

## Integralrechnen

## Stammfunktionen

## Integraltabelle

Funktion   f(x)	Ableitung   f'(x)	Integral   F(x)
1	0	$x + C$
$x$	1	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x  + C$
$x^a$ with $a \in \mathbb{R}$	$ax^{a-1}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln \cos(x)  + C$
$\cot(x)$	$-1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\ln(\sin(x)) + C$
$e^x$	$e^x$	$e^x + C$
$a^x$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln(x) - x + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$x \log_a(x) - \frac{x}{\ln(a)} + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

## Integrale von Linearkombinationen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \int g(x)dx = G(x) + C$$

Das unbestimmte Integral der Linearkombination  $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$  ist:

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

## Integral von verschobenen Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Betrag k in x-Richtung verschoben ist:

$$\int f(x-k)dx = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R})$$

## Integrale von gestreckten Funktionen

Gegeben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral um Faktor k in x-Richtung gestreckt ist:

$$\int f(k \cdot x)dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0)$$

## Partielle Integration

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

## Partialbruchzerlegung

- Bestimmung der Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des Nennerpolynoms  $q(x)$  mit Vielfachheiten (einfache Nullstelle, doppelte usw)

$$\text{Beispiel Integral: } \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

- Zuordnen der Nullstellen  $x_k$  vom  $q(x)$  zu einem Partialbruch mit unbekannten Koeffizienten  $A, B_1, B_2, \dots, 1 \leq k \leq n$ :

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{x-x_1}}_{\text{einfache Nullstelle } x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots}_{\text{doppelte Nullstelle } x_2}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

- Bestimmung der Koeffizienten: alles auf den Hauptnenner bringen, geeignete x-Werte einsetzen

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$\text{Beispiel: } 1 = A(x+1) + B(x-1) \quad x=1 \text{ bzw. } x=-1$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{2}$$

- Werte in Partialbruch einsetzen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

- Integral der Partialbrüche berechnen

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

## Bemerkung

Falls die rationale Funktion  $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$  unecht gebrochen-rational ist, d.h.  $\rightarrow \deg(r(x)) \geq \deg(s(x))$  gilt:

## Substitution unbestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

- Durchführen der Substitution  $u = g(x)$  und  $dx = \frac{du}{g'(x)}$  in das integral  $\int f(x)dx$ :

$$\int f(x)dx = \int r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int r(u)du = r(u) + C$$

- Rücksubstitution:

$$r(u) + C = r(g(x)) + C$$

## Substitution bestimmtes Integral

- Aufstellen und Ableiten der Substitutionsgleichungen:

$$u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

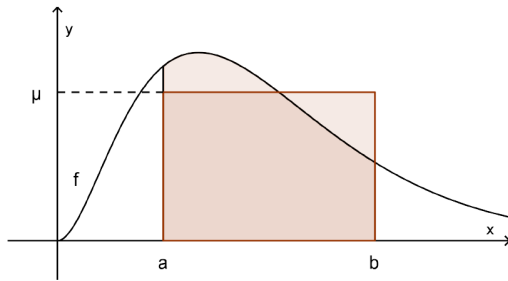
- Durchführen der Substitution  $u = g(x)$  und  $dx = \frac{du}{g'(x)}$  in das integral  $\int f(x)dx$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du$$

- Berechnen des Integrals mit Variable u:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} r(u)du = r(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

### Mittelwert einer Funktion



Definition des Mittelwert  $\mu$  der Funktion  $f(x)$  auf  $[a, b]$ : Höhe des Rechtecks, das

- eine Grundlinie der Länge  $b - a$  hat
- der Flächeninhalt des Rechtecks der Fläche unter der Kurve  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  entspricht

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### Rotationsvolumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

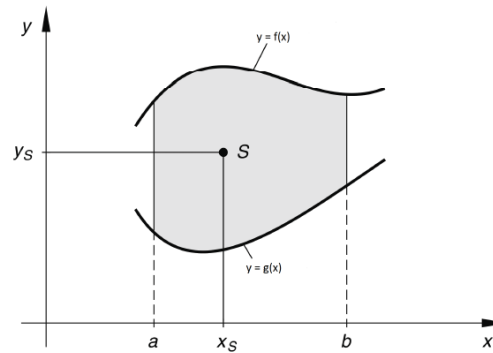
### Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

### Mantelfläche

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

### Schwerpunkt ebener Fläche



Schwerpunkt  $S = (x_s; y_s)$  einer ebenen Fläche mit Flächeninhalt  $A$ , eingegrenzt von Kurven  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  sowie den Geraden  $x = a$  und  $x = b$ :

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b x \cdot (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Berechnen von  $A$  ebenfalls durch ein Integral:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

### Schwerpunkt Rotationskörper

Die x-Koordinate des Schwerpunkts  $S = (x_s; 0; 0)$  eines Rotationskörpers mit Volumen  $V$ , geformt durch Rotation von  $y = f(x)$  zwischen  $[a, b]$  um x-Achse mit  $a < b$  und  $f(x) \geq 0$  für alle  $a \leq x \leq b$ :

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$