Analysis 2

Jil Zerndt
May 2024

Basics

Mitternachtsformel $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Polynomdivision
$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ $\quad P, q, S, r$ Polynome
! Vorzeichen von Nullstellen umdrehen.

$$
\begin{array}{ll}
\left(x^3 - 2x^2 - 5x - 6\right) : (x-1) = x^2 - x - 6 & \mid x^3 : x = x^2 \\
-\left(x^3 - x^2\right) & \mid -x^2 : x = -x \\
-x^2 - 5x & \\
-\left(x^2 - x\right) & \mid -6x : x = -6 \\
\hline
-(-6x+6) &
\end{array}
$$

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Grenzwert Berechnen Tricks

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$ (k: grösster Exponent)

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6-n^3}{7n^6+n^5-3} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{2}{7}$

- "$\frac{\infty}{\infty}$" Trick: Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$ (a: grösste Basis, k: kleinster Exponent) $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1}+2^{n+1}}{7^n+5} \cdot \frac{\frac{1}{7^{n-1}}}{\frac{1}{7^{n-1}}} = \frac{1}{7}$
- "$\infty - \infty$ "Trick: Erweitern mit $\sqrt{\cdots} + \sqrt{\cdots}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) = 1/2$

- Kettenfunktionen: Trick Stetigkeit von f(x) ausnützen $\Rightarrow$ zuerst $\lim_{n\to\infty} a_n$ berechnen, danach f(x) (ohne nochmals lim) anwenden.
- e-like...: Trick: umformen zu $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a \Rightarrow e^a$

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

- $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Sei $f \leq g$, so ist $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, so existiert $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

l'Hospital Kettenregel Trick Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Falls $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ und $\lambda := \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, folgt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nur für $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$ "0"/"0" oder "∞"/"∞" erlaubt.

Trigonometrie

ungerade: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$ stetig

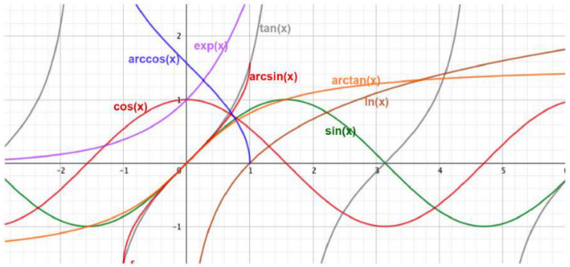
gerade: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$ stetig

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

π: kleinste strikt positive Nullstelle von sin.

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Eigenschaften sin/cos

1. $\exp ix = \cos(x) + i\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$
2. $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{C}$
3. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
4. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
5. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$
6. $\sin x = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\quad \cos x = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Winkelverdopplung

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Potenz der Winkelfunktion

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Eigenschaften mit π

1. $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
3. $\sin(x+\pi) = -\sin(x), \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$
4. $\cos(x+\pi) = -\cos(x), \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$

Nullstellen von trigonometrischen Funktionen

1. Nullstellen Sinus $= \{k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
2. Nullstellen Cosinus $= \left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
   $\cos(x) > 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) < 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$

Für $\tan(x)$ gilt $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}$ $\qquad$ Für $\cot(x)$ gilt $x \notin \pi\mathbb{Z}$

Logarithmen

Rechnen mit Logarithmen

1. Für $a > 0$ ist $]0, \infty[\to]0+\infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für $a < 0$ ist $]0, \infty[\to]0+\infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
3. $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0+\infty[$
4. $\ln(a \div b) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in]0+\infty[$
5. $\ln(x^a) = a\ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
6. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
7. $(x^a)^b = x^{a\cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

Im Allgemeinen gilt: $log_b(a) = \frac{ln(a)}{ln(b)}$

ln(1 + x) $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ für $|x| < 1$

Relle Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Eigenschaften exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Aber nicht: $\exp(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\exp(-x)\exp(x) &= 1 \\
\exp(x) &> 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\
\exp(x) &> 1 \qquad \forall x > 0 \\
\exp(a+b) &= \exp(a)\cdot\exp(b) \\
\exp(a-b) &= \exp(a) \div \exp(b)
\end{aligned}
$$

$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$

$\exp(z) = \exp(y + (z-y)) = \exp(y)\exp(z-y)$
$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$

$$
\begin{aligned}
\exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln a)\cdot\exp(\ln b) \\
\exp(\ln a)\exp(\ln b) &= ab = \exp(\ln ab) \\
\exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln ab) \\
\ln a + \ln b &= \ln(ab)
\end{aligned}
$$

$x^a := \exp(a\ln x)$

Ableitungsregeln

- Summenregel

$$f(x)=g(x)+h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)$$

- Differenzregel

$$f(x)=g(x)-h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)-h'(x)$$

- Faktorregel

$$f(x)=a\cdot g(x) \rightarrow f'(x)=a\cdot g'(x)$$

- Produktregel

$$f(x)=g(x)\cdot h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

- Quotientenregel

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

- Kettenregel

$$f(x)=g(h(x)) \rightarrow f'(x)=g'(h(x))\cdot h'$$

Tangentengleichung

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Differentialrechnung Tricks

- Überall differenzierbar: Einheitliche Tangente (Ableitung 0 setzen) und dh: Grenzwerte müssen denselben Wert ergeben
- Zwei Funktionskurven berühren sich (aww): bedeutet dass sie an einer Stelle x0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung haben
- Tangente bestimmen (Linearisierung): $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Trick Gerade/Ungerade

Für ungerade Funktionen gilt $\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

- Summe/Komposition: ungerade und ungerade
- Produkt/Quotient: ungerade und gerade
- Ableitung: gerade $\longrightarrow$ ungerade

Bsp ungerade: $f(x)=-x$, x, $sin(x)$, $tan(x)$, Polynomfunktionen mit ungeradem Exponent
gerade: 1, x^2, $cos(x)$, $sec(x)$, Polynomf. mit geradem Exponent
beides: $f(x)=0$

Berechne $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x)\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x$

Wir wissen für die Funktionen:
$\sin(x)\rightarrow$ ungerade und $\exp(-x^2)\rightarrow$ gerade
Das Produkt einer ungeraden und geraden Funktion ist eine ungerade Funktion.
Für ungerade Funktionen gilt $\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Daraus folgt: $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x)\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x=0$

Integraltabelle

Funktion | f(x)	Ableitung | f'(x)	Integral | F(x)
1	0	$x+C$
x	1	$\frac{1}{2}x^2+C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
x^a *with* $a\in\mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)+C$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$
$\cot(x)$	$-1-\cot^2(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\ln(\sin(x))+C$
e^x	e^x	e^x+C
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x\ln(x)-x+C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$x\log_a(x)-\frac{x}{\ln(a)}+C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^a	$a\cdot x^{a-1}$
a^{cx}	$a^{cx}\cdot c\ln a$
x^x	$x^x\cdot(1+\ln x)\quad x>0$
$x^{(x^x)}$	$(x^x)^x\left(x+2x\ln(x)\right)\quad x>0$
$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	x^a
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha,\alpha\neq-1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
e^x	e^x
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a}=\log(e)\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin^2(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$
$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x)-x$	$\tan^2(x)$
$-\cot(x)-x$	$\cot^2(x)$
$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x\cdot(\ln\lvert x\rvert-1)$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\quad n\neq-1$	$\frac{1}{x}(\ln x)^n$
$\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2\quad n\neq0$	$\frac{1}{x}\ln x^n$
$\ln\lvert\ln x\rvert\quad x>0,x\neq1$	$\frac{1}{x\ln x}$
$\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$	a^{bx}
$\frac{cx-1}{c^2}\cdot e^{cx}$	$x\cdot e^{cx}$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)\quad n\neq-1$	$x^n\ln x$
$\frac{\sin^2(x)}{2}$	$\sin(x)\cos(x)$

Wichtige Stammfunktionen $\int f(x) \Longrightarrow F(x)+C$

Potenzfunktionen

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$
$$\int \frac{f'}{f} \,\mathrm{d}x = \ln|f|$$
$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x|$$
$$\int \frac{1}{x+a} \,\mathrm{d}x = \ln|x+a|$$
$$\int \frac{1}{(x+a)^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int (e^x)\,dx = e^x$$
$$\int e^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}$$
$$\int (a^x)\,dx = \frac{a^x}{\ln(\mathrm{a})}$$
$$\int (\ln(x))dx = x\cdot\ln(x) - x$$
$$\int \left(\log_a(x)\right)dx = \frac{x\cdot\ln(x)-x}{\ln(a)}$$

Geometrische Funktionen

$$\int \cos(x)dx = \sin(x)$$
$$\int \sin(x)dx = -\cos(x)$$
$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)|$$
$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$
$$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$
$$\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax)$$
$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}dx = \arctan(\mathrm{x})$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x)$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)$$

Spezielle Grenzwerte von Folgen

$n \to \infty$

$$n^x q^n \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \le q \le 1$$
$$n(\sqrt[n]{x}-1) \to \ln x \quad \forall x > 0$$
$$\sqrt[n]{a_n} \to 1 \text{ wenn } \lim_{n\to\infty} a_n > 0 \text{ und } \forall a_n > 0$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$
$$1+\frac{1}{n} \to 1$$
$$\frac{2n}{2^n} \to 0$$
$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$$
$$\sqrt[n]{n!} \to \infty$$
$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$$
$$\frac{x^n}{n!} \to 0$$
$$\frac{n^n}{n!} \to \infty$$

$$e^n \to \infty$$
$$e^{-n} \to 0$$
$$\frac{e^n}{n^x} \to \infty$$
$$\frac{\sin n}{n} \to 0$$
$$\arctan n \to \frac{\pi}{2}$$
$$ln(n) \to \infty$$
$$\frac{ln(n)}{n} \to 0$$
$$\frac{log(n)}{n-1} \to 1$$

$$\forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \frac{1}{n^k} \to 0$$
$$(1+n)^{\frac{1}{n}} \to 1$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \to 1$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$$
$$\left(\frac{n}{n+x}\right)^n \to e^{-x}$$

$n \to 0$

$$\ln n \to -\infty$$
$$\frac{ln(n+1)}{n} \to 1$$
$$n\log n \to 0$$
$$\frac{\log 1-n}{n} \to -1$$
$$\frac{\log 1-n}{n} \to -1$$
$$\forall x > 0 \; \frac{x^n-1}{n} \to \ln(x)$$

$$\frac{\sin n}{n} \to 1$$
$$\frac{\cos n - 1}{n} \to 0$$
$$\frac{1}{\cos n} \to 1$$
$$\frac{1-\cos n}{n^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\arctan n} \to 1$$
$$\frac{e^n-1}{n} \to 1$$
$$\frac{e^a n - 1}{n} \to a$$
$$(1+n)^{\frac{1}{n}} \to e$$

Weitere Grenzwerte

$n \to -\infty$

$$e^n \to 0$$
$$e^{-n} \to \infty$$
$$ne^n \to 0$$

$n \to 0+$

$$n\ln n \to 0$$

$n \to \pm\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^a n \to e^a x$$

$n \to \frac{\pi-}{2}$

$$\tan x \to +\infty$$

$n \to \frac{\pi+}{2}$

$$\tan x \to -\infty$$

Divergente Folgen

$$a_n = (-1)^n = (-1,1,-1,1,-1\dots)$$
$$a_n = 3+2n = (5,7,9,11,\dots)$$

Spezielle Grenzwerte

$n \to \infty$

$\frac{1}{n} \to 0$	$e^n \to \infty$	$\frac{1}{n^k} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$
$c + \frac{1}{n} \to c$	$e^{-n} \to 0$	$(1+n)^{\frac{1}{n}} \to 1$
$\frac{c\cdot n}{c^n} \to 0$	$\frac{e^n}{n^c} \to \infty$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^c \to 1$
$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1$	$\frac{\sin n}{n} \to 0$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$
$\sqrt[n]{n!} \to \infty$	$\arctan n \to \frac{\pi}{2}$	$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n \to e^c$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$	$\ln n \to \infty$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$
$\frac{c^n}{n!} \to 0$	$\frac{\ln n}{n} \to 0$	$\left(\frac{n}{n+c}\right)^n \to e^{-c}$
$\frac{n^n}{n!} \to \infty$	$\frac{\log n}{n-1} \to 1$	

$$n^c \cdot q^n \to 0 \quad \forall c \in \mathbb{Z}, 0 \le q \le 1$$
$$n(\sqrt[n]{c}-1) \to \ln c \quad \forall c > 0$$

$n \to 0$

$\ln n \to -\infty$	$\frac{\sin n}{n} \to 1$	$\frac{1}{\arctan n} \to 1$
$n\log n \to 0$	$\frac{\cos(n)-1}{n} \to 0$	$\frac{e^n-1}{n} \to 1$
$\frac{\log 1-n}{n} \to -1$	$\frac{1}{\cos n} \to 1$	$\frac{e^c n-1}{n} \to c$
$\frac{c^n-1}{n} \to \ln c, \forall c > 0$	$\frac{1-\cos n}{n^2} \to \frac{1}{2}$	$(1+n)^{\frac{1}{n}} \to e$

Spezielle Grenzwerte von Reihen

Geom: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad \begin{cases} \frac{1}{1-a} & |a| < 1 \\ \text{divergiert} & |a| \ge 1 \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} ax^k = a\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$

Harm. mit $b=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^b} \quad \begin{cases} \text{konvergiert} & b > 1 \\ \text{divergiert} & b \le 1 \end{cases}$

Altern. Harm.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k^b}$ konvergiert nach Leibniz

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{b^k}$ abs. konv. falls $|b| > 1, k \in \mathbb{C}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k!}$ abs. konv. $\forall a \in \mathbb{C}$

Zeta-Funktion: Sei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $\zeta(s)$ konvergiert für $s > 1$

Teleskopsumme: Sei $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$. Konvergiert genau dann, wenn $\lim a_n \to g$ konvergiert. Der Grenzwert der Summe ist dann $a_1 - g$.

Die unendliche Geometrische Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} A q^{k-1} = \frac{A}{1-q}$$

Bedingung

$$|q| < 1$$

Beispiel Unendliche Geometrische Reihe

$$a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \ldots = 14$$

- $q = \frac{1}{2} \rightarrow$ Die Reihe konvergiert
- $S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$

Reihen - Funktionen

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+2)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2-1)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Wichtige Grenzwerte von Funktionen

Harmonische Folge:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Geometrische Folge:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \quad (q < 1)$$

n-te Wurzel:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Eulerzahl:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Integralrechnen

Integralregeln

- Addition/Subtraktion: $\int f(x-k)dx = F(x-k)+C$
- Multiplikation: $\int f(x\cdot k)dx = \frac{1}{k}F(x\cdot k)+C$
- Skalarmultiplikation: $\int \lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)dx = \lambda_1 F(x)+\lambda_2 G(x)+C$

Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, \quad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x)+C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)$ ist:

$$\int (\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)) = \lambda_2 F(x)+\lambda_2 G(x)+C \quad (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R})$$

Integral von verschobenen Funktionene

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

Das unbestimte integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)\mathrm{d}x = F(x-k)+C \quad (k\in\mathbb{R})$$

Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k\cdot x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(k\cdot x)+C \quad (k\neq 0)$$

Strategie zur Berechnung von Integralen

Bruchform:
1. Vereinfache, so dass ein einfacher Nenner entsteht
2. Partialbruchzerlegung
3. $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ oder $\frac{u'}{u}$ erkennen $\Rightarrow \sqrt{u}$ oder $log|u|$

Produktform:
1. Partielle Integration anwenden (evtl. mehrmals)
2. Kettenregel verwenden

Potenzen:
$\int_a^b f(x)^c dx$ umformen in $\int_a^b \left(f(x)^c\cdot 1\right) dx$ oder $\int_a^b \left(f(x)^{c-1}\cdot f(x)\right) dx$ um dann partielle Integration anzuwenden

Exponentenform:
$e/\log$ Trick verwenden, wenn Variabel im Exponenten ist.

Produkt mit e, sin, cos
Mehrmals partielle Integration anwenden, wobei sin, cos immer g' und immer f ist.

Summe im Integral:
Summe aus dem Integral herausziehen (dafür muss die Reihe gleichmässig konvergieren)

Integrationsmethoden

Partielle Integration

Partielle Integration

Seien $a<b$ reelle Zahlen und
$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int \Big(f(x)\cdot g'(x)\Big)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int \Big(f'(x)\cdot g(x)\Big)\,dx$$

$\uparrow$ 1 falls arc- oder log-Funktion vorkommt, x^n, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$

$\downarrow$ $x^n, \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$,

Prioritäten

Für die partielle Integration $f(x)$ nach folgender Priorität auswählen:

1. $\log_e, \log_a$	3. $x^2, 5x^3$	5. $e^x, 5a^x$
2. arcsin, arccos	4. sin, cos, tan	

Substitution

Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel. D.h. wir wollen Substitution vorallem verwenden, wenn wir innere Funktionen haben.

$$\int_{g(b)}^{g(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw. für unbestimmte Integrale

$$\int f(g(t))\cdot g'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=g(t)}$$

Nützliche Substitutionen

- $e^x, \sinh(x), \cosh(x)$, subst: $t=e^{ax}, dx=\frac{dt}{at}$ Dann $\sinh=\cosh=\frac{t^2-1}{2t}$
- $\log(x)$ subst: $t=\log(x), x=e^t, dx=e^t dt$
- für gerade n : $\cos^n(x), \sin^n(x), \tan(x)$ Sub: $t=\tan(x)$, $dy=\frac{1}{1+t^2}dt, \sin^2(x)=\frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2(x)=\frac{1}{1+t^2}$
- für ungerade n : $\cos^n(x), \sin^n(x)$, Sub: $t=\tan(x/2)$, $dy=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\int\sqrt{1-x^2}dx$ sub: $x=\sin(x)$ oder $\cos(x)$
- $\int\sqrt{1+x^2}dx$ sub: $x=\sinh(x)$

Bsp. $\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$ substitution mit $t=\sqrt{9-x^2}$.

$$\Rightarrow x=\sqrt{9-t^2}\Rightarrow x'=\frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}}\Rightarrow dx=\frac{-t\cdot dt}{\sqrt{9-t^2}}$$

$\int -dt = -t$ rücksubstitution $\Rightarrow -\sqrt{9-x^2}$

Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u=g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g'(x), \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u=g(x)$ und $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int r(u)\mathrm{d}u = R(u)+C$$

- Rücksubstitution:

$$R(u)+C = R(g(x))+C$$

Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsglichungen:

$$u=g(x), \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g'(x), \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution $u=g(x)$ und $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$ in das integral $\int f(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)\mathrm{d}u = R(u)+C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- Rücksubstitution:

$$R(u)+C\Big|_{g(a)}^{g(b)} = R(g(x))+C\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

Nützliche Regeln für Partialbruchzerlegung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten $a+c$, $b+c$ in I enthalten ist. Dann gilt
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+c)\,\mathrm{d}t$$
2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt
$$\int_a^b f(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Symmetrie ungerader Funktionen beachten: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^7 \cos x}_{\text{ungerade}}\,\mathrm{d}x = 0$

Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Nennerpolynoms $q(x)$ mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)
$$Beispiel\ Integral: \int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$
- Zuordnen der Nullstellen $x_k$vom $q(x)$ zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten $A, B_1, B_2, \ldots,\ 1 \leq k \leq n$:
$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{einfache\ Nullstelle\ x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \ldots$$
$$Beispiel: \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$
- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen
$$Beispiel: \frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$
$$Beispiel: 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x = 1\,bzw.\,x = -1$$
$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$
- Werte in Partialbruch einsetzen
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$
- Integral der Partialbrüche berechnen
$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Bemerkung

Falls die rationale Funktion $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ unecht gebrochen-rational ist, d.h. $\to deg(r(x)) \geq deg(s(x))$ gilt: Zuerst $f(x)$ in der Form:
$$f(x) = n(x) + r(x)$$
wobei $n(x)$ ein Polynom und $r(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{\tilde{t}(x)}$ eine echt gebrochene-rationale Funktion ist, d.h. $deg(\tilde{s}(x)) < deg(\tilde{t}(x))$

Berechne $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x$ mittels PBZ.
$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$
$$\Rightarrow A+B+C = 0 \quad A+3B-2C = 1 \quad -6A = 1$$
Daraus folgt: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{10}$, $C = -\frac{2}{15}$
$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{10}\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{15}\int\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{6}\log|x| + \frac{3}{10}\log|x-2| - \frac{2}{5}\log|x+3| + C$$

Bsp.
$$\int \frac{x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1}$$
Wir finden die erste Nullstelle $(x-1)$ durch ausprobieren. Danach führen wir Polynomdivision (durch $x-1$) aus und erhalten damit die weite Nullstelle $\left(x^2+1\right)$, Da x^2+1 eine komplexe Nullstelle ist, nehme wir dafür $A+Bx$
$$\frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2-x+2}{(x^2+1)(x-1)}$$
$\Longrightarrow x^2-x+2 = (A+C)\cdot x^2 + (B-A)x + (C-B)\cdot 1$
$\Longrightarrow B = 0, A = -1, C = 1$
$\Longrightarrow \int \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2+1} = \ln(x-1) - \arctan(x) + C$

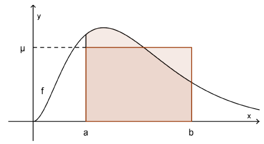
Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ = Nullstellen
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right|$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b]$ = Intervall
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ = Schnittpunkte
$$\left|\int_a^{x_1}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b}(f(x)-g(x))\right|$$

Mittelwert einer Funktion



Definition des Mittelwert μ der Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$: Höhe des Rechtecks, das

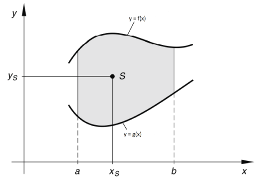
- eine Grundlinie der Länge $b-a$ hat
- der Flächeninhalt des Rechteks der Fläche unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ entspricht
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Rotationsvolumen
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

Bogenlänge
$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Mantelfläche
$$M = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Schwerpunkt ebener Fläche



Schwerpunkt $S = (x_s; y_s)$ einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt A, eingegrenzt von Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$:
$$xs = \frac{1}{A}\int_a^b x\cdot(f(x)-g(x))\mathrm{d}x$$
$$ys = \frac{1}{2A}\int_a^b x\cdot(f(x)^2-g(x)^2)\mathrm{d}x$$
Berechnen von A ebenfalls durch ein Integral:
$$A = \int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$$

Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_s; 0; 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen V, geformt durch Rotation von $y = f(x)$ zwischen $[a, b]$ um x-Achse mit $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 \mathrm{d}x$$

Integrieren von Flächen Nullstellen bestimmen: => Fläche oberhalb x Achse, + Fläche evtl unterhalb x Achse...

Uneigentliche Integrale

Definition Uneigentlich Integral Ein uneigentliches Integral ist ein Integral vom Type:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ ist stetig})$$

oder vom Typ:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (f(x) \text{ hat einen Pol im Intervall } [a, b])$$

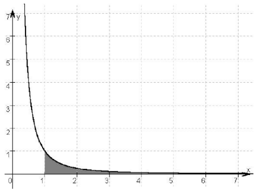
Uneigentliche Integrale erster Art

Definition

Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall, vom Typ:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Graphische Darstellung:



Berechnung

- Rechnen mit endlichem Intervall $[a, \lambda]$ mit $\lambda \geq a$ anstelle von unendlichem Integral $[a, \infty)$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $[a, \infty)$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 1:

- Uneigentliche Integrale mit unendlichem Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Rechnen mit endlichem Invervall $[\lambda, b]$ mit $\lambda \leq b$ anstelle von unendlichem Integral $(-\infty, b]$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das unendliche Intervall $(-\infty, b]$ ergit sich aus $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda)$:

$$I = \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \left(\int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Falls Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}$ existiert, heisst das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ **konvergent**, andernfalls **divergent**

Variante 2:

- Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsinvervall:

$$I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Einfügen einer künslichen Zwischengrenze $c \in \mathbb{R}$ typischerweise $c = 0$

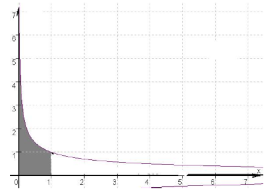
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

- Beide Teilintegrale wie oben berechnen
- Das integral heisst **konvergent** falls beide Teilintegrale konvergent sind.

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Definition

Uneigentlich Integrale auf Interval $[a, b]$ mit einem Pol von $f(x)$ bei $x = a$ heisst, $f(a) \to \infty$, und Stetigkeit auf $(a, b]$ Graphische Darstellung:



Berechnung

- Statt über $[a, b]$ integrieren, integrieren über $a + \epsilon, b$ für beliebige $\epsilon > 0$:

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Das Integral über $[a, b]$ ergibt sich aus $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Das Integral heisst **konvergent**, falls der Limes $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)$ existiert.
- Diese spezielle Variante ist nötig, weil beim Integralrechnen der Integral auf dem ganzen Intervall stetig sein muss. Dies ist nicht der Fall wen ein Pol existiert.

Taylorrreihen

Definition Potenzreihen

- Eine Potenzreihe ist eine undendliche Reihe vom Typ:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \cdots$ sind die Koeffizientend der Potenzreihe

- Allgemein können Potenzreihen mit einer verschiebung von x_0 beschrieben werden, somit ist es eine Potenzreihe mit Zentrum x_0:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^\infty a_k (x - x_0)^k$$

Definition Taylorreihe

- Die Taylorreihe oder Taylorentwicklung einer Funktion $y = f(x)$ and der Stelle x_0 ist die Potenzreihe:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

welche die gleiche Ableitung an der Stelle x_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ hat wie die Funktion $f(x)$

Definition Taylorpolynom

- Ein Taylorpolynom ist eine Taylorreihe $t_f(x)$ welche nach n-ter Ordnung abgebrochen wird. Somit erhällt man das Taylorpolynom n-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

- Bemerkung: Die Tangente der Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist exakt das Taylorpolynom 1. Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

Vorgehen Berechnen Taylorreihe

- Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $t(x)$ an der Stelle x_0 ist:

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Formel für Taylorkoeffizienten

- Formel für k-ten Taylorkoeffizientn der Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Taylorreihen wichtiger Funktionen

$$f(x) = e^x \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ mit } x_0 = 0,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ mit } x_0 = 1,$$

$$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Symetrie von Potenzreihen und Taylorreihen

Symetrie von Funktionen Repetition

- Gerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \to$ Funktion ist achsensymetrisch bzgl. y-Achse
- Ungerade Funktion: Funktion für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \to$ Funktion ist punktsymetrisch bzgl. des Ursprungs

Symetrie von Potenzreihen

- Eine Potenzreihe

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, falls sie nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen enthält.

Symetrie von Taylorreihen

- Falls die Funktion eine gerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle x_0 nur Potenzen mit geraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Falls die Funktion eine ungerade Funktion ist, enthällt die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nur Potenzen mit ungeraden Exponenten,d.h. se gilt $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Bernoulli- de l'Hospital

Regel von Bernoulli- de l'Hospital

- Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig differenzierbar sind aber der Grenzwert auf die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führt, kann der Limes der Ableitung beider Funktionen ausgewerted werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Dies kann beliebig oft Wiederholt werden, es gibt jedoch Fälle wo die Regel versagt, dann müssen andere Methoden verwendet werden.

Varianten von l'Hospital

- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ von der Form $0 \cdot \infty$ ist, schreiben wir:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

und wenden die Regel an.
- Wenn ein Grenzwert $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ von der Form $\infty - \infty$ ist, schreiben wir:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

und wenden die Regel an.

Genauigkeit von Approximationen

Genauigkeit der Approximation

Nicht prüfungsrelevant

- Die Approximation ist im allgemeinen nicht Perfekt, d.h. $p_n(x) \neq f(x)$ für $x \neq x_0$. Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ gilt:
- Ist die Funtion f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und ist $p_n(x)$ das Taylorpolynom n-ten Grades von $f(x)$ an der Stelle x_0. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten

- Zeil: Taylorreihe von Potenzen mit beliebigen (nicht-natürlichen) Exponenten bestimmen, d.h. Funktionen vom Typ $f(x = x^\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Untersuchen der Funktion bei $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$
- Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = (1+x)^\alpha$ ein Polynom (binomische Formel):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- In diesem fall ist die binomische Formel auch die Taylorreihe, es gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Falls $\alpha \in \mathbb{R}$:
  Taylorkoeffizienten:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

  Taylorreihe:

$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Auch bekannt als Binomialreihe

Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenzradius

- Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreih $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist eine Zahl mit Folgenden Eigenschaften:
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < \rho$ konvergiert die Reihe $p(x)$
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > \rho$ divergiert die Reihe $p(x)$
- Es existieren folgende Extremfälle:
  - Konvergenzradius $\rho = 0$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ nur für $x = x_0$.
  - Konvergenzradius $\rho = \infty$: Dann konvergiert die Reihe $p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konvergenzradius Formel

Für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenzbereich Formel

Der Konvergenzbereich in dem die Approximation der Funktion gilt ist definiert durch:

$$(x_0-\rho, x_0+\rho)$$

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen

Definition Differentialgleichung

- Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung ist ein Gleichung von der Form:
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$
für eine gesuchet Funktion $y = y(x)$, in der Ableitungen von $y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten.
- Falls die DGL nach $y^{(n)}$ aufgelöst ist, nennt man sie explizit, ansonsten implizit. Oft können implizite DGL durch einfaches Umformen in explizite DGL umgewandelt werden.

Arten von DGL

- Eine DGL heisst seperierbar, falls $F(x, y)$ als Produkt eines x- und eines y-Anteils geschrieben werden kann, d.h. es hat die Form:
$$y' = g(x)\cdot h(y)$$
für irgendwelche Funktionen $g(x)$ und $h(y)$
- Eine DGL heisst autonom, falls $F(x, y)$ nur von y abhängt, d.h. es hat die Form:
$$y' = f(y)$$
- Eine DGL heisst linear, falls die Variabel welche abgeleitet wird nur in der ersten Potenz vorkommt und nicht multipliziert miteinander oder mit der unabhängigen Variabel wird.

Definition Anfangswertproblem

- Eine DGL mit Anfangsbedingun ist ein Anfangswertproblem.
- Ein Anfangswertproblem n-ter Ordnung ist:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0,\ (x, y, \dots, y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{n-1}(x_0) &= y_{n-1} \end{cases}$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

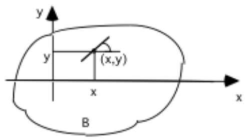
$$\begin{cases} y' &= G(x, y), \quad (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

- Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die allgemeine Lösung der DGL.
- Die Lösung einse Anfangswertproblems nennt man eine spezielle bzw. partikuläre Lösung der DGL.

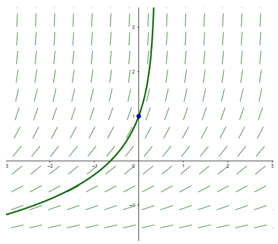
Richtungsfeder

Definition Richtungsfeld

- Ein Richtungsfeld ist ein geometrisches Verständnis von expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. DGL der Form:
$$y' = f(x, y)$$
- $f(x, y)$ gibt also die Steigung der Lösungskurve am Punkt (x, y) an:

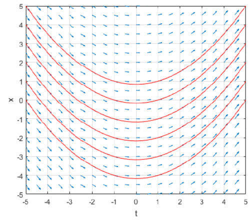


- Jeder Punkt ist somit die Tangente einer spezifischen Lösungskurve

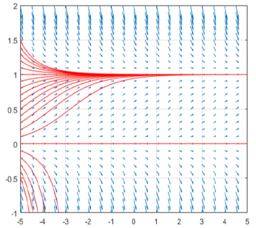


Richtungsfelder von Speziellen DGL

- Unbestimmtes Integral: $y' = f(x)$, das Richtungsfeld ist unabhängig von y die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine verschiebung in y-Richtung durch die Konstante C.



- Autonome DGL:$y' = f(y)$, das Richtungsfeld ist unabhängig von x die Verschiedenen Lösungen gehen durch Verschiebung in x-Richtung in einander über.



Lösen von Seperierbaren Differentialgleichungen

- DGL:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\cdot h(y)$$
- Falls $h(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine Lösung der DGL.
- Trennung aller x- und y-Terme:
$$\frac{1}{h(y)}\cdot \mathrm{d}y = g(x)\cdot \mathrm{d}x$$
- Integration auf beiden Seiten:
$$\int \frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x$$
- Auflösen nach y, Anfangsbedingungen einsetzen:
$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

Formel für inhomogene Differentialgleichungen

- Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

ist gegeben durch:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Lösung von Anfangswertproblemen mit seperiarbaren DGL

- Sind $g(x)$ und $h(y)$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(y_0) \neq 0$, hat das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y' &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung. Sie kann gefunden werden, indem beide Seiten von

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)}\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

berechnet werden und nach y aufgelöst werden.

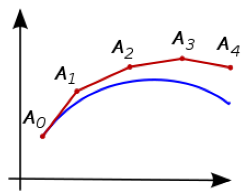
Numerische Verfahren

Eulerverfahren

- Gleichung einer beliebigen Geraden mit Steigung m am Punkt (x_k, y_k):

$$y = y_k + m \cdot (x - x_k)$$

Graphisch:



DGL am Punkt (x_k, y_k):

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k)$$

- Für $k = 0$ und $x = x_0$:

$$\underbrace{y_1}_{\approx y(x_1)} = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=h}$$

- Algorythmus für beliebige k:

$$\begin{cases} x_k &= x_0 + k \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \end{cases}$$

- Problem: Die steigung wird nur am linken Ende des Intervalls berücksichtigt!
- Lösung: Verbesserte numerische Verfahren!