Stochastik und Statistik

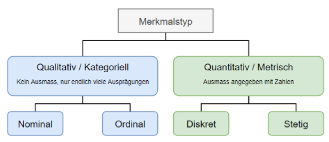
Jil Zerndt, Lucien Perret
December 2024

Intro

Begriffe

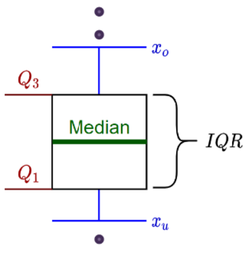
Grundlegende Begriffe

- Ω = Grundgesamtheit
- n = Anzahl Objekte
- X = Stichprobenwerte
- a = Ausprägungen
- h = Absolute Häufigkeit
- f = Relative Häufigkeit
- H = Kumulative Absolute Häufigkeit
- F = Kumulative Relative Häufigkeit



Boxplot

- $Q_1, Q_2 = x_{\text{med}}, Q_3$
- $IQR = Q_3 - Q_1$
- Untere Antenne x_u :
  $u = \min[Q_1 - 1.5 \cdot IQR, Q_1]$
- Obere Antenne x_0 :
  $o = \max[Q_3 + 1.5 \cdot IQR, Q_3]$
- Ausreisser: $x_i < x_u \vee x_i > x_0$



Deskriptive Statistik

Bivariate Daten (Merkmale)

- 2x kategoriell → Kontingenztabelle + Mosaikplot
- 1x kategoriell + 1x metrisch → Boxplot oder Stripchart
- 2x metrisch → Streudiagramm

Absolute Häufigkeiten

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

H: Absolute Häufigkeit,
h_i: Einzelhäufigkeit der i-ten Beobachtung,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Relative Häufigkeiten

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i, \quad F(x) = \frac{H(x)}{n}$$

F: Relative Häufigkeit,
f_i: Einzelrelative Häufigkeit der i-ten Beobachtung,
$H(x)$: Absolute Häufigkeit eines Wertes x,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Kennwerte (Lagemasse)

Quantil

$$i = \lceil n \cdot q \rceil, \quad Q = x_i = x_{\lceil n \cdot q \rceil}$$

i: Position des Quantils,
n: Anzahl der Beobachtungen,
q: Quantilswert (z. B. 0.25 für das erste Quartil),
x_i: Beobachtung an Position i.

Interquartilsabstand

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

IQR: Interquartilsabstand,
Q_3: Oberes Quartil (75. Perzentil),
Q_1: Unteres Quartil (25. Perzentil).

Modus

$$x_{\text{mod}} = \text{Häufigste Wert}$$

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i$$

$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen,
x_i: Einzelbeobachtung,
a_i: Klassenmitte,
f_i: Relative Häufigkeit der Klasse i.

Median

$$\begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & n \text{ ungerade} \\ 0.5 \cdot \left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right) & n \text{ gerade} \end{cases}$$

n: Anzahl der Beobachtungen,
$x_{[k]}$: Beobachtung an der k-ten Position.

Stichprobenvarianz s^2 (Streumasse)

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad (s_{\text{kor}})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$(s_{\text{kor}})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2$$

s^2: Stichprobenvarianz,
s^2_{kor}: Korrigierte Stichprobenvarianz,
x_i: Einzelbeobachtung,
$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Standardabweichung s (Streumasse)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad s_{\text{kor}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

s: Standardabweichung,
s_{kor}: Korrigierte Standardabweichung,
x_i: Einzelbeobachtung,
$\bar{x}$: Arithmetisches Mittel,
n: Anzahl der Beobachtungen.

PDF + CDF

Nicht klassierte Daten (PMF und CDF)

Die absolute Häufigkeit kann als Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden.

$$h_i$$

h_i: Absolute Häufigkeit der i-ten Beobachtung.

Die relative Häufigkeit kann als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet werden.

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

f_i: Relative Häufigkeit der i-ten Beobachtung,
h_i: Absolute Häufigkeit der i-ten Beobachtung,
n: Anzahl der Beobachtungen.

Kombinatorik

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

n = Die positive ganze Zahl, für die die Fakultät berechnet wird
k = Laufvariable in der Produktnotation
$\prod$ = Produkt aller Terme von $k = 1$ bis n

Binomialkoeffizient

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Objekte aus einer Gesamtheit von n Objekten auszuwählen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

n = Gesamtanzahl der Objekte in der Menge
k = Anzahl der auszuwählenden Objekte
$n!$ = Fakultät von n
$(n-k)!$ = Fakultät von $(n-k)$
$k!$ = Fakultät von k

Systematik

Grundbegriffe

Variation (mit Reihenfolge)		Kombination (ohne Reihenfolge)	
Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$
Zahlenschloss	Schwimmwettkampf	Zahnarzt	Lotto

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Spezialfälle der Kombinatorik

Romme Beispiel Beim Rommé spielt man mit 110 Karten: sechs davon sind Joker. Zu Beginn eines Spiels erhält jeder Spieler genau 12 Karten.
Wahrscheinlichkeit für genau zwei Joker:

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{104}{10}}{\binom{110}{12}}$$

$\binom{6}{2}$ = Anzahl Möglichkeiten 2 Joker aus 6 zu wählen
$\binom{104}{10}$ = Anzahl Möglichkeiten 10 Nicht-Joker aus 104 zu wählen
$\binom{110}{12}$ = Gesamtanzahl Möglichkeiten 12 Karten aus 110 zu wählen

Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Joker:

$$1 - \frac{\binom{104}{12}}{\binom{110}{12}}$$

$\binom{104}{12}$ = Anzahl Möglichkeiten 12 Nicht-Joker aus 104 zu wählen
$\binom{110}{12}$ = Gesamtanzahl Möglichkeiten 12 Karten aus 110 zu wählen

Glühbirnen Beispiel Von 100 Glühbirnen sind genau drei defekt. Es werden nun 6 Glühbirnen zufällig ausgewählt.
Anzahl Möglichkeiten mit mindestens einer defekten Glühbirne:

$$\binom{100}{6} - \binom{97}{6} = 203'880'032$$

$\binom{100}{6}$ = Gesamtanzahl Möglichkeiten 6 Glühbirnen aus 100 zu wählen
$\binom{97}{6}$ = Anzahl Möglichkeiten 6 intakte Glühbirnen aus 97 zu wählen

Wahrscheinlichkeit für keine defekte Glühbirne:

$$\frac{\binom{97}{6}}{\binom{100}{6}}$$

$\binom{97}{6}$ = Anzahl Möglichkeiten 6 intakte Glühbirnen aus 97 zu wählen
$\binom{100}{6}$ = Gesamtanzahl Möglichkeiten 6 Glühbirnen aus 100 zu wählen

Wahrscheinlichkeitstheorie

Ergebnisraum Ergebnisraum Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments. Zähldichte $\rho : \Omega \to [0,1]$ ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu.
Für ein Laplace-Raum (Ω, P) gilt:

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$$

Ω = Ergebnisraum (Menge aller möglichen Ergebnisse)
$P(M)$ = Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M
$|M|$ = Anzahl der für M günstigen Ergebnisse
$|\Omega|$ = Anzahl aller möglichen Ergebnisse

Stochastische Unabhängigkeit Zwei Ereignisse A und B heissen stochastisch unabhängig, falls:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$P(A \cap B)$ = Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse eintreten
$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis A
$P(B)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis B

Zwei Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ heissen stochastisch unabhängig, falls:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

$P(X = x, Y = y)$ = Wahrscheinlichkeit dass X den Wert x und Y den Wert y annimmt
$P(X = x)$ = Wahrscheinlichkeit dass X den Wert x annimmt
$P(Y = y)$ = Wahrscheinlichkeit dass Y den Wert y annimmt

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$P(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A eingetreten ist
$P(B \cap A)$ = Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse eintreten
$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis A

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$P(A \cap B)$ = Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse eintreten
$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis A
$P(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A eingetreten ist
$P(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung dass B eingetreten ist

Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})$$

$P(B)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis B
$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis A
$P(\bar{A})$ = Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von A
$P(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A eingetreten ist
$P(B|\bar{A})$ = Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A nicht eingetreten ist

Satz von Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ = Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung dass B eingetreten ist
$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis A
$P(B|A)$ = Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung dass A eingetreten ist
$P(B)$ = Wahrscheinlichkeit von Ereignis B

Spezielle Verteilungen

Verteilungen und Erwartungswerte Für diskrete Verteilungen:

$$E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\cdot x$$

$$V(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\cdot (x - E(X))^2$$

$E(X)$ = Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X
$f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsfunktion
x = Mögliche Werte der Zufallsvariable

Für stetige Verteilungen:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot (x - E(X))^2 dx$$

$E(X)$ = Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X
$f(x)$ = Dichtefunktion
x = Mögliche Werte der Zufallsvariable

Bernoulliverteilung Bernoulli-Experimente sind Zufallsexperimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen (1 und 0):

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p = q$$

Es gilt:
1. $E(X) = E(X^2) = p$
2. $V(X) = p\cdot(1-p)$

$E(X)$ = Erwartungswert
$V(X)$ = Varianz
$P(X=1)$ = Wahrscheinlichkeit für Erfolg
p = Erfolgswahrscheinlichkeit
q = Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p)$

Normalverteilung

Gauss-Verteilung Die stetige Zufallsvariable X folgt der Normalverteilung mit den Parametern $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Standardnormalverteilung ($\mu = 0$ und $\sigma = 1$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ = Dichtefunktion der Normalverteilung
$\varphi(x)$ = Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

μ = Erwartungswert
σ = Standardabweichung
e = Eulersche Zahl
π = Kreiszahl Pi

Approximation durch die Normalverteilung
- Binomialverteilung: $\mu = np, \sigma^2 = npq$
- Poissonverteilung: $\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda$

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} P(X=x) \approx \phi_{\mu,\sigma}(b+\frac{1}{2}) - \phi_{\mu,\sigma}(a-\frac{1}{2})$$

$P(a \le X \le b)$ = Wahrscheinlichkeit dass X zwischen a und b liegt
$\phi_{\mu,\sigma}$ = Verteilungsfunktion der Normalverteilung
a, b = Untere und obere Grenze

Zentraler Grenzwertsatz Für eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2 gilt:

$$E(S_n) = n\cdot\mu, \quad V(S_n) = n\cdot\sigma^2, \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

S_n = Summe der Zufallsvariablen
$\bar{X}_n$ = Arithmetisches Mittel der Zufallsvariablen
n = Anzahl der Zufallsvariablen
μ = Erwartungswert der einzelnen Zufallsvariablen
σ^2 = Varianz der einzelnen Zufallsvariablen

Die standardisierte Zufallsvariable:

$$U_n = \frac{((X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - n\mu)}{\sqrt{n}\cdot\sigma} = \frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

U_n = Standardisierte Zufallsvariable
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ = Einzelne Zufallsvariablen
$\bar{X}$ = Arithmetisches Mittel

Faustregeln für Approximationen
- Die Approximation (Binomialverteilung) kann verwendet werden, wenn $npq > 9$
- Für grosses $n (n \ge 50)$ und kleines $p (p \le 0.1)$ kann die Binomial- durch die Poisson-Verteilung approximiert werden:

$$B(n,p) \approx \text{Poi}(n\cdot p)$$

  $B(n,p)$ = Binomialverteilung
  $\text{Poi}(\lambda)$ = Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = n\cdot p$

- Eine Hypergeometrische Verteilung kann durch eine Binomialverteilung angenähert werden, wenn $n \le \frac{N}{20}$:

$$H(N,M,n) \approx B(n, \frac{M}{N})$$

  $H(N,M,n)$ = Hypergeometrische Verteilung
  $B(n,p)$ = Binomialverteilung
  N = Grundgesamtheit
  M = Anzahl der Erfolge in der Grundgesamtheit
  n = Stichprobengröße

Methode der kleinsten Quadrate

Lineare Regression Gegeben sind Datenpunkte $(x_i; y_i)$ mit $1 \le i \le n$. Die Residuen / Fehler $\epsilon_i = g(x_i) - y_i$ dieser Datenpunkte sind Abstände in y-Richtung zwischen y_i und der Geraden g. Die Ausgleichs- oder Regressionsgerade ist diejenige Gerade, für die die Summe der quadrierten Residuen $\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2$ am kleinsten ist.
(x_i, y_i) = Datenpunkte
ϵ_i = Residuum (Abweichung) des i-ten Datenpunkts
$g(x_i)$ = Wert der Regressionsgerade an der Stelle x_i
n = Anzahl der Datenpunkte

Regressionsgerade Die Regressionsgerade $g(x) = mx + d$ mit den Parametern m und d ist die Gerade, für welche die Residualvarianz s_ϵ^2 minimal ist.

Steigung: $m = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$, y-Achsenabschnitt: $d = \bar{y} - m\bar{x}$, $s_\epsilon^2 = s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$

m = Steigung der Regressionsgerade
d = y-Achsenabschnitt
s_{xy} = Kovarianz von x und y
s_x^2 = Varianz der x-Werte
s_y^2 = Varianz der y-Werte
$\bar{x}$ = Arithmetisches Mittel der x-Werte
$\bar{y}$ = Arithmetisches Mittel der y-Werte
s_ϵ^2 = Residualvarianz

Bestimmtheitsmass

Varianzaufspaltung Die Totale Varianz setzt sich zusammen aus der Residualvarianz und der Varianz der prognostizierten Werte:

- s_y^2 Totale Varianz
- $s_{\hat{y}}^2$ prognostizierte (erklärte) Varianz
- s_ϵ^2 Residualvarianz

$$s_y^2 = s_\epsilon^2 + s_{\hat{y}}^2$$

s_y^2 = Totale Varianz der beobachteten y-Werte
s_ϵ^2 = Varianz der Residuen
$s_{\hat{y}}^2$ = Varianz der durch die Regression geschätzten Werte

Bestimmtheitsmass Das Bestimmtheitsmass R^2 beurteilt die globale Anpassungsgüte einer Regression über den Anteil der prognostizierten Varianz $s_{\hat{y}}^2$ an der totalen Varianz s_y^2:

$$R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$$

R^2 = Bestimmtheitsmass (zwischen 0 und 1)
$s_{\hat{y}}^2$ = Varianz der prognostizierten Werte
s_y^2 = Totale Varianz

Das Bestimmtheitsmass R^2 entspricht dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten:

$$R^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2} = (r_{xy})^2$$

s_{xy} = Kovarianz von x und y
s_x^2 = Varianz der x-Werte
s_y^2 = Varianz der y-Werte
r_{xy} = Korrelationskoeffizient

Linearisierungsfunktionen

Transformationen

Ausgangsfunktion	Transformation
$y = q \cdot x^m$	$\log(y) = \log(q) + m \cdot \log(x)$
$y = q \cdot m^x$	$\log(y) = \log(q) + \log(m) \cdot x$
$y = q \cdot e^{m \cdot x}$	$\ln(y) = \ln(q) + m \cdot x$
$y = \frac{1}{q+m \cdot x}$	$V = q + m \cdot x; V = \frac{1}{y}$
$y = q + m \cdot \ln(x)$	$y = q + m \cdot U; u = \ln(x)$
$y = \frac{1}{q \cdot m^x}$	$\log(\frac{1}{y}) = \log(q) + \log(m) \cdot x$

y = Abhängige Variable
x = Unabhängige Variable
q, m = Parameter der Funktion
e = Eulersche Zahl
ln = Natürlicher Logarithmus
log = Logarithmus zur Basis 10

Schliessende Statistik

Erwartungstreue Schätzfunktion Eine Schätzfunktion Θ eines Parameters θ heisst erwartungstreu, wenn:

$$E(\Theta) = \theta$$

Effizienz einer Schätzfunktion Gegeben sind zwei erwartungstreue Schätzfunktionen Θ_1 und Θ_2 desselben Parameters θ. Man nennt Θ_1 effizienter als Θ_2, falls:

$$V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$$

Konsistenz einer Schätzfunktion Eine Schätzfunktion Θ heisst konsistent, wenn:

$$E(\Theta) \to \theta \text{ und } V(\Theta) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Vertrauensintervalle

Vertrauensintervall Wir legen eine grosse Wahrscheinlichkeit γ fest (z.B. $\gamma = 95\%$). γ heisst statistische Sicherheit oder Vertrauensniveau. $\alpha = 1 - \gamma$ ist die Irrtumswahrscheinlichkeit.
Dann bestimmen wir zwei Zufallsvariablen Θ_u und Θ_o so, dass sie den wahren Parameterwert Θ mit der Wahrscheinlichkeit γ einschliessen:

$$P(\Theta_u \leq \Theta \leq \Theta_o) = \gamma$$

Intervallschätzung Verteilungstypen und zugehörige Quantile:

Verteilung	Parameter	Quantile
Normalverteilung (σ^2 bekannt)	μ	$c = u_p, p = \frac{1+\gamma}{2}$
t-Verteilung (σ^2 unbekannt)	μ	$c = t_{(p;f=n-1)}, p = \frac{1+\gamma}{2}$
Chi-Quadrat-Verteilung	σ^2	$c_1 = \chi^2_{(\frac{1-\gamma}{2};n-1)}, c_2 = \chi^2_{(\frac{1+\gamma}{2};n-1)}$

Berechnung eines Vertrauensintervalls Geben Sie das Vertrauensintervall für μ an (σ^2 unbekannt). Gegeben sind:

$$n = 10, \quad \bar{x} = 102, \quad s^2 = 16, \quad \gamma = 0.99$$

1. Verteilungstyp mit Param μ und σ^2 unbekannt $\to$ T-Verteilung
2. $f = n - 1 = 9$, $p = \frac{1+\gamma}{2} = 0.995$, $c = t_{(p;f)} = t_{(0.995;9)} = 3.25$
3. $e = c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 4.111$, $\Theta_u = \bar{X} - e = 97.89$, $\Theta_o = \bar{X} + e = 106.11$

Likelyhood-Funktion

Likelyhood-Funktion Wir betrachten eine Zufallsvariable X und ihre Dichte (PDF) $f_x(x|\theta)$, welche von x und einem oder mehreren Parametern θ abhängig sind.
Für eine Stichprobe vom Umfang n mit $x_1, \ldots, x_n$ nennen wir die vom Parameter θ abhängige Funktion die Likelyhood-Funktion der Stichprobe:

$$L(\theta) = f_x(x_1|\theta) \cdot f_x(x_2|\theta) \cdot \ldots \cdot f_x(x_n|\theta)$$

Vorgehen bei Maximum-Likelihood-Schätzung

1. Likelyhood-Funktion bestimmen
2. Maximalstelle der Funktion bestimmen:
   - (Partielle) Ableitung $L'(\theta) = 0$

Beispiele

Erwartungstreue Schätzfunktion Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ, Varianz σ^2 und Zufallsstichprobe X_1, X_2, X_3. Die folgende Schätzfunktion ist gegeben:

$$\Theta_1 = \frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)$$

Θ_1 = Schätzfunktion
X_1, X_2 = Zufallsvariablen aus der Stichprobe

Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu (Parameter: μ)?

$$E(\Theta_1) = E(\frac{1}{3} \cdot (2X_1 + X_2)) = \frac{1}{3} \cdot (2E(X_1) + E(X_2))$$
$$E(\Theta_1) = \frac{1}{3} \cdot (2\mu + \mu) = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

$E(\Theta_1)$ = Erwartungswert der Schätzfunktion
$E(X_1), E(X_2)$ = Erwartungswerte der einzelnen Zufallsvariablen
μ = Wahrer Parameterwert

Da $E(\Theta_1) = \mu$ ist die Funktion erwartungstreu.

Intervallschätzung für die Varianz Für die Varianz σ^2 einer Normalverteilung mit Stichprobenumfang $n = 10$ und Stichprobenvarianz $s^2 = 16$ soll ein 99%-Vertrauensintervall berechnet werden.

1. Verteilungstyp: Chi-Quadrat-Verteilung
2. Freiheitsgrade: $f = n - 1 = 9$
3. Quantile: $c_1 = \chi^2_{(0.005;9)} = 1.735$, $c_2 = \chi^2_{(0.995;9)} = 23.589$
4. Vertrauensintervall:

$$\frac{(n-1)s^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{c_1}$$

n = Stichprobenumfang
s^2 = Stichprobenvarianz
c_1, c_2 = Chi-Quadrat-Quantile
σ^2 = Wahre Varianz der Grundgesamtheit

$$\frac{9 \cdot 16}{23.589} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \cdot 16}{1.735}$$
$$6.10 \leq \sigma^2 \leq 82.99$$

Bernoulli-Anteilsschätzung Ein Vertrauensintervall für den Parameter p einer Bernoulli-Verteilung soll aus einer Stichprobe mit $n = 100$ und $\bar{x} = 0.42$ bei einem Vertrauensniveau von 95% berechnet werden.

1. Prüfen der Voraussetzung: $n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \cdot 0.42 \cdot 0.58 = 24.36 > 9$
2. Quantil: $c = u_{0.975} = 1.96$
3. Standardfehler: $\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = \sqrt{\frac{0.42 \cdot 0.58}{100}} = 0.0494$
4. Vertrauensintervall:

$$0.42 \pm 1.96 \cdot 0.0494 = [0.323; 0.517]$$

n = Stichprobenumfang
$\bar{x}$ = Stichprobenmittelwert (Anteil der Erfolge)
$\hat{p}$ = Geschätzter Parameter der Bernoulli-Verteilung
$u_{0.975}$ = 97.5