Höhere Mathematik

Jil Zerndt, Lucien Perret
January 2025

Kochrezepte und Beispiele

Rechnerarithmetik

Maschinenzahlen analysieren

1. Anzahl Maschinenzahlen bestimmen:
   - Basis B identifizieren
   - Mantissenlänge n bestimmen
   - Exponentenlänge l bestimmen
   - Berechnen: $2 \cdot (B-1) \cdot B^{n-1} \cdot (B^l - 1)$
2. Darstellungsbereich bestimmen:
   - Größte Zahl: $x_{max} = (1 - B^{-n})B^{e_{max}}$
   - Kleinste positive Zahl: $x_{min} = B^{e_{min}-1}$
3. Maschinengenauigkeit berechnen:
   - Allgemein: $eps = \frac{B}{2}B^{-n}$
   - Dezimal: $eps = 5 \cdot 10^{-n}$

Maschinenzahlen analysieren Gegeben: 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligem Exponenten im Dualsystem.

Lösung:

1. Basis $B = 2$, $n = 15$, $l = 5$
2. Anzahl verschiedener Zahlen:
   - Pro Stelle: $B - 1 = 1$ mögliche Ziffern
   - Mantisse: $(B-1)B^{n-1} = 2^{14}$ Kombinationen
   - Exponent: $B^l = 2^5 = 32$ Kombinationen
   - Mit Vorzeichen: $2 \cdot 2^{14} \cdot 31 = 1\,015\,808$ Zahlen
3. Maschinengenauigkeit: $eps = \frac{2}{2}2^{-15} = 2^{-15} \approx 3.052 \cdot 10^{-5}$

Konditionierung analysieren

1. Ableitung $f'(x)$ bestimmen
2. Konditionszahl berechnen:

$$K = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

3. Fehler abschätzen:
   - Absolut: $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$
   - Relativ: $\frac{|f(\tilde{x})-f(x)|}{|f(x)|} \approx K \cdot \frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$
4. Konditionierung beurteilen:
   - $K \leq 1$: gut konditioniert
   - $K > 1$: schlecht konditioniert
   - $K \gg 1$: sehr schlecht konditioniert

Konditionierung berechnen Für $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $x_0 = 10^{-8}$:

Lösung:

1. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $K = \frac{|x \cdot x|}{|\sqrt{1+x^2} \cdot (1+x^2)|} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$
3. Für $x_0 = 10^{-8}$:
   - $K(10^{-8}) \approx 10^{-16}$ (gut konditioniert)
   - Relativer Fehler wird um Faktor 10^{-16} verkleinert

Auslöschung erkennen und vermeiden

1. Auslöschung identifizieren:
   - Subtraktion ähnlich großer Zahlen
   - Viele signifikante Stellen verschwinden
2. Alternative Berechnungen:
   - Algebraische Umformungen
   - Andere mathematische Identitäten
   - Taylorentwicklung für kleine Werte
3. Beispiele für bessere Formeln:
   - $\sqrt{1+x^2} - 1 \to \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$
   - $1 - \cos(x) \to 2\sin^2(x/2)$
   - $\ln(1+x) \to x - \frac{x^2}{2}$ für kleine x

Auslöschung vermeiden Berechnen Sie $\sqrt{1+10^{-16}} - 1$ mit 16 Dezimalstellen.

Lösung:

1. Direkte Berechnung:
   - $\sqrt{1+10^{-16}} \approx 1.0000000000000000$
   - $\sqrt{1+10^{-16}} - 1 \approx 0.0000000000000000$
   - Alle signifikanten Stellen gehen verloren
2. Alternative Formel:
   - $\frac{10^{-16}}{\sqrt{1+10^{-16}}+1} \approx 5 \cdot 10^{-17}$
   - Korrekte signifikante Stellen bleiben erhalten

Nullstellenprobleme

Nullstellenproblem systematisch lösen

1. Existenz prüfen:
   - Intervall $[a,b]$ identifizieren
   - Vorzeichenwechsel prüfen: $f(a) \cdot f(b) < 0$
   - Stetigkeit von f sicherstellen
2. Verfahren auswählen:
   - Fixpunktiteration: wenn einfache Umformung $x = F(x)$ möglich
   - Newton: wenn $f'(x)$ leicht berechenbar
   - Sekantenverfahren: wenn $f'(x)$ schwer berechenbar
3. Konvergenz sicherstellen:
   - Fixpunktiteration: $|F'(x)| < 1$ im relevanten Bereich
   - Newton: $|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}| < 1$ im relevanten Bereich
   - Geeigneten Startwert wählen
4. Abbruchkriterien festlegen:
   - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
   - Iterationsschritte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
   - Maximale Iterationszahl

Verfahrensauswahl Finden Sie die positive Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Vorgehen:

1. Existenz:
   - $f(2) = -1 < 0$ und $f(3) = 16 > 0$
   - $\Rightarrow$ Nullstelle in $[2,3]$
2. Verfahrenswahl:
   - $f'(x) = 3x^2 - 2$ leicht berechenbar
   - $\Rightarrow$ Newton-Verfahren geeignet
3. Konvergenzcheck:
   - $f'(x) > 0$ für $x > 0.82$
   - $f''(x) = 6x$ monoton
   - $\Rightarrow$ Newton-Verfahren konvergiert

Fixpunktiteration anwenden

1. Umformung vorbereiten:
   - $f(x) = 0$ in $x = F(x)$ umformen
   - Verschiedene Umformungen testen
   - Form mit kleinstem $|F'(x)|$ wählen
2. Konvergenznachweis:
   - Intervall $[a,b]$ bestimmen mit $F([a,b]) \subseteq [a,b]$
   - $\alpha = \max_{x\in[a,b]} |F'(x)|$ berechnen
   - Prüfen ob $\alpha < 1$
3. Fehlerabschätzung:
   - A-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$
   - A-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$
4. Iterationszahl bestimmen:

$$n \geq \frac{\ln(\frac{\text{tol}(1-\alpha)}{|x_1-x_0|})}{\ln \alpha}$$

Fixpunktiteration Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ mittels Fixpunktiteration.

Lösung:

1. Umformung: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{x^2+3}{2x} =: F(x)$
2. Konvergenznachweis für $[1,2]$:
   - $F'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$
   - $|F'(x)| \leq \alpha = 0.25 < 1$ für $x \in [1,2]$
   - $F([1,2]) \subseteq [1,2]$
3. Für Genauigkeit 10^{-6}:
   - $|x_1 - x_0| = |1.5 - 2| = 0.5$
   - $n \geq \frac{\ln(10^{-6} \cdot 0.75/0.5)}{\ln 0.25} \approx 12$

Newton-Verfahren anwenden

1. Vorbereitung:
   - $f'(x)$ bestimmen
   - Startwert x_0 nahe der Nullstelle wählen
   - $f'(x_0) \neq 0$ prüfen
2. Iteration durchführen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Konvergenz prüfen:
   - $|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}| < 1$ im relevanten Bereich
   - Quadratische Konvergenz erwarten
4. Fehlerabschätzung:
   - $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ falls
   - $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$

Newton vs Sekanten

Bestimmen Sie $\sqrt{2}$ mit beiden Verfahren.

Newton-Verfahren:

$f(x) = x^2 - 2$
- $f'(x) = 2x$
- $x_0 = 1.5$
- $x_1 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2 \cdot 1.5} = 1.4167$
- $x_2 = 1.4167 - \frac{1.4167^2-2}{2 \cdot 1.4167} = 1.4142$

Sekantenverfahren:
- $x_0 = 1, x_1 = 2$
- $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 1.5$
- $x_3 = 1.5 - \frac{1.5-2}{1.5^2-2} 1.5 = 1.4545$
- $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545-1.5}{1.4545^2-2} 1.4545 = 1.4143$

Vergleich:
- Newton: Schnellere Konvergenz (quadratisch)
- Sekanten: Keine Ableitungsberechnung nötig
- Beide erreichen 10^{-4} Genauigkeit in 4-5 Schritten

Typische Prüfungsaufgaben lösen

1. Theorieaufgaben:
   - Konvergenzordnungen vergleichen
   - Konvergenzbeweise durchführen
   - Fehlerabschätzungen herleiten
2. Praktische Aufgaben:
   - Existenz von Nullstellen nachweisen
   - Geeignetes Verfahren auswählen
   - 2-3 Iterationsschritte durchführen
   - Konvergenzgeschwindigkeit vergleichen
3. Implementierungsaufgaben:
   - Verfahren in Python implementieren
   - Abbruchkriterien einbauen
   - Konvergenzverhalten visualisieren

Lineare Gleichungssysteme

Systematisches Vorgehen bei LGS

1. Eigenschaften der Matrix analysieren:
   - Diagonaldominanz prüfen
   - Konditionszahl berechnen oder abschätzen
   - Symmetrie erkennen
2. Verfahren auswählen:
   - Direkte Verfahren: für kleinere Systeme
   - Iterative Verfahren: für große, dünnbesetzte Systeme
   - Spezialverfahren: für symmetrische/bandförmige Matrizen
3. Implementation planen:
   - Pivotisierung bei Gauss berücksichtigen
   - Speicherbedarf beachten
   - Abbruchkriterien festlegen

Verfahrensauswahl

Gegeben ist das LGS $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analyse:
- Matrix ist symmetrisch
- Streng diagonaldominant
- Dünnbesetzt (tridiagonal)

Verfahrenswahl:
- Gauss: möglich wegen kleiner Dimension
- Gauss-Seidel: konvergiert wegen Diagonaldominanz
- LR-Zerlegung: effizient wegen Bandstruktur

Gauss-Algorithmus mit Pivotisierung

1. Vorbereitung:
   - Erweiterte Matrix $(A|b)$ aufstellen
   - Pivotisierungsstrategie wählen
2. Elimination:
   - Für jede Spalte i:
   - Pivotelement in Spalte i bestimmen
   - Zeilenvertauschung falls nötig
   - Nullen unterhalb erzeugen
3. Rückwärtseinsetzen:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

4. Kontrolle:
   - Residuum $\|Ax - b\|$ berechnen
   - Pivotisierungsschritte protokollieren

Gauss mit Pivotisierung

Lösen Sie $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Erste Spalte: Pivot $a_{31} = 4 \rightarrow$ Z1 $\leftrightarrow$ Z3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Eliminationsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 2.5 & 0.75 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.2 \end{array}\right)$$

3. Rückwärtseinsetzen:

$$x_3 = 0.2/1.5 = \frac{2}{15}$$

$$x_2 = (2 + 1.5 \cdot \frac{2}{15})/5 = 0.5$$

$$x_1 = (0 + 2 \cdot 0.5 - 1 \cdot \frac{2}{15})/4 = 0.2$$

LR-Zerlegung durchführen

1. Zerlegung bestimmen:
   - Gauss-Schritte durchführen
   - Eliminationsfaktoren in L speichern
   - Resultierende Dreiecksmatrix ist R
2. System lösen:
   - Vorwärtseinsetzen: $Ly = b$
   - Rückwärtseinsetzen: $Rx = y$
3. Bei Pivotisierung:
   - Permutationsmatrix P erstellen
   - $PA = LR$ speichern
   - $Ly = Pb$ lösen

LR-Zerlegung Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Eliminationsfaktoren:
   - $l_{21} = 4/2 = 2$
   - $l_{31} = -2/2 = -1$
   - $l_{32} = 1/(-4) = -0.25$
2. Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}$$

Iterative Verfahren implementieren

1. Matrix zerlegen:
   - $A = L + D + R$ für Jacobi
   - $A = (L + D) + R$ für Gauss-Seidel
2. Konvergenz prüfen:
   - Diagonaldominanz
   - Spektralradius der Iterationsmatrix
3. Iteration durchführen:
   - Jacobi: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$
   - Gauss-Seidel: $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Rx^{(k)} + (D + L)^{-1}b$
4. Abbruchkriterien:
   - Residuum: $\|Ax^{(k)} - b\| < \epsilon$
   - Änderung: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$
   - Maximale Iterationen

Jacobi vs Gauss-Seidel Gegeben sei das System:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vergleich nach 4 Iterationen:

k	Jacobi	Gauss-Seidel
1	0.250	0.250
2	0.281	0.297
3	0.295	0.299
4	0.298	0.300

Beobachtungen:

- Gauss-Seidel konvergiert schneller
- Beide Verfahren konvergieren monoton
- Konvergenz gegen $x_1 = 0.3$

Komplexe Zahlen und Eigenwertprobleme

Komplexe Zahlen umrechnen

1. Normalform $\leftrightarrow$ Polarform:
   - Betrag: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
   - Winkel: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ (Quadrant beachten!)
   - Normalform: $z = x + iy$
   - Polarform: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
2. Rechenoperationen:
   - Addition: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
   - Multiplikation: $r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
   - Division: $\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
   - n-te Potenz: $r^n e^{in\varphi}$

Komplexe Operationen Gegeben $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 - i$:

Umrechnung in Polarform:

- $z_1 : r_1 = \sqrt{2}, \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- $z_2 : r_2 = \sqrt{5}, \varphi_2 = -\arctan(\frac{1}{2})$

Berechnungen:

- $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(1 + i) = (2 + 1) + i(2 - 1) = 3 + i$
- $z_1^3 = (\sqrt{2})^3(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$

Eigenwerte bestimmen

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:
   - $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ berechnen
   - Auf Standardform bringen
2. Nullstellen bestimmen:
   - Quadratische Formel für $n = 2$
   - Cardano-Formel für $n = 3$
   - Numerische Verfahren für $n > 3$
3. Vielfachheiten bestimmen:
   - Algebraische Vielfachheit: Nullstellenordnung
   - Geometrische Vielfachheit: $n - \text{rang}(A - \lambda I)$

Charakteristisches Polynom Bestimmen Sie die Eigenwerte von:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Determinante entwickeln:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)^3 - 2(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

3. Nullstellen:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Eigenvektoren bestimmen

1. Für jeden Eigenwert λ:
   - $(A - \lambda I)x = 0$ aufstellen
   - Homogenes LGS lösen
   - Lösungsvektor normieren
2. Bei mehrfachen Eigenwerten:
   - Geometrische Vielfachheit bestimmen
   - Basis des Eigenraums finden
3. Kontrolle:
   - $Ax = \lambda x$ überprüfen
   - Orthogonalität bei symmetrischen Matrizen
   - Linear unabhängig?

Eigenvektoren Bestimmen Sie die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$ der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. $(A - 2I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Homogenes System lösen:
   - $x_2 = 0$ (aus 1. Zeile)
   - x_1, x_3 frei wählbar
3. Basis des Eigenraums:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QR-Algorithmus anwenden

1. Initialisierung:
   - $A_0 := A$
   - $Q_0 := I_n$
2. Iteration:
   - QR-Zerlegung: $A_k = Q_k R_k$
   - Neue Matrix: $A_{k+1} = R_k Q_k$
   - Update: $P_{k+1} = P_k Q_k$
3. Abbruch wenn:
   - Subdiagonalelemente klein
   - Diagonalelemente konvergieren
   - Maximale Iterationen erreicht

QR-Iteration Führen Sie eine QR-Iteration durch für:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. QR-Zerlegung von A:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Neue Matrix:

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

3. Konvergenz nach mehreren Iterationen gegen:

$$A_\infty \approx \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{pmatrix}$$

   mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vektoriteration durchführen

1. Voraussetzungen prüfen:
   - Matrix diagonalisierbar
   - $|\lambda_1| > |\lambda_2|$
2. Iteration:
   - $w^{(k)} = Av^{(k)}$
   - $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|}$
   - $\lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T A v^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$
3. Konvergenz:
   - $v^{(k)} \to$ Eigenvektor zu $|\lambda_1|$
   - $\lambda^{(k)} \to |\lambda_1|$

Von-Mises-Iteration Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert von:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Start mit $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Erste Iteration:
   - $w^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
   - $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $\lambda^{(1)} = 4$
3. Ergebnis:
   - Eigenvektor bereits gefunden
   - Eigenwert $\lambda = 4$ ist korrekt

Typische Prüfungsaufgaben

Rechnerarithmetik Sie arbeiten auf einem Rechner mit 5-stelliger Gleitpunktarithmetik im Dualsystem. Für den Exponenten haben Sie zusätzlich zum Vorzeichen 3 Stellen zur Verfügung.

Aufgaben:

1. Was ist der grösste Exponent, den Sie speichern können?
2. Welches ist die kleinste darstellbare positive Zahl, welche die grösste? Approximieren Sie diese durch normierte 4-stellige Maschinenzahlen im Dezimalsystem.
3. Vergleichen Sie Ihren Rechner mit dem Ihres Kollegen, der mit einem 2-stelligen Hexadezimalsystem arbeitet. Wer rechnet genauer?

Konditionierung Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

mit ihrer Ableitung

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

und $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmass.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Konditionszahl von $f(x)$ in Abhängigkeit von x.
2. Berechnen Sie näherungsweise, mit welchem absoluten Fehler $x_0 = \pi/3$ höchstens behaftet sein darf, damit der relative Fehler von $f(x_0)$ höchstens 10% beträgt.
3. Bestimmen Sie numerisch das Verhalten der Konditionszahl von $f(x)$ für $x \to 0$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x = 0$ aussagt.
4. Plotten Sie die Konditionszahl von $f(x)$ halblogarithmisch im Bereich $x \in [-2\pi, 3\pi]$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ aussagt.

Nullstellenprobleme Gesucht ist der Schnittpunkt der Funktionen $g(x) = \exp(x)$ und $h(x) = \sqrt{x+2}$.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0.5$ den Schnittpunkt bis auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-7} genau.
2. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt der Iteration

   $$x_{k+1} = \ln(\sqrt{x_k + 2})$$

   gerade dem Schnittpunkt von $g(x)$ und $h(x)$ entspricht, und dass die Iteration für jeden Startwert x_0 im Intervall $[0.5, 1.5]$ konvergiert. Prüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
   Der Startwert sei $x_0 = 0.5$. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Abschätzung die Anzahl der benötigten Schritte, wenn der absolute Fehler der Näherung kleiner als 10^{-7} sein soll.

Lineare Gleichungssysteme Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei ε eine reelle Zahl ist.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung der Matrix A für ein allgemeines $\varepsilon \neq 0$.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizen L und R aus (a) die Lösung von $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ (Maschinengenauigkeit). Schreiben Sie dazu ein Python-Skript und verwenden Sie numpy.linalg.solve().
3. Lösen Sie nun das lin. Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ direkt mit numpy.linalg.solve(). Weshalb erhalten Sie nicht das gleiche Resultat wie bei b)? Begründen Sie!

Iterative Verfahren Mit Hilfe des Jacobiverfahrens soll die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer n-dimensionalen tridiagonalen Systemmatrix A bestimmt werden. Die Matrix und die rechte Seite sind definiert mit $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & & & \\ -1 & c & -1 & & \\ & -1 & c & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Matrix B für $n = 6$, $c = 4.0$ und daraus $\|B\|_\infty$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt $\|B\|_\infty < 1$?
2. Welche Anzahl Iterationen benötigt man maximal, um eine numerische Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-3} in der ∞-Norm zu erhalten? (a priori Abschätzung)
3. Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe einer Implementierung des Jacobiverfahrens. Führen Sie die vorher bestimmte Anzahl von Iterationen aus!
4. Bestimmen Sie die Genauigkeit der errechneten Lösung mit Hilfe der a posteriori Abschätzung?

Eigenwerte Gegeben ist die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 30 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte von A, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.
2. Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix T, deren Spalten bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen. Es soll dann also gelten: $D = T^{-1}AT$.
3. Bestimmen Sie mit Hilfe der von Mises Iteration numerisch den betragsmässig grössten Eigenwert von A, sowie einen zugehörigen Eigenvektor. Iterieren Sie dabei 40 Mal, ausgehend vom Startvektor $v = (1, 0)^T$. Stellen Sie den absoluten Fehler der numerischen Näherung des Eigenwertes in Abhängigkeit der Iterationszahl halblogarithmisch dar.

Rechnerarithmetik und Gleitpunktdarstellung Gegeben seien zwei verschiedene Rechenmaschinen. Die erste davon arbeite mit einer 46-stelligen Binärarithmetik und die zweite einer 14-stelligen Dezimalarithmetik.

Aufgaben:

1. Welche Maschine rechnet genauer? (Mit Begründung!)
2. Stellen Sie die Zahl $x = \sqrt{3}$ korrekt gerundet als Maschinenzahl $\tilde{x}$ in einer Fliesskomma-Arithmetik mit 5 Binärstellen dar, und geben Sie den relativen Fehler von $\tilde{x}$ im Dezimalformat an.

Konditionierung Gegeben ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

Aufgabe:

Das Argument x sei mit einem betragsmässigen relativen Fehler von bis zu 5% behaftet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kondition alle x, für welche unter dieser Voraussetzung der Betrag des relativen Fehlers des Funktionswertes $y = f(x)$ ebenfalls höchstens 5% wird.

LGS und Kondition Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der exakten Lösung $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ der Matrix A in der 1-Norm.
2. Gegeben ist nun die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie die entsprechende Lösung $\tilde{x}$.
3. Bestimmen Sie für die Lösung aus b) den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_1}{\|x\|_1}$, und vergleichen Sie diesen mit der Abschätzung aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Fixpunktiteration Die Gleichung $2^x = 2x$ hat eine Lösung im Intervall $I = [0.5, 1.5]$ für die zugehörige Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x_k}, \quad x_0 = 1.5$$

Aufgaben:

1. Überprüfen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und mit obigem Intervall, dass die angegebene Fixpunktiteration tatsächlich konvergiert.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Fehlerabschätzung, wieviele Schritte es höchstens braucht, um einen absoluten Fehler von maximal 10^{-8} garantieren zu können.

Iterative LGS-Lösung Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & a & 20 \\ 5 & 20 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ 5a \end{pmatrix}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliger Parameter.

Aufgaben:

1. Welche Bedingung muss a erfüllen, damit A diagonal dominant ist und also das Jacobi-Verfahren konvergiert?
2. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$.
3. Bestimmen Sie für $a \geq 60$ mittels der a priori Abschätzung und bezüglich der ∞-Norm die Anzahl Iterationsschritte $n = n(a)$ als Funktion von a, um eine vorgegebene Fehlerschranke ϵ zu erreichen.

Bakterienpopulation Die folgende Abbildung zeigt den gemessenen Verlauf einer Bakterienpopulation $g(t)$ (Einheit: Mio. Bakterien) als Funktion der Zeit t (Einheit: Stunden).
Es wird vermutet, dass sich $g(t)$ darstellen lässt als Funktion mit den drei (vorerst unbekannten) Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ gemäss

$$g(t) = a + b \cdot e^{c \cdot t}.$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie eine Näherung für die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie 3 Messpunkte $(t_i, g(t_i))$ (für $i = 1, 2, 3$) aus der Abbildung herauslesen, das zugehörige Gleichungssystem aufstellen und für das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme die erste Iteration angeben (inkl. Jacobi-Matrix und $\delta^{(0)}$). Verwenden Sie als Startvektor $(1, 2, 3)^T$.
2. Bestimmen Sie mit Ihrer Näherung aus a) den Zeitpunkt t, an dem die Population auf 1600 [Mio. Bakterien] angewachsen ist. Verwenden Sie dafür das Newton-Verfahren mit einem sinnvollen Startwert t_0 und einer Genauigkeit von $|t_n - t_{n-1}| < 10^{-4}$. Geben Sie die verwendete Iterationsgleichung explizit an.
   Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, so verwenden Sie $g(t) = 5 + 3 \cdot e^{4t}$.

Chilli-Festival Für ein Chilli-Festival werden BBQ-Saucen in den drei verschiedenen Schärfegraden sehr scharf (SS), scharf (S) und mild (M) benötigt, zudem sollen drei verschiedene Hersteller dem Publikum zur Blindverkostung vorgelegt werden können. Die entsprechenden Marketing Pakete der drei Hersteller reichen für die folgende Anzahl Portionen:

Hersteller	SS	S	M
Blair's Extreme	240	60	60
Mad Dog	120	180	90
Dave's Gourmet	80	170	500

Aus früheren Jahren weiss man, dass das Publikum die verschiedenen Schärfegrade ungefähr im Verhältnis 3/4/5 konsumiert und ca. 12'000 Portionen erwartet werden. Der Einfachheit halber rechnet das Komitee deshalb mit folgender Portionierung: SS 3080, S 4070, M 5030.

Aufgaben:

1. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.
2. Wie viele Marketing Pakete von den einzelnen Herstellern werden benötigt um den voraussichtlichen Bedarf abzudecken, ohne Überschuss zu generieren? Berechnen Sie die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.
3. Wie hoch ist der absolute und relative Fehler, wenn die Besucherzahlen die Erwartung um 5% übersteigt?
4. Was können Sie über die Konditionierung des Problems sagen?

Nichtlineares Gleichungssystem Das nichtlineare Gleichungssystem

$$1 - x^2 = y^2$$

$$\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} = 1$$

soll mit dem Newton-Verfahren mit $x^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})^T = (2, -1)^T$ gelöst werden.

Aufgaben:

1. Führen Sie den ersten Iterationsschritt manuell aus und bestimmen Sie $x^{(1)}$.
2. Bestimmen Sie die Näherungslösung mit MATLAB für $a = 2$ und $b = 4$ auf $\|f(x^{(k)})\|_\infty < 10^{-8}$ genau.
3. Wie viele Lösungen besitzt das Gleichungssystem aus b) insgesamt? Begründen Sie Ihre Antwort, z.B. mit einem geeigneten Plot.

Elektrischer Widerstand Sie messen den Gesamtwiderstand von 3 verschiedenen, in Serie geschalteten Widerstände. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der jeweiligen Widerstände R_i:

$$67 = 1R_1 + 3R_2 + 7R_3$$

$$21 = 1R_3 + 15R_1$$

$$44 = 1R_2 + 6R_3$$

Aufgaben:

1. Konvertieren Sie die Gleichung in die Form: $y = Ax$ und zerlegen Sie die Matrix A zur Lösung mit dem Gauss-Seidel-Verfahren in die Form: $A = L + R + D$. Schreiben Sie alle Matrizen (A, L, R, D) auf!
2. Implementieren Sie das Gauss-Seidel-Verfahren in MATLAB und berechnen Sie die ersten 5 Iterationsschritte mit dem Startvektor $\vec{x}_0 = \vec{0}$. Geben Sie die Iterationsschritte entweder im MATLAB aus oder schreiben Sie diese auf das Blatt.
3. Was ist der Vorteil eines iterativen Lösungsverfahrens wie Gauss-Seidel gegenüber direkten Lösungsverfahren?

Gleitpunktarithmetik

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Maschinenzahlen auf einem Rechner, der 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet.
2. Geben Sie die Maschinengenauigkeit einer Rechenmaschine an, die mit 16-stelliger Dezimalarithmetik arbeitet.

Nichtlineare Gleichung mit zwei Methoden Für die Gleichung

$$x^2 \cos(x) = 1$$

sind mit $x_0 = 1$ der erste Schritt des Newton-Verfahrens sowie des Sekantenverfahrens durchzuführen.

Aufgabe:

1. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt für beide Verfahren. Für das Sekantenverfahren ist zusätzlich $x_{-1} = 0$ gegeben.
2. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und diskutieren Sie mögliche Vor- und Nachteile der beiden Verfahren.

Matrix-Eigenwerte Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.
2. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert ist und bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.
3. Zeigen Sie, dass die Matrix A drei reelle Eigenwerte besitzt. Geben Sie diese an.
4. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit.

QR-Zerlegung und Eigenwerte Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Führen Sie drei Schritte des QR-Verfahrens durch.
2. Was beobachten Sie bezüglich der Konvergenz?
3. Vergleichen Sie die Diagonalelemente der resultierenden Matrix mit den tatsächlichen Eigenwerten von A.

Additional Examples

Rechnerarithmetik

Werteberechnung ausführlich Gegeben sei die Maschinenzahl zur Basis $B = 2$:

$$x = \underbrace{0.1101}_{n=4} \cdot \underbrace{2_2^{101}}_{l=3}$$

1. Normalisierung prüfen:

- $m_1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ normalisiert

2. Exponent berechnen:

$$\hat{e} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$= 4 + 0 + 1 = 5$$

3. Wert berechnen:

$$\hat{\omega} = 1 \cdot 2^{5-1} + 1 \cdot 2^{5-2} + 0 \cdot 2^{5-3} + 1 \cdot 2^{5-4}$$
$$= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$$
$$= 16 + 8 + 0 + 2$$
$$= 26$$

Also ist $x = 26$

Weitere Beispiele

1. Basis 10: $0.3141 \cdot 10^2$
   - Normalisiert, da $m_1 = 3 \neq 0$
   - $\hat{e} = 2$
   - $\hat{\omega} = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} = 31.41$
2. Basis 16 (hex): $0.A5F \cdot 16^3$
   - Normalisiert, da $m_1 = A = 10 \neq 0$
   - $\hat{e} = 3$
   - $\hat{\omega} = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 2655$

Werteberechnung Berechnung einer Zahl zur Basis B=2:

$$\underbrace{0.1011}_{n=4} \cdot \underbrace{2^3}_{l=1}$$

1. Exponent: $\hat{e} = 3$
2. Wert: $\hat{\omega} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$ $= 4 + 0 + 1 + 0.5 = 5.5$

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Fixpunktiteration Nullstellen von $p(x) = x^3 - x + 0.3$
Fixpunktgleichung: $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$

1. $F'(x) = 3x^2$ steigt monoton
2. Für $I = [0, 0.5]$: $F(0) = 0.3 > 0$, $F(0.5) = 0.425 < 0.5$
3. $\alpha = \max_{x\in[0,0.5]} |3x^2| = 0.75 < 1$
4. Konvergenz für Startwerte in $[0, 0.5]$ gesichert

Newton-Verfahren Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ Nullstellenproblem: $f(x) = x^3 - 2$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2$, Startwert $x_0 = 1$

1. $x_1 = 1 - \frac{1^3-2}{3\cdot 1^2} = 1.333333$
2. $x_2 = 1.333333 - \frac{1.333333^3-2}{3\cdot 1.333333^2} = 1.259921$
3. $x_3 = 1.259921 - \frac{1.259921^3-2}{3\cdot 1.259921^2} = 1.259921$

Quadratische Konvergenz sichtbar durch schnelle Annäherung an $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$

Numerische Lösung von LGS

Pivotisierung in der Praxis Betrachten Sie das System:

$$\begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ohne Pivotisierung:

Division durch 0.001 führt zu großen Rundungsfehlern:

$$x_1 \approx 1000 \cdot (1 - x_2)$$

Mit Pivotisierung:

Nach Zeilenvertauschung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Liefert stabile Lösung: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

LR-Zerlegung mit Pivotisierung Gegeben sei das System:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Erste Spalte

Max Element in 1. Spalte: $|a_{21}| = 3$, tausche Z1 und Z2:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminationsfaktoren: $l_{21} = \frac{1}{3}$, $l_{31} = 0$
Nach Elimination:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zweite Spalte

Max Element: $|a_{32}| = 4$, tausche Z2 und Z3:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminationsfaktor: $l_{32} = -\frac{1}{6}$
Nach Elimination:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Endergebnis

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

1. $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $Ly = Pb$: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $Rx = y$: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

Umgang mit Systemen mit freien Variablen

1. Vorgehensweise
   - Matrix auf Stufenform bringen
   - Freie Variablen identifizieren (Nullspalten)
   - Basislösung berechnen
   - Allgemeine Lösung parametrisch aufstellen
2. Interpretation
   - Rang der Matrix bestimmen
   - Lösbarkeit prüfen
   - Dimension des Lösungsraums bestimmen
   - Spezielle Lösungen generieren
3. Sonderfälle beachten
   - Unlösbare Systeme erkennen
   - Abhängige Gleichungen identifizieren
   - Numerische Genauigkeit berücksichtigen

QR-Zerlegung Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Erste Spalte

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = \sqrt{2}$

Householder-Vektor: $w_1 = v_1 + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normierung: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erste Householder-Matrix:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zweite Spalte

Nach Anwendung von H_1:

$$H_1A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untervektor für zweite Transformation: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Analog zur ersten Transformation erhält man:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Endergebnis

$$Q = H_1^T H_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2H_1A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifikation

- $Q^TQ = QQ^T = I$ (Orthogonalität)
- $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
- R ist obere Dreiecksmatrix

Iterative Verfahren Vergleich Jacobi und Gauss-Seidel System:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

k	Jacobi		Gauss-Seidel	
0	$(0,0,0)^T$		$(0,0,0)^T$	
1	$(0.25, 1.25, 0)^T$	1.25	$(0.25, 1.31, 0.08)^T$	1.31
2	$(0.31, 1.31, 0.31)^T$	0.31	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.02
3	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.02	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.00

Eigenvektoren und Eigenwerte

Darstellungsformen Gegeben: $z = 3 - 11i$ in Normalform

$$r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}, \quad \varphi = \arcsin(\frac{11}{\sqrt{130}}) = 1.3\text{rad} = 74.74°$$

Trigonometrische Form: $z = \sqrt{130}(\cos(1.3) + i\sin(1.3))$

Exponentialform: $z = \sqrt{130}e^{i\cdot 1.3}$

Eigenwertberechnung $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Da A eine Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonalelemente die Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$
2. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6$
3. $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$
4. Spektrum: $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$

Von-Mises-Iteration Berechne größten Eigenwert der Matrix:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, Startvektor: $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

k	$v^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	$(1,0,0)^T$	-
1	$(0.970, -0.213, 0.119)^T$	4.000
2	$(0.957, -0.239, 0.164)^T$	4.827
3	$(0.953, -0.244, 0.178)^T$	4.953
4	$(0.952, -0.245, 0.182)^T$	4.989

Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5$
Eigenvektor $v \approx (0.952, -0.245, 0.182)^T$

QR-Verfahren Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QR-Iteration:

1. $A_0 = A$
2. Nach erster Iteration:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3.21 & -0.83 & 0.62 \\ -0.83 & 2.13 & 0.41 \\ 0.62 & 0.41 & 0.66 \end{pmatrix}$$

3. Nach 5 Iterationen:

$$A_5 \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalelemente von A_5 sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$