

HM2 recap

Jil Zerndt
FS 2025

Mitternachtsformel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Polynomdivision ! Vorzeichen von Nullstellen umdrehen
 $\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ P, q, S, r Polynome

$$\begin{array}{r|l} (x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 & | x^3 : x = x^2 \\ - (x^3 - x^2) & | -x^2 : x = -x \\ \hline -x^2 - 5x & \\ - (-x^2 - x) & | -6x : x = -6 \\ \hline -(-6x + 6) & \end{array}$$

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Kardinalität

- X, Y **gleichmächtig**, falls es eine **Bijektion** $f : X \rightarrow Y$ gibt.
- X **endlich**, falls entweder $X = \emptyset$ ($\text{card } X = 0$) oder $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass X und $\{1, 2, \dots, n\}$ ($\text{card } X = n$) gleichmächtig sind.
- X **abzählbar**, falls sie endlich oder gleichmächtig wie \mathbb{N} ist.

Beschränktheit $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq c$ (A *nach oben beschränkt*).
- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **untere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \geq c$ (A *nach unten beschränkt*).
- A heisst **beschränkt**, wenn nach oben und unten beschränkt.
- **Maximum** von A falls $m \in A$ und m obere Schranke.
- **Minimum** von A falls $m \in A$ und m untere Schranke.

Intervalle Ein **abgeschlossenes Intervall** ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form

- Abgeschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Offen: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Halboffen: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- Unendlich: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Supremum und Infimum $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A : $c := \sup A$. Das **Supremum** von A .
- A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste untere Schranke von A : $c := \inf A$. Das **Infimum** von A .

Vereinfacht formuliert: Für ein abgeschlossenes, halboffenes oder offenes Intervall $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ oder (a, b) gilt $\inf = a$, $\sup = b$ (solange $a, b \neq \infty$)

Monotonie

- $(a_n)_{n \geq 1}$ **monoton wachsend** falls: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.
- $(a_n)_{n \geq 1}$ **monoton fallend** falls: $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$.

Monotonie zeigen

- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ monoton wachsend (bzw. umgekehrt fallend)
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ und $a_n \geq 0$ dann monoton wachsend

Trigonometrische Funktionen

ungerade $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$ stetig

gerade $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$ stetig

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ π : kleinste strikt positive Nullstelle von \sin .

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Eigenschaften sin/cos

- $\exp ix = \cos(x) + i \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Winkelverdopplung

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Potenz der Winkelfunktion

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Eigenschaften mit π

- $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Nullstellen von trigonometrischen Funktionen

- Nullstellen Sinus = $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
- Nullstellen Cosinus = $\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
 $\cos(x) > 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\cos(x) < 0 : \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Für $\tan(x)$ gilt $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ Für $\cot(x)$ gilt $x \notin \pi \mathbb{Z}$

Reelle Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Eigenschaften $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Aber nicht: $\exp(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(-x) \exp(x) &= 1 \\ \exp(x) &> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp(x) &> 1 \quad \forall x > 0 \\ \exp(a+b) &= \exp(a) \cdot \exp(b) \\ \exp(a-b) &= \exp(a) \div \exp(b) \end{aligned}$$

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(y + (z - y)) = \exp(y) \exp(z - y) \\ \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b)$$

$$\exp(\ln a) \exp(\ln b) = ab = \exp(\ln ab)$$

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln ab)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$x^a := \exp(a \ln x)$$

Logarithmen

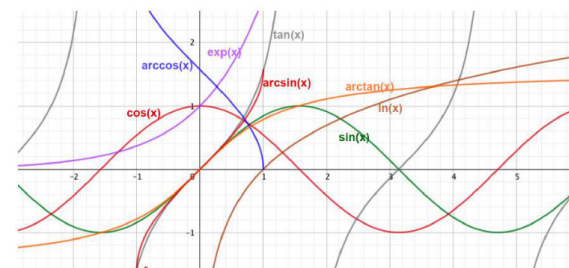
Rechnen mit Logarithmen

- Für $a > 0$ ist $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
 - Für $a < 0$ ist $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
 - $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, \infty[$
 - $\ln(a \div b) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in]0, \infty[$
 - $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
 - $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
 - $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
- Im Allgemeinen gilt: $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{für } |x| < 1$$

Werte von log

	0	1	2	e	3	5	10
\ln	$-\infty$	0	0.693	1	1.09	1.609	2.303
\log_2	$-\infty$	0	1	1.443	1.585	2.321	3.321
\log_{10}	$-\infty$	0	0.301	0.434	0.477	0.699	1



Grenzwerte und Konvergenz

Grenzwert Berechnen Tricks

- " $\frac{\infty}{\infty}$ " Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{2}{7}$$

- " $\frac{\infty}{\infty}$ " Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+1}}{7^{n+5}} \cdot \frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}} = \frac{1}{7}$

- " $\infty - \infty$ " Trick: Erweitern mit $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) = 1/2$$

- e-like...: Trick: umformen zu $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow e^a$

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

Spezielle Grenzwerte

$n \rightarrow \infty$

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$	$e^n \rightarrow \infty$	$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$
$c + \frac{1}{n} \rightarrow c$	$e^{-n} \rightarrow 0$	$(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$
$\frac{c \cdot n}{c^n} \rightarrow 0$	$\frac{e^n}{n^c} \rightarrow \infty$	$(1 + \frac{1}{n})^c \rightarrow 1$
$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$	$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$	$(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$
$\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$	$\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$(1 + \frac{c}{n})^n \rightarrow e^c$
$\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$	$\ln n \rightarrow \infty$	$(1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e}$
$\frac{c^n}{n!} \rightarrow 0$	$\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$	$(\frac{n}{n+c})^n \rightarrow e^{-c}$
$\frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$	$\frac{\log n}{n-1} \rightarrow 1$	

$$n^c \cdot q^n \rightarrow 0 \quad \forall c \in \mathbb{Z}, 0 \leq q \leq 1$$

$$n(\sqrt[n]{c} - 1) \rightarrow \ln c \quad \forall c > 0$$

$n \rightarrow 0$

$\ln n \rightarrow -\infty$	$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 1$	$\frac{1}{\arctan n} \rightarrow 1$
$n \log n \rightarrow 0$	$\frac{\cos(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$	$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$
$\frac{\log 1-n}{n} \rightarrow -1$	$\frac{1}{\cos n} \rightarrow 1$	$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow c$
$\frac{c^n - 1}{n} \rightarrow \ln c, \forall c > 0$	$\frac{1 - \cos n}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$	$(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow e$

Reihen - Funktionen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 &= \frac{n \cdot (4n^2-1)}{3} \\ \sum_{k=1}^n 2k-1 &= n^2 & \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 \\ \sum_{k=1}^n 2k &= n(n+1) & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Grenzwerte von Folgen

Formelle Grenzwert Definition Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, sodass $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Bem: l bezeichnet den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Einzigkeitseigenschaft Grenzwert Es gibt max. ein $l \in \mathbb{R}$ für a_n mit dieser Eigenschaft (max. 1 Grenzwert)

Rechenregeln mit Folgen

Sei $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

1. $(a_n \pm b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.
2. $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
3. $(a_n \div b_n)_{n \geq 1}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \div b_n) = a \div b$. (solange $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$)
4. Falls $\exists K \geq 1$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ folgt $a \leq b$.

Konvergenz Folgen

1. Für Brüche, grösste Potenz von n ausklammern und kürzen. Alle übrigen Brüche der Form $\frac{a}{n^s}$ streichen, da diese zu 0 konvergieren.
2. Für Wurzeln in einer Summe, multipliziere mit der Differenz der Summe (bei a + b multipliziere mit a - b)
3. Anwendung Satz von Weierstrass/Sandwich-Satz
4. Vergleich mit Referenz-Folgen (Spezielle Grenzwerte)
5. Umformen/Tricks
6. Definition der Konvergenz/Limes anwenden
7. Suchen eines konvergenten Majoranten

Divergenz Folgen

1. Suche einen divergenten Minoranten
2. Für alternierende Folgen zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_p 1(n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_p 2(n)$

Satz von Weierstrass

- $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
- $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

Sandwich-Satz Sei $\lim a_n = \alpha$ und $\lim c_n = \alpha$ und $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq k$ dann gilt $\lim b_n = \alpha$

Bmk: k steht hier für eine beliebige natürliche Zahl, ab der die Bedingung immer gilt. Also wie bei der Grenzwert-Definition mit dem «Gürtel» um den Grenzwert - das gilt ja auch erst ab einem gewissen Wert n.

Bmk 2: Einfach gesagt heisst das, dass wenn wir den Grenzwert von zwei Folgen bereits kennen und dieser für beide gleich ist, und wir eine dritte Folge haben die «zwischen» die zwei bekannten Folgen passt (daher Sandwich-Satz), wissen wir dass auch die dritte Folge den gleichen Grenzwert wie die anderen zwei hat.

Binom Trick

Gegeben die Summe von zweier (oder einer) Wurzel, kann man wie folgt vorgehen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \right)$$

Substitutions Trick

Hier ein Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Substituiere nun $u = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u)}{2} = \frac{1}{2}$$

Grenzwerte von Reihen

Nullfolgenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ aber die Umkehrung stimmt nicht.

Cauchy Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Leibniz Kriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend, mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und es gilt: } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1.$$

Majorantenkriterium

Seien $a_n, b_n \geq 0$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert}$$

Minorantenkriterium

Seien $a_n, b_n \geq 0$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergiert}$$

Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und: $q = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Falls:

- $q < 1$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

- $q > 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Für $\liminf a_n = 1$ keine Aussage möglich

!!! für die harmonische Reihe ist dieses Kriterium nicht anwendbar/-gültig !!!

Wurzelkriterium

Es sei: $q = \sqrt[n]{|a_n|}$

Dann gilt:

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergieren

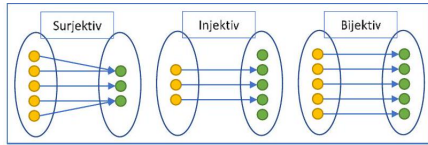
- $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Logarithmus abschätzen

$\log_b(n)$ kann mit n^α ($\alpha > 0$) abgeschätzt werden.

$$\ln(n) \leq \sqrt{n}$$

Funktionen



Umkehrfunktion

- Bijektive Funktion $f : D \rightarrow W$
- Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$

Vorgehen $f(x) = y$:

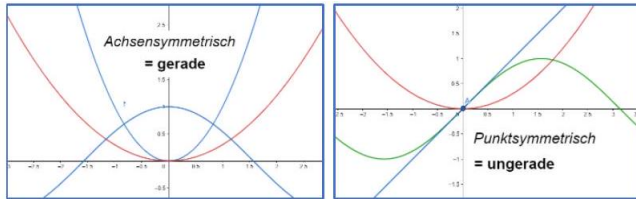
- Nach x auflösen $\rightarrow x = g(y)$
- Variablen vertauschen $\rightarrow y = g(x)$

Operationen von Funktionen

- Addition $x \rightarrow f(x) + g(x)$
- Subtraktion $x \rightarrow f(x) - g(x)$
- Multiplikation $x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$
- Division $x \rightarrow f(x)/g(x)$
- Komposition/Verkettung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Symmetrie

- gerade $f(-x) = f(x)$
- ungerade $f(-x) = -f(x)$



Beschränktheit Sei $f \in \mathbb{R}^D$.

1. f ist **nach oben beschränkt**, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.
2. f ist **nach unten beschränkt**, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.
3. f ist **beschränkt**, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.

Monotonie

- monoton wachsend $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend $f(x_1) > f(x_2)$

Stetigkeit Eine Funktion ist stetig, falls

- die Kurve keine Sprünge macht
- man den Graphen der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen

Spezielle Stetige Funktionen

1. $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind stetig
2. Polynomielle Funktionen sind auf ganz \mathbb{R} stetig
3. die Trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig
4. die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz \mathbb{R} stetig

Für mehr wichtige/spezielle Grenzwerte, siehe Grenzwerte von Folgen.

Wichtige Grenzwerte

Harmonische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Geometrische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (q < 1)$$

n-te Wurzel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Eulerzahl:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Konvergenz einer Funktion

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0 falls: für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$
Bmk: Die Stelle x_0 muss nicht im Definitionsbereich D sein.

Konvergenz/Divergenz

- Konvergenz: Funktion mit Grenzwert $x \rightarrow \infty$
- Divergenz: Funktion ohne Grenzwert $x \rightarrow \infty$
- Bestimmte Divergenz: Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$

Links- und Rechtsseitige Grenzwerte

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, x_0 ist ein Häufungspunkt. Was vereinfacht heisst, dass die Funktion an dieser Stelle evtl. einen Sprung macht, da sich z.B. die Definition ändert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Setze in diesem Beispiel $x_0 = 0$, und prüfe ob sich die Funktion von rechts und links dem selben Wert nähert bei x_0 . (NEIN in diesem Bsp.)

Formell: Eine Funktion ist dann gleichmässig konvergent wenn für alle Werte der Funktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

(Linksseitiger Grenzwert = Rechtsseitiger Grenzwert)

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

l'Hospital Kettenregel Trick Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Falls $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ und $\lambda := \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, folgt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nur für $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ erlaubt.

Taylorreihen

Potenzreihe unendliche Reihe vom Typ:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe

Allgemein kann eine Potenzreihe mit einer Verschiebung von x_0 beschrieben werden \Rightarrow Potenzreihe mit Zentrum x_0 :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Taylorreihe oder Taylorentwicklung einer Funktion $y = f(x)$ and der Stelle x_0 ist die Potenzreihe:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

welche die gleiche Ableitung an der Stelle x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ hat wie die Funktion $f(x)$

Taylorpolynom ist eine Taylorreihe $t_f(x)$ welche nach n -ter Ordnung abgebrochen wird. Somit erhält man das Taylorpolynom n -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0 :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Bemerkung: Die Tangente der Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

Vorgehen Berechnen Taylorreihe Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $t(x)$ an der Stelle x_0 ist:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Formel für Taylorkoeffizienten Formel für k -ten Taylorkoeffizienten der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Taylorreihen wichtiger Funktionen

$$f(x) = e^x \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ mit } x_0 = 1,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Symmetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

Symmetrie von Funktionen Repetition

- Gerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist achsensymmetrisch bzgl. y -Achse
- Ungerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs

Symmetrie von Potenzreihen Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symmetrie von Taylorreihen

- Falls die Funktion eine gerade Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit geraden Exponenten, d.h. se gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Falls die Funktion eine ungerade Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungeraden Exponenten, d.h. se gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

Taylorreihen mit Binomialkoeffizienten bestimmen

- Ziel: Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. Funktionen vom Typ $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchen der Funktion bei $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$
- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- In diesem Fall ist die binomische Formel auch die Taylorreihe, es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$:
Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Auch bekannt als Binomialreihe

Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenzradius

- Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit folgenden Eigenschaften:
 - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$
 - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$
- Es existieren folgende Extremfälle:
 - Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
 - Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konvergenzradius Formel

Für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenzbereich Formel

Der Konvergenzbereich in dem die Approximation der Funktion gilt ist definiert durch:

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Bernoulli- de l'Hospital

Regel von Bernoulli- de l'Hospital Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig differenzierbar sind aber der Grenzwert auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, kann der Limes der Ableitung beider Funktionen ausgewertet werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dies kann beliebig oft Wiederholt werden, es gibt jedoch Fälle wo die Regel versagt, dann müssen andere Methoden verwendet werden.

Varianten von l'Hospital

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

Integralrechnung

Integrationsregeln

Integrale von Linearkombinationen Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \int g(x)dx = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Integral von verschobenen Funktionen Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Betrag k in x -Richtung verschoben ist:

$$\int f(x - k)dx = F(x - k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

Integrale von gestreckten Funktionen Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x -Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

Integralregeln

- Addition/Subtraktion: $\int f(x - k)dx = F(x - k) + C$
- Multiplikation: $\int f(x \cdot k)dx = \frac{1}{k} F(x \cdot k) + C$
- Skalarmultiplikation: $\int \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)dx = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$

Strategie zur Berechnung von Integralen

Bruchform:

1. Vereinfache, so dass ein einfacher Nenner entsteht
2. Partialbruchzerlegung
3. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen $\Rightarrow \sqrt{u}$ oder $\log|u|$

Produktform:

1. Partielle Integration anwenden (evtl. mehrmals)
2. Kettenregel verwenden

Potenzen:

$\int_a^b f(x)^c dx$ umformen in $\int_a^b (f(x)^c \cdot 1)dx$ oder $\int_a^b (f(x)^{c-1} \cdot f(x))dx$ um dann partielle Integration anzuwenden

Exponentenform:

e/\log Trick verwenden, wenn Variabel im Exponenten ist.

Produkt mit e , \sin , \cos

Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei \sin , \cos immer g' und immer f ist.

Summe im Integral:

Summe aus dem Integral herausziehen (dafür muss die Reihe gleichmäßig konvergieren)

Symmetrie ungerader Funktionen beachten: (alls Funktion ungerade ist und

symmetrische Grenzen hat) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^7 \cos x}_{\text{ungerade}} dx = 0$

Integrationsmethoden

Partielle Integration

Partielle Integration Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f'(x) \cdot g(x))dx$$

↑ 1 falls arc- oder log-Funktion vorkommt, x^n , $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$

↓ x^n , $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$,

Prioritäten $f(x)$ nach folgender Priorität auswählen:

1. \log_e, \log_a
2. \arcsin, \arccos
3. $x^2, 5x^3$
4. \sin, \cos, \tan
5. $e^x, 5a^x$

Substitution

Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

$$\int_{g(b)}^{g(a)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)}$$

Nützliche Regeln Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten $a + c$, $b + c$ in I enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$$

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac , bc in I enthalten ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

Nützliche Substitutionen

- $\log(x)$ subst: $t = \log(x)$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$
- für gerade n : $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$, $\tan(x)$
Sub: $t = \tan(x)$, $dy = \frac{1}{1+t^2} dt$, $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$
- für ungerade n : $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$,
Sub: $t = \tan(x/2)$, $dy = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx$ sub: $x = \sin(x)$ oder $\cos(x)$
- $\int \sqrt{1+x^2} dx$ sub: $x = \sinh(x)$

Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:
 $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $dx = \frac{du}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $dx = \frac{du}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \int r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u :

$$\int r(u)du = R(u) + C$$

- Rücksubstitution: $R(u) + C = R(g(x)) + C$

Bsp. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$ Substitution mit $t = \sqrt{9-x^2}$.

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-t^2} \Rightarrow x' = \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-t \cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -tdt = -t$ Rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:
 $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $dx = \frac{du}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $dx = \frac{du}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du = R(u) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- Rücksubstitution:

$$R(u) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)} = R(g(x)) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$\text{Beispiel Integral: } \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

- Zuordnen der Nullstellen x_k vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \dots, 1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x - x_1}}_{\text{einfache Nullstelle } x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots}_{\text{doppelte Nullstelle } x_2}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1}$$

$$\text{Beispiel: } 1 = A(x + 1) + B(x - 1) \quad x = 1 \text{ bzw. } x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 1| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

Bemerkung

Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\rightarrow \deg(r(x)) \geq \deg(s(x))$ gilt: Zuerst $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = n(x) + r(x)$$

wobei $n(x)$ ein Polynom und $r(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{\tilde{t}(x)}$ eine echt gebrochene-rationale Funktion ist, d.h. $\deg(\tilde{s}(x)) < \deg(\tilde{t}(x))$

Berechne $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$ mittels PBZ.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow A + B + C = 0 \quad A + 3B - 2C = 1 \quad -6A = 1$$

Daraus folgt: $A = -\frac{1}{6}, B = \frac{3}{10}, C = -\frac{2}{15}$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{10} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{15} \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \log|x| + \frac{3}{10} \log|x-2| - \frac{2}{15} \log|x+3| + C$$

Integrieren von Flächen Nullstellen bestimmen: \Rightarrow Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- x_1, x_2, \dots, x_n = Nullstellen

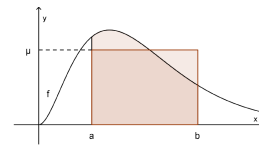
$$\left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- x_1, x_2, \dots, x_n = Schnittpunkte

$$\left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Mittelwert einer Funktion



Definition des Mittelwert μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das

- eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechtecks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

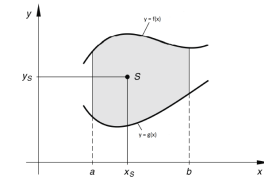
Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Schwerpunkt ebener Fläche



Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Berechnen von A ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen V, geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

Uneigentliche Integrale

Definition Uneigentliches Integral Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Type:

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

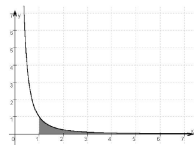
Uneigentliche Integrale erster Art

Definition

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsintervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)dx$$

Graphische Darstellung:



Berechnung

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergibt sich aus $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_a^\lambda f(x)dx \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow \infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konvergent, andernfalls divergent}$$

Beidseitig unendliche Integrale

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsintervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

- Einfügen einer künstlichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

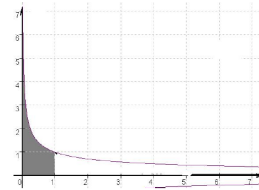
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das Integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Definition

Uneigentlich Integrale auf Intervall $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \rightarrow \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$ Graphische Darstellung:



Berechnung

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wenn ein Pol existiert.

Integraltabelle

Ableitung f'(x)	Funktion f(x)	Integral F(x)
0	C	$x + C$
1	x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
ax^{a-1}	x^a with $a \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$x^x \cdot (1 + \ln x)$ $x > 0$	x^x	
$(x^x)^x (x + 2x \ln(x))$ $x > 0$	$x^{(x^x)}$	
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1} + C$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$a^{bx} \cdot c \ln a$	a^{bx}	$\frac{1}{b \ln a} a^{bx} + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$
$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\log_a(x)$	$x \log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$\ln \sin(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$	$\sin(x) \cos(x) + C$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$	$\cos(x) \sin(x) + C$
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$	$\tan(x) + C$
$\cot^2(x)$	$-\cot(x) - x$	$\cot(x) + C$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x) $	$x \cdot (\ln x - 1) + C$
$\frac{1}{x}(\ln x)^n$	$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}$ $n \neq -1$	$\frac{1}{2n}(\ln x)^2$ $n \neq 0 + C$
$\frac{1}{x \ln x}$	$\ln \ln x $ $x > 0, x \neq 1$	$\frac{1}{b \ln a} a^{bx} + C$
$x \cdot e^{cx}$	$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right)$ $n \neq -1 + C$
$x^n \ln x$	$\ln(\cosh(x))$	$\ln f(x) + C$
$\sin(x) \cos(x)$	$\frac{\sin^2(x)}{2}$	
$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a \cdot (n+1)}(ax+b)^{n+1}$	

Trick Gerade/Ungerade bei Integralen

Für ungerade Funktionen gilt $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

- Summe/Komposition: ungerade und ungerade \rightarrow ungerade
- Produkt/Quotient: ungerade und gerade \rightarrow ungerade
- Ableitung: gerade \rightarrow ungerade

Bsp ungerade: $f(x) = -x, x, \sin(x), \tan(x)$, Polynomfunktionen mit ungeradem Exponent

gerade: $1, x^2, \cos(x), \sec(x)$, Polynomf. mit geradem Exponent

gerade und ungerade!! $f(x) = 0$

Differentialrechnung

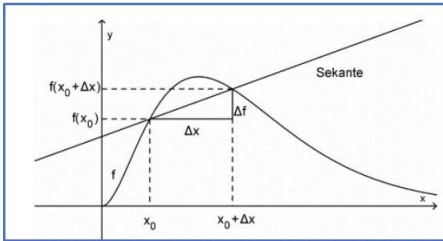
Differentialquotient und Ableitung

Sekanten-Steigung und Differentialquotient

Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall im Definitionsbereich von f . Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heisst Differentialquotient von f .



Differenzierbarkeit

f ist in x_0 **differenzierbar**, falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x)$ bezeichnet.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Den Grenzwert selbst bezeichnet man als Ableitung.

Vereinfacht: Eine Funktion ist differenzierbar, falls die Kurve keine Knicke macht.

Tangentengleichung $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Stetige Differenzierbarkeit Eine Funktion ist stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitungsfunktion stetig ist.

n-fache Differenzierbarkeit

- Für $n \geq 2$ ist f **n-mal differenzierbar** in D falls f^{n-1} in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f .
- Die Funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar** in D , falls sie n -mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.
- Die Funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$, n -mal differenzierbar ist.

- $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh, \tanh$ sind **glatt** auf \mathbb{R}
- Alle Polynome sind auf ganz \mathbb{R} **glatt**
- $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist **glatt**

Rechnen mit höheren Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $f, g \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D .

- $f + g$ ist n -mal differenzierbar und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
- $\frac{f}{g}$ ist n -mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$
- $(g \circ f)$ ist n -mal differenzierbar

Ableitungsregeln Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

- Summe/Differenz:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Faktor:** $f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
- Produkt:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quotient:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Kettenregel:** $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
- Umkehrfunktion:** $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x)}$
- Potenz/Logarithmus 1:** $(a^{f(x)})' = \ln(a) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
 $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (\ln(f(x)) \cdot g(x))' = f(x)^{g(x)} \cdot (\ln(f(x)) \cdot g(x))' \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$

Bem. Für gerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \cosh(x)$ und für ungerade k gilt $\cosh(x)^{(k)} = \sinh(x)$, analoges gilt für \sinh .

Differentialrechnung Tricks

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an Stelle x_0 gleichen Funktionswert und gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (Linearisierung): $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Grundfunktionen der Ableitung

- Potenz** $f(x) = x^n \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- Exponent** $f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
 $f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$
- Logarithmus** $f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
 $f(x) = \log_a(x) \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Ableitungen von geometrischen Funktionen

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \tan(x) \quad f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$f(x) = \cot(x) \quad f'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Monotonie

Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion in D mit $x_0 \in D$.

- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ konstant, bzw. horizontale Tangente
- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend.
- $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend.

Krümmung

Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung:

- $f''(x_0) > 0$ Konvex (Nach links/oben gekrümmt)
- $f''(x_0) < 0$ Konkav (Nach rechts/unten gekrümmt)
- $f''(x_0) = 0$ Keine eindeutige Krümmung

Bmk: Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex. (konkav analog)

Wende- und Sattelpunkte Als Wendepunkte werden Punkte bezeichnet bei denen sich der «Drehsinn» ändert. Wendepunkte mit horizontaler Tangente werden als Sattelpunkte oder Terrassenpunkte bezeichnet

Wendetangente: Tangente an einem Wendepunkt

Berechnung Wendetangente Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0 \rightarrow x_0$.

Bedingungen:

Sei $y = f(x)$ dreimal differenzierbar

- $f''(x_0) = 0$
- $f^{(3)}(x_0) \neq 0 \rightarrow$ Wendepunkt
- Falls zusätzlich $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt

Allgemeines Kriterium

Sei $f(x)$ eine genügend oft differenzierbare Funktion

- $f'(x_0) = 0$

Sei n die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 :

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Schlussfolgerungen:

- Wenn n gerade, dann gibt es ein relatives Extremum ($f^{(n)}(x_0) \neq 0$)
- Wenn n ungerade, dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt und damit einen Sattelpunkt

Vorgehen Wende- und Sattelpunkte

- Erste und zweite Ableitung
- Wendepunkt bestimmen
 - $f''(x_0) = 0 \rightarrow x_0$
 - $f^{(3)}(x_0) \neq 0$
- Sattelpunkte bestimmen
 - $f'(x_0) = 0$
 - $f''(x_0) = 0$
 - ...
 - $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
 - Gerade \rightarrow relatives Extremum
 - Ungerade \rightarrow Sattelpunkt
- x_0 in ursprüngliche Gleichung einsetzen

Relative Extrema

- Relative Extremal-Stelle $x_0 \Rightarrow$ Minimal-/Maximalstelle
- Relatives Extremum $y_0 \Rightarrow$ Maximum/Minimum
- Relativer Extremal-Punkt $P_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow$ Hoch-/Tiefpunkt

Vorgehen relative Extrema von $f(x) = y$:

- Bestimme $f'(x)$ (Erste Ableitung)
- Bestimme NST von $f'(x)$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x$ lokales Extremum
- Bestimme $f''(x)$ (Zweite Ableitung)
 - $f''(x) = 0 \Rightarrow$ siehe Vorgehen Wende- und Sattelpunkte
 - $f''(x) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum
 - $f''(x) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum
- In Gleichung $f(x) = y$ einsetzen
 - Hochpunkt/Tiefpunkt $= P(x, y)$

Quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Scheitelpunkt

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Differentialgleichungen

Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man sie explizit, ansonsten implizit. Oft können implizite DGL durch einfaches Umformen in explizite DGL umgewandelt werden.

Arten von DGL

- **Separierbar:** falls $F(x, y)$ als Produkt eines x - und eines y -Anteils geschrieben werden kann, d.h. es hat die Form:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

- **Autonom:** falls $F(x, y)$ nur von y abhängt, d.h. es hat die Form:

$$y' = f(y)$$

- **Linear:** falls die Variable, welche abgeleitet wird, nur in der ersten Potenz vorkommt und nicht multipliziert miteinander oder mit der unabhängigen Variable wird.

Lösen von Separierbaren DGL

$$\text{DGL: } \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

→ Falls $h(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL.

- Trennung aller x - und y -Terme: $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$
- Integration auf beiden Seiten: $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

Auflösen nach y , Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Homogenität von DGL

- Homogene DGL: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
- Inhomogene DGL: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x)$
 - $g(x)$ ist die Störfunktion

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y' + f(x)y = g(x)$ ist gegeben durch:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Anfangswertproblem DGL mit Anfangsbedingung
Anfangswertproblem n -ter Ordnung:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, & (x, y, \dots, y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' = G(x, y), & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Allgemeine Lösung: Menge aller Lösungen einer DGL
- Spezielle/partikuläre Lösung: Lösung eines Anfangswertproblems

Lösung von Anfangswertproblemen mit separierbaren DGL

- Sind $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$, hat das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

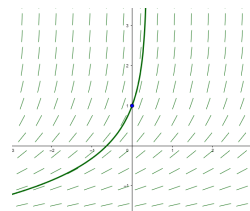
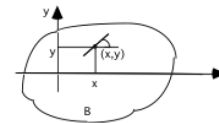
genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

berechnet werden und nach y aufgelöst werden.

Richtungsfelder

Richtungsfeld geometrisches Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. DGL der Form: $y' = f(x, y)$

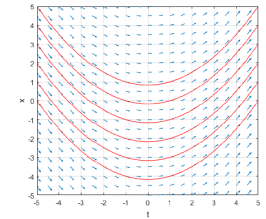


$f(x, y)$ gibt also die Steigung der Lösungskurve am Punkt (x, y) an

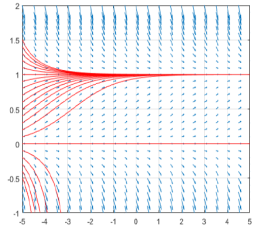
Jeder Punkt ist somit die Tangente einer spezifischen Lösungskurve

Richtungsfelder von Speziellen DGL

Unbestimmtes Integral: $y' = f(x)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von y
die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine Verschiebung in y -Richtung durch die Konstante C .



Autonome DGL: $y' = f(y)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von x
die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in x -Richtung in einander über.



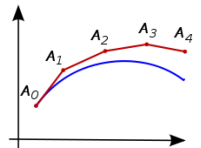
Numerische Verfahren

Eulerverfahren Gleichung einer beliebigen Geraden mit Steigung m am Punkt (x_k, y_k) :

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$

DGL am Punkt (x_k, y_k) :

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$



- Für $k = 0$ und $x = x_0$:

$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

- Algorithmus für beliebige k :

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

Problem: Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls berücksichtigt!

⇒ Lösung: Verbesserte numerische Verfahren!

Vektorgeometrie

Vektor Objekt, das Betrag und Richtung hat.

- $\vec{0}$ = Nullvektor (Betrag = 0, einziger Vektor ohne Richtung)
- \vec{e} = Einheitsvektor (Betrag = 1), evtl. mit Index \vec{e}_a
- \vec{PQ} = Vektor, der den Punkt P in Q verschiebt
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (selber Betrag und Richtung)

Es wird zwischen *Orts-* und *Richtungsvektoren* unterschieden.

Gegenvektor $-\vec{a}$ ist parallel zu \vec{a} , hat denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtung.

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} \quad \vec{a} \nearrow \quad -\vec{a} \searrow$$

Länge/Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Einheitsvektor/Normierung $\vec{e}_a = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Der Vektor \vec{e}_a wird als **Einheitsvektor** oder auch **normiert** bezeichnet und der Übergang von \vec{a} nach \vec{e}_a heisst **Normierung**.

Orthogonal (Senkrecht) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ orthogonal

\vec{a} und \vec{b} sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen 90° beträgt

Normalenvektor Ein Normalenvektor, der orthogonal zu einer Ebene E ist, heisst **Normalenvektor** von E . Eine Koordinatendarstellung einer Ebene E heisst normiert, wenn gilt: $\vec{n} = 1$.

Rechnen mit Vektoren

Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Winkelberechnung φ = Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ($0 \leq \varphi \leq \pi$)

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Winkel und Skalarprodukt

Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren und φ der eingeschlossene Winkel, $0 \leq \varphi \leq \pi$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &< \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \\ \varphi &> \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

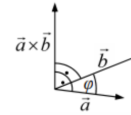
Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot (-\vec{a})$
- Kommutativ-Gesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributiv-Gesetze: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \quad \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$



Für \mathbb{R}^2 gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$

Eigenschaften des Kreuzprodukts auch genannt Vektorprodukt

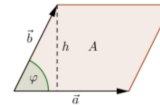
Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
 - Antikommutativ-Gesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
 - Distributiv-Gesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
 - Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}!$

Fläche des aufgespannten Parallelogramms $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

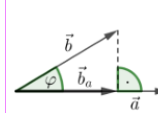
$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



Orthogonal Projektion von \vec{b} auf \vec{a}

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad |\vec{b}|_a = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Die erste Formel gilt für $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, die zweite für $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$

Lineare Abhängigkeit und Komponentendarstellung

Linearkombination (LK) $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

mit $\lambda_n \in \mathbb{R}$ heisst **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Lineare Abhängigkeit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sind linear unabhängig, wenn:

- $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k \neq \vec{0}$ ($\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$)
- $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k$ als einzige LK $\vec{0}$ ergibt

Komponentendarstellung $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (Komponente), so dass jeder Vektor \vec{a} als LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eindeutig dargestellt werden kann.

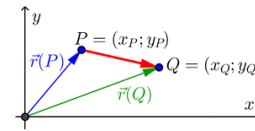
Ortsvektor $\vec{r}(P) = \vec{OP} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Zu jedem Punkt P des Vektorraums definiert! Ortsvektoren sind im Ursprung O angeheftet, wie jeder Vektor LK von $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ und lassen sich in Komponentenschreibweise darstellen:

Komponentendarstellung von \vec{OP}

$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + \vec{PQ}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}(Q) - \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ \vdots \end{pmatrix}$$



Geraden und Ebenen

Kollinear und Komplanar

Kollinear \vec{a} und \vec{b}

- \exists eine Gerade g , zu der beide parallel sind
- Spezialfall: Nullvektor ist zu jedem Vektor kollinear
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (Kreuzprodukt)
- $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ (einer ist Vielfaches des anderen)



Lage von Geraden im Raum

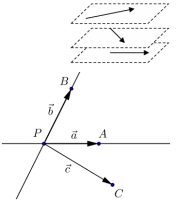
	Gemeinsame Punkte	keine gem. Punkte
Kollinear	Identisch	echt Parallel
nicht kollinear	Schneidend	Windschief

Komplanar \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Es existiert eine Ebene E , zu der alle parallel sind.

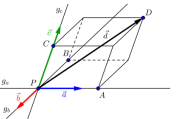
LK komplanarer Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Wenn \vec{a} und \vec{b} nicht kollinear sind lässt sich \vec{c} als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ darstellen: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$



LK nicht komplanarer Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}

Jeder Vektor \vec{d} im \mathbb{R}^3 lässt sich als Linearkombination von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} eindeutig darstellen: $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$

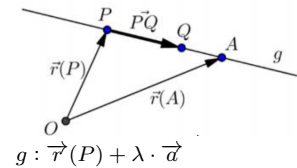


Darstellungsformen von Ebenen und Geraden

Parameterdarstellung einer Geraden

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{PQ}$$

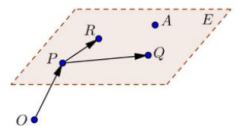
Der Punkt P heisst **Aufpunkt**, der Vektor $\vec{a} = \vec{PQ}$ heisst **Richtungsvektor** von g .



Parameterdarstellung einer Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

P = **Aufpunkt**, $\vec{a} = \vec{PQ}$ und $\vec{b} = \vec{PR}$ sind **Richtungsvektoren** von E .



Parameterdarstellung nicht eindeutig!

Richtungsvektoren zwei beliebige Vektoren: **parallel** zu E und **nicht kollinear**

$$\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PQ} \text{ komplanar}$$

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{PR} + \mu \cdot \vec{PQ}$$

Koordinatendarstellung $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

Bedeutung: die Ebene E besteht aus allen Punkten P , deren Koordinaten x, y und z diese Gleichung erfüllen. $|d|$ = Abstand zum Ursprung, wenn Gleichung normiert (sonst $\frac{d}{n}$)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Umrechnung Parameterdarstellung zu Koordinatendarstellung

Berechnen über den Normalenvektor aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren, welches die Koeffizienten a, b und c liefert. Der Aufpunkt wird über das Einsetzen eines Punktes der Ebene E ermittelt.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 \\ 2+4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E : -14x - 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

Umrechnung Koordinatendarstellung zu Parameterdarstellung

Um eine Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung umzurechnen, werden drei Punkte berechnet. Einer dieser Punkte wird dann als aufpunkt gewählt und mit den restlichen werden Richtungsvektoren berechnet.

Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung

$$E : 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

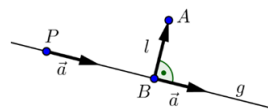
Punkte einsetzen: $(0|0|z), (1|0|z), (0|1|z)$

$$\begin{aligned} & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} \\ & \bullet 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{4} \end{aligned} \quad E : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Abstände berechnen**Abstand Punkt-Gerade** Gesucht ist der Fußpunkt $B \in g$

Gegeben: Gerade $g = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$ in Parameterform und Punkt A

- Da $B \in g \Rightarrow \vec{r}(B) = \vec{r}(P) + \lambda_B \cdot \vec{a}$
- $\vec{BA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(B)$
- $\vec{BA} \perp g \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{a} = 0$
- $l = |\vec{BA}|$ (λ_B in \vec{BA} einsetzen)



$$\text{Meist einfacher: } \vec{PA} = \vec{r}(A) - \vec{r}(P) \Rightarrow l = \frac{|\vec{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

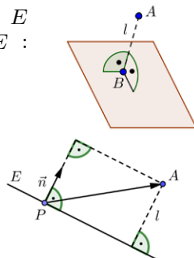
Abstand Punkt-Ebene $l =$ Abstand von A zu E

Gegeben: Punkt $A = (x_A; y_A; z_A)$, Ebene E mit der **normierten** Koordinatendarstellung $E : ax + by + cz + d = 0$

$$l = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

nicht normierte Koordinatendarstellung:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

**Geometrische Transformationen** \mathbb{R}^2 **Streckung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } \lambda_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } \lambda_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g : ax + by = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g : x + 7y = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } g : \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 48 & -14 \\ -14 & -48 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ auf Gerade } g : ax + by = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Gerade } g : 2x - y = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } g : \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rotation

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ um den Ursprung} \\ & \bullet \text{ um Winkel } \alpha \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scherung

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } s_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } s_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

 \mathbb{R}^3 **Zentrische Streckung**

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ in } x\text{-Richtung um } \lambda_1 \\ & \bullet \text{ in } y\text{-Richtung um } \lambda_2 \\ & \bullet \text{ in } z\text{-Richtung um } \lambda_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E : ax + by + cz = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E : x + 2y + 3z = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } E : \frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die Ebene

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E : ax + by + cz = 0 \\ & \bullet \text{ mit } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

$$P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$$

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Ebene } E : 2x - y + 3z = 0 \\ & \bullet \text{ Normiert } E : \frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = 0 \end{aligned} \quad \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & 6 \\ 4 & 13 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Winkel α um die x, y, z Achsen

$$\begin{aligned} x: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} & y: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ z: & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rotation um den Winkel α um die Gerade g

Gerade $g : \vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 1$

\vec{a} ist ein Punkt auf der Geraden g , \vec{b} ist der Richtungsvektor der Geraden g

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) + a^2(1 - \cos(\alpha)) & ab(1 - \cos(\alpha)) - b \sin(\alpha) & \dots \\ ab(1 - \cos(\alpha)) + b \sin(\alpha) & \cos(\alpha) + b^2(1 - \cos(\alpha)) & \dots \\ -a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) & b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & a \sin(\alpha) + b(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & -b \sin(\alpha) + a(1 - \cos(\alpha)) \\ \dots & \dots & \cos(\alpha) + (a^2 + b^2)(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

↑ 3x3 Matrix, die die Rotation um die Gerade g beschreibt (hat nicht auf eine Zeile gepasst)

LGS und Matrizen

Matrizen

Matrix Tabelle mit m Zeilen und n Spalten: $m \times n$ -Matrix A
 a_{ij} : Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte

Addition und Subtraktion

- $A + B = C$
- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Skalarmultiplikation

- $k \cdot A = B$
- $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Rechenregeln für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

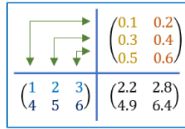
Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetz gelten für Matrix-Addition

Matrixmultiplikation $A^{m \times n}, B^{n \times k}$

Bedingung: A n Spalten, B n Zeilen.

Resultat: C hat m Zeilen und k Spalten.

- $A \cdot B = C$
- $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$

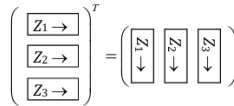


Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

Assoziativ, Distributiv, nicht Kommutativ!

Transponierte Matrix $A^{m \times n} \rightarrow (A^T)^{n \times m}$

- A^T : Spalten und Zeilen vertauscht
- $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$



Spezielle Matrizen

- Symmetrische Matrix:** $A^T = A$
- Einheitsmatrix:** E mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$ und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
- Dreiecksmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix) oder $i < j$ (untere Dreiecksmatrix)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Lineares Gleichungssystem (LGS) Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Sammlung von Gleichungen, die linear in den Unbekannten sind. Ein LGS kann in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt werden.

A : Koeffizientenmatrix

\vec{x} : Vektor der Unbekannten

\vec{b} : Vektor der Konstanten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix $rg(A) = \text{Anzahl Zeilen} - \text{Anzahl Nullzeilen}$

\Rightarrow Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren

Zeilenstufenform (Gauss)

- Alle Nullen stehen unterhalb der Diagonalen, Nullzeilen zuunterst
- Die erste Zahl $\neq 0$ in jeder Zeile ist eine führende Eins
- Führende Einsen, die weiter unten stehen \rightarrow stehen weiter rechts

Reduzierte Zeilenstufenform: (Gauss-Jordan)

Alle Zahlen links und rechts der führenden Einsen sind Nullen.

Zeilenoperationen erlaubt bei LGS (z.B. Gauss-Verfahren)

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Gauss-Jordan-Verfahren

- bestimme linkeste Spalte mit Elementen $\neq 0$ (Pivot-Spalte)
 \rightarrow vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
- oberste Zahl in Pivot-Spalte = 0
 \rightarrow vertausche Zeilen so dass $a_{11} \neq 0$
- teile erste Zeile durch $a_{11} \rightarrow$ so erhalten wir führende Eins
- Nullen unterhalb führender Eins erzeugen (Zeilenoperationen)
nächste Schritte: ohne bereits bearbeitete Zeilen Schritte 1-4 wiederholen, bis Matrix Zeilenstufenform hat

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

- Lösbar: $rg(A) = rg(A|b)$ • unendlich viele Lösungen:
- genau eine Lösung: $rg(A) = n$ $rg(A) < n$

Parameterdarstellung bei unendlich vielen Lösungen

Führende Unbekannte: Spalte mit führender Eins

Freie Unbekannte: Spalten ohne führende Eins

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Auflösung nach der führenden Unbekannten:

- $1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 5$ $x_2 = \lambda \rightarrow x_1 = 5 + 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \mu$
- $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 3$ $x_4 = \mu \rightarrow x_3 = 3 - \mu$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ 3-\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenes LGS $\vec{b} = \vec{0} \rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow rg(A) = rg(A | \vec{b})$

nur zwei Möglichkeiten:

- eine Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, die sog. *triviale Lösung*.
- unendlich viele Lösungen

Koeffizientenmatrix, Determinante, Lösbarkeit des LGS

Für $n \times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Spalten von A sind linear unabhängig.
- Zeilen von A sind linear unabhängig.
- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot \vec{0} = 0$

Quadratische Matrizen

Inverse

Inverse einer quadratischen Matrix A A^{-1}

A^{-1} existiert, wenn $rg(A) = n$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Eine Matrix heisst *invertierbar* / *regulär*, wenn sie eine Inverse hat. Andernfalls heisst sie *singulär*

Eigenschaften invertierbarer Matrizen

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ und $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Die Reihenfolge ist relevant!
- A und B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ A invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar

Inverse einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

NUR Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$

Inverse berechnen einer quadratischen Matrix $A^{n \times n}$

$$A \cdot A^{-1} = E \rightarrow (A|E) \rightsquigarrow \text{Zeilenoperationen} \rightsquigarrow (E|A^{-1})$$

LGS mit Inverse lösen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Pivotisierung

Permutationsmatrix P ist eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Zeilenvertauschungen entsteht.

Für die Vertauschung der i -ten und j -ten Zeile hat P_k die Form:

- $p_{ii} = p_{jj} = 0$
- $p_{ij} = p_{ji} = 1$
- Sonst gleich wie in E_n

Wichtige Eigenschaften:

- $P^{-1} = P^T = P$
- Mehrere Vertauschungen:
 $P = P_l \cdot \dots \cdot P_1$

Zeilenvertauschung für Matrix A mit Permutationsmatrix P_1 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot P_1 \text{ bewirkt die Vertauschung von Zeile 1 und 3}$$

Pivotisierung

Spaltenpivotisierung

Strategie zur numerischen Stabilisierung des Gauss-Algorithmus durch Auswahl des betragsmäßig größten Elements als Pivotelement.

Vor jedem Eliminationsschritt in Spalte i :

- Suche k mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
- Falls $a_{ki} \neq 0$: Vertausche Zeilen i und k
- Falls $a_{ki} = 0$: Matrix ist singulär

Gauss-Algorithmus mit Pivotisierung

1. Elimination (Vorwärts):

- Für $i = 1, \dots, n-1$:
 - Finde $k \geq i$ mit $|a_{ki}| = \max\{|a_{ji}| \mid j = i, \dots, n\}$
 - Falls $a_{ki} = 0$: Stop (Matrix singulär)
 - Vertausche Zeilen i und k
 - Für $j = i+1, \dots, n$:

$$* z_j := z_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} z_i \quad b_i - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

2. Rückwärtseinsetzen:

Vorteile der Permutationsmatrix

- Exakte Nachverfolgung aller Zeilenvertauschungen
- Einfache Rückführung auf ursprüngliche Reihenfolge durch P^{-1}
- Kompakte Darstellung mehrerer Vertauschungen
- Numerisch stabile Implementierung der Pivotisierung

Determinante

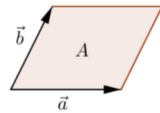
Determinante gibt an, ob eine Matrix invertierbar ist

$$\det(A) \begin{cases} \neq 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert} \\ = 0 & \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht} \end{cases}$$

Geometrische Interpretation der Determinante:

Fläche im \mathbb{R}^2 und Volumen im \mathbb{R}^3
durch eine Matrix A aufgespannt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(A)|$$



Eigenschaften von Determinanten mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

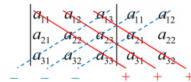
- $\det(E) = 1$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ist singulär
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

E = Einheitsmatrix

Determinante 1×1 -Matrix $\det(A) = A_{11}$

Determinante 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$

Determinante 3×3 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$
 $|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h$



Determinante $n \times n$ -Matrix

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^n \text{oder } j=1^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

- Entwicklung nach Zeile: j bei Σ und wähle eine feste Zeile i
- Entwicklung nach Spalte: i bei Σ und wähle eine feste Spalte j
- a_{ij} ist das Element der Matrix A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte
- $|A_{ij}|$ ist die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die entsteht

Tipp: Entwickeln nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen!

Tricks und Tipps

- hat A eine Nullzeile oder -spalte, so ist $\det(A) = 0$
- hat A zwei gleiche Zeilen oder Spalten, so ist $\det(A) = 0$
- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ Spalten/Zeilen sind linear unabhängig

Determinante mit Gauss Spezialfall **Dreiecks- / Diagonalmatrix**

Wende Gauss-Algorithmus an, um A in Dreiecksform zu bringen.

Es gilt für jede Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix D :

$$\det(D) = (-1)^k \prod_{i=1}^n d_{ii}$$

k = Anzahl der Zeilen-Vertauschungen

Bei Zeilen-Vertauschungen ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$
 $\det(A)$ verändert sich nicht bei Zeilen-Additionen/-Multiplikationen

Bei Skalarmultiplikationen ändert sich $\det(A)$ um den Skalierungsfaktor (am besten einfach keine Skalarmultiplikationen durchführen)

Komplexe Zahlen

Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in \mathbb{C} genau n Lösungen (mit Vielfachheiten gezählt).

Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} erweitert die reellen Zahlen \mathbb{R} durch Einführung der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft:

$$i^2 = -1$$

Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z = x + iy$$

Die Menge aller komplexen Zahlen ist definiert als:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

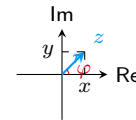
Bestandteile komplexer Zahlen

Realteil: $\operatorname{Re}(z) = x$

Imaginärteil: $\operatorname{Im}(z) = y$

Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$

Konjugation: $\bar{z} = x - iy$



Darstellungsformen

- Normalform: $z = x + iy$
- Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- Exponentialform: $z = r e^{i\varphi}$

Umrechnung zwischen Darstellungsformen komplexer Zahlen

Von Normalform in trigonometrische Form/Exponentialform

1. Berechne Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. Berechne Winkel mit einer der Formeln:
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$
 - $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ falls $x < 0$
 - $\varphi = \frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y > 0$
 - $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ falls $x = 0, y < 0$
 - φ unbestimmt falls $x = y = 0$
3. Trigonometrische Form: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
4. Exponentialform: $z = r e^{i\varphi}$

Von trigonometrischer Form in Normalform

1. Realteil: $x = r \cos \varphi$
2. Imaginärteil: $y = r \sin \varphi$
3. Normalform: $z = x + iy$

Von Exponentialform in Normalform/trigonometrische Form

1. Trigonometrische Form durch Euler-Formel:
 $r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
2. Dann wie oben in Normalform umrechnen

Wichtige Hinweise:

- Achten Sie auf das korrekte Quadranten beim Winkel
- Winkelfunktionen im Bogenmaß verwenden
- Bei Umrechnung in Normalform Euler-Formel nutzen
- Vorzeichen bei Exponentialform beachten

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt:

Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{in Exponentialform}) \end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{in Exponentialform}) \end{aligned}$$

Potenzen und Wurzeln

Für eine komplexe Zahl in Exponentialform $z = r e^{i\varphi}$ gilt:

- n -te Potenz: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$
- n -te Wurzel: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Komplexe Operationen Gegeben $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 - i$:

Umrechnung in Polarform:

- $z_1 : r_1 = \sqrt{2}, \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$
- $z_2 : r_2 = \sqrt{5}, \varphi_2 = -\arctan(\frac{1}{2})$

Berechnungen:

- $z_1 \cdot z_2 = (2 - i)(1 + i) = (2 + 1) + i(2 - 1) = 3 + i$
- $z_1^3 = (\sqrt{2})^3 (\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4}))$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A , wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Der Vektor x heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Bestimmung von Eigenwerten

Ein Skalar λ ist genau dann Eigenwert von A , wenn gilt:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \text{ (charakteristische Gleichung)}$$

$$\text{charakteristisches Polynom von } A: p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Eigenschaften von Eigenwerten Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

Determinante: $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ Spur: $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

- Bei Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente die Eigenwerte
- Ist λ Eigenwert von A , so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1}

Vielfachheiten Für einen Eigenwert λ unterscheidet man:

- Algebraische Vielfachheit: Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms
- Geometrische Vielfachheit: Dimension des Eigenraums $= n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$

Die geometrische Vielfachheit ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Diagonalisierbarkeit Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Dies ist äquivalent zu:

- Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte entsprechen den geometrischen Vielfachheiten
- Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist n
- Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix
- Die Matrix A hat n linear unabhängige Eigenvektoren

Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine reguläre Matrix T gibt mit:

$$B = T^{-1}AT$$

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist:

$$D = T^{-1}AT$$

Eigenschaften ähnlicher Matrizen

Für ähnliche Matrizen A und $B = T^{-1}AT$ gilt:

- A und B haben dieselben Eigenwerte mit gleichen algebraischen Vielfachheiten
- Ist x Eigenvektor von B zum Eigenwert λ , so ist Tx Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
- Bei Diagonalisierbarkeit:
 - Die Diagonalelemente von D sind die Eigenwerte von A
 - Die Spalten von T sind die Eigenvektoren von A

Bestimmung von Eigenwerten

Charakteristisches Polynom aufstellen

- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ berechnen und auf Standardform bringen
- Spezialfälle:
 - Bei 2×2 Matrizen direkt: $\det(A - \lambda I)$
 - Bei 3×3 Matrizen: Entwicklung nach einer Zeile/Spalte
 - Bei größeren Matrizen: Spezielle Eigenschaften nutzen (z.B. Dreiecksform, Symmetrie)

Polynom vereinfachen und auf Nullform bringen

- Ausmultiplizieren
- Zusammenfassen nach Potenzen von λ
- Form: $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Nullstellen bestimmen

- Quadratische Formel für $n = 2$ (Grad des Polynoms)
- Cardano-Formel oder Substitution für $n = 3$
- Numerische Verfahren für $n > 3$

Vielfachheiten bestimmen

- Algebraische Vielfachheit: Nullstellenordnung
- Geometrische Vielfachheit: $n - \text{rang}(A - \lambda I)$

Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie die Eigenwerte von: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

- $p(\lambda) = \det(A - \lambda I): \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$
- Determinante: $p(\lambda) = (2 - \lambda)^3 - 2(2 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$
- Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Bestimmung von Eigenvektoren

Eigenvektoren bestimmen

- Für jeden Eigenwert λ_i :
 - Matrix $(A - \lambda_i I)$ aufstellen
 - Homogenes LGS $(A - \lambda_i I)x = 0$ lösen
 - Lösungsvektor normieren falls gewünscht
- Bei mehrfachen Eigenwerten:
 - Geometrische Vielfachheit bestimmen
 - Basis des Eigenraums bestimmen
 - Linear unabhängige Eigenvektoren finden

Kontrolle

- Für jeden Eigenvektor x_i prüfen: $Ax_i = \lambda_i x_i$
- Bei symmetrischen Matrizen: Orthogonalität der Eigenvektoren prüfen
- Linear unabhängigkeit der Eigenvektoren überprüfen
- Bei 2×2 Matrix: $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$
- Bei 3×3 Matrix zusätzlich: $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$ und $\prod \lambda_i = \det(A)$
- Bei reellen Matrizen: Komplexe Eigenwerte treten in konjugierten Paaren auf

Spezialfälle beachten

- Bei Dreiecksmatrizen: Eigenwerte sind die Diagonalelemente
- Bei symmetrischen Matrizen: Alle Eigenwerte sind reell
- Bei orthogonalen Matrizen: $|\lambda_i| = 1$ für alle Eigenwerte
- Bei nilpotenten Matrizen: Alle Eigenwerte sind 0
nilpotente Matrix: $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Eigenwertberechnung Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Entwicklung nach 1. Zeile:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - ((2 - \lambda) - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

4. Nullstellen bestimmen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

5. Eigenvektoren bestimmen für $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)x = 0 \text{ führt zu } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren Bestimmen Sie die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$ der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. $(A - 2I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Homogenes System lösen:

- $x_2 = 0$ (aus 1. Zeile)
- x_1, x_3 frei wählbar

3. Basis des Eigenraums:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren Bestimmen Sie Eigenwerte und -vektoren von:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

2. Eigenwerte: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

3. Eigenvektoren für $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Eigenvektoren für $\lambda_2 = 1$:

$$(A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorräume

Reeller Vektorraum ist eine Menge $V \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen:

Addition: $+: V \times V \rightarrow V: (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$

Skalarmultiplikation: $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V: (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$

Eigenschaften: (V = die Menge aller Vektoren, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

- Addition: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V: (\vec{a} + \vec{b}) \in V$
- Skalarmultiplikation: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V: (\lambda \cdot \vec{a}) \in V$
- Neutralelement $\vec{0} \in V: \forall \vec{a} \in V: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- Inverses Element $-\vec{a} \in V: \forall \vec{a} \in V \exists -\vec{a}$ so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ und $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
- Distributivgesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ und $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

Unterraum $U \subseteq V$

Teilmenge U eines Vektorraums V , die selbst ein Vektorraum ist.

Nullvektorraum Die Teilmenge $U = \{\vec{0}\} \subseteq V$, die nur den Nullvektor aus einem Vektorraum V enthält, heisst der *Nullvektorraum* und ist immer ein Unterraum von V .

Unterraumkriterien für Beweis dass U ein Unterraum von V ist

Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ eines Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V , wenn gilt:

- $\vec{0} \in U$ Um zu zeigen dass eine Menge
- $\vec{a} + \vec{b} \in U \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in U$ V ein Vektorraum ist, beweisen
- $\lambda \cdot \vec{a} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \forall \vec{a} \in U$ wir genau auch diese Kriterien!!

Unterraum Beweis $U = \{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

- $\vec{0} = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \in U$
- $\vec{a} = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ und $\vec{b} = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$
 $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + a_2) \cdot x^2 + (b_1 + b_2) \cdot x + (c_1 + c_2) \in U$
- $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1) = (\lambda \cdot a_1) \cdot x^2 + (\lambda \cdot b_1) \cdot x + (\lambda \cdot c_1) \in U$
 $\Rightarrow U \subseteq \mathbb{R}$ ist ein **Unterraum von \mathbb{R}**

Basis und Dimension

Linearer Span $\text{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \{\lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

Menge aller Linearkombinationen von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ in Vektorraum V

$\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander schreiben \Rightarrow Matrix $B^{m \times n}$

- Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \vec{0}$
- Es gilt $\text{rg}(B) = n$

Erzeugendensystem $V = \text{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

Menge von Vektoren, die den gesamten Vektorraum V aufspannen

$\vec{b}_k \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander schreiben \Rightarrow Matrix $B^{m \times n}$

- Die Vektoren \vec{b}_k bilden ein Erzeugendensystem \mathbb{R}^m
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
- Es gilt $\text{rg}(B) = m$

Dimension $\dim(V)$ Anzahl Vektoren, die eine Basis von V bilden
Eine Basis von \mathbb{R}^n hat n Elemente $\rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Basis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ von $\vec{b}_k \in V$ heisst Basis von V wenn gilt:

- B ist ein Erzeugendensystem von V
- Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig
- \vec{b}_k nebeneinander schreiben \Rightarrow Matrix $B^{n \times n}$

Für $B^{n \times n}$ gilt:

- $\text{rg}(B) = n$
- $\det(B) \neq 0$
- B ist invertierbar
- Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Ist B eine Basis von V? Gegeben: $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$

1. Stelle die Vektoren als Spalten einer Matrix B dar
2. Gauss Algorithmus: Stelle B in Zeilenstufenform
3. Berechne den Rang $\Rightarrow \text{rg}(B) = \dim(\text{span}(B))$

Nun gilt:

- $\text{rg}(B) = n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ sind linear unabhängig
- $\text{rg}(B) < n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ sind linear abhängig
- $\text{rg}(B) = \dim(V) \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} = \text{Erzeugendensystem von } V$

$\text{rg}(B) = \dim(V) = n \Rightarrow \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ist eine Basis von V

Basiswechsel Beliebige Basis $B \rightarrow$ Standard-Basis S

Gegeben: Basis B , aus \vec{b}_S und Vektor \vec{a}_B in Basis B

(die Vektoren \vec{b} der Basis B sind in Standardbasis!)

$$B = \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S \cdots \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$\vec{a}_B \rightarrow \vec{a}_S$ umrechnen:

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S \Rightarrow \vec{a}_S = \vec{b}_1 \cdot (a_1)_B + \dots + \vec{b}_n \cdot (a_n)_B$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

Basiswechsel Standard-Basis $S \rightarrow$ Beliebige Basis B

Gegeben: Basis B , aus \vec{b}_S und Vektor \vec{a}_S in Standardbasis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a}_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$\vec{a}_S \rightarrow \vec{a}_B$ umrechnen:

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

1. Finde Inverse B^{-1} von B

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -7+1 \cdot -4 \\ -1 & -7+1 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ wo V, W reelle Vektorräume

Eine Abbildung f heisst linear, wenn $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \text{ und } f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a})$$

Erlaubte Operationen:

- Multiplikation mit Skalar: $\lambda \cdot \vec{a}$
- Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

Verbotene Operationen:

- Multiplikation von Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Potenzieren: \vec{a}^2
- Addition von Skalaren: $\lambda + \vec{a}$
- Cosinus: $\cos(\vec{a})$

Überprüfung der Linearität $f: V \rightarrow W, f(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- $f(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$
- $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$

\Rightarrow Funktionsgleichung einsetzen und überprüfen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \checkmark$$

... usw.

Bild im(A) einer $m \times n$ -Matrix A , ist der Unterraum des m -dimensionalen Vektorraum W , der von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\text{im}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Kern ker(A) einer $m \times n$ -Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Der Kern $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$$

Basis für Bild und Kern 1. Bringe A in Zeilenstufenform (ZSF)

Bild:

- Pivotspalten in der ZSF?
- Pivotspalten von A (nicht ZSF!) ergeben eine Basis für den Kern

Kern:

- LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ aufstellen
- Lösungsmenge als LK von Vektoren mit freien Variablen als Koeffizienten ergibt Basis für Kern

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\text{im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \nu \mid \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} \quad \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Zauberzahlen m, n, r Für $A^{m \times n}$ mit $rg A = r$ gilt:

$$\dim(\text{im}(A)) = \dim(\text{im}(A^{-1})) = r$$

$$\dim(\ker(A)) = n - r \text{ und } \dim(\ker(A^{-1})) = m - r$$

Abbildungsmatrix

Homogene Koordinaten Homogene Koordinaten sind eine Erweiterung des euklidischen Raumes, die es ermöglicht, Punkte im Unendlichen zu repräsentieren. Ein Punkt im \mathbb{R}^2 wird durch einen Vektor (x, y, z) dargestellt, wobei $z \neq 0$. Die Punkte (x, y, z) und $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ repräsentieren den gleichen Punkt im euklidischen Raum.

nützlich, um Transformationen wie Translationen und Projektionen zu vereinfachen

Abbildungsmatrix Standardbasis Vektorräume \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n , mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ -Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^n :

$$A = (f(\vec{e}_1) \dots f(\vec{e}_n)) = \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \dots f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix beliebiger Basis

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

$$V \text{ mit Basis } B = \{\vec{b}_1; \dots; \vec{b}_n\}, W \text{ mit Basis } C = \{\vec{c}_1; \dots; \vec{c}_m\}$$

Jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ lässt sich durch eine $m \times n$ -Matrix ${}_C A_B$ darstellen

$$(f(\vec{x}))_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_C A_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C :

$${}_C A_B = {}_C \left(\left(f\left(\vec{b}_1\right) \right)_C \left(f\left(\vec{b}_2\right) \right)_C \dots \left(f\left(\vec{b}_n\right) \right)_C \right)_B$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow {}_C A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Verknüpfungen Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f: U \rightarrow V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g: V \rightarrow W$ mit Abbildungsmatrix B

Die Abbildungsmatrix der Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Koordinatentransformation

Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ für den Basiswechsel von S nach B

- Die Matrix ${}_B T_S$ ist die Inverse von ${}_S T_B: {}_B T_S = ({}_S T_B)^{-1}$

Basiswechsel mit Koordinatentransformation

Von Basis B nach Basis C

Von Basis C nach Basis B

$$\vec{x}_C = {}_C T_B \cdot \vec{x}_B$$

$$\vec{x}_B = {}_B T_C \cdot \vec{x}_C$$

${}_C T_B :=$ Abbildungsmatrix von B nach C

${}_B T_C :=$ Abbildungsmatrix von C nach B

$${}_C T_B = {}_C A_S \cdot {}_S T_B$$

$${}_B T_C = {}_B A_S \cdot {}_S T_C$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C T_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, {}_B T_C = ({}_C T_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vollständiges Beispiel

Kann mittels Inverse oder Gauss berechnet werden

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_S \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_S \right\}$$

$${}_C A_B = {}_C \left(\left(f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \right)_C \left(f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \right)_C \right)_B$$

$$\left(f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \right)_C = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left(f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \right)_C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

$${}_C A_B = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 14 & 15 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_B$$

Näherungsverfahren

Approximations- und Rundungsfehler

Fehlerarten Sei \tilde{x} eine Näherung des exakten Wertes x :

Absoluter Fehler:

$$|\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler:

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \text{ bzw. } \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \text{ für } x \neq 0$$

Konditionierung Die Konditionszahl K beschreibt die relative Fehlervergrößerung bei Funktionsauswertungen:

$$K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \quad \begin{array}{l} K \leq 1: \text{ gut konditioniert} \\ K > 1: \text{ schlecht konditioniert} \\ K \gg 1: \text{ sehr schlecht konditioniert} \end{array}$$

Fehlerfortpflanzung Für f (differenzierbar) gilt näherungsweise:

Absoluter Fehler:

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$$

Relativer Fehler:

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx K \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

Analyse der Fehlerfortpflanzung einer Funktion

1. Berechnen Sie $f'(x)$ und die Konditionszahl K
2. Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler ab
3. Beurteilen Sie die Konditionierung anhand von K

Konditionierung berechnen Für $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $x_0 = 10^{-8}$:

1. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $K = \frac{|x \cdot x|}{|\sqrt{1+x^2} \cdot (1+x^2)|} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$
2. Für $x_0 = 10^{-8}$:
 - $K(10^{-8}) \approx 10^{-16}$ (gut konditioniert)
 - Relativer Fehler wird um Faktor 10^{-16} verkleinert

Fehleranalyse Beispiel: Fehleranalyse von $f(x) = \sin(x)$

1. $f'(x) = \cos(x)$, $K = \frac{|x \cos(x)|}{|\sin(x)|}$
2. Konditionierung:
 - Für $x \rightarrow 0$: $K \rightarrow 1$ (gut konditioniert)
 - Für $x \rightarrow \pi$: $K \rightarrow \infty$ (schlecht konditioniert)
 - Für $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} K = 1$ (gut konditioniert)
3. Der absolute Fehler wird nicht vergrößert, da $|\cos(x)| \leq 1$

Praktische Fehlerquellen der Numerik

Kritische Operationen häufigste Fehlerquellen:

- Auslöschung bei Subtraktion ähnlich großer Zahlen
- Überlauf (overflow) bei zu großen Zahlen
- Unterlauf (underflow) bei zu kleinen Zahlen
- Verlust signifikanter Stellen durch Rundung

Vermeidung von Auslöschung

1. Identifizieren Sie Subtraktionen ähnlich großer Zahlen
2. Suchen Sie nach algebraischen Umformungen
3. Prüfen Sie alternative Berechnungswege
4. Verwenden Sie Taylorentwicklungen für kleine Werte

Beispiele für bessere Formeln:

- $\sqrt{1+x^2} - 1 \rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$
- $1 - \cos(x) \rightarrow 2 \sin^2(x/2)$
- $\ln(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2}$ für kleine x

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Nullstellensatz von Bolzano Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

dann existiert mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Nullstellenproblem systematisch lösen

1. Existenz prüfen:
 - Intervall $[a, b]$ identifizieren
 - Vorzeichenwechsel prüfen: $f(a) \cdot f(b) < 0$
 - Stetigkeit von f sicherstellen
2. Verfahren auswählen:
 - Fixpunktiteration: einfache Umformung $x = F(x)$ möglich
 - Newton: $f'(x)$ leicht berechenbar
 - Sekantenverfahren: $f'(x)$ schwer berechenbar
3. Konvergenz sicherstellen:
 - Fixpunktiteration: $|F'(x)| < 1$ im relevanten Bereich
 - Newton: $\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$ im relevanten Bereich
 - Sekanten: Konvergenzgeschwindigkeit beachten
4. Geeigneten Startwert wählen:
 - Fixpunkt: x_0 im Intervall und nahe Fixpunkt ($|f'(x)| < 1$)
 - Newton: $f'(x_0) \neq 0$
 - Bei mehrfachen Nullstellen: Start zwischen Wendepunkt und Nullstelle
 - Für Polynome: Startwerte zwischen -1 und 1 oft geeignet
 - Sekanten: Zwei Startwerte x_0 und x_1 : $f(x_0) \neq f(x_1)$
 - Idealerweise auf verschiedenen Seiten der Nullstelle
5. Abbruchkriterien festlegen:
 - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
 - Iterationsschritte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
 - Maximale Iterationszahl

Verfahrensauswahl

Finden Sie die positive Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Vorgehen:

1. Existenz:
 - $f(2) = -1 < 0$ und $f(3) = 16 > 0$
 - \Rightarrow Nullstelle in $[2, 3]$
2. Verfahrenswahl:
 - $f'(x) = 3x^2 - 2$ leicht berechenbar
 - \Rightarrow Newton-Verfahren geeignet
3. Konvergenzcheck:
 - $f'(x) > 0$ für $x > 0.82$
 - $f''(x) = 6x$ monoton
 - \Rightarrow Newton-Verfahren konvergiert

Fixpunktiteration

Fixpunktgleichung ist eine Gleichung der Form: $F(x) = x$
Die Lösungen \bar{x} , für die $F(\bar{x}) = \bar{x}$ erfüllt ist, heissen Fixpunkte.

Grundprinzip der Fixpunktiteration sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a, b]$

Die rekursive Folge $x_{n+1} \equiv F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

heisst Fixpunktiteration von F zum Startwert x_0 .

Konvergenzverhalten

Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung F' und $\bar{x} \in [a, b]$ ein Fixpunkt von F . Dann gilt für die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$:

Anziehender Fixpunkt:

$$|F'(\bar{x})| < 1$$

x_n konvergiert gegen \bar{x} ,
falls x_0 nahe genug bei \bar{x}

Abstossender Fixpunkt:

$$|F'(\bar{x})| > 1$$

x_n konvergiert für keinen
Startwert $x_0 \neq \bar{x}$

Banachscher Fixpunktsatz $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ und \exists Konstante α :

- $0 < \alpha < 1$ (Lipschitz-Konstante)
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$

Dann gilt:

Fehlerabschätzungen:

- F hat genau einen Fixpunkt \bar{x} in $[a, b]$
 - Die Fixpunktiteration konvergiert gegen \bar{x} für alle $x_0 \in [a, b]$
- a-priori:** $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \cdot |x_1 - x_0|$
a-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

Konvergenznachweis für Fixpunktiteration

1. Bringe die Gleichung in Fixpunktform: $f(x) = 0 \Rightarrow x = F(x)$
 - Form mit kleinstem $|F'(x)|$ wählen
2. Prüfe, ob F das Intervall $[a, b]$ in sich abbildet:
 - Wähle geeignetes Intervall $[a, b]$ $F(a) \geq a$ und $F(b) \leq b$
3. Bestimme die Lipschitz-Konstante α : \rightarrow Berechne $F'(x)$
 - Finde $\alpha = \max_{x \in [a, b]} |F'(x)|$ und prüfe $\alpha < 1$
4. Fehlerabschätzung:
 - A-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$
 - A-posteriori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_n - x_{n-1}|$
4. Berechnen Sie die nötigen Iterationen für Genauigkeit tol:
$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\text{tol} \cdot (1 - \alpha)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln \alpha}$$

Fixpunktiteration Nullstellen von $f(x) = e^x - x - 2$

Umformung in Fixpunktform: $x = \ln(x + 2)$, also $F(x) = \ln(x + 2)$

1. $F'(x) = \frac{1}{x+2}$ monoton fallend
2. Für $I = [1, 2]$: $F(1) = 1.099 > 1$, $F(2) = 1.386 < 2$
3. $\alpha = \max_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1}{x+2} \right| = \frac{1}{3} < 1$
4. Konvergenz für Startwerte in $[1, 2]$ gesichert
5. Für Genauigkeit 10^{-6} benötigt: $n \geq 12$ Iterationen

Fixpunktiteration Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ mittels Fixpunktiteration.

1. Umformung: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{x^2+3}{2x} =: F(x)$
2. Konvergenznachweis für $[1, 2]$: $F'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$
3. $F([1, 2]) \subseteq [1, 2]$ und $|F'(x)| \leq \alpha = 0.25 < 1$ für $x \in [1, 2]$
4. Für Genauigkeit 10^{-6} :
 - $|x_1 - x_0| = |1.5 - 2| = 0.5$
 - $n \geq \frac{\ln(10^{-6} \cdot 0.75 / 0.5)}{\ln 0.25} \approx 12$

Grundprinzip Newton-Verfahren

Approximation der NS durch sukzessive Tangentenberechnung:
Konvergiert, wenn für alle x im relevanten Intervall gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Newton-Verfahren anwenden

- 1. Funktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ aufstellen
- 2. Geeigneten Startwert x_0 nahe der Nullstelle wählen
 - Prüfen, ob $f'(x_0) \neq 0$
- 3. Iterieren bis zur gewünschten Genauigkeit: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- 4. Abbruchkriterien prüfen:
 - Funktionswert: $|f(x_n)| < \epsilon_1$
 - Änderung aufeinanderfolgenden Werte: $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$
 - Maximale Iterationszahl nicht überschritten
- 5. Fehlerabschätzung:
 - $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$ falls
 - $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$

Newton-Verfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Ableitung: $f'(x) = 2x$, Startwert $x_0 = 1$

- 1. $x_1 = 1 - \frac{1^2-2}{2 \cdot 1} = 1.5 \rightarrow$ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- 2. $x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2-2}{2 \cdot 1.5} = 1.4167$
- 3. $x_3 = 1.4167 - \frac{1.4167^2-2}{2 \cdot 1.4167} = 1.4142$

Vereinfachtes Newton-Verfahren

Alternative Variante mit konstanter Ableitung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Konvergiert langsamer, aber benötigt weniger Rechenaufwand.

Sekantenverfahren

Alternative zum Newton-Verfahren ohne Ableitungsberechnung. Verwendet zwei Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Benötigt zwei Startwerte x_0 und x_1 .

Sekantenverfahren Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2$
Startwerte $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$

- 1. $x_2 = 1 - \frac{1-2}{1^2-2} \cdot 1 = 1.5 \rightarrow$ Konvergenz gegen $\sqrt{2}$ nach wenigen Schritten
- 2. $x_3 = 1.5 - \frac{1.5-1}{1.5^2-2} \cdot 1.5 = 1.4545$
- 3. $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545-1.5}{1.4545^2-2} \cdot 1.4545 = 1.4143$

Newton für Nichtlineare Systeme Bestimmen Sie die Nullstelle des Systems: $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ $f_2(x, y) = y - x^2 = 0$

Lösung:

- 1. Jacobi-Matrix aufstellen: $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$
- 2. Newton-Iteration:
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1}(x_k, y_k) \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$
- 3. Mit Startwert $(0.5, 0.25)$ erste Iteration durchführen

Fehlerabschätzung für Nullstellen

So schätzen Sie den Fehler einer Näherungslösung ab:

- 1. Sei x_n der aktuelle Näherungswert
- 2. Wähle Toleranz $\epsilon > 0$
- 3. Prüfe Vorzeichenwechsel: $f(x_n - \epsilon) \cdot f(x_n + \epsilon) < 0$
- 4. Falls ja: Nullstelle liegt in $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$
- 5. Damit gilt: $|x_n - \xi| < \epsilon$

Praktische Fehlerabschätzung Fehlerbestimmung bei $f(x) = x^2 - 2$

- 1. Näherungswert: $x_3 = 1.4142157$ **Also:** $|x_3 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$
- 2. Mit $\epsilon = 10^{-5}$: \rightarrow Nullstelle liegt in $(1.4142057, 1.4142257)$
- 3. $f(x_3 - \epsilon) = 1.4142057^2 - 2 < 0$
- 4. $f(x_3 + \epsilon) = 1.4142257^2 - 2 > 0$

Konvergenzordnung Sei (x_n) eine gegen \bar{x} konvergierende Folge. Die Konvergenzordnung $q \geq 1$ ist definiert durch:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$$

wo $c > 0$ eine Konstante. Für $q = 1$ muss zusätzl. $c < 1$ gelten.

Konvergenzordnungen der Verfahren Konvergenzgeschwindigkeiten

Newton-Verfahren: Quadratische Konvergenz: $q = 2$

Vereinfachtes Newton: Lineare Konvergenz: $q = 1$

Sekantenverfahren: Superlineare Konvergenz: $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Konvergenzgeschwindigkeit Vergleich der Verfahren:

Startwert $x_0 = 1$, Funktion $f(x) = x^2 - 2$, Ziel: $\sqrt{2}$

n	Newton	Vereinfacht	Sekanten
1	1.5000000	1.5000000	1.5000000
2	1.4166667	1.4500000	1.4545455
3	1.4142157	1.4250000	1.4142857
4	1.4142136	1.4125000	1.4142136

Fehleranalyse der Verfahren Vergleich der Fehlerkonvergenz für $f(x) = e^x - x - 2$:

Theoretisch:

- Newton: $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2$ mit $e_n = x_n - \xi$
- Sekanten: $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^{1.618}$
- Fixpunkt: $|e_{n+1}| \leq \alpha|e_n|$ mit $\alpha < 1$

Praktisch:

Mit $x_0 = 1$:

n	$ x_n - \xi _{Newton}$	$ x_n - \xi _{Sekanten}$	$ x_n - \xi _{Fixpunkt}$
1	1.0e-1	2.3e-1	3.1e-1
2	5.2e-3	4.5e-2	9.6e-2
3	1.4e-5	3.8e-3	3.0e-2

Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Matrix-Zerlegungen

Dreieckszerlegung Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann zerlegt werden in:

Untere Dreiecksmatrix L:

$l_{ij} = 0$ für $j > i$

Diagonale normiert ($l_{ii} = 1$)

Obere Dreiecksmatrix R:

$r_{ij} = 0$ für $i > j$

Diagonalelemente $\neq 0$

LR-Zerlegung

LR-Zerlegung

Jede reguläre Matrix A , für die der Gauss-Algorithmus ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, lässt sich zerlegen in: $A = LR$ wobei L eine normierte untere und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

LR-Zerlegung durchführen $(E|A|E) \xrightarrow{\text{Gauss}} (P|R|L)$

1. Zerlegung bestimmen:

- Gauss-Elimination durchführen
- Eliminationsfaktoren $-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ in L speichern
- Resultierende obere Dreiecksmatrix ist R

2. System lösen:

- Vorwärtseinsetzen: $Ly = b$
- Rückwärtseinsetzen: $Rx = y$

3. Bei Pivotisierung:

- Permutationsmatrix P erstellen
- $PA = LR$ speichern
- $Ly = Pb$ lösen

E = Einheitsmatrix, P = Permutationsmatrix

LR-Zerlegung $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_A, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_b \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$

Schritt 1: Erste Spalte

Max. Element in 1. Spalte: $|a_{31}| = 5$, also Z1 und Z3 tauschen:

$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$ Eliminationsfaktoren: $l_{21} = \frac{1}{5}, l_{31} = -\frac{1}{5}$

Nach Elimination: $\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3.2 & -2.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 1.8 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$

Schritt 2: Zweite Spalte

Max. Element in 2. Spalte unter Diagonale: $|-3.2| > |1.2|$, keine Vertauschung nötig. Eliminationsfaktor: $l_{32} = \frac{1.2}{-3.2} = -\frac{3}{8}$

Nach Elimination: $\left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3.2 & -2.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$

Lösung des Systems

1. $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Löse $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.4 \\ 2.25 \end{pmatrix}$

3. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Probe: $Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = b$

QR-Zerlegung

QR-Zerlegung

Eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt: $Q^T Q = Q Q^T = I_n$

Die QR-Zerlegung einer Matrix A ist: $A = QR$

wobei Q orthogonal und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Householder-Transformation

Eine Householder-Matrix hat die Form: $H = I_n - 2uu^T$

mit $u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1$. Es gilt:

- H ist orthogonal ($H^T = H^{-1}$) und symmetrisch ($H^T = H$)
- $H^2 = I_n$

QR-Zerlegung mit Householder

1. Initialisierung: $R := A, Q := I_n$

2. Für $i = 1, \dots, n-1$:

- Bilde Vektor v_i aus i -ter Spalte von R ab Position i
- $w_i := v_i + \text{sign}(v_{i1})\|v_i\|e_1$
- $u_i := w_i / \|w_i\|$
- $H_i := I_{n-i+1} - 2u_i u_i^T$
- Erweitere H_i zu Q_i durch I_{i-1} links oben
- $R := Q_i R$ und $Q := Q Q_i^T$

QR-Zerlegung mit Householder $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Erste Spalte

Erste Spalte a_1 und Einheitsvektor e_1 : $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Vektor für erste Spalte:

- Berechne Norm: $|a_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$
- Bestimme Vorzeichen: $\text{sign}(a_{11}) = \text{sign}(2) = 1$
 - Wähle positives Vorzeichen, da erstes Element positiv
 - Dies maximiert die erste Komponente von v_1
 - Verhindert Auslöschung bei der Subtraktion
- $v_1 = a_1 + \text{sign}(a_{11})|a_1|e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Normiere v_1 : $|v_1| = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2 + 1} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ -0.41 \\ 0 \end{pmatrix}$

Householder-Matrix berechnen: $H_1 = I - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -0.67 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A nach 1. Transformation: $A^{(1)} = H_1 A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -0.89 & 1.79 \\ 0 & 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Zweite Spalte

Untermatrix für zweite Transformation: $A_2 = \begin{pmatrix} -0.89 & 1.79 \\ 2.00 & 1.00 \end{pmatrix}$

Householder-Vektor für zweite Spalte:

- $|a_2| = \sqrt{(-0.89)^2 + 2^2} = 2.19$
- $\text{sign}(a_{22}) = \text{sign}(-0.89) = -1$ (da erstes Element negativ)
- $v_2 = \begin{pmatrix} -0.89 \\ 2.00 \end{pmatrix} - 2.19\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.09 \\ 2.00 \end{pmatrix}$
- $u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ 0.54 \end{pmatrix}$

Erweiterte Householder-Matrix: $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.41 & -0.91 \\ 0 & -0.91 & 0.41 \end{pmatrix}$

nach 2. Transformation: $R = Q_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Endergebnis

Die QR-Zerlegung $A = QR$ ist:

$Q = H_1^T Q_2^T = \begin{pmatrix} -0.89 & -0.45 & 0 \\ 0.45 & -0.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -6.71 & 0.45 \\ 0 & -2.19 & 1.34 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}$

Probe

- $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
- $Q^T Q = Q Q^T = I$ (Orthogonalität)
- R ist obere Dreiecksmatrix

Wichtige Beobachtungen

- Vorzeichenwahl bei v_k ist entscheidend für numerische Stabilität
- Ein falsches Vorzeichen kann zu Auslöschung führen
- Betrag der Diagonalelemente in R = Norm transformierter Spalten
- Q ist orthogonal: Spaltenvektoren sind orthonormal

Iterative Verfahren

Zerlegung der Systemmatrix A zerlegt in: $A = L + D + R$

- L : streng untere Dreiecksmatrix
- D : Diagonalmatrix
- R : streng obere Dreiecksmatrix

Jacobi-Verfahren Gesamtschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$

Komponentenweise: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Gauss-Seidel-Verfahren Einzelschrittverfahren

Iteration: $x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} R x^{(k)} + (D + L)^{-1} b$

Komponentenweise:

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

Konvergenzkriterien Ein iteratives Verfahren konvergiert, wenn:

- Die Matrix A diagonaldominant ist:
 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- Der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner 1 ist:
 $\rho(B) < 1$ mit B als jeweilige Iterationsmatrix

Implementierung von Jacobi- und Gauss-Seidel-Verfahren

Vorbereitungsphase

- Matrix zerlegen in $A = L + D + R$
- Diagonaldominanz prüfen: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
- Sinnvolle Startwerte wählen (z.B. $x^{(0)} = 0$ oder $x^{(0)} = b$)
- Toleranz ϵ und max. Iterationszahl n_{max} festlegen

Verfahren durchführen

- Jacobi:** Komponentenweise parallel berechnen
- Gauss-Seidel:** Komponentenweise sequentiell berechnen

Konvergenzprüfung / Abbruchkriterien

- Absolute Änderung: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$
- Relatives Residuum: $\frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\|} < \epsilon$
- Maximale Iterationszahl: $k < n_{max}$

A-priori Fehlerabschätzung

- Spektralradius ρ der Iterationsmatrix bestimmen
- Benötigte Iterationen n für Genauigkeit ϵ :
 $n \geq \frac{\ln(\epsilon(1-\rho)/\|x^{(1)} - x^{(0)}\|)}{\ln(\rho)}$

Matrix- und Vektornormen

Eine Vektornorm $\| \cdot \|$ erfüllt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Wichtige Normen

1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
 ∞ -Norm: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Fehlerabschätzung für LGS

Sei $\| \cdot \|$ eine Norm, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $Ax = b, A\tilde{x} = \tilde{b}$

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$ **Relativer Fehler:** $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

Mit der Konditionszahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Konditionierung

Die Konditionszahl beschreibt die numerische Stabilität eines LGS:

- $\text{cond}(A) \approx 1$: gut konditioniert
- $\text{cond}(A) \gg 1$: schlecht konditioniert
- $\text{cond}(A) \rightarrow \infty$: singulär

Konditionierung $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$
Konditionszahl: $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 400$

Fehlerabschätzung

Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq 400 \cdot 0.01 = 4$
Relativer Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 400 \cdot \frac{0.01}{2} = 2$

Vergleich Lösungsverfahren $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matrix ist symmetrisch und nicht streng diagonaldominant
- $\text{cond}_\infty(A) \approx 12.5$

Verfahren	Iterationen	Residuum	Zeit
LR mit Pivot	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.0
QR	1	$2.2 \cdot 10^{-16}$	2.3
Jacobi	12	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.8
Gauss-Seidel	7	$1.0 \cdot 10^{-6}$	1.4

- Direkte Verfahren erreichen höhere Genauigkeit
- Iterative Verfahren brauchen mehrere Schritte

Konvergenzverhalten $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist diagonaldominant: $|a_{ii}| = 4 > 1 = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

k	Residuum		Rel. Fehler	
	Jacobi	G-S	Jacobi	G-S
0	3.74	3.74	-	-
1	0.94	0.47	0.935	0.468
2	0.23	0.06	0.246	0.125
3	0.06	0.01	0.065	0.017
4	0.01	0.001	0.016	0.002

Beobachtungen:

- Gauss-Seidel konvergiert etwa doppelt so schnell wie Jacobi
- Das Residuum fällt linear (geometrische Folge)
- Die Konvergenz ist gleichmäßig (keine Oszillationen)

Systematisches Vorgehen bei LGS

- Eigenschaften der Matrix analysieren:
 - Diagonaldominanz prüfen
 - Konditionszahl berechnen oder abschätzen
 - Symmetrie erkennen
- Verfahren auswählen:
 - Direkte Verfahren: für kleinere Systeme
 - Iterative Verfahren: für große, dünnbesetzte Systeme
 - Spezialverfahren: für symmetrische/bandförmige Matrizen
- Implementation planen:
 - Pivotisierung bei Gauss berücksichtigen
 - Speicherbedarf beachten
 - Abbruchkriterien festlegen

Zeilenvertauschungen verfolgen

- Initialisiere $P = I_n$
- Für jede Vertauschung von Zeile i und j :
 - Erstelle P_k durch Vertauschen von Zeilen i, j in I_n
 - Aktualisiere $P = P_k \cdot P$
 - Wende Vertauschung auf Matrix an: $A := P_k A$
- Bei der LR-Zerlegung mit Pivotisierung:
 - $PA = LR$
 - Löse $Ly = Pb$ und $Rx = y$

QR-Verfahren

QR-Verfahren

Das QR-Verfahren transformiert die Matrix A iterativ in eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind:

- Initialisierung: $A_0 := A, P_0 := I_n$
- Für $i = 0, 1, 2, \dots$:
 - QR-Zerlegung: $A_i = Q_i R_i$
 - Neue Matrix: $A_{i+1} = R_i Q_i$
 - Update: $P_{i+1} = P_i Q_i$

QR-Verfahren

Voraussetzungen

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Eigenwerte sollten verschiedene Beträge haben für gute Konvergenz

Algorithmus

- Initialisierung:
 - $A_0 := A$ und $Q_0 := I_n$
 - Maximale Iterationszahl und Toleranz festlegen
- Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - QR-Zerlegung von A_k berechnen: $A_k = Q_k R_k$
 - Neue Matrix berechnen: $A_{k+1} = R_k Q_k$
 - Transformationsmatrix aktualisieren: $P_{k+1} = P_k Q_k$
- Abbruchkriterien prüfen:
 - Subdiagonalelemente nahe Null: $|a_{i+1,i}| < \varepsilon$
 - Änderung der Diagonalelemente klein
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Auswertung

- Eigenwerte: Diagonalelemente von A_k
- Eigenvektoren: Spalten der Matrix P_k
- Bei 2×2 -Blöcken: Komplexe Eigenwertpaare

QR-Verfahren Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Erste Iteration:
 - QR-Zerlegung: $Q_1 = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.89 & 0 \\ 0.89 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 2.24 & 0.45 \\ 0 & -1 & 0.89 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.24 & 0.45 & 0.45 \\ 0.45 & 0.38 & 0.89 \\ 0.45 & 0.89 & 1 \end{pmatrix}$
- Nach Konvergenz: $A_k \approx \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

QR-Iteration Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

- QR-Zerlegung von A : $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Neue Matrix: $A_1 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$
- Konvergenz nach mehreren Iterationen gegen:
 $A_\infty \approx \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{pmatrix}$ mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Eigenwerte: $\lambda_1 = \phi, \lambda_2 = -\phi^{-1}$

Von-Mises-Iteration (Vektoriteration)

Für eine diagonalisierbare Matrix A mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ konvergiert die Folge:

$$v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2}, \quad \lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$$

gegen einen Eigenvektor v zum betragsmäßig größten Eigenwert λ_1 .
⇒ sehe [Spektralradius](#) auf nächster Seite

Von-Mises-Iteration / Vektoriteration

Voraussetzungen

- Matrix diagonalisierbar und $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Iteration durchführen

- Startvektor $v^{(0)}$ wählen:
 - Zufälligen Vektor oder $(1, \dots, 1)^T$ wählen
 - Auf Länge 1 normieren: $\|v^{(0)}\|_2 = 1$
- Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz:
 - Iterationsvektor berechnen: $w^{(k)} = Av^{(k)}$
 - Normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
- Eigenwertapproximation: $\lambda^{(k+1)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$ (Rayleigh-Quotient)
- Abbruchkriterien prüfen:
 - Änderung des Eigenvektors: $\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\| < \epsilon$
 - Änderung des Eigenwertes: $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < \epsilon$
 - Maximale Iterationszahl erreicht
- Konvergenz:
 - $v^{(k)} \rightarrow$ Eigenvektor zu $|\lambda_1|$
 - $\lambda^{(k)} \rightarrow |\lambda_1|$

Verifikation

- Prüfen ob $Av^{(k)} \approx \lambda^{(k)} v^{(k)}$
- Residuum berechnen: $\|Av^{(k)} - \lambda^{(k)} v^{(k)}\|$
- Orthogonalität zu anderen Eigenvektoren prüfen

Von-Mises-Iteration Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Mit Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$:

- Erste Iteration:
 - $w^{(0)} = Av^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4, 0, 2)^T$
 - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(4, 0, 2)^T$
 - $\lambda^{(1)} = (v^{(0)})^T Av^{(0)} = 3.33$
- Zweite Iteration:
 - $w^{(1)} = Av^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{20}}(18, -2, 8)^T$
 - $v^{(2)} = \frac{w^{(1)}}{\|w^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{388}}(18, -2, 8)^T$
 - $\lambda^{(2)} = 5.12$

Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5.17$ und $v = (0.89, -0.10, 0.39)^T$

Inverse Iteration Die inverse Iteration berechnet einen Eigenvektor zu einem bekannten oder geschätzten Eigenwert μ durch:

$$v^{(k+1)} = \frac{(A - \mu I)^{-1} v^{(k)}}{\|(A - \mu I)^{-1} v^{(k)}\|_2}$$

Konvergiert typischerweise gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert $\lambda_i - \mu$.

Inverse Iteration anwenden

- Vorbereitung:
 - Näherungswert μ für Eigenwert wählen
 - Zufälligen Startvektor $v^{(0)}$ normieren
 - LR-Zerlegung von $(A - \mu I)$ berechnen
- Iteration durchführen:
 - LR-System $(A - \mu I)w^{(k)} = v^{(k)}$ lösen
 - Neuen Vektor normieren: $v^{(k+1)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
 - Rayleigh-Quotient berechnen für Eigenwert
- Abbruch wenn:
 - Residuum $\|(A - \lambda^{(k)} I)v^{(k)}\| < \epsilon$
 - Maximale Iterationszahl erreicht

Inverse Iteration Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \approx 2$ der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 2.0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 1.9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- $\mu = 2.0$ als Näherung wählen
- Startvektor $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$
- Erste Iteration:
 - $(A - 2I)w^{(0)} = v^{(0)}$ lösen
 - $v^{(1)} = \frac{w^{(0)}}{\|w^{(0)}\|} \approx (0.61, 0.63, 0.48)^T$
 - $\lambda^{(1)} \approx 2.01$

Vergleich der Eigenwertverfahren

Vergleich der Eigenwertverfahren

- Von-Mises Iteration: Findet betragsmäßig größten Eigenwert
 - Einfach zu implementieren, Langsame lineare Konvergenz
- Inverse Iteration: Braucht Näherung für Eigenwert
 - Schnelle Konvergenz, LR-Zerlegung pro Schritt nötig
- QR-Verfahren: Berechnet alle Eigenwerte
 - Kubischer Aufwand pro Iteration, Globale und stabile Konvergenz

Numerische Aspekte der Verfahren

- Wahl des Startpunkts:
 - Von-Mises: zufälliger normierter Vektor
 - Inverse Iteration: Näherung für μ wichtig
 - QR: Matrix vorher auf Hessenberg-Form
- Konvergenzprüfung:
 - Residuum $\|Ax^{(k)} - \lambda^{(k)} x^{(k)}\|$
 - Änderung in aufeinanderfolgenden Iterationen
 - Subdiagonalelemente bei QR

Spektralradius Der Spektralradius einer Matrix A ist definiert als:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

Er gibt den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts an.

Bedeutung des Spektralradius Der Spektralradius ist wichtig für:

- Konvergenz von Iterationsverfahren
- Stabilität dynamischer Systeme
- Abschätzung von Matrixnormen
- Konvergenz von Potenzreihen mit Matrizen

Konvergenzssatz Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:

- $\rho(A) < 1$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$
- Die Neumannsche Reihe $\sum_{k=0}^\infty A^k$ konvergiert
- $(I - A)$ ist invertierbar mit $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty A^k$

Spektralradius bestimmen und anwenden

- Berechnung:
 - Eigenwerte λ_i bestimmen
 - Maximum der Absolutbeträge bilden
 - Bei großen Matrizen: numerische Verfahren
- Konvergenzanalyse:
 - Bei Iterationsverfahren: $\rho(M) < 1$ prüfen
 - Bei Matrixpotenzen: $\rho(A) < 1$ prüfen
 - Konvergenzgeschwindigkeit $\approx |\rho(A)|^k$
- Abschätzungen:
 - $\rho(A) \leq \|A\|$ für jede Matrixnorm
 - $\rho(AB) = \rho(BA)$ für beliebige Matrizen
 - $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$ für $k \in \mathbb{N}$

Anwendungen des Spektralradius

- Iterative Verfahren:
 - Jacobi: $\rho(-D^{-1}(L + R)) < 1$
 - Gauss-Seidel: $\rho(-(D + L)^{-1}R) < 1$
 - SOR: Optimaler Parameter ω bestimmen
- Matrixreihen:
 - Konvergenz von $\sum_{k=0}^\infty A^k$ und Existenz von $(I - A)^{-1}$
 - Abschätzung der Reihensumme

Spektralradius und Konvergenz Untersuchen Sie die Konvergenz des

Jacobi-Verfahrens für: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

- Zerlegung $A = D + L + R$: $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, L + R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Jacobi-Matrix $M = -D^{-1}(L + R)$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
- Eigenwerte von M : $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.5$
- Spektralradius: $\rho(M) = 0.5 < 1$
- Schlussfolgerung:
 - Jacobi-Verfahren konvergiert (Konvergenzrate ist linear)
 - Fehler reduziert sich pro Iteration etwa um Faktor 0.5