第二章 一阶动态电路的暂态分析

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

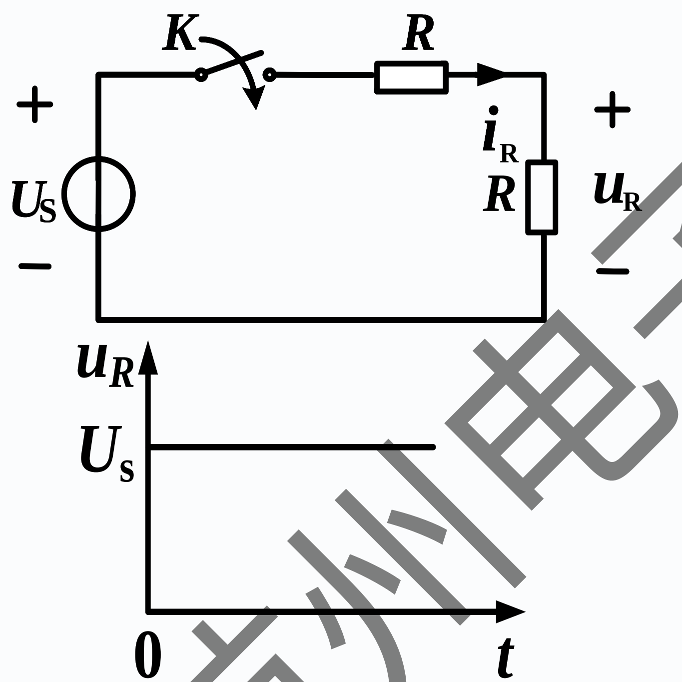
第二章 一阶动态电路的暂态分析

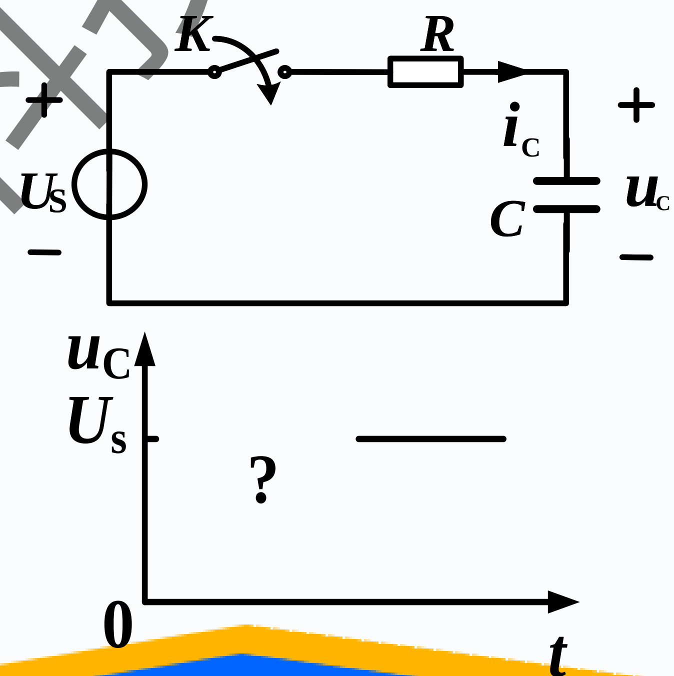
第二章 一阶动态电路的暂态分析

过渡过程

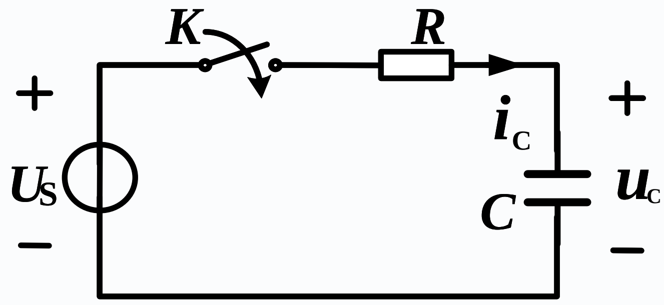
稳态 → 稳态

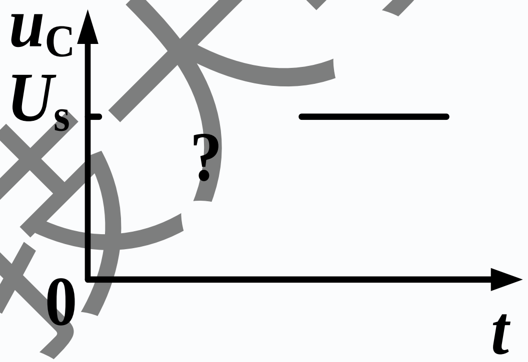
例如：电机的起、停，温度的升、降等不能跃变，需要经过一定的时间，这个过程称为过渡过程。





第二章 一阶动态电路的暂态分析





充电前	充电时	充电完
$u_C=0$	$u_C\uparrow$	$u_C=U_s$

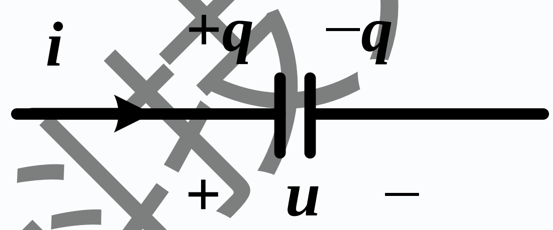
稳态 ——— 暂态(过渡过程) ——→ 稳态

原因
- 外因：电路结构变化(换路、切断、短路等)
- 内因：动态元件L、C的存在

2.1 电容元件与电感元件

■ 2.1.1 电容元件

$$C = \frac{q}{u}$$



$$q = Cu$$

电压与电流取关联参考方向

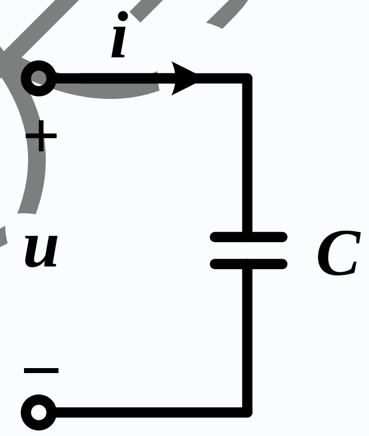
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[Cu(t)]}{\mathrm{d}t}$$

得到 $$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

正比于电压变化率

2.1 电容元件与电感元件

电容元件存储的能量为



$$w_C(t)=\int \mathrm{d}w_C(t)=\int p\,\mathrm{d}(t)=\int ui\,\mathrm{d}(t)$$

$$=\int u[C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}]\mathrm{d}(t)=\int Cu\,\mathrm{d}(u)$$

$$=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

电容某时刻的储能与该时刻的电压平方成正比，电容电压为状态变量

2.1 电容元件与电感元件

电容元件存储的电荷量为

$$q(t)=q(0)+\int_0^t i(\xi)d\xi$$

电容元件电压与电流的关系为

$$u(t)=\frac{q(t)}{C}=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^t i(\xi)d\xi$$

"历史"

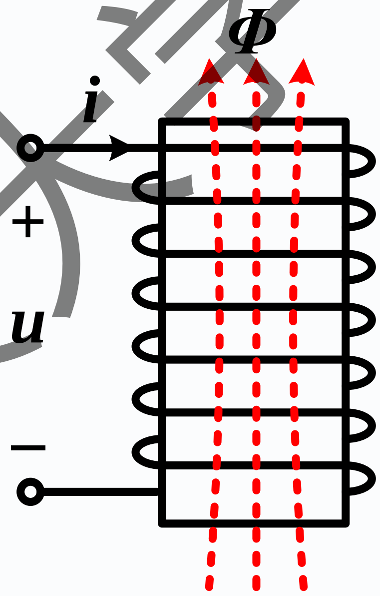
电容某时刻的电压，并不是只取决于该时刻的电流值，还与t_0时刻前的历史有关系，为记忆元件

2.1.2 电感元件

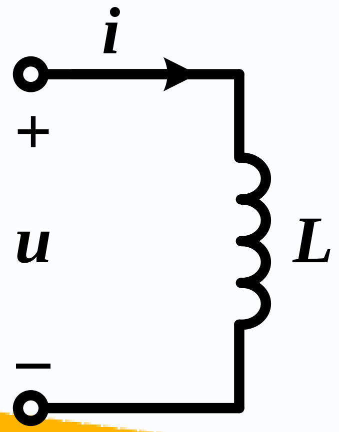
磁通量$\varPsi$与电流 i 取右螺旋方向

$$\varPsi(t)=N\varPhi(t),\quad L=\frac{\varPsi(t)}{i},\quad \varPsi(t)=Li(t)$$

电压与电流取关联参考方向



$$u=\frac{\mathrm{d}\varPsi(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[Li(t)]}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$



即

$$u=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

正比于电流变化率

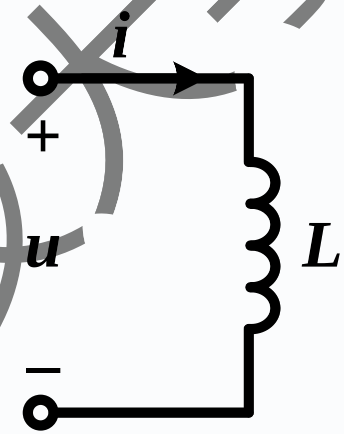
2.1.2 电感元件

电感元件存储的能量为

$$w_{\mathrm{L}}(t)=\int \mathrm{d}w_{\mathrm{L}}(t)=\int p\mathrm{d}(t)=\int ui\mathrm{d}(t)$$

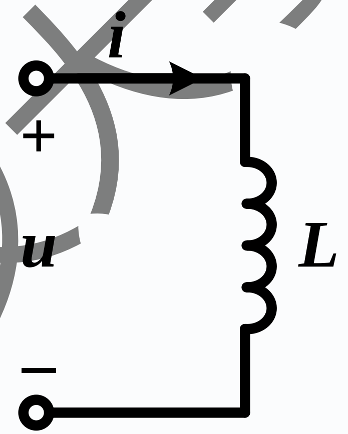
$$=\int u[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}]\mathrm{d}(t)=\int Li\mathrm{d}(i)$$

$$=\frac{1}{2}Li^2(t)$$



电感某时刻的储能与该时刻的电流平方成正比，电感电流为状态变量

2.1.2 电感元件



电感元件的电流

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}(\xi)$$

"历史"

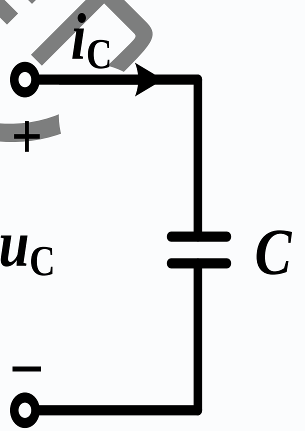
电感某时刻的电流，并不是只取决于该时刻的电压值，还与t_0时刻前的历史有关系，为记忆元件

对照电容元件与电感元件

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

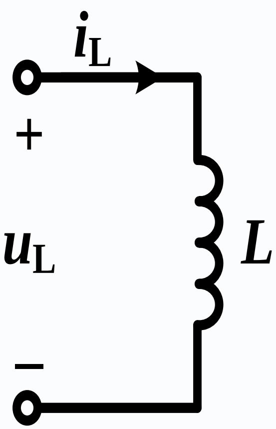
$$w_C(t)=\frac{1}{2}C\,u_C^2(t)$$



$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\mathrm{d}(\xi)$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$w_L(t)=\frac{1}{2}L\,i_L^2(t)$$



2.1.2 电感元件

【例2.1.1】如图所示电路2.1.2 (b)，已知i_1=(2-e^{-t}) (A), t>0。求t>0时的电流

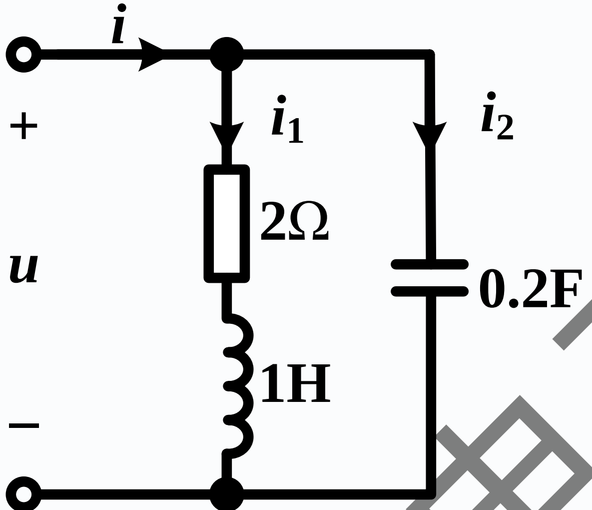


图2.1.4 例2.1.2电路

解：电感的VAR

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} = e^{-t}\ (V)$$

KVL $u = 2i_1 + u_L = 4 - e^{-t}$ (V)

电容的VAR $i_2 = C\frac{du}{dt} = 0.2e^{-t}$ (A)

KCL $i = i_1 + i_2 = 2 - 0.8e^{-t}$ (A)

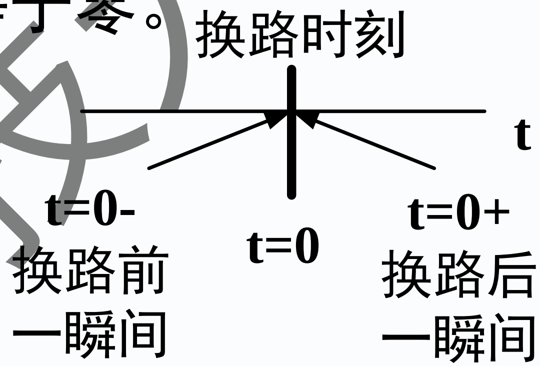
2.2 换路定则及其初始条件

■ 2.2.1 换路定则

- 电路中开关的接通、断开，元件参数的变化统称为换路。
- 换路会使电路由一个状态过渡到另一个状态。如果电路中有储能元件，储能元件状态的变化反映出所存储能量的变化。能量的变化需要经过一段时间，因此电路由一个状态过渡到另一个状态要有一个过程，这个过程称为过渡过程。
- 储能元件电压与电流是微分关系，分析动态电路要列解微分方程。含有一个储能元件的电路列出的是一阶微分方程，因此含有一个储能元件的电路称为一阶电路。

2.2 换路定则及其初始条件

设换路的时刻为$t=0$，换路前的瞬间记为$t=0_-$，换路后的瞬间记为$t=0_+$，0_- 和0_+ 在数值上都等于零。



由于物体所具有的能量不能跃变，因此，在换路瞬间储能元件的能量也不能跃变．由

$$W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2,\qquad W_L=\frac{1}{2}Li_L^2$$

可见电容电压u_C和电感电流i_L不能跃变．

换路定律：换路时电容上的电压，电感上的电流不能跃变．即

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

2.2 换路定则及其初始条件

前面我们见到

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$$

如果取 $t_0=0_-$， $t=0_+$，可得

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{t_-}^{t_+} i_C\ \mathrm{d}t$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{t_-}^{t_+} u_L\ \mathrm{d}t$$

积分项中 i_C 和u_L为有限值，积分项为零，同样得到

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

2.2.2 初始条件确定

- 用时域分析法求解电路的动态过程实质就是求解微分方程。因此，必须要用初始条件确定积分常数。

- 在一阶电路中，一般用电容电压或者电感电流作为变量列微分方程。

- 初始值：就是所求变量在换路结束瞬间的值。

初始值的计算过程

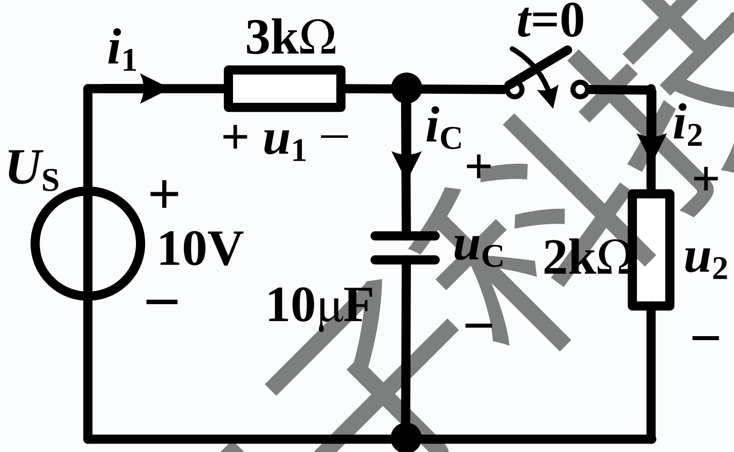
1) 先由$t=0_-$等效电路求出 $u_C(0_-)$ 、$i_L(0_-)$： 在直流激励下，换路前，电路已处于稳定状态时，将电容→开路，电感→短路，得到 $t=0_-$等效电路。

2) 根据换路定律，求出独立变量初始值 $u_C(0_+)$和$i_L(0_+)$ 。

3）在t=0_+等效电路中求其他支路电压、电流的初始值：可用电压为$u_C(0_+)$的电压源替代电容，用电流为$i_L(0_+)$的电流源替代电感，画出t=0_+等效电路，如果换路前储能元件没有储能，即$u_C(0_+)=0$，$i_L(0_+)=0$，则电容→短路，电感→开路。

2.2 换路定则及其初始条件

[例]　图(a)所示电路，t<0时电路已达稳态，t=0 时将开关K闭合。试求各元件电流、电压初始值。



(a)

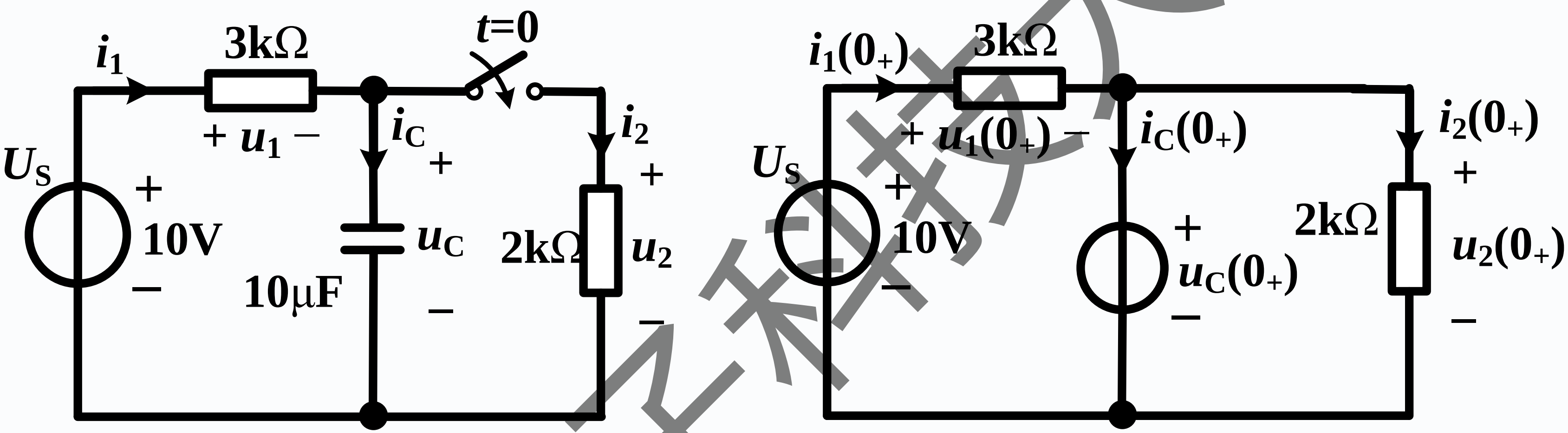
解：t<0时电路已达稳态，电容相当于开路.

$$u_C(0_-) = U_S = 10\text{V}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

2.2 换路定则及其初始条件

t=0$_+$的等效电路如下图(b)所示.



(a) (b)0$_+$时刻等效电路

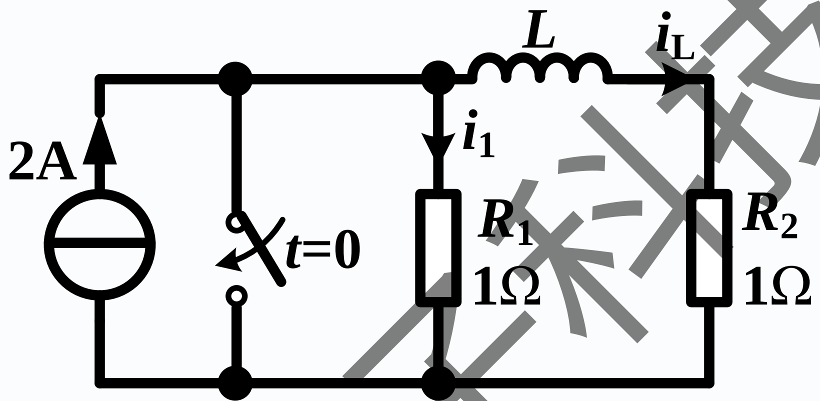
$$u_1(0_+) = U_S - u_C(0_+) = 0 \qquad i_1(0_+) = u_1(0_+)/R_1 = 0$$

$$u_2(0_+) = u_C(0_+) = 10\text{V} \qquad i_2(0_+) = u_2(0_+)/R_2 = 5\text{mA}$$

$$i_C(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = -5\text{mA}$$

2.2 换路定则及其初始条件

[例] 图(a) 中电路换路前已经稳态，t=0时闭合开关，试求开关闭合前和闭合后瞬间的电感电流和电感电压。



(a)

解：开关闭合前电路稳态，电感相当于短路

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) = \frac{2}{2} = 1\text{A}$$

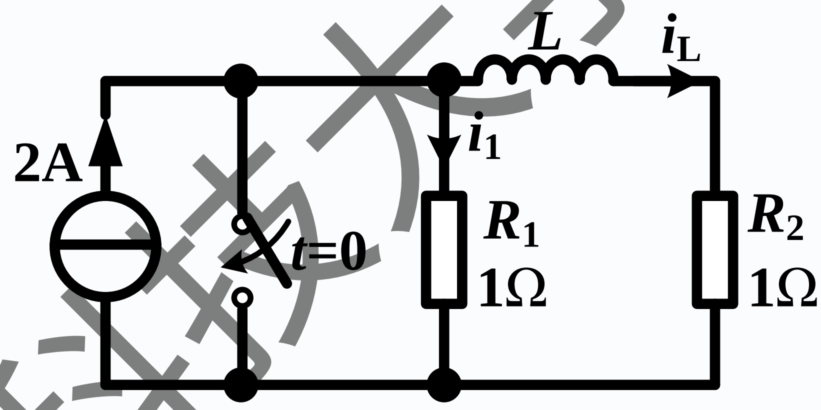
$$u_L(0_-) = 0\text{V}$$

2.2 换路定则及其初始条件

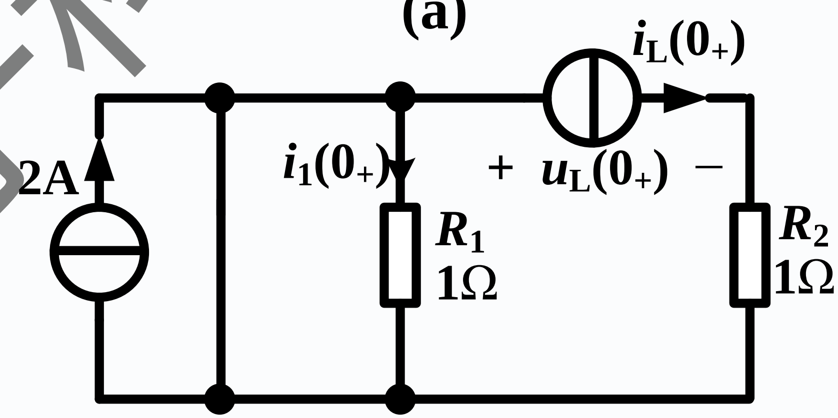
t=0时闭合开关， 0_+时刻等效电路如下图(b)所示

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{A}$$

$$u_L(0_+) = -R_2 i_L(0_+) = -(1\times1) = -1(\text{V})$$



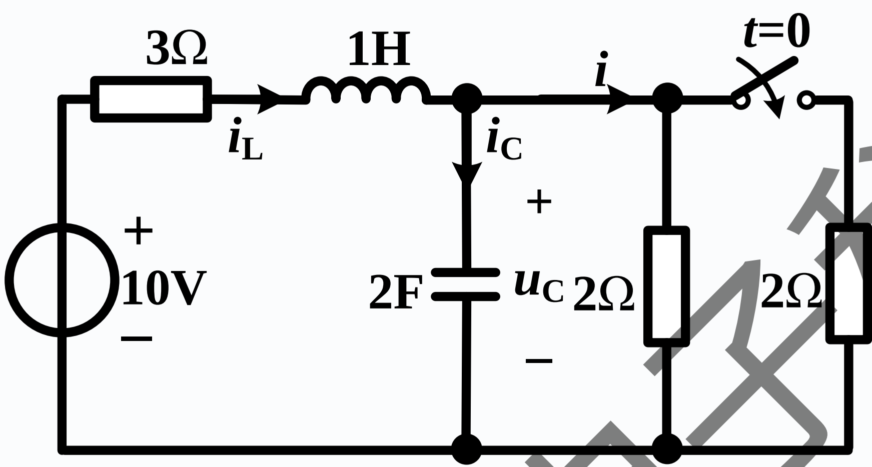
(a)



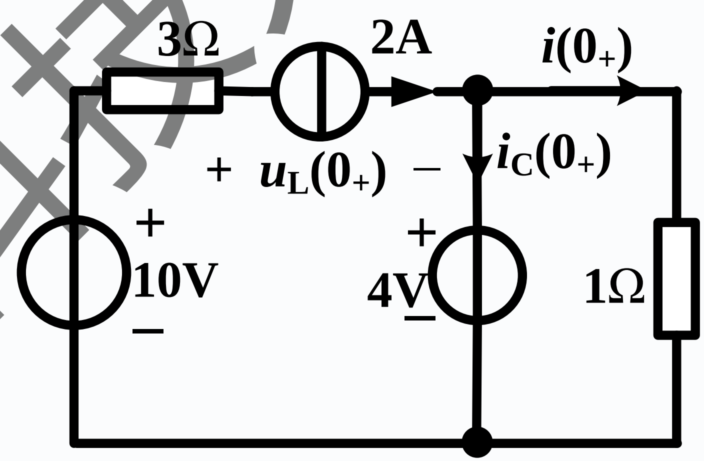
(b)0_+时刻等效电路

2.2 换路定则及其初始条件

电路如图(a)所示，换路前电路已达稳态，t=0时开关闭合，求i，i_L，u_L，i_C，u_C的初始值。



(a)



(b)0_+时刻等效电路

解：

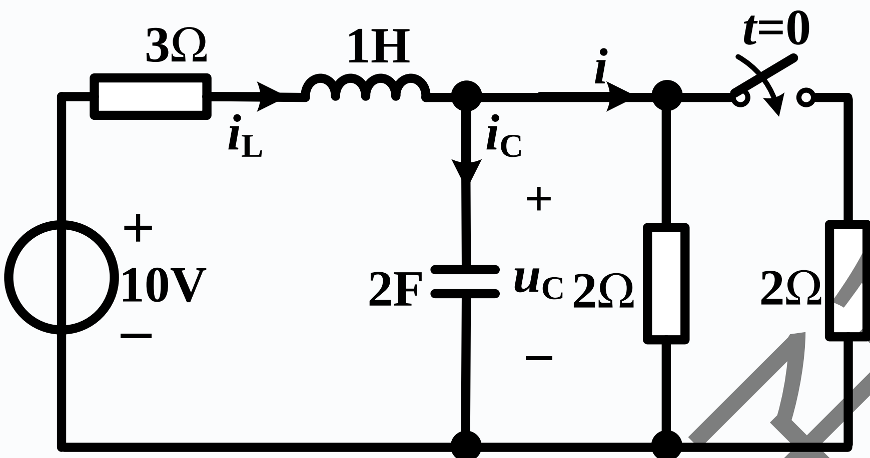
$u_C(0_+)= u_C(0\_)=10\times 2/(3+2)=4(V)$　0_+时刻等效电路如图(b)所示

$i_L(0_+)= i_L(0\_)=10/(3+2)=2(A)$

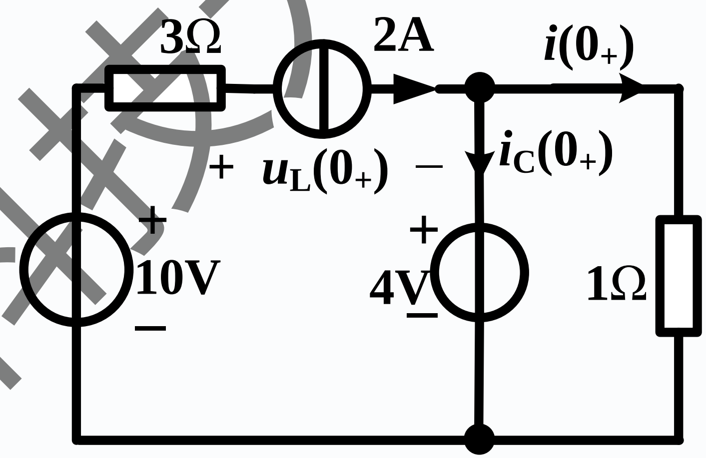
電子工業出版社 PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

2.2 换路定则及其初始条件

0_+时刻等效电路如图(b)所示



(a)

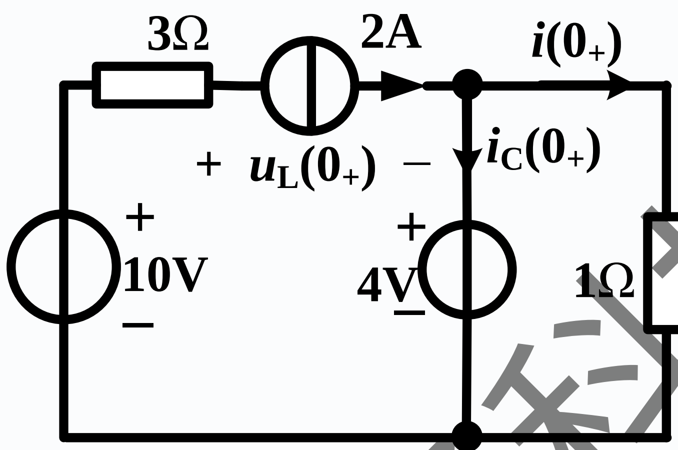


(b)0_+时刻等效电路

$$i(0_+)=\frac{4}{1}=4\text{A}$$ $$i(0\_)=i_L(0\_)=2(\text{A})$$ $$u_L(0_+)=10-3\times2-4=0\text{V}$$

$$i_C(0_+)=2-i(0_+)=-2\text{A}$$ $$i_C(0\_)=0(\text{A})$$ $$u_L(0\_)=0(\text{V})$$

2.2 换路定则及其初始条件



(b)0_+时刻等效电路

$i(0_+) = 4\text{A}$　　$i(0\_) = 2(\text{A})$

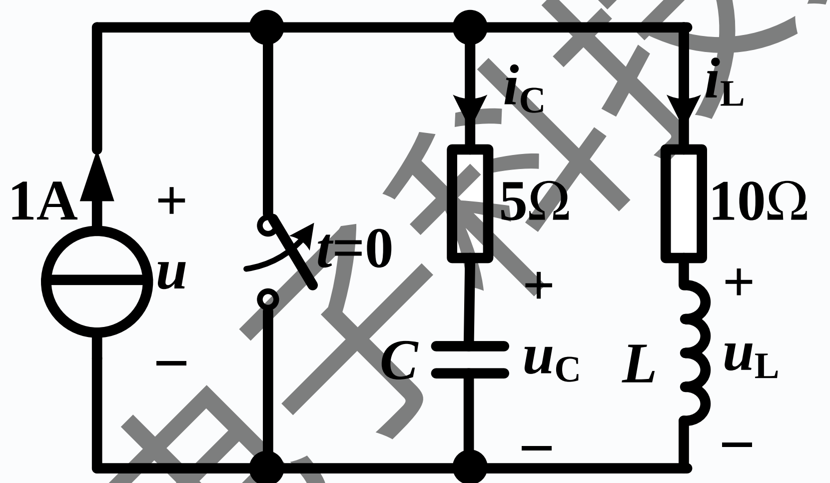
$i_C(0_+) = -2\text{A}$　　$i_C(0\_) = 0(\text{A})$

$u_L(0_+) = 0\text{V}$　　$u_L(0\_) = 0(\text{V})$

可见：换路过程中，电容电压与电感电流不发生跃变，其它响应都有可能发生跃变。

2.2 换路定则及其初始条件

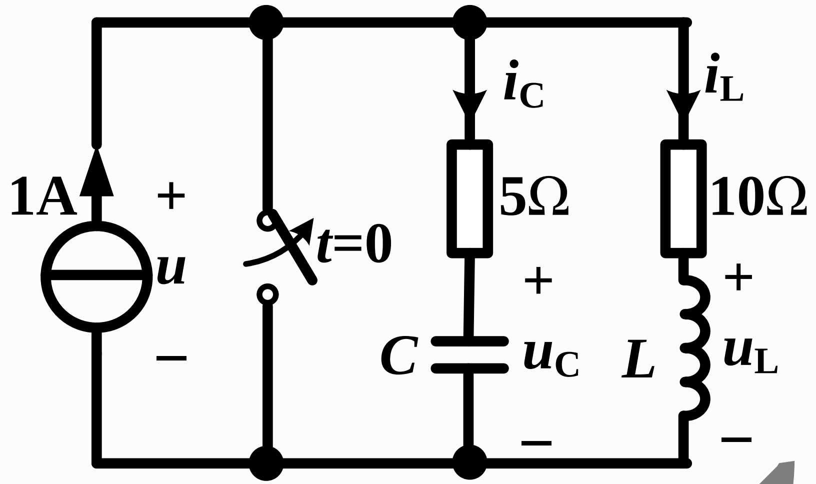
【例2.2.2】 如图2.2.2(a)所示电路，开关S在$t=0$时打开，开关打开前电感电容均未储能。求u_c、i_c、u_L、i_L及u的初始值。



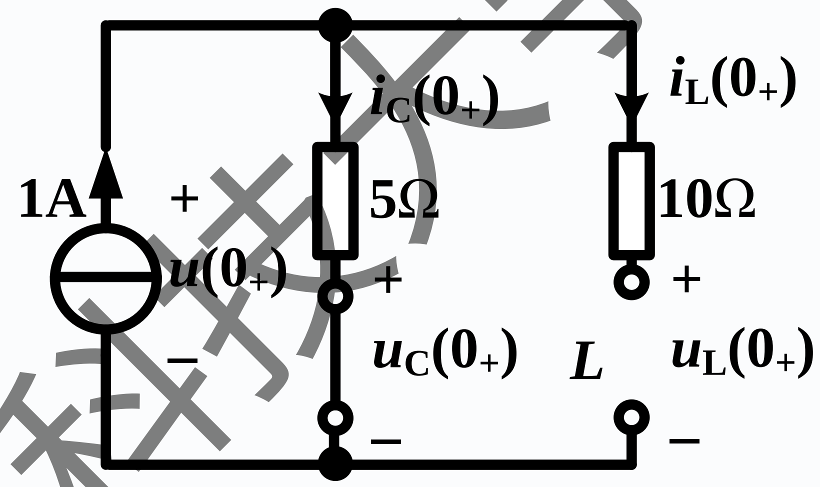
(a) 动态电路

图2.2.2 例2.2.2电路图

2.2 换路定则及其初始条件



(a) 动态电路



(b) $t=0_+$时刻的等效电路

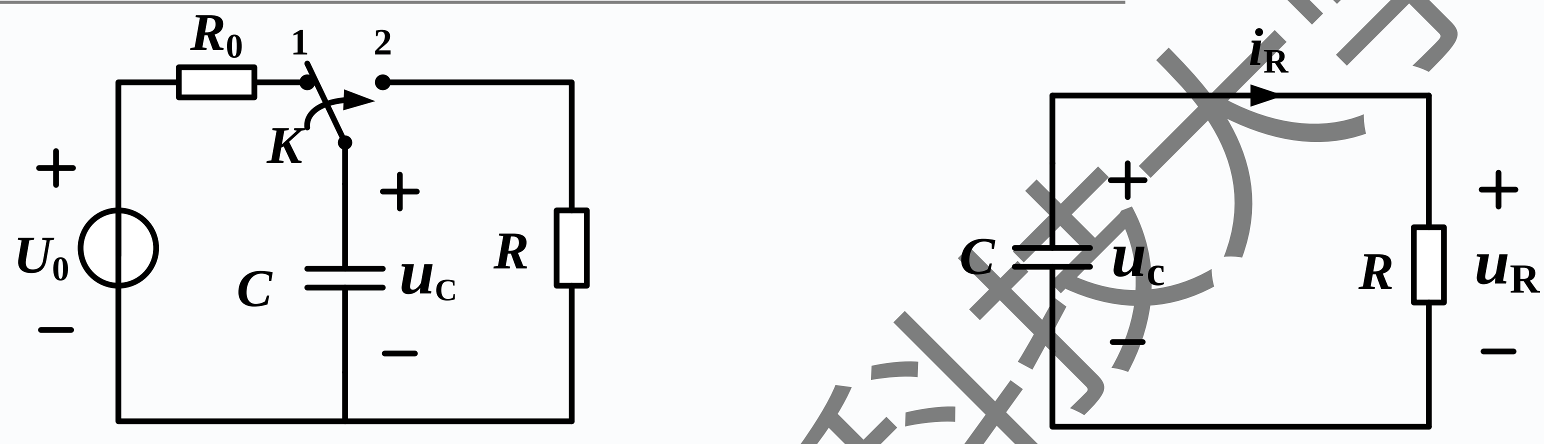
解：由于换路前动态元件均未储能，所以$t=0$时$u_C(0_-)=u_C(0_+)=0$，$i_L(0_-)=i_L(0_+)=0$，相当于电容短路、电感开路，则0_+时刻等效电路如图 (b)所示，得

$$i_C(0_+)=1(A) \qquad u_L(0_+)=u(0_+)=5i_C(0_+)=5(V)$$

2.3 一阶电路的零输入响应

- 如果电路中只含有一个储能元件，所列写电路的微分方程是一阶微分方程，故含一个储能元件的电路称为一阶电路.
- 零输入响应：
  - 电路的输入为零，响应是由储能元件所储存的能量产生的，这种响应称为零输入响应
- 本节讨论RC电路和RL电路的零输入响应.

1. RC电路的零输入响应

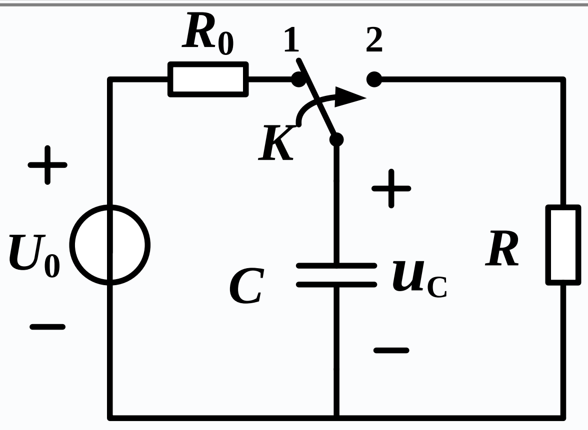


(a) (b)

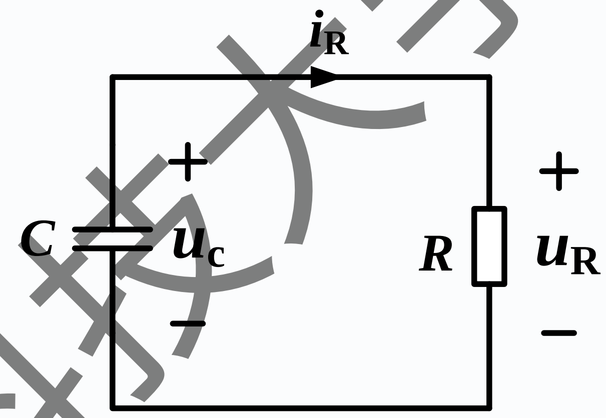
RC电路的零输入响应

图(a)所示电路中的开关原来连接在1端，电压源U_0通过电阻R_0对电容充电，假设在开关转换以前，电容电压已经达到U_0。在t=0时开关迅速由1端转换到2端。已经充电的电容脱离电压源而与电阻R 联接，如图(b)所示,由于t>0时，无信号源作用，因而称为零输入响应。

1. RC电路的零输入响应



(a)



(b)

我们先定性分析t>0后电容电压的变化过程。当开关倒向2端的瞬间，电容电压不能跃变，即 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$

由于电容与电阻并联，这使得电阻电压与电容电压相同，即

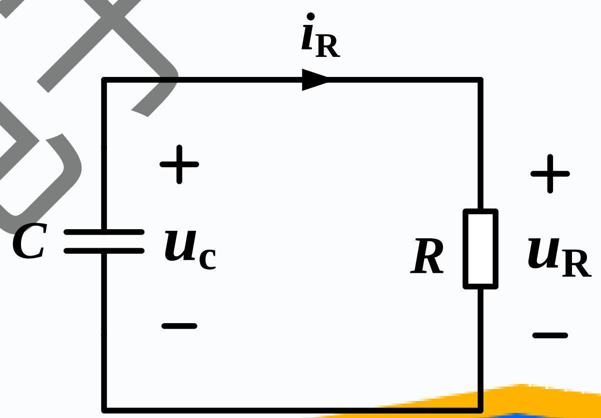
$$u_R(0_+)=u_C(0_+)=U_0$$

电阻的电流为 $i_R(0_+)=\dfrac{U_0}{R}$

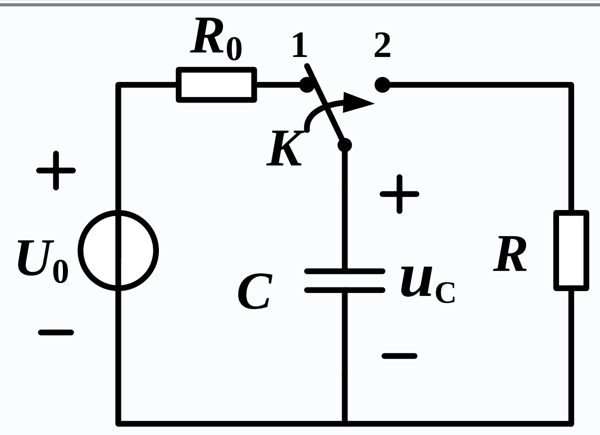
1. RC电路的零输入响应

该电流使得电容元件中的电荷量不断减少，电压不断降低，直到电荷量为零，电容电压为零。这个过程一般称为电容放电。

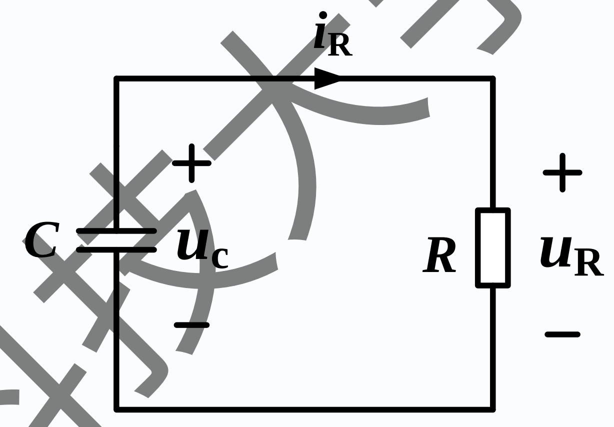
电阻消耗的能量需要电容来提供，这造成电容电压的下降。也就是电容电压从初始值$u_C(0_+)=U_0$逐渐减小到零的变化过程。这一过程变化的快慢与电阻元件参数的大小和电容元件参数的大小有关。



1. RC电路的零输入响应



(a)



(b)

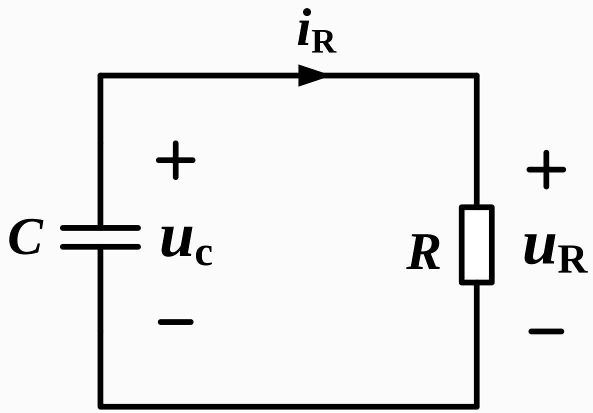
为建立图(b)所示电路的一阶微分方程，由KVL得到

$$-u_R + u_C = 0$$

由KCL和电阻、电容的VCR方程得到

$$u_R = Ri_R = -Ri_C = -RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

1. RC电路的零输入响应



$$-u_R + u_C = 0 \qquad u_R = -RC\frac{du_C}{dt}$$

得到以下方程

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \qquad (2.3.1)$$

这是一个常系数线性一阶齐次微分方程。其通解为

$$u_C(t) = Ke^{pt}$$

其中 $$p = -\frac{1}{RC}$$

1. RC电路的零输入响应

于是电容电压变为 $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$

式中A是一个常量，由初始条件确定。当t=0_+时上式变为

$$u_C(0_+) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = A$$

根据初始条件 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$

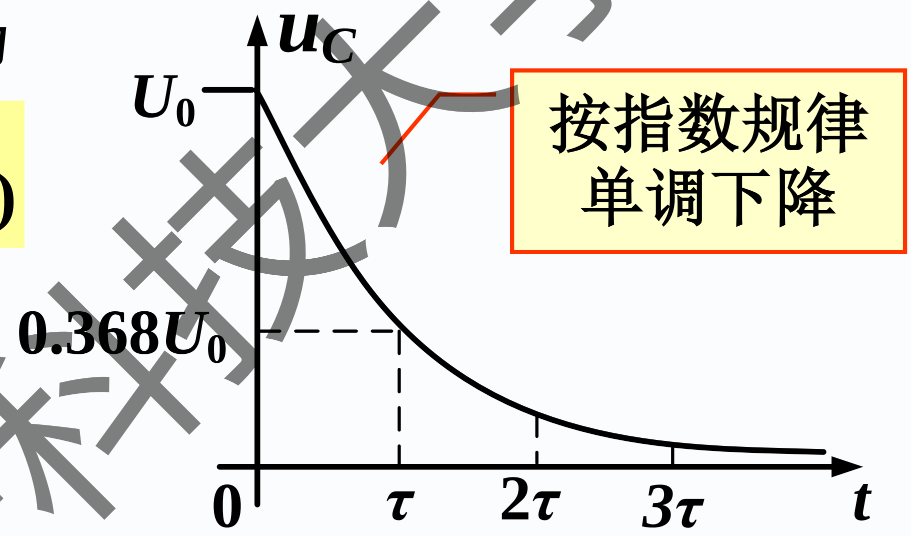
求得 $A = U_0$

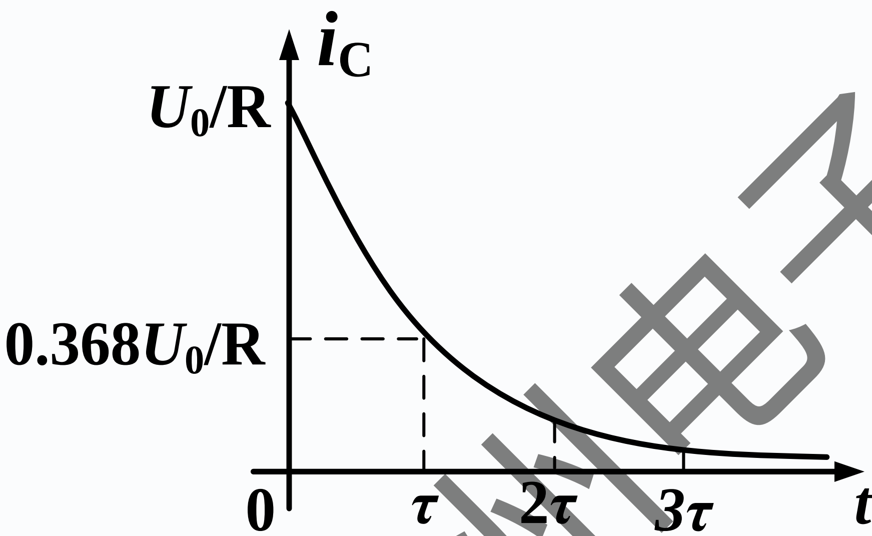
1. RC电路的零输入响应

得到图(b)电路的零输入响应为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \ge 0)$$

（2.3.3）





$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t > 0)$$

*RC*电路的零输入响应曲线

1. RC电路的零输入响应

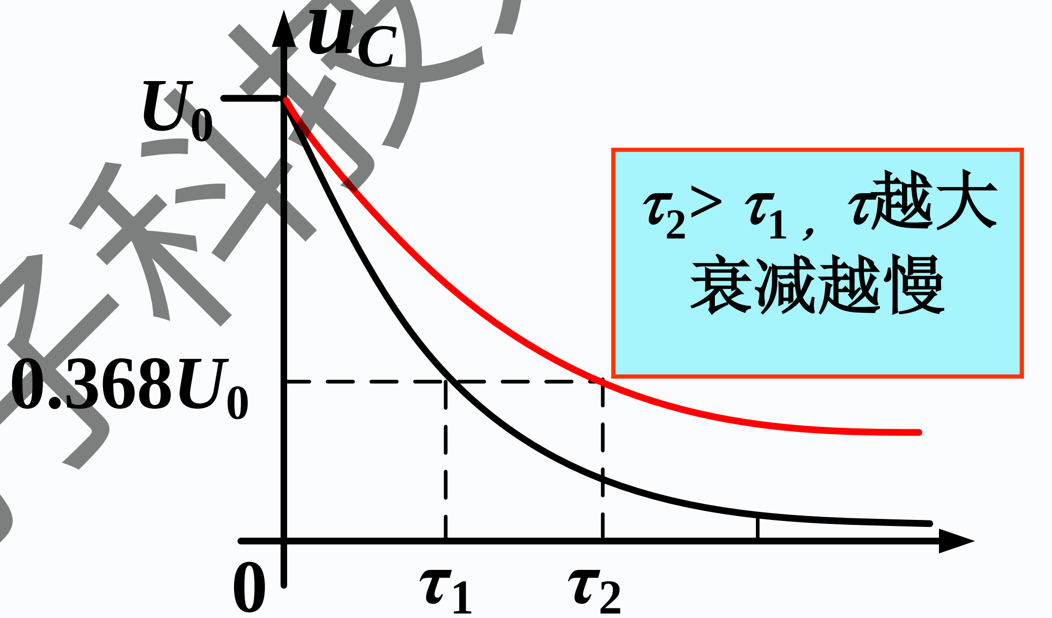
由曲线可见，各电压电流的变化快慢取决于R和C的乘积。令$\tau=RC$，由于τ具有时间的量纲，故称它为RC电路的时间常数。

τ的物理意义

$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

当$t=\tau$时

$$u_C=U_0\mathrm{e}^{-1}=36.8\%U_0$$



① 时间常数τ反映了动态过程的快慢，其值等于电压u_C衰减到初始值U_0的e^{-1}时所需的时间。

1. RC电路的零输入响应

$\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ 随时间而衰减

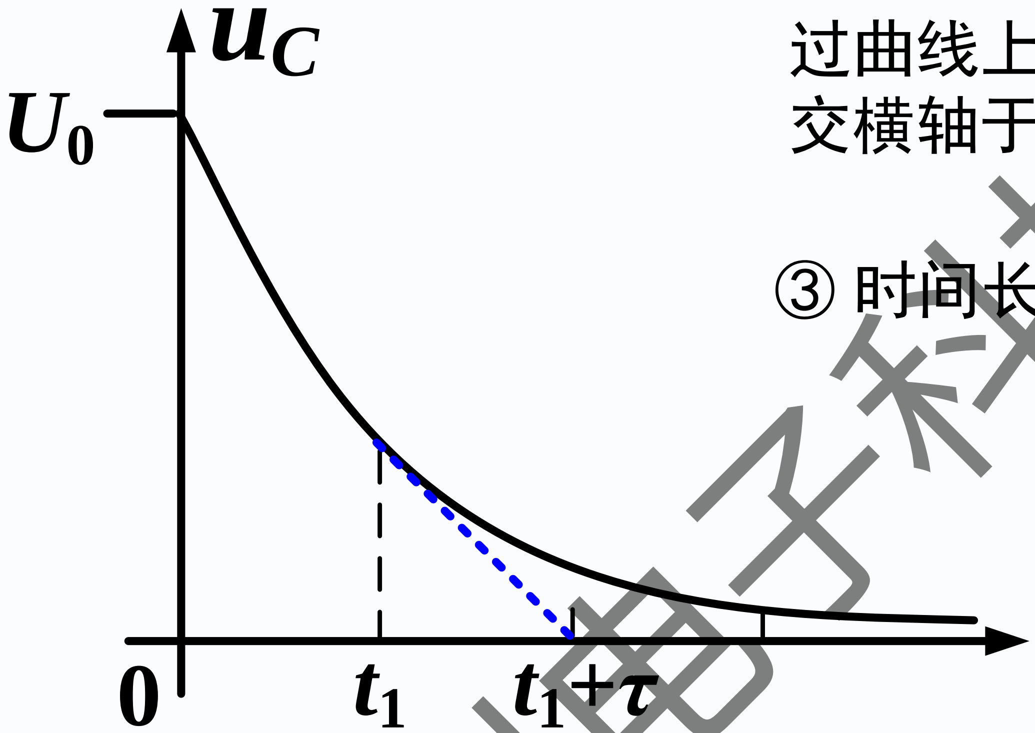
t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
$\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	e^{-4}	e^{-5}	e^{-6}
u_C	$0.368U$	$0.135U$	$0.050U$	$0.018U$	$0.007U$	$0.002U$

当 $t=5\tau$ 时，$u_C(5\tau)=0.007U_0$，基本达到稳态值。

只有 $t\to\infty$ 时电路才能真正达到稳态，$u_C=0$ 。

② 工程上认为 $t=(3\sim5)\tau$，$u_C\to0$ 电容放电基本结束。

1. RC电路的零输入响应

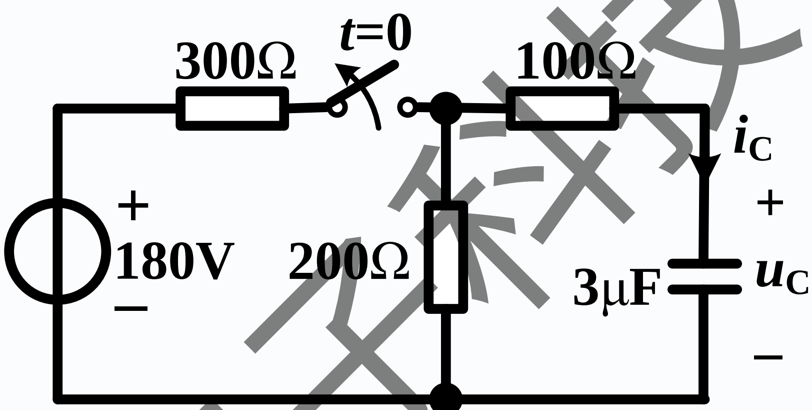


过曲线上任一点t_1作曲线切线，则交横轴于$t_1+\tau$点

③ 时间长度τ等于曲线的次切距长度

1. RC电路的零输入响应

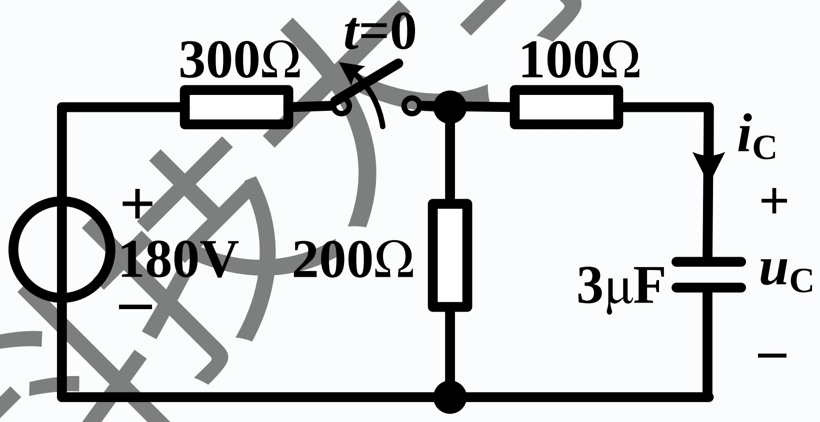
[例] 电路如图所示，换路前电路处于稳定状态。t=0时刻开关断开，求t >0的电容电压和电容电流。



解：换路前开关闭合，电路处于稳定状态，电容电流为零，电容电压等于200Ω电阻的电压，由此得到

1. RC电路的零输入响应

$$u_C(0_-)=180\times\frac{200}{300+200}=72(\text{V})$$



$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=72(\text{V})$$

时间常数：

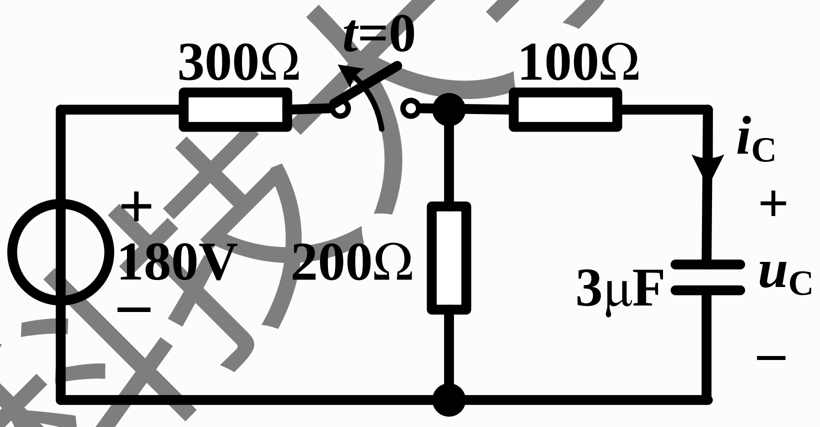
$$\tau=RC=(200+100)\times3\times10^{-6}=9\times10^{-4}(\text{s})$$

按式（2.3.3） 写出电容电压的零输入响应

$$u_C(t)=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=72\mathrm{e}^{-\frac{t}{9\times10^{-4}}}(\text{V})$$

1. RC电路的零输入响应

计算电容电流



方法一：

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$=C\frac{d}{dt}[72e^{-\frac{t}{9\times10^{-4}}}]$$

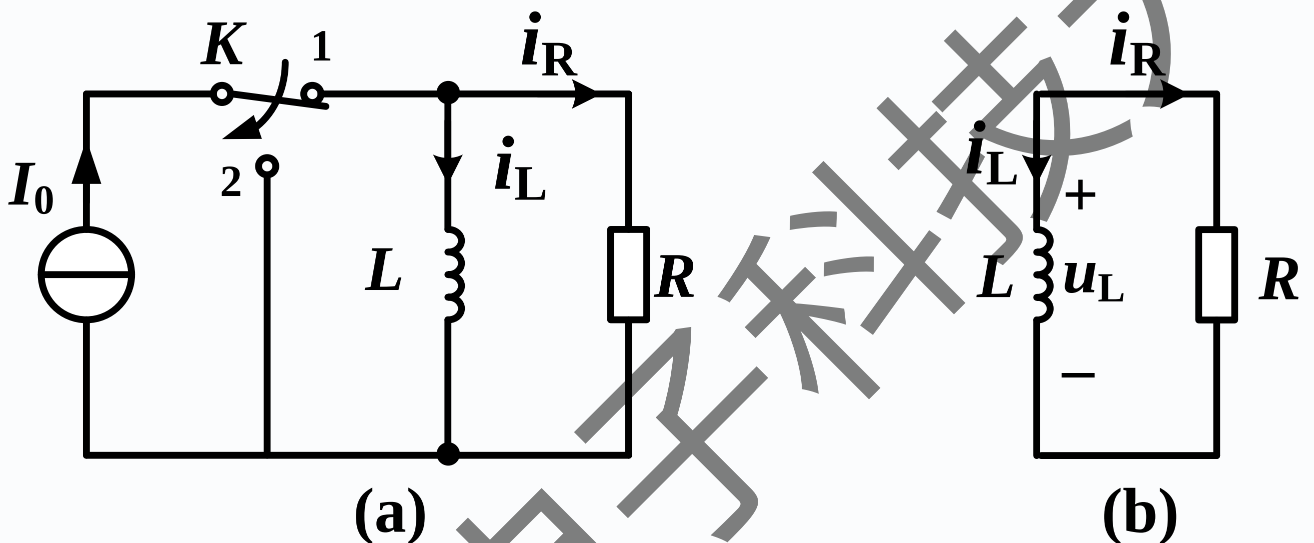
$$=-0.24e^{-\frac{t}{9\times10^{-4}}}$$

方法二：

$$i_C(t)=-\frac{u_C(t)}{R}=-\frac{72}{200+100}e^{-\frac{t}{9\times10^{-4}}}=-0.24e^{-\frac{t}{9\times10^{-4}}}\ \text{(A)}$$

2. RL电路的零输入响应

以图(a)电路为例来说明*RL*电路零输入响应的计算过程。



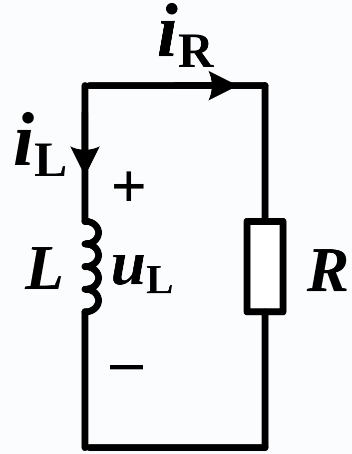
*RL*电路的零输入响应

电感电流原来等于电流I_0，电感中储存一定的磁场能量，在t=0时开关由1端倒向2端，换路后的电路如图(b)所示。

2. RL电路的零输入响应

在开关转换瞬间，由于电感电流不能跃变，即$i_L(0_+)= i_L(0_-)= I_0$，这个电感电流通过电阻R时引起能量的消耗，这就造成电感电流的不断减少，直到电流变为零为止。

综上所述，图(b)所示***RL***电路是电感中的初始储能逐渐释放出来消耗在电阻中的过程。与能量变化过程相应的是各电压、电流从初始值，逐渐减小到零的过程。

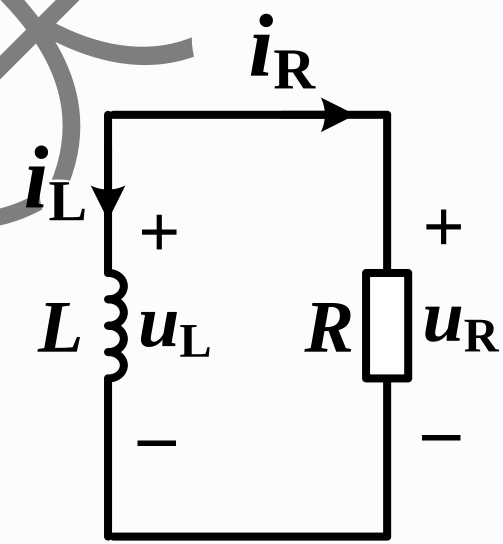


(b)

2. RL电路的零输入响应

换路后，由KVL得

$$Ri_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{L}}$$



(b)

代入电感VCR方程

$$u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}$$

得到以下微分方程

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + i_{\mathrm{L}} = 0 \qquad (2.3.4)$$

这个微分方程与式(2.3.1)相似，其通解为

$$i_{\mathrm{L}}(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t \geq 0)$$

2. RL电路的零输入响应

代入初始条件$i_L(0_+)=I_0$求得：$A=I_0$

最后得到电感电流和电感电压的表达式为

$$i_L(t)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t\geq 0)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t>0)$$

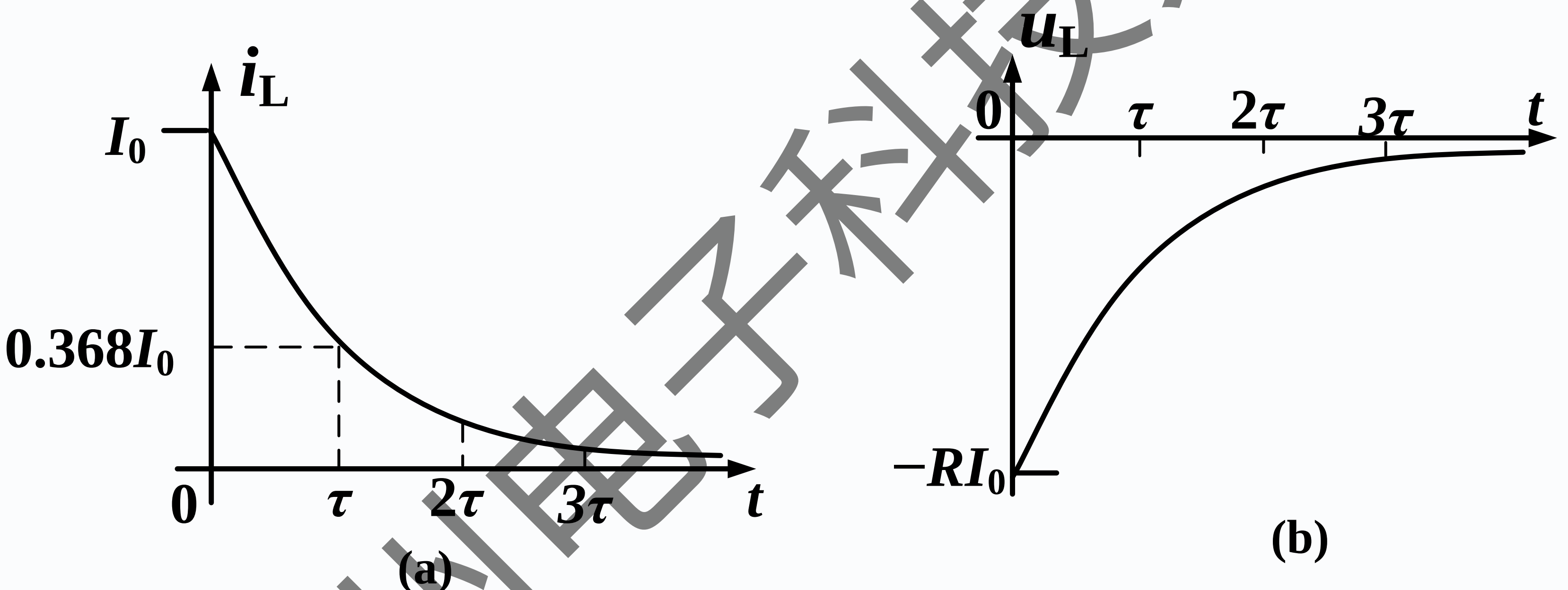
令 $\tau=\frac{L}{R}$，则上式改写为

$$i_L(t)=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t\geq 0) \qquad (2.3.5)$$

$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t>0) \qquad (2.3.6)$$

2. RL电路的零输入响应

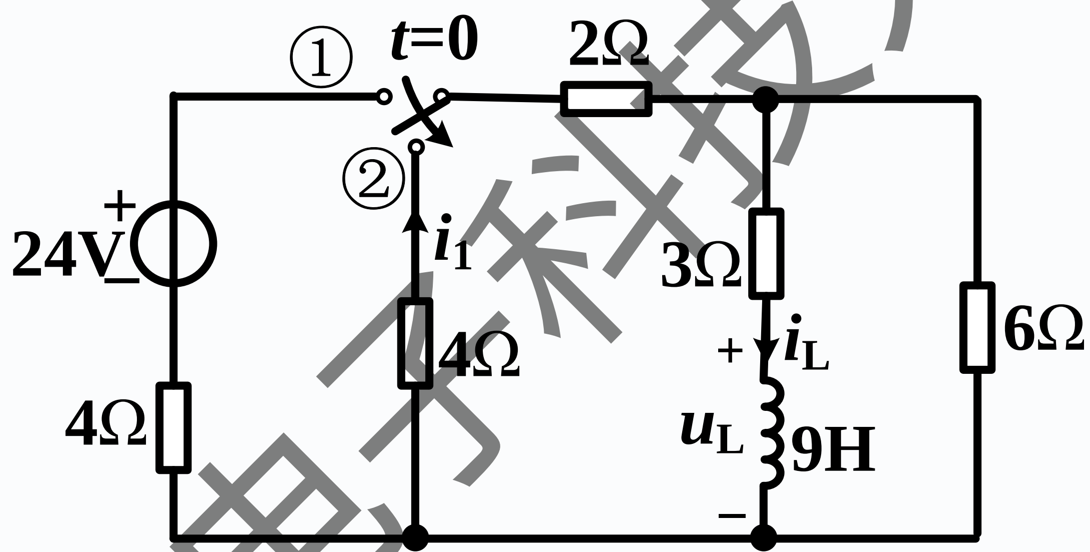
其波形如图所示。*RL*电路零输入响应也是按指数规律衰减，衰减的快慢取决于时间常数τ。且时间常数$\tau=L/R$.



*RL*电路零输入响应的波形

2. RL电路的零输入响应

[例] 电路如图所示，换路前K合于①，电路处于稳态。 t=0时K 由① 合向②，求换路后的$i_1(t)$、$i_L(t)$和$u_L(t)$

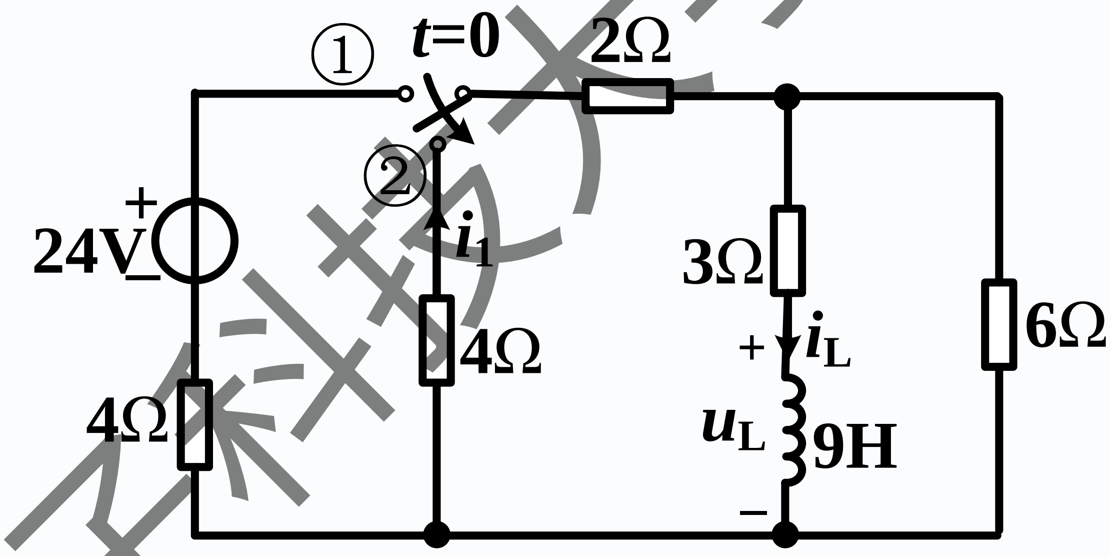


解: 换路前电路已稳定 $i_L(0_-)=\dfrac{24}{4+2+3//6}\times\dfrac{6}{3+6}=2\text{A}$

2. RL电路的零输入响应

由换路定律可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$



换路后电路为零输入响应。从L两端视入的等效电阻为

$$R_0 = 3 + \frac{(2+4)\times 6}{(2+4)+6} = 6\Omega$$

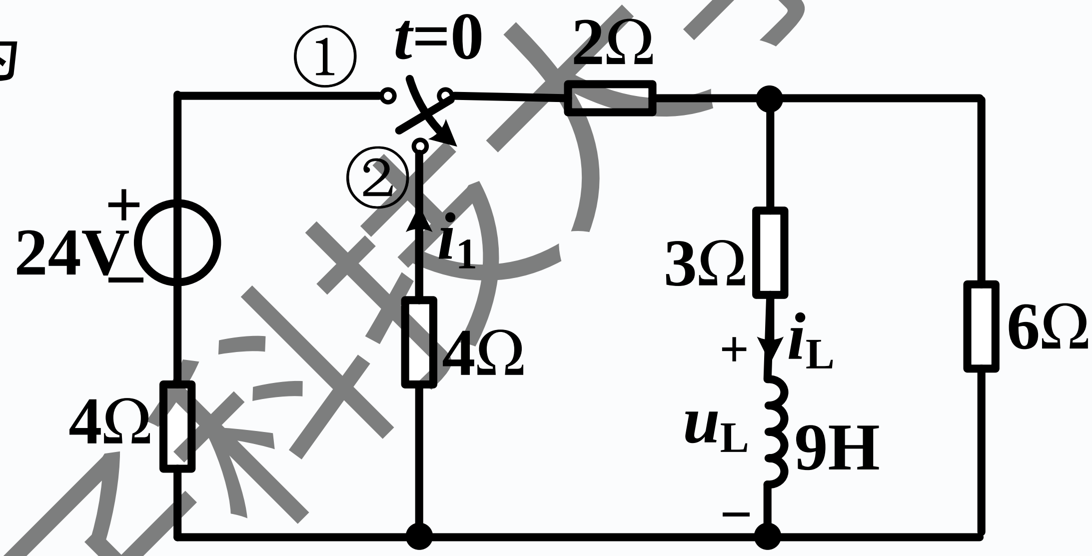
时间常数为
$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{9}{6} = 1.5\text{s}$$

2. RL电路的零输入响应

电感电流的零输入响应为

$$i_L(t)=i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=2e^{-\frac{t}{1.5}}\text{A}\quad(t\geq 0)$$



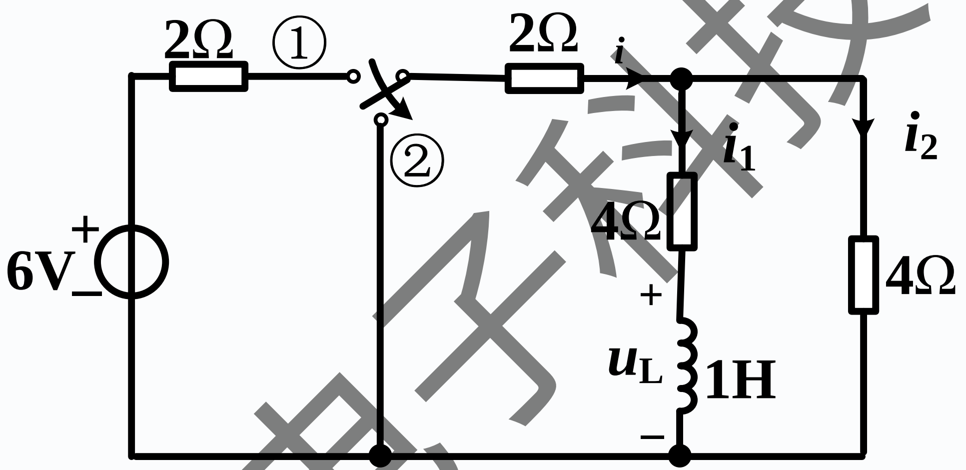
电感电压为

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=-12e^{-\frac{t}{1.5}}\text{V}\quad(t\geq 0)$$

$$i_1(t)=\frac{6}{6+4+2}i_L(t)=e^{-\frac{t}{1.5}}\text{V}\quad(t\geq 0)$$

2. RL电路的零输入响应

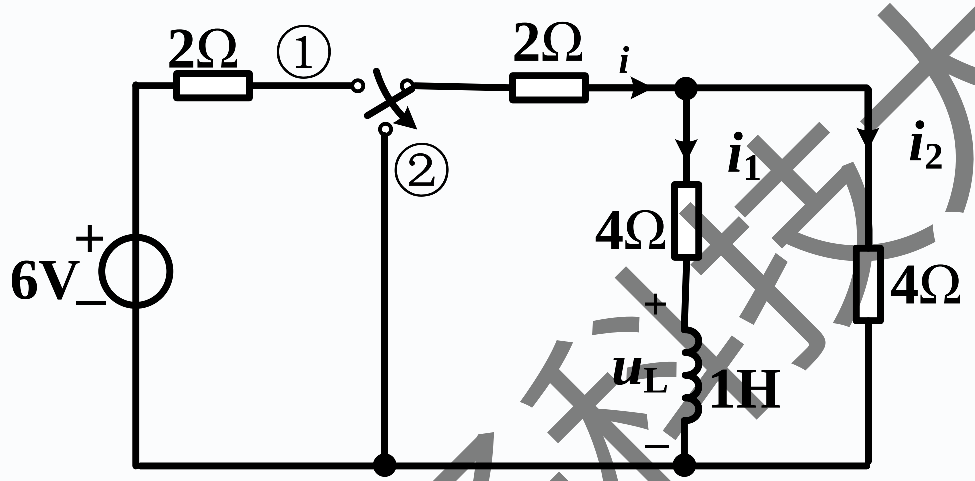
【例2.3.1】 如图2.3.5(a)所示电路，$t<0$时开关位于“1”处并已达到稳定，$t=0$时开关转到“2”的位置。求$t>0$时各支路电流的变化规律并画出波形图。



(a) 电路

图2.3.5 例2.3.1电路图

2. RL电路的零输入响应



(a) 电路

图2.3.5 例2.3.1电路图

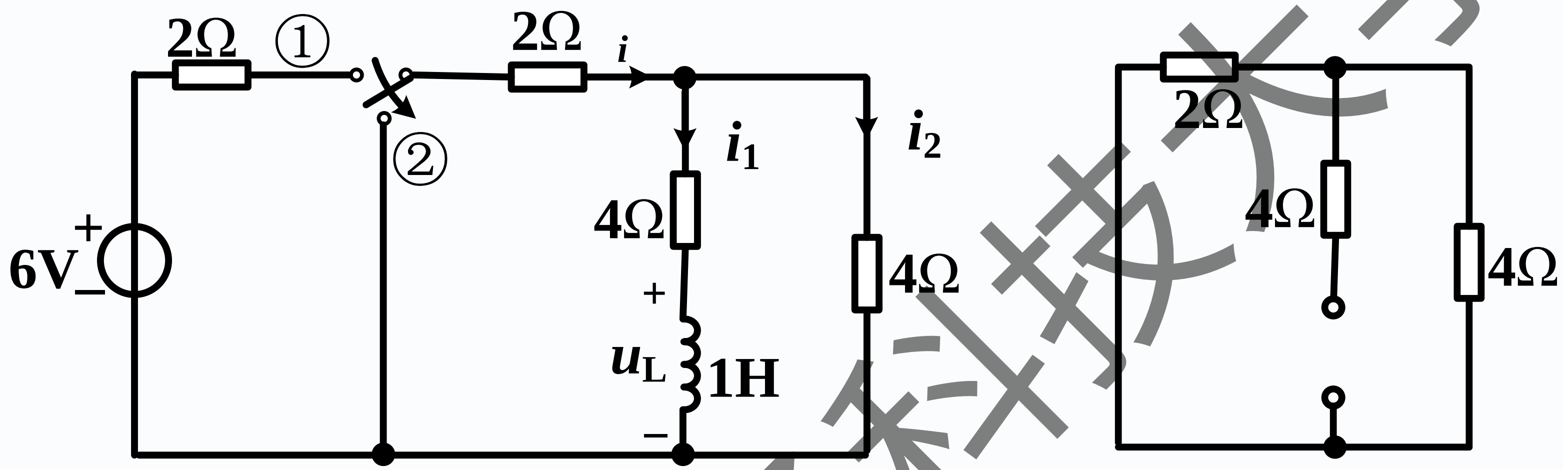
解：$t<0$时，电感相当于短路，求得

$$i_1(0_-)=\frac{6}{2+2+4//4}\times\frac{1}{2}=0.5(\mathrm{A})$$

根据换路定则得

$$i_1(0_+)=i_1(0_-)=0.5(\mathrm{A})$$

2. RL电路的零输入响应



(a) 电路　(b) 等效电阻

由图2.3.5(b)求得电感两端的等效电阻为 $R_O = 4 + 2//4 = \dfrac{16}{3}(\Omega)$

时间常数为 $\tau = \dfrac{L}{R_O} = \dfrac{3}{16}(\text{s})$

2. RL电路的零输入响应

由此可得，时各电流和电压为

$$i_1(t)=i_1(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{16}{3}t}\ (\mathrm{A})\quad t>0$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{16}{6}\mathrm{e}^{-\frac{16}{3}t}\ (\mathrm{V})\quad t>0$$

$$i_2=\frac{4i_1+u_L}{4}=-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{16}{3}t}\ (\mathrm{A})\quad t>0$$

$$i=i_1+i_2=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{16}{3}t}\ (\mathrm{A})\quad t>0$$

波形如图2.3.6所示。

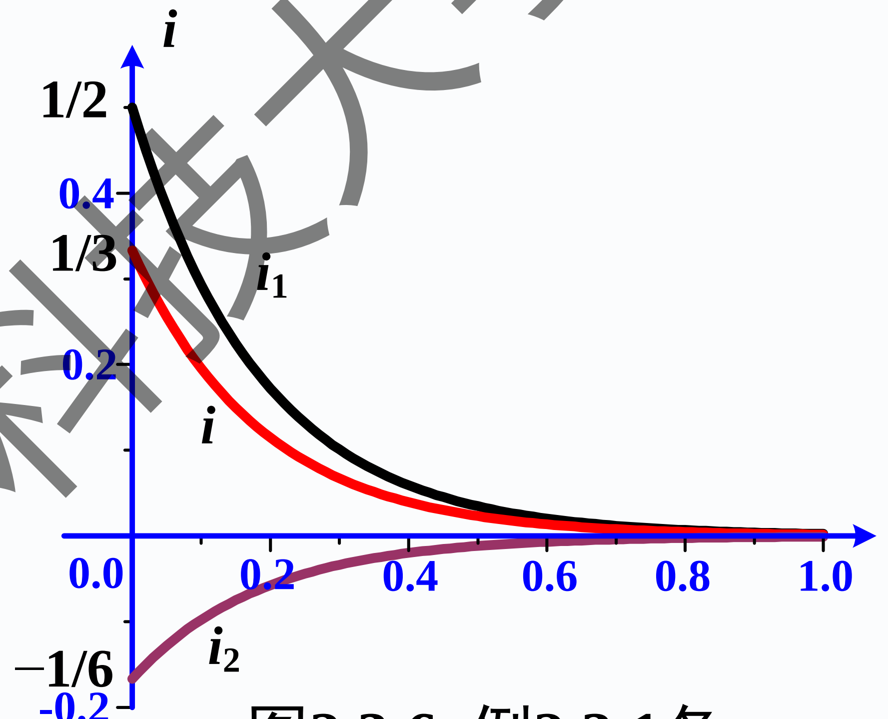


图2.3.6 例2.3.1各支路电流的波形图

2. RL电路的零输入响应

【例2.3.2】 如图2.3.7所示电路原已稳定，t=0时，开关S打开，试求零输入响应$u_C(t)$及$i_C(t)$。

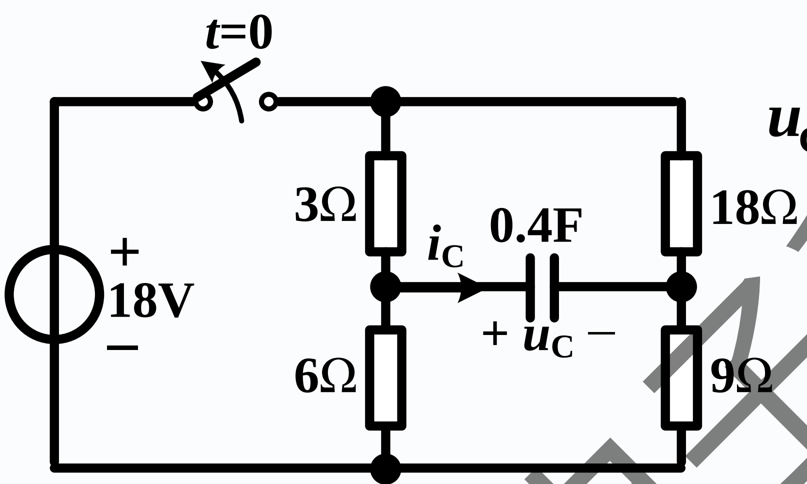


图2.3.7 例2.3.2电路图

解

$$u_C(0_-)=\frac{6}{3+6}\times 18-\frac{9}{9+18}\times 18=6(\text{V})$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=6(\text{V})$$

$$R_O=(3+18)//(6+9)=\frac{35}{4}(\Omega)$$

$$\tau=R_OC=3.5(\text{s})$$

$$u_C(t)=u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=6e^{-\frac{t}{3.5}}(\text{V})$$

$$i_C=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{24}{35}e^{-\frac{t}{3.5}}(\text{A})$$

2.4 一阶电路的零状态响应

电路的初始状态为零，即$u_C(0_+)=0$， $i_L(0_+)=0$，由外加激励引起的响应，称为零状态响应。

图2.4.1所示电路中的电容原来未充电，$u_C(0_-)=0$。$t=0$时开关K闭合，电压源U_S被接入RC电路。

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

根据KCL定律，有

$$U_S = Ri_C + u_C$$

由于 $$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

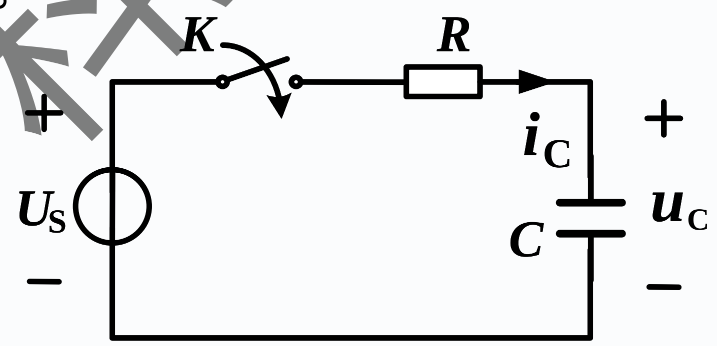


图2.4.1 *RC*电路的零状态响应

2.4 一阶电路的零状态响应

所以 $$RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}} \qquad (2.4.1)$$

这是一个常系数线性一阶非齐次微分方程。其解包括两部分，即

$$u_{\mathrm{C}}(t)=u'_{\mathrm{C}}(t)+u''_{\mathrm{C}}(t)$$

式中的$u'_{\mathrm{C}}(t)$是与式（2.4.1）相应的齐次微分方程的通解，其形式与零输入响应相同，即

$$u'_{\mathrm{C}}(t)=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}=Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t\geq 0)$$

2.4 一阶电路的零状态响应

式中的$u''_C(t)$是式(2.4.1)所示非齐次微分方程的一个特解，应满足非齐次微分方程．对于直流电源激励的电路，它是一个常数，令 $u_C''(t)=B$代入（2.4.1）

$$RC\cdot 0+B=U_S$$

求得 $$u''_C(t)=B=U_S$$

因而 $$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U_S$$

2.4 一阶电路的零状态响应

式中的常数A由初始条件确定。在$t=0_+$时

$$u_C(0_+)=A+U_S=0$$

由此求得 $A=-U_S$

代入式$u_c(t)$中得到电容电压的零状态响应为

$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$=U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (t\geq 0) \qquad (2.4.2)$$

2.4 一阶电路的零状态响应

电容电流可以由电容电压求得

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0) \qquad (2.4.3)$$

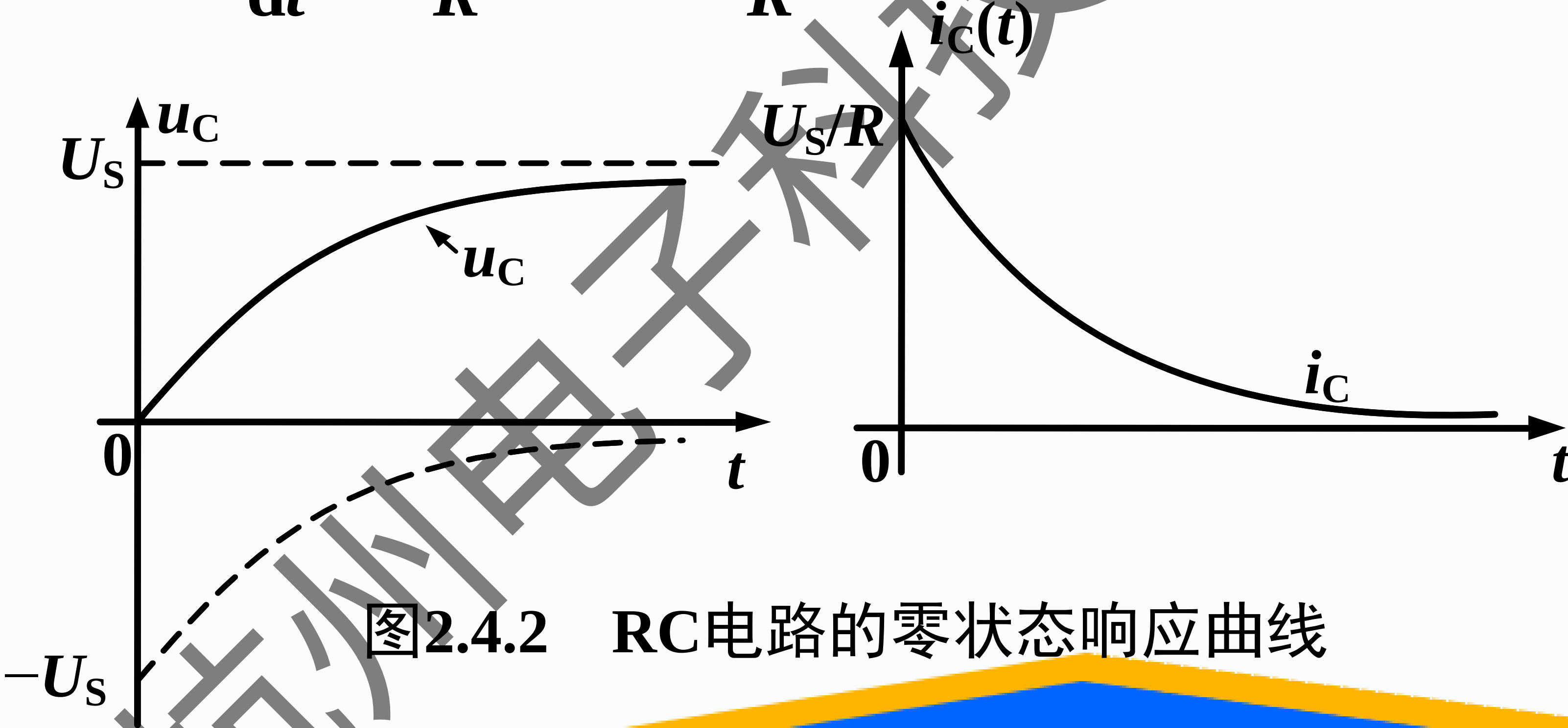


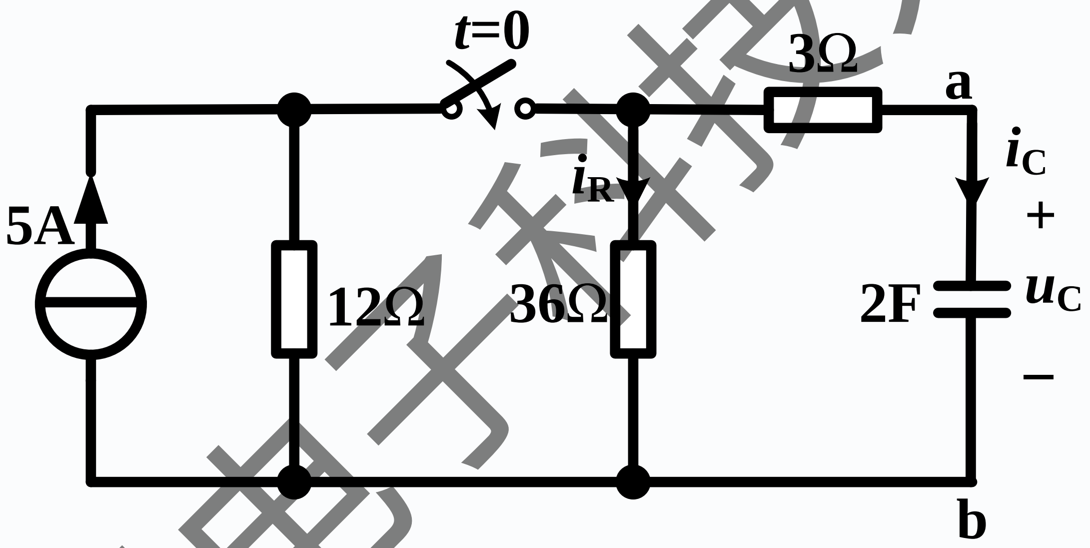
图2.4.2　RC电路的零状态响应曲线

2.4 一阶电路的零状态响应

- 计算图2.4.1可以不用列解微分方程，直接按式（2.4.2）写出零状态响应。
- 对于比较复杂一点的电路，可以利用戴维南定理将电路变换为图（2.4.1）的形式，再按式（2.4.2）写出零状态响应。
- 零输入响应一般称为放电，零状态响应一般则称为电容器充电。
- 与放电过程类似，经过3τ～5τ的时间，电容电压接近电源电压，即认为过程结束。

2.4 一阶电路的零状态响应

➢ [例] 电路如图所示，已知电容电压$u_C(0_)=0$， $t=0$开关闭合，求$t\geq0$的$i_R(t)$,电容电压$u_C(t)$和电容电流$i_C(t)$。



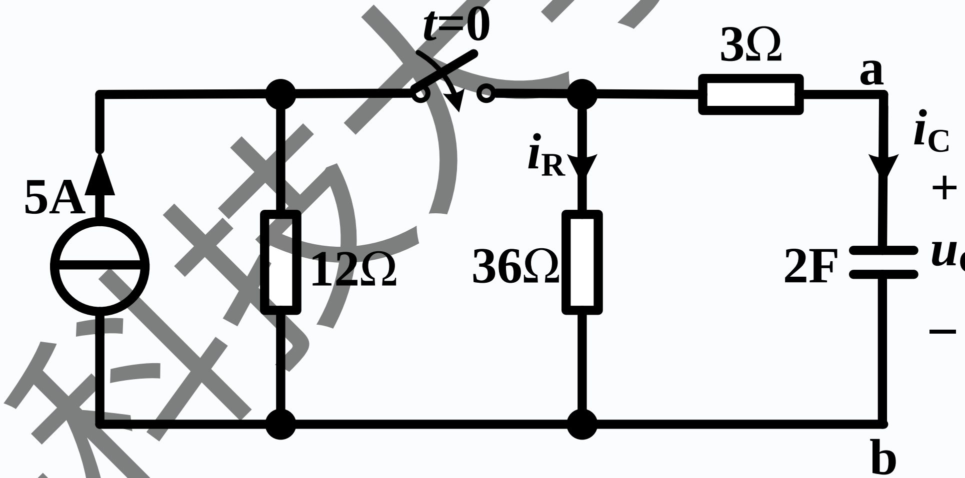
解：在开关闭合瞬间，由换路定律

$$u_C(0_+)=u_C(0\_)=0$$

2.4 一阶电路的零状态响应

当电路达到新的稳定状态时

$$u_C(\infty) = 5\times(12 /\!/ 36) = 45\text{V}$$



由电容两端得到的等效电阻

$$R_0 = 3 + (12 /\!/ 36) = 12(\Omega)$$

电路的时间常数

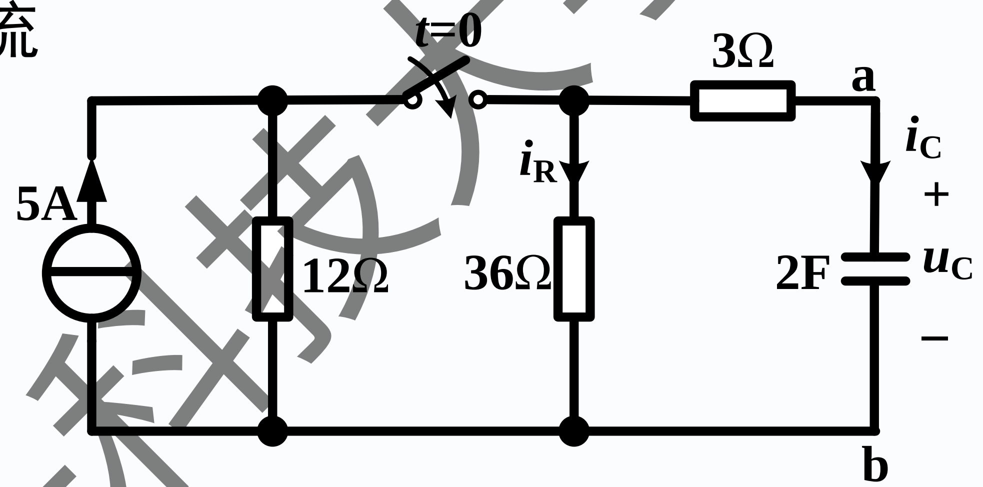
$$\tau = R_0 C = 12\times 2 = 24(\text{s})$$

按式（2.4.2）写出电容电压的零状态响应为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 45(1 - e^{-\frac{1}{24}t})(\text{V}) \qquad (t \geq 0)$$

2.4 一阶电路的零状态响应

按式(2.4.3)可以得到 电容电流



$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

$$=3.75e^{-\frac{1}{24}t}(A)$$

$$(t\geq 0)$$

$$i_R(t)=\frac{3i_C(t)+u_C(t)}{36}=1.25-0.9375e^{-\frac{t}{24}}(A) \qquad (t\geq 0)$$

2. RL电路的零状态响应

RL一阶电路的零状态响应与RC一阶电路相似。图2.4.3所示电路在开关闭合前，电感电流为零，即$i_L(0_)=0$。当t=0时开关K闭合。

根据KVL,有 $Ri_L + u_L = U_S$

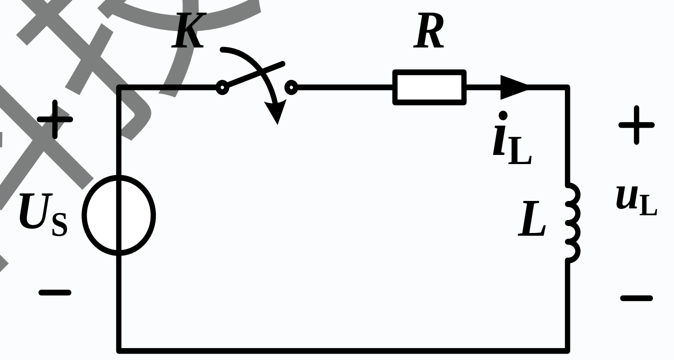


图2.4.3　RL电路零状态响应

由于 $u_L = L\frac{di_L}{dt}$

所以 $$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{U_S}{R} \qquad (2.4.4)$$

2. RL电路的零状态响应

这是一阶常系数非齐次微分方程，其解答为

$$i_L(t)=i_L'(t)+i_L''(t)=\frac{U_S}{R}+A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U_S}{R}+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中$\tau=L/R$是该电路的时间常数。常数A由初始条件确定，即

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=A+\frac{U_S}{R}=0$$

由此求得

$$A=-\frac{U_S}{R}$$

2. RL电路的零状态响应

最后得到一阶RL电路的零状态响应为

$$i_L(t)=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=i_L(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\quad(t\ge 0)\quad(2.4.5)$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=U_S e^{-\frac{R}{L}t}=U_S e^{-\frac{t}{\tau}}\quad(t\ge 0)\quad(2.4.6)$$

其响应曲线如图所示。

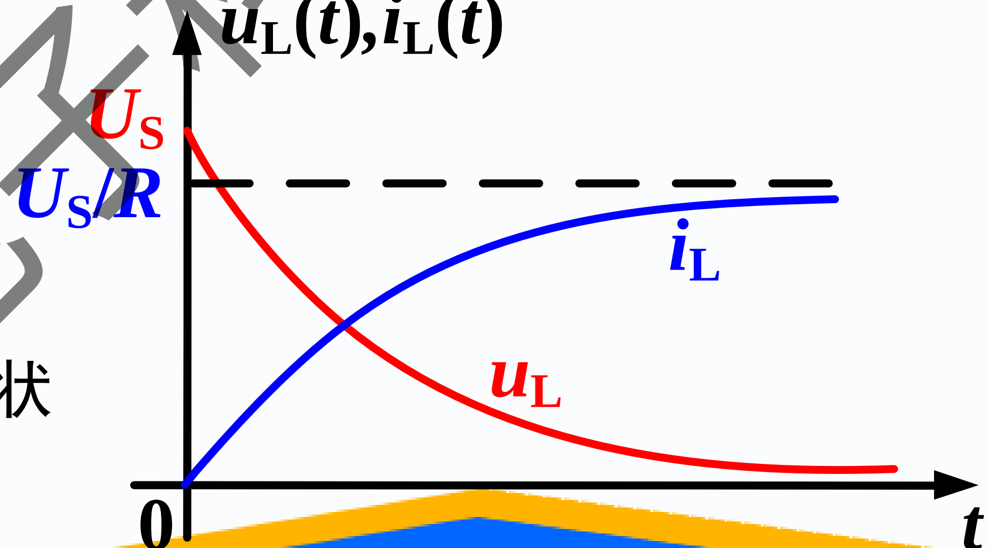
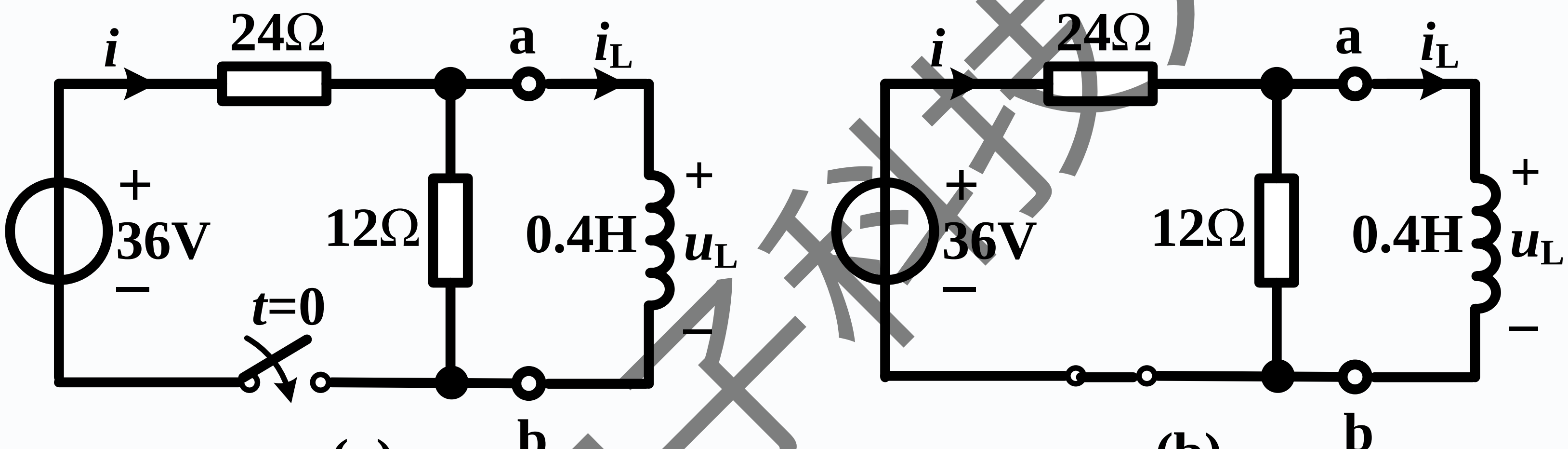


图2.4.2　RL电路零状态响应曲线

2. RL电路的零状态响应

[例] 电路如图(a)所示，已知电感电流$i_L(0_-)=0$。$t=0$闭合开关，求$t \geq 0$的电感电流$i_L(t)$和电感电压$u_L(t)$。

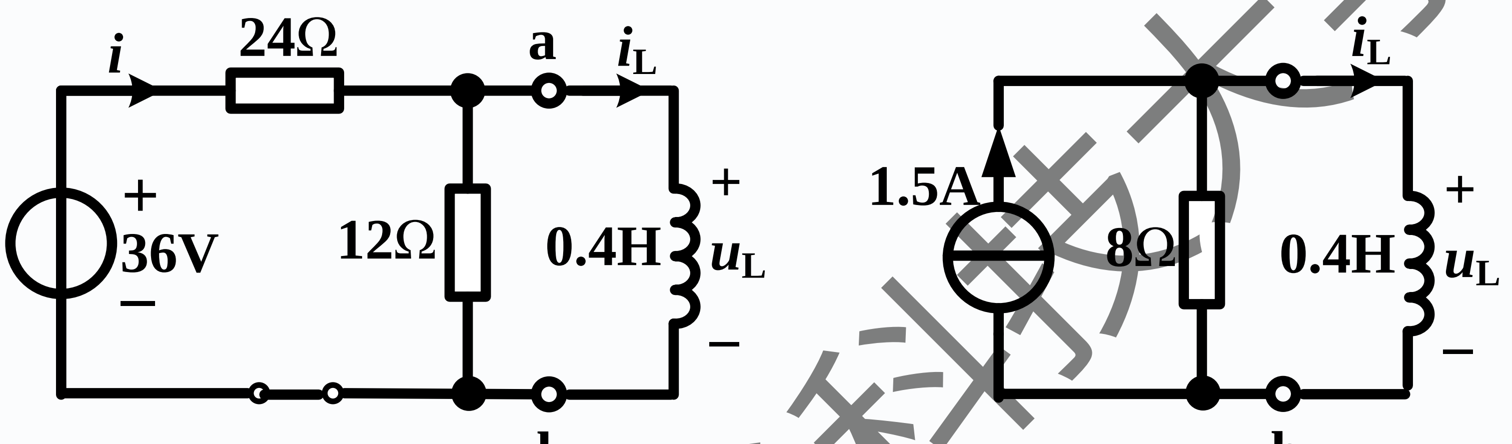


(a) (b)

解：开关闭合后的电路如图(b)所示，由于开关闭合瞬间电感电流不能跃变，即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

2. RL电路的零状态响应

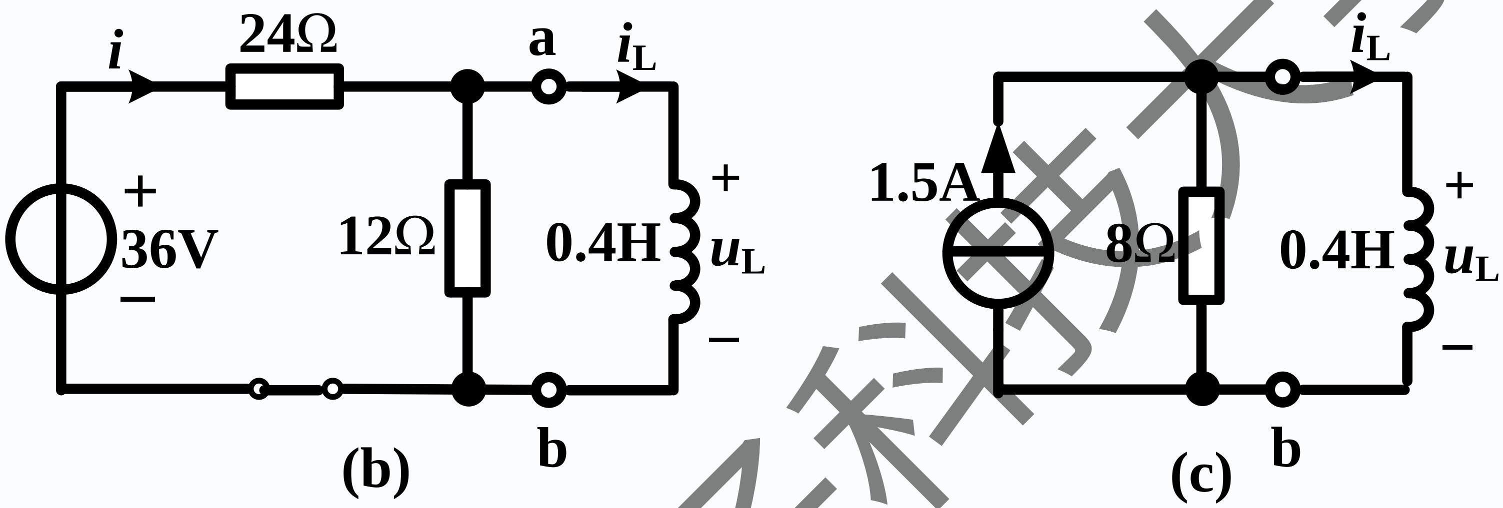


(b)　　　　(c)

将图(b)中电路等效变换为图(c)所示电路。由此电路求得

$$i_L(\infty)=1.5\text{(A)} \qquad \tau=\frac{L}{R_o}=\frac{0.4}{8}=0.05\text{ (s)}$$

2. RL电路的零状态响应



电感电流的零状态响应为

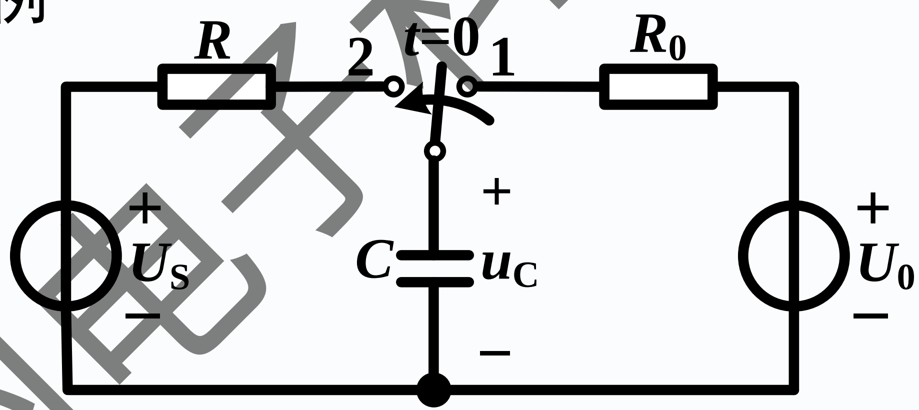
$$i_L(t) = 1.5(1 - e^{-20t})(A) \qquad (t \geq 0)$$

电感电压为

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = 0.4 \times 1.5 \times 20e^{-20t}V = 12e^{-20t}(V)$$

2.5 一阶电路的全响应

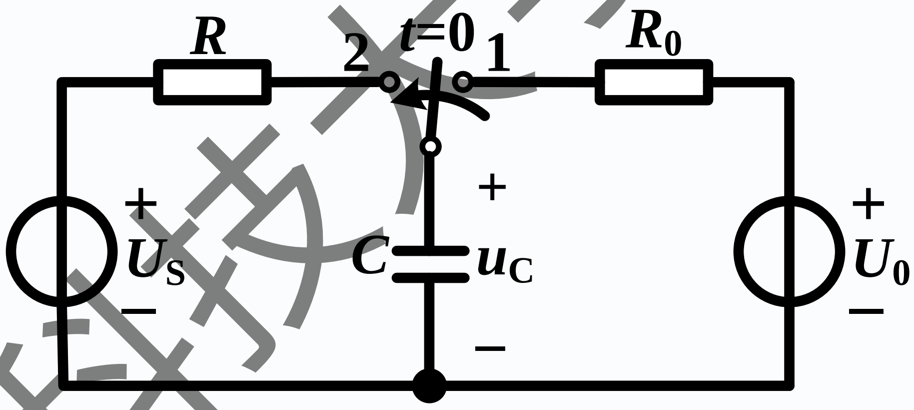
- 电路中储能元件的状态不为零，激励电源也不为零，由储能元件的初始储能和激励电源共同引起的响应，称为全响应。
- 本节只讨论在直流电源激励下的全响应。
- 以 RC电路为例



RC电路的完全响应

2.5 一阶电路的全响应

电路如图所示，换路前电路已处于稳态，电容电压不为零，$u_C(0_-)=U_0$。t=0时开关由“1”置于“2”处。



RC电路的完全响应

为了求得电容电压的全响应，以电容电压$u_C(t)$为变量，列出换路后电路的微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \tag{2.5.1}$$

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

2.5 一阶电路的全响应

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \qquad (2.5.1)$$

这是一个常系数线性一阶非齐次微分方程。其解为：

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\underbrace{u_C(\infty)}_{\text{稳态分量}}+\underbrace{\left[u_C(0_+)-u_C(\infty)\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{暂态分量}} \qquad (2.5.2)$$

稳态分量 ＋ 暂态分量 ＝ 全响应

2.5 一阶电路的全响应

又

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\underbrace{u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入}}+\underbrace{u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态}}$$

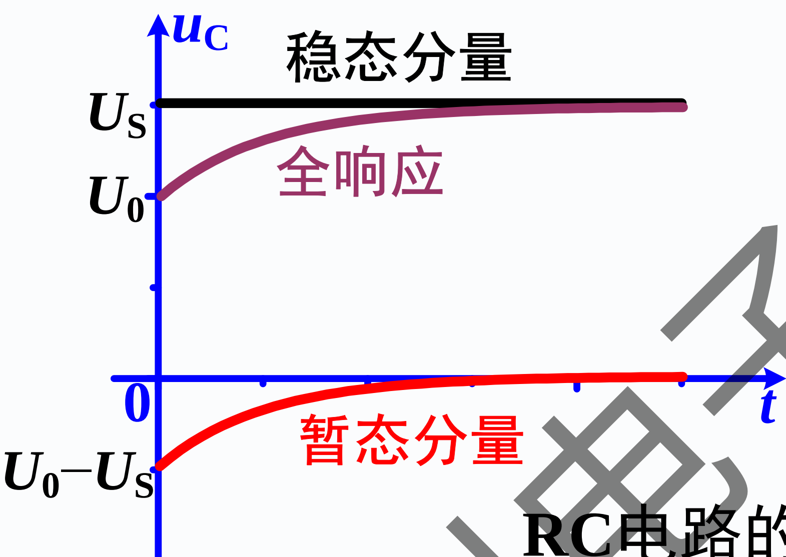
零输入 + 零状态 = 全响应

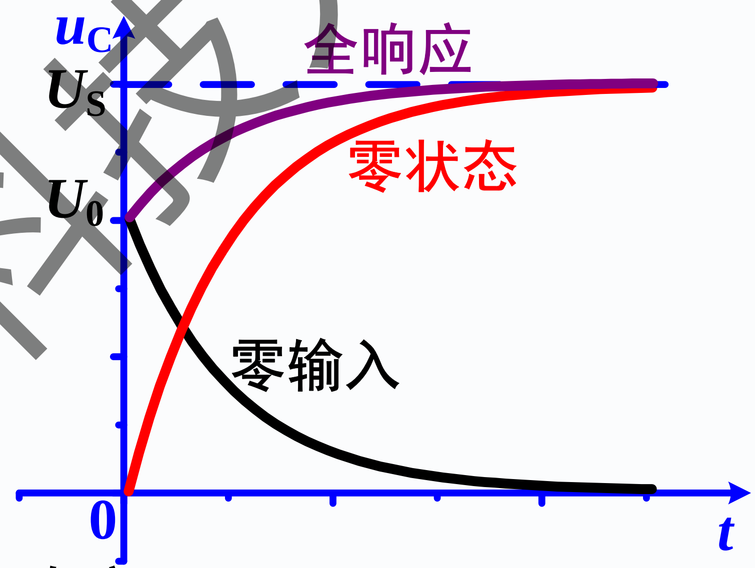
式中第一项为初始状态单独作用引起的零输入响应，第二项为激励源单独作用引起的零状态响应。

也就是说电路的全响应等于零输入响应与零状态响应之和。这是线性动态电路的一个基本性质，是叠加原理的一种体现。

2.5 一阶电路的全响应

以上两种叠加的关系，可以用曲线来表示。利用全响应的这两种分解方法，可以简化电路的分析计算，实际电路存在的是电压的全响应。





RC电路的完全响应

(a) 全响应分解为稳态响应与暂态响应之和。

(b) 全响应分解为零输入响应与零状态响应之和。

2.6 三要素法求一阶电路响应

初始值$f(0_+)$，稳态值$f(\infty)$和时间常数τ称为电路的三要素。由三要素按式（2.6.1）直接写出全响应的方法称为三要素法。

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (2.6.1)$$

利用三要素法求解电路响应的步骤：

求初始值 → 求稳态值 → 求时间常数 → 求一阶电路响应

注意，三要素法适用范围：

①直流电源激励下；

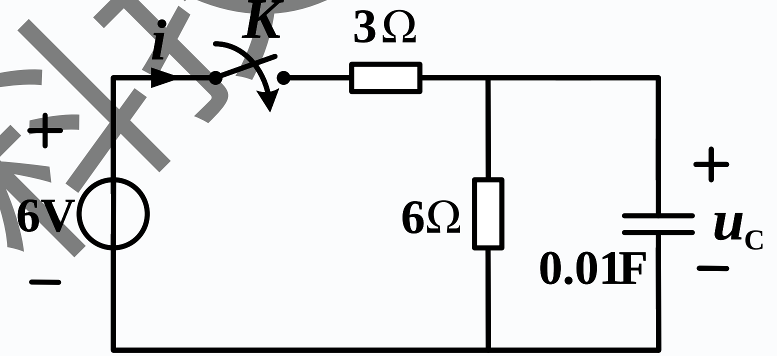
②一阶线性动态电路；

③电路中任何电压和电流。

2.6 三要素法求一阶电路响应

具体求解步骤如下举例说明。

[例] 电路如图所示，已知$u_C(0_)= -3V$，$t=0$闭合开关，求$t \geq 0$的电容电压 $u_C(t)$和电流 $i(t)$。



解：用三要素法求解

1．电容电压初始值.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -3(V)$$

2．电容电压稳态值.

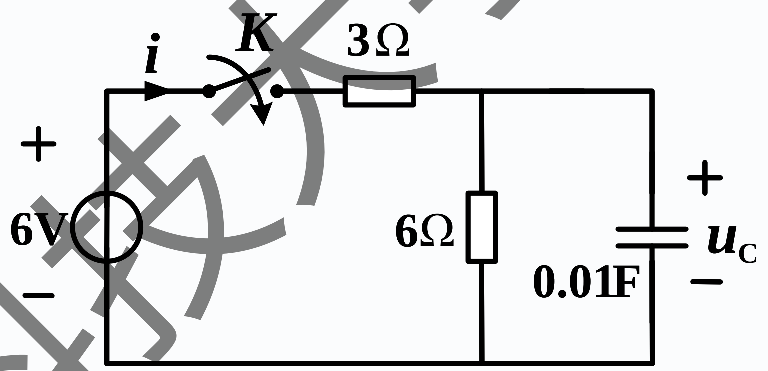
$$u_C(\infty) = \frac{6}{3+6} \times 6 = 4\,(V)$$

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

2.6 三要素法求一阶电路响应

3. 时间常数.

$$R_0 = \frac{3\times 6}{3+6} = 2\,(\Omega)$$



$$\tau = R_0 C = 2\times 10^3 \times 10\times 10^{-6} = 0.02\,\mathrm{s}$$

4. 用三要素法写出电容电压的全响应

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \left[u_C(0_+) - u_C(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 4 - 7e^{-50t}\ \ (\mathrm{V}) \qquad (t \ge 0)$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

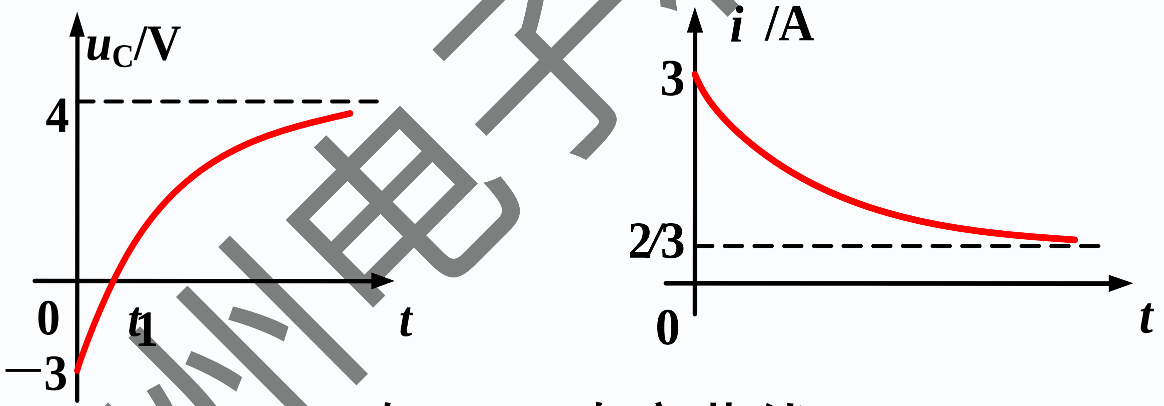
5. 计算电流 $i(t)$

$$i(t)=\frac{u_C(t)}{6}+C\frac{\mathrm{d}[u_C(t)]}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{6}(4-7e^{-50t})+0.01\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4-7e^{-50t})$$

$$=0.667+2.333e^{-50t}\ \text{(A)}$$

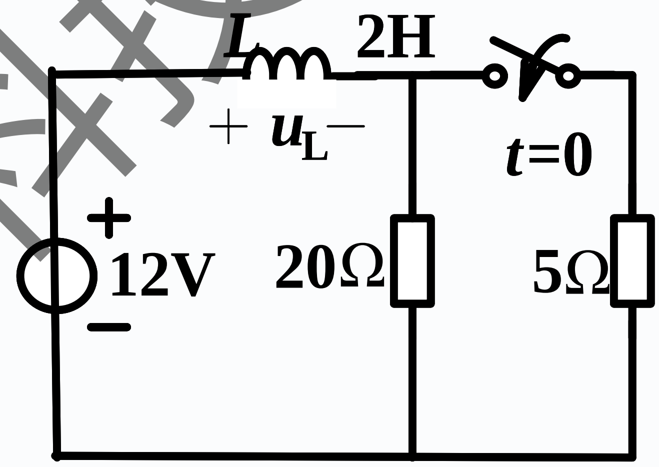
响应曲线如图



$i(t)$与$u_C(t)$响应曲线

2.6 三要素法求一阶电路响应

[例] 换路前电路处于稳态，在t=0时开关闭合。求换路后电感电流 $i_L(t)$和电感电压$u_L(t)$ 。



解：用三要素法求解

(1) 求初始值 $i_L(0_+)$

$$i_L(0\_) = \frac{12}{20} = 0.6\,(A)$$

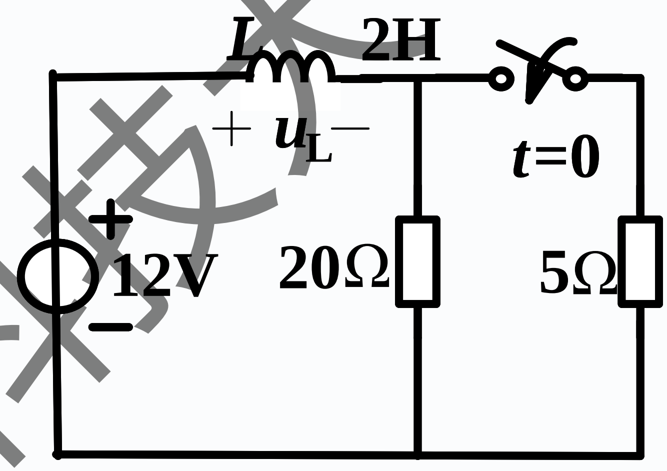
$$i_L(0_+) = i_L(0\_) = 0.6\,(A)$$

(2) 求稳态值$i_L(\infty)$

$$i_L(\infty) = \frac{12}{4} = 3\,(A)$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

(3) 求时间常数τ



$$R_0=\frac{20\times5}{20+5}=4(\Omega)$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{2}{4}=0.5(s)$$

(4) 用三要素法写出电感电流的全响应

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{0.5}}$$

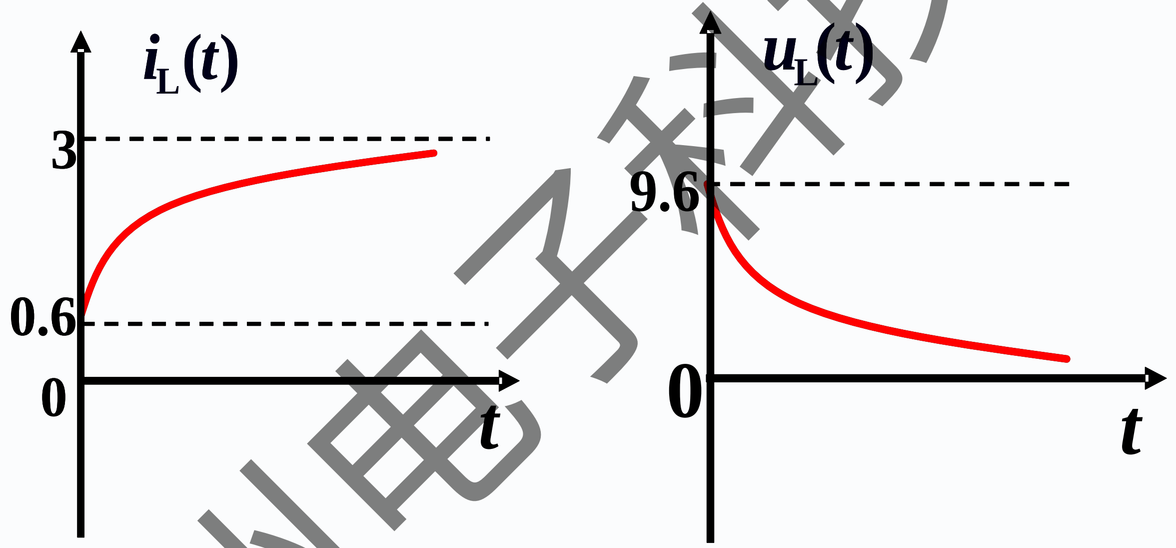
$$=3+(0.6-3)e^{-\frac{t}{0.5}}$$

$$=3-2.4e^{-2t}\ (A)$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

(5) 由电感电流计算电感电压

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\, i_L(t)}{\mathrm{d}t} = 9.6e^{-2t}\ (\mathrm{V})$$



电感电流与电感电流的响应曲线

2.6 三要素法求一阶电路响应

【例2.6.1】 如图2.6.1所示电路在t=0时闭合，求t>0时的u_c及i。

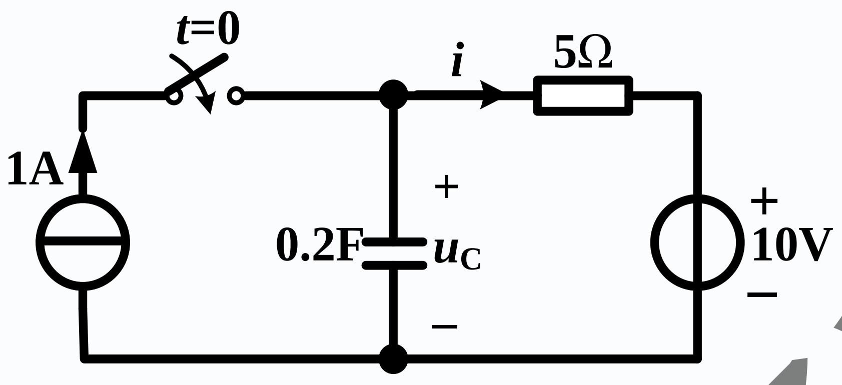


图2.6.1　例2.6.1电路图

解：初始值

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10(V)$$

稳态值

$$u_c(\infty)=5\times1+10=15（V）$$

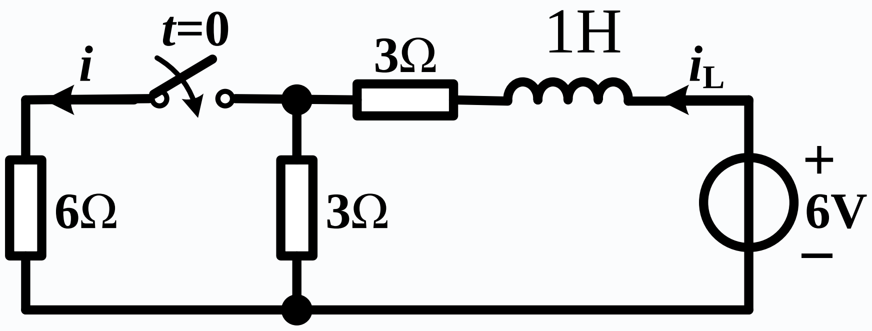
时间常数 $\tau=0.2\times5=1(s)$

利用三要素法公式得

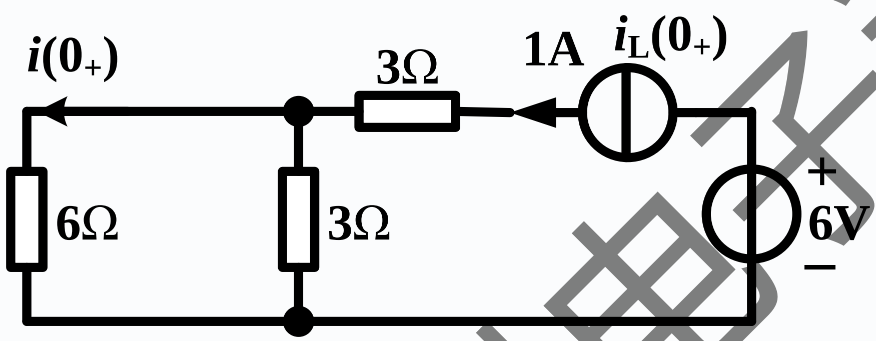
$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$=15-5e^{-t}(V)$$

$$i(t)=\frac{u_C-10}{5}=1-e^{-t}(A)$$

2.6 三要素法求一阶电路响应



(a) 电路



(b) $t=0_+$时刻的等效电路

图2.6.2 例2.6.2电路图

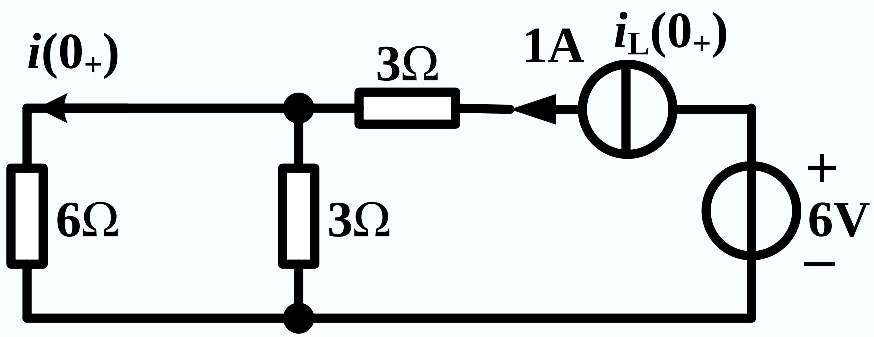
【例2.6.2】如图2.6.2(a)所示电路，开关闭合前电路已达稳态，t=0开关闭合，利用三要素法求t>0时的i_L和i。

解：(1) 求初始值

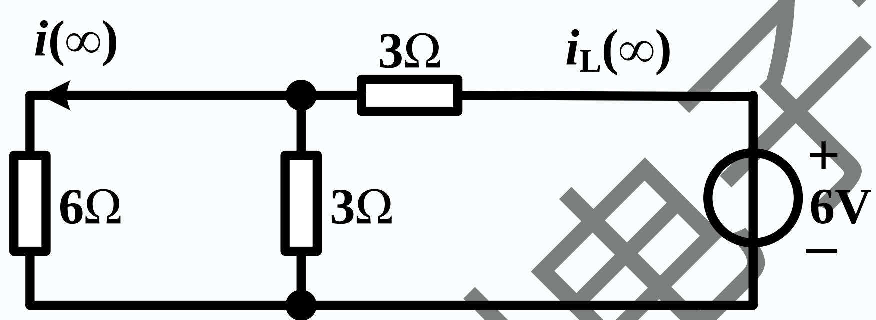
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{6}{3+3}=1(\mathrm{A})$$

将$i_L(0_+)$用电流源代替，得到等效电路如图(b)所示

2.6 三要素法求一阶电路响应



(b) t=0+时刻的等效电路



(c) t=∞时刻的等效电路

图(b) 由分流公式可以得到：

$$i(0_+)=\frac{3}{3+6}\cdot i_L(0_+)=0.33(\text{A})$$

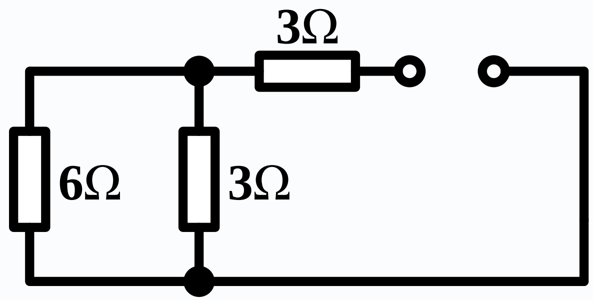
(2) 求稳态值

电路如图(c)所示，有

$$i_L(\infty)=\frac{6}{3+3//6}=1.2(\text{A})$$

$$i(\infty)=\frac{3}{3+6}\cdot i_L(\infty)=0.4(\text{A})$$

2.6 三要素法求一阶电路响应



(d) 等效电阻

(3) 求时间常数

换路完成后电感两端看进去的等效电阻如图(d)所示

$$R_O = 3 + 3 // 6 = 5(\Omega)$$

$$\tau = \frac{L}{R_O} = 0.2(\mathrm{s})$$

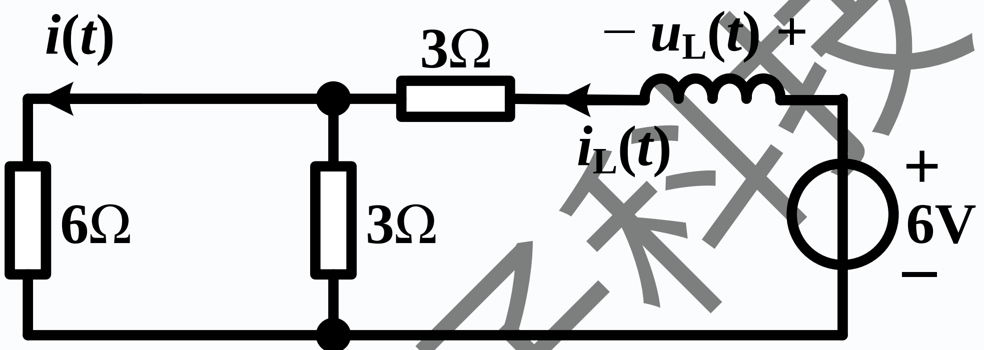
(4) 用三要素法公式求得

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.2 - 0.2e^{-5t}(\mathrm{A}) \quad t > 0$$

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.4 - 0.067e^{-5t}(\mathrm{A}) \quad t > 0$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

(5) ***i*(*t*)**也可以由图(e)的分流公式来求取



(e) *t*>0时刻的等效电路

$$i(t)=\frac{3}{6+3}\cdot i_L(t)=0.4-0.067e^{-5t}\,(\mathrm{A})\quad t>0$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

上例说明，对于电路中非动态元件所在支路的支路电压(支路电流)也可以用三要素法来求取其响应。

非动态元件支路电压(电流)用三要素法求解时，其时间常数由动态元件决定。

推荐对于非动态元件支路电压(电流)的求取利用KCL、KVL、分压公式、分流公式等将其支路与动态元件支路联系起来，利用已经求解出的动态元件响应来求取。

2.6 三要素法求一阶电路响应

【例2.6.3】 开关打开前，如图2.6.3所示电路已达稳态，t=0时开关打开，试用三要素法求t≥0时的电容电压 u_C(t)和电流 i(t)。

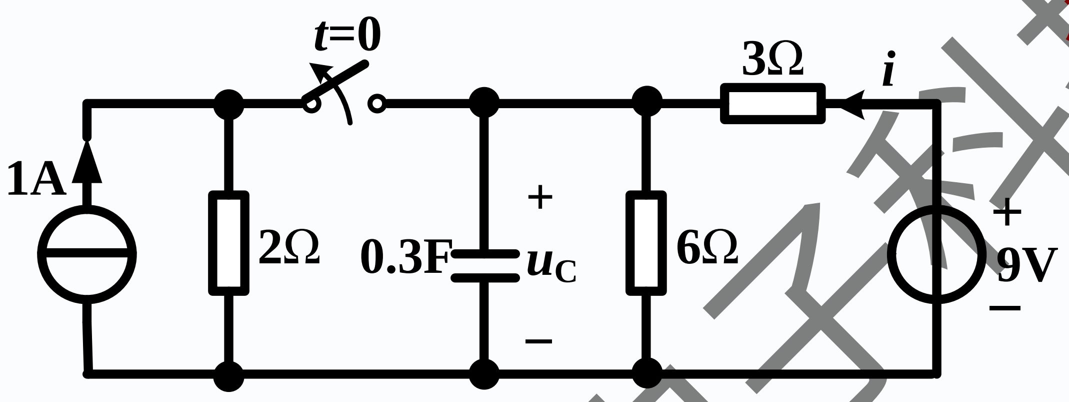


图2.6.3 例2.6.3电路图

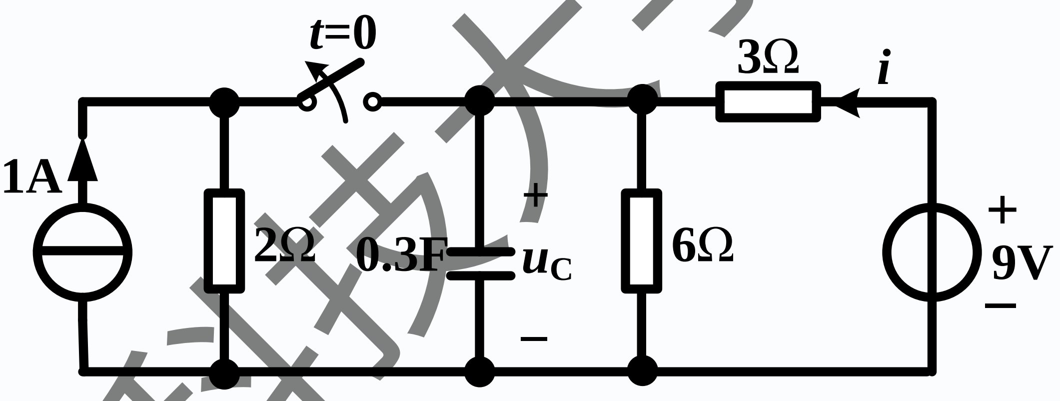
解：利用叠加原理求电容电压初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$= 1\times 2//3//6 + \frac{2//6}{3+2//6}\times 9$$

$$= 4(\text{V})$$

2.6 三要素法求一阶电路响应



稳态值为

$$u_C(\infty)=\frac{6}{6+3}\times 9=6(\text{V})$$

时间常数为

$$\tau=0.3\times 6//3=0.6(\text{s})$$

应用三要素公式得

$$u_C(t)=6-2e^{-\frac{10}{6}t}(\text{V})$$

$$i=\frac{9-u_C}{3}=1+\frac{2}{3}e^{-\frac{10}{6}t}(\text{A})$$

2.6 三要素法求一阶电路响应

【例2.6.4】 如图2.6.4所示电路，换路前电路已达稳态，t=0时开关闭合。求t>0时的u_C,i_L,及i_K。

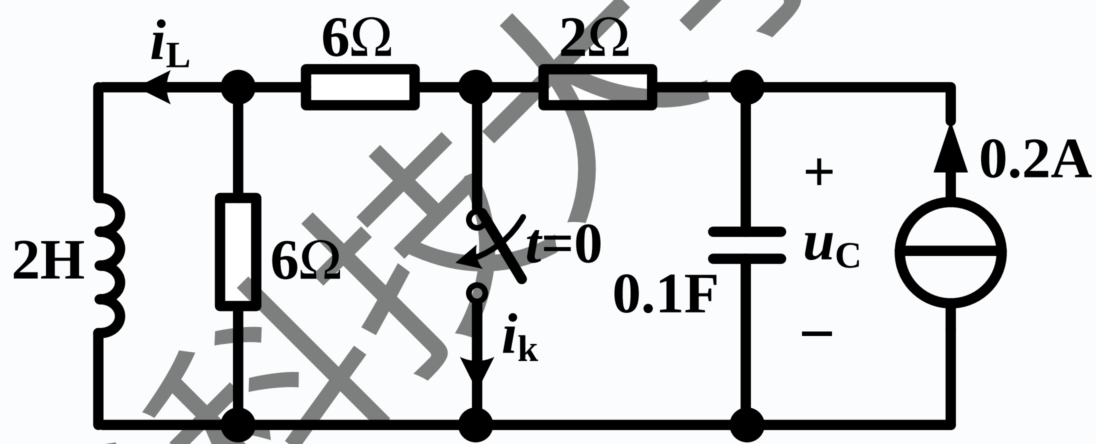


图2.6.4 例2.6.4电路图

解：(1) 应用三要素法求电感电流

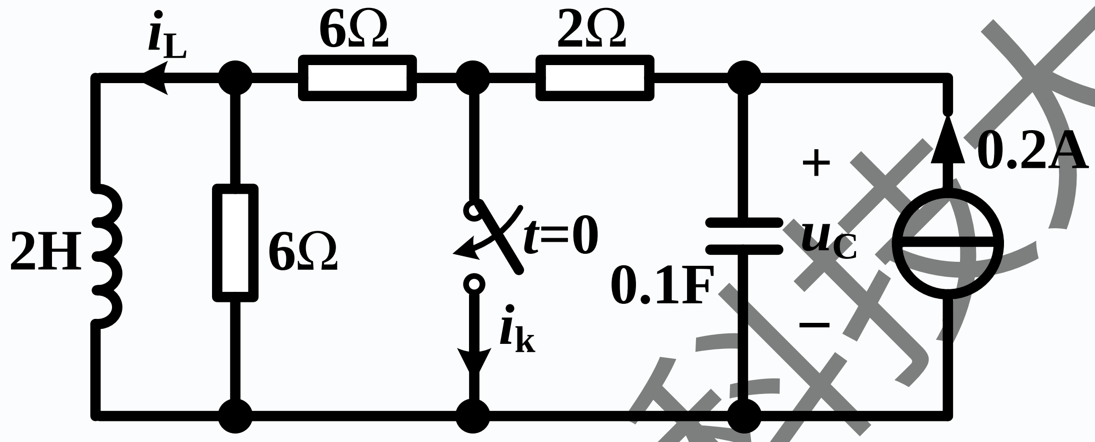
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.2(A)$$

$$i_L(\infty) = 0$$

$$\tau_L = \frac{2}{6//6} = \frac{2}{3}(s)$$

$$i_L(t) = 0.2e^{-1.5t}(A)$$

2.6 三要素法求一阶电路响应



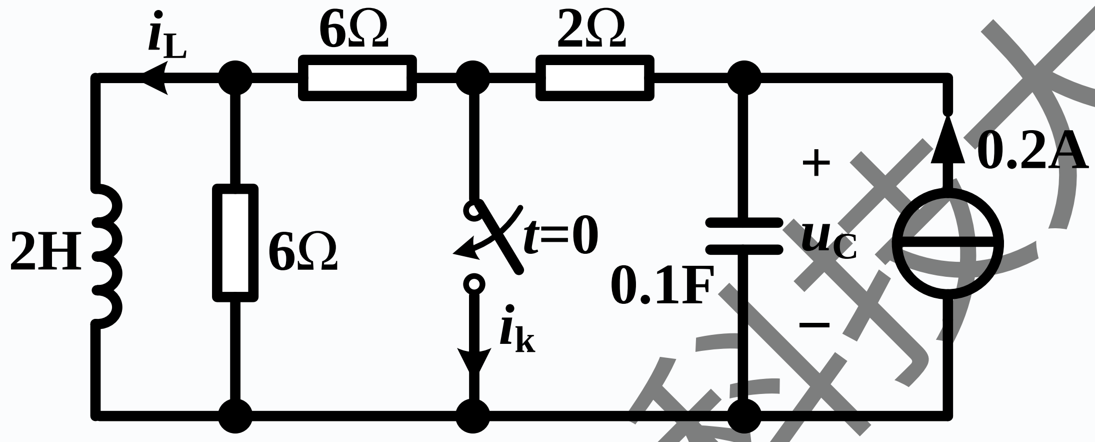
(2) 应用三要素法求电容电压

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.2\times(2+6) = 1.6(\text{V})$$

$$u_C(\infty) = 0.2\times 2 = 0.4(\text{V}) \qquad \tau_C = 0.1\times 2 = 0.2(\text{s})$$

$$u_C(t) = 0.4 + 1.2e^{-5t}(\text{V})$$

2.6 三要素法求一阶电路响应



(3) 用电压源$u_C(t)$代替电容，用电流源$i_L(t)$代替电感，求解i_K。

$$i_k(t)=\frac{u_C(t)}{2}-\frac{6}{6+6}\cdot i_L(t)=0.2+0.6e^{-5t}-0.1e^{-1.5t}\,(\mathrm{A})$$