5 Zusammenfassung: Lineare Abbildungen

5.1 Definition

Gegeben sind zwei reelle Vektorräume V und W (V und W können auch gleich sein).
Eine Abbildung $f: V \to W$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
(2) $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Der Vektor $f(\vec{x}) \in W$, der herauskommt, wenn man f auf einen Vektor $\vec{x} \in V$ anwendet, heisst *Bild* von $\vec{x}$.

Bemerkung
Linearität ist etwas Besonderes. Die allermeisten Abbildungen/Funktionen sind **nicht** linear!!!

5.2 Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung

Satz
Wir betrachten die Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, versehen mit den jeweiligen Standardbasen. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$-Matrix A darstellen:

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Satz
Wir betrachten zwei endlich-dimensionale Vektorräume V mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \ldots; \vec{b}_n\}$ und W mit Basis $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \ldots; \vec{c}_m\}$. Dann gilt:

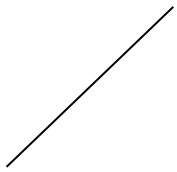
Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ lässt sich durch eine $m \times n$-Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ darstellen:

$$\left(f(\vec{x})\right)_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \cdot \vec{x}_{\mathcal{B}}$$

Die Spalten der Matrix ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}$ sind die Bilder der Elemente von $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$:

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \left(f(\vec{b}_1)\right)_{\mathcal{C}} & \left(f(\vec{b}_2)\right)_{\mathcal{C}} & \cdots & \left(f(\vec{b}_n)\right)_{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

5.3 Beispiele von linearen Abbildungen in der Ebene

Streckung um λ_1 in x und λ_2 in y	**orthogonale Projektion** auf die Gerade $g:\ ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	**Spiegelung** an der Geraden $g:\ ax+by=0$ mit $a^2+b^2=1$	**Rotation** um den Ursprung um Winkel φ	**Scherung** in x-Richtung mit Faktor m
				
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab \\ -ab & 1-b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.4 Beispiele von linearen Abbildungen im Raum

Zentrische Streckung mit dem Faktor λ
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion auf die Ebene $E:\ ax+by+cz=0$ mit $a^2+b^2+c^2=1$	**Spiegelung** an der Ebene $E:\ ax+by+cz=0$ mit $a^2+b^2+c^2=1$
$P=\begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}=E-\vec{n}\cdot\vec{n}^T$	$S=\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}=E-2\vec{n}\cdot\vec{n}^T$

Rotation um den Winkel φ um die x-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die y-Achse	**Rotation** um den Winkel φ um die z-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi)+a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi))-a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi))+a_2\sin(\varphi) \\ a_1a_2(1-\cos(\varphi))+a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))-a_1\sin(\varphi) \\ a_1a_3(1-\cos(\varphi))-a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi))+a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi)+a_3^2(1-\cos(\varphi)) \end{pmatrix}$

5.5 Kern und Bild einer Abbildungsmatrix

Definition: Kern einer Matrix
Der *Kern* $\ker(A)$ einer $m \times n$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Definition: Bild einer Matrix
Das *Bild* (auch: *Spaltenraum*) $\operatorname{im}(A)$ einer $m \times n$-Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ der Matrix (aufgefasst als Vektoren in W) aufgespannt wird:

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = \left\{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n \;\middle|\; \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Satz
Für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\dim(\operatorname{im}(A)) = \operatorname{rg}(A) \quad \text{und} \quad \dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = n$$

5.6 Verknüpfung von linearen Abbildungen

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f: U \to V$ mit Abbildungsmatrix A sowie eine lineare Abbildung $g: V \to W$ mit Abbildungsmatrix B.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & V \arrow[r, "g"] & W \\
\vec{x} \arrow[r, mapsto] & f(\vec{x}) \arrow[r, mapsto] & g(f(\vec{x})) \\
\vec{x} \arrow[r, mapsto] & A \cdot \vec{x} \arrow[r, mapsto] & B \cdot A \cdot \vec{x}
\end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung; ihre Abbildungsmatrix ist $B \cdot A$.

Wichtig ist die Reihenfolge: Die Abbildung, die **zuerst** ausgeführt wird, bzw. die zugehörige Abbildungsmatrix steht **rechts**; so trifft sie zuerst auf das $\vec{x}$.

5.7 Die Inverse einer linearen Abbildung

Gegeben ist eine invertierbare lineare Abbildung f mit Abbildungsmatrix A.
Dann ist die Inverse A^{-1} die Abbildungsmatrix der inversen Abbildung f^{-1}.

5.8 Basiswechsel

Die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$ für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{S}$
Die Spalten von ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$ sind die Vektoren aus $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich $\mathcal{S}$:

$${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} | & | \\ (\vec{b}_1)_{\mathcal{S}} & (\vec{b}_2)_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}}$ für den Basiswechsel von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{B}$

Die Matrix ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}}$ ist die Inverse von ${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$: ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}^{-1}$.

		lineare Abbildung f	
	$\mathbb{R}^2$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}^2$
Darstellung bzgl. der Basis $\mathcal{S}$ (schwarzes Koordinatensystem)	$\vec{x}$	$\xmapsto{{}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}}}$	$f(\vec{x})$
	${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} \downarrow$		$\uparrow {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}$
Darstellung bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ (blaues Koordinatensystem)	$\vec{x}$	$\xmapsto[{}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}]{}$	$f(\vec{x})$

Satz
Gegeben ist ein Vektorraum V mit zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sowie eine lineare Abbildung $f: V \to V$. Dann besteht zwischen den Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}$ folgender Zusammenhang:

$${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Dabei sind die Spalten der Matrix ${}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{B}}$ die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

5.9 Homogene Koordinaten

Wir erweitern jeden **Vektor** um eine Komponente:
- Ortsvektoren (am Ursprung angeheftet): die zusätzliche Komponente wird 1 gesetzt.
- Freie Vektoren (parallel verschiebbar): die zusätzliche Komponente wird 0 gesetzt.

Abbildungsmatrizen von **linearen Abbildungen** erhalten eine zusätzliche Zeile und eine zusätzliche Spalte. Die zusätzlichen Matrix-Elemente werden alle 0 gesetzt ausser dem Element in der Ecke, das 1 wird. Dann macht die Abbildungsmatrix mit den Vektoren in homogenen Koordinaten das Gleiche wie vorher mit den gewöhnlichen Vektoren.

Nun können wir auch **Translationen** durch Matrizen darstellen, und zwar so: Wir ersetzen in der Einheitsmatrix die Nullen in der letzten Spalte durch die Komponenten des Translationsvektors.

Beispiele

Rotation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um φ um den Ursprung	**Translation** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	**Rotation** und **Translation** in einem
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$