Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Definition

Der *Ergebnisraum* Ω ist die Menge aller möglichen *Ergebnisse* des betrachteten *Zufallsexperiments*.

Die *Zähldichte* ist eine Funktion $\rho : \Omega \to [0,1]$, die jedem Ergebnis seine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Sie wird graphisch als *Stabdiagramm* dargestellt. Es gilt: $1 = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega)$.

Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge von Ω; der *Ereignisraum* 2^{Ω} ist die Menge aller Teilmengen von Ω.

Jede Zähldichte bestimmt ein *diskretes Wahrscheinlichkeitsmass* $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$, $P(M) = \sum_{\omega \in M} \rho(\omega)$ für $M \subseteq \Omega$; dieses ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu.

Der Ergebnisraum Ω versehen mit dem Wahrscheinlichkeitsmass P heisst dann *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* und wird mit (Ω, P) bezeichnet.

Falls jedes Ergebnis aus Ω gleichwahrscheinlich ist, wird (Ω, P) *Laplace-Raum* genannt. Für diesen Spezialfall gilt: $P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|}$.

Wichtige Eigenschaften diskreter Wahrscheinlichkeitsräume (Ω, P)

(A1) (Unmögliches Ereignis) $P(\{\}) = 0$

(A2) (Sicheres Ereignis) $P(\Omega) = 1$

(A3) (Komplementäres Ereignis) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

(A4) (Vereinigung) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(A5) (Sigma-Additivität) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

falls die Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ paarweise disjunkt sind.

Zufallsvariablen

Definitionen

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Jede Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, welche auf dem Ergebnisraum definiert ist und reelle Werte hat, heisst *Zufallsvariable*.

Die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f(x) = P(X = x)$ heisst *Wahrscheinlichkeitsdichte* oder kurz *Dichtefunktion* (*PMF*) von X.

Die reelle Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]\,,\; F(x) = P(X \leq x)$ heisst *kumulative Verteilungsfunktion* (*CDF*) von X.

Wichtige Eigenschaften von PMF und CDF

(1) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ und $F(z) = \sum_{x=-\infty}^{z} f(x)$

(2) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

(3) Monotonie: Aus $x \leq y$ folgt $F(x) \leq F(y)$

(4) $f(x) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$

(5) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ und $P(a \leq X \leq b) = F(b) - \lim_{x\to a^-} F(x)$

(6) $P(X > b) = 1 - F(b)$ und $P(X \geq b) = 1 - \lim_{x\to b^-} F(x)$

Kenngrössen

Um Verteilungen vergleichen zu können bedient man sich einiger weniger charakteristischer Merkmale, sogenannter Kenngrössen. Wir betrachten *Lagemasse* und *Streumasse*. Lagemasse beschreiben das Zentrum der Verteilung und Streumasse charakterisieren die Abweichung vom Zentrum.

Definitionen

Seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

(1) Der *Erwartungswert* $E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} P(X = x) \cdot x = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$ ist ein Lagemass der Verteilung von X. Der Erwartungswert existiert nicht für jede Verteilung.

(2) Die *Varianz* $V(X) = E([X - E(X)]^2) = \sum_{x\in\mathbb{R}} P(X = x) \cdot [x - E(X)]^2 = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) \cdot [X(\omega) - E(X)]^2$ und die Standardabweichung $S(X) = \sqrt{V(X)}$ sind Streumasse der Verteilung von X. Varianz und Standardabweichung existieren nicht für jede Verteilung.

Wichtige Eigenschaften der Kenngrössen

(1) **Linearität**: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ und $E(\alpha X) = \alpha E(X),$ mit $\alpha X \in \mathbb{R}$.

(2) **Verschiebungssatz für die Varianz**: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = [\sum_{x\in\mathbb{R}} P(X = x) \cdot x^2] - E(X)^2$.

(3) $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \cdot V(X)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Im Allgemeinen gilt für die Verteilung einer Zufallsvariablen X nach der Tschebyscheff'schen Ungleichung, dass immer mindestens 75% der Werte im Bereich $E(X) \pm 2 \cdot S(X)$ liegen.

Viele Zufallsvariablen sind annähernd nach einer Gauss'schen Normalverteilung verteilt. Bei einer normalverteilten Zufallsvariable liegen etwa 68% der Werte im Bereich $E(X) \pm S(X)$ und bereits etwa 95% im Bereich $E(X) \pm 2 \cdot S(X)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und A und B zwei Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, unter der Annahme, dass Ereignis B eingetreten ist, nennt man die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P(A|B)$ von A unter der Bedingung B. Falls $P(B) > 0$, so gilt:

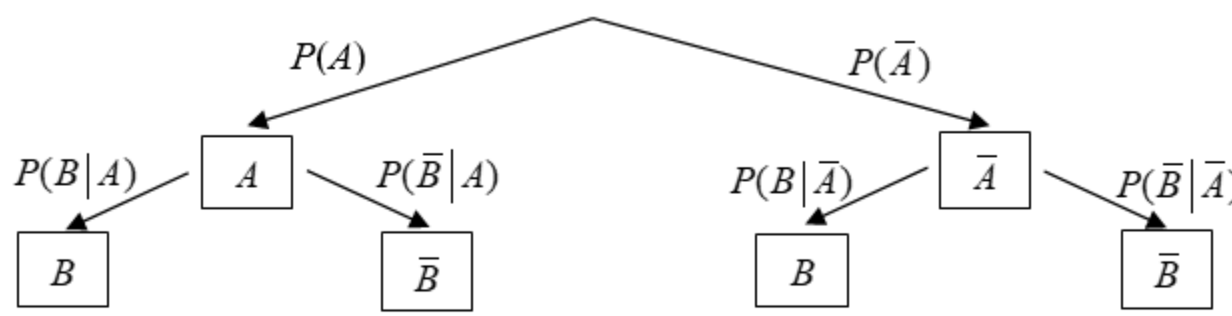
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wichtige Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten

(1) **Multiplikationssatz –** *Pfadwahrscheinlichkeit*: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

(2) **Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit**: $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$ mit dem Komplement $\bar{B} = \Omega \backslash B$ von B in Ω.

(3) **Satz von Bayes**: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$



Stochastische Unabhängigkeit

Definition

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Zwei Ereignisse A und B heissen *stochastisch unabhängig*, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Andernfalls heissen A und B *stochastisch abhängig*.

Zwei Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ heissen *stochastisch unabhängig*, falls gilt:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Andernfalls heissen die Zufallsvariablen *stochastisch abhängig*.

Die Funktion $f(x,y) = P(X = x, Y = y)$ heisst die *gemeinsame Verteilung* (*Verbundverteilung*) von X und Y.

Satz (Stochastische Unabhängigkeit)

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

- Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

  (i) A und B sind stochastisch unabhängig.

  (ii) A und $\Omega \backslash B$ sind stochastisch unabhängig.

  (iii) $\Omega \backslash A$ und $\Omega \backslash B$ sind stochastisch unabhängig.

- Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, beeinflusst das Eintreten des einen Ereignisses das Eintreten des anderen Ereignisses nicht.
  Denn falls $P(B) \neq 0$, so gilt $P(A|B) = P(A)$
  und falls $P(A) \neq 0$, so gilt $P(B|A) = P(B)$.

- Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \text{ und } V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Zuletzt geändert: Mittwoch, 8. Dezember 2021, 11:13

◀ 3. Zusammenfassung: Kombinatorik

Direkt zu:

5. Zusammenfassung: Spezielle Verteilungen ▶