

# Analysis 2 - ZHAW FS 2024

## Integration Fortsetzung:

$$\int f(x-k) dx = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \int f(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

**Partielle Integration:** (bei Funktionsprodukt) für bestimmte Integrale:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x) dx \quad \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = (u(x) \cdot v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

u und v geschickt wählen! Ziel: zweites Integral soll lösbar sein

Also: kein Produkt mehr oder ein bekanntes Produkt oder auf dem Weg dahin

**Tricks:** Potenzen senken, bis x wegfällt (ableiten) | ln(x) zu 1/x | cos/sin Kreislauf nutzen  
! Teilweise sind mehrere Durchgänge nötig!

**Partialbruchzerlegung:** (bei komplexeren Bruch-Integralen)

1. Nullstellen des Nenners bestimmen (evtl. mit Polynomdivision)
2. Kürzen des Bruchs? (gemeinsame Nullstellen?)
3. Jede Nullstelle einem Partialbruch zuordnen.  
(doppelte Nullstellen: beim zweiten Bruch (...)<sup>2</sup>)
4. Mit Hauptnennner Multiplizieren  
=> Brüche fallen weg
5. Sortieren nach den verschiedenen Graden
6. Koeffizienten bestimmen
7. Partialbrüche einzeln integrieren

Tipp:  $\int \frac{1}{x-x_1} dx = \ln|x-x_1| + C,$

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^r} dx = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{(x-x_1)^{r-1}} + C \quad (r \geq 2)$$

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x-\beta)^2 + \gamma^2) + C,$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x-\beta}{\gamma} + C.$$

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

mit Hauptnennner ( $\rightarrow (x-1) \cdot (x+2)$ ) multiplizieren

$$\Rightarrow 5x+1 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1)$$

$$= Ax+2A+Bx-B$$

$$= (A+B)x + (2A-B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = A+B \\ 1 = 2A-B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} \rightarrow \text{einzel integrieren}$$

Funktioniert nur, wenn Grad-Nenner echt grösser als Grad-Zähler!

$$\frac{x^3}{x^3+x^2-x+1} \Rightarrow \frac{x^3+x^2-x+1-x^2+x+1}{x^3+x^2-x+1} = 0$$

Polynomdivision ->

$$\Rightarrow 1 + \frac{-x^2+x-1}{x^3+x^2-x+1} \Rightarrow \text{Partialbruch...}$$

## Substitution:

Durch Ersetzen eines Ausdrückes einen anderen heraus „kürzen“ können:

1. Substitutionsgleichung:

$$2. \quad u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

3. In Integral einsetzen.

4. Integrieren

5. Rücksubstituieren!!!

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \xrightarrow{\text{Substitution}} \underbrace{u = x^2+1}_{\therefore} \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \rightarrow \text{integrieren} + C$$

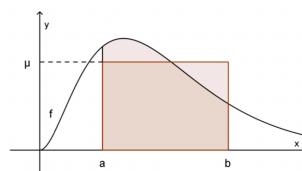
Bei bestimmten Integralen:

$$\int u(x) dx \quad \text{oder} \quad \int u(y) dy \quad (\rightarrow \text{bei Stammfunktion wieder setzen})$$

## Mittelwert einer Funktion:

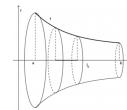
- Durchschnitt aller Funktionswerte ->

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



-  $\mu$  = Mittelwert

-  $A_{\text{Rechteck}} = A_{\text{Kurve}}$



## Rotationsvolumen:

- Volumen, wenn man Kurve um Achse dreht: rotation um **x-Achse / y-Achse**  
rotation um y-Achse: Funktion nach y auflösen!

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

## Bogenlänge einer Kurve:

- Approximation durch unendlich feine Unterteilung ----->
- Intervall  $[a, b]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## Mantelfläche:

- durch Rotation um x-Achse ->

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## Schwerpunkt von Fläche:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

Reminder:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

## Schwerpunkt von Rotationskörper:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx$$

y Koordinate liegt auf x-Achse ( $=0$ )

## Uneigentliche Integrale

-> Integrale mit unendlichem Intervall oder Polstelle

**Unendliches Intervall:** falls Grenzwert existiert -> konvergent, sonst divergent

$$I = \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \int_a^\lambda f(x) dx \right)$$

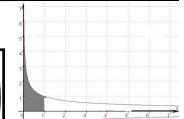
Bsp.:  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\lambda \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$

Dasselbe mit Intervall  $[-\infty, a]$  einfach mit  $\lambda \rightarrow -\infty$ , und:  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$

**Polstelle:** Intervall  $[a, b]$  und Polstelle  $x = a$  (+Stetigkeit auf  $(a, b]$ ) ----->

Statt über  $[a, b]$  integriert man über  $[a+\epsilon, b]$   
Konvergent, falls Limes existiert (sonst div)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \right)$$



## Taylorreihen:

(mit jedem Polynom wird die eigentliche Kurve an  $x_0$  besser angenähert)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- gerade Funktion: Taylorreihe enthält nur Potenzen mit geraden Exponenten
- ungerade Funktion: Taylorreihe enthält nur Potenzen mit ungeraden Exponenten

**Binomialreihe:** (spezielle Taylorreihe)

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

Bernoulli- de l'Hospital: (nur bei  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

-> falls neuer Grenzwert immer noch vom Typ ist: nochmals anwenden

Varianten:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) - g(x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ oder } = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Taylor-Approximation ist nicht perfekt: -> Restglied

-> Taylorpolynom n-ten Grades von  $f(x)$  und  $x_0$

-> dann gibt es ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , sodass das Restglied  $R_n(x)$ :

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

### Konvergenz von Potenzreihen:

Werte einer Potenzreihe (Taylor) werden immer ungenauer, je weiter weg sie vom approximierten Zentrum sind.

-> Konvergenzradius: Alle Werte für  $x$  innerhalb: konvergieren, außerhalb: divergieren Grenzen müssen einzeln getestet werden!

Konvergenzradius  $\rho$  einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ :

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{oder} \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Es kann sein, dass eine (oder beide) Grenzwerte nicht definiert sind  
(wenn beide: kompliziertere Formeln)

### Differentialgleichungen:

- Lösungsmenge ist keine Zahl, sondern Menge von Funktionen  
(Menge aller Lösung = allgemeine Lösung)

- Ein Anfangswertproblem einer DGL n-ter Ordnung ist

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, & (x, y, \dots, y^{(n)}) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

- Anfangswertproblem für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' = G(x, y), & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$y' = f(x, y) \rightarrow$  (z.B.:  $f(3, y(3))$ )

- Richtungsfeld:  $f(x, y) =$  Steigung der Lösungskurve im Punkt  $(x, y)$ :  
-> Alle Steigungen ergeben ein Vektorfeld: => Tangenten an die Lösungskurven

#### Typen:

- Unbestimmtes Integral: Richtungsfeld ist unabhängig von  $y$
- Autonomes DGL: Richtungsfeld ist unabhängig von  $x$

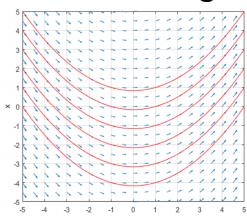


Abbildung: Unbestimmtes Integral

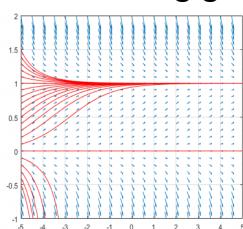


Abbildung: Autonome DGL

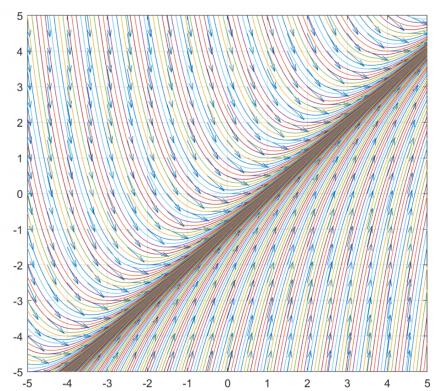
DGL n-ter Ordnung braucht n verschiedene Anfangswerte

-> DGL 1. Ordnung = ein Anfangswert

Lösung Anfangswertproblem:  
Spezielle/partikuläre Lösung

#### Beispiel (Forsetzung)

- DGL:  $y' = x - y$
- Allgemeine Lösung:  $y = C \cdot e^{-x} + x - 1$
- Richtungsfeld mit Lösungskurven:



**Spezielle Lösung:** falls  $f(y_0) = 0$ , ist  $y = y_0$  eine konstante Lösung

-> Nullstellen der Funktion finden

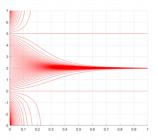
### Beispiel

- DGL:

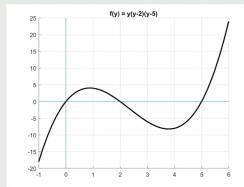
$$y' = y(y - 2)(y - 5)$$

- Konstante Lösungen:  $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 5 \rightarrow$  Nullstellen

- Richtungsfeld dieser DGL:



- Betrachtung des Graphen der Funktion  $f(y) = y(y - 2)(y - 5)$ :



- Das Vorzeichen von  $f(y)$  gibt die Änderungstendenz von Lösungen an, die sich am entsprechenden Wert befinden!

- Man sieht, dass  $y_2 = 2$  eine stabile konstante Lösung ist, während  $y_1 = 0$  und  $y_3 = 5$  instabile konstante Lösungen sind.
- Stabilität/Instabilität bedeutet, dass benachbarte Lösungen angezogen/abgestossen werden.
- Es ist auch Semi-Stabilität möglich, d.h. Anziehung auf der einen Seite und Abstossung auf der anderen Seite.

**Separierbar:** falls DGL als Produkt eines x- und y-Anteils geschrieben werden kann

->  $y' = g(x) \times h(x)$  (Autonome DGL [->  $y' = f(y)$ ] sind separierbar!)

Allgemeine Lösung:  $y' = \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$  (Falls  $h(y_0) = 0$ , dann ist  $y = y_0$  Lösung von DGL)

**Trennung** aller x- und y-Terme:  $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx \rightarrow$  Integration:  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

Auflösen nach y, Anfangsbedingungen einsetzen:  $\int_{y_0}^y \frac{1}{h(y)} ds = \int_{x_0}^x g(x) dt$

Wenn nach speziellen Lösungen gesucht: Wert für x und y einsetzen. Ziel:  $C = \dots$

-> Da C die Höhe der vielen Lösungskurven bestimmt!

Bsp.:  $y' = -x^2 \cdot y \rightarrow \frac{y'}{y} = -x^2 \rightarrow \frac{1}{y} dy = -x^2 dx$

$$\rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -x^2 dx \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{3}x^3 + C} \quad (= e^{C_{\text{alt}}})$$

Spezielle Lösung:  $y(0) = 1$

$$\rightarrow C \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot 0^3} = C = 1$$

Lineare DGL 1. Ordnung: Inhomogen  $y' + f(x)y = g(x)$

-> Homogen:  $y' + f(x)y = 0$

Formel für inhomogen  $y = \left( \int g(x)e^{F(x)} dx \right) \cdot e^{-F(x)}$

( $F(x)$  = Stammfunktion von  $f(x)$ )

Lösungsverfahren 'Variation der Konstanten' für lineare Differentialgleichungen

(I) Vergleich der gegebenen Differentialgleichung mit der allgemeinen Form  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  und Bestimmung von  $f(x)$  und  $g(x)$ . (Vorzeichen)

(II) Bestimmung der Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$ .

(III) Einsetzen in die Formel  $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$  liefert die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(IV) Das Ersetzen von  $C$  durch eine noch zu bestimmende Funktion  $K(x)$  führt zum folgenden Ansatz für die allgemeine Lösung:

$$y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$

(V) Die Funktion  $K(x)$  lässt sich durch die folgende Formel berechnen.

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

(Integrationskonstante nicht vergessen!)

(VI) Einsetzen von  $K(x)$  in den Ansatz aus (IV) ergibt die allgemeine Lösung.

Beispiel:  $y' = 4y + e^{3x} \Rightarrow y - 4y = e^{3x}$

I)  $f(x) = -4, g(x) = e^{3x}$  II)  $F(x) = -4x$

III)  $y_0 = C \cdot e^{-(-4x)} = C \cdot e^{4x}$  IV)  $y = K(x) \cdot e^{4x}$

V)  $K(x) = \int e^{3x} \cdot e^{-4x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

VI)  $y = (-e^{-x} + C) \cdot e^{4x} = \underline{-e^{3x} + C \cdot e^{4x}}$

## Numerisches Verfahren: (approximativ)

- Nur mit Anfangswertproblem (AWP), da allgemein keinen Sinn ergeben würde.

DGL 1. Ordnung [ $y' = f(x; y)$ ] mit Streckenabschnitt-Länge  $h$  und Startpunkt  $P(x_0, y_0)$ :

$$P_k (x_k/y_k): \begin{cases} x_k = x_{k-1} + h \\ y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}; y_{k-1}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow [oder : x_k = x_0 + k \cdot h] \\ \rightarrow [f(x_{k-1}; y_{k-1}) = y' = Steigung] \end{array}$$

Beispiel: AWP:  $\begin{cases} y' = -2x \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_k = x_0 + k \cdot h \\ y_k = y_{k-1} + h \cdot (-2x_{k-1} \cdot y_{k-1}^2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 1 \cdot 0,1 = 0,1 \\ y_1 = y_0 + h \cdot (-2x_0 \cdot y_0^2) = 1 + 0 \cdot (-2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 + 2 \cdot 0,1 = 0,2 \\ y_2 = y_1 + h \cdot (-2x_1 \cdot y_1^2) = 1 + 0,1 \cdot (-2 \cdot 0,1 \cdot 1^2) = 0,98 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 + 3 \cdot 0,1 = 0,3 \\ y_3 = y_2 + h \cdot (-2x_2 \cdot y_2^2) = 0,98 + 0,1 \cdot (-2 \cdot 0,2 \cdot 0,98^2) = 0,9415 \end{cases}$$

Dabei entsteht immer ein Fehler! Der Fehler wird, wenn die Schrittgrösse halbiert wird ebenfalls ungefähr halbiert! (Proportional!)