Höhere Mathematik 2

Jil Zerndt
FS 2025

Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

In diesem Kapitel geht es um die Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Abkürzung: LGS = lineares Gleichungssystem, NGS = nichtlineares Gleichungssystem

Einleitendes Beispiel

$$f_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2-11=0$$

$$f_2(x_1,x_2)=x_1+x_2^2-7=0$$

Gesucht sind die Lösungen des Gleichungssystems. Diese lassen sich interpretieren als die Nullstellen der Funktion $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäss:

$$\mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^2+x_2-11\\ x_1+x_2^2-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Offensichtlich lässt sich ein solches System nicht in die Form $Ax=b$ bringen.

Geometrisch lassen sich die Lösungen als Schnittpunkte der beiden Funktionen interpretieren.
Explizite Darstellung der Kurven:

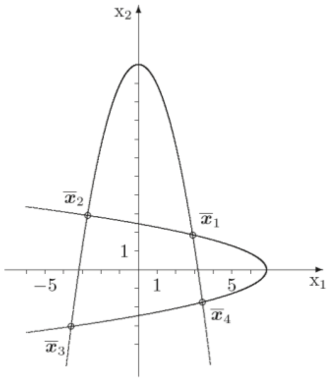
$$x_2=11-x_1^2$$

$$x_2=\sqrt{7-x_1}$$

Schnittpunkte:

$$\overline{\mathbf{x}_1}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{x}_2}=\begin{pmatrix}-2.8\\3.2\end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{x}_3}=\begin{pmatrix}-3.8\\-3.3\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{x}_4}=\begin{pmatrix}3.4\\-1.7\end{pmatrix}$$



Funktionen mit mehreren Variablen

Funktion mit abhängiger Variable x, unabhängiger Variable $y=f(x)$:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto f(x)$$

Skalarwertige Funktionen mit mehreren Variablen

$$f: D\subset \mathbb{R}^n \to W\subset\mathbb{R}$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Unter einer Funktion f mit n unabhängigen Variablen $x_1,\dots,x_n$ und einer abhängigen Variablen y versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlentupel $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ aus einer Definitionsmenge $D\subset\mathbb{R}^n$ genau ein Element $y\in W\subset\mathbb{R}$ zuordnet.

Da das Ergebnis $y\in\mathbb{R}$ ein Skalar (eine Zahl) ist, redet man auch von einer **skalarwertigen Funktion**.

Vektorwertige Funktion Erweiterung der obigen Definition, gibt einen **Vektor** zurück (anstatt eines Skalars).
Sei $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ eine Funktion mit n Variablen. Dann ist die Funktion $\mathbf{f}$ definiert durch:

$$\mathbf{f}(x_1\dots,x_n)=\begin{pmatrix} y_1=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \vdots\\ y_m=f_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

wobei die m Komponenten $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ für $i=1,2,\dots,n$ von $\mathbf{f}$ wieder **skalarwertige** Funktionen sind.

Eigenschaften von skalar- und vektorwertigen Funktionen

- Skalar- und vektorwertige Funktionen mit mehreren Variablen werden auch **multivariat** genannt.
- Wie bei einem Vektor $\mathbf{x}$ stellen wir zur besseren Unterscheidbarkeit vektorwertige Funktionen $\mathbf{f}$ fett dar, im Gegensatz zu Skalaren x und skalarwertigen Funktionen f.
- Wir werden uns bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme auf vektorwertige Funktionen $\mathbf{f}=\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ konzentrieren.

Beispiele

Grundlegende Rechenoperationen können als Skalarwertige Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ oder als Vektorwertige Funktionen $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ interpretiert werden

$$f(x,y)=x+y,\quad g(x,y)=x\cdot y,\quad h(x,y)=x^2+y^2$$

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix}x+y\\x\cdot y\end{pmatrix},\quad \mathbf{g}(x,y)=\begin{pmatrix}x\cdot y\\x^2+y^2\end{pmatrix}$$

Zusammenhang mit der Elektrotechnik

Ohmsches Gesetz

Die an einem ohmschen Widerstand R abfallende Spannung U hängt vom Widerstand R und der Stromstärke I gemäss dem ohmschen Gesetz $U=R\cdot I$ ab. Also haben wir für die abhängige Variable $U=f(R,I)=RI$ die skalarwertige Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ mit den unabhängigen Variablen R und I. Häufig schreibt man auch direkt

$$U=U(R,I)=R\cdot I$$

und bringt dadurch die Abhängigkeit der Variable U von den unabhängigen Variablen R und I zum Ausdruck, wie wir es auch bereits vom eindimensionalen Fall kennen, z.B. $y=y(x)$.

Reihenschaltung von Widerständen

Bei der Reihenschaltung von n ohmschen Widerständen $R_1,R_2,\dots,R_n$ ergibt sich der Gesamtwiderstand R gemäss

$$R=R(R_1,R_2,\dots,R_n)=R_1+R_2+\ldots+R_n$$

lineare Funktionen von LGS Gebe die lineare Funktion $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ an, für welche die Lösung $\mathbf{x}$ des LGS:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \text{ mit } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-2&5&1\\1&-2&5\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

gerade $\mathbf{f(x)}=\mathbf{0}$ ergibt.

Vorgehen:

$$\vec{\mathbf{f}}(x_1,x_2,x_3)=0\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}\Rightarrow \underbrace{\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{0}}}_{\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}})=\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-2&5&1\\1&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\11\\12\end{pmatrix}$$

Die Funktion $\mathbf{f}$ ist gegeben durch: (**solved by copilot so no guarantees**)

$$\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}f_1=4x_1-x_2+x_3-5\\ f_2=-2x_1+5x_2+x_3-11\\ f_3=x_1-2x_2+5x_3-12\end{pmatrix}$$

Darstellungsformen

Analytische Darstellung

- **Explizite Darstellung:** $y=f(x_1,\dots,x_n)$
  - die Funktionsgleichung ist nach einer Variablen aufgelöst
  - Beispiel: $y=2\cdot e^{(}x_1^2+x_2^2)$
- **Implizite Darstellung:** $F(x,y)=0$
  - die Funktionsgleichung ist nicht nach einer Variablen aufgelöst
  - daher handelt es sich um eine Funktion mit nur $n-1$ unabhängigen Variablen
  - Beispiel: $x_1^2+x_2^2-1=0$
- **Parameterdarstellung:** $x=x(t), y=y(t)$
  - die Funktion wird durch eine Kurve im Raum beschrieben
  - Beispiel: $x(t)=\cos(t), y(t)=\sin(t)$

Darstellung durch Wertetabelle Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.
Vorgehen:
In die vorausgesetzte Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ werden die Werte der unabhängigen Variablen x und y eingesetzt (der Reihe nach).
So erhält man eine Wertetabelle, bzw. Matrix:

2. unabhängige Variable y

1. unabhängige Variable x

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_k	$\dots$	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}	$\dots$	z_{1k}	$\dots$	z_{1n}
x_2	z_{21}	z_{22}	$\dots$	z_{2k}	$\dots$	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
x_i	z_{i1}	z_{i2}	$\dots$	z_{ik}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
x_m	z_{m1}	z_{m2}	$\dots$	z_{mk}	$\dots$	z_{mn}

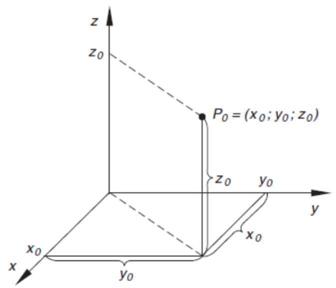
← i-te Zeile

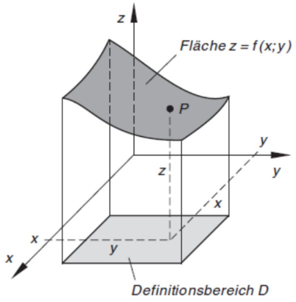
↑ k-te Spalte

Grafische Darstellung Wir beschränken uns hier auf skalarwertige Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Dazu betrachten wir die Funktion $z = f(x, y)$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem:

Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum

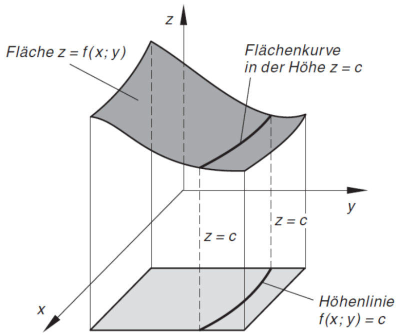
Die Funktion f ordnet jedem Punkt $(x, y) \in D$ in der Ebene einen Wert $z = f(x, y)$ zu, der als Höhenkoordinate verstanden werden kann. Durch die Anordnung der Punkte $(\ x, y, f(x, y)\ )$ im dreidimensionalen Koordinatensystem wird eine über dem Definitionsbereich D liegende Fläche ausgezeichnet:

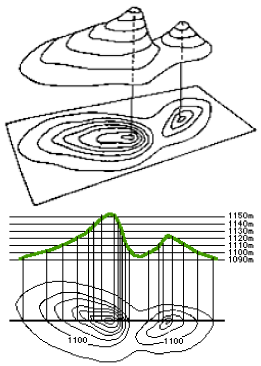




Schnittkurvendiagramm

Wird die Fläche $z = f(x, y)$ bei einer konstanten Höhe $z = \text{const.}$ geschnitten, ergibt sich eine Schnittkurve. Wird diese in die (x, y)-Ebene projiziert, spricht man von einer Höhenlinie bzw. bei der Abbildung von einem Höhenliniendiagramm., wie wir es z.B. von Wanderkarten her kennen. Natürlich kann man auch andere Schnitte als $z = \text{const.}$ (Schnittebene parallel zur (x, y)-Ebene) wählen, z.B. $x = \text{const.}$ (Schnittebene parallel zur (y, z)-Ebene) oder $y = \text{const.}$ (Schnittebene parallel zur (x, z)-Ebene):





Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung In einer Dimension

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big)}{\Delta x}$$

In mehreren Dimensionen
1. Ableitung nach x :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

2. Ableitung nach y : $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

$$z = f(x, y) = 3xy^3 + 10x^2y + 5y + 3y \cdot \sin(5xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 \cdot 1 \cdot y^3 + 10 \cdot 2x \cdot y + 0 + 3y \cdot \cos(5xy) \cdot 5 \cdot 1 \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x \cdot 3y^2 + 10x^2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + (3 \cdot 1 \cdot \sin(5xy) + 3y \cdot \cos(5xy) \cdot 5x \cdot 1)$$

Steigung der beiden Tangenten in $x-$ resp. y-Richtung im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

Linearisierung von Funktionen mit mehreren Variablen

Jacobi-Matrix
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $y = f(x)$ und $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Die Jacobi-Matrix $Df(x)$ enthält sämtliche partiellen Ableitungen 1 . Ordnung von f.

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x) \end{pmatrix}, \quad Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerte Tangentengleichung

$$g(x) = f\left(x^{(0)}\right) + Df\left(x^{(0)}\right) \cdot \left(x - x^{(0)}\right)$$

Beschreibt eine lineare Funktion und es gilt $f(x) \approx g(x)$ in einer Umgebung eines gegebenen Vektors $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)^T \in \mathbb{R}^n$.
Man spricht deshalb auch von der Linearisierung der Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung von $x^{(0)}$ (ein hochgestellter Index in Klammern $x^{(k)}$ bezeichnet wie bisher einen Vektor aus $\mathbb{R}^n$ nach der k-ten Iteration).

Tangentialebene

Für den speziellen Fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T \in \mathbb{R}^2$ ist die Jacobi-Matrix nur ein Zeilenvektor mit zwei Elementen, nämlich:

$$Df\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) & \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \end{pmatrix}$$

Dann liefert die Linearisierung

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)\right) \cdot (\\ &= f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \cdot \left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^{(0)}\right. \end{aligned}$$

die Gleichung der Tangentialebene.

Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt $\overset{\bullet}{P} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)\right)$ an die Bildfläche von $y = f(x_1, x_2)$ angelegten Tangenten.

Beispiel: Linearisieren Sie für $x^{(0)} = (\pi/4, 0, \pi)^T$ der Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$

1. Jacobi-Matrix $\mathrm{Df}(x_1, x_2, x_3)$ bilden

$$f(x_1, x_2, x_3) = \binom{\sin(x_2 + 2x_3)}{\cos(2x_1 + x_2)}, \quad Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & \\ -\sin(2x_1 + x_2) \cdot 2 & -\sin(2x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

2. Startvektor $x^{(0)}$ in Vektorwertige Funktion $f(x)$ und Jacobi-Matrix D $f(x)$ einsetzen

$$f(\pi/4, 0, \pi) = f\left(x^{(0)}\right) = \binom{\sin(0 + 2\pi)}{\cos(2 \cdot \pi/4 + 0)} = \binom{0}{0}, \quad Df\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Verallgemeinerte Tangentengleichung

$$g(x) = \underbrace{\binom{0}{0}}_{f(x_0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{Df(x_0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - \pi/4 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - \pi \end{pmatrix}}_{x - x_0} = \begin{pmatrix} x_2 & +2x_3 & -2\pi \\ -2x_1 & -x_2 & -\pi/2 \end{pmatrix}$$

Nullstellenbestimmung für NGS

Es gibt keine einfachen Methoden, um festzustellen, ob ein nichtlineares Gleichungssystem lösbar ist und wie viele Lösungen es hat. Deshalb entscheidet die Wahl einer «geeigneten Startnäherug» meist über erfolgt oder Misserfolg der eingesetzten numerischen Verfahren.

Newton-Verfahren

????? Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. Es basiert auf der Linearisierung der Funktion um einen Startwert $x^{(0)}$.

- **Vorgehen:**
  1. Startwert $x^{(0)}$ wählen
  2. Linearisierung der Funktion um $x^{(0)}$
  3. Nullstelle der Linearisierung berechnen
  4. Neue Linearisierung um die berechnete Nullstelle
  5. Iteration bis Konvergenz
- **Formel:**

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(Df\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} \cdot f\left(x^{(k)}\right)$$

Quadratisch konvergentes Newton-Verfahren

(Quadratische Konvergenz)

Lösung von $f(x) = 0$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

1. Berechne $f\left(x^{(n)}\right)$ und $Df\left(x^{(n)}\right)$
2. Berechne $\delta^{(n)}$ als Lösung des lin. GS $Df\left(x^{(n)}\right) \cdot \delta^{(n)} = -f\left(x^{(n)}\right)$
3. Setze $x^{(n+1)} := x^{(n)} + \delta^{(n)}$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

(Lineare Konvergenz)

Lösung von $f(x) = 0$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

1. Berechne $f\left(x^{(n)}\right)$ und $Df\left(x^{(0)}\right)$
2. Berechne $\delta^{(n)}$ als Lösung des lin. GS $Df\left(x^{(0)}\right) \cdot \delta^{(n)} = -f\left(x^{(n)}\right)$
3. Setze $x^{(n+1)} := x^{(n)} + \delta^{(n)}$

Gedämpftes Newton-Verfahren

Nur in der Nähe der Nullstelle ist Konvergenz des Verfahrens garantiert!

1. Berechne $f\left(x^{(n)}\right)$ und $Df\left(x^{(n)}\right)$
2. Berechne $\delta^{(n)}$ als Lösung des lin. GS $Df\left(x^{(n)}\right) \cdot \delta^{(n)} = -f\left(x^{(n)}\right)$
3. Finde das minimale $k \in \{0, 1, \ldots, k_{\max}\}$ mit:

$$\left\| f\left(x^{(n)} + \frac{\delta^{(n)}}{2^k}\right) \right\|_2 < \left\| f\left(x^{(n)}\right) \right\|_2$$

Kein minimales k gefunden $\to k = 0$

4. Setze

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} + \frac{\delta^{(n)}}{2^k}$$

Beispiel mit Newton-Verfahren

Gegeben sind zwei Gleichungen und der Start-Vektor $x^{(0)} = (2, -1)^T$

$$1 - x^2 = y^2, \quad \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} = 1$$

Umwandlung in Funktionen $f_1, f_2 = 0$

$$f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2 = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} - 1 = 0$$

1: Vektorwertige Funktion und Jacobi-Matrix bilden

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ \frac{2x-4}{a} & \frac{2y-2}{b} \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \binom{1 - x^2 - y^2}{\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} - 1}$$

1: Start-Vektor $x^{(0)}$ einsetzen

$$Df(2, -1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4/b \end{pmatrix}, \quad f(2, -1) = \binom{-4}{4/b - 1}$$

2: Berechne $\delta^{(0)}$

$$\left(Df\left(x^{(0)}\right) \mid -f\left(x^{(0)}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4/b & -4/b + 1 \end{array}\right) \to \underbrace{\binom{-1}{0}}_{\delta^{(0)}}$$

3: Berechne $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = \underbrace{\binom{2}{-1}}_{x^{(0)}} + \underbrace{\binom{-1}{0}}_{\delta^{(0)}} = \binom{1}{-1}$$