Analysis 1

Jil Zerndt HS 2023
Summary

Introduction

Inhalt

- Basics
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Grenzwerte und Konvergenz

Basics

Reelle Zahlen

Archimedisches Prinzip Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$

Ungleichungen $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{llll} (i) & |x| \geq 0 & (iii) & |x+y| \leq |x| + |y| \\ (ii) & |xy| = |x||y| & (iv) & |x+y| \geq ||x| - |y|| \end{array}$$

Young'sche Ungleichung $\forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Bernoulli Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Kardinalität
- Mengen X, Y heissen **gleichmächtig**, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.
- Menge X ist **endlich**, falls entweder $X = \emptyset$ $(\operatorname{card} X = 0)$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass X und $\{1, 2, \dots, n\}$ $(\operatorname{card} X = n)$ gleichmächtig sind.
- Menge X ist **abzählbar**, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

Beschränktheit $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.
- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \leq c$ (A *nach oben beschränkt*).
- $c \in \mathbb{R}$ ist eine **untere Schranke** von A falls $\forall a \in A : a \geq c$ (A *nach unten beschränkt*).
- A heisst *beschränkt*, wenn nach oben und unten beschränkt.
- $m \in \mathbb{R}$ heisst **Maximum** von A falls $m \in A$ und m obere Schranke.
- $m \in \mathbb{R}$ heisst **Minimum** von A falls $m \in A$ und m untere Schranke.

Intervalle Ein **abgeschlossenes Intervall** ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form
- Abgeschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Offen: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Halboffen: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- Unendlich: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

Polynomdivision und Binomialsatz

Polynomdivision

$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ $\quad P, q, S, r$ Polynome

! Vorzeichen von Nullstellen umdrehen.

$$\begin{array}{lr} \left(x^3 - 2x^2 - 5x - 6\right) : (x-1) = x^2 - x - 6 & \mid x^3 : x = x^2 \\ -\left(x^3 - x^2\right) & \mid -x^2 : x = -x \\ -x^2 - 5x & \\ -\left(x^2 - x\right) & \mid -6x : x = -6 \\ \hline -(-6x+6) & \end{array}$$

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Binomialsatz $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Trigonometrische Funktionen

ungerade

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \quad \text{stetig}$$

gerade

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad \text{stetig}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

π: kleinste strikt positive Nullstelle von $\sin$.

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Eigenschaften sin/cos
1. $\exp ix = \cos(x) + i\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$
2. $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{C}$
3. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
4. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
5. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{C}$
6. $\sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Winkelverdopplung

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Potenz der Winkelfunktion

Eigenschaften mit π
1. $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
3. $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Nullstellen
1. Nullstellen Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi,\ (2k+1)\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi[, \ k \in \mathbb{Z}$
2. Nullstellen Cosinus $= \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
   $\cos(x) > 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) < 0 : \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$

Für $\tan(x)$ gilt $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ $\qquad$ Für $\cot(x)$ gilt $x \notin \pi\mathbb{Z}$

Bogenlänge Die Bogenlänge einer Kurve, welche im Bereich $[a, b]$ durch eine Funktion f gegeben ist, kann wie folgt berechnet werden.

$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$

Logarithmen und Exponentialfunktionen

Logarithmen

Natürlicher Logarithmus Der nat. Logarithmus $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion.

Rechnen mit Logarithmen

1. Für $a > 0$ ist $]0, \infty[\to]0 + \infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für $a < 0$ ist $]0, \infty[\to]0 + \infty[\quad x \mapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
3. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0 + \infty[$
4. $\ln(a \div b) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in]0 + \infty[$
5. $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
6. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
7. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

Im Allgemeinen gilt: $log_b(a) = \frac{ln(a)}{ln(b)}$

Werte von log

	0	1	2	e	3	5	10
$\ln$	$-\infty$	0	0.693	1	1.09	1.609	2.303
$\log_2$	$-\infty$	0	1	1.443	1.585	2.321	3.321
$\log_{10}$	$-\infty$	0	0.301	0.434	0.477	0.699	1

Relle Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Eigenschaften $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Aber nicht: $\exp(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(-x)\exp(x) &= 1 \\ \exp(x) &> 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exp(x) &> 1 \qquad \forall x > 0 \\ \exp(a+b) &= \exp(a) \cdot \exp(b) \\ \exp(a-b) &= \exp(a) \div \exp(b) \end{aligned}$$

$$\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$$

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$$

$\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y)\exp(z - y)$
$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$

$$\begin{aligned} \exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b) \\ \exp(\ln a)\exp(\ln b) &= ab = \exp(\ln ab) \\ \exp(\ln a + \ln b) &= \exp(\ln ab) \\ \ln a + \ln b &= \ln(ab) \end{aligned}$$

$$x^a := \exp(a \ln x)$$

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

$$y = ax^2 + bx + c$$

Nullstellen

- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Scheitelpunkt

- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- $\mathrm{S} = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$