2 Zusammenfassung: Vektorgeometrie

2.1 Grundlegende Definitionen

- Ein Vektor ist ein Objekt, das einen *Betrag* (Länge) und eine *Richtung* hat.
- Der Vektor mit Betrag 0 (es gibt nur einen!) heisst *Nullvektor* und wird mit $\vec{0}$ bezeichnet.
- Ein Vektor mit Betrag 1 heisst *Einheitsvektor* oder *normiert*.
- Gegeben sind n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Der Ausdruck

  $$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

  mit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ heisst *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.
- Zwei Vektoren heissen *kollinear*, wenn es eine Gerade g gibt, zu der beide parallel sind.
- Drei Vektoren heissen *komplanar*, wenn es eine Ebene gibt, zu der alle drei parallel sind.
- Wir können jeden Vektor $\vec{a}$ der Ebene als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ darstellen:

  $$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad \text{mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

  Diese reellen Zahlen heissen *Komponenten* des Vektors $\vec{a}$, und wir schreiben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Wir können jeden räumlichen Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ darstellen:

  $$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 \quad \text{mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

  Diese reellen Zahlen heissen *Komponenten* des Vektors $\vec{a}$, und wir schreiben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Zu jedem Punkt P der Ebene bzw. des Raumes definieren wir den *Ortsvektor* $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$.

2.2 Rechnen mit Vektoren

Hier einige Formeln für räumliche Vektoren. Für ebene Vektoren gilt Entsprechendes.

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sowie eine reelle Zahl λ. Dann gilt:

Addition	Skalare Multiplikation	Gegenvektor
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$	$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1=(x_1;y_1;z_1)$, $P_2=(x_2;y_2;z_2)$:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

Betrag eines ebenen Vektors	Betrag eines räumlichen Vektors
$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

2.3 Das Skalarprodukt

Definition
Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist das *Skalarprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert als:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$$

Dabei ist φ der Zwischenwinkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($0\le\varphi\le\pi$).
Wir definieren ausserdem: $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$, $\vec{0}\cdot\vec{b}=0$.

Berechnung des Skalarproduktes aus der Komponentendarstellung der Vektoren

In der Ebene	Im Raum
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$	$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes
Für beliebige Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:

(1) **$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn** $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

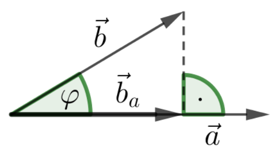
(3) *Kommutativ-Gesetz*: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(4) *Distributiv-Gesetze*: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz*: $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})$

Satz
Für die orthogonale Projektion eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ gilt:

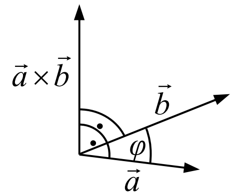
$$\vec{b}_a=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} \qquad |\vec{b}_a|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



2.4 Das Vektorprodukt

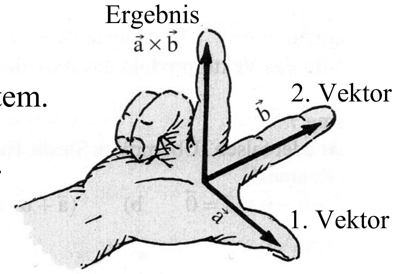
Das Vektorprodukt ist **nur für räumliche Vektoren** definiert!
Beim Skalarprodukt ist das Ergebnis eine Zahl (ein Skalar), beim Vektorprodukt ist das Ergebnis ein Vektor!

Definition



Das *Vektorprodukt* $\vec{a}\times\vec{b}$ zweier räumlicher Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der eindeutig bestimmte Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$
- $\vec{a}\times\vec{b}$ **ist orthogonal zu** $\vec{a}$ **und zu** $\vec{b}$.
- $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge!) ein Rechtssystem.



Dabei ist φ der Zwischenwinkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($0\le\varphi\le\pi$).
Wir definieren ausserdem: $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}$, $\vec{0}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Berechnung des Vektorproduktes aus der Komponentendarstellung der Vektoren

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c}a_1\\a_2\\a_3\end{array}\right. & \left.\begin{array}{c}b_1\\b_2\\b_3\end{array}\right) \\ a_1 & b_1 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

Wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes
Für beliebige Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ und für jede beliebige Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:

(1) $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **sind genau dann kollinear, wenn** $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

(2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(3) *Antikommutativ-Gesetz*: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

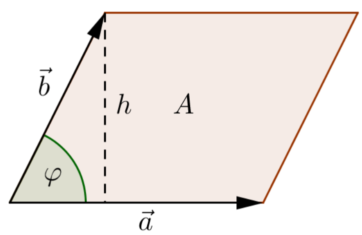
(4) *Distributiv-Gesetze*: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz*: $\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{b})$

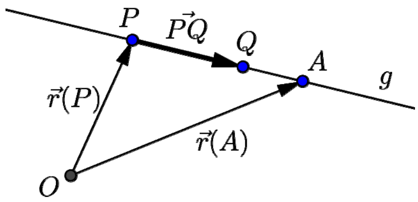
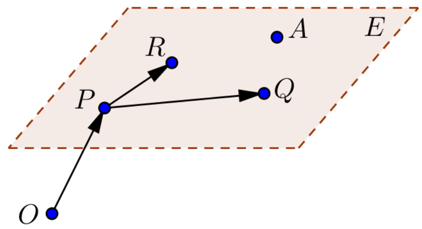
(6) Das normale *Assoziativ-Gesetz* gilt im Allgemeinen nicht: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

Fläche des aufgespannten Parallelogramms

Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a}\times\vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



2.5 Geraden und Ebenen

	Gerade	**Ebene**
Parameterdarstellung	$g:\ \vec{r}(P)+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$  P : *Aufpunkt*, $\overrightarrow{PQ}$: *Richtungsvektor* Ein Punkt A liegt auf g, wenn es $\lambda_A\in\mathbb{R}$ gibt mit $\vec{r}(A)=\vec{r}(P)+\lambda_A\cdot\overrightarrow{PQ}$.	$E:\ \vec{r}(P)+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ}+\mu\cdot\overrightarrow{PR} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$  P : *Aufpunkt*, $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$: *Richtungsvektoren* Ein Punkt A liegt auf E, wenn es $\lambda_A,\mu_A\in\mathbb{R}$ gibt mit $\vec{r}(A)=\vec{r}(P)+\lambda_A\cdot\overrightarrow{PQ}+\mu_A\cdot\overrightarrow{PR}$.
Koordinatendarstellung	$g:\ ax+by+c=0$ (nur in der Ebene!) Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung: $\dfrac{c}{\lvert\vec{n}\rvert}$ Ein Punkt $P=(x_P;y_P)$ liegt auf g, wenn $ax_P+by_P+c=0$.	$E:\ ax+by+cz+d=0$ Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ Abstand zum Ursprung: $\dfrac{d}{\lvert\vec{n}\rvert}$ Ein Punkt $P=(x_P;y_P;z_P)$ liegt auf E, wenn $ax_P+by_P+cz_P+d=0$.

Umrechnung Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung	
Gerade Für jedes $Q=(x;y)$ auf der Geraden g gilt: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{r}(P)+\lambda\cdot\vec{a}$ Die Komponentengleichungen bilden ein LGS. Wir eliminieren λ und erhalten so eine Koordinatendarstellung von g.	**Ebene** Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren liefert einen Normalenvektor $\vec{n}$; die Komponenten von $\vec{n}$ sind die Koeffizienten a,b,c der Koordinatendarstellung. Dann setzen wir die Koordinaten des Aufpunktes $P=(x_P;y_P;z_P)$ in die Koordinatendarstellung ein und bestimmen daraus d.
Umrechnung Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung	
Gerade Wir wählen zwei Punkte P und Q, deren Koordinaten die Geradengleichung lösen. Dann ist $g:\ \vec{r}(P)+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$ eine Parameterdarstellung von g.	**Ebene** Wir wählen drei Punkte P,Q und R, deren Koordinaten die Ebenengleichung lösen. Dann ist $E:\ \vec{r}(P)+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ}+\mu\cdot\overrightarrow{PR} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$ eine Parameterdarstellung von E.

Schnittpunkte und Schnittgeraden

Ein *Schnittpunkt* ist ein Punkt, der auf allen beteiligten Geraden und Ebenen liegt.
Eine *Schnittgerade* zweier Ebenen besteht aus allen Punkten, die sowohl auf der einen als auch auf der anderen Ebene liegen.
Um Schnittpunkte oder Schnittgeraden zu bestimmen, bildet man aus den Gleichungen der beteiligten Geraden und Ebenen ein LGS und löst dieses auf.

Abstände

Punkt A – **Gerade** $g:\ \vec{r}(P)+\lambda\cdot\vec{a}$	**Punkt** $A=(x_A;y_A;z_A)$ – **Ebene** $E:\ ax+by+cz+d=0$
$\dfrac{\left\|\overrightarrow{PA}\times\vec{a}\right\|}{\|\vec{a}\|}$	$\dfrac{\|ax_A+by_A+cz_A+d\|}{\|\vec{n}\|}$