# Analysis 2

Jil Zernt, Lucien Perret
May 2024

## Integralrechnen

### Stammfunktionen

#### Integraltabelle

| Funktion \| f(x) | Ableitung \| f'(x) | Integral \| F(x) |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $x + C$ |
| $x$ | 1 | $\frac{1}{2}x^2 + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\ln\|x\| + C$ |
| $x^a$ *with* $a \in \mathbb{R}$ | $ax^{a-1}$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\sin(x) + C$ |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $-\ln\|\cos(x)\| + C$ |
| $\cot(x)$ | $-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $\ln(\sin(x)) + C$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x + C$ |
| $a^x$ | $\ln(a) \cdot a^x$ | $\frac{a^x}{\ln(a)} + C$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $x\ln(x) - x + C$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{x\ln(a)}$ | $x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$ |
| $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ |

#### Ableitungsregeln

- Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \to f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

- Differenzregel

$$f(x) = g(x) - h(x) \to f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

- Faktorregel

$$f(x) = a \cdot g(x) \to f'(x) = a \cdot g'(x)$$

- Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \to f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

- Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

- Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \to f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'$$

#### Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_2 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

#### Integral von verschobenen Funktionene

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimte integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

#### Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

#### Partielle Integration

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x), v'(x)\mathrm{d}x$$

#### Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$Beispiel\ Integral: \int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

- Zuordnen der Nullstellen $x_k$vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \ldots, 1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \ldots$$

$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

$$Beispiel: 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x = 1\ bzw.\ x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Bemerkung
Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\to deg(r(x)) \geq deg(s(x))$ gilt:

### Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int r(u)\mathrm{d}u = R(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$R(u) + C = R(g(x)) + C$$

### Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u$$

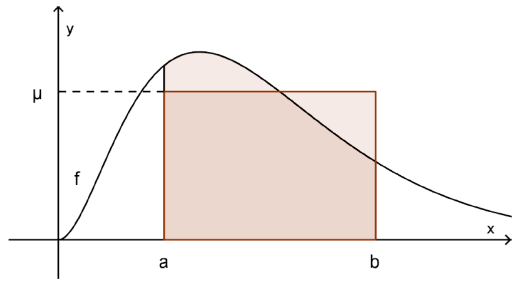
- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u = R(u) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- Rücksubstitution:

$$R(u) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)} = R(g(x)) + C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

### Mittelwert einer Funktion




Definition des Mittelwert $\mu$ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das

- eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechteks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

### Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

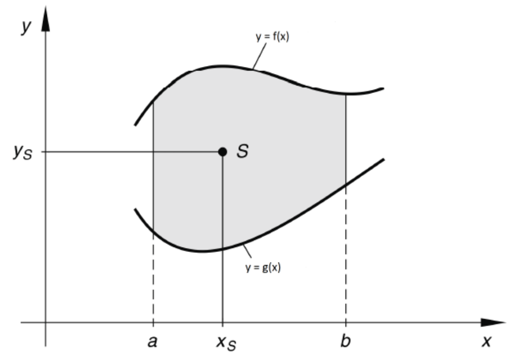
### Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

### Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

### Schwerpunkt ebener Fläche




Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:

$$xs = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

$$ys = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2)\mathrm{d}x$$

Berechnen von $A$ ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$$

### Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen $V$, geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 \mathrm{d}x$$

## Uneigentliche Integrale

**Definition Uneigentlich Integral** Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Type:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

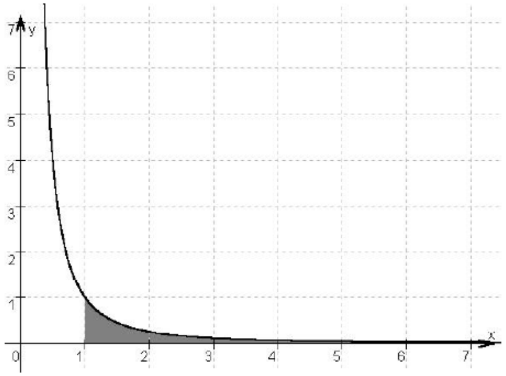
## Uneigentliche Integrale erster Art

### Definition

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Graphische Darstellung:



### Berechnung

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 1:

- Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Rechnen mit endlichem Invervall $[\lambda, b]$ mit $\lambda \leq b$ anstelle von unendlichem Integral $(-\infty, b]$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $(-\infty, b]$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 2:

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Einfügen einer künslichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

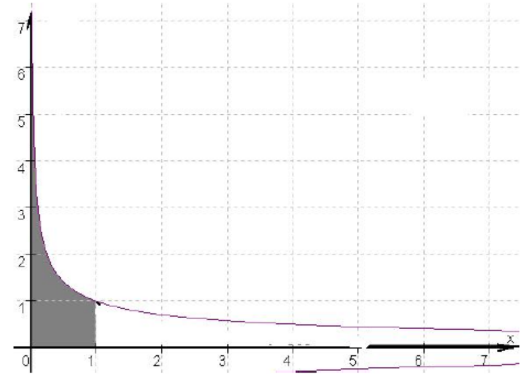
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

## Uneigentliche Integrale zweiter Art

### Definition

Uneigentlich Integrale auf Interval $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \to \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$ Graphische Darstellung:



### Berechnung

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wen ein Pol existiert.

# Taylorrreihen

### Definition Potenzreihen

- Eine Potenzreihe ist eine undendliche Reihe vom Typ:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \cdots$ sind die Koeffizientend der Potenzreihe

- Allgemein können Potenzreihen mit einer verschiebung von $x_0$ beschrieben werden, somit ist es eine Potenzreihe mit Zentrum $x_0$:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

### Definition Taylorreihe

- Die Taylorreihe oder Taylorentwicklung einer Funktion $y = f(x)$ and der Stelle $x_0$ ist die Potenzreihe:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

welche die gleiche Ableitung an der Stelle $x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ hat wie die Funktion $f(x)$

### Definition Taylorpolynom

- Ein Taylorpolynom ist eine Taylorreihe $t_f(x)$ welche nach $n$-ter Ordnung abgebrochen wird. Somit erhällt man das Taylorpolynom $n$-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x_0$:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

- Bemerkung: Die Tangente der Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle $x_0$ ist exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x_0$

### Vorgehen Berechnen Taylorreihe

- Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $t(x)$ an der Stelle $x_0$ ist:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

### Formel für Taylorkoeffizienten

- Formel für $k$-ten Taylorkoeffizientn der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

## Symetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

### Symetrie von Funktionen Repetition

- Gerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist achsensymetrisch bzgl. $y$-Achse
- Ungerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist punktsymetrisch bzgl. des Ursprungs

### Symetrie von Potenzreihen

- Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

### Symetrie von Taylorreihen

- Falls die Funktion eine gerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit geraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Falls die Funktion eine ungerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungeraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

### Binomialkoeffizienten

- Zeil: Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. Funktionen vom Typ $f(x = x^{\alpha})$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchen der Funktion bei $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ an der Stelle $x_0 = 0$
- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- In diesem fall ist die binomische Formel auch die Taylorreihe, es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$:
  Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

  Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Auch bekannt als Binomialreihe

### Regel von Bernoulli- de l'Hospital

- Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle $x_0$ stetig differenzierbar sind aber der Grenzwert auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, kann der Limes der Ableitung beider Funktionen ausgewerted werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Dies kann beliebig oft Wiederholt werden, es gibt jedoch Fälle wo die Regel versagt, dann müssen andere Methoden verwendet werden.

### Varianten von l'Hospital

- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$ ist, schreiben wir:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

und wenden die Regel an.

- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$ ist, schreiben wir:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

und wenden die Regel an.

### Genauigkeit der Approximation

Nicht prüfungsrelevant

- Die Approximation ist im allgemeinen nicht Perfekt, d.h. $p_n(x) \neq f(x)$ für $x \neq x_0$. Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ gilt:
- Ist die Funtion f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und ist $p_n(x)$ das Taylorpolynom $n$-ten Grades von $f(x)$ an der Stelle $x_0$. Dann gibt es ein $\xi$ zwischen $x_0$ und $x$ so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

## Konvergenz von Potenzreihen

### Konvergenzradius

- Der Konvergenzradius $\rho$ einer Potenzreih $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit Folgenden Eigenschaften:
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$
- Es existieren folgende Extremfälle:
  - Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
  - Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

### Konvergenzradius Formel

Für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

### Konvergenzbereich Formel

Der Konvergenzbereich in dem die Approximation der Funktion gilt ist definiert durch:

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

## Differentialgleichungen

### Definition Differentialgleichung

- Eine *Differentialgleichung* $n$-ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur $n$-ten Ordnung auftreten.

- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man die DGL *explizit*, ansonsten *implizit*.

### Definition Anfangswertproblem

- Ein *Anfangswertproblem* einer DGL $n$-ter Ordnung ist

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0, \quad (x, y, \dots y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{cases}$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' &= G(x, y), \quad (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

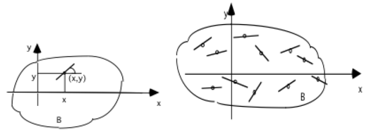
- Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.
- Die Lösung eines Anfangswertproblems nennt man eine *spezielle* bzw. *partikuläre Lösung* der DGL.

### Definition Richtungsfeld

*Ziel:* **Geometrisches** Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h.

$$y' = f(x, y).$$

*Idee:* $f(x, y)$ gibt die **Steigung** der Lösungskurve im Punkt $(x, y)$ an!




- Alle Steigungen ergeben ein *Vektorfeld* in der Ebene an, das **Richtungsfeld** der DGL $y' = f(x, y)$. Wir erhalten so die **Tangenten** an die Lösungskurven!
- Wir müssen Kurven mit vorgegebenen Tangentenstücken finden. Dies bedeutet "DGL lösen" geometrisch.

Spezielle Typen von DGL:

- *Unbestimmtes Integral:* $y' = f(x)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von $y$, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in $y$-Richtung ineinander über
- *Autonome DGL:* $y' = f(y)$: Das Richtungsfeld ist unabhängig von $x$, die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in $x$-Richtung ineinander über

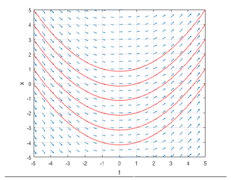


**Abbildung:** Unbestimmtes Integral

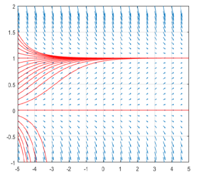


**Abbildung:** Autonome DGL

*Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine konstante Lösung der autonomen DGL $y' = f(y)$.*

- Um die konstanten Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$ zu finden, müssen wir also die (algebraische) Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

### Seperierbare Differentialgleichungen

- Die DGL heisst *separierbar*, falls $F(x, y)$ also Produkt eines $x$- und eines $y$-Anteils geschrieben werden kann, d.h. falls die DGL von der Form

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

ist, für irgendwelche Funktionen $g(x)$ und $h(y)$.

- Die DGL heisst *autonom*, falls $F(x, y)$ nur von $y$ abhängt, d.h. falls die DGL von der Form

$$y' = f(y)$$

ist.

### Lösen von Seperiaerbaren Differentialgleichungen

- DGL:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$

- Falls $h(y_0) = 0$: Dann ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL (vgl. die Diskussion konstanter Lösungen in Vorlesung 10).
- Trennung aller $x$- und $y$-Terme:

$$\frac{1}{h(y)} \cdot \mathrm{d}y = g(x) \cdot \mathrm{d}x$$

- Integration auf beiden Seiten:

$$\int \frac{1}{h(y)} \,\mathrm{d}y = \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

- Auflösen nach $y$, Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \,\mathrm{d}t$$

- *Vorsicht:* Die gesuchte spezielle Lösung der DGL könnte evtl. auch eine der vorab diskutierten konstanten Lösungen sein.

### Formel für inhomogene Differentialgleichungen

- Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

- Einsetzen des Ansatzes $y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$, mit Benützung von Produkt- und Kettenregel für die Berechnung von $y'$:

$$\underbrace{K'(x)e^{-F(x)} - K(x)\underbrace{f(x)}_{=F'(x)}e^{-F(x)}}_{y'} + f(x)\underbrace{K(x)e^{-F(x)}}_{y} = g(x)$$

- Vereinfachung:

$$K'(x)e^{-F(x)} = g(x)$$

- Auflösen nach $K'(x)$:

$$K'(x) = g(x)e^{F(x)}$$

- Integration:

$$K(x) = \int g(x)e^{F(x)} \,\mathrm{d}x$$

*Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y' + f(x)y = g(x)$$

*ist gegeben durch*

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x)e^{F(x)} \,\mathrm{d}x,$$

*wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.*

### Lösung von Anfangswertproblemen mit seperiarbaren DGL

Theoretische Formulierung des Verfahrens zur Lösung von AWP der Form $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$:

**Satz**

*Seien $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen, und sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

*genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t) \,\mathrm{d}t$$

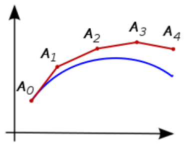
*berechnet werden und dann nach $y$ aufgelöst wird.*

## Numerische Verfahren

### Eulerverfahren

Gleichung der Gerade
mit Steigung $m$ im Punkt $(x_k, y_k)$:

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$




DGL: $y' = f(x, y)$; also erhalten wir mit $m = f(x_k, y_k)$ die Tangente an die Lösungskurve im Punkt $(x_k, y_k)$:

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$

Für $k = 0$ und $x = x_1$:

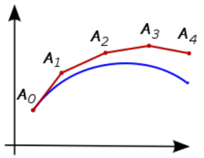
$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

Algorithmus des expliziten Euler-Verfahrens, für $k$ beliebig und $x = x_{k+1}$:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

### Probleme des Eulerverfahren

- Explizites Euler-Verfahren:




Algorithmus:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

- *Problem:* Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls $[x_k, x_k + h]$ berücksichtigt!
- *Lösung:* Verbesserte numerische Verfahren!