Analysis 2 Examples

Jil Zerndt
May 2024

Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\cdot x^2 \, dx &= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3} \, dx \\ &= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, dx \\ &= \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C \quad (C\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

Mit einer ersten partiellen Integration erhält man

$$\int x^2\cdot e^{-x} \, dx = x^2\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int 2x\cdot\left(-e^{-x}\right) dx = -x^2\cdot e^{-x} + 2\int x\cdot e^{-x} \, dx$$

Eine zweite partielle Integration ergibt

$$\int x\cdot e^{-x} \, dx = x\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int 1\cdot\left(-e^{-x}\right) dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int x^2\cdot e^{-x} \, dx = -x^2\cdot e^{-x} - 2x\cdot e^{-x} - 2e^{-x} + C = -\left(x^2+2x+2\right)\cdot e^{-x} + C$$

Wir integrieren zweimal partiell und erhalten:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cdot\left(x^2+7\right) dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+7\right) - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2x \, dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+7\right) - \left(\frac{1}{9}e^{3x}\cdot 2x - \int \frac{1}{9}e^{3x}\cdot 2 \, dx\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2+7\right) - \frac{1}{9}e^{3x}\cdot 2x + \frac{2}{27}e^{3x} + C \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{65}{9}\right) + C\end{aligned}$$

Eine erste partielle Integration ergibt

$$\int e^x\cdot\cos(x)dx = e^x\cdot\sin(x) - \int e^x\cdot\sin(x)dx$$

Eine weitere partielle Integration ergibt

$$\int e^x\sin(x)dx = e^x\cdot(-\cos(x)) - \int e^x\cdot(-\cos(x))dx$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\int e^x\cdot\cos(x)dx = e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) - \int e^x\cdot\cos(x)dx$$

Dies ist eine Gleichung, die nach dem gesuchten Integral aufgelöst werden kann, und man erhält

$$\int e^x\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x\cdot(\sin(x)+\cos(x)) + C$$

a. Wir erhalten mit der Formel $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}(1-\cos(2x))\right)dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

b. Wir integrieren zuerst partiell:

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = -\cos(x)\sin(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \cos^2(x)dx$$

Einsetzen von $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$ führt dann zu

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \left(1-\sin^2(x)\right)dx = \pi - \int_0^\pi \sin^2(x)dx$$

Dies ist eine Gleichung, die nach dem gesuchten Integral aufgelöst werden kann, und man erhält

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Substitution

$$\int x^2\cdot\sqrt{1+x^3} \, dx$$

Substitution: $u(x) = 1+x^3$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$, $dx = \frac{du}{3x^2}$. Berechnung:

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot\sqrt{1+x^3} \, dx &= \int x^2\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{3x^2} = \int \frac{1}{3}\cdot u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{9}\cdot\sqrt{(1+x^3)^3} + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \, dt$$

Substitution: $u(t) = 1-t$, $\frac{du}{dt} = -1$, $dt = -du$. Berechnung:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \, dt = \int \left(-u^{-1/3}\right) du = -\frac{3}{2}\cdot u^{2/3} + C = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(1-t)^2} + C$$

$$\int \frac{dz}{z\cdot\ln(z)}$$

Substitution: $u(z) = \ln(z)$, $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z}$, $dz = z\cdot du$. Berechnung:

$$\int \frac{dz}{z\cdot\ln(z)} = \int \frac{z\cdot du}{z\cdot u} = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + C = \ln(|\ln z|) + C$$

$$\int_0^\pi \cos^3(x)\cdot\sin(x)dx$$

Substitution: $u(x) = \cos(x)$, $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$. Berechnung:

$$\int_0^\pi \cos^3(x)\cdot\sin(x)dx = \int_1^{-1} \left(-u^3\right) du = \int_{-1}^1 u^3 \, du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_{-1}^1 = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan(z)}{1+z^2} \, dz$$

Substitution: $u(z) = \arctan(z)$, $\frac{du}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$. Berechnung:

$$\int_0^1 \frac{\arctan(z)}{1+z^2} \, dz = \int_0^{\pi/4} u \, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{(\pi/4)^2}{2} = \frac{\pi^2}{32}$$

Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-21} \, dx$$

durch Partialbruchzerlegung und Substitution

Partialbruchzerlegung: Die Nullstellen von $x^2+4x-21$ sind $x_1 = -7$ und $x_2 = 3$, also haben wir den Ansatz

$$\frac{2x+4}{x^2+4x-21} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-3}$$

Daraus ergibt sich die Bedingung $A(x-3) + B(x+7) = 2x+4$, und durch Einsetzen von $x = 3$ und $x = -7$ erhalten wir dann $A = B = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{2x+4}{x^2+4x-21} = \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-3}$$

Wir können jetzt integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-21} \, dx &= \int \frac{1}{x+7} \, dx + \int \frac{1}{x-3} \, dx \\ &= \ln|x+7| + \ln|x-3| + C \\ &= \ln|(x+7)(x-3)| + C \\ &= \ln\left|x^2+4x-21\right| + C\end{aligned}$$

Substitution $u = x^2+4x-21$, mit $du = (2x+4)dx$ bzw. $dx = \frac{du}{2x+4}$ führt auf

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-21} \, dx = \int \frac{2x+4}{u}\frac{du}{2x+4} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Rücksubstitution ergibt

$$\ln|u| + C = \ln\left|x^2+4x-21\right| + C$$

also insgesamt

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x-21} \, dx = \ln\left|x^2+4x-21\right| + C$$

$$\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} \, dx$$

Ansatz: $\frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \Rightarrow 5x+11 = A(x+5) + B(x-2)$
Bestimmung von A und B : $x = 2$ einsetzen $\Rightarrow A = 3$; $\quad x = -5$ einsetzen $\Rightarrow B = 2$ Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} \, dx &= \int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} \, dx \\ &= 3\cdot\ln(|x-2|) + 2\cdot\ln(|x+5|) + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{-9-y}{y^2-2y-24} \, dy$$

Ansatz: $\frac{-9-y}{y^2-2y-24} = \frac{A}{y-6} + \frac{B}{y+4} \Rightarrow -9-y = A(y+4) + B(y-6)$
Bestimmung von A und B : $y = 6$ einsetzen $\Rightarrow A = -1.5$; $\quad y = -4$ einsetzen $\Rightarrow B = 0.5$ Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned}\int \frac{-9-y}{y^2-2y-24} \, dy &= \int \frac{-1.5}{y-6} + \frac{0.5}{y+4} \, dy \\ &= -1.5\cdot\ln(|y-6|) + 0.5\cdot\ln(|y+4|) + C\end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die Kurven der drei Funktionen $y = e^{ax}, y = e^{-bx}$ und $y = 0$ miteinander einschliessen ($a > 0, b > 0$).
Die gesuchte Fläche ist

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-bx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Sei $a > 0$ gegeben.
a. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{c}^{\infty} e^{-ax}\ \mathrm{d}x = 1?$$

b. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{c} e^{ax}\ \mathrm{d}x = 2 \quad ?$$

---

a. Berechnung des uneigentlichen Integrals:

$$\int_{c}^{\infty} e^{-ax}\ \mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_{c}^{\lambda} e^{-ax}\ \mathrm{d}x\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{a}\left(-e^{-a\lambda} + e^{-ac}\right)\right) = \frac{1}{a}e^{-}$$

Aus der Forderung $\int_c^\infty e^{-ax}\ \mathrm{d}x = 1$ ergibt sich also die Gleichung $\frac{1}{a}e^{-ac} = 1$, aufgelöst nach c erhalten wir die Lösung

$$c = -\frac{\ln(a)}{a}$$

b. Berechnung des uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{c} e^{-ax}\ \mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} e^{ax}\ \mathrm{d}x\right) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\left(e^{ac} - e^{a\lambda}\right)\right) = \frac{1}{a}e^{ac}$$

Aus der Forderung $\int_{-\infty}^c e^{ax}\ \mathrm{d}x = 2$ ergibt sich also die Gleichung $\frac{1}{a}e^{ac} = 2$, aufgelöst nach c erhalten wir die Lösung

$$c = \frac{\ln(2a)}{a}$$

Die Engelstrompete entsteht durch Rotation der Kurve von $f(x) = \frac{1}{x}$ um die x-Achse im Intervall $I = [1, \infty)$, d.h. es handelt sich um einen üneigentlichen Rotationskörper".
a. Berechnen Sie das Volumen der Engelstrompete.
b. Stellen Sie die Mantelfläche der Engelstrompete als Integral dar.

---

a. Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2\ \mathrm{d}x = \pi\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \pi$$

b. Mantelfäche des Rotationskörpers:

$$M = 2\pi\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ \mathrm{d}x$$

Es kann durch einen Vergleich mit einem einfacheren Integral gezeigt werden, dass die Mantelfläche divergent ist:

$$M = 2\pi\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}_{>1}\ \mathrm{d}x > 2\pi\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \infty$$

Hier wird also ein endliches Volumen von einer unendlichen Fläche umschlossen!

Bestimmen Sie die gesamte Fläche, die die Kurve der Funktion

$$y = \frac{2}{x(x+1)}$$

mit der x-Achse über dem Intervall $[1, \infty)$ einschliesst.

Partialbruchzerlegung der gegebenen Funktion: $\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$. Berechnung der gesuchten Fläche:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_{1}^{\lambda}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\cdot\lim_{\lambda\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Bigg|_1^\lambda\right) \\
&= 2\cdot\lim_{\lambda\to\infty}\left(\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= 2\cdot\ln(2) \\
&\approx 1.38629
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Fläche kann nicht als $A = \int_1^\infty \frac{2}{x}\ \mathrm{d}x - \int_1^\infty \frac{2}{x+1}\ \mathrm{d}x$ berechnet werden, da diese Teilintegrale beide divergent sind.

Bestimmen Sie die gesamte Fläche, die die Kurve der Funktion

$$y = (x-1)\cdot e^{-x}$$

mit der x-Achse über dem Intervall $[0, \infty)$ einschliesst. Hinweis: Es gilt $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^{-\lambda} = 0$.

Die Funktion $f(x)$ hat im Intervall $[0, \infty)$ bei $x = 1$ eine Nullstelle. Deshalb zerfällt die gesuchte Fläche in zwei Teilflächen, welche separat berechnet werden müssen, nämlich

$$A = \left|\int_{0}^{1}(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{\infty}(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x\right|$$

Das unbestimmte Integral von $f(x)$ ist (partielle Integration):

$$\begin{aligned}
\int(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x &= -(x-1)e^{-x} - \int\left(-e^{-x}\right)\mathrm{d}x = -(x-1)e^{-x}\int e^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= -(x-1)e^{-x} - e^{-x} + C = -xe^{-x} + C
\end{aligned}$$

Berechnung der Teilintegrale:

$$\int_{0}^{1}(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x = -\ xe^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e}$$

$$\int_{1}^{\infty}(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_{1}^{\lambda}(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\left(-xe^{-x}\right)\Bigg|_1^\lambda\right) =$$

Es gilt $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^{-\lambda} = 0$ (vgl. Hinweis). Also folgt $\int_1^\infty(x-1)e^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{e}$. Insgesamt ist also die gesuchte Fläche

$$A = \left|-\frac{1}{e}\right| + \left|\frac{1}{e}\right| = 2\cdot\frac{1}{e} = \frac{2}{e} \approx 0.7358$$

Taylorreihen

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung $p_4(x)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

um das Entwicklungszentrum $x_0 = 1$

Die Ableitungen von $f(x)$ bis zur Ordnung 4 sind

$$f(x) = x^{-1/2}, f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}, f''(x) = \frac{3}{4}x^{-5/2},$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{15}{8}x^{-7/2}, f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}x^{-9/2}$$

Ausgewertet an der Stelle $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1, f'(1) = -\frac{1}{2}, f''(1) = \frac{3}{4}, f^{(3)}(1) = -\frac{15}{8}, f^{(4)} = \frac{105}{16}$$

Also ist das gesuchte Taylor-Polynom $p_4(x)$:

$$\begin{aligned}
p_4(x) &= \frac{1}{0!} + \frac{-1/2}{1!}(x-1) + \frac{3/4}{2!}(x-1)^2 + \frac{-15/8}{3!}(x-1)^3 + \frac{105/16}{4!}(x-1)^4 \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$f(x) = x\cdot\ln(x)$$

um das Entwicklungszentrum $x_0 = e$.

Die Ableitungen von $f(x)$ bis zur Ordnung 2 sind

$$f(x) = x\cdot\ln(x), f'(x) = \ln(x) + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$$

Ausgewertet an der Stelle $x_0 = e$:

$$f(e) = e, f'(e) = 2, f''(e) = \frac{1}{e}$$

Also ist das gesuchte Taylor-Polynom:

$$p_2(x) = \frac{e}{0!} + \frac{2}{1!}(x-e) + \frac{1/e}{2!}(x-e)^2 = e + 2(x-e) + \frac{1}{2e}(x-e)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$$

soll in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine Parabel (d.h. ein Polynom 2. Ordnung) ersetzt werden. Berechnen Sie dieses Näherungspolynom $p_2(x)$ und vergleichen Sie die Werte von $f(x)$ und $p_2(x)$ an der Stelle $x = 0.2$.

Die Ableitungen von $f(x)$ bis zur Ordnung 2 sind

$$f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}, f'(x) = \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2},$$
$$f''(x) = \frac{-\sin(x)(1-\sin(x)) + 2\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^3}$$

Ausgewertet an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2.$$

Also ist das gesuchte Taylor-Polynom:

$$p_2(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2$$

Vergleich der Funktionswerte: $f(0.2) \approx 1.2479, p_2(0.2) = 1.24$.

Taylorreihe $t_f(x)$ von $f(x) = -\ln(1-x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$$t_f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Taylorreihe $t_g(x)$ von $g(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$$t_g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $y = \cos^2(x)$
a. Formel für die Taylorkoeffizienten
b. Taylorreihe für $\cos(x)$ als Ausgangspunkt nehmen und quadrieren, d.h. von dem Produkt

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \ldots\right)$$

genügend viele Terme ausmultiplizieren.

---

a. Die Ableitungen von $y = \cos^2(x)$ sind $y' = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x)$, $\quad y'' = -2\cos(2x)$, $\quad y^{(3)} = 4\sin(2x)$, $\quad y^{(4)} = 8\cos(2x)$
Also

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-2}{2!} = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{8}{4!} = \frac{1}{3}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also $p_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}$
b. Ausmultiplizieren liefert

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \ldots\right)$$
$$= 1 + \frac{x^4}{4} + \ldots - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^4}{24} \pm \ldots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} \mp$$

Daraus folgt ebenfalls $p_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3}$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ der Funktion $y = \cos\left(x^2\right)$
a. Formel für die Taylorkoeffizienten
b. Taylorreihe für $f(u) = \cos(u)$ als Ausgangspunkt, die Substitution $u = x^2$

---

a. Die Ableitungen von $y = \cos\left(x^2\right)$ sind

$$y' = -2x\sin\left(x^2\right), \quad y'' = -2\sin\left(x^2\right) - 4x^2\cos\left(x^2\right),$$
$$y^{(3)} = -12x\cos\left(x^2\right) + 8x^3\sin\left(x^2\right)$$
$$y^{(4)} = -12\cos\left(x^2\right) + 48x^2\sin\left(x^2\right) + 16x^4\cos\left(x^2\right)$$

Also$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{-12}{4!} = -\frac{1}{2}$
Das gesuchte Taylorpolynom ist also $p_4(x) = 1 - \frac{x^4}{2}$
b. Die (bekannte) Taylorreihe von $f(u) = \cos(u)$ ist

$$t_{\cos}(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} \mp \ldots$$

Einsetzen von $u = x^2$ und Abbrechen nach dem Term 4. Ordnung liefert $p_4(x) = 1 - \frac{x^4}{2}$

Wir betrachten die Funktion
$f(x) = \frac{1}{1-2x}$
a. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 0$, indem Sie die Formel für die TaylorKoeffizienten verwenden.
b. Bestätigen Sie das Resultat von a., indem Sie die Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe auf den Funktionsausdruck anwenden.

---

a. Die Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ sind

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, f''(x) = \frac{8}{(1-2x)^3},$$
$$\ldots, f^{(k)}(x) = \frac{k!2^k}{(1-2x)^{k+1}}$$

An der Stelle $x_0 = 0 :\ f^{(k)}(0) = k!2^k$, also $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 2^k$. Die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist also

$$t_f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

b. Aus der Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe, nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1$$

folgt, angewendet für $q = 2x$, dieselbe Reihe wie bei a.

Bestimmen Sie die positive Lösung der Gleichung $\cos(x) = 2x^2$ näherungsweise durch Approximation von $\cos(x)$ durch
a. das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$,
b. das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$.

---

a. Taylorpolynom 2. Ordnung von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$: $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Also erhalten wir die Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{2} = 2x^2$$

Positive Lösung dieser Gleichung:

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.6325$$

b. Taylorpolynom 4. Ordnung von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$: $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Also erhalten wir die Gleichung

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 2x^2$$

bzw.

$$x^4 - 60x^2 + 24 = 0$$

Positive Lösungen dieser Gleichung (biquadratische Gleichung; mit Substitution $u = x^2$ lösen): $x_{1,2} = \sqrt{30 \pm \sqrt{876}}$; wir brauchen hier x_2, d.h.

$$x = \sqrt{30 - \sqrt{876}} \approx 0.6345$$

$$f(x) = \left(1 + e^x\right)^2$$

a. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung $p_3(x)$ der Funktion $f(x)$ um das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$.
b. Welchen Näherungswert erhält man mit $p_3(x)$ für den Funktionswert an der Stelle $x = 0.2$? Bestimmen Sie auch die Abweichung vom exakten Funktionswert.

---

a. Mit Hilfe der Kettenregel berechnet man - $f(0) = 4$ - $f'(0) = 2\left(e^x + e^{2x}\right)\Big|_{x=0} = 4$ - $f''(0) = 2\left(e^x + 2e^{2x}\right)\Big|_{x=0} = 6$ - $f'''(0) = 2\left(e^x + 4e^{2x}\right)\Big|_{x=0} = 10$
Daraus folgt

$$p_3(x) = 4 + 4x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

b. Man berechnet

$$f(0.2) - p_3(0.2) \approx 0.0013$$

Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 4 - x^2$$

näherungsweise durch Entwicklung von $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ in ein Taylorpolynom 4. Ordnung bei $x_0 = 0$.

Mit Hilfe der Taylorreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

um 0 erhält man $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 1 + x - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots\right)$$

und somit ist das Taylorpolynom 4. Ordnung p_4 der Funktion $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ gegeben durch

$$p_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

Die Gleichung $p_4(x) = 4 - x^2$ ist also die biquadratische Gleichung

$$\frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 36x^2 - 72 = 0$$

Mit der Substitution $u = x^2$ erhält man mit Hilfe der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen

$$u_\pm = \frac{-36 \pm \sqrt{1584}}{2} = -18 \pm 6\sqrt{11}$$

Da nur $u_+ > 0$, folgt für die Näherungslösung $x_\pm$der Gleichung

$$x_\pm = \pm\sqrt{6\sqrt{11} - 18}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{0.3} \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

durch Entwicklung des Integranden in ein Taylorpolynom 6. Ordnung bei $x_0 = 0$ und gliedweise Integration.
Hinweis: Finden Sie zuerst ein geeignetes Taylorpolynom von $\sqrt{1+x}$ und ersetzen Sie dann x durch x^2.

Das Taylorpolynom 3. Ordnung p_3 der Funktion $\sqrt{1+x}$ um 0 ist gegeben durch

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Diese Formel findet man beispielsweise in einer Formelsammlung. Somit ist das Taylorpolynom 6. Ordnung der Funktion $\sqrt{1+x^2}$ gegeben durch

$$p_3\left(x^2\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$$

Wir berechnen den Näherungswert des gegebenen Integrals

$$\begin{aligned}\int_0^{0.3} \sqrt{1+x^2}dx &\approx \int_0^{0.3} dx + \frac{1}{2}\int_0^{0.3} x^2 dx - \frac{1}{8}\int_0^{0.3} x^4 dx + \frac{1}{16}\int_0^{0.3} x^6 dx \\ &= 0.3 + \frac{1}{6}0.3^3 - \frac{1}{40}0.3^5 + \frac{1}{112}0.3^7 \\ &\approx 0.304441\end{aligned}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$$

durch Entwicklung des Integranden in ein Taylorpolynom 3. Ordnung bei $x_0 = 0$ und gliedweise Integration.
Hinweis: Finden Sie zuerst ein geeignetes Taylorpolynom von $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ und ersetzen Sie dann x durch $\sqrt{x}$.

Mit Hilfe der Aufgabe 2 ergibt für sich das Taylorpolynom 6. Ordnung p_6 der Funktion $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ um 0

$$p_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6$$

Somit ist das Taylorpolynom 3. Ordnung der Funktion $\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)$ um 0 gegeben durch

$$p_6(\sqrt{x}) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^3$$

Wir erhalten schliesslich
$\int_0^{0.5} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right) dx \approx \int_0^{0.5}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^3\right) dx \approx 0.56426$

Potenzreihen

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

a. Bestimmen Sie die Ableitung $p'(x)$ von $p(x)$, indem Sie Term für Term ableiten.
b. Schreiben Sie $p'(x)$ in geschlossener Form (geometrische Reihe!).
c. Integrieren Sie das bei b. erhaltene Resultat (mit $p(0) = 0$), um einen geschlossenen Ausdruck für $p(x)$ zu erhalten.

---

a. Die Ableitung von $p(x)$ ist

$$p'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots$$

b. Die bei a. erhaltene Reihendarstellung für $p'(x)$ ist eine unendliche geometrische Reihe mit Summe

$$p'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{ für } |x| \leq 1)$$

c. Wir integrieren das Resultat von b. unbestimmt und erhalten

$$p(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

Einsetzen von $p(0) = 0$ liefert $C = 0$, also $p(x) = \arctan(x)$.

Konvergenzbereich von $p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

Es gilt $a_k = k + 1$, also ist der Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} = 1$$

(Berechnung auch mit der Regel von Bernoulli-de l'Hospital möglich.)
Verhalten am Rand des Konvergenzbereichs:

$$\begin{aligned} x = \rho = 1 :& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots : \text{ divergent} \\ x = -\rho = -1 :& 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \mp \ldots : \text{ divergent}\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für

$$-1 < x < 1$$

Konvergenzbereich von $p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \ldots$

Es gilt $a_k = \frac{1}{2^k}$, also ist der Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{2^k} = \lim_{k\to\infty}(2) = 2$$

Verhalten am Rand des Konvergenzbereichs:

$$\begin{aligned} x = \rho = 2 :& 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots : \text{ divergent} \\ x = -\rho = -2 :& 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \mp \ldots : \text{ divergent}\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für

$$-2 < x < 2$$

Konvergenz von $p_3(x) = 1 + \frac{x}{4\cdot 2} + \frac{x^2}{4^2\cdot 3} + \frac{x^3}{4^3\cdot 4} + \frac{x^4}{4^4\cdot 5} + \ldots$

Die Koeffizienten der gegebenen Potenzreihe sind $a_n = \frac{1}{4^n\cdot(n+1)}$. Der Konvergenzradius ist also
$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot(n+2)}{4^n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 4\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 4\cdot 1 = 4$
Verhalten am Rand des Konvergenzbereichs:

$$\begin{aligned} x = \rho = 4 : &\quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots : \text{ divergent} \\ x = -\rho = -4 : &\quad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \pm \ldots : \text{ konvergent}\end{aligned}$$

Die Potenzreihe konvergiert also für $-4 \leq x < 4$

Wir betrachten die Binomialreihe für $\alpha \notin \mathbb{N}$ beliebig, d.h. die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

für ein beliebiges $\alpha \notin \mathbb{N}$, und den Konvergenzradius ρ dieser Reihe.
a. Empirisch sieht man, dass $\rho = 1$ gelten muss. Bestätigen Sie dieses Ergebnis analytisch, indem Sie in die Formel für den Konvergenzradius einsetzen.
b. Warum ist die bei a. durchgeführte Rechnung nicht gültig für den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$?

---

a. Einsetzen von $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ in die Formel $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| \\ &= 1\end{aligned}$$

(die letzte Tatsache kann man mit der Regel von Bernoulli-de l'Hospital oder anderen Überlegungen sehen).
b. Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $\binom{\alpha}{n} = 0$ für $\alpha > n$. Deshalb sind die in der Formel $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ auftretenden Quotienten für grosse n alle von der Form $\frac{0}{0}$ und damit undefiniert.

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-2x}$
Die Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = 0$ ist

$$t_f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

a. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Reihe.
b. Überlegen Sie sich, ob die Reihe auf dem Rand des Konvergenzbereichs konvergiert oder nicht (d.h. für $x = \rho$ und $x = -\rho$).

---

a. Berechnung des Konvergenzradius:

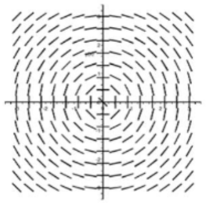
$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

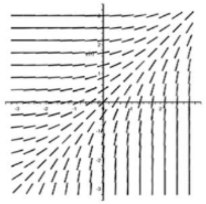
b. Untersuchung des Verhaltens auf dem Rand des Konvergenzbereichs:

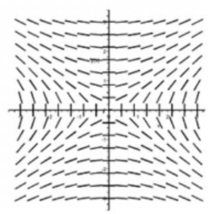
$$\begin{aligned} x = \rho = \tfrac{1}{2} : &\quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots : \text{ divergent} \\ x = -\rho = -\tfrac{1}{2} : &\quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \mp \ldots : \text{ divergent}\end{aligned}$$

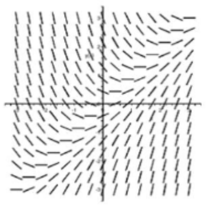
Differentialgleichungen

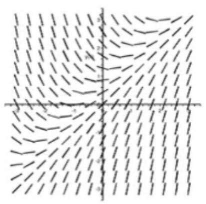
Ordnen Sie die folgenden Differentialgleichungen ihren jeweiligen Richtungsfeldern zu: a. $y' = x - y$ b. $y' = x - y + 1$ c. $2yy' = x$ d. $yy' + x = 0$ e. $y'x + y = 0$ f. $y' = e^{x-y}$

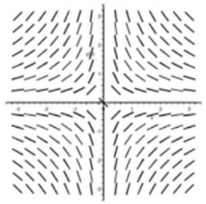

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


(F)

a. Für Werte mit $x = y$ ist die Steigung 0 ; rechts von diesen Wertepaaren ist die Steigung positiv, links davon ist sie negativ. $\Rightarrow$ Bild (D).
b. Die Steigung 0 wird für die Werte mit $y = x + 1$ erreicht, ansonsten ist die Situation analog wie bei (a). $\Rightarrow$ Bild (E)
c. Umformen ergibt $y' = \frac{x}{2y}$. Für $x = 0$ und $y \neq 0$ ist die Steigung gleich 0 ; für $y = 0$ und $x \neq 0$ strebt die Steigung gegen ∞. Für die restlichen Werte ist die Steigung ist genau dann positiv, wenn x und y beide das gleiche Vorzeichen haben. $\Rightarrow$ Bild (C)
d. Umformen ergibt $y' = -\frac{x}{y}$. Die Situation ist ähnlich wie bei (c), aber die Steigung ist jetzt genau dann positiv, wenn x und y verschiedene Vorzeichen haben. $\Rightarrow$ Bild (A)
e. Umformen ergibt $y' = -\frac{y}{x}$. Die Steigung ist 0 für die Werte auf der x-Achse mit $x \neq 0$, und sie gehen gegen unendlich für die Werte auf der y-Achse mit $y \neq 0$. $\Rightarrow$ Bild (F)
f. Für $x = y$ ist die Steigung 1; wenn der x-Wert viel grösser als der y-Wert ist, dann wird die Steigung sehr gross, im umgekehrten Fall ist sie nahe bei 0. $\Rightarrow$ Bild (B)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x+y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie approximativ $y(1.2)$, d.h. den Wert der Lösungskurve an der Stelle $x = 1.2$, durch 4 Schritte (von Hand) mit dem Euler-Verfahren, d.h. mit der Schrittweite $h = 0.05$.

Vier Euler-Schritte mit $h = 0.05$, d.h. $x_0 = 1, x_1 = 1.05, x_2 = 1.1, x_3 = 1.15, x_4 = 1.2$, und $f(x,y) = \sqrt{x+y}$:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \approx 1.07 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \approx 1.1435 \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \approx 1.2184 \\ y_4 &= y_3 + hf(x_3, y_3) \approx 1.2954 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Approximation

$$y(1.2) \approx 1.2954$$

Finden und klassifizieren Sie die konstanten Lösungen der folgenden Differentialgleichungen: (alles konstante Lösungen) a. $y' = y^2 - 1$ - $y_1 = -1$: stabil - $y_2 = 1$: instabil
b. $y' = y^2$ - $y_1 = 0$: semistabil
c. $y' = y^3$ - $y_1 = 0$: instabil
d. $y' = -y^3$ - $y_1 = 0$: stabil

Lösen Sie mit Separation der Variablen das AWP

$$\begin{cases} -\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

des radioaktiven Zerfalls. Dabei ist $N(t)$ die Konzentration zur Zeit t und N_0 die Konzentration zu Beginn.

Standardform der DGL: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -k \cdot N$. Separation der Variablen:

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = -k \int \mathrm{d}t$$

also

$$\ln|N| = -k(t + C) = -kt + \tilde{C}$$

Auflösen nach N :

$$N(t) = M \cdot e^{-kt} \quad (M \in \mathbb{R})$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ ergibt $M = N_0$, also ist die Lösung des AWPs

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

Ein Körper besitzt zur Zeit $t = 0$ die Temperatur T_0 und wird in der Folgezeit durch vorbeiströmende Luft der konstanten Temepratur T_L gekühlt ($T_L < T_0$). Der Abkühlungsprozess wird dabei durch die Differentialgleichung

$$\dot{T} = -a(T - T_L) \quad (a > 0)$$

beschrieben.
a. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Temperatur $T(t)$ des Körpers.
b. Gegen welchen Endwert $\lim_{t\to\infty} T(t)$ strebt die Temperatur des Körpers?

---

a. Standardform der DGL: $T' = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -a(T - T_L)$, also

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_L} = -a \int \mathrm{d}t, \quad \text{integriert:} \quad \ln|T - T_L| = -at + C, C \in \mathbb{R}$$

also $|T - T_L| = e^{-at+C}$ bzw. $T = T_L \pm e^{-at+C}, C \in \mathbb{R}$; die allgemeine Lösung der Gleichung ist damit

$$T = T_L + K \cdot e^{-at}, \quad K \in \mathbb{R}$$

(Für $K = 0$ ergibt sich die konstante Lösung $T = T_L$.) Einsetzen der Anfangsbedingung $T(0) = T_0$ ergibt $T_0 = T_L + K$, also $K = T_0 - T_L$, damit ist die gesuchte spezielle Lösung der DGL

$$T(t) = T_L + (T_0 - T_L) \cdot e^{-at}$$

b. Es gilt $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_L + (T_0 - T_L) \cdot \lim_{t\to\infty} e^{-at} = T_L$ (wegen $a < 0$), d.h. die Temperatur des Körpers gleicht sich für $t \to \infty$ der Temperatur der Umgebungsluft an.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = y - 7$ auf zwei verschiedene Arten.

---

a. Lösung mit Separation der Variablen: Standardform der DGL: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - 7$, also

$$\int \frac{1}{y-7}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x, \quad \text{integriert:} \quad \ln|y - 7| = x + C, C \in \mathbb{R}$$

weiter umgeformt: $y - 7 = \pm e^{x+C} = K \cdot e^x$, woei $K = \pm e^C$, also ist die allgemeine Lösung der DGL

$$y = K \cdot e^x + 7 \quad (K \in \mathbb{R})$$

b. Lösung mit Variation der Konstanten: Einsetzen in die Lösungsformel $y = e^{-F(x)} \int g(x) e^{F(x)} \mathrm{d}x$ für $g(x) = -7$ und $F(x) = -x$:

$$y = e^x \int (-7) \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^x \left(7e^{-x} + C\right) = C \cdot e^x + 7 \quad (C \in \mathbb{R})$$

Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{N}(t) = k \cdot N(t) \cdot (A - N(t))$ des Wachstums mit oberer Grenze $A > 0$.
a. Bestimmen Sie mit Separation der Variablen die allgemeine Lösung dieser DGL.
b. Bestimmen Sie die spezielle Lösung zum Anfangswert $N(0) = \epsilon > 0$ und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} N(t)$

---

a. Standardform der DGL: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN(A - N)$. Es gibt die konstanten Lösungen $N = 0$ und $N = A$; um die übrigen Lösungen zu erhalten, separieren wir die Variablen, also

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N(A-N)} = k \int \mathrm{d}t$$

Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{N(A-N)}$:

$$\frac{1}{N(A-N)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{N} + \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A-N}$$

und damit

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N(A-N)} = \frac{1}{A}\left(\int \frac{\mathrm{d}N}{N} + \int \frac{\mathrm{d}N}{A-N}\right) = \frac{1}{A}(\ln|N| - \ln|A-N|) + C$$
$$= \frac{1}{A} \ln\left|\frac{N}{A-N}\right| + C$$

also

$$\frac{1}{A} \ln\left|\frac{N}{A-N}\right| = kt + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Auflösen nach N :

$$N(t) = \frac{ACe^{Akt}}{1 + Ce^{Akt}} = \frac{A}{1 + L \cdot e^{-Akt}} \quad (L \in \mathbb{R})$$

b. Einsetzen der Anfangsbedingung $N(0) = \epsilon$ ergibt $\epsilon = \frac{A}{1+L}$, also $L = \frac{A}{\epsilon} - 1$, damit ist die gesuchte spezielle Lösung der DGL

$$N(t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{A}{\epsilon} - 1\right) e^{-Akt}}$$

mit $\lim_{t\to\infty} N(t) = A$ (wegen $A > 0$ und $k > 0$ gilt $e^{-Akt} \to 0$ für $t \to \infty$). Dies ist auch von der Anwendung her sinnvoll: Für $t \to \infty$ nähert sich der Bestand der oberen Grenze A und wächst nicht darüber hinaus.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = 2y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a. Bestimmen Sie approximativ $y(1)$, d.h. den Wert der Lösungskurve an der Stelle $x = 1$, durch 4 Schritte (von Hand) mit dem Euler-Verfahren, d.h. mit der Schrittweite $h = 0.25$.
b. Bestimmen Sie analytisch $y(1)$, d.h. bestimmen Sie analytisch die exakte Lösung $y(x)$ und berechnen Sie $y(1)$.

---

a. Vier Euler-Schritte mit $h = 0.25$, d.h. $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$, und $f(x, y) = 2y + x$:

$$y_0 = 1$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = \frac{37}{16} = 2.3125$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = \frac{115}{32} = 3.59375$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = \frac{357}{64} = 5.578125$$

Insgesamt erhalten wir also die Approximation

$$y(1) \approx 5.578$$

b. Um die exakte Lösung zu bestimmen, verwenden wir die Formel $y = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x$ für $g(x) = x$ und $f(x) = -2$, also $F(x) = -2x$ und (mit partieller Integration)

$$y = e^{2x} \int x \cdot e^{-2x} \, \mathrm{d}x$$
$$= e^{2x} \left(-\frac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + C\right)$$
$$= -\frac{1}{4}(2x + 1) + Ce^{2x} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt $1 = -\frac{1}{4} + C$, also $C = \frac{5}{4}$ und damit die Lösung des AWPs

$$y = -\frac{1}{4}(2x + 1) + \frac{5}{4}e^{2x}$$

Für $x = 1$ ergibt sich

$$y(1) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}e^2 \approx 8.486$$

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Gesucht ist $y(2)$, d.h. die Lösung an der Stelle $x = 2$.
a. Wir erinnern uns von Serie 11 (Aufgabe 6), dass $y = 2e^{-x} + x - 1$ die exakte Lösung des AWPs ist. Berechnen Sie damit $y(2)$.
b. Bestimmen Sie (von Hand) mit dem Euler-Verfahren die approximative Lösung an der Stelle $x = 2$ mit den Schrittweiten $h = 2, h = 1$ und $h = 0.5$ (d.h. in 1 Schritt, in 2 Schritten und in 4 Schritten).
c. Führen Sie (mit Software) das Euler-Verfahren mit den Schrittweiten $h = 0.1, h = 0.01$ und $h = 0.001$ aus, um immer bessere Approximationen für $y(2)$ zu erhalten.

---

a. Die analytisch berechnete Lösung hat an der Stelle $x = 2$ also den Wert

$$y(2) = 2 \cdot e^{-2} + 1 \approx 1.2707$$

b. Mit den verschiedenen Schrittweiten ergeben sich folgende Approximationen: - $h = 2 : x_0 = 0, x_1 = 2; y_0 = 1, y_1 = -1$, also $y(2) \approx -1$ - $h = 1 : x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2; y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1$, also $y(2) \approx 1$ - $h = 0.5 : x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2; y_0 = 1, y_1 = 0.5, y_2 = 0.5, y_3 = 0.75, y_4 = 1.125$, also $y(2) \approx 1.125$
c. Mit den verschiedenen Schrittweiten ergeben sich folgende Approximationen:

Schrittweite h	Approximierter Funktionswert $y(1)$
0.1	1.2432
0.01	1.2680
0.001	1.2704

Man sieht also, dass die Approximation immer besser wird, wenn die Schrittweite verkleinert wird.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \cos(x + y) + \sin(x - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Gesucht ist $y(1)$, d.h. die Lösung an der Stelle $x = 1$.
b. Führen Sie (von Hand) das Euler-Verfahren mit der Schrittweite $h = 0.5$ aus, um in zwei Schritten zur Lösung zu gelangen.
c. Führen Sie (mit Software) das Euler-Verfahren mit den Schrittweiten $h = 0.1, h = 0.01$ und $h = 0.001$ aus, um immer bessere Approximationen für $y(1)$ zu erhalten.

---

b. Zwei Euler-Schritte mit $h = 0.5$, d.h. $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ und

$$f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y) :$$
$$y_0 = 0$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.5 \cdot (\cos(0 + 0) + \sin(0 - 0)) = 0.5$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.5 + 0.5 \cdot (\cos(0.5 + 0.5) + \sin(0.5 - 0.5)) \approx 0.770$$

Dies ergibt also die Approximation

$$y(1) \approx 0.770$$

c. Mit den verschiedenen Schrittweiten ergeben sich folgende Approximationen:

Schrittweite h	Approximierter Funktionswert $y(1)$
0.1	0.6718
0.01	0.6558
0.001	0.6542