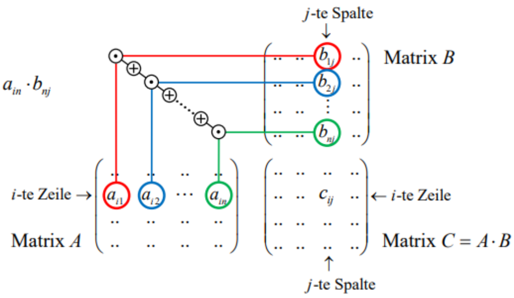
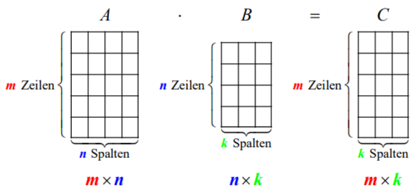
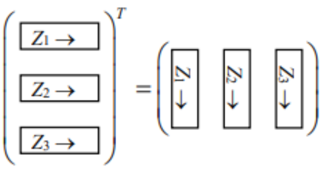
Grundlagen der Matrizenrechnung

Rechnungstyp	**Rechenregel**
Addition & Subtraktion: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5&2+6\\3+7&4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-1&6-2\\7-3&8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$	Kommutativ-Gesetz: $A+B=B+A$ Assoziativ-Gesetz: $A+(B+C)=(A+B)+C$
Skalare Multiplikation: $5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1&5\cdot2\\5\cdot3&5\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}$	Distributiv-Gesetz: $\lambda*(A+B)=\lambda*A+\lambda*B$ und $(\lambda+\mu)*A=\lambda*A+\mu*A$ Assoziativ-Gesetz: $(\lambda*A)*B=\lambda*(A*B)=A*(\lambda*B)$
Multiplikation: $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$  *Spaltenanzahl von A muss gleich Zeilenanzahl von B sein.*	Assoziativ-Gesetz: $A*(B*C)=(A*B)*C$ Distributiv-Gesetz: $A*(B+C)=A*B+A*C$ und $(A+B)*C=A*C+B*C$ 
Transponieren:  $\begin{pmatrix}7&-1\\0.2&11\\3&5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}7&0.2&3\\-1&11&5\end{pmatrix}$ *Eine $m\times n$ Matrix wird zu einer $n\times m$ Matrix.*	Spezial: $(A*B)^T=A^T*B^T$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Jedes LGS entspricht einer Matrizengleichung:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

Die Koeffizienten Matrix von A und $\vec{c}$:

$$(A|\,\vec{c}\,)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform

Beispiel

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

1 führende Einsen

führende Unbekannte: x_1, x_3

freie Unbekannte: x_2, x_4

- freie Unbekannten erhalten ein Parameter: $\lambda, \mu, \ldots \in \mathbb{R}$
- jede Zeile entspricht einer Gleichung:
  - $x_1 - 2\lambda + 3\mu = 5$ $x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$
  - $x_3 + \mu = 3$ $x_3 = 3 - \mu$

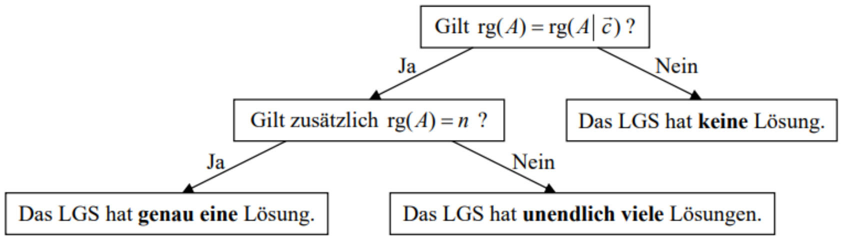
Beispiel Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit LGS

Der Rang einer Matrix $A = \mathrm{rg}(A)$ wird so bestimmt:

1. Wir bringen A in die Zeilenstufenform.
2. Dann ist $\mathrm{rg}(A) =$ Gesamtanzahl Zeilen – Anzahl Nullzeilen.
3. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$



Vektorgeometrie

Kollinear

<u>Zwei</u> Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear, wenn $\vec{a} = \lambda * \vec{b}$ oder $\vec{b} = \lambda * \vec{a}$ gilt.

Komplanar

<u>Drei</u> Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind komplanar, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind und $\vec{c} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{b}$ gilt.

Einheitsvektor

$$\vec{a} * \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{e}_a \ \text{(zeigt in Richtung von a)}$$

Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

$$\lambda * \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda * a_1 \\ \lambda * a_2 \\ \lambda * a_3 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor P_1, P_2

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag eines ebenen Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Betrag eines räumlichen Vektor

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Skalarprodukt in der Ebene

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Skalarprodukt im Raum

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Zwischenwinkel zweier Vektoren

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right)$$

Zwischenwinkel $\varphi = 90°$, wenn

$$\vec{a} * \vec{b} = 0$$

Rechenregel des Skalarprodukts

Kommutativ-Gesetz:

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

Distributiv-Gesetz:

$$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

und

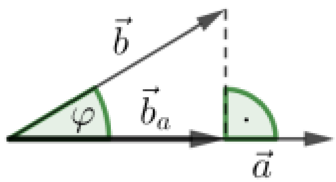
$$(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{a} * \vec{c}$$

Gem. Assoziativ-Gesetz:

$$\lambda * (\vec{a} * \vec{b}) = (\lambda * \vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\lambda * \vec{b})$$

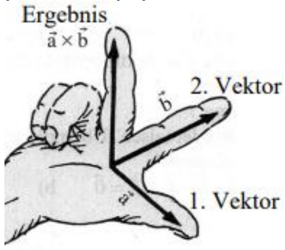
Projektion

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}|^2} * \vec{a} \qquad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} * \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



Vektorprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin(\varphi) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi$



Berechnung des Vektorprodukts

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ a_1 & b_1 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Vektorprodukt

- Wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear.
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Rechenregel des Vektorprodukts

Antikommutativ-Gesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

Distributiv-Gesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

und

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Gem. Assoziativ-Gesetz:

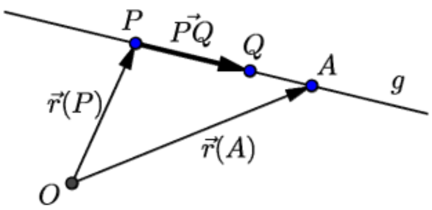
$$\lambda * (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda * \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda * \vec{b})$$

Geraden und Ebenen

Parameterdarstellung

Gerade

$$g : \vec{r}(P) + \lambda * \overrightarrow{PQ}$$

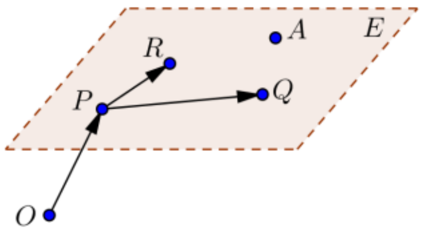


P : Aufpunkt, $\overrightarrow{PQ}$: Richtungsvektor

Ein Punkt A liegt auf g, wenn $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda_A * \overrightarrow{PQ}$ gilt.

Ebene

$$E : \vec{r}(P) + \lambda * \overrightarrow{PQ} + \mu * \overrightarrow{PR}$$



P : Aufpunkt, $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$: Richtungsvektoren

Ein Punkt A liegt auf E, wenn $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda_A * \overrightarrow{PQ} + \mu_A * \overrightarrow{PR}$ gilt.

Koordinatendarstellung

Gerade

$g : ax + by + c = 0$ (nur in der Ebene!)

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Abstand zum Ursprung: $\frac{c}{|\vec{n}|}$

Ein Punkt $P = (x_P, y_P)$ liegt auf g, wenn $ax_P + by_P + c = 0$.

Ebene

$E : ax + by + cz + d = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Abstand zum Ursprung: $\frac{d}{|\vec{n}|}$

Ein Punkt $P = (x_P, y_P, z_P)$ liegt auf E, wenn $ax_P + by_P + cz_P + d = 0$.

Abstände

Gerade

Abstand von Punkt A zur Gerade g:

$$l = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

Ebene

Abstand von Punkt A zur Ebene E:

$$l = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$

Umrechnung Parameter- / Koordinatendarstellung

für Gerade g	für Ebene E
von Parameter → Koordinaten	
Punkt A liegt auf g, dann gilt: $\vec{r}(A) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}(P) + \lambda * \vec{a}$ x-Gleichung nach λ auflösen. x-Gleichung in y-Gleichung setzten, nach 0 auflösen.	Das Vektorprodukt $\vec{n}$ von $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert die ersten drei Komponente der Koordinatendarstellung. Aufpunkt P wird in die Koordinatengleichung gesetzt und nach d aufgelöst.
von Koordinaten → Parameter	
Zwei Punkte P, Q welche $ax + by + c = 0$ lösen, können wir in der Parameterdarstellung darstellen: $g: \vec{r}(P) + \lambda * \overrightarrow{PQ}$	Drei Punkte P, Q, R welche $ax + by + cz + d = 0$ lösen, können wir in der Parameterdarstellung darstellen: $E: \vec{r}(P) + \lambda * \overrightarrow{PQ} + \mu * \overrightarrow{PR}$

Schnittpunkte & Schnittgeraden im Raum

Schnittpunkt S	Schnittgerade
Schneidet eine Gerade eine Ebene, dann gilt: $g = E$ $\vec{r}(P) + \lambda * \overrightarrow{PQ} = \vec{r}(M) + \mu * \overrightarrow{MN} + \nu * \overrightarrow{MO}$ Nun setzt man für λ oder μ, ν den errechneten Wert ein und erhält den Schnittpunkt S. **oder** Wenn E in der Koordinatendarstellung und g in der Parameterdarstellung liegt, kann man g direkt in E einsetzten: $a(x_g + \lambda x_\lambda) + b(y_g + \lambda y_\lambda) + c(z_g + \lambda z_\lambda) + d = 0$ und setzt den Wert für λ in g ein.	Schneiden sich zwei Ebenen dann gilt: $E_1 = E_2$ $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$ daraus ergibt sich folgendes LGS: $\left(\begin{array}{ccc\|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{array}\right)$ es gibt dann eine freie Unbekannte, diese ist das μ in der Parameterdarstellung.

Gegenseitige Lage von Geraden

		Gibt es einen gemeinsamen Punkt?	
		ja	nein
Sind die Richtungsvektoren kollinear?	ja	identisch	echt parallel
	nein	schneidend	windschief (nur im Raum)

- Ob zwei Richtungsvektoren kollinear sind erfährt man, wenn $\vec{a} = \lambda * \vec{b}$ oder $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ gilt.
- Ob ein gemeinsamer Punkt existiert, setzt man beide Geraden gleich. Also das LGS ist **lösbar**.

Gegenseitige Lage von Ebenen

Wir betrachten zwei Ebenen $E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ und $E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Die Ebenen sind:

identisch, wenn	es einen Faktor λ gibt, bei dem gilt: $a_1 = \lambda * a_2,\ b_1 = \lambda * b_2,\ c_1 = \lambda * c_2,\ d_1 = \lambda * d_2$
parallel, wenn	es einen Faktor λ gibt, bei dem gilt: $a_1 = \lambda * a_2,\ b_1 = \lambda * b_2,\ c_1 = \lambda * c_2$
schneidend, wenn	die Ebenen weder identisch noch parallel sind. Die Schnittmenge ist eine Schnittgerade

Quadratische Matrizen

Diagonalmatrix	Einheitsmatrix	untere Dreiecksmatrix	untere Dreiecksmatrix	symmetrische Matrix
$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

Inverse Matrizen

Die Inverse einer quadratischen Matrix A ist eine Matrix A^{-1}, für die gilt: $A * A^{-1} = E$.

Inverse einer 2x2 Matrix:

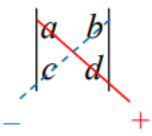
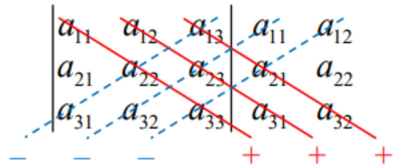
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer $n \times n$ Matrix, $n > 2$:
Dafür wenden wir das Gauss-Jordan-Verfahren auf die Matrix $(A|E)$ an. Wenn A invertierbar ist, führt dieses auf die Matrix $(E|A^{-1})$.

Beispiel: Gleichungen mit Matrizen

$$2B - X * A = A^T \Longrightarrow 2B - A^T = X * A \Longrightarrow (2B - A^T) * A^{-1} = X * E \Longrightarrow (2B - A^T) * A^{-1} = X$$

Determinante

Die Formel für eine 2×2 Matrix:	Die Formel für eine 3×3 Matrix:
 $a * d - c * b = \det$	

Berechnung der Determinante einer $n \times n$ Matrix

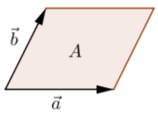
Um die Determinante zu bestimmen, wählen wir eine feste Zeile i **oder** eine feste Spalte j. Um den Rechenaufwand zu minimieren wählen wir eine Spalte oder Zeile mit **den meisten Nullen**. Dann «entwickeln» wir die Determinante gemäss der folgende Formel:

Entwicklung nach der i-ten Zeile	Entwicklung nach der j-ten Spalte
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$	$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$

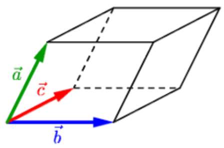
Die Matrix A_{ij} erhält man, wenn man bei A die Zeile i und Spalte j weglässt.

Geometrische Interpretation der Determinante

Der Betrag einer 2×2 Matrix ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms das von den **Spalten** der Matrix aufgespannt wird.



Der Betrag einer 3×3 Matrix ist gleich dem Volumeninhalt des Spats das von den **Spalten** der Matrix aufgespannt wird.



Eigenschaften der Determinante

1. Für die Einheitsmatrix E gilt: $\det(E) = 1$
2. Für eine $n \times n$ Dreiecksmatrix U gilt: $\det(U) = u_{11} * u_{22} * \ldots * u_{nn}$
3. Für jede quadratische Matrix A gilt: $\det(A^T) = \det(A)$
4. Für alle $n \times n$ Matrizen A und B gilt: $\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$
5. Für jede invertierbare Matrix A gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
6. Für jede $n \times n$ Matrix A und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\lambda * A) = \lambda^n * \det(A)$

Äquivalente Aussagen zur Determinante

1. $\det(A) \neq 0$
2. Die Spalten von A sind linear unabhängig.
3. Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
4. $rg(A) = n$
5. A ist invertierbar.
6. Das lineare Gleichungssystem $A * \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Vektorräume

Definition Reeller Vektorraum

Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V $(\neq \emptyset)$ mit zwei Verknüpfungen:

Addition: $V \times V \to V : (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$

Multiplikation (skalar): $\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda; \vec{a}) \mapsto \lambda * \vec{a}$

Damit eine Menge V mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist muss also gelten:

1. Wenn ich zwei beliebige Elemente aus V addiere, liegt das Ergebnis wieder in V.
2. Wenn ich ein beliebiges Element aus V mit λ multipliziere, liegt das Ergebnis wieder in V.
3. {nicht erwähnte Rechenegel} (1) bis (8) werden eingehalten.

Beispiel

$\mathbb{P}_n[x]$	Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Der Vektorraum der reellen $m \times n$ Matrizen.
$\mathbb{R}^n$	Der Vektorraum der Vektoren mit n reellen Komponente.

Unterräume

U ist ein Unterraum von V, wenn U selbst ein Vektorraum ist. Folgende Kriterien gelten:

- $\vec{0} \notin U$, dann ist U **kein** Unterraum von V
- $\vec{a}, \vec{b} \in U$ gilt auch $\vec{a} + \vec{b} \in U$
- für ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt auch $\lambda * \vec{a} \in U$

Gegeben ist ein reeller Vektorraum V sowie Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in V$. Die Menge aller Linearkombinationen:

$$\text{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) = \{\lambda_1 * \vec{b}_1 + \lambda_2 * \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n * \vec{b}_n | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

heisst *linearer Spann* der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$.

- $\{\vec{0}\}$ ist ein Unterraum von jedem Vektorraum V.
- $\mathbb{P}_2[x]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{P}_4[x]$.
- Alle symmetrischen 2×2 Matrizen $S^{2\times 2}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
- Eine Gerade ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, wenn sie durch den **Ursprung** geht.
- Eine Ebene ist genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$, wenn sie durch den **Ursprung** geht.
- Der lineare Spann von Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in V$ ist ein Unterraum von V & Erzeugendensystem von V.

Basis und Dimension

Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ kann umgeschrieben werden zu:

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(beweist auch $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von U.)

Dann wäre folgendes eine mögliche Basis von U:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Wichtig: Die Matrizen / Vektoren in $\mathcal{B}$müssen linear unabhängig sein.

Es gilt auch $\dim(U) = \text{Anzahl Matrizen in } \mathcal{B}$

z.B. $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, da mögliche Wert für $\dim(U) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind $0,1,2,3,4$.

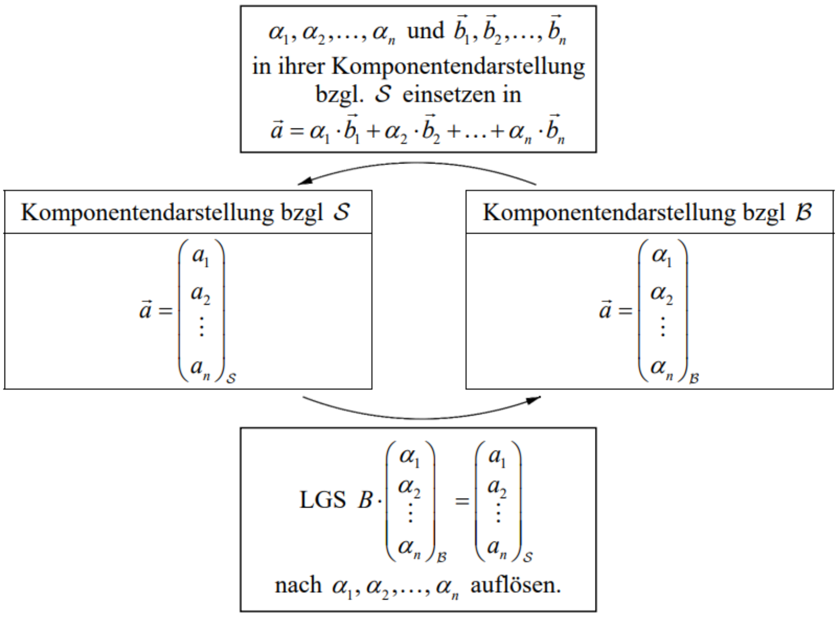
Eine Menge $\mathcal{B}$ von Vektoren / Matrizen $\in V$ heisst Basis von V, wenn gilt:

1. $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.
2. Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig.

Äquivalente Aussagen zu Basen:

1. Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
2. $rg(B) = n$
3. $\det(B) \neq 0$
4. B ist invertierbar.
5. Das LGS $B * \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung.

Komponentendarstellung bezüglich beliebiger Basen



Lineare Abbildung

Definition lineare Abbildung

Gegeben sind zwei reelle Vektor V und W (V und W können auch gleich sein). Eine Abbildung $f : V \to W$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\lambda * \vec{x}) = \lambda * f(\vec{x})$

Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn man f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ anwendet, heisst *Bild* von $\vec{x}$.

Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung

Die Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ Matrix A darstellen: $\boldsymbol{f(\vec{x}) = A * \vec{x}}$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \ldots & f(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zwei Vektorräume V mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ und W mit Basis $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_m\}$. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f : V \to W$ durch eine $m \times n$ Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ darstellen: $\left(f(\vec{x})\right)_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} * \vec{x}_{\mathcal{B}}$

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left(f(\vec{b}_1)\right)_{\mathcal{C}} & \left(f(\vec{b}_2)\right)_{\mathcal{C}} & \ldots & \left(f(\vec{b}_n)\right)_{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Beispiele linearen Abbildungen in der Ebene

Die Geraden müssen **normiert** sein! Wenn nicht dann $g{:}\, \frac{a}{|\vec{n}_g|} x + \frac{b}{|\vec{n}_g|} y$ anwenden. $\vec{n}_g$ = Normalvektor

Streckung um λ_1 in x um λ_2 in y	**Projektion** auf die Gerade $g : ax + by = 0$	**Spiegelung** an der Geraden $g : ax + by = 0$	**Rotation** um den Ursprung und Winkel φ	**Scherung** in x – Richtung mit Faktor m
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab \\ -ab & 1 - b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel von linearen Abbildungen im Raum

Die Ebenen müssen **normiert** sein! Wenn nicht dann $E: \frac{a}{|\vec{n}_E|}x + \frac{b}{|\vec{n}_E|}y + \frac{c}{|\vec{n}_E|}z$ anwenden. $\vec{n}_E$ = Normalvektor

Zentrische Streckung mit dem Faktor λ	**Orthogonale Projektion** auf die Ebene $E: ax + by + cz = 0$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$	**Spiegelung** an der Ebene $E: ax + by + cz = 0$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$ oder $P = E - (\vec{n} * \vec{n}^T)$	$S = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$ oder $S = E - (2\vec{n} * \vec{n}^T)$

Rotation um den Winkel φ um die x-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die y-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die z-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi)+a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi))-a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi))+a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1-\cos(\varphi))+a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))-a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1-\cos(\varphi))-a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))+a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_3^2(1-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

Kern und Bild einer Abbildungsmatrix

Definition Kern einer Matrix

Der *Kern* $\ker(A)$ einer $m \times n$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem

$$A * \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \text{Beispiel: } \vec{x} = \lambda * \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Die Basis des Kerns sind die Vektoren aus der Parameterdarstellung von der Lösung von $A * \vec{x} = \vec{0}$.

Definition Bild einer Matrix

Das Bild $\mathrm{im}(A)$ einer $m \times n$-Matrix A ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ der Matrix aufgespannt wird:

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \rightarrow \text{Beispiel: } \mathrm{im}(A) = \lambda * \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Die Basis des Bilds sind linear unabhängige Spalten von der A Matrix. Wie viele Spalten es sind, ist gemäss Dimension von $\mathrm{im}(A)$ definiert.

Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{rg}(A) \quad \text{und} \quad \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{im}(A)) = n$$

Verknüpfungen von linearen Abbildungen

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ mit der Abbildungsmatrix A sowie eine lineare Abbildung $g: V \rightarrow W$ mit der Abbildungsmatrix B.

Die Verknüpfung $g \circ f: U \rightarrow W$ ergibt wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B * A$. Bei $g \circ f$ wird zuerst f ausgeführt und dann $g \rightarrow g(f(x))$.

Die Inverse einer linearen Abbildung

Die Inverse einer linearen Abbildung f mit der Abbildungsmatrix A, dann ist die Inverse A^{-1} die Abbildungsmatrix für die inverse Abbildung f^{-1}.

Basiswechsel

Die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$ steht für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{S}$. Die Spalten von ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$ sind die Vektoren aus $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich $\mathcal{S}$:

$$ {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} | & | \\ (\vec{b}_1)_{\mathcal{S}} & (\vec{b}_2)_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} $$

Die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}}$ steht für den Basiswechsel von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{B}$. Die Matrix ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}}$ ist die Inverse von ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$:

$$ {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} : \ {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}^{-1} $$

Satz

Gemäss Bild rechts besteht folgender Zusammenhang:

$$ {}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} * {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} * {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} * {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} * {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}^{-1} $$

$$ \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\text{lineare Abbildung } f"] & \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} \arrow[r, mapsto, "{}_S A_S"] \arrow[d, "{}_B T_S"'] & f(\vec{x}) \\ \vec{x} \arrow[r, mapsto, "{}_B A_B"'] & f(\vec{x}) \arrow[u, "{}_S T_B"'] \end{tikzcd} $$

Homogene Koordinaten

Wir erweitern jeden **Vektor** um eine Komponente:

- Ortsvektor (am Ursprung angeheftet): die zusätzliche Komponente wird 1 gesetzt.
- Freie Vektoren (parallel verschiebbar): die zusätzliche Komponente wird 0 gesetzt.

Beispiel Erweiterung

$$ \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ an Ursprung ansetzten} \rightarrow \vec{r}(P^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{freier Vektor} \rightarrow \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} $$

Erweiterung Abbildungsmatrizen

Abbildungsmatrizen werden mit einer zusätzlichen Spalten und Zeile ergänzt. Nun können wir auch Translationen durch Matrizen darstellen:

Rotation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um φ um den Ursprung	**Translation** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	**Rotation** und **Translation** in einem
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiele / Erweiterungen

Spiegel -achse/-matrix gesucht!

Punkte $P = (2; 1)$ & $P' = (-1; 2)$ sind gegeben. An welcher Gerade $g: ax + by = 0$ muss gespiegelt werden damit P auf P' landet? Und wie sieht die Abbildungsmatrix aus?

1. Normalenvektor gesuchten Geraden $\vec{n} = \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Einheitsvektor bestimmen $\vec{e}_n = \frac{1}{|\vec{n}|} * \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, es gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Werte a & b in Spiegelmatrix $\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$ einsetzten: $\begin{pmatrix} 1 - 2 * \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)^2 & 2 * \frac{3}{10} \\ 2 * \frac{3}{10} & 1 - 2 * \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix einer Spiegelung

Es ist die Spiegelachse $g: 2x - y = 0$ geben, wie lautet die Spiegelmatrix von g?

1. Spiegelachse g normieren (mit $\frac{1}{|\vec{n}|}$ multiplizieren): $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$
2. Werte a & b in die Spiegelmatrix setzten: $\begin{pmatrix} 1 - 2 * \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 & 2 * \frac{2}{5} \\ 2 * \frac{2}{5} & 1 - 2 * \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{pmatrix}$

Erweiterung Abbildungsmatrizen in der Ebene

Spiegelung x-Achse	**Spiegelung y-Achse**	**Punktspiegelung am Ursprung**
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion (x)	**Orthogonale Projektion (y)**	
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Erweiterung Abbildungsmatrizen im Raum

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	**Spiegelung** an der x/y-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die x-Achse	**Spiegelung** an der x-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$