Theoretische Informatik

Lucien Perret, Jil Zerndt
May 2024

Alphabete, Wörter, Sprachen

Alphabete sind endliche, nichtleere Mengen von Symbolen.
- $\Sigma = \{a, b, c\}$ Mengen von drei Symbolen
- $\Sigma_{\text{Bool}} = \{0, 1\}$ Boolsches Alphabet

Keine Alphabete
- $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ usw. (unendliche Mächtigkeit)

Wort ist eine endliche Folge von Symbolen eines bestimmten Alphabets.
- abc Wort über dem Alphabet Σ_{lat} (oder über $\Sigma = \{a, b, c\}$)
- 100111 Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$
- ε Leeres Wort (über jedem Alphabet)

Schreibweisen $|\omega|$ = **Länge eines Wortes**
- $|100111| = 6$
- $|\varepsilon| = 0$

$|\omega|_x$ = **Häufigkeit eines Symbols** x in einem Wort
- $|100111|_1 = 4$
- $|\varepsilon|_0 = 0$
- $|\varepsilon|_\varepsilon = 1$

ω^R = **Spiegelwort/Reflection** zu ω
- $(abc)^R = cba$
- $(100111)^R = 111001$
- $\varepsilon^R = \varepsilon$

Teilwort (Infix) v ist ein Teilwort (Infix) von ω ist, wenn man ω als $\omega = xvy$.

$$\omega \neq v \rightarrow \text{ Echtes Teilwort}$$

- Teilwörter von $abba$ $\varepsilon, a, b, ab, abb, bb, bba, abba, ba$
- Präfixe von $abba$ $\varepsilon, a, ab, abb, abba$
- Suffixe von $abba$ $\varepsilon, a, ba, bba, abba$

Mengen von Wörtern Σ^k = Die Menge aller Wörter der Länge k über einem Alphabet Σ
- $\Sigma = \{a, b, c\}$ $\Sigma^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$ $\{0, 1\}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- $\Sigma^* = \underbrace{\Sigma^0}_{1} \cup \underbrace{\Sigma^1}_{} \cup \underbrace{\Sigma^2}_{} \cup \underbrace{\Sigma^3}_{} \cdots$ Kleensche Hülle
- $\Sigma^+ = \underbrace{\Sigma^1}_{2} \cup \underbrace{\sum^{2}_{}}_{4} \cup \underbrace{\Sigma^3}_{8} \ldots = \Sigma^* \backslash \{\varepsilon\}$ Positive Hülle

Konkatenation = Verkettung von zwei beliebigen Wörtern x und y

$$x \circ y = xy := (x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_m)$$

Wortpotenzen Sei x ein Wort über einem Alphabet Σ.
- $x^0 = \varepsilon$
- $x^{n+1} = x^n \circ x = x^n x$
- bbabababbaaaabab $= b^2(ab)^4ba^3(ab)^2$

Sprache über einem Alphabet Σ = Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern.
- $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \wedge L$ Sprache über $\Sigma_1 \rightarrow L$ Sprache über Σ_2
- Σ^* Sprache über jedem Alphabet Σ
- $\{\}= \emptyset$ ist die leere Sprache

Konkatenation von zwei Sprachen $A \subset \Sigma^*$ und $B \subset \Gamma^*$

$$AB = \{uv \mid u \in A \text{ und } v \in B\}$$

Die **Kleenesche Hülle** A^* einer Sprache $A = \{\varepsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \cup \ldots$

Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind Wörter, die Sprachen beschreiben.
Die Sprache RA_Σ der Regulären Ausdrücke über einem Alphabet Σ ist wie folgt definiert:
- $\emptyset, \epsilon \in RA_\Sigma$
- $\Sigma \subset RA_\Sigma$
- $R \in RA_\Sigma \Rightarrow (R^*) \in RA_\Sigma$
- $R, S \in RA_\Sigma \Rightarrow (RS) \in RA_\Sigma$
- $R, S \in RA_\Sigma \Rightarrow (R \mid S) \in RA_\Sigma$

Für jeden regulären Ausdruck $R \in RA_\Sigma$ definieren wir die Sprache $L(R)$ von R wie folgt:
- Leere Sprache: $L(\emptyset) = \emptyset$
- Sprache, die nur das leere Wort enthält: $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- Beschreibt die Sprache $\{a\}$: $L(a) = \{a\}$ $\forall a \in \Sigma$
- Kombiniert die Wörter von R: $L(R^*) = L(R)^*$
- Verkettung von Wörtern (R = prefix): $L(RS) = L(R) \circ L(S)$
- Wörter die in R oder S beschrieben werden: $L(R \mid S) = L(R) \cup L(S)$

Reguläre Sprache
Eine Sprache A über dem Alphabet Σ heisst regulär, falls
- $A = L(R)$ für einen regulären Ausdruck $R \in RA_\Sigma$ gilt.

Beispiele
- $R_1 = a^*b$ $L(R_1) = \{b, ab, aab, aaab, \ldots\}$
- $R_2 = (aa)^*b^*aba$ $L(R_2) = \{aba, baba, aaaba, aababa, \ldots\}$
- $R_3 = (a \mid ab)^*$ $L(R_3) = \{\varepsilon, a, ab, aa, abab, \ldots\}$

$L(R_1)$: Menge der ganzen Zahlen in Dezimaldarstellung
- $((- \mid \varepsilon)(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \mid 0).0$

Eigenschaften und Konventionen Die Menge RA_Σ über dem Alphabet Σ ist eine Sprache über dem Alphabet

$$\{\emptyset, \epsilon, *, (), , |\} \cup \Sigma$$

Priorisierung von Operatoren
- (1) $*$ = Wiederholung $\rightarrow$ (2) Konkatenation $\rightarrow$ (3) $|$= Oder

Beispiele
- $(aa)^*b^*aba = (aa)^*b^*aba$
- $(ab)|(ba) = ab|ba$
- $a(b(ba))|b = abba|b$

Erweiterte Syntax
- $R^+ = R(R^*)$
- $R? = (R \mid \epsilon)$
- $[R_1, \ldots, R_k] = R_1 \,|R_2| \ldots \mid R_k$

Endliche Automaten

Endliche Automaten entsprechen Maschinen, die Entscheidungsprobleme lösen.
- Links nach rechts
- Keinen Speicher
- Keine Variablen
- Speichert aktuellen Zustand
- Ausgabe über akzeptierende Zustände

DEA Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Q endliche Menge von Zuständen
- Σ endliches Eingabealphabet
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ Übergangsfunktion
- $q_0 \in Q$ Startzustand
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Zustände

DEA Funktionen
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein EA. **Konfiguration** von M auf ω ist ein Element aus $Q \times \Sigma^*$.
- Startkonfiguration von M auf ω $\{q_0, \omega\} \in \{q_0\} \times \Sigma^*$
- Endkonfiguration (q_n, ε)

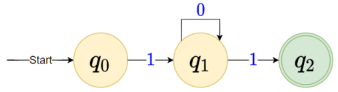
Berechnungsschritt $\vdash_M$ von M

$$(q, \omega) \vdash_M (p, x)$$

Berechnung ist eine endliche Folge von Berechnungsschritten

$$(q_a, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n) \vdash_M \ldots \vdash_M \left(q_e, \omega_j \ldots \omega_n\right) \rightarrow (q_a, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n) \vdash^*_M \left(q_e, \omega$$

Beispiel DEA (eindeutig)
- Sprache: $L(M) = \left\{1x1 \mid x \in \{0\}^*\right\}$

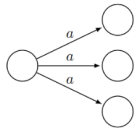


Konfiguration
- Startkonfiguration auf $\omega = 101 \rightarrow (q_0, 101)$
- Endkonfiguration auf $\omega = 101 \rightarrow (q_2, \varepsilon)$

Berechnung
- $\omega = 101 \rightarrow (q_0, 101) \vdash_M (q_1, 01) \vdash_M (q_1, 1) \vdash_M (q_2, \varepsilon) \rightarrow$ akzeptierend
- $\omega = 10 \rightarrow (q_0, 10) \vdash_M (q_1, 0) \vdash_M (q_1, \varepsilon) \rightarrow$ verwerfend

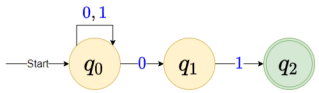
Nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)
Der einzige Unterschied zum DEA besteht in der Übergangsfunktion δ
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$

Ein ε-NEA erlaubt zusätzlich noch ε-Übergänge.

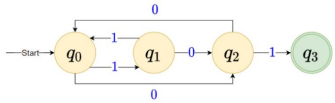


NEA (nicht eindeutig)

- Sprache: $L(M) = \{x01 \mid x \in \{0,1\}^*\}$



- Äquivalenter NEA

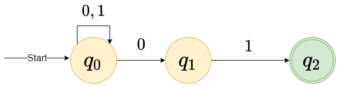


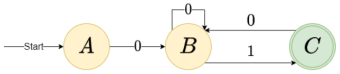
Teilmengenkonstruktion

Jeder NEA kann in einen DEA umgewandelt werden. (gleichmächtig)

1. $Q_{NEA} \to P(Q_{NEA}) = Q_{DEA}$ (Potenzmenge)
2. Verbinden mit Vereinigung aller möglichen Zielzustände
3. Nicht erreichbare Zustände eliminieren
4. Enthält akzeptierenden Zustand $= F_{NEA} \to$ akzeptierend

↓	q	$\delta(q,0)$	$\delta(q,1)$
0	~~$\emptyset$~~	~~$\emptyset$~~	~~$\emptyset$~~
	$A = \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
1	~~$\{q_1\}$~~	~~$\emptyset$~~	~~$\{q_2\}$~~
4	~~$\{q_2\}$~~	~~$\emptyset$~~	~~$\emptyset$~~
	$B = \{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
	$C = \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
2	~~$\{q_1, q_2\}$~~	~~$\emptyset$~~	~~$\{q_2\}$~~
3	~~$\{q_0, q_1, q_2\}$~~	~~$\{q_0, q_1\}$~~	~~$\{q_0, q_2\}$~~

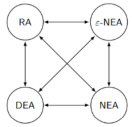




Reguläre Sprachen

Äquvivalente Mechanismen

- Akzeptierender Mechanismus DEA, NEA, ε-NEA
- Beschreibender Mechanismus RA



Äquivalenz DEA und RA

- Es gibt einen DEA, der die Sprache L akzeptiert
- Es gibt einen RA, der die Sprache L akzeptiert.

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Seien L_1 und L_2 zwei reguläre Sprachen über Σ. Dann ist die Vereinigung ... regulär.

$$L_1 \cup L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \vee \omega \in L_2\}$$

Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann ist auch das Komplement ... regulär.

$$\bar{L} = \Sigma^* - L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \notin L\}$$

- Schnitt: $L_1 \cap L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \wedge \omega \in L_2$
- Differenz: $L_1 - L_2 = \{\omega \mid \omega \in L_1 \wedge \omega \notin L_2\}$
- Konkatenation: $L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{\omega = \omega_1\omega_2 \mid \omega_1 \in L_1 \wedge \omega_1 \in L_2\}$
- Kleenesche Hülle: $L^* = \{\omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n \mid \omega_i \in L \text{ für alle } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$

Zustandsklasse

Jedes Wort landet in einem Zustand

$$\Sigma^* = \bigcup_{p \in Q} [p]$$

Kein Wort landet nach dem Lesen in zwei Zuständen

$$[p] \cap [q] = \emptyset, \text{ für alle } p \neq q, p, q \in Q$$

Nach dem Lesen von ω landet man im Zustand p.

$$\text{Klasse}\,[q_0] = \left\{\omega \in \{0,1\}^* \mid |\omega|_0 \bmod (3) = 1\right\}$$

Von M akzeptierte Sprache

$$L(M) = \bigcup_{p \in F} [p]$$

$$L(M) = \left\{\forall\omega \in \{0,1\}^* \mid |\omega|_0 \bmod (3) = 1\right\}$$

Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik

Eine KontextFreie Grammatik $G(KFG)$ ist ein 4-Tupel (N, Σ, P, A) mit

- N ist das Alphabet der Nichtterminale (Variablen)
- Σ ist das Alphabet der Terminale
- P ist eine endliche Menge von Produktionen mit der Form $X \to \beta$

Mit Kopf $X \in N$ und Rumpf $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$

- A ist das Startsymbol, wobei $A \in N$

Ein Wort $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$ nennen wir Satzform.
Seien α, β und γ Satzformen und $A \to \gamma$ eine Produktion.

- Ableitungsschritt mit Produktion $A \to \gamma \quad \alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$
- Ableitung Folge von Ableitungsschritten $\alpha \to \cdots \to \omega$

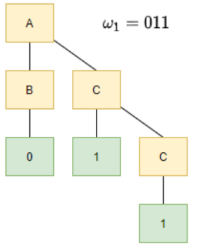
Ableitungsbaum

Eine Ableitung kann als Ableitungsbaum / Parsebaum dargestellt werden. KGF G_1 für die Sprache $\{0^n 1^m \mid n, m \in N\}$

- $G_1 = \{\{A, B, C\}, \{0, 1\}, P, A\}$
- $P = \{A \to BC, B \to 0B|0|\varepsilon, C \to 1C|1|\varepsilon\}$

Ableitung von $\omega_1 = 011$

- $A \to BC \to 0AA \to 01C \to 011 \to \ldots \to 011$



Mehrdeutigkeit

Eine KFG nennen wir mehrdeutig, wenn es ein Wort gibt, das mehrere Ableitungsbäume besitzt.

Mehrdeutigkeiten eliminieren:

- Korrekte Klammerung vom Benutzer erzwingen
- Grammatik anpassen
- Den Produktionen einen Vorrang vergeben

KFG für Sprache L

Jede reguläre Sprache kann durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben werden. Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es einen DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(M) = L$
Dann können wir einen KFG für L wie folgt bauen:

- Für jeden Zustand q_i gibt es ein Nichtterminal Q_i
- Für jede Transition $\delta(q_i, a) = q_j$ erstellen wir die Produktion $Q_i \to aQ_j$
- Für jeden akzeptierenden Zustand $q_i \in F$ erstellen wir die Produktion $Q_i \to \varepsilon$
- Das Nichtterminal Q_0 wird zum Startsymbol A.

Kellerautomaten

Kellerautomaten haben einen «Speicher». PDA = Push Down Automat.

Ein deterministischer Kellerautomat KA ist ein 7-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\delta}, q_0, \$, F)$$

- Menge von Zuständen: Q
- Alphabet der Eingabe: Σ
- Alphabet des Kellers: Γ
- Übergangsfunktion: $\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{Q} \times (\boldsymbol{\Sigma} \cup \boldsymbol{\varepsilon}) \times \boldsymbol{\Gamma} \to \boldsymbol{Q} \times \Gamma^*$
- Anfangszustand: $q_0 \in Q$
- Symbol vom Alphabet des Kellers: $\$ \in \Gamma$
- Akzeptierende Zustände: $F \subseteq Q$

Zusätzliche Einschränkungen für DKAs

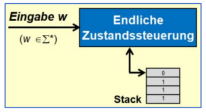
Für jeden Zustand q und alle Symbole x, b gilt, wenn $\delta(q, b, c)$ definiert ist, dann ist $\delta(q, \varepsilon, x)$ undefiniert.
Ein Übergang $\delta(q, b, c) = (p, \omega)$ wird graphisch dargestellt

$$q - b, c/\omega \longrightarrow p$$

Berechnungsschritte

Ein Berechnungsschritt $\delta(q, b, c) = (p, \omega)$ wird wie folgt interpretiert

- q = Aktueller Zustand
- b = Symbol der Eingabe
- c = Symbol wird entfernt
- ω = Wort auf Stack geschrieben
- p = Neuer Zustand



Sprache eines Kellerautomaten

Die Sprache $L(M)$ des Kellerautomaten M ist definiert durch

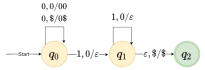
$$L(M) = \left\{ \omega \in \Sigma^* \mid \left(q_0, \omega, \$\right) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma) \text{ für ein } q \in F \text{ und ein } \gamma \in \Gamma^* \right\}$$

Elemente von $L(M)$ werden von M akzeptierte Wörter genannt.

Kellerautomat für eine Sprache erstellen

Ein Kellerautomat für die kontextfreie Sprache $\left\{0^n 1^n \mid n > 0\right\}$

- $0, 0/00$ Read 0 Add 0 $(00 - 0) = 0$
- $0, \$/0\$$ Read 0 Add 0 $(\$0 - \$) = 0$
- $1, 0/\varepsilon$ Read 1 Remove 0 Read $(\varepsilon - 0) = -0$
- $\varepsilon, \$/\$$ Read ε - $(\$ - \$) = \varepsilon$



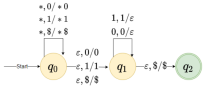
- $\omega_1 = 011 : \left(q_0, 011, \$\right) \vdash \left(q_1, 11, 0\$\right) \vdash \left(q_1, 1, \$\right) \rightarrow \omega_1$ verwerfend

Das Zeichen \$ zeigt an, dass der «Stack» leer ist.

NKA: Übergangsfunktion

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma *)$

Kellerautomat für die Sprache $\left\{\omega\omega^R \mid \omega \in \{0,1\}^*\right\}$



Turingmaschinen

Turingmaschinen (TM)

- Einen Lese- / Schreib-Kopf
- Ein unendliches Band von Zellen

Eine deterministischer Turing-Maschine TM ist ein 7-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$$

- Menge von Zuständen: Q
- Alphabet der Eingabe: Σ
- Bandalphabet: Γ und $\Sigma \subset \Gamma$
- Übergangsfunktion: $\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma} \rightarrow \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}\}$
- Anfangszustand: $q_0 \in Q$
- Akzeptierende Zustände: $F \subseteq Q$
- Leerzeichen $\sqcup$, mit $\mu \in \Gamma$ und $\mu \notin \Sigma$

Sie bildet das 2-Tupel (q, X) auf das Tripel (p, Y, D)

- $q, p \in Q$ und $X, Y \in \Gamma$
- D = Direction
- X = Read
- Y = Overwrite

$$q - X/Y, D \rightarrow p$$

Band

- Unterteilt in einzelne Zellen mit jeweils einem beliebigen Symbol
- Beinhaltet zu Beginn die Eingabe, d.h. ein endliches Wort aus Σ^*. Alle anderen Zellen enthalten das besondere Symbol 4 .

Konfiguration

einer Turing-Maschine M ist durch die folgenden Angaben eindeutig spezifiziert

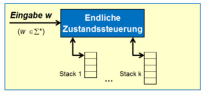
- Zustand der Zustandssteuerung
- Position des Lese- / Schreibkopfes
- Bandinhalt

Semi-Unendliches Band

Das Band der Turingmaschine ist nur in eine Richtung unendlich.
Jede Sprache L die von einer TM T akzeptiert wird, wird auch von einer TM mit semi-unendlichem Band akzeptiert.

Mehrere Stacks

Jede Sprache L die von einer TM T akzeptiert wird, wird auch von einer 2Stack-Maschine S akzeptiert.



Zähler-Maschinen

Eine Zähler-Maschine (Counter Machine) mit k Zählern entspricht einer k Stack-Maschine mit dem Unterschied, dass die Stacks durch einfache Zähler ersetzt werden.
Jede Sprache L die von einer TM T akzeptiert wird, wird auch von einer 2Zähler-Maschine Z mit 2 Zählern akzeptiert.

TM mit Speicher

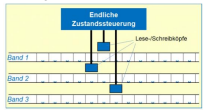
In der endlichen Zustandssteuerung einer TM können ausser dem SteuerZustand zusätzlich endlich viele Daten-Zustände gespeichert werden.

Mehrere Spuren

- Das Band der TM setzt sich aus mehreren «Spuren» zusammen.
- Jede Spur kann ein Symbol des Bandalphabets speichern.

Mehrere Bänder

- TM mit endlich vielen Bändern und Lese- / Schreibköpfen
- Jeder Lese- / Schreibkopf kann unabhängig auf ein Band zugreifen



Mehrband-Maschine

Spezifizieren Sie eine TM M_4, welche die Subtraktion von zwei natürlichen Zahlen $(a - b$, mit $a \geq b)$ realisiert.

Beispiel: $4 - 2 = 2$

			1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$q_0 0000100 \vdash$	$0\sqcup/\sqcup\, 0, RR$	0	0	0	0	1	0	0		
2	$q_0 \sqcup \vdash$										
1	$\sqcup\, q_0 00100 \vdash$	$0\sqcup/\sqcup\, 0, RR$		0	0	0	1	0	0		
2	$0 q_0 \sqcup \vdash$		0								
1	$\sqcup\sqcup\, q_0 0100 \vdash$	$0\sqcup/\sqcup\, 0, RR$			0	0	1	0	0		
2	$00 q_0 \sqcup \vdash$		0	0							
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\, q_0 100 \vdash$	$0\sqcup/\sqcup\, 0, RR$				0	1	0	0		
2	$000 q_0 \sqcup \vdash$		0	0	0						
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\, q_1 00 \vdash$	$1\sqcup/\sqcup\sqcup, RL$					1	0	0		
2	$0000 q_0 \sqcup \vdash$		0	0	0	0					
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\, q_1 0 0 \vdash$	$00/\sqcup\sqcup, RL$							0	0	
2	$000 q_1 0 \vdash$		0	0	0	0					
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\, q_1 0 \vdash$	$00/\sqcup\sqcup, RL$								0	
2	$00 q_1 0 \vdash$		0	0	0						
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\, q_1$	$\sqcup\, 0/\sqcup\, 0, RR$									
2	$0 q_1 0 \vdash$		0	0							
1	$\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\, q_2 \sqcup$										
2	$00 q_2 \sqcup \vdash$		0	0							

Berechnungsmodelle

Turing-berechenbar

Jedes algorithmisch lösbare Berechnungsproblem kann von einer Turing-Maschine gelöst werden.

- Computer und Turing-Maschinen sind äquivalent.

Turing-berechenbare Funktion: Turing-Maschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \sqcup, F)$

$$T : \Sigma^* \to \delta^*$$

$$T(\omega) = \begin{cases} u & \text{falls T auf } \omega \in \Sigma^* \text{ angesetzt, nach endlich vielen} \\ & \text{Schritten mit u auf dem Band anhält} \\ \uparrow & \text{falls T bei Input } \omega \in \Sigma^* \text{ nicht hält} \end{cases}$$

Primitiv rekursive Grundfunktionen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Konstante $k \in \mathbb{N}$ die n-stellige konstante Funktion:

$$c_k^n = \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \text{ mit } c_k^n(x_1, ..., x_n) = k$$

Nachfolgerfunktion:

$$\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } \eta(x) = x + 1$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $1 < k < n$ die n-stellige Projektion auf die k-te Komponente:

$$\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \text{ mit } \pi_k^n(x_1, ..., x_k, ..., x_n) = k$$

n = Anzahl der Argumente, k = Position des Arguments

Loop (primitiv-rekursiv)

- Zuweisungen: $x = y + c$ und $x = y - c$
- Sequenzen: P und $Q \to P; Q$
- Schleifen: $P \to$ Loop x do P until End

Addition von natürlichen Zahlen Add(x, y) = x + y

```
LOOP x1 DO
    x2 = x2 + 1
END
x0 = x2 + 0
```

While (Turing vollständig)

Erweiterung deer Sprache Loop

- While $x_i > 0$ do ... until End

Multiplikation von natürlichen Zahlen Mul(x, y) = x * y

```
WHILE x1 > 0 DO
    x1 = x1 - 1
    LOOP x2 DO
        x0 = x0 + 1
    END
END
```

GoTo (Turing vollständig)

- Zuweisungen: $x_i = x_j + c$ und $x_i = x_j - c$
- Sprunganweisung: IF $x_i = c$ THEN GOTO L_k ELSE GOTO L_t – or simple: GOTO L_k
- Schleifen: WHILE $x_i > 0$ DO ... HALT

Case distinction

```
M1: x0 = x3 + 0
M2: IF x1 = 0 THEN GOTO M4
M3: x0 = x2 +0
M4: HALT
```

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

- Ein Problem ist entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jede Eingabe eine Antwort liefert.
- Ein Problem ist semi-entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jede Eingabe eine Antwort liefert, falls die Antwort ja ist.

Eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\bar{A}$ semi-entscheidbar ist.

- $\bar{A}$ steht für das Komplement von A in Σ^* : $\bar{A} = \Sigma^* \backslash A = \left\{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \notin A\right\}$

Entscheidbarkeit und Turingmaschinen Eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ heisst entscheidbar, wenn eine TM T existiert, die sich wie folgt verhält:

- Bandinhalt $x \in A$ T hält mit Bandinhalt «1» (Ja) an
- Bandinhalt $x \in \Sigma^* \backslash A$ T hält mit Bandinhalt «0» (Nein) an

Äquivalente Aussagen:

- $A \subset \Sigma^*$ ist entscheidbar
- Es existiert eine TM, die das Entscheidungsproblem $T(\Sigma, A)$ löst
- Es existiert ein WHILE-Programm, dass bei einem zu A gehörenden Wort stets terminiert → Entscheidungsverfahren für A

Semi-Entscheidbarkeit Turingmaschinen

Eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar, wenn eine TM T existiert, die sich wie folgt verhält:

- Bandinhalt $x \in A$ T hält mit Bandinhalt «1» (Ja) an
- Bandinhalt $x \in \Sigma^* \backslash A$ T hält nie an

Äquivalente Aussagen

- $A \subset \Sigma^*$ ist semi-entscheidbar
- $A \subset \Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar
- Es gibt eine TM, die zum Entscheidungsproblem $T(\Sigma, A)$ nur die positiven («Ja») Antworten liefert und sonst gar keine Antwort
- Es gibt ein WHILE-Programm, dass bei einem zu A gehörenden Wort stets terminiert und bei Eingabe von Wörtern die nicht zu A gehören nicht terminiert

Reduzierbarkeit

Eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ heisst auf eine Sprache $B \subset \Gamma^*$ reduzierbar, wenn es eine totale, Turing-berechenbare Funktion $F : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $\omega \in \Sigma^*$

$$\omega \in A \Leftrightarrow F(\omega) \in B$$

- $A \preccurlyeq B$ A ist reduzierbar auf B
- $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq C \to A \preccurlyeq C$

Halteproblem

Das allgemeine Halteproblem H ist die Sprache (# = Delimiter)

- $H := \left\{\omega \# x \in \{0, 1, \#\}^* \mid T_\omega \text{ angesetzt auf } x \text{ hält }\right\}$

Sprachen der Halteprobleme (HP): leeres HPH_0 und spezielles HP H_S

- $H_0 := \left\{\omega \in \{0,1\}^* \mid T_\omega \text{ angesetzt auf das leere Band hält }\right\}$
- $H_S := \left\{\omega \in \{0,1\}^* \mid T_\omega \text{ angesetzt auf } \omega \text{ hält }\right\}$

H_0, H_S und H sind semi-entscheidbar.

Komplexitätstheorie

Quantitative Gesetze und Grenzen der algorithmischen Informationsverarbeitung

- Zeitkomplexität: Laufzeit des besten Programms, welches das Problem löst
- Platzkomplexität: Speicherplatz des besten Programms
- Beschreibungskomplexität: Länge des kürzesten Programms

Zeitbedarf Der Zeitbedarf von M auf Eingaben der Länge $n \in \mathbb{N}$ im schlechtesten Fall definiert als

$$\text{Time}_M(n) = \max\left\{\text{Time}_M(\omega) || \omega \mid = n\right\}$$

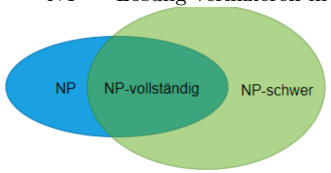
Sei M eine TM, die immer hält und sei $\omega \in \Sigma^*$. Der Zeitbedarf von M auf der Eingabe ω ist

- Time $_M(\omega)$ = Anzahl von Konfigurationsübergängen in der Berechnung von M auf ω

P vs NP Klassifizierung von Problemen

Ein Problem U heisst in Polynomzeit lösbar, wenn es eine obere Schranke $O(n^c)$ gibt für eine Konstante $c \geq 1$.

- $P \doteq$ Lösung finden in Polynomzeit
- $NP \doteq$ Lösung verifizieren in Polynomzeit



NP-schwer

Eine Sprache L heisst NP-schwer, falls für alle Sprachen

$$L' \in NP \text{ gilt, dass } L' \preccurlyeq_p L$$

Eine Sprache L heisst NP-vollständig, falls $L \in NP$ und L ist NP-schwer.

Verifikation

Polynomzeit-Verifizierer: Überprüft die einzelnen Eingaben in einem Problem
Zeuge: Informationen einer gültigen Eingabe

Asymptotische Komplexitätsmessung

O-Notation (Landau Symbole)

- $f \in O(g)$: Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt
  - $f(n) \leq c \cdot g(n) f$ wächst asymptotisch nicht schneller als g
- $f \in \Omega(g)$: Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $d \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt
  - $f(n) \geq \frac{1}{d} \cdot g(n) f$ wächst asymptotisch mindestens so schnell wie g
- $f \in \Theta(g)$: Es gilt $f(n) \in O(g(n))$ und $f(n) \in \Omega(g(n))$
  - f und g sind asymptotisch gleich

Schranken für die Zeitkomplexität von U

- $O(f(n))$ ist eine obere Schranke, falls

Eine TM existiert, die U löst und eine Zeitkomplexität in $O(f(n))$ hat.

- $\Omega(g(n))$ ist eine untere Schranke, falls

Für alle TM M, die U lösen, gilt dass $\text{Time}_{\text{M}}(n) \in \Omega(g(n))$

Rechenregeln

- Konstante Vorfaktoren c ignorieren ($c \in O(1)$).
- Bei Polynomen ist nur die höchste Potenz entscheidend:

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \in O\left(n^k\right)$$

- Die O-Notation ist transitiv.
- $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(h(n)) \rightarrow f(n) \in O(h(n))$

- $O(n)$ $7n + 4$
- $O(n^3)$ $25n^2 + n^3 + 100n$
- $O(n^2 \cdot \log(n))$ $n^2 + n \cdot n \cdot (\log(n)) + 20n^2 + 50n \cdot 100$
- $O(2^n)$ $10^{20} + 3n^3 + 2^n + 2^{10} \cdot 2^{30}$

Übersicht Laufzeiten

TODO: Tabelle mit Laufzeiten

Übersicht