

Wichtige Ableitungen, Stammfunktionen und Grenzwerte

Integraltabelle

| Ableitung f'(x) | Funktion f(x) | Integral F(x) |
|---|--|--|
| 0 | C | x + C |
| 1 | x | $\frac{1}{2}x^2 + C$ |
| $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln x + C$ |
| ax^{a-1} | x^a with $a \in \mathbb{R}$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ |
| $x^x \cdot (1 + \ln x)$ $x > 0$ | x^x | |
| $(x^x)^x (x + 2x \ln(x))$ $x > 0$ | $x^{(x^x)}$ | |
| $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | \sqrt{x} | $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ |
| $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ | $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$ |
| $\ln(a) \cdot a^x$ | a^x | $\frac{a^x}{\ln(a)} + C$ |
| $a^{bx} \cdot c \ln a$ | a^{bx} | $\frac{1}{b \ln a} a^{bx} + C$ |
| e^x | e^x | $e^x + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $x \ln(x) - x + C$ |
| $\frac{1}{x \ln(a)}$ | $\log_a(x)$ | $x \log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $-\cos(x) + C$ |
| $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\sin(x) + C$ |
| $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ | $-\ln \cos(x) + C$ |
| $-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $\cot(x)$ | $\ln(\sin(x)) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)$ | $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos(x)$ | $x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ | $x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ |
| $\sin^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$ | $\sin(x) \cos(x) + C$ |
| $\cos^2(x)$ | $\frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$ | $\cos(x) \sin(x) + C$ |
| $\tan^2(x)$ | $\tan(x) - x$ | $\tan(x) + C$ |
| $\cot^2(x)$ | $-\cot(x) - x$ | $\cot(x) + C$ |
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln f(x) $ | $x \cdot (\ln x - 1) + C$ |
| $\frac{1}{x}(\ln x)^n$ | $\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}$ $n \neq -1$ | $\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2$ $n \neq 0 + C$ |
| $\frac{1}{x \ln x}$ | $\ln \ln x $ $x > 0, x \neq 1$ | $\frac{1}{b \ln a} a^{bx} + C$ |
| $x \cdot e^{cx}$ | $\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right)$ $n \neq -1 + C$ |
| $x^n \ln x$ | $\ln(\cosh(x))$ | $\ln f(x) + C$ |
| $\sin(x) \cos(x)$ | $\frac{\sin^2(x)}{2}$ | |
| $\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ | $\frac{1}{f(x)}$ | |
| $(ax+b)^n$ | $\frac{1}{a \cdot (n+1)}(ax+b)^{n+1}$ | |

Ableitungsregeln

- Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

- Differenzregel

$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

- Faktorregel

$$f(x) = a \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$$

- Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

- Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

- Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Differentialrechnung Tricks

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an einer Stelle x0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (Linearisierung): $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Integralregeln

- Addition/Subtraktion:

$$\int f(x - k) dx = F(x - k) + C$$

- Multiplikation:

$$\int f(x \cdot k) dx = \frac{1}{k} F(x \cdot k) + C$$

- Skalarmultiplikation:

$$\int \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) dx = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$$

Trick Gerade/Ungerade bei Integralen

Für ungerade Funktionen gilt $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

- Summe/Komposition: ungerade und ungerade
- Produkt/Quotient: ungerade und gerade
- Ableitung: gerade \rightarrow ungerade

Bsp ungerade: $f(x) = -x, x, \sin(x), \tan(x)$, Polynomfunktionen mit ungeradem Exponent

gerade: $1, x^2, \cos(x), \sec(x)$, Polynomf. mit geradem Exponent

beides: $f(x) = 0$

Grenzwert Berechnen Tricks

- " $\frac{\infty}{\infty}$ " Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 - n^3}{7n^6 + n^5 - 3} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{2}{7}$$

- " $\frac{\infty}{\infty}$ " Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n-1} + 2^{n+1}}{7^n + 5} \cdot \frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}} = \frac{1}{7}$

- " $\infty - \infty$ " Trick: Erweitern mit $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) = 1/2$$

- e-like...: Trick: umformen zu $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow e^a$

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

Spezielle Grenzwerte

| $n \rightarrow \infty$ | | |
|--|---------------------------------------|--|
| $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ | $e^n \rightarrow \infty$ | $\frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$ |
| $c + \frac{1}{n} \rightarrow c$ | $e^{-n} \rightarrow 0$ | $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ |
| $\frac{c \cdot n}{c^n} \rightarrow 0$ | $\frac{e^n}{c^n} \rightarrow \infty$ | $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^c \rightarrow 1$ |
| $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ | $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ | $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ |
| $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ | $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ | $\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^c$ |
| $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$ | $\ln n \rightarrow \infty$ | $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$ |
| $\frac{c^n}{n!} \rightarrow 0$ | $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ | $\left(\frac{n}{n+c}\right)^n \rightarrow e^{-c}$ |
| $\frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$ | $\frac{\log n}{n-1} \rightarrow 1$ | |

$$n^c \cdot q^n \rightarrow 0 \quad \forall c \in \mathbb{Z}, 0 \leq q \leq 1$$

$$n(\sqrt[n]{c} - 1) \rightarrow \ln c \quad \forall c > 0$$

| $n \rightarrow 0$ | | |
|--|--|---|
| $\ln n \rightarrow -\infty$ | $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 1$ | $\frac{1}{\arctan n} \rightarrow 1$ |
| $n \log n \rightarrow 0$ | $\frac{\cos(n)-1}{n} \rightarrow 0$ | $\frac{e^n - 1}{e^n} \rightarrow 1$ |
| $\frac{\log 1-n}{n} \rightarrow -1$ | $\frac{1}{\cos n} \rightarrow 1$ | $\frac{e^c n - 1}{n} \rightarrow c$ |
| $\frac{c^n - 1}{n} \rightarrow \ln c, \forall c > 0$ | $\frac{1 - \cos n}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ | $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow e$ |

Reihen - Funktionen

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n 2k-1 = n^2 \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+2)}{6}$$

Integralrechnen

Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \int g(x)dx = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Integral von verschobenen Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Betrag k in x -Richtung verschoben ist:

$$\int f(x - k)dx = F(x - k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x -Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

Strategie zur Berechnung von Integralen

Bruchform:

1. Vereinfache, so dass ein einfacher Nenner entsteht
2. Partialbruchzerlegung
3. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen $\Rightarrow \sqrt{u}$ oder $\log|u|$

Produktform:

1. Partielle Integration anwenden (evtl. mehrmals)
2. Kettenregel verwenden

Potenzen:

$\int_a^b f(x)^c dx$ umformen in $\int_a^b (f(x)^c \cdot 1)dx$ oder $\int_a^b (f(x)^{c-1} \cdot f(x))dx$ um dann partielle Integration anzuwenden

Exponentenform:

e/\log Trick verwenden, wenn Variabel im Exponenten ist.

Produkt mit e, \sin, \cos

Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei \sin, \cos immer g' und immer f ist.

Summe im Integral:

Summe aus dem Integral herausziehen (dafür muss die Reihe gleichmässig konvergieren)

Symmetrie ungerader Funktionen beachten: (alls Funktion ungerade ist

und symmetrische Grenzen hat) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^7 \cos x}_{\text{ungerade}} dx = 0$

Integrationsmethoden

Partielle Integration

Partielle Integration Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int (f(x) \cdot g'(x))dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f'(x) \cdot g(x))dx$$

\uparrow 1 falls arc- oder log-Funktion vorkommt, $x^n, \frac{1}{1-x^2}, \frac{1}{1+x^2}$

$\downarrow x^n, \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x),$

Prioritäten $f(x)$ nach folgender Priorität auswählen:

1. \log_e, \log_a
2. \arcsin, \arccos
3. $x^2, 5x^3$
4. \sin, \cos, \tan
5. $e^x, 5a^x$

Substitution

Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

$$\int_{g(b)}^{g(a)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)}$$

Nützliche Regeln Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten $a + c, b + c$ in I enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$$

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

Nützliche Substitutionen

- $\log(x)$ subst: $t = \log(x), x = e^t, dx = e^t dt$
- für gerade $n : \cos^n(x), \sin^n(x), \tan(x)$
Sub: $t = \tan(x), dy = \frac{1}{1+t^2} dt, \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$
- für ungerade $n : \cos^n(x), \sin^n(x),$
Sub: $t = \tan(x/2), dy = \frac{2}{1+t^2} dt, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx$ sub: $x = \sin(x)$ oder $\cos(x)$
- $\int \sqrt{1+x^2} dx$ sub: $x = \sinh(x)$

Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:
 $u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $dx = \frac{du}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \int r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u :

$$\int r(u)du = R(u) + C$$

- Rücksubstitution: $R(u) + C = R(g(x)) + C$

Bsp. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$ Substitution mit $t = \sqrt{9-x^2}$.

$$\Rightarrow x = \sqrt{9-t^2} \Rightarrow x' = \frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-t \cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -dt = -t$ Rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:
 $u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$
- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $dx = \frac{du}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u :

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du = R(u) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- Rücksubstitution:

$$R(u) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)} = R(g(x)) + C \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$\text{Beispiel Integral: } \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

- Zuordnen der Nullstellen x_k vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \dots, 1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x - x_1}}_{\text{einfache Nullstelle } x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots}_{\text{doppelte Nullstelle } x_2}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1}$$

$$\text{Beispiel: } 1 = A(x + 1) + B(x - 1) \quad x = 1 \text{ bzw. } x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 1| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

Bemerkung

Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\rightarrow \deg(r(x)) \geq \deg(s(x))$ gilt: Zuerst $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = n(x) + r(x)$$

wobei $n(x)$ ein Polynom und $r(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{\tilde{t}(x)}$ eine echt gebrochene-rationale Funktion ist, d.h. $\deg(\tilde{s}(x)) < \deg(\tilde{t}(x))$

Berechne $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$ mittels PBZ.

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow A + B + C = 0 \quad A + 3B - 2C = 1 \quad -6A = 1$$

Daraus folgt: $A = -\frac{1}{6}, B = \frac{3}{10}, C = -\frac{2}{15}$

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{10} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{15} \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \log|x| + \frac{3}{10} \log|x-2| - \frac{2}{15} \log|x+3| + C$$

Integrieren von Flächen Nullstellen bestimmen: \Rightarrow Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- x_1, x_2, \dots, x_n = Nullstellen

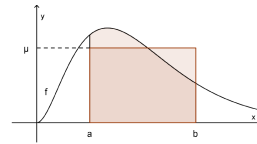
$$\left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- x_1, x_2, \dots, x_n = Schnittpunkte

$$\left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Mittelwert einer Funktion



Definition des Mittelwert μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechteks, das

- eine Grundlinie der Länge $b - a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechteks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

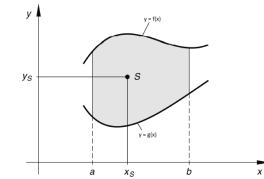
Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Schwerpunkt ebener Fläche



Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A , eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Berechnen von A ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen V , geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

Uneigentliche Integrale

Definition Uneigentliches Integral Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Typ:

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

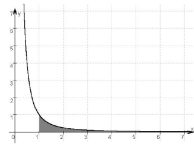
Uneigentliche Integrale erster Art

Definition

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsintervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)dx$$

Graphische Darstellung:



Berechnung

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergibt sich aus $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_a^\lambda f(x)dx \right)$$

Variante 1

- Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsintervall:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

- Rechnen mit endlichem Intervall $[\lambda, b]$ mit $\lambda \leq b$ anstelle von unendlichem Integral $(-\infty, b]$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)dx$$

- Das unendliche Intervall $(-\infty, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left(\int_\lambda^b f(x)dx \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \text{ **konvergent**, andernfalls **divergent**}$$

Variante 2

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsintervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

- Einfügen einer künstlichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

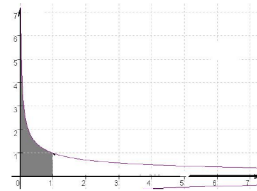
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das Integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Definition

Uneigentliche Integrale auf Intervall $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \rightarrow \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$ Graphische Darstellung:



Berechnung

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wenn ein Pol existiert.

Taylorreihen

Potenzreihe unendliche Reihe vom Typ:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe

Allgemein kann eine Potenzreihe mit einer Verschiebung von x_0 beschrieben werden \Rightarrow Potenzreihe mit Zentrum x_0 :

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Taylorreihe oder Taylorentwicklung einer Funktion $y = f(x)$ and der Stelle x_0 ist die Potenzreihe:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

welche die gleiche Ableitung an der Stelle x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ hat wie die Funktion $f(x)$

Taylorpolynom ist eine Taylorreihe $t_f(x)$ welche nach n -ter Ordnung abgebrochen wird. Somit erhält man das Taylorpolynom n -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0 :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

Bemerkung: Die Tangente der Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

Vorgehen Berechnen Taylorreihe Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $t(x)$ an der Stelle x_0 ist:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Formel für Taylorkoeffizienten Formel für k -ten Taylorkoeffizientn der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Taylorreihen wichtiger Funktionen

$$f(x) = e^x \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ mit } x_0 = 1,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Symmetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

Symmetrie von Funktionen Repetition

- Gerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist achsensymmetrisch bzgl. y -Achse
- Ungerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs

Symmetrie von Potenzreihen Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symmetrie von Taylorreihen

- Falls die Funktion eine gerade Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit geraden Exponenten, d.h. se gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Falls die Funktion eine ungerade Funktion ist, enthält die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungeraden Exponenten, d.h. se gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Binomialkoeffizienten

Taylorreihen mit Binomialkoeffizienten bestimmen

- Ziel: Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. Funktionen vom Typ $f(x = x^\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchen der Funktion bei $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$
- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- In diesem fall ist die binomische Formel auch die Taylorreihe, es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$:
Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Auch bekannt als Binomialreihe

Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenzradius

- Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist eine Zahl mit Folgenden Eigenschaften:
 - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$
 - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$
- Es existieren folgende Extremfälle:
 - Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
 - Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konvergenzradius Formel

Für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenzbereich Formel

Der Konvergenzbereich in dem die Approximation der Funktion gilt ist definiert durch:

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Bernoulli- de l'Hospital

Regel von Bernoulli- de l'Hospital Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig differenzierbar sind aber der Grenzwert auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, kann der Limes der Ableitung beider Funktionen ausgewertet werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dies kann beliebig oft Wiederholt werden, es gibt jedoch Fälle wo die Regel versagt, dann müssen andere Methoden verwendet werden.

Varianten von l'Hospital

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

Differentialgleichungen

Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man sie explizit, ansonsten implizit. Oft können implizite DGL durch einfaches Umformen in explizite DGL umgewandelt werden.

Arten von DGL

- **Separierbar:** falls $F(x, y)$ als Produkt eines x - und eines y -Anteils geschrieben werden kann, d.h. es hat die Form:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

- **Autonom:** falls $F(x, y)$ nur von y abhängt, d.h. es hat die Form:

$$y' = f(y)$$

- **Linear:** falls die Variable welche abgeleitet wird, nur in der ersten Potenz vorkommt und nicht multipliziert miteinander oder mit der unabhängigen Variable wird.

Lösen von Separierbaren DGL

$$\text{DGL: } \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

→ Falls $h(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL.

- Trennung aller x - und y -Terme: $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$
- Integration auf beiden Seiten: $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

Auflösen nach y , Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Homogenität von DGL

- Homogene DGL: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
- Inhomogene DGL: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x)$
 - $g(x)$ ist die Störfunktion

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y' + f(x)y = g(x)$ ist gegeben durch:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) e^{F(x)} dx$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Anfangswertproblem DGL mit Anfangsbedingung
Anfangswertproblem n -ter Ordnung:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, & (x, y, \dots, y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' = G(x, y), & (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Allgemeine Lösung: Menge aller Lösungen einer DGL
- Spezielle/partikuläre Lösung: Lösung eines Anfangswertproblems

Lösung von Anfangswertproblemen mit separierbaren DGL

- Sind $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$, hat das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

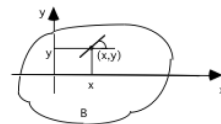
genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

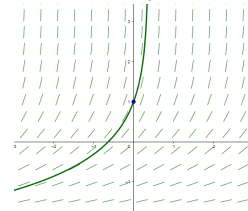
berechnet werden und nach y aufgelöst werden.

Richtungsfelder

Richtungsfeld geometrisches Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. DGL der Form: $y' = f(x, y)$



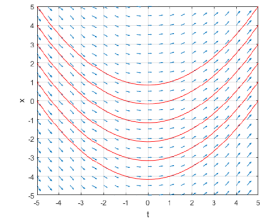
$f(x, y)$ gibt also die Steigung der Lösungskurve am Punkt (x, y) an



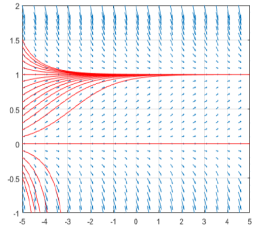
Jeder Punkt ist somit die Tangente einer spezifischen Lösungskurve

Richtungsfelder von Speziellen DGL

Unbestimmtes Integral: $y' = f(x)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von y die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine Verschiebung in y -Richtung durch die Konstante C .



Autonome DGL: $y' = f(y)$
das Richtungsfeld ist unabhängig von x die verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in x -Richtung in einander über.



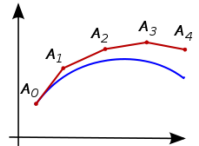
Numerische Verfahren

Eulerverfahren Gleichung einer beliebigen Geraden mit Steigung m am Punkt (x_k, y_k) :

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$

DGL am Punkt (x_k, y_k) :

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$



- Für $k = 0$ und $x = x_0$:

$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

- Algorithmus für beliebige k :

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

Problem: Die Steigung wird nur am linken Ende des Intervalls berücksichtigt!

⇒ Lösung: Verbesserte numerische Verfahren!

Sonstige Formeln

Mitternachtsformel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Polynomdivision

$$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad P, q, S, r \text{ Polynome}$$

! Vorzeichen von Nullstellen umdrehen.

$$\begin{array}{r|l} (x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 & | x^3 : x = x^2 \\ - (x^3 - x^2) & | -x^2 : x = -x \\ \hline -x^2 - 5x & \\ - (-x^2 - 5x) & | -6x : x = -6 \\ \hline -(-6x + 6) & \end{array}$$

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

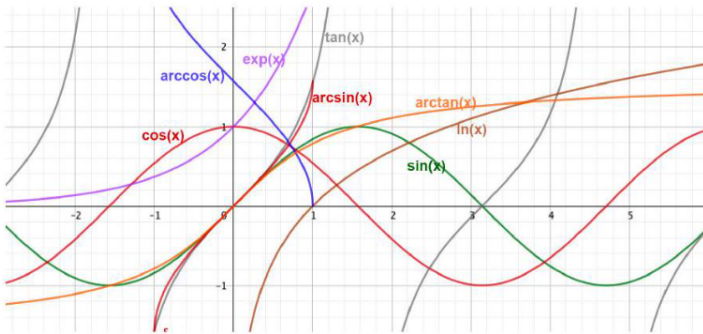
$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Logarithmen

Rechnen mit Logarithmen

- Für $a > 0$ ist $]0, \infty[\rightarrow]0 + \infty[$ $x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
 - Für $a < 0$ ist $]0, \infty[\rightarrow]0 + \infty[$ $x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
 - $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0 + \infty[$
 - $\ln(a \div b) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in]0 + \infty[$
 - $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
 - $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
 - $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
- Im Allgemeinen gilt: $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{für } |x| < 1$$



Trigonometrische Funktionen

ungerade $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$ stetig

gerade $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$ stetig

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

π : kleinste strikt positive Nullstelle von \sin .

| Grad | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|-----------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| φ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
| $\sin(\varphi)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos(\varphi)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| $\tan(\varphi)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

Eigenschaften sin/cos

- $\exp iz = \cos(x) + i \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$
- $\sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Winkelverdopplung

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Potenz der Winkelfunktion

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Eigenschaften mit π

- $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Nullstellen von trigonometrischen Funktionen

- Nullstellen Sinus = $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
- Nullstellen Cosinus = $\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
 $\cos(x) > 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\cos(x) < 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Für $\tan(x)$ gilt $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ Für $\cot(x)$ gilt $x \notin \pi \mathbb{Z}$

Reelle Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Eigenschaften $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Aber nicht: $\exp(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(-x) \exp(x) &= 1 \\ \exp(x) &> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp(x) &> 1 \quad \forall x > 0 \\ \exp(a+b) &= \exp(a) \cdot \exp(b) \\ \exp(a-b) &= \exp(a) \div \exp(b) \end{aligned}$$

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(y + (z - y)) = \exp(y) \exp(z - y) \\ \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b)$$

$$\exp(\ln a) \exp(\ln b) = ab = \exp(\ln ab)$$

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln ab)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$x^a := \exp(a \ln x)$$