        det = det_3x3(A)
        return [1, -trace, None, det]  # Mittlerer Koeff. kompliziert
    else:
        raise ValueError("Nur fuer 2x2 oder 3x3 Matrizen")
```

find_eigenvalues_2x2
Eigenwerte einer 2x2 Matrix

```python
def find_eigenvalues_2x2(A, tol=1e-10):
    coeff = characteristic_polynomial(A)
    # Quadratische Formel
    p, q = -coeff[1], coeff[2]
    disc = p*p/4 - q
    if abs(disc) < tol:  # Doppelte Eigenwerte
        return [-p/2, -p/2]
    elif disc > 0:  # Reelle Eigenwerte
        root = disc**0.5
        return [-p/2 + root, -p/2 - root]
    else:  # Komplexe Eigenwerte
        root = (-disc)**0.5
        return [-p/2 + 1j*root, -p/2 - 1j*root]
```

find_eigenvector
Eigenvektor zu gegebenem Eigenwert

```python
def find_eigenvector(A, eigenval, tol=1e-10):
    n = len(A)
    # A - lambda*I
    M = [[A[i][j] - (eigenval if i==j else 0)
          for j in range(n)] for i in range(n)]

    # Loese homogenes System (A - lambda*I)x = 0
    # Nehme eine Komponente als 1 an
    for i in range(n):
        if abs(M[i][i]) > tol:
            vec = [0] * n
            vec[i] = 1
            for j in range(n):
                if j != i:
                    s = sum(-M[j][k]*vec[k] for k in range(n) if k != j)
                    if abs(M[j][j]) > tol:
                        vec[j] = s/M[j][j]
            return normalize_vector(vec)

    raise ValueError("Kein Eigenvektor gefunden")
```

power_iteration
Von-Mises-Iteration für grössten Eigenwert

```python
def power_iteration(A, tol=1e-10, max_iter=100):
    n = len(A)
    # Starte mit Einheitsvektor
    v = normalize_vector([1] + [0]*(n-1))
    lambda_old = 0

    for _ in range(max_iter):
        # Matrix-Vektor-Multiplikation
        w = matrix_vector_mult(A, v)
        # Normiere neuen Vektor
        v = normalize_vector(w)

        # Rayleigh-Quotient
        lambda_k = sum(v[i] * A[i][j] * v[j]
                       for i in range(n)
                       for j in range(n))

        if abs(lambda_k - lambda_old) < tol:
            return {
                'eigenvalue': lambda_k,
                'eigenvector': v
            }

        lambda_old = lambda_k

    raise ValueError("Keine Konvergenz")
```

inverse_iteration
Inverse Iteration für Eigenwert nahe μ

```python
def inverse_iteration(A, mu, tol=1e-10, max_iter=100):
    n = len(A)
    # Starte mit Einheitsvektor
    v = normalize_vector([1] + [0]*(n-1))
    lambda_old = 0

    # (A - mu*I) berechnen
    M = [[A[i][j] - (mu if i==j else 0)
          for j in range(n)] for i in range(n)]

    for _ in range(max_iter):
        # Loese (A - mu*I)w = v
        w = gauss_elimination(M, v)['solution']
        # Normiere neuen Vektor
        v = normalize_vector(w)

        # Rayleigh-Quotient
        lambda_k = sum(v[i] * A[i][j] * v[j]
                       for i in range(n)
                       for j in range(n))

        if abs(lambda_k - lambda_old) < tol:
            return {
                'eigenvalue': lambda_k,
                'eigenvector': v
            }

        lambda_old = lambda_k

    raise ValueError("Keine Konvergenz")
```

qr_algorithm
QR-Algorithmus für alle Eigenwerte

```python
def qr_algorithm(A, tol=1e-10, max_iter=100):
    n = len(A)
    A_k = copy_matrix(A)

    for k in range(max_iter):
        # QR-Zerlegung
        qr = qr_decomposition(A_k)
        Q, R = qr['Q'], qr['R']

        # Neue Iteration A_(k+1) = RQ
        A_k = matrix_mult(R, Q)

        # Pruefe ob Diagonalelemente konvergiert sind
        if all(abs(A_k[i][j]) < tol
               for i in range(1, n)
               for j in range(i)):
            return {
                'eigenvalues': [A_k[i][i] for i in range(n)],
                'iterations': k+1,
                'final_matrix': A_k
            }

    raise ValueError("Keine Konvergenz")

def deflation(A, eigenval, eigenvec):
    """Deflation nach Hotelling"""
    n = len(A)
    v = normalize_vector(eigenvec)

    # Berechne A - lambda*vv^T
    vvt = [[v[i]*v[j] for j in range(n)] for i in range(n)]
    return [[A[i][j] - eigenval*vvt[i][j]
             for j in range(n)] for i in range(n)]
```