ETP Course

Practice of AI

特征值&特征向量

Jim Xie

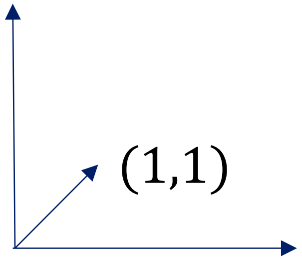
2020/3/6

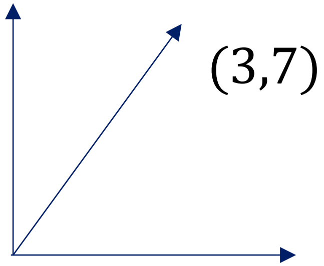
线性变换

普通矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

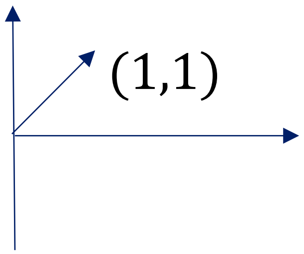


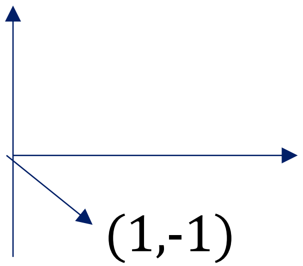


镜像矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

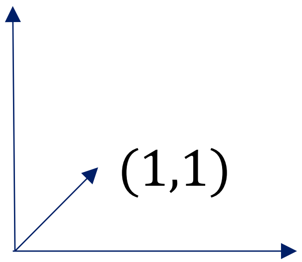


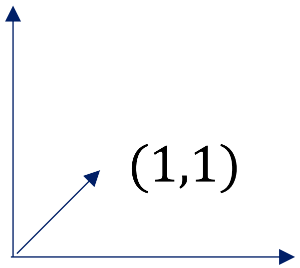


单位矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



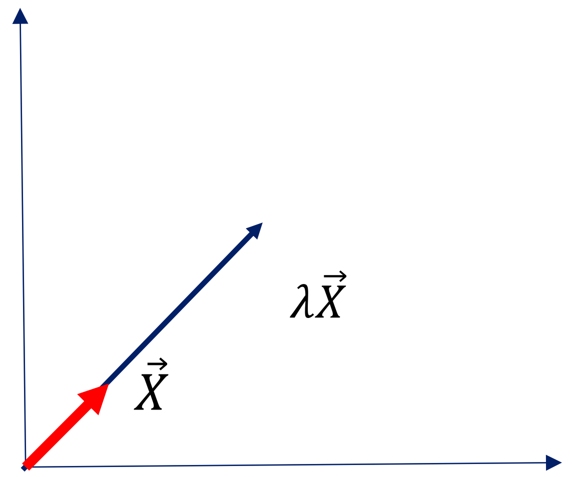


定义&几何意义

设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

若存在λ,使得$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, 则λ为特征值(eigenvalue)， $\vec{X}$为特征向量 (eigenvector)

即： $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



求解

1

$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ ➡ $A\vec{X} - \lambda\vec{X} = 0$ ➡ $(A - \lambda I)\vec{X} = 0$

2

$(A - \lambda I)\vec{X} = 0$

$\vec{X}$ 为 $(A - \lambda I)\vec{X}$ 的非0解

➡ $|A - \lambda I| = 0$ ➡ $\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$ ➡ $(a-\lambda)*(d-\lambda) - bc = 0$

3

求解方程$(a-\lambda)*(d-\lambda) - bc = 0$

可得到多个λ，再分别带入解出对应的$\vec{X}$

性质

行列式为0的方阵，称为奇异矩阵

1 $(A\text{-}\lambda I)$*为系数矩阵，同时也是奇异方阵*

2 A行列式等于特征值积 $det(A)=\lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 **** \lambda_n$

3 A对角线和等于特征值和 $a_{11}+a_{22}+a_{33} *** +a_{nn} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 *** +\lambda_n$

4 实对称方阵的不同特征值对应的特征向量是正交的

应用

x1	x2	x3
1	5	2
2	3	3
3	4	2
4	3	7
5	3	8
3	7	3
1	9	6
8	1	9
9	0	6
9	1	8

A（10, 3)

1. $B = A^T A$　　　*B是（3，3）的对称方阵*

2. *计算B的特征值*λ_i和特征向量$\vec{x}_i$

   (λ_i是实数，$\vec{x}_i$是正交的)

3. *统计特征值* λ_i*所占的比重，用来判断特征值的重要性*

   (λ_i */* $\sum \lambda_i$ *)*