Lineare Algebra

Jil Zerndt, Lucien Perret
June 2024

Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0)
- $\vec{e}$ = Einheitsvektor (Betrag = 1)
- $-\vec{a}$ = Gegenvektor von $\vec{a}$

Einheitsvektor

$$\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Kollinear (Parallel) Zwei Vektoren sind kollinear, wenn sie auf einer Geraden liegen. Ein Vektor ist ein Vielfaches des anderen.

Komplanar Drei Vektoren sind komplanar, wenn sie in einer Ebene liegen. Die Vektoren sind linear abhängig.

Orthogonal (Senkrecht) Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \text{ orthogonal}$$

Orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $(0 \neq \varphi \neq \frac{\pi}{2})$:

$$\vec{b}_{\perp a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}, \quad |\vec{b}_{\perp a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

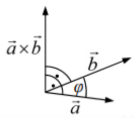
Winkelberechnung

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Vektorprodukt

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

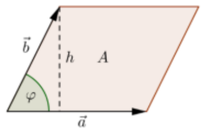
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - & a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - & a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - & a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$



Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

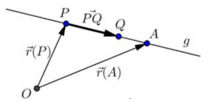
$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Gerade in der Ebene und im Raum

- $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$
- $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

Der Punkt P heisst Aufpunkt, der Richtungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ von g.

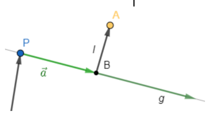


Abstand Punkt-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3\lambda \\ 13 + 5\lambda \end{pmatrix}$
2. $0 = \begin{pmatrix} 3 - 1 - 3\lambda \\ -1 - 13 - 5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$
3. Length $= \left| \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ -14 - 5x \end{pmatrix} \right|$



Abstand Gerade-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$
3. Length $= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

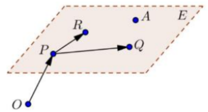
Abstand Punkt-Ebene

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

Ebene kann durch 3 Punkte festgelegt werden

- Die Vektoren $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ sind komplanar
- $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$$



Parameterdarstellung der Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$E: \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$
- $2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4}$
- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4}$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Lage von Geraden im Raum

	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Matrizen

Basics

Inverse