Nullstellenprobleme

Fixpunktiteration

Newton-Verfahren

Konvergenzgeschwindigkeit

Fehlerabschätzung

Fehlerfortpflanzung und Pivotisierung

Determinante

Lineare Gleichungssysteme - Fehlerberechnung und Aufwandschätzung

Aufwandschätzung

Pascal Isliker

Beispiel mit Jacobi

Lineare Gleichungssysteme - Iterative Verfahren

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so dass nun also auch Gleichungen der folgenden Art lösbar werden

$$x^2 + 1 = 0$$

Dafür wird die imaginäre Einheit i mit der folgenden Eigenschaft eingeführt.

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) zweier Zahlen x und y.

$$z = x + iy$$

Die imaginäre Einheit i ist definiert durch

$$i^2 = -1$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + \text{ iy mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die reellen Bestandteile x und y von z werden als Real- und Imaginärteil bezeichnet

- Realteil von z $\quad \mathrm{Re}(z) = x$
- Imaginärteil von z $\quad \mathrm{Im}(z) = y$

Die zu z konjugierte komplexe Zahl ist definiert als $z^* = x - iy$. Dies entspricht der an der x - Achse gespiegelten Zahl.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$. Dies entspricht der Länge des Zeigers.

Darstellungsformen

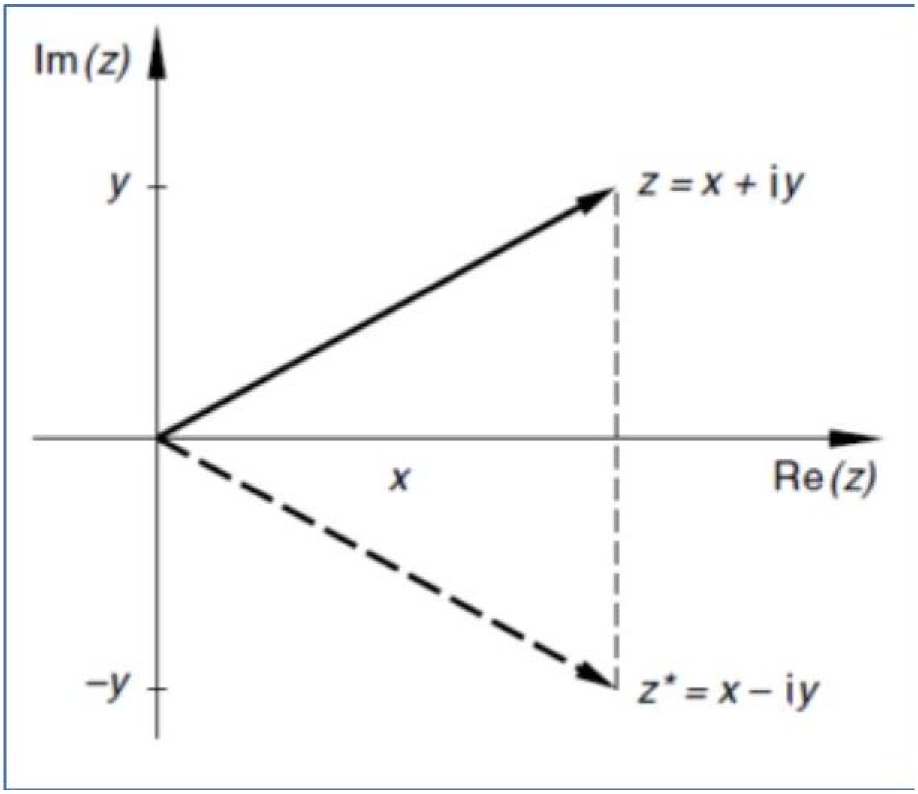
- Normalform $z = x + iy$
- Trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
- Exponentialform $\quad z = re^{i\varphi}$

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Beispiel

$$z = 3 - 11i$$

$$3 = r \cdot \cos\varphi, \quad 11 = r \cdot \sin\varphi, \quad r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$$
$$\arcsin\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \varphi = 1.3$$
$$z = \cos(1.3) + i \cdot \sin(1.3), \quad z = \sqrt{130} \cdot e^{i \cdot 1.3}$$



Grundrechenarten

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

- Summation $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
- Subtraktion $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Potenzieren und Radizieren

Die n-te Potenz einer komplexen Zahl lässt sich einfach berechnen, wenn diese in der trigonometrischen oder der Exponentialform vorliegt (Sei $n \in \mathbb{N}$):

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \to z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Fundamentalgesetz der Algebra
Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten und Variablen $a_i, z \in \mathbb{C}$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen genau n Lösungen

Wurzel einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl z wird als n-te Wurzel von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wenn

$$z^n = a \to z = \sqrt[n]{a}$$

Lösungen der algebraischen Gleichung $z^n = a$

$$z^n = a = r_0 e^{i\varphi} \, (r_0 > 0; n = 2, 3, 4, \ldots)$$

Besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r \left(\cos\varphi_k + i \cdot \sin\varphi_k\right) = re^{i\varphi_k}$$
$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}, \quad (f\ddot{u}r k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{r_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}.\lambda \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

x heisst dann Eigenvektor von A.

Eigenschaften von Eigenwerten

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

Die Eigenwerte einer Diagonal- oder eine Dreiecksmatrix sind deren Diagonalelemente.

Polynom und Spur

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Die Abbildung p ist definiert durch

$$p(\lambda) \to \det(A - \lambda I_n)$$

Ist ein Polynom vom Grad n und wird charakteristisches Polynom von A genannt. Die Eigenwerte von A sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit hat A also genau n Eigenwerte, von denen manche mehrfach vorliegen können.

Die Determinante der Matrix A ist gerade das Produkt ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A, d.h. gleich der Spur (tr) von A :

- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Ist λ_i ein Eigenwert der regulären Matrix A, so ist der Kehrwert $\frac{1}{\lambda_i}$ ein Eigenwert der inversen Matrix A^{-1}.

Vielfachheit und Spektrum

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Vielfachheit, mit der λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A auftritt, heisst algebraische Vielfachheit von λ.

Das Spektrum $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A.

Beispiel

Berechne Spektrum, Determinante und Spur von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6$$

Spur

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

Spektrum

$$\sigma(A) = 3$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Seien zwei Eigenvektoren x, y zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so ist $x + y$ und auch jedes Vielfach von x ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert λ :

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda = \lambda(x + y)$$
$$A(\mu x) = \mu A x = \mu \lambda x = \lambda \mu x$$

Eigenraum

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert λ zusammen mit dem Nullvektor 0 einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$, den sogenannten Eigenraum

Der Eigenraum des Eigenwertes λ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$(A - \lambda I_n)\, x = 0$$

Welches nur dann eine nicht-triviale Lösung aufweist, wenn $rg\,(A - \lambda I_n) < n$.
Die Dimension des Eigenraumes von λ wird die geometrische Vielfachheit von λ genannt. Sie berechnet sich als

$$n - rg\,(A - \lambda I_n)$$

Und gibt die Anzahl der lin. Unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein. Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Beispiel: Berechne Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 \cdot -1$$

$$p(\lambda) = -4 + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 = i^2$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Eigenvektor für $\boldsymbol{\lambda_1 = i}$

$$\begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ 0 & -2-i+\frac{5}{2-i} \end{pmatrix}$$

$$-2-i+\frac{5}{2-i} = (2-i)(-2-i)+5 = 1+i^2 = 0$$

$$0 = (2-i)\cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_1 = -\frac{5x_2}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = -\frac{5\cdot(2+i)}{4-i^2} = -\frac{10+5i}{5} = -2-i$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \,\middle|\, x = \mu = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ x \,\middle|\, x = \mu = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Lineare Gleichungssysteme - Numerische Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und T eine reguläre Matrix mit ... so heissen B und A zueinander ähnliche Matrizen.

$$B = T^{-1}AT$$

Im Spezialfall, dass $B = D$ ein Diagonalmatrix ist, also ... nennt man A diagonalisierbar.

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenwerte und Eigenvektoren ähnlicher / diagonalisierbarer Matrizen

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zueinander ähnliche Matrizen. Dann gilt

1. A und B haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraische Vielfachheit
2. Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von B, dann ist Tx ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.
3. Falls A diagonalisierbar ist

- Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
- Die linear unabhängigen Eigenvektoren von A stehen in den Spalten von T

Der Spektralradius $p(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$p(A) = \max \left\{ |\lambda| \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \right\}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem betragsmässig grössten Eigenwert λ_1 mit

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Vektoriteration / von-Mises-Iteration

So konvergieren für (fast) jeden Startvektor $v^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit Länge 1 die Folgen

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\left\| Av^{(k)} \right\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{\left(v^{(k)}\right)^T Av^{(k)}}{\left(v^{(k)}\right)^T v^{(k)}}$$

Für $k \to \infty$ gegen einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ_1 von A (also $v^{(k)} \to v$ und $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$)

QR-Verfahren

Sei $A \in R^{n \times n}$

$$A_0 := A, \quad P_0 := I_n$$

Für $i = 0, 1, 2, \dots$

- $A_i := Q_i \cdot R_i$
  QR-Zerlegung von A_i
- $A_{i+1} := R_i \cdot Q_i$
- $P_{i+1} := P_i \cdot Q_i$