Höhere Mathematik

Jil Zerndt, Lucien Perret
January 2025

Aufgaben aus alten SEP

Rechnerarithmetik

Rechnerarithmetik Sie arbeiten auf einem Rechner mit 5-stelliger Gleitpunktarithmetik im Dualsystem. Für den Exponenten haben Sie zusätzlich zum Vorzeichen 3 Stellen zur Verfügung.

1. Was ist der grösste Exponent, den Sie speichern können?
2. Welches ist die kleinste darstellbare positive Zahl, welche die grösste? Approximieren Sie diese durch normierte 4-stellige Maschinenzahlen im Dezimalsystem.
3. Vergleichen Sie Ihren Rechner mit dem Ihres Kollegen, der mit einem 2-stelligen Hexadezimalsystem arbeitet. Wer rechnet genauer?

Solution Rechnerarithmetik 1

1. $e_{max} = (111)_2 = 4 + 2 + 1 = 7$
2. $x_{min} = B^{e_{min}-1} = 2^{-8} = 0.00390625 = 0.3906 \cdot 10^{-2}$
   $x_{max} = (1 - B^{-n})B^{e_{max}} = (1 - 2^{-5})2^7 = 2^7 - 2^2 = 124 = 0.1240 \cdot 10^3$
3. Maschinengenauigkeit für beide Systeme:
   Binary: $eps_1 = \frac{B}{2}B^{-n} = 2^{-5} = 0.03125$
   Hex: $eps_2 = \frac{B}{2}B^{-n} = 8 \cdot 16^{-2} = 0.03125$
   Beide Systeme rechnen mit derselben Maschinengenauigkeit.

Rechnerarithmetik und Gleitpunktdarstellung Gegeben seien zwei verschiedene Rechenmaschinen. Die erste davon arbeite mit einer 46-stelligen Binärarithmetik und die zweite einer 14-stelligen Dezimalarithmetik.

1. Welche Maschine rechnet genauer? (Mit Begründung!)
2. Stellen Sie die Zahl $x = \sqrt{3}$ korrekt gerundet als Maschinenzahl $\tilde{x}$ in einer Fliesskomma-Arithmetik mit 5 Binärstellen dar, und geben Sie den relativen Fehler von $\tilde{x}$ im Dezimalformat an.

Solution Rechnerarithmetik 2

1. Maschinengenauigkeit:
   Binary: $eps_1 = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{2}{2}2^{-46} = 1.4211 \cdot 10^{-14}$
   Decimal: $eps_2 = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{10}{2}10^{-14} = 5 \cdot 10^{-14}$
   Da $eps_1 < eps_2$ rechnet die erste Maschine genauer.
2. $\sqrt{3} = 1.7320508...$ and $(x)_2 = 1.10110111..._2$
   Gerundet: $\tilde{x} = 1.11000_2 = 1.75_{10}$
   Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = 0.01036297$

Gleitpunktarithmetik

1. Bestimme die Anzahl verschiedener Maschinenzahlen auf einem Rechner, der 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet.
2. Geben Sie die Maschinengenauigkeit einer Rechenmaschine an, die mit 16-stelliger Dezimalarithmetik arbeitet.

Solution Gleitpunktarithmetik

1. Für die 15-stellige Mantisse im Dualsystem: 2^{14} Möglichkeiten (erste Stelle muss 1 sein)
   Mit Vorzeichen: 2^{15} Möglichkeiten
   5-stelliger Exponent mit Vorzeichen: $2^6 - 1$ Möglichkeiten
   Total: $2^{15} \cdot (2^6 - 1) + 1 = 2064385$ Möglichkeiten (inkl. Null)
2. $B = 10$, $n = 16$
   $eps = \frac{B}{2}B^{-n} = \frac{10}{2}10^{-16} = 5 \cdot 10^{-16}$

Konditionierung
Gegeben ist die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
Das Argument x sei mit einem betragsmässigen relativen Fehler von bis zu 5% behaftet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kondition alle x, für welche unter dieser Voraussetzung der Betrag des relativen Fehlers des Funktionswertes $y = f(x)$ ebenfalls höchstens 5% wird.

Lösung:

Die Konditionszahl ist $K = \frac{|f'(x) \cdot x|}{|f(x)|} = \left|\frac{2\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)}\right|$

Für einen relativen Fehler von maximal 5% muss gelten:
$|K| \cdot \frac{|\Delta x|}{|x|} \leq 0.05$, $|2 - x| \cdot 0.05 \leq 0.05$, $|x - 2| \leq 1$ Daher: $1 \leq x \leq 3$

Konditionierung Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ mit ihrer Ableitung $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$ und $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmass.

1. Bestimme die Konditionszahl von $f(x)$ in Abhängigkeit von x.
2. Berechnen Sie näherungsweise, mit welchem absoluten Fehler $x_0 = \pi/3$ höchstens behaftet sein darf, damit der relative Fehler von $f(x_0)$ höchstens 10% beträgt.
3. Bestimmen Sie numerisch das Verhalten der Konditionszahl von $f(x)$ für $x \to 0$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x = 0$ aussagt.
4. Plotten Sie die Konditionszahl von $f(x)$ halblogarithmisch im Bereich $x \in [-2\pi, 3\pi]$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ aussagt.

Lösung:

1. $K(x) = \left|\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}\right| = \left|\frac{(2x\sin(x) + x^2\cos(x)) \cdot x}{x^2\sin(x)}\right| = \left|\frac{2\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)}\right|$
2. Für $x_0 = \pi/3$:
   $|f(x) - f(x_0)|/|f(x_0)| \approx K(x_0) \cdot |x - x_0|/|x_0|$
   $0.1 \geq K(x_0) \cdot |x - x_0|/|x_0|$ und $|x - x_0| \leq 0.1/K(x_0) \cdot x_0$
3. $\lim_{x\to 0} K(x) = 3 \to$ Daher ist $f(x)$ in $x = 0$ gut konditioniert.
4. Große Konditionszahlen (schlecht konditioniert) treten auf bei $x \approx \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$ da dort $\sin(x) = 0$ ist.

Nullstellenprobleme

Fixpunktiteration Die Gleichung $2^x = 2x$ hat eine Lösung im Intervall $I = [0.5, 1.5]$ für die zugehörige Fixpunktiteration $x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x_k}$, $\quad x_0 = 1.5$

1. Überprüfen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und mit obigem Intervall, dass die angegebene Fixpunktiteration tatsächlich konvergiert.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Fehlerabschätzung, wieviele Schritte es höchstens braucht, um einen absoluten Fehler von maximal 10^{-8} garantieren zu können.

Solution Fixpunktiteration

1. Setze $F(x) = \frac{1}{2}2^x$. Zu zeigen:
   - $F([0.5, 1.5]) \subseteq [0.5, 1.5]$: $F(0.5) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 > 0.5$
     $F(1.5) = \sqrt{2} = 1.4142 < 1.5$ ✓
   - $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ für alle $x \in [0.5, 1.5]$: $|F'(x)| = |\frac{\ln 2}{2} \cdot 2^x|$
     Maximum bei $x = 1.5$: $\alpha = \ln 2 \cdot \sqrt{2} = 0.9802 < 1$ ✓
2. A-priori Abschätzung für $|x_n - x| \leq 10^{-8}$:
   $|x_n - x| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| \leq 10^{-8}$
   Mit $x_1 = \frac{1}{2}2^{1.5} = \sqrt{2}$: $n \geq \frac{\ln(10^{-8}(1-\alpha)/|x_1 - x_0|)}{\ln \alpha} = 998$ Schritte

Nullstellenprobleme Gesucht ist der Schnittpunkt der Funktionen $g(x) = \exp(x)$ und $h(x) = \sqrt{x + 2}$.

1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0.5$ den Schnittpunkt bis auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-7} genau.
2. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt der Iteration $x_{k+1} = \ln(\sqrt{x_k + 2})$ gerade dem Schnittpunkt von $g(x)$ und $h(x)$ entspricht, und dass die Iteration für jeden Startwert x_0 im Intervall $[0.5, 1.5]$ konvergiert. Prüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
   Der Startwert sei $x_0 = 0.5$. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Abschätzung die Anzahl der benötigten Schritte, wenn der absolute Fehler der Näherung kleiner als 10^{-7} sein soll.

Solution Nullstellenproblem

1. Setze $f(x) = \exp(x) - \sqrt{x + 2}$
   $f'(x) = \exp(x) - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$
   Newton-Iteration: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   Nach Einsetzen konvergiert die Folge gegen $x \approx 1.1174679154$
2. Die Fixpunktiteration konvergiert wenn:
   - $F([a, b]) \subseteq [a, b]$ mit $[a, b] = [0.5, 1.5]$
     $F(0.5) = 0.996 > 0.5$ und $F(1.5) = 1.171 < 1.5$ ✓
   - $|F'(x)| \leq L < 1$ für alle $x \in [a, b]$
     $|F'(x)| = \frac{1}{(2\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x+2})}$
     Maximum bei $x = 0.5$: $L = 0.2612 < 1$ ✓

   A-priori Abschätzung für $|x_n - x| \leq \varepsilon = 10^{-7}$:
   $n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1-L)/|x_1 - x_0|)}{\ln(L)} \approx 12$ Schritte

Bakterienpopulation Die folgende Abbildung zeigt den gemessenen Verlauf einer Bakterienpopulation $g(t)$ (Einheit: Mio. Bakterien) als Funktion der Zeit t (Einheit: Stunden).
Es wird vermutet, dass sich $g(t)$ darstellen lässt als Funktion mit den drei (vorerst unbekannten) Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ gemäss $g(t) = a + b \cdot e^{c \cdot t}$

1. Bestimmen Sie eine Näherung für die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie 3 Messpunkte $(t_i, g(t_i))$ (für $i = 1, 2, 3$) aus der Abbildung herauslesen, das zugehörige Gleichungssystem aufstellen und für das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme die erste Iteration angeben (inkl. Jacobi-Matrix und $\delta^{(0)}$). Verwenden Sie als Startvektor $(1, 2, 3)^T$.
2. Bestimmen Sie mit Ihrer Näherung aus a) den Zeitpunkt t, an dem die Population auf 1600 [Mio. Bakterien] angewachsen ist. Verwenden Sie dafür das Newton-Verfahren mit einem sinnvollen Startwert t_0 und einer Genauigkeit von $|t_n - t_{n-1}| < 10^{-4}$. Geben Sie die verwendete Iterationsgleichung explizit an.
   Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, so verwenden Sie $g(t) = 5 + 3 \cdot e^{4t}$.

Solution Bakterienpopulation

1. Aus drei Messpunkten $(t_i, g(t_i))$ ergibt sich:
   $f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b\cdot e^{c\cdot t_1} - g(t_1) \\ a+b\cdot e^{c\cdot t_2} - g(t_2) \\ a+b\cdot e^{c\cdot t_3} - g(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Jacobi-Matrix: $Df = \begin{pmatrix} 1 & e^{ct_1} & bt_1 e^{ct_1} \\ 1 & e^{ct_2} & bt_2 e^{ct_2} \\ 1 & e^{ct_3} & bt_3 e^{ct_3} \end{pmatrix}$
2. Newton-Iteration für $g(t) = 1600$: $t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n) - 1600}{g'(t_n)}$
   Mit $t_0 = 2.2$ konvergiert die Folge gegen $t \approx 2.2507$

Lineare Gleichungssysteme

LGS und Kondition Gegeben: $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
und der exakten Lösung $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Bestimmen Sie die Kondition $\text{cond}(A)$ der Matrix A in der 1-Norm.
2. Gegeben ist nun die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die entsprechende Lösung $\tilde{x}$.
3. Bestimmen Sie für die Lösung aus b) den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1}$, und vergleichen Sie diesen mit der Abschätzung aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Solution LGS und Kondition

1. $\text{cond}(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 1.5 \cdot 10^6$
2. $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Relativer Fehler: $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{5}{2} = 2.5$
   Abschätzung durch Kondition:
   $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_1}{\|b\|_1} = 1.5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-5} = 15$
   Der tatsächliche Fehler ist deutlich kleiner als die Abschätzung.

Chilli-Festival Für ein Chilli-Festival werden BBQ-Saucen in den drei verschiedenen Schärfegraden sehr scharf (SS), scharf (S) und mild (M) benötigt, zudem sollen drei verschiedene Hersteller dem Publikum zur Blindverkostung vorgelegt werden können. Die entsprechenden Marketing Pakete der drei Hersteller reichen für die folgende Anzahl Portionen:

Hersteller	SS	S	M
Blair's Extreme	240	60	60
Mad Dog	120	180	90
Dave's Gourmet	80	170	500

Aus früheren Jahren weiss man, dass das Publikum die verschiedenen Schärfegrade ungefähr im Verhältnis 3/4/5 konsumiert und ca. 12'000 Portionen erwartet werden. Der Einfachheit halber rechnet das Komitee deshalb mit folgender Portionierung: SS 3080, S 4070, M 5030.

1. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.
2. Wie viele Marketing Pakete von den einzelnen Herstellern werden benötigt um den voraussichtlichen Bedarf abzudecken, ohne Überschuss zu generieren? Berechnen Sie die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.
3. Wie hoch ist der absolute und relative Fehler, wenn die Besucherzahlen die Erwartung um 5% übersteigt?
4. Was können Sie über die Konditionierung des Problems sagen?

Lösung:

1. Gleichungssystem: $A = \begin{pmatrix} 240 & 60 & 60 \\ 120 & 180 & 90 \\ 80 & 170 & 500 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3080 \\ 4070 \\ 5030 \end{pmatrix}$
2. Gauss-Elimination: $R = \begin{pmatrix} 240 & 120 & 80 \\ 0 & 150 & 150 \\ 0 & 0 & 420 \end{pmatrix}$ $x_1 = 3, x_2 = 15, x_3 = 7$
3. Absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| = 0.0113 \cdot 609 = 6.8875$
   Relativer Fehler:
   $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 650 \cdot 0.0113 \cdot \frac{609}{5030} = 0.89$ (89%)
4. $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 7.3512 \rightarrow$ relativ gut konditioniert

LR-Zerlegung Gegeben ist LGS $Ax = b$ mit:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei ε eine reelle Zahl ist.

1. Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung der Matrix A für ein allgemeines $\varepsilon \neq 0$.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizen L und R aus (a) die Lösung von $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ (Maschinengenauigkeit). Schreiben Sie dazu ein Python-Skript und verwenden Sie numpy.linalg.solve().
3. Lösen Sie nun das lin. Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ direkt mit numpy.linalg.solve(). Weshalb erhalten Sie nicht das gleiche Resultat wie bei b)? Begründen Sie!

Solution LR-Zerlegung

1. LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung:
   $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{2}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - \frac{6}{\varepsilon} \end{pmatrix}$
2. Für $\varepsilon = 2^{-52}$ ergibt sich:
   Vorwärtseinsetzen: $Ly = b$ mit $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1.80144 \cdot 10^{16} \end{pmatrix}$
   Rückwärtseinsetzen: $Rx = y$ mit $x = \begin{pmatrix} 2.66667 \\ -1 \\ -0.66667 \end{pmatrix}$
3. Direkte Lösung für $\varepsilon = 2^{-52}$ ergibt: $x = \begin{pmatrix} 2.33333 \\ -0.66667 \\ -0.66667 \end{pmatrix}$
   Unterschied weil $2 + \varepsilon = 2$, die Lösung ist identisch mit $\varepsilon = 0$

Gauss-Seidel Verfahren Sie messen den Gesamtwiderstand von 3 verschiedenen, in Serie geschalteten Widerstände. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der jeweiligen Widerstände R_i:

$$67 = 1R_1 + 3R_2 + 7R_3$$
$$21 = 1R_3 + 15R_1$$
$$44 = 1R_2 + 6R_3$$

Aufgaben:

1. Konvertieren Sie die Gleichung in die Form: $y = Ax$ und zerlegen Sie die Matrix A zur Lösung mit dem Gauss-Seidel-Verfahren in die Form: $A = L + R + D$. Schreiben Sie alle Matrizen (A, L, R, D) auf!
2. Was ist der Vorteil eines iterativen Lösungsverfahrens wie Gauss-Seidel gegenüber direkten Lösungsverfahren?

Solution Gauss-Seidel Verfahren

1. Systemmatrix und Zerlegung:
   $A = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
   $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Vorteile iterativer Verfahren:
   - Geringerer Rechenaufwand bei großen Systemen
   - Speichereffizienter
   - Gut für dünn besetzte Matrizen
   - Numerisch stabiler bei gut konditionierten Systemen

Jacobi Verfahren Mit Hilfe des Jacobiverfahrens soll die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer n-dimensionalen tridiagonalen Systemmatrix A bestimmt werden. Die Matrix und die rechte Seite sind definiert mit $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & & & \\ -1 & c & -1 & & \\ & -1 & c & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Matrix B für $n = 6$, $c = 4.0$ und daraus $\|B\|_\infty$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt $\|B\|_\infty < 1$?
2. Welche Anzahl Iterationen benötigt man maximal, um eine numerische Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-3} in der ∞-Norm zu erhalten? (a priori Abschätzung)
3. Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe einer Implementierung des Jacobiverfahrens. Führen Sie die vorher bestimmte Anzahl von Iterationen aus!
4. Bestimmen Sie die Genauigkeit der errechneten Lösung mit Hilfe der a posteriori Abschätzung?

Solution Jacobi Verfahren

1. Matrix B für Jacobi-Verfahren bei $n = 6$, $c = 4.0$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

   $\|B\|_\infty = 0.5 \rightarrow$ Konvergiert für $c > 2$
2. A-priori Abschätzung für Genauigkeit 10^{-3}:
   $\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty^n}{1-\|B\|_\infty}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-3}$ Ergibt $n \geq 11$ Iterationen
3. A-posteriori Abschätzung für erreichte Genauigkeit:
   $\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty \approx 8.49 \cdot 10^{-5}$

Jacobi für LGS mit Parameter

$Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & a & 20 \\ 5 & 20 & 50 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ 5a \end{pmatrix}$

Dabei ist $a \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliger Parameter.

1. Welche Bedingung muss a erfüllen, damit A diagonal dominant ist und also das Jacobi-Verfahren konvergiert?
2. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$.
3. Bestimmen Sie für $a \geq 60$ mittels der a priori Abschätzung und bezüglich der ∞-Norm die Anzahl Iterationsschritte $n = n(a)$ als Funktion von a, um eine vorgegebene Fehlerschranke ϵ zu erreichen.

Solution Jacobi für LGS mit Parameter

1. Für Diagonaldominanz muss gelten: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle i
   Dies führt zu: $a > 10 + 20 = 30$
2. Jacobi-Iter. für $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$: $x^{(1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(0)} + D^{-1}b$
   Mit $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{30}, \frac{1}{a}, \frac{1}{50})$ Ergibt: $x^{(1)} = (0, -29, 0)^T$
3. Für $a \geq 60$ gilt $\|B\|_\infty = \frac{1}{2}$
   A-priori Fehlerabschätzung ε: $n(a) \geq \frac{\log(\frac{\varepsilon}{2a})}{\log(\frac{1}{2})} = 1 + \frac{\log(\frac{\varepsilon}{a})}{\log(\frac{1}{2})}$

Nichtlineares Gleichungssystem Das nichtlineare Gleichungssystem
$1 - x^2 = y^2$, $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} = 1$
soll mit dem Newton-Verfahren mit $x^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})^T = (2, -1)^T$ gelöst werden.

1. Führen Sie den ersten Iterationsschritt manuell aus und bestimmen Sie $x^{(1)}$.
2. Bestimmen Sie die Näherungslösung für $a = 2$ und $b = 4$ auf $\|f(x^{(k)})\|_\infty < 10^{-8}$ genau.
3. Wie viele Lösungen besitzt das Gleichungssystem aus b) insgesamt? Begründen Sie Ihre Antwort, z.B. mit einem geeigneten Plot.

Solution Nichtlineares Gleichungssystem

1. Newton-Verfahren: $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 \\ \frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} - 1 \end{pmatrix}$
   Jacobi-Matrix: $Df(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ \frac{2(x-2)}{a} & \frac{2(y-1)}{b} \end{pmatrix}$
   $x^{(1)} = x^{(0)} - [Df(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(0)})$
2. Für $a = 2$, $b = 4$ konvergiert das Verfahren gegen eine der vier Lösungen, abhängig vom Startwert.
3. System hat 4 Lösungen aufgrund geometrischer Interpretation:
   - Schnitt eines Kreises ($1 - x^2 = y^2$) mit einer Ellipse
   - Symmetrisch bzgl. der Geraden $y = 1$

Nichtlineare Gleichung mit zwei Methoden

Für die Gleichung $x^2 \cos(x) = 1$ sind mit $x_0 = 1$ der erste Schritt des Newton-Verfahrens sowie des Sekantenverfahrens durchzuführen.

1. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt für beide Verfahren. Für das Sekantenverfahren ist zusätzlich $x_{-1} = 0$ gegeben.
2. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und diskutieren Sie mögliche Vor- und Nachteile der beiden Verfahren.

Solution Nichtlineare Gleichung

1. Newton-Verfahren: $f(x) = x^2 \cos(x) - 1$
   $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2 \sin(x)$ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1.0355$
   Sekantenverfahren: $x_1 = x_0 - \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})} f(x_0) \approx 1.0412$
2. Vergleich:
   - Newton: schnellere Konvergenz (quadratisch)
   - Newton: benötigt Ableitung
   - Sekanten: keine Ableitung nötig
   - Sekanten: zwei Startwerte nötig
   - Sekanten: langsamere Konvergenz (≈ 1.618)

Numerischer Vergleich von Eigenwertverfahren Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

Verfahren	Iterationen	Genauigkeit	Zeit
Von-Mises	23	10^{-8}	1.0
Inverse Iteration	6	10^{-8}	1.5
QR	8	10^{-12}	2.3

Beobachtungen:

- Von-Mises braucht viele Iterationen
- Inverse Iteration konvergiert schnell
- QR liefert höchste Genauigkeit

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte Gegeben ist die Matrix: $A = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 30 & -9 \end{pmatrix}$

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte von A, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.
2. Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix T, deren Spalten bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen. Es soll dann also gelten: $D = T^{-1}AT$.
3. Bestimmen Sie mit Hilfe der von Mises Iteration numerisch den betragsmässig grössten Eigenwert von A, sowie einen zugehörigen Eigenvektor. Iterieren Sie dabei 40 Mal, ausgehend vom Startvektor $v = (1, 0)^T$. Stellen Sie den absoluten Fehler der numerischen Näherung des Eigenwertes in Abhängigkeit der Iterationszahl halblogarithmisch dar.

Solution Eigenwerte

1. Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$
   Eigenwerte: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$
   Eigenräume: $E_{\lambda_1} = \text{span}\{(2, 5)^T\}$, $E_{\lambda_2} = \text{span}\{(1, 3)^T\}$
2. $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Von-Mises Iteration konvergiert gegen $\lambda_1 = 3$
   Fehler zeigt quadratische Konvergenz

Matrix-Eigenwerte Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.
2. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert ist und bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.
3. Zeigen Sie, dass die Matrix A drei reelle Eigenwerte besitzt. Geben Sie diese an.
4. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit.

Solution Matrix-Eigenwerte

1. $p(\lambda) = (\lambda-3)^3 + 8 = (\lambda-3)^3 + 2^3 = (\lambda-1)(\lambda-3+\sqrt[3]{4})(\lambda-3-\sqrt[3]{4})$
2. $\lambda = 1$ ist Eigenwert, da $p(1) = 0$
   Eigenvektor: $v = (1, -1, 1)^T$
3. Die drei Eigenwerte sind reell: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt[3]{4}$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt[3]{4}$
4. Alle Eigenwerte haben algebraische und geometrische Vielfachheit 1

QR-Zerlegung und Eigenwerte Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Führen Sie drei Schritte des QR-Verfahrens durch.
2. Was beobachten Sie bezüglich der Konvergenz?
3. Vergleichen Sie die Diagonalelemente der resultierenden Matrix mit den tatsächlichen Eigenwerten von A.

Solution QR-Zerlegung

1. Nach drei QR-Iterationen: $A_3 \approx \begin{pmatrix} 5 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Die Diagonalelemente konvergieren gegen die Eigenwerte
   Schnelle Konvergenz da Eigenwerte betragsmäßig verschieden
3. Tatsächliche Eigenwerte: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$

Aufgaben aus alten SEP

Rechnerarithmetik Sie arbeiten auf einem Rechner mit 5-stelliger Gleitpunktarithmetik im Dualsystem. Für den Exponenten haben Sie zusätzlich zum Vorzeichen 3 Stellen zur Verfügung.

Aufgaben:

1. Was ist der grösste Exponent, den Sie speichern können?
2. Welches ist die kleinste darstellbare positive Zahl, welche die grösste? Approximieren Sie diese durch normierte 4-stellige Maschinenzahlen im Dezimalsystem.
3. Vergleichen Sie Ihren Rechner mit dem Ihres Kollegen, der mit einem 2-stelligen Hexadezimalsystem arbeitet. Wer rechnet genauer?

Konditionierung Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

mit ihrer Ableitung

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

und $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmass.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Konditionszahl von $f(x)$ in Abhängigkeit von x.
2. Berechnen Sie näherungsweise, mit welchem absoluten Fehler $x_0 = \pi/3$ höchstens behaftet sein darf, damit der relative Fehler von $f(x_0)$ höchstens 10% beträgt.
3. Bestimmen Sie numerisch das Verhalten der Konditionszahl von $f(x)$ für $x \to 0$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x = 0$ aussagt.
4. Plotten Sie die Konditionszahl von $f(x)$ halblogarithmisch im Bereich $x \in [-2\pi, 3\pi]$ und geben Sie an, was das Ergebnis über die Konditionierung von $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ aussagt.

Nullstellenprobleme Gesucht ist der Schnittpunkt der Funktionen $g(x) = \exp(x)$ und $h(x) = \sqrt{x+2}$.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0.5$ den Schnittpunkt bis auf einen absoluten Fehler von höchstens 10^{-7} genau.
2. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt der Iteration

   $$x_{k+1} = \ln(\sqrt{x_k + 2})$$

   gerade dem Schnittpunkt von $g(x)$ und $h(x)$ entspricht, und dass die Iteration für jeden Startwert x_0 im Intervall $[0.5, 1.5]$ konvergiert. Prüfen Sie dazu die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
   Der Startwert sei $x_0 = 0.5$. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Abschätzung die Anzahl der benötigten Schritte, wenn der absolute Fehler der Näherung kleiner als 10^{-7} sein soll.

Lineare Gleichungssysteme Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei ε eine reelle Zahl ist.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie manuell die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung der Matrix A für ein allgemeines $\varepsilon \neq 0$.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizen L und R aus (a) die Lösung von $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ (Maschinengenauigkeit). Schreiben Sie dazu ein Python-Skript und verwenden Sie numpy.linalg.solve().
3. Lösen Sie nun das lin. Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $\varepsilon = 2^{-52}$ direkt mit numpy.linalg.solve(). Weshalb erhalten Sie nicht das gleiche Resultat wie bei b)? Begründen Sie!

Iterative Verfahren Mit Hilfe des Jacobiverfahrens soll die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer n-dimensionalen tridiagonalen Systemmatrix A bestimmt werden. Die Matrix und die rechte Seite sind definiert mit $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} c & -1 & & & \\ -1 & c & -1 & & \\ & -1 & c & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Matrix B für $n = 6$, $c = 4.0$ und daraus $\|B\|_\infty$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt $\|B\|_\infty < 1$?
2. Welche Anzahl Iterationen benötigt man maximal, um eine numerische Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-3} in der ∞-Norm zu erhalten? (a priori Abschätzung)
3. Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe einer Implementierung des Jacobiverfahrens. Führen Sie die vorher bestimmte Anzahl von Iterationen aus!
4. Bestimmen Sie die Genauigkeit der errechneten Lösung mit Hilfe der a posteriori Abschätzung?

Eigenwerte Gegeben ist die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 30 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte von A, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.
2. Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine zugehörige Basiswechselmatrix T, deren Spalten bezüglich der 2-Norm auf die Länge 1 normiert sein sollen. Es soll dann also gelten: $D = T^{-1}AT$.
3. Bestimmen Sie mit Hilfe der von Mises Iteration numerisch den betragsmässig grössten Eigenwert von A, sowie einen zugehörigen Eigenvektor. Iterieren Sie dabei 40 Mal, ausgehend vom Startvektor $v = (1,0)^T$. Stellen Sie den absoluten Fehler der numerischen Näherung des Eigenwertes in Abhängigkeit der Iterationszahl halblogarithmisch dar.

Rechnerarithmetik und Gleitpunktdarstellung Gegeben seien zwei verschiedene Rechenmaschinen. Die erste davon arbeite mit einer 46-stelligen Binärarithmetik und die zweite einer 14-stelligen Dezimalarithmetik.

Aufgaben:

1. Welche Maschine rechnet genauer? (Mit Begründung!)
2. Stellen Sie die Zahl $x = \sqrt{3}$ korrekt gerundet als Maschinenzahl $\tilde{x}$ in einer Fliesskomma-Arithmetik mit 5 Binärstellen dar, und geben Sie den relativen Fehler von $\tilde{x}$ im Dezimalformat an.

Konditionierung Gegeben ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

Aufgabe:

Das Argument x sei mit einem betragsmässigen relativen Fehler von bis zu 5% behaftet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kondition alle x, für welche unter dieser Voraussetzung der Betrag des relativen Fehlers des Funktionswertes $y = f(x)$ ebenfalls höchstens 5% wird.

LGS und Kondition Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 10^{-5} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der exakten Lösung $x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Kondition $\mathrm{cond}(A)$ der Matrix A in der 1-Norm.
2. Gegeben ist nun die fehlerbehaftete rechte Seite $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie die entsprechende Lösung $\tilde{x}$.
3. Bestimmen Sie für die Lösung aus b) den relativen Fehler $\frac{\|\tilde{x}-x\|_1}{\|x\|_1}$, und vergleichen Sie diesen mit der Abschätzung aufgrund der Kondition. Was stellen Sie fest?

Fixpunktiteration Die Gleichung $2^x = 2x$ hat eine Lösung im Intervall $I = [0.5, 1.5]$ für die zugehörige Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x_k}, \quad x_0 = 1.5$$

Aufgaben:

1. Überprüfen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und mit obigem Intervall, dass die angegebene Fixpunktiteration tatsächlich konvergiert.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der a priori Fehlerabschätzung, wieviele Schritte es höchstens braucht, um einen absoluten Fehler von maximal 10^{-8} garantieren zu können.

Iterative LGS-Lösung Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 5 \\ 10 & a & 20 \\ 5 & 20 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ 5a \end{pmatrix}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliger Parameter.

Aufgaben:

1. Welche Bedingung muss a erfüllen, damit A diagonal dominant ist und also das Jacobi-Verfahren konvergiert?
2. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens für den Startvektor $x^{(0)} = (a, 0, a)^T$.
3. Bestimmen Sie für $a \geq 60$ mittels der a priori Abschätzung und bezüglich der ∞-Norm die Anzahl Iterationsschritte $n = n(a)$ als Funktion von a, um eine vorgegebene Fehlerschranke ϵ zu erreichen.

Bakterienpopulation Die folgende Abbildung zeigt den gemessenen Verlauf einer Bakterienpopulation $g(t)$ (Einheit: Mio. Bakterien) als Funktion der Zeit t (Einheit: Stunden).
Es wird vermutet, dass sich $g(t)$ darstellen lässt als Funktion mit den drei (vorerst unbekannten) Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ gemäss

$$g(t) = a + b \cdot e^{c \cdot t}.$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie eine Näherung für die drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$, indem Sie 3 Messpunkte $(t_i, g(t_i))$ (für $i = 1, 2, 3$) aus der Abbildung herauslesen, das zugehörige Gleichungssystem aufstellen und für das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme die erste Iteration angeben (inkl. Jacobi-Matrix und $\delta^{(0)}$). Verwenden Sie als Startvektor $(1, 2, 3)^T$.
2. Bestimmen Sie mit Ihrer Näherung aus a) den Zeitpunkt t, an dem die Population auf 1600 [Mio. Bakterien] angewachsen ist. Verwenden Sie dafür das Newton-Verfahren mit einem sinnvollen Startwert t_0 und einer Genauigkeit von $|t_n - t_{n-1}| < 10^{-4}$. Geben Sie die verwendete Iterationsgleichung explizit an.
   Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, so verwenden Sie $g(t) = 5 + 3 \cdot e^{4t}$.

Chilli-Festival Für ein Chilli-Festival werden BBQ-Saucen in den drei verschiedenen Schärfegraden sehr scharf (SS), scharf (S) und mild (M) benötigt, zudem sollen drei verschiedene Hersteller dem Publikum zur Blindverkostung vorgelegt werden können. Die entsprechenden Marketing Pakete der drei Hersteller reichen für die folgende Anzahl Portionen:

Hersteller	SS	S	M
Blair's Extreme	240	60	60
Mad Dog	120	180	90
Dave's Gourmet	80	170	500

Aus früheren Jahren weiss man, dass das Publikum die verschiedenen Schärfegrade ungefähr im Verhältnis 3/4/5 konsumiert und ca. 12'000 Portionen erwartet werden. Der Einfachheit halber rechnet das Komitee deshalb mit folgender Portionierung: SS 3080, S 4070, M 5030.

Aufgaben:

1. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf.
2. Wie viele Marketing Pakete von den einzelnen Herstellern werden benötigt um den voraussichtlichen Bedarf abzudecken, ohne Überschuss zu generieren? Berechnen Sie die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.
3. Wie hoch ist der absolute und relative Fehler, wenn die Besucherzahlen die Erwartung um 5% übersteigt?
4. Was können Sie über die Konditionierung des Problems sagen?

Nichtlineares Gleichungssystem Das nichtlineare Gleichungssystem

$$1 - x^2 = y^2$$

$$\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-1)^2}{b} = 1$$

soll mit dem Newton-Verfahren mit $x^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})^T = (2, -1)^T$ gelöst werden.

Aufgaben:

1. Führen Sie den ersten Iterationsschritt manuell aus und bestimmen Sie $x^{(1)}$.
2. Bestimmen Sie die Näherungslösung mit MATLAB für $a = 2$ und $b = 4$ auf $\|f(x^{(k)})\|_\infty < 10^{-8}$ genau.
3. Wie viele Lösungen besitzt das Gleichungssystem aus b) insgesamt? Begründen Sie Ihre Antwort, z.B. mit einem geeigneten Plot.

Elektrischer Widerstand Sie messen den Gesamtwiderstand von 3 verschiedenen, in Serie geschalteten Widerstände. Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der jeweiligen Widerstände R_i:

$$67 = 1R_1 + 3R_2 + 7R_3$$

$$21 = 1R_3 + 15R_1$$

$$44 = 1R_2 + 6R_3$$

Aufgaben:

1. Konvertieren Sie die Gleichung in die Form: $y = Ax$ und zerlegen Sie die Matrix A zur Lösung mit dem Gauss-Seidel-Verfahren in die Form: $A = L + R + D$. Schreiben Sie alle Matrizen (A, L, R, D) auf!
2. Implementieren Sie das Gauss-Seidel-Verfahren in MATLAB und berechnen Sie die ersten 5 Iterationsschritte mit dem Startvektor $\vec{x}_0 = \vec{0}$. Geben Sie die Iterationsschritte entweder im MATLAB aus oder schreiben Sie diese auf das Blatt.
3. Was ist der Vorteil eines iterativen Lösungsverfahrens wie Gauss-Seidel gegenüber direkten Lösungsverfahren?

Gleitpunktarithmetik

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Maschinenzahlen auf einem Rechner, der 15-stellige Gleitpunktzahlen mit 5-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet.
2. Geben Sie die Maschinengenauigkeit einer Rechenmaschine an, die mit 16-stelliger Dezimalarithmetik arbeitet.

Nichtlineare Gleichung mit zwei Methoden Für die Gleichung

$$x^2 \cos(x) = 1$$

sind mit $x_0 = 1$ der erste Schritt des Newton-Verfahrens sowie des Sekantenverfahrens durchzuführen.

Aufgabe:

1. Berechnen Sie den ersten Iterationsschritt für beide Verfahren. Für das Sekantenverfahren ist zusätzlich $x_{-1} = 0$ gegeben.
2. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und diskutieren Sie mögliche Vor- und Nachteile der beiden Verfahren.

Matrix-Eigenwerte Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.
2. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert ist und bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.
3. Zeigen Sie, dass die Matrix A drei reelle Eigenwerte besitzt. Geben Sie diese an.
4. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit.

QR-Zerlegung und Eigenwerte Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1. Führen Sie drei Schritte des QR-Verfahrens durch.
2. Was beobachten Sie bezüglich der Konvergenz?
3. Vergleichen Sie die Diagonalelemente der resultierenden Matrix mit den tatsächlichen Eigenwerten von A.

Additional Examples

Rechnerarithmetik

Werteberechnung ausführlich Gegeben sei die Maschinenzahl zur Basis $B = 2$:

$$x = \underbrace{0.1101}_{n=4} \cdot 2_2^{\underbrace{101}_{l=3}}$$

1. Normalisierung prüfen:
- $m_1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ normalisiert

2. Exponent berechnen:

$$\begin{aligned}\hat{e} &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 0 + 1 = 5\end{aligned}$$

3. Wert berechnen:

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= 1 \cdot 2^{5-1} + 1 \cdot 2^{5-2} + 0 \cdot 2^{5-3} + 1 \cdot 2^{5-4} \\ &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 \\ &= 16 + 8 + 0 + 2 \\ &= 26\end{aligned}$$

Also ist $x = 26$

Weitere Beispiele
1. Basis 10: $0.3141 \cdot 10^2$
   - Normalisiert, da $m_1 = 3 \neq 0$
   - $\hat{e} = 2$
   - $\hat{\omega} = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} = 31.41$
2. Basis 16 (hex): $0.A5F \cdot 16^3$
   - Normalisiert, da $m_1 = A = 10 \neq 0$
   - $\hat{e} = 3$
   - $\hat{\omega} = 10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 2655$

Werteberechnung Berechnung einer Zahl zur Basis B=2:

$$\underbrace{0.1011}_{n=4} \cdot \underbrace{2^3}_{l=1}$$

1. Exponent: $\hat{e} = 3$
2. Wert: $\hat{\omega} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$
   $= 4 + 0 + 1 + 0.5 = 5.5$

Numerische Lösung von Nullstellenproblemen

Fixpunktiteration Nullstellen von $p(x) = x^3 - x + 0.3$
Fixpunktgleichung: $x_{n+1} = F(x_n) = x_n^3 + 0.3$
1. $F'(x) = 3x^2$ steigt monoton
2. Für $I = [0, 0.5]$: $F(0) = 0.3 > 0$, $F(0.5) = 0.425 < 0.5$
3. $\alpha = \max_{x \in [0,0.5]} |3x^2| = 0.75 < 1$
4. Konvergenz für Startwerte in $[0, 0.5]$ gesichert

Newton-Verfahren Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ Nullstellenproblem: $f(x) = x^3 - 2$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2$, Startwert $x_0 = 1$
1. $x_1 = 1 - \frac{1^3 - 2}{3 \cdot 1^2} = 1.333333$
2. $x_2 = 1.333333 - \frac{1.333333^3 - 2}{3 \cdot 1.333333^2} = 1.259921$
3. $x_3 = 1.259921 - \frac{1.259921^3 - 2}{3 \cdot 1.259921^2} = 1.259921$

Quadratische Konvergenz sichtbar durch schnelle Annäherung an $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$

Newton vs Sekanten Bestimmen Sie $\sqrt{2}$ mit beiden Verfahren.

Newton-Verfahren:

$f(x) = x^2 - 2$
- $f'(x) = 2x$
- $x_0 = 1.5$
- $x_1 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.4167$
- $x_2 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \cdot 1.4167} = 1.4142$

Sekantenverfahren:
- $x_0 = 1$, $x_1 = 2$
- $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 1.5$
- $x_3 = 1.5 - \frac{1.5 - 2}{1.5^2 - 2} 1.5 = 1.4545$
- $x_4 = 1.4545 - \frac{1.4545 - 1.5}{1.4545^2 - 2} 1.4545 = 1.4143$

Vergleich:
- Newton: Schnellere Konvergenz (quadratisch)
- Sekanten: Keine Ableitungsberechnung nötig
- Beide erreichen 10^{-4} Genauigkeit in 4-5 Schritten

Numerische Lösung von LGS

Pivotisierung in der Praxis Betrachten Sie das System:

$$\begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ohne Pivotisierung:

Division durch 0.001 führt zu großen Rundungsfehlern:

$$x_1 \approx 1000 \cdot (1 - x_2)$$

Mit Pivotisierung:

Nach Zeilenvertauschung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Liefert stabile Lösung: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Gauss mit Pivotisierung Lösen Sie $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
1. Erste Spalte: Pivot $a_{31} = 4 \rightarrow$ Z1 $\leftrightarrow$ Z3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Eliminationsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 2.5 & 0.75 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.2 \end{array}\right)$$

3. Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned}x_3 &= 0.2/1.5 = \frac{2}{15} \\ x_2 &= (2 + 1.5 \cdot \frac{2}{15})/5 = 0.5 \\ x_1 &= (0 + 2 \cdot 0.5 - 1 \cdot \frac{2}{15})/4 = 0.2\end{aligned}$$

LR-Zerlegung mit Pivotisierung Gegeben sei das System:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Erste Spalte

Max Element in 1. Spalte: $|a_{21}| = 3$, tausche Z1 und Z2:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminationsfaktoren: $l_{21} = \frac{1}{3}$, $l_{31} = 0$
Nach Elimination:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zweite Spalte

Max Element: $|a_{32}| = 4$, tausche Z2 und Z3:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminationsfaktor: $l_{32} = -\frac{1}{6}$
Nach Elimination:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Endergebnis

$$P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung des Systems

1. $Pb = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $Ly = Pb$: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $Rx = y$: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

Umgang mit Systemen mit freien Variablen

1. Vorgehensweise
   - Matrix auf Stufenform bringen
   - Freie Variablen identifizieren (Nullspalten)
   - Basislösung berechnen
   - Allgemeine Lösung parametrisch aufstellen
2. Interpretation
   - Rang der Matrix bestimmen
   - Lösbarkeit prüfen
   - Dimension des Lösungsraums bestimmen
   - Spezielle Lösungen generieren
3. Sonderfälle beachten
   - Unlösbare Systeme erkennen
   - Abhängige Gleichungen identifizieren
   - Numerische Genauigkeit berücksichtigen

QR-Zerlegung Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Erste Spalte

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = \sqrt{2}$

Householder-Vektor: $w_1 = v_1 + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normierung: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erste Householder-Matrix:

$$H_1 = I - 2u_1u_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Zweite Spalte

Nach Anwendung von H_1:

$$H_1A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untervektor für zweite Transformation: $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Analog zur ersten Transformation erhält man:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Endergebnis

$$Q = H_1^TH_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2H_1A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifikation

- $Q^TQ = QQ^T = I$ (Orthogonalität)
- $QR = A$ (bis auf Rundungsfehler)
- R ist obere Dreiecksmatrix

Iterative Verfahren Vergleich Jacobi und Gauss-Seidel System:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

k	Jacobi		Gauss-Seidel	
0	$(0,0,0)^T$		$(0,0,0)^T$	
1	$(0.25, 1.25, 0)^T$	1.25	$(0.25, 1.31, 0.08)^T$	1.31
2	$(0.31, 1.31, 0.31)^T$	0.31	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.02
3	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.02	$(0.33, 1.33, 0.33)^T$	0.00

Eigenvektoren und Eigenwerte

Darstellungsformen Gegeben: $z = 3 - 11i$ in Normalform

$$r = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}, \quad \varphi = \arcsin(\frac{11}{\sqrt{130}}) = 1.3\text{rad} = 74.74°$$

Trigonometrische Form: $z = \sqrt{130}(\cos(1.3) + i\sin(1.3))$

Exponentialform: $z = \sqrt{130}e^{i\cdot 1.3}$

Eigenwertberechnung $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Da A eine Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonalelemente die Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$
2. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6$
3. $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$
4. Spektrum: $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$

Von-Mises-Iteration Berechne größten Eigenwert der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Startvektor: } v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

k	$v^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	$(1,0,0)^T$	-
1	$(0.970, -0.213, 0.119)^T$	4.000
2	$(0.957, -0.239, 0.164)^T$	4.827
3	$(0.953, -0.244, 0.178)^T$	4.953
4	$(0.952, -0.245, 0.182)^T$	4.989

Konvergenz gegen $\lambda_1 \approx 5$
Eigenvektor $v \approx (0.952, -0.245, 0.182)^T$

Von-Mises-Iteration Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert von:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Start mit $v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Erste Iteration:
   - $w^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
   - $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $\lambda^{(1)} = 4$
3. Ergebnis:
   - Eigenvektor bereits gefunden
   - Eigenwert $\lambda = 4$ ist korrekt

QR-Verfahren Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QR-Iteration:

1. $A_0 = A$
2. Nach erster Iteration:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3.21 & -0.83 & 0.62 \\ -0.83 & 2.13 & 0.41 \\ 0.62 & 0.41 & 0.66 \end{pmatrix}$$

3. Nach 5 Iterationen:

$$A_5 \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalelemente von A_5 sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$