Analysis 2

Jil Zernt,Lucien Perret
May 2024

Integralrechnen

Stammfunktionen

Integraltabelle

Funktion | f(x)	Ableitung | f'(x)	Integral | F(x)
1	0	$x + C$
x	1	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
x^a *with* $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\ln(\sin(x)) + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x\ln(x) - x + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$x\log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_2 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Integral von verschobenen Funktionene

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimte integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

Partielle Integration

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x), v'(x)\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$\textit{Beispiel Integral}: \int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

- Zuordnen der Nullstellen $x_k$vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \ldots,\ 1 \leq k \leq n$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \ldots$$

$$\textit{Beispiel}: \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$\textit{Beispiel}: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

$$\textit{Beispiel}: 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x = 1\ bzw.\ x = -1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert x+1\rvert + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$$

Bemerkung

Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\rightarrow deg(r(x)) \geq deg(s(x))$ gilt:

Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int r(u)\mathrm{d}u = r(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$r(u) + C = r(g(x)) + C$$

Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u = g(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u = r(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$