1 Zusammenfassung: Matrizenrechnung und LGS

1.1 Grundlagen der Matrizenrechnung

Definition
Eine *Matrix* sieht ähnlich aus wie ein Vektor in Komponentenschreibweise; die Zahlen stehen hier aber nicht nur untereinander, sondern auch nebeneinander – in symbolischer Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die *Elemente* a_{ij} ($i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$) reelle Zahlen; i heisst *Zeilenindex*, j *Spaltenindex* des Elements a_{ij}.
Weil diese Matrix *m Zeilen* und *n Spalten* hat, nennt man sie $m \times n$*-Matrix* oder (m,n)*-Matrix*.

Addition und Subtraktion von Matrizen
Zwei Matrizen der gleichen Grösse können addiert und subtrahiert werden. Diese Operationen werden *elementweise* durchgeführt, d.h. es werden einfach die entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert:

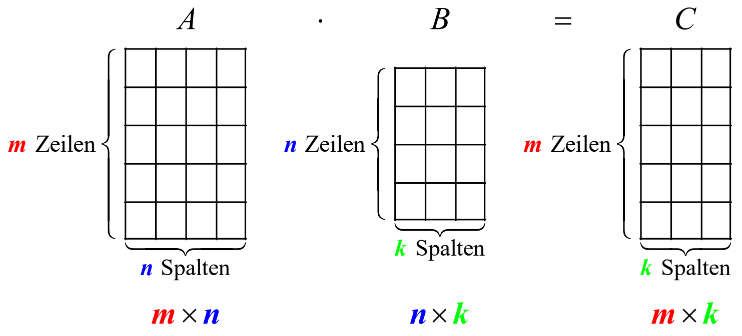
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 6-2 \\ 7-3 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation von Matrizen
Matrizen können elementweise mit einem Skalar (einer reellen Zahl) multipliziert werden:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

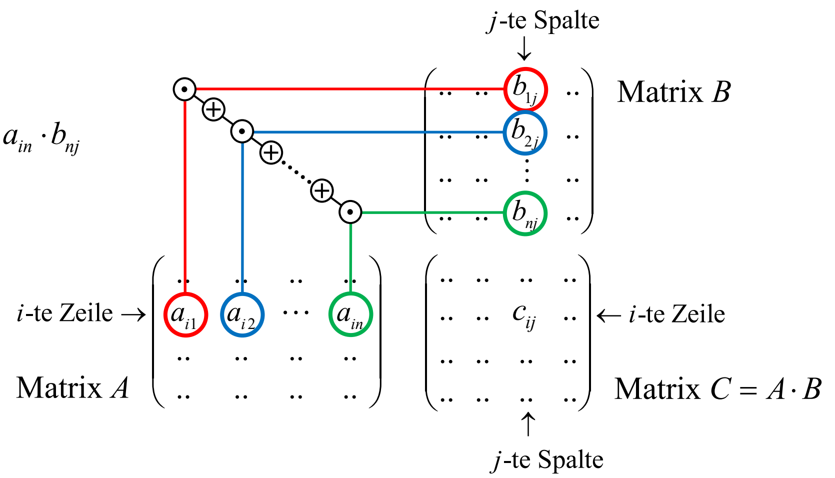
Multiplikation von Matrizen
Die Multiplikation von Matrizen ist *nicht* elementweise definiert!

Damit zwei Matrizen A und B miteinander multipliziert werden können, muss gelten: Die Anzahl Spalten von A ist gleich der Anzahl Zeilen von B.
Das Ergebnis hat gleich viele Zeilen wie A und gleich viele Spalten wie B.



Das Element c_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Ergebnismatrix C wird so berechnet:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$



Die Transponierte einer Matrix
Die *Transponierte* einer $m \times n$-Matrix ist eine $n \times m$-Matrix. Man erhält diese, indem man die Zeilen zu Spalten macht (und umgekehrt):

$$\begin{pmatrix} \boxed{Z_1 \rightarrow} \\ \boxed{Z_2 \rightarrow} \\ \boxed{Z_3 \rightarrow} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boxed{Z_1 \downarrow} & \boxed{Z_2 \downarrow} & \boxed{Z_3 \downarrow} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0.2 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0.2 & 3 \\ -1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Schreibweise: Die Transponierte der Matrix A bezeichnen wir mit A^T.

Rechenregeln für die Addition und die skalare Multiplikation von Matrizen

Für beliebige $m \times n$-Matrizen A und B sowie für einen beliebigen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

Kommutativ-Gesetz: $A + B = B + A$
Assoziativ-Gesetz: $A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiv-Gesetze: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ und $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen

Für beliebige Matrizen A, B und C von geeignetem Typ sowie für einen beliebigen Skalar λ gilt:

Assoziativ-Gesetz: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
Distributiv-Gesetze: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ und $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
Regel zur Multiplikation mit einem Skalar: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ!!! Im Allgemeinen gilt: $A \cdot B \neq B \cdot A$!

1.2 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Jedes LGS entspricht einer Matrizengleichung:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

Wir fassen A und $\vec{c}$ zur *erweiterten Koeffizientenmatrix* zusammen:

$$(A \mid \vec{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Wir bestimmen die am weitesten links stehende Spalte mit Elementen $\neq 0$. Wir nennen diese Spalte die *Pivot-Spalte*.
2. Ist die oberste Zahl in der Pivot-Spalte $= 0$, dann vertauschen wir die erste Zeile mit der obersten Zeile, die in der Pivot-Spalte ein Element $\neq 0$ hat.
3. Die oberste Zahl in der Pivot-Spalte ist nun eine Zahl $a \neq 0$. Wir dividieren die erste Zeile durch a. So erhalten wir die führende Eins.
4. Nun wollen wir unterhalb der führenden Eins lauter Nullen erzeugen. Dazu addieren wir passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen.

Wir lassen nun die erste Zeile aussen vor und wenden die ersten vier Schritte auf den verbleibenden Teil der Matrix an. Dieses Verfahren wiederholen wir so oft, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat.

5. Nun arbeiten wir von unten nach oben und addieren jeweils geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Das Gauss-Jordan-Verfahren bringt die erweiterte Koeffizientenmatrix auf *reduzierte Zeilenstufenform*, d.h.

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen zuunterst (falls vorhanden).
- Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die vorderste Zahl $\neq 0$ eine Eins. Sie wird als *führende Eins* der Zeile bezeichnet.
- Eine führende Eins, die weiter unten als eine andere führende Eins steht, steht auch weiter rechts.
- Jede Spalte, in der eine führende Eins steht, enthält sonst nur Nullen.

Bestimmung der Lösungen eines LGS aus der reduzierten Zeilenstufenform
Wir ordnen den Spalten der Koeffizientenmatrix die entsprechenden Unbekannten zu.
Unbekannte, die zu einer Spalte **mit** führender Eins gehören, heissen *führende Unbekannte*.
Unbekannte, die zu einer Spalte **ohne** führende Eins gehören, heissen *freie Unbekannte*.

Beispiel

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

1 führende Einsen

führende Unbekannte: x_1, x_3
freie Unbekannte: x_2, x_4

Wir setzen die freien Unbekannten je mit einem Parameter $\lambda, \mu, \ldots \in \mathbb{R}$ gleich.

Beispiel
$x_2 = \lambda$, $x_4 = \mu$

Wir übersetzen jede Zeile mit führender Eins in eine Gleichung und lösen diese nach der führenden Unbekannten auf.

Beispiel
1. Zeile: $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$
2. Zeile: $x_3 + x_4 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 - \mu$

Nun fassen wir die Unbekannten in einem Vektor zusammen und formen so um, dass die Parameter jeweils als Faktor vor einem Vektor stehen.

Beispiel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ 3 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textit{Parameterdarstellung}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Definition
Der *Rang* $\mathrm{rg}(A)$ einer Matrix A wird so bestimmt: Wir bringen die Matrix A auf Zeilenstufenform; dann ist $\mathrm{rg}(A) =$ Gesamtanzahl Zeilen – Anzahl Nullzeilen.

Kriterien für die Anzahl Lösungen eines LGS