# 应用离散数学

离散数学课程组

2014 年 1 月 17 日

# 谓词逻辑

# 谓词逻辑

1 个体词、谓词与量词

2 谓词公式及其解释

3 谓词公式的等价演算

4 谓词公式的推理演算

# 谓词逻辑

# 谓词逻辑

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 
- 
- 

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \to r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \to r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \to r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \land q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

## 问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为$p, q, r$,

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词；
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示；
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示；

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

- 苏格拉底是人；"苏格拉底"是个体词，a：苏格拉底
- 3是奇数；"3"是个体词，b:3

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词；
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示；
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示；

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人；“苏格拉底”是个体词；
2. 3是奇数；“3”是个体词；

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示;
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示;

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人; “苏格拉底”是个体词; $a$: 苏格拉底
2. $3$是奇数; “$3$”是个体词; $b$:3

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词；
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示；
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示；

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人；“苏格拉底”是个体词；$a$：苏格拉底
2. 3是奇数；“3”是个体词；$b$:3

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词；
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示；
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示；

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人；“苏格拉底”是个体词；$a$：苏格拉底
2. 3是奇数；“3”是个体词；$b$:3

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词；
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示；
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示；

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人；“苏格拉底”是个体词；$a$：苏格拉底
2. $3$是奇数；“$3$”是个体词；$b$:$3$

## 定义1 (个体词)

- 在简单命题中，描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元，用小写字母$a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots$表示;
- 不确定的个体词称为个体变元，用小写字母$x, y, \cdots, x_1, x_2, \cdots$表示;

## 例1 (分析下列语句中的个体词)

1. 苏格拉底是人;“苏格拉底”是个体词; $a$: 苏格拉底
2. 3是奇数;“3”是个体词; $b$:3

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为**个体域**;
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**;

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为**个体域**;
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**;

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

1. 苏格拉底是人; 谓词$P(x)$: $x$是人; $P(s)$
2. $3$是奇数; 谓词$Q(x)$: $x$是奇数; $Q(3)$

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为谓词。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

1. 苏格拉底是人; 谓词$P(x)$: $x$是人; $P(a)$
2. $3$是奇数; 谓词$Q(x)$:$x$是奇数; $Q(b)$

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0, 1\}$上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为**个体域**;
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**;

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

1. 苏格拉底是人；谓词$P(x)$：$x$是人；$P(a)$
2. $3$是奇数；谓词$Q(x)$:$x$是奇数；$Q(b)$

## 定义2（谓词）

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数；
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为**个体域**；
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**；

## 例2（分析下列语句中的个体词与谓词）

1. 苏格拉底是人；谓词$P(x)$：$x$是人；$P(a)$
2. $3$是奇数；谓词$Q(x)$:$x$是奇数；$Q(b)$

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为谓词。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数；
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为个体域；
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域；

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

1. 苏格拉底是人；谓词$P(x)$：$x$是人；$P(a)$
2. $3$是奇数；谓词$Q(x)$:$x$是奇数；$Q(b)$

## 定义2（谓词）

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0,1\}$上的函数；
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为**个体域**；
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**；

## 例2（分析下列语句中的个体词与谓词）

1. 苏格拉底是人；谓词$P(x)$：$x$是人；$P(a)$
2. 3是奇数；谓词$Q(x)$:$x$是奇数；$Q(b)$

## 定义2 (谓词)

- 在简单命题中，表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为谓词。通常用大写字母$P, Q, \cdots$表示。
- 谓词实际上是$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \to \{0, 1\}$上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合$D_i$被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

## 例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

1. 苏格拉底是人; 谓词$P(x)$: $x$是人; $P(a)$
2. 3是奇数; 谓词$Q(x)$:$x$是奇数; $Q(b)$

## 注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$元谓词不是命题;
- 只有当$n$元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

## 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

- 只有2是质数，4才是质数;
- 如果地球运于月亮，则太阳运于地球;
- 小王热爱自己的母亲;

## 注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$元谓词不是命题;
- 只有当$n$元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

## 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

1. 只有2是质数，4才是质数;
2. 如果地球重于月亮，则太阳重于地球;
3. 小王热爱自己的母亲;

## 注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$元谓词不是命题;
- 只有当$n$元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

## 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

1. 只有2是质数，4才是质数;
2. 如果地球重于月亮，则太阳重于地球;
3. 小王热爱自己的母亲;

## 注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$元谓词不是命题;
- 只有当$n$元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

## 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

1. 只有2是质数，4才是质数;
2. 如果地球重于月亮，则太阳重于地球;
3. 小王热爱自己的母亲;

## 注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$元谓词不是命题;
- 只有当$n$元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- *0*元谓词就是命题;

## 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

1. 只有*2*是质数，*4*才是质数;
2. 如果地球重于月亮，则太阳重于地球;
3. 小王热爱自己的母亲;

**定义3 (全称量词)**

设$D$是个体域,“对于$D$中的任意个体$x$”称为$D$上的**全称量词**，记为$\forall x$;

**注2 (全称量词的真值)**

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词,

$$\forall x P(x) = 1 : 对任意的x \in D, P(x)取值1$$

$$\forall x P(x) = 0 : 存在x \in D, P(x)取值0$$

**定义3 (全称量词)**

设$D$是个体域，“对于$D$中的任意个体$x$”称为$D$上的全称量词，记为$\forall x$;

**注2 (全称量词的真值)**

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词，

$$\forall xP(x)=1: 对任意的x\in D, P(x)取值1$$

$$\forall xP(x)=0: 存在x\in D, P(x)取值0$$

**定义3 (全称量词)**

设$D$是个体域，“对于$D$中的任意个体$x$”称为$D$上的**全称量词**，记为$\forall x$;

**注2 (全称量词的真值)**

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词，

$$\forall x P(x) = 1 : \text{对任意的} x \in D, P(x) \text{取值} 1$$

$$\forall x P(x) = 0 : \text{存在} x \in D, P(x) \text{取值} 0$$

**定义3 (全称量词)**

设$D$是个体域,“对于$D$中的任意个体$x$”称为$D$上的**全称量词**,记为$\forall x$;

**注2 (全称量词的真值)**

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词,

$$\forall x P(x) = 1 : \text{对任意的} x \in D, P(x) \text{取值} 1$$

$$\forall x P(x) = 0 : \text{存在} x \in D, P(x) \text{取值} 0$$

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$=$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x): x=1$，$Q(x): x=2$;

**注3 (有限个体域中全称量词的真值)**

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$=$$

**例4 (求下式的真值)**

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$，其中$D = \{1, 2\}$，谓词$P(x) : x = 1$，$Q(x) : x = 2$;

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\forall x P(x) = P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x):x=1$，$Q(x):x=2$；

**注3 (有限个体域中全称量词的真值)**

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\forall x P(x)}_{1} = P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)$$

**例4 (求下式的真值)**

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x): x=1$，$Q(x): x=2$；

### 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\forall x P(x)}_{1} = \underbrace{P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)}_{1}$$

### 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x): x=1$，$Q(x): x=2$；

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\forall xP(x)}_{0} = P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x):x=1$，$Q(x):x=2$;

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\forall x P(x)}_{0} = \underbrace{P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)}_{0}$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x)\vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x): x=1$，$Q(x): x=2$；

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$，其中$D = \{1, 2\}$，谓词$P(x) : x = 1$，$Q(x) : x = 2$;

## 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

## 例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$，其中$D=\{1,2\}$，谓词$P(x): x=1$，$Q(x): x=2$;

## 定义4 (存在量词)

设$D$是个体域,“在$D$中存在个体$x$”称为$D$上的**存在量词**,记为$\exists x$;

## 注4 (存在量词的真值)

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词,

$$\exists x P(x) = 1 : 存在x \in D, P(x)取值1$$

$$\exists x P(x) = 0 : 对任意的x \in D, P(x)取值0$$

## 定义4 (存在量词)

设$D$是个体域，“在$D$中存在个体$x$”称为$D$上的**存在量词**，记为$\exists x$;

## 注4 (存在量词的真值)

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词，

$$\exists x P(x) = 1 : 存在 x \in D, P(x) 取值1$$

$$\exists x P(x) = 0 : 对任意的 x \in D, P(x) 取值0$$

## 定义4 (存在量词)

设$D$是个体域, "在$D$中存在个体$x$" 称为$D$上的**存在量词**, 记为$\exists x$;

## 注4 (存在量词的真值)

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词,

$$\exists x P(x) = 1 : \text{存在} x \in D, P(x) \text{取值} 1$$

$$\exists x P(x) = 0 : \text{对任意的} x \in D, P(x) \text{取值} 0$$

## 定义4 (存在量词)

设$D$是个体域,“在$D$中存在个体$x$”称为$D$上的**存在量词**，记为$\exists x$;

## 注4 (存在量词的真值)

设$P(x)$是以$D$为个体域的一元谓词,

$$\exists x P(x) = 1: \text{存在} x \in D, P(x) \text{取值} 1$$

$$\exists x P(x) = 0: \text{对任意的} x \in D, P(x) \text{取值} 0$$

### 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$=$$

### 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1$，其中$D = \{0, 3\}$，谓词$P(x): x > 2$，$Q(x): x = 0$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$，其中$D = \{1, 2, 3\}$，谓词$P(x, y): x = y$;

**注5 (有限个体域中存在量词的真值)**

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

**例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)**

- $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge 1$，其中$D=\{0,3\}$，谓词$P(x):x>2$，$Q(x):x=0$;
- $\exists x\forall y P(x,y)$，其中$D=\{1,2,3\}$，谓词$P(x,y):x=y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \wedge 1$，其中$D = \{0, 3\}$，谓词$P(x) : x > 2$，$Q(x) : x = 0$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$，其中$D = \{1, 2, 3\}$，谓词$P(x, y) : x = y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{1}=P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x)\to Q(x))\wedge 1$，其中$D=\{0,3\}$，谓词$P(x): x>2$，$Q(x): x=0$;
- $\exists x\forall y P(x,y)$，其中$D=\{1,2,3\}$，谓词$P(x,y): x=y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{1} = \underbrace{P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)}_{1}$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x)\to Q(x))\wedge 1$，其中$D=\{0,3\}$，谓词$P(x):x>2$，$Q(x):x=0$;
- $\exists x\forall y P(x,y)$，其中$D=\{1,2,3\}$，谓词$P(x,y):x=y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{0} = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \wedge 1$，其中$D = \{0, 3\}$，谓词$P(x): x > 2$，$Q(x): x = 0$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$，其中$D = \{1, 2, 3\}$，谓词$P(x, y): x = y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{0} = \underbrace{P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)}_{0}$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x)\to Q(x))\wedge 1$，其中$D=\{0,3\}$，谓词$P(x): x>2$，$Q(x): x=0$;
- $\exists x\forall y P(x,y)$，其中$D=\{1,2,3\}$，谓词$P(x,y): x=y$;

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限个体域，则

$$\exists xP(x) = P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge 1$，其中$D=\{0,3\}$，谓词$P(x):x>2$，$Q(x):x=0$；
- $\exists x\forall yP(x,y)$，其中$D=\{1,2,3\}$，谓词$P(x,y):x=y$；

## 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$是有限个体域，则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$$

## 例5 (求下式的真值,P44-3(2,4,6),P44-4)

- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1$，其中$D = \{0, 3\}$，谓词$P(x) : x > 2$，$Q(x) : x = 0$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$，其中$D = \{1, 2, 3\}$，谓词$P(x, y) : x = y$;

**例6 (设个体域$D_1$：全体人类，$D_2$：全总个体域，分别在$D_1, D_2$下将下列命题符号化。)**

1.凡人都呼吸； 2.有的人用左手写字；

**例7 (将下列命题符号化)**

1. 所有的人都长黑头发；
2. 有的人登上过月球；
3. 没有人登上过火星；
4. 在美国留学的学生未必都是华人；

**例6 (设个体域$D_1$：全体人类，$D_2$：全总个体域，分别在$D_1, D_2$下将下列命题符号化。)**

*1.*凡人都呼吸；　*2.*有的人用左手写字；

**例7 (将下列命题符号化)**

1. 所有的人都长黑头发；
2. 有的人登上过月球；
3. 没有人登上过火星；
4. 在美国留学的学生未必都是华人；

## 例8 (将下列命题符号化)

1. 兔子比乌龟跑得快;
2. 有的兔子比所有乌龟跑得快;
3. 并不是所有兔子都比乌龟跑得快;
4. 不存在跑得同样快的两只兔子;

## 作业1 (P44-3(6)、P45-8(4,7,10))

## 例8 (将下列命题符号化)

1. 兔子比乌龟跑得快;
2. 有的兔子比所有乌龟跑得快;
3. 并不是所有兔子都比乌龟跑得快;
4. 不存在跑得同样快的两只兔子;

## 作业1 (P44-3(6)、P45-8(4,7,10))

## 定义5（项）

设$D_i, 1 \le i \le n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

## 定义6（原子公式）

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \le i \le n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

**定义5（项）**

设$D_i, 1 \le i \le n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的**项**是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \le i \le n$是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

**定义6（原子公式）**

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \le i \le n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是**原子公式**。

**定义5 (项)**

设$D_i, 1 \leq i \leq n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \leq i \leq n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

**定义6 (原子公式)**

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \leq i \leq n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

**定义5（项）**

设$D_i, 1 \le i \le n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

**定义6（原子公式）**

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \le i \le n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

### 定义5（项）

设$D_i, 1 \leq i \leq n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的**项** 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \leq i \leq n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

### 定义6（原子公式）

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \leq i \leq n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

**定义5（项）**

设$D_i, 1 \leq i \leq n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \leq i \leq n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

**定义6（原子公式）**

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \leq i \leq n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

## 定义5（项）

设$D_i, 1 \le i \le n$是个体变元$x_i$的个体域，则$D_i$的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. $D_i$中的个体常元和个体变元是相应于$D_i$的项；
2. 若$f$是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于$D_i$的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于$D_i$的项；
3. 所有相应于$D_i$的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

## 定义6（原子公式）

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是$n$元谓词，$t_i, 1 \le i \le n$是相应于个体域$D_i$的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. $0,1$是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A,B$是谓词公式，则$\neg A,\neg B,A\wedge B,A\vee B,A\to B,A\leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元，$A$是谓词公式，则$\forall xA,\exists xA$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. 0,1是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A,B$是谓词公式,则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元,$A$是谓词公式,则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. 0,1是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A, B$是谓词公式，则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元，$A$是谓词公式，则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. *0,1*是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A, B$是谓词公式，则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元，$A$是谓词公式，则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用*(1)*、*(2)*、*(3)*、*(4)*得到的符号串。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. *0,1*是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A, B$是谓词公式，则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元，$A$是谓词公式，则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. *0,1*是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若$A, B$是谓词公式，则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若$x$是个体变元，$A$是谓词公式，则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用*(1)*、*(2)*、*(3)*、*(4)*得到的符号串。

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

- $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
- $\forall x(Q(x) \to R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

### 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是**指导变元**，$A$是相应量词的**辖域**。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为**约束变元**。
- 不是约束变元的个体变元称为**自由变元**。

### 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y)\rightarrow Q(x)$
2. $\forall x(Q(x)\rightarrow \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))\wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \rightarrow Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \to Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \to \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x)) \land \exists xP(x,y)$

## 定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$是指导变元，$A$是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

## 例9 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \rightarrow Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

**定理1（换名规则）**

在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号，而公式的其余部分不变，则谓词公式的等价性不变。

**定理2（代替规则）**

在谓词公式中，将$A$中某个自由变元的所有出现用$A$中未出现的某个个体变元符号代替，公式的等价性不变。

**定理1（换名规则）**

在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号，而公式的其余部分不变，则谓词公式的等价性不变。

**定理2（代替规则）**

在谓词公式中，将$A$中某个自由变元的所有出现用$A$中未出现的某个个体变元符号代替，公式的等价性不变。

**定理1 (换名规则)**

在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号，而公式的其余部分不变，则谓词公式的等价性不变。

**定理2 (代替规则)**

在谓词公式中，将$A$中某个自由变元的所有出现用$A$中未出现的某个个体变元符号代替，公式的等价性不变。

**定理1（换名规则）**

在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号，而公式的其余部分不变，则谓词公式的等价性不变。

**定理2（代替规则）**

在谓词公式中，将$A$中某个自由变元的所有出现用$A$中未出现的某个个体变元符号代替，公式的等价性不变。

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \rightarrow \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \rightarrow \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$

   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$

2. $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$

   $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$

   $\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$

   $\forall x P(x, s) \rightarrow \exists y Q(t, y)$

3. $\forall x \exists y(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \vee \exists x R(x, y, z)$

   $\forall x \exists y(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \vee \exists x R(x, y, z)$

   $\forall x \exists y(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \vee \exists s R(s, t, z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \rightarrow \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \to \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \to \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \to \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

## 定义9 (解释)

谓词公式的解释$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号,指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号,指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号,指定一个具体的谓词。

## 定义9 (解释)

谓词公式的**解释**$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号，指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

## 定义9 (解释)

谓词公式的解释$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号，指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

**定义9 (解释)**

谓词公式的解释$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号，指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

**定义9 (解释)**

谓词公式的解释$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号，指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

## 定义9 (解释)

谓词公式的解释$I$有下面四个部分组成:

1. 非空个体域$D$;
2. 对$A$中的每个个体常元符号，指定$D$中的一个固定元素;
3. 对$A$中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对$A$中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

**例10 (对下列谓词公式，分别给出一个成真解释与成假解释)**

1. $\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$
2. $\forall xP(x) \rightarrow \exists x\forall yQ(x,y)$
3. $\forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y) \rightarrow R(f(x,y), g(x,y)))$

## 定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

## 定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \leq i \leq n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。
$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

**定义10 (代换实例)**

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的**代换实例**。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。
$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

**定理3 (谓词公式判定方法1)**

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

## 定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \leq i \leq n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

**定义10 (代换实例)**

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的**代换实例**。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

**定理3 (谓词公式判定方法1)**

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

## 定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，
$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的**代换实例**。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

**定义10 (代换实例)**

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

**定理3 (谓词公式判定方法1)**

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

**定义10 (代换实例)**

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \le i \le n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。
$\forall x (P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

**定理3 (谓词公式判定方法1)**

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

## 定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的$n$个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i, 1 \leq i \leq n$处处代换$A$中的$p_i$所得的谓词公式称为$A$的代换实例。

$P(x) \rightarrow Q(x)$、$\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$是$p \rightarrow q$ 的代换实例。

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$不是$p \rightarrow q$的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

## 例11 (判断下列谓词公式)

1. $(\neg\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow (\neg\exists x Q(x) \rightarrow \forall x P(x))$
2. $\forall x P(x) \rightarrow (\exists x \exists y Q(x,y) \rightarrow \forall x P(x))$
3. $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)) \wedge \exists x \forall y Q(x,y)$

可满足式的代换实例可能永真、可能永假、可能可满足。

### 例11 (判断下列谓词公式)

1. $(\neg\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \to (\neg\exists x Q(x) \to \forall x P(x))$
2. $\forall x P(x) \to (\exists x \exists y Q(x, y) \to \forall x P(x))$
3. $\neg(\forall x P(x) \to \exists x \forall y Q(x, y)) \land \exists x \forall y Q(x, y)$

可满足式的代换实例可能永真、可能永假、可能可满足。

## 谓词公式判定方法2-非形式化方法

### 例12 (判断下列谓词公式)

1. $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$
2. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
3. $\forall x (P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \forall x Q(x))$

## 谓词公式判定方法2-非形式化方法

### 例12 (判断下列谓词公式)

1. $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$
2. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
3. $\forall x (P(y) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(y) \rightarrow \forall x Q(x))$

## 练习2 (判断下列谓词公式)

1. $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \wedge \exists y Q(y)$
2. $\neg(P(x) \rightarrow (\forall y Q(x,y) \rightarrow P(x)))$
3. $P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$
4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

## 作业2 (P50-4(2,4)、6(3))

## 练习2 (判断下列谓词公式)

1. $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \wedge \exists y Q(y)$
2. $\neg(P(x) \rightarrow (\forall y Q(x,y) \rightarrow P(x)))$
3. $P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$
4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

## 作业2 (P50-4(2,4)、6(3))

**定义11 (等价)**

设$A, B$是两个谓词公式，如果在任何解释下，$A, B$具有相同的真值，则称$A, B$等价，记为$A = B$。

**定理4**

设$A, B$是两个谓词公式，则$A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$永真。

**定理5 (量词否定律)**

(1) $\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$，(2) $\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

**定义11 (等价)**

设$A, B$是两个谓词公式，如果在任何解释下，$A, B$具有相同的真值，则称$A, B$**等价**，记为$A = B$。

**定理4**

设$A, B$是两个谓词公式，则$A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$永真。

**定理5 (量词否定律)**

(1) $\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$，　(2) $\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

## 定义11 (等价)

设$A, B$是两个谓词公式，如果在任何解释下，$A, B$具有相同的真值，则称$A, B$等价，记为$A = B$。

## 定理4

设$A, B$是两个谓词公式，则$A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$永真。

## 定理5 (量词否定律)

$(1) \neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$, $(2) \neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

### 定义11（等价）

设$A, B$是两个谓词公式，如果在任何解释下，$A, B$具有相同的真值，则称$A, B$**等价**，记为$A = B$。

### 定理4

设$A, B$是两个谓词公式，则$A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$永真。

### 定理5（量词否定律）

$(1) \neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$, $\qquad (2) \neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

**定义11 (等价)**

设$A, B$是两个谓词公式，如果在任何解释下，$A, B$具有相同的真值，则称$A, B$**等价**，记为$A = B$。

**定理4**

设$A, B$是两个谓词公式，则$A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$永真。

**定理5 (量词否定律)**

$$(1)\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \qquad (2)\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$$

## 定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设$A, B$是谓词公式，$B$不包含个体变元$x$，则

1. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$
2. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$
3. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$
4. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$

**定理6 (量词辖域的收缩与扩展)**

设$A, B$是谓词公式，$B$不包含个体变元$x$，则

1. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$
2. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$
3. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$
4. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$

## 定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设$A, B$是谓词公式，$B$不包含个体变元$x$，则

1. $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$
2. $\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$
3. $\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$
4. $\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$

## 定理7（量词分配率）

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

## 问题2

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

## 定理7（量词分配率）

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

## 问题2

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

## 定理7（量词分配率）

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

## 问题2

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \stackrel{?}{=} \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \stackrel{?}{=} \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

## 定理7（量词分配率）

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

## 问题2

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \neq \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \stackrel{?}{=} \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

## 定理7（量词分配率）

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

## 问题2

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \neq \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \neq \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

## 定理8（量词交换律）

- $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y)$、$\exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$

## 例13（证明下列等价关系）

设$A(x)$, $B(x)$是谓词公式，$C$是不含个体变元$x$的谓词公式，证明

1. $\forall x(A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
2. $\exists x(A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
3. $\exists x(A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

## 作业3（P55-3(3,4)）

## 定理8（量词交换律）

- $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y)$、$\exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$

## 例13（证明下列等价关系）

设$A(x), B(x)$是谓词公式，$C$是不含个体变元$x$的谓词公式，证明

1. $\forall x(A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
2. $\exists x(A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
3. $\exists x(A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

## 作业3（P55-3(3,4)）

## 定理8 (量词交换律)

- $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y)$、$\exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$

## 例13 (证明下列等价关系)

设$A(x), B(x)$是谓词公式，$C$是不含个体变元$x$的谓词公式，证明

1. $\forall x(A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
2. $\exists x(A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
3. $\exists x(A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

## 作业3 (P55-3(3,4))

## 定理8（量词交换律）

- $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y)$、$\exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$

## 例13（证明下列等价关系）

设$A(x), B(x)$是谓词公式，$C$是不含个体变元$x$的谓词公式，证明

1. $\forall x(A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
2. $\exists x(A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
3. $\exists x(A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

## 作业3（P55-3(3,4)）

## 定义12 (推理演算)

设$A_1, \cdots, A_n, B$是谓词公式，如果对于$A_1, \cdots, A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1, \cdots, A_n$的逻辑结论，记为$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \rightarrow B$是永真式。

**定义12 (推理演算)**

设$A_1,\cdots,A_n,B$是谓词公式，如果对于$A_1,\cdots,A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1,\cdots,A_n$的**逻辑结论**，记为$A_1,\cdots,A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A=B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \rightarrow B$是永真式。

**定义12 (推理演算)**

设$A_1, \cdots, A_n, B$是谓词公式，如果对于$A_1, \cdots, A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1, \cdots, A_n$的逻辑结论，记为$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \to B$是永真式。

**定义12 (推理演算)**

设$A_1, \cdots, A_n, B$是谓词公式，如果对于$A_1, \cdots, A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1, \cdots, A_n$的逻辑结论，记为$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \to B$是永真式。

**定义12 (推理演算)**

设$A_1, \cdots, A_n, B$是谓词公式，如果对于$A_1, \cdots, A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1, \cdots, A_n$的**逻辑结论**，记为$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \rightarrow B$是永真式。

**定义12 (推理演算)**

设$A_1, \cdots, A_n, B$是谓词公式，如果对于$A_1, \cdots, A_n$都取值1的任何解释，$B$必定也取值1，则称$B$是前提$A_1, \cdots, A_n$的逻辑结论，记为$A_1, \cdots, A_n \Rightarrow B$，或$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$的充要条件是$A \rightarrow B$是永真式。

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$
4. $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

## 例14 (证明以下推理)

1. $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
3. $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \forall x\forall y \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & \forall y\forall x \arrow[dr] & \\
\exists y\forall x \arrow[d] & & & \exists x\forall y \arrow[d] \\
\forall x\exists y \arrow[dr] & & & \forall y\exists x \arrow[dl] \\
 & \exists x\exists y \arrow[r, leftrightarrow] & \exists y\exists x &
\end{tikzcd}
$$

## 定理9（推理规则）

1. US规则（全称量词消去规则）

## 例15（分析下面推导过程中的问题）

设个体域是实数集，$P(x,y): x+1=y$

$1.\forall x\exists yP(x,y)$　　$P$

$2.\exists yP(y,y)$　　$US_{(1)}$

## 定理9（推理规则）

1. US规则（全称量词消去规则）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求：$y$不在$A(x)$中以约束变元形式出现。

## 例15（分析下面推导过程中的问题）

设个体域是实数集，$P(x,y): x+1=y$

| | |
|---|---|
| $1.\forall x \exists y P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\exists y P(y,y)$ | $US_{(1)}$ |

## 定理9（推理规则）

1 US规则（全称量词消去规则）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求：$y$ 不在 $A(x)$ 中以约束变元形式出现。

## 例15（分析下面推导过程中的问题）

设个体域是实数集，$P(x,y): x+1=y$

| | |
|---|---|
| $1.\forall x \exists y P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\exists y P(y,y)$ | $US_{(1)}$ |

## 定理9 (推理规则)

1. US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: $y$不在$A(x)$中以约束变元形式出现。

## 例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, $P(x,y): x+1=y$

$$1.\forall x \exists y P(x,y) \qquad P$$

$$2.\exists y P(y,y) \qquad US_{(1)}$$

## 定理9（推理规则）

1 US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求：$y$不在$A(x)$中以约束变元形式出现。

## 例15（分析下面推导过程中的问题）

设个体域是实数集，$P(x,y): x+1=y$

| | |
|---|---|
| $1.\forall x \exists y P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\exists y P(y,y)$ | $US_{(1)}$ |

## 2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求：

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元；
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现；
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元；

## 2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求：

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元；
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现；
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元；

2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求:

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元;
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现;
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元;

2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求:

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元;
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现;
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元;

2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求:

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元;
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现;
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元;

2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求:

1. $a$是使$A(x)$为真的特定个体常元;
2. $a$不在$A(x)$和已导出的公式中出现;
3. 除$x$外，$A(x)$无其他自由变元;

## 例16 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集，$P(x):x$是正数，$Q(x):x$是负数，

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $4.Q(a)$ | $ES_{(3)}$ |
| $5.P(a)\wedge Q(a)$ | $T_{(2),(4)}$ |

## 例17 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集，$P(x,y): x>y$

| | |
|---|---|
| $1.\forall x \exists y P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\exists y P(z,y)$ | $US_{(1)}$ |
| $3.P(z,a)$ | $ES_{(2)}$ |

## 3 UG规则(全称量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)$中以约束变元形式出现；

**例18 (分析下面推导过程中的问题)**

设个体域是实数集，$P(x,y): x > y$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\forall x \exists x P(x,x)$ | $UG_{(1)}$ |

## 3 UG规则(全称量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)$中以约束变元形式出现；

**例18 (分析下面推导过程中的问题)**

设个体域是实数集，$P(x,y): x > y$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\forall x \exists x P(x,x)$ | $UG_{(1)}$ |

## 3 UG规则(全称量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)$中以约束变元形式出现；

例18 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集，$P(x,y): x > y$

$1.\exists x P(x,y)$ $\quad P$

$2.\forall x \exists x P(x,x)$ $\quad UG_{(1)}$

## 3 UG规则(全称量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)$中以约束变元形式出现；

**例18 (分析下面推导过程中的问题)**

设个体域是实数集，$P(x,y): x > y$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x,y)$ | $P$ |
| $2.\forall x \exists x P(x,x)$ | $UG_{(1)}$ |

## 4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)/A(a)$中以约束变元形式出现。

**例19 (证明苏格拉底三段论)**

- 所有的人都是要死的；
- 苏格拉底是人；
- 苏格拉底是要死的。

4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)/A(a)$中以约束变元形式出现。

例19 (证明苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求：$x$不在$A(y)/A(a)$中以约束变元形式出现。

**例19 (证明苏格拉底三段论)**

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

| 规则 | 表示 | 注意事项 |
|---|---|---|
| $US$ | $\forall x A(x) \Rightarrow A(a)$<br>$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ | $y$在$A(x)$中不约束 |
| $ES$ | $\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$ | 1.$a$满足$A(x)=1$<br>2.$a$不在$A(x)$和已有公式中出现<br>3.除$x$外，$A(x)$中无其他自由变元 |
| $UG$ | $A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$ | 1.$y$取遍整个个体域时，$A(y)=1$<br>2.$x$在$A(y)$中不约束 |
| $EG$ | $A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$<br>$A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$ | 1.$x$在$A(y)$中不约束<br>2.$x$在$A(a)$中不约束 |

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域,$P(x)$ : $x$是哺乳动物,$Q(x)$ : $x$是脊椎动物,$R(x)$ : $x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域,$P(x): x$是哺乳动物,$Q(x): x$是脊椎动物,$R(x): x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,$P(x):x$是哺乳动物,$Q(x):x$是脊椎动物,$R(x):x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)),\neg\forall x(P(x)\rightarrow R(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域,$P(x):x$是哺乳动物,$Q(x):x$是脊椎动物,$R(x):x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), \neg\forall x(P(x)\rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

## 例20（证明下列论断的正确性）

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物；
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物；
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域，$P(x): x$是哺乳动物，$Q(x): x$是脊椎动物，$R(x): x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域,$P(x): x$是哺乳动物,$Q(x): x$是脊椎动物,$R(x): x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

## 例20 (证明下列论断的正确性)

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解：设个体域是全总个体域,$P(x)$ : $x$是哺乳动物,$Q(x)$ : $x$是脊椎动物,$R(x)$ : $x$是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), \neg\forall x(P(x)\rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x)\rightarrow R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x)\vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a)\rightarrow Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a)\vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a)\wedge\neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a)\wedge\neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg\forall x(P(x)\to R(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\land\neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x)\to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x)\to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x)\lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a)\to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a)\lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a)\land\neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a)\land\neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x)\land\neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ |
| 2. | $\exists x \neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |

所以推断成立

$$\forall x(P(x)\to Q(x)), \neg\forall x(P(x)\to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x)\to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x)\to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x)\vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a)\to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a)\vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a)\wedge\neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a)\wedge\neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ |
| 2. | $\exists x \neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |

所以推断成立

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ |
| 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |

所以推断成立

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x \neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg\forall x(P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \land \neg R(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(P(x) \to R(x))$ | $P$ | 7. | $\forall x(P(x) \to Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x\neg(\neg P(x) \lor R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \to Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \lor R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \land \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \land \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x): x$是学生；$Q(x): x$是教师；$R(x): x$是骗子；$S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \land \forall y(Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \to \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x): x$是学生；$Q(x): x$是教师；
$R(x): x$是骗子；$S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x): x$是学生; $Q(x): x$是教师; $R(x): x$是骗子; $S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \land \forall y(Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \to \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师；
2. 任何一个学生都不相信骗子；
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x): x$是学生；$Q(x): x$是教师；
$R(x): x$是骗子；$S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x\forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x): x$是学生；$Q(x): x$是教师；$R(x): x$是骗子；$S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x): x$是学生; $Q(x): x$是教师; $R(x): x$是骗子; $S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x):x$是学生；$Q(x):x$是教师；$R(x):x$是骗子；$S(x,y):x$相信$y$。

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow S(x,y))),\forall x\forall y(P(x)\wedge R(y)\rightarrow\neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x):x$是学生; $Q(x):x$是教师; $R(x):x$是骗子; $S(x,y):x$相信$y$。

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\to S(x,y))),\forall x\forall y(P(x)\wedge R(y)\to\neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x): x$是学生; $Q(x): x$是教师; $R(x): x$是骗子; $S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow S(x,y))),\forall x\forall y(P(x)\wedge R(y)\rightarrow\neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$$

## 例21（证明下列论断的正确性）

1. 有些学生相信所有的老师；
2. 任何一个学生都不相信骗子；
3. 所以教师都不是骗子。

解：设个体域为全总个体域，$P(x):x$是学生；$Q(x):x$是教师；$R(x):x$是骗子；$S(x,y):x$相信$y$。

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow S(x,y))),\forall x\forall y(P(x)\wedge R(y)\rightarrow\neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x):x$是学生; $Q(x):x$是教师; $R(x):x$是骗子; $S(x,y):x$相信$y$。

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow S(x,y))),\forall x\forall y(P(x)\wedge R(y)\rightarrow\neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解:设个体域为全总个体域,$P(x): x$是学生;$Q(x): x$是教师;$R(x): x$是骗子;$S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x): x$是学生; $Q(x): x$是教师; $R(x): x$是骗子; $S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

## 例21 (证明下列论断的正确性)

1. 有些学生相信所有的老师;
2. 任何一个学生都不相信骗子;
3. 所以教师都不是骗子。

解: 设个体域为全总个体域, $P(x): x$是学生; $Q(x): x$是教师; $R(x): x$是骗子; $S(x,y): x$相信$y$。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x(Q(x) \to \neg R(x))$$

## 练习3 (P62-6(2,3))

1. $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists xP(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists xP(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \to (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

# 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \land R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \land R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \land R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \land R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1. $\forall x(P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \land R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \land R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \land R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \land R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1. $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \to (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习3 (P62-6(2,3))

1 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x P(x)$ | $P$ |
| $2.P(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$ | $P$ |
| $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$ | $US_{(3)}$ |
| $5.Q(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.R(a)$ | $T_{(5)}$ |
| $7.P(a) \wedge R(a)$ | $T_{(2,6)}$ |
| $8.\exists x(P(x) \wedge R(x))$ | $EG_{(8)}$ |

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x\neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x\neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1 $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习4

1 $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x Q(x)$ | $P$ |
| $2.\forall x \neg Q(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\neg Q(y)$ | $US_{(2)}$ |
| $4.\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $P$ |
| $5.P(y) \vee Q(y)$ | $US_{(5)}$ |
| $6.P(y)$ | $T_{(3,5)}$ |
| $7.\exists x P(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ 附加前提

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ 附加前提
2. $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ $E_1$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \lor B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \land \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \land \neg B(a)$ | $ES_3$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x\neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ |

## 例22 (证明下列推理)

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x\neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ |
| 8. | $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ | P |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 | | | |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ | 8. | $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ | P |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ | 9. | $\forall x B(x)$ | $T_{7,8}$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ | | | |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ | | | |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ | | | |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ | | | |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 | | | |
| 2. | $\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ | 8. | $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ | P |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ | 9. | $\forall x B(x)$ | $T_{7,8}$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ | 10. | $B(a)$ | $US_9$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ | | | |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ | | | |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ | | | |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\neg \forall x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 | | | |
| 2. | $\exists x \neg (\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ | 8. | $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ | P |
| 3. | $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ | 9. | $\forall x B(x)$ | $T_{7,8}$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ | 10. | $B(a)$ | $US_9$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ | 11. | $B(a) \wedge \neg B(a)$ | $T_{5,10}$ |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ | | | |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ | | | |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\forall x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\exists x\neg(\neg A(x) \vee B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_2$ |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | $ES_3$ |
| 5. | $\neg B(a)$ | $T_4$ |
| 6. | $A(a)$ | $T_4$ |
| 7. | $\exists x A(x)$ | $EG_6$ |
| 8. | $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ | P |
| 9. | $\forall x B(x)$ | $T_{7,8}$ |
| 10. | $B(a)$ | $US_9$ |
| 11. | $B(a) \wedge \neg B(a)$ | $T_{5,10}$ |
| 12. | $0$ | $E_{11}$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ P

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ P
2. $A(a) \rightarrow B(a)$ $US_1$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(a) \to B(a)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(a) \to B(a)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |
| 4. | $A(a)$ | $US_3$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(a) \to B(a)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |
| 4. | $A(a)$ | $US_3$ |
| 5. | $B(a)$ | $T_{2,4}$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(a) \to B(a)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |
| 4. | $A(a)$ | $US_3$ |
| 5. | $B(a)$ | $T_{2,4}$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $UG_5$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\forall x(A(x) \to B(x))$ P

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

1. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ P
2. $A(y) \rightarrow B(y)$ $US_1$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$$
$$\Rightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$ | P |
| 2. | $A(y)\rightarrow B(y)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall xA(x)$ | 附加前提 |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\forall x(A(x) \to B(x))$　P
2. $A(y) \to B(y)$　$US_1$
3. $\forall x A(x)$　附加前提
4. $A(y)$　$US_3$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(y) \to B(y)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |
| 4. | $A(y)$ | $US_3$ |
| 5. | $B(y)$ | $T_{2,4}$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A(x) \to B(x))$ | P |
| 2. | $A(y) \to B(y)$ | $US_1$ |
| 3. | $\forall x A(x)$ | 附加前提 |
| 4. | $A(y)$ | $US_3$ |
| 5. | $B(y)$ | $T_{2,4}$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $UG_5$ |

## 例22 (证明下列推理)

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ 附加前提

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ 附加前提
2. $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$ $E_1$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

1. $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ 附加前提
2. $\forall x(A(x) \land \neg B(x))$ $E_1$
3. $\forall xA(x) \land \forall x\neg B(x)$ $E_2$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall x A(x)$ | $T_3$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall xA(x) \wedge \forall x\neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall xA(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall xA(x) \to \forall xB(X)$ | $P$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall x A(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall x A(x) \to \forall x B(X)$ | $P$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $T_{4,5}$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall x A(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall x A(x) \to \forall x B(X)$ | $P$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $T_{4,5}$ |
| 7. | $B(y)$ | $US_6$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

1. $\neg\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ 附加前提
2. $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$ $E_1$
3. $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ $E_2$
4. $\forall x A(x)$ $T_3$
5. $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$ $P$
6. $\forall x B(x)$ $T_{4,5}$
7. $B(y)$ $US_6$
8. $\forall x \neg B(x)$ $T_3$

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall x A(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall x A(x) \to \forall x B(X)$ | $P$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $T_{4,5}$ |
| 7. | $B(y)$ | $US_6$ |
| 8. | $\forall x \neg B(x)$ | $T_3$ |
| 9. | $\neg B(y)$ | $US_8$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x(A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall xA(x) \wedge \forall x\neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall xA(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall xA(x) \to \forall xB(X)$ | $P$ |
| 6. | $\forall xB(x)$ | $T_{4,5}$ |
| 7. | $B(y)$ | $US_6$ |
| 8. | $\forall x\neg B(x)$ | $T_3$ |
| 9. | $\neg B(y)$ | $US_8$ |
| 10. | $B(y) \wedge \neg B(y)$ | $T_{7,9}$ |

## 例22（证明下列推理）

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2. | $\forall x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | $E_1$ |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_2$ |
| 4. | $\forall x A(x)$ | $T_3$ |
| 5. | $\forall x A(x) \to \forall x B(X)$ | $P$ |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $T_{4,5}$ |
| 7. | $B(y)$ | $US_6$ |
| 8. | $\forall x \neg B(x)$ | $T_3$ |
| 9. | $\neg B(y)$ | $US_8$ |
| 10. | $B(y) \wedge \neg B(y)$ | $T_{7,9}$ |
| 11. | $0$ | $E_{10}$ |

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \rightarrow B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \to B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \to B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

## 练习5 (P62-5(1,2))

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

| | |
|---|---|
| $1.\exists x A(x)$ | 附加前提 |
| $2.A(a)$ | $ES_{(1)}$ |
| $3.\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | $P$ |
| $4.A(a) \rightarrow B(a)$ | $US_{(3)}$ |
| $5.B(a)$ | $T_{(2,4)}$ |
| $6.\exists x B(x)$ | $EG_{(6)}$ |

所以推理成立。

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| 1.$\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| 2.$\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| 3.$\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| 4.$\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| 5.$\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| 6.$\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| 7.$\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| 8.$\neg \exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| 9.0 | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1. \neg \exists x (A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2. \forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3. \forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4. \forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5. \exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6. \exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7. \exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8. \neg \exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9. 0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1. \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$ | 附加前提 |
| $2. \forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3. \forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4. \forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5. \exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6. \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7. \exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8. \neg \exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9. 0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

| | |
|---|---|
| $1.\neg\exists x(A(x) \to B(x))$ | 附加前提 |
| $2.\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | $E_{(1)}$ |
| $3.\forall x A(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $4.\forall x \neg B(x)$ | $T_{(2)}$ |
| $5.\exists x A(x)$ | $T_{(3)}$ |
| $6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ | $P$ |
| $7.\exists x B(x)$ | $T_{(6,7)}$ |
| $8.\neg\exists x B(x)$ | $E_{(4)}$ |
| $9.0$ | $T_{(7,8)}$ |

## 练习6 (P62-5(3,4),6(4))