Lineare Algebra

Jil Zerndt
June 2024

Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0)
- $\vec{e}$ = Einheitsvektor (Betrag = 1)
- $-\vec{a}$ = Gegenvektor von $\vec{a}$

Einheitsvektor

$$\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Lineare Abhängigkeit Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ sind linear unabhängig, wenn gilt:

- $0 \cdot \vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + \cdots + 0 \cdot \vec{a_k}$ ist die einzige Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt
- $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \lambda_k \cdot \vec{a_k} \neq \vec{0} \, (\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$

Kollinear (Parallel) Zwei Vektoren sind kollinear, wenn sie auf einer Geraden liegen. Ein Vektor ist ein Vielfaches des anderen.

Komplanar Drei Vektoren sind komplanar, wenn sie in einer Ebene liegen. Die Vektoren sind linear abhängig.

Orthogonal (Senkrecht) Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \text{ orthogonal}$$

Orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $(0 \neq \varphi \neq \frac{\pi}{2})$:

$$\vec{b}_{\perp a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}, \quad |\vec{b}_{\perp a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

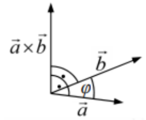
Winkelberechnung

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Vektorprodukt

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

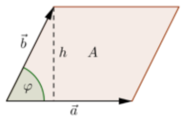
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - & a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - & a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - & a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$



Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

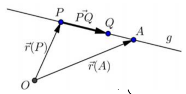
$$A = |\vec{a} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Geraden und Ebenen

Gerade in der Ebene und im Raum

- $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$
- $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$



Der Punkt P heisst Aufpunkt, der Richtungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ von g.

Lage von Geraden im Raum

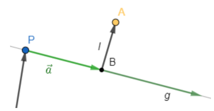
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Abstand Punkt-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{a}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(3|-1)$$

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{r} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 3\lambda \\ 13 + 5\lambda \end{pmatrix}$
2. $0 = \begin{pmatrix} 3 - 1 - 3\lambda \\ -1 - 13 - 5\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = x$
3. Length $= \left| \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ -14 - 5x \end{pmatrix} \right|$

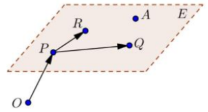


Abstand Gerade-Gerade

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}$
3. Length $= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

Ebene kann durch 3 Punkte festgelegt werden

- Die Vektoren $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ sind komplanar
- $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$
  $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$



Parameterdarstellung der Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$E: \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$
- $2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4}$
- $2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4}$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E: -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Abstand Punkt-Ebene

1. $\overrightarrow{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
2. $0 = \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}$
3. Length $= |\overrightarrow{BA}| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

Geometrische Transformationen

$\mathbb{R}^2$

Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

- Gerade $g : ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g : x + 7y = 0$
- Normiert $g : \frac{1}{\sqrt{50}} x + \frac{7}{\sqrt{50}} y = 0$

$$\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

- auf Gerade $g : ax + by = 0$
- mit $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

- Gerade $g : 2x - y = 0$
- Normiert $g : \frac{2}{\sqrt{5}} x - \frac{1}{\sqrt{5}} y = 0$

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotation

- um den Ursprung
- um Winkel α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scherung

- in x-Richtung um s_1
- in y-Richtung um s_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

R^3

Zentrische Streckung

- in x-Richtung um λ_1
- in y-Richtung um λ_2
- in z-Richtung um λ_3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

- Ebene $E : ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E : x + 2y + 3z = 0$
- Normiert $E : \frac{1}{\sqrt{14}} x + \frac{2}{\sqrt{14}} y + \frac{3}{\sqrt{14}} z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

- Ebene $E : ax + by + cz = 0$
- mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

- Ebene $E : 2x - y + 3z = 0$
- Normiert $E : \frac{2}{\sqrt{14}} x - \frac{1}{\sqrt{14}} y + \frac{3}{\sqrt{14}} z = 0$

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die x, y, z Achsen

$$\text{x:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{y:} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{z:} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die Gerade g

- Gerade $g : \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
- mit $|\vec{b}| = 1$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1 - \cos(\alpha)) & ab(1 - \cos(\alpha)) - b\sin(\alpha) & a\sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) \\ ab(1 - \cos(\alpha)) + b\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1 - \cos(\alpha)) & -b\sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) \\ -a\sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) & b\sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) & \cos(\alpha) + (a^2 + b^2)(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

LGS und Matrizen

Matrizen

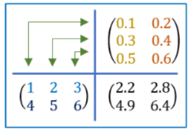
Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten.
- $m \times n$-Matrix
- a_{ij}: Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte

Transponierte Matrix
- A^T: Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Addition und Subtraktion
- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation
- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Matrixmultiplikation $A^{m\times n}$, $B^{k\times n}$
Bedingung: A hat n Spalten und B hat n Zeilen.
Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.
- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$



Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Zeilenstufenform (Gauss)
- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen $\rightarrow$ stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)
Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Rang einer Matrix
Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.
Rang $rg(A)$ einer Matrix $A^{m\times n}$:

$$rg(A) = \text{Anzahl Zeilen - Anzahl Nullzeilen}$$

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$
- Nicht lösbar: $rg(A) \neq rg(A|b)$
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$
- unendlich viele Lösungen: $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen
- Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins
- Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:
- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5 \quad x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3 \quad x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen

Matrizen umformen bestimme die Matrix X:

$$A \cdot X + B = 2 \cdot X$$

- $A \cdot X = 2 \cdot X - B$
- $A \cdot X - 2 \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot X = -B$
- $(A - 2E) \cdot (A - 2E)^{-1} \cdot X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$
- $X = (A - 2E)^{-1} \cdot -B$

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
- A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$

Inverse einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit $det(A) = ad - bc$ NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n\times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow \big(A|E\big) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow \big(E|A^{-1}\big)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

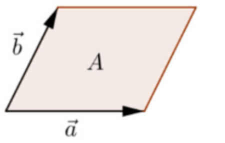
Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Determinante

Geometrische Interpretation der Determinante:
- Fläche im $\mathbb{R}^2$
- Volumen im $\mathbb{R}^3$

welche durch eine Matrix A aufgespannt wird.

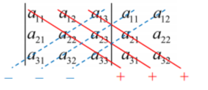


$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$

Determinantenregeln
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär

Determinante einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

Determinante einer 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$



$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$$

Determinante einer $n \times n$-Matrix A

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen
- $|A_{ij}|$ ist die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die entsteht evtl. bsp hier

Lineare Abhängigkeit Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind linear unabhängig
- Zeilen von A sind linear unabhängig
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Vektorräume

Vektorraum Menge V mit zwei Verknüpfungen:
- Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot \vec{a} \in V$
- Nullpunkt: $\vec{0} \in V$

Unterraum Teilmenge U eines Vektorraums V, die selbst ein Vektorraum ist.
- $\vec{0} \in U$
- $\forall \vec{a}, \vec{b} \in U$ gilt $\vec{a} + \vec{b} \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \vec{a} \in U$ gilt $\lambda \cdot \vec{a} \in U$

Basis und Dimension

Linearer Span

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ in einem reellen Vektorraum V.

$$\text{span}\left(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right) = \left\{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{b_n} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}$$

Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n-$ Matrix B
Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ sind linear unabhängig
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \overrightarrow{0}$
3. Es gilt $\text{rg}(B) = n$
   Eine Teilmenge U eine Vektorraums V heisst Unterraum von V, wenn U selbst auch ein Vektorraum ist.

Erzeugendensystem Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum aufspannen.
Eine Menge $\left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ von Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ im Vektorraum V heisst Erzeugendensystem von V, wenn gilt:

$$V = \text{span}\left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right)$$

Schreibt man die Vektoren $\overrightarrow{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n$ - Matrix B.
Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\overrightarrow{b_k}$ bilden ein Erzeugendensystem $\mathbb{R}^m$
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
3. Es gilt $rg(B) = m$

Dimensionen Für jeden reellen Vektorraum V gilt: Jede Basis von V hat gleich viele Elemente.
Die Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden, heisst Dimension von $V = \dim(V)$.

- Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente $\rightarrow \dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$

Basis Eine Menge $B = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ von Vektoren $\vec{b}_k$ im Vektorraum V heisst Basis von V, wenn gilt:

- $B = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right\}$ ist ein Erzeugendensystem von V
- Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ sind linear unabhängig

Basis und Dimensionen Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Vektoren $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Basiswechsel Beliebige Basis $B \rightarrow$ Standard-Basis S

$$B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S\right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + a_n \cdot \overrightarrow{b_n}$$

$$B = \left\{\binom{3}{1}_S ; \binom{-1}{0}_S\right\}, \vec{a} = \binom{2}{3}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \binom{3}{1} + 3 \cdot \binom{-1}{0} = \binom{3}{2}_S$$

Basiswechsel Standard-Basis $S \rightarrow$ Beliebige Basis B

$$B = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}\right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{\binom{1}{1}_S ; \binom{-1}{0}_S\right\}, \quad \vec{a} = \binom{-7}{-4}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \binom{a_1}{a_2}_B = \binom{-7}{-4}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{a_1}{a_2}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{-7}{-4}_S$$

$$\binom{a_1}{a_2}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \binom{-7}{-4}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \binom{-4}{3}_B$$

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heisst linear, wenn für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b})$
- $f(\lambda \cdot \overrightarrow{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{a}) \cdot f(\vec{b})$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Addition von Skalaren: $\lambda + \vec{a}$
- Potenzieren: $\vec{a}^2$
- Cosinus: $\cos(\vec{a})$

Überprüfung der Linearität

Für eine Abbildung $f: V \rightarrow W$, $f(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x_1} \cdot \vec{x_2}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{a}) \cdot f(\vec{b})$
- $f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \binom{x_1}{x_2} \rightarrow \binom{x_1 + 2x_2}{x_2}$

- $f\binom{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} = \binom{x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2)}{x_2 + y_2}$
- $f\binom{x_1}{x_2} + f\binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2}{x_2 + y_2} \rightarrow OK$

... usw.

Bild im(A) einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\text{im}(A) = \text{span}\left(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\right) = \left\{\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

Für jede $m \times n-$ Matrix A gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = rg(A) \text{ und } \dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = n$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{im}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu, v \in \mathbb{R}\right\}$$

Kern ker(A) einer $m \times n$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$. Der Kern $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Bild und Kern Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A. Dann gilt:

- Die Spalten von A ergeben eine Basis des Bildes von f
- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{0}$ ist der Kern von f

Verknüpfungen Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f : U \to V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g : V \to W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\overbrace{\begin{array}{ccccc} U & \overset{f}{\rightrightarrows} & V & \overset{g}{\rightrightarrows} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}}^{g \circ f}$$

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Abbildungsmatrix Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ - Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \left(f(\vec{e_1}) ... f(\vec{e_n})\right) = \left(f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ... f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix und Basiswechsel
Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \left\{ \vec{b_1}; \dots; \vec{b_n} \right\}, W \text{ mit Basis } C = \left\{ \vec{c_1}; \dots; \vec{c_n} \right\}$$

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ lässt sich durch eine $m \times n$ - Matrix ${}_C A_B$ darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_C A_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C :

$${}_C A_B = {}_C \left(\left(f\left(\vec{b_1}\right) \right)_C \left(f\left(\vec{b_2}\right) \right)_C \quad \cdots \quad \left(f\left(\vec{b_n}\right) \right)_C \right)_B$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatentransformation
Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ für den Basiswechsel von S nach B

- Die Matrix ${}_B T_S$ ist die Inverse von ${}_S T_B$: ${}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\text{lineare Abbildung } f"] & & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_S A_S"] \arrow[d, "{}_B T_S"'] & & f(\vec{x}) \\ \vec{x} \arrow[rr, mapsto, "{}_B A_B"'] & & f(\vec{x}) \arrow[u, "{}_S T_B"'] \end{tikzcd}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_B T_C = ({}_C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vollständiges Beispiel
Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C A_B = {}_C \left(\left(f \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)_C \left(f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)_C \right)_B$$

$$\left(f \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)_C = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(f \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)_C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$