§1.1　命题和逻辑连接词

习题 1.1

1. 下列哪些语句是命题，在是命题的语句中，哪些是真命题，哪些是假命题，哪些命题的真值现在还不知道？

（1）中国有四大发明。　　（2）你喜欢计算机吗？

（3）地球上海洋的面积比陆地的面积大。　　（4）请回答这个问题！

（5）$2+3=6$。　　（6）$x+7<10$。

（7）园的面积等于半径的平方乘以圆周率。　　（8）只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数。

（9）若$x=y$，则$x+z=y+z$。　　（10）外星人是不存在的。

（11）2020 年元旦下大雪。　　（12）如果$1+1=3$，则血就不是红的。

解　是真命题的有：(1)、(3)、(7)、 (9) 、(12) ；是假命题的有：(5)、 (8) ；是命题但真值现在不知道的有： (10)、 (11)；不是命题的有：(2)、(4)、(6)。

2. 令p、q为如下简单命题：p：气温在零度以下。q：正在下雪。用p、q和逻辑联接词符号化下列复合命题。

（1）气温在零度以下且正在下雪。

（2）气温在零度以下，但不在下雪。

（3）气温不在零度以下，也不在下雪。

（4）也许在下雪，也许气温在零度以下，也许既下雪气温又在零度以下。

（5）若气温在零度以下，那一定在下雪。

（6）也许气温在零度以下，也许在下雪，但如果气温在零度以上就不下雪。

（7）气温在零度以下是下雪的充分必要条件。

解　（1）$p\wedge q$；（2）$p\wedge\neg q$；（3）$\neg p\wedge\neg q$；（4）$p\vee q$；
（5）$p\to q$；（6）$(p\vee q)\wedge(\neg p\to\neg q)$；（7）$p\leftrightarrow q$。

3. 令原子命题p：你的车速超过每小时 120 公里，q：你接到一张超速罚款单，用p、q和逻辑联接词符号化下列复合命题。

（1）你的车速没有超过每小时 120 公里。

（2）你的车速超过了每小时 120 公里，但没接到超速罚款单。

（3）你的车速若超过了每小时 120 公里，将接到一张超速罚款单。

（4）你的车速不超过每小时 120 公里，就不会接到超速罚款单。

（5）你接到一张超速罚款单，但你的车速没超过每小时 120 公里。

（6）只要你接到一张超速罚款单，你的车速就肯定超过了每小时 120 公里。

解　（1）$\neg p$；（2）$p\wedge\neg q$；（3）$p\to q$；（4）$\neg p\to\neg q$；

（5）$q \wedge \neg p$；（6）$q \to p$。

4. 判断下列各蕴涵式是真是假。

（1）若$1+1=2$，则$2+2=4$。 T （2）若$1+1=2$，则$2+2=5$。 F

（3）若$1+1=3$，则$2+2=4$。 T （4）若$1+1=3$，则$2+2=5$。 T

（5）若猪会飞，那么$2+2=4$。 T （6）若猪会飞，那么$2+2=5$。 T

（7）若$1+1=3$，猪就会飞。 T （8）若$1+1=2$，猪就会飞。 F

解 （1）T；（2）F；（3）T；（4）T；（5）T；（6）T；（7）T；（8）F。

5. 对下列各语句，说一说其中的“或”是“同或”与“异或”时它们的含义并符号化。你认为语句想表示的是哪个“或”？

（1）要求有使用过 C++或 Java 的经验。

（2）你必须持护照或选民登记卡才能入境。

（3）要选修离散数学课，你必须已经选修过微积分课或高等数学课。

（4）从通用公司购买一部新车，你就能得到 5000 元现金回扣，或利率为 4%的低息汽车贷款。

（5）若下雪超过 20 公分或温度低于$-10°C$，学校就停课。

解 （1）“同或“的含义：要求有使用过 C++或 Java 或两者都使用过的经验；“异或“的含义：要求有使用过 C++或 Java 的但不能有两者都使用过的经验。

令原子命题p：要求有使用 C++的经验，q：要求有使用 Java 的经验，则同或和异或分别符号化为：$p \vee q$和$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

我认为该语句想表示的是“同或”。

（2）“同或“的含义：你必须持护照或选民登记卡或两者都持有才能入境；“异或“的含义：你必须持护照或选民登记卡但不是两者都持有的才能入境。

令原子命题p：你必须持护照才能入境，q：你必须持选民登记卡才能入境，则同或和异或分别符号化为：$p \vee q$和$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

我认为该语句想表示的是“同或”。

（3）“同或“的含义：要选修离散数学课，你必须已经选修过微积分课或高等数学课或者两者都选修过；“异或“的含义：要选修离散数学课，你必须已经选修过微积分课或高等数学课但不是两们都选修过。

令原子命题p：要选修离散数学课，你必须已经选修过微积分课，q：要选修离散数学课，你必须已经选修过高等数学课，则同或和异或分别符号化为：$p \vee q$和$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

我认为该语句想表示的是“同或”。

（4）“同或“的含义：从通用公司购买一部新车，你就能得到 5000 元现金回扣，或利率为 4%的低息汽车贷款；或者两者都得到；“异或“的含义：从通用公司购买一部新车，你就能得到 5000 元现金回扣，或利率为 4%的低息汽车贷款，但不能两者都得。

令原子命题 p：从通用公司购买一部新车，你就能得到 5000 元现金回扣，q：从通用公司购买一部新车，你就能得到利率为 4%的低息汽车贷款，则同或和异或分别符号化为：$p \vee q$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

我认为该语句想表示的是“异或”。

（5）“同或“的含义：若下雪超过 20 公分或温度低于 $-10°C$ 或两者都达到，学校就停课；“异或“的含义：若下雪超过 20 公分或温度低于 $-10°C$ 且不是两者都达到，学校就停课。

令原子命题 p：若下雪超过 20 公分，学校就停课，q：若温度低于 $-10°C$，学校就停课，则同或和异或分别符号化为：$p \vee q$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

我认为该语句想表示的是“同或”。

6. 给出下列各蕴涵形式命题的逆命题、否命题和逆否命题。

（1）如果今天下雪，我明天就去滑雪。

（2）只要有测验，我就来上课。

（3）只有当正整数没有 1 和它自己以外的因数时，它才是质数。

解　（1）逆命题：如果我明天去滑雪，就今天会下雪；否命题：如果今天不下雪，我明天就不去滑雪；逆否命题：如果我明天没去滑雪，今天就没下雪。

（2）逆命题：我来上课，就有测验；否命题：只要没有测验，我就不来上课；逆否命题：我不来上课，就没有测验。

（3）逆命题：正整数是质数，则它没有 1 和它自己以外的因数；否命题：只有当正整数有 1 和它自己以外的因数时，它才不是质数；逆否命题：正整数不是质数，则它有 1 和它自己以外的因数。

7. 求下列各个位串的按位 NOT；各对位串的按位 AND 和按位 OR：

（1）1 011 110，0 100 001　　（2）11 110 000，10 101 010

（3）0 001 110 001，1 001 001 000　　（4）1 111 111 111，0 000 000 000

解　（1）按位 NOT 分别是 0 100 001，1 011 110；按位 OR 是 111 1111；按位 AND 是 000 0000；

（2）按位 NOT 分别是 00 001 111，01 010 101；按位 OR 是 11 111 010；按位 AND 是 10 100 000；

（3）按 NOT 分别是 1 110 001 110，0 110 110 111；按位 OR 是 10 0111 1001；按位 AND

是 00 0100 0000；

（4）按 NOT 分别是 0 000 000 000，1 111 111 111；按位 OR 是 11 1111 1111；按位 AND 是 00 0000 0000；

8. 你会用什么样的布尔检索寻找关于新泽西州海滩的网页？如果你想找关于泽西岛（在英吉利海峡）海滩的网页呢？

解 寻找关于新泽西州海滩网页的布尔检索为："NEW" AND "JERSEY" AND "BEACHES"，寻找关于泽西岛（在英吉利海峡）海滩网页的布尔检索为（"JERSEY" AND "BEACHES"） AND （ NOT "NEW"）。

9. 你会用什么样的布尔检索寻找关于徒步旅行西弗吉尼亚的网页？如果你想找关于徒步旅行弗吉尼亚的网页，而不是西弗吉尼亚呢？

解 寻找关于徒步旅行西弗吉尼亚网页的布尔检索为："WALKING TOUR" AND "VIRGINIA" AND "WEST"，寻找关于徒步旅行弗吉尼亚的布尔检索为（"WALKING TOUR" AND "VIRGINIA"） AND （ NOT "WEST"）。

习题 1.2

1. 设 p 、q 和 r 为如下简单命题：p ：$2+3=5$ 。q ：大熊猫产在中国。r ：复旦大学在广州。求下列复合命题的真值。

（1）$(p \leftrightarrow q) \to r$　　（2）$(r \to (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$

（3）$\neg r \to (\neg p \vee \neg q \vee r)$　　（4）$(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \to r)$

解　因为 p 、q 和 r 分别取 1，1，0。所以

（1）$(p \leftrightarrow q) \to r = (1 \leftrightarrow 1) \to 0 = 0$ ；

（2）$(r \to (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p = (0 \to (1 \wedge 1)) \leftrightarrow \neg 1 = 0$；

（3）$\neg r \to (\neg p \vee \neg q \vee r) = \neg 0 \to (\neg 1 \vee \neg 1 \vee 0) = 0$；

（4）$(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \to r) = (1 \wedge 1 \wedge \neg 0) \leftrightarrow ((\neg 1 \vee \neg 1) \to 0) = 1$。

2. 构造下列复合命题的真值表，并由此判断它们是否永真式、永假式和可满足式。

（1）$p \to \neg q$　　（2）$\neg p \leftrightarrow q$

（3）$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$　　（4）$(p \to \neg q) \wedge (\neg p \to \neg q)$

（5）$(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$　　（6）$(p \leftrightarrow \neg q) \vee (\neg p \leftrightarrow \neg q)$

解　（1）是可满足式。

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

（2）是可满足式。

p	q	$\neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

（3）是永真式。

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \to q$	$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

（4）是可满足式。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to \neg q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0

（5）是永假式。

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \to \neg q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

（6）是永真式。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \vee (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

3. 构造下列复合命题的真值表，并由此判断它们是否永真式、永假式和可满足式。

（1）$(p \leftrightarrow q) \to r$

（2）$(r \to (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$

（3）$\neg r \to (\neg p \vee \neg q \vee r)$

（4）$(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \to r)$

解 （1）是可满足式。

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \to r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

（2）是可满足式。

p	q	r	$p \wedge q$	$r \to (p \wedge q)$	$\neg p$	$(r \to (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

（3）是可满足式。

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	$\neg r \to (\neg p \vee \neg q \vee r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

（4）是可满足式。

p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p \vee \neg q$	$(\neg p \vee \neg q) \to r$	$(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \to r)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0

4. 用真值表证明下面的等价式

（1）$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

（2）$A \wedge (A \vee B) = A$

（3）$A \to B = \neg A \vee B$

（4）$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$

（5）$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

解 （1）

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

（2）

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

（3）

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

（4）

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$A \leftrightarrow B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

（5）

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

5. 只使用命题变元 p 和 q 能构造多少不同的命题公式真值表？

解　能构造出 16（2 的 4 次方）种不同的命题公式真值表。

6. 用等价演算法证明下面的等价式

（1）$p = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

（2）$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) = (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

（3）$p \to (q \to p) = \neg p \to (p \to \neg q)$

（4）$\neg(p \leftrightarrow q) = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

（5）$(p \to q) \wedge (p \to r) = p \to (q \wedge r)$

（6）$(p \to r) \wedge (q \to r) = (p \vee q) \to r$

（7）$p \to (q \to r) = (p \wedge q) \to r$

（8）$p \to (q \to r) = q \to (p \to r)$

解 （1）右边$= (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) = p \wedge (q \vee \neg q) = p \wedge 1 = p$=左边

（2） 左边$=(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$= (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)$

$= 1 \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge 1$

$= (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$= (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

=右边

（3） 左边$=p \to (q \to p) = \neg p \vee (\neg q \vee p)$=1

右边$= \neg p \to (p \to \neg q) = p \vee (\neg p \vee \neg q)$=1

所以 左边=右边

（4） 左边$=\neg(p \leftrightarrow q)$

$=\neg((p \to q) \wedge (q \to p))$

$= \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$

$= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

$= (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$

$= (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$=右边

（5） 左边$=(p \to q) \wedge (p \to r)$

$=(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

$= \neg p \vee (q \wedge r)$

$= p \to (q \wedge r)$=右边

（6） 左边$=(p \to r) \wedge (q \to r)$

$=(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$=(\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$=\neg(p \vee q) \vee r$

$= (p \vee q) \to r$=右边

（7） 左边$=p \to (q \to r) = \neg p \vee (\neg q \vee r)$

右边$=(p \wedge q) \rightarrow r = \neg(p \wedge q) \vee r = \neg p \vee \neg q \vee r$

所以　　左边＝右边

（8）　左边$= p \rightarrow (q \rightarrow r) = \neg p \vee (\neg q \vee r)$

右边$= q \rightarrow (p \rightarrow r) = \neg q \vee (\neg p \vee r)$

所以　　左边＝右边

下面 4 道题是智力游戏题，解题时可以先把语句翻译成命题公式，再利用其成真赋值进行求解。

7. 边远村庄的每个人要么总说真话，要么总说谎话。对旅游者的问题，村民要么回答“是”，要么回答“不”。假定你在这一地区旅游，走到了一个岔路口，一条岔路通向你想去的遗址，另一岔路通向丛林深处。此时恰有一村民站在岔路口，问村民什么样的一个问题就能决定走那条路？

解 问“如果我问你右边的路是否通向遗址，你会说‘是’，对吗？”，如果回答“是”，则右边的路通向遗址，否则左边的路通向遗址，具体分析如下：

（1）被问者总说真话且回答“对”。则右边的路通向遗址。

（2）被问者总说真话且回答“不对”。则左边的路通向遗址。

（3）被问者总说谎话且回答“对”。因为是说谎者，所以实际上他会回答“不是”；又因为是说谎者，他回答‘不是’，表明右边的路通向遗址。

（4）被问者总说谎话且回答“不对”。因为是说谎者，所以实际上他会回答“是”；又因为是说谎者，他回答‘是’，表明右边的路不通向遗址。

现在假设用 p 表示被问的人总说真话，q 表示被问的人回答“对”，r 表示如果我问右边的路是否通向遗址，回答‘是’，s 表示右边的路通向遗址，则根据以上分析我们有如下表所示的真值表。

p	q	r	s
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

这里，r 和 s 都不是独立的命题变元，可以看成命题 p，q 的逻辑表达式，即

$$r = p \leftrightarrow q, \qquad s = p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

8. 一个探险者被几个吃人者抓住了。有两种吃人者：总是说谎的和永不说谎的。除非探险者能判断出一位指定的吃人者是说谎者还是说真话者，否则就要被吃人者烤了吃。探险者只被允许问这位吃人者一个问题。

（1）解释为什么问："你说谎吗？"是不行的。

（2）找一个问题，使探险者可以用来判断该吃人者是说谎者还是说真话者。

解 （1） 略

（2）问"如果我问你是否是说谎者，你会说'是'，对吗？"，如果回答"是"，则是说谎者，否则不是说谎者。

9. 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁不可能都说真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的理由。

解 设 p：男管家说的是真话；q：厨师说的是真话；r：园丁说的是真话；s：杂役说的是真话。

则有 $p \to q = 1$，$q \wedge r = 0$，$r \vee s = 1$，$s \to \neg q = 1$。

若 $p = 1$，根据 $p \to q = 1$ 得 $q = 1$，再根据 $q \wedge r = 0$ 得 $r = 0$，再根据 $r \vee s = 1$ 得 $s = 1$，与 $s \to \neg q = 1$ 矛盾。

若 $p = 0$，根据 $p \to q = 1$ 得 $q = 1$ 或 $q = 0$。

若 $p = 0$，$q = 1$，根据 $q \wedge r = 0$ 得 $r = 0$，再根据 $r \vee s = 1$ 得 $s = 1$，与 $s \to \neg q = 1$ 矛盾。

若 $p = 0$，$q = 0$，根据 $q \wedge r = 0$ 得 $r = 1$ 或 $r = 0$。

若 $p = 0$，$q = 0$，$r = 1$，根据 $r \vee s = 1$ 得 $s = 1$ 或 $s = 0$，都 $s \to \neg q = 1$ 相容。

若 $p = 0$，$q = 0$，$r = 0$，根据 $r \vee s = 1$ 得 $s = 1$，与 $s \to \neg q = 1$ 相容。

从以上分析可以可以判定男管家和厨师说谎，但不能判断究竟是园丁还是杂役说真话。

10. 四个朋友被认定为非法进入某计算机系统的嫌疑人。他们已对调查员作了陈述.。爱丽丝说"卡诺斯干的"，约翰说"我没干"，卡诺斯说"黛安娜干的"，黛安娜说"卡诺斯说是我干的，他说谎"。

（1）如果调查员知道四个嫌疑人中恰有一人说真话，那么谁非法进入了计算机系统？说明理由。

（2）如果调查员知道四个嫌疑人中恰有一人说慌，那么谁非法进入了计算机系统？说

明理由。

解 设 p：卡诺斯干的（爱丽丝说）；q：我没干（约翰说）；r：黛安娜干的（卡诺斯说）；s：卡诺斯说是我干的，他说谎（黛安娜说）。

（1）根据题意，有

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) = 1$$

若 $p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s = 1$，则有 $p = 1$，$\neg q = 1$，这表明既是卡诺斯干的，又是约翰干的，矛盾。

若 $\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s = 1$，则有 $\neg p = 1$，$q = 1$，$\neg r = 1$，这表明既不是卡诺斯干的，又不是约翰干的，也不是黛安娜干的，而只能是爱丽丝干的，但这与 $\neg s = 1$ 矛盾。

若 $\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s = 1$，则有 $r = 1$，$\neg q = 1$，这表明既是黛安娜干的，又是约翰干的，矛盾。

若 $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s = 1$，则有 $\neg q = 1$，这表明是约翰干的，这与 $\neg p = 1$，$\neg r = 1$，$s = 1$ 相容。

所以是约翰非法进入了计算机系统。

（2）略

习题 1.3

1. 下列命题公式哪些是析取范式哪些是合取范式？

（1）$(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$　　（2）$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

（3）$(\neg p \wedge \neg r) \vee q$　　（4）$(p \vee q) \wedge \neg q$

（5）$\neg p \vee q$　　（6）$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

（7）$\neg p$　　（8）q

（9）1　　（10）0

解　是析取范式的有：(1)、(3)、(5)、(6)、(7)、 (8)、(9)、(10)；是合取范式有：(2)、(4)、(5)、(6)、(7)、 (8)、(9)、(10)。

2. 在下列由 3 个命题变元 p、q、r 组成的命题公式中，指出哪些是标准析取范式哪些是标准合取范式？

（1）$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$　　（2）$(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

（3）$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee q$　　（4）$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$

（5）$\neg p \vee q \vee \neg r$　　（6）$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

（7）1　　（8）0

解　是标准析取范式的有：(1)、(6)、(8)；是标准合取范式的有：(2)、(5)、(7)。

3. 找出一个只含命题变元 p、q 和 r 的命题公式，当 p 和 q 为真而 r 为假时命题公式为真，否则为假。

解　$p \wedge q \wedge \neg r$。

4. 找出一个只含命题变元 p、q 和 r 的命题公式，在 p、q 和 r 中恰有两个为假时命题公式为真，否则为假。

解　$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r))$。

5. 利用等价演算法求下列命题公式的标准析取范式，并求其成真赋值。

（1）$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$　　（2）$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$

（3）$(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

解（1）$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

$= \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$

$= (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$

$= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

除 $p=0$，$q=1$ 外，其余均为成真赋值。

(2) $\neg(p\to q)\wedge q\wedge r=\neg(\neg p\vee q)\wedge q\wedge r=p\wedge\neg q\wedge q\wedge r=0$

这是永假式，不存在成真赋值。

(3) $(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)$

$$
\begin{aligned}
&=\neg(p\vee(q\wedge r))\vee p\vee q\vee r\\
&=(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee p\vee q\vee r\\
&=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee p\vee q\vee r\\
&=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\\
&\quad\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
&\quad\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
&\quad\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
&=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\\
&\quad\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)
\end{aligned}
$$

这是永真式，所有赋值都是成真赋值。

6. 利用等价演算法求下列命题公式的标准合取范式，并求其成假赋值。

（1）$\neg(p\to\neg q)\wedge\neg p$　　（2）$(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)$

（3）$(p\to(p\vee q))\vee r$

解　（1）$\neg(p\to\neg q)\wedge\neg p=\neg(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg p=(p\wedge q)\wedge\neg p=0$

这是永假式，所有赋值都是成假赋值。

（2）$(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)$

$$
\begin{aligned}
&=(p\vee\neg p)\wedge(p\vee r)\wedge(q\vee\neg p)\wedge(q\vee r)\\
&=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\\
&=(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)
\end{aligned}
$$

成假赋值为：$p=0,q=0,r=0$；$p=0,q=1,r=0$；

$p=1,q=0,r=0$；$p=1,q=0,r=1$

（3）$(p\to(p\vee q))\vee r=\neg p\vee p\vee q\vee r=1$

这是永真式，不存在成假赋值。

7. 利用真值表法求下列命题公式的标准析取范式和标准合取范式。

（1）$\neg(p\to q)$　　（2）$(\neg p\vee q)\to(p\leftrightarrow\neg q)$

（3）$(p\to q)\to r$　　（4）$(p\to(q\wedge r))\wedge(\neg p\to(\neg q\wedge\neg r))$

解　（1）

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

所以标准析取范式为

$$m_{10} = p \wedge \neg q$$

标准合取范式为

$$M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{11} = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

（2）

p	q	$\neg p \vee q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \vee q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

所以标准析取范式为

$$m_{01} \vee m_{10} = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

标准合取范式为

$$M_{00} \vee M_{11} = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

（3）

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

所以标准析取范式为

$$m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111}$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

标准合取范式为

$$M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110} = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

（4）

p	q	r	$p \to (q \wedge r)$	$\neg p \to (\neg q \wedge \neg r)$	$(p \to (q \wedge r)) \wedge (\neg p \to (\neg q \wedge \neg r))$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

所以标准析取范式为

$$m_{000} \vee m_{111} = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

标准合取范式为

$$M_{001} \wedge M_{010} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$
$$= (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

8. 假定用n个命题变元给出一个真值表。证明可依据此表构造一个命题公式，使其真值与此表一致。

证明　略

9. 设A是含有n命题变元的命题公式，证明

（1）A是永真式当且仅当A的标准析取范式含有全部2^n个最小项。

（2）A是永假式当且仅当A的标准析取范式不含任何最小项（即标准析取范式为 0）。

（3）A是可满足式当且仅当A的标准析取范式至少含有一个最小项。

证明　略

10. 设A是含有n命题变元的命题公式，证明

（1）A是永假式当且仅当A的合取析取范式含有全部2^n个最大项。

（2）A是永真式当且仅当A的标准合取范式不含任何最大项（即标准合取范式为 1）。

（3）A是可满足式当且仅当A的标准合取范式不包含所有最大项。

证明　略

11. 求下列命题公式的标准析取范式，再根据标准析取范式求标准合取范式。

（1）$(p \wedge q) \vee r$

（2）$(p \to q) \wedge (q \to r)$

解　（1）略

（2）$(p \to q) \wedge (q \to r)$

$$= (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$$
$$= (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$$
$$= (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$$
$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$
$$= m_{000} \vee m_{001} \vee m_{011} \vee m_{111}$$

所以标准合取范式为

$$M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$$
$$= (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

12. 求下列命题公式的标准合取范式，再根据标准合取范式求标准析取范式。

（1）$(p \wedge q) \to q$

（2）$(p \leftrightarrow q) \to r$

（3）$\neg(r \to p) \wedge p \wedge q$

解 （1）、（3）略

（2）$(p \leftrightarrow q) \to r$

$$= \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r$$
$$= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$$
$$= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$$
$$= ((p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r$$
$$= ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r$$
$$= (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$
$$= M_{000} \wedge m_{110}$$

所以标准析取范式为

$$m_{001} \wedge m_{010} \wedge m_{011} \wedge m_{100} \wedge m_{101} \wedge m_{111}$$
$$= (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$
$$\wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

13. 三个人估计比赛结果，甲说：“A 第 1，B 第 2”，乙说：“C 第 2，D 第 4”，丙说：“A 第 2，D 第 4”。结果三人估计的都不全对，但都对了一个。试利用求范式的方法推算出 A、B、C、D 分别是第几名？

解 略

习题 1.4

1. 将下列命题公式化成与之等价且仅含$\{\neg, \wedge\}$中联接词的命题公式。

（1）$(p \leftrightarrow r) \wedge q$　　　　（2）$(p \to (q \wedge r)) \vee p$

解 略

2. 将下列命题公式化成与之等价且仅含$\{\neg, \vee\}$中联接词的命题公式。

（1）$p \wedge q \wedge \neg r$　　　　（2）$(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$

解 略

3. 将下列命题公式化成与之等价且仅含$\{\neg, \to\}$中联接词的命题公式。

（1）$(p \wedge q) \vee r$　　　　（2）$(p \to \neg q) \wedge r$

（3）$(p \wedge q) \leftrightarrow r$

解 （1）$(p \wedge q) \vee r = \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r = (p \to \neg q) \to r$

（2）$(p \to \neg q) \wedge r = \neg(\neg(p \to \neg q) \vee \neg r) = \neg((p \to \neg q) \to \neg r)$

（3）$(p \wedge q) \leftrightarrow r$

$$= (\neg(\neg p \vee \neg q) \to r) \wedge (r \to \neg(\neg p \vee \neg q))$$

$$= \neg(\neg(\neg(p \to \neg q) \to r) \vee \neg(r \to \neg(p \to \neg q)))$$

$$= \neg((\neg(p \to \neg q) \to r) \to \neg(r \to \neg(p \to \neg q)))$$

4. 对于命题公式$p \wedge (q \to r)$。

（1）将它化成与之等价且仅含$\{\uparrow\}$中联接词的命题公式。

（2）将它化成与之等价且仅含$\{\downarrow\}$中联接词的命题公式。

解 （1）$p \wedge (q \to r)$

$$= p \wedge (\neg q \vee r)$$

$$= \neg\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r))$$

$$= \neg(p \uparrow (q \uparrow \neg r))$$

$$= (p \uparrow (q \uparrow (r \uparrow r))) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow (r \uparrow r)))$$

（2）$p \wedge (q \to r)$

$$= p \wedge (\neg q \vee r)$$

$$= \neg(\neg p \vee \neg(\neg q \vee r))$$

$$= \neg p \downarrow \neg(\neg q \downarrow r)$$

$$= (p \downarrow p) \downarrow (((q \downarrow q) \downarrow r) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow r))$$

§1.5　命题公式的推理演算

习题 1.5

1. 用真值表方法判断下列推理是否正确。

（1）$\neg p$，$p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

（2）$\neg q \wedge r$，$r \wedge p$，$q \Rightarrow p \vee \neg q$

（3）$\neg(p \wedge \neg q)$，$\neg q \vee r$，$\neg q \Rightarrow \neg p$

（4）$p \to (q \to r)$，$r \Rightarrow p \wedge q$

（5）$\neg p \to q$，$q \to r$，$r \to p \Rightarrow p \vee q \vee r$

（6）$p \to q$，$r \wedge s$，$\neg q \Rightarrow p \wedge s$

解　（1）推理不正确。

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

（2）推理正确。

p	q	r	$\neg q \wedge r$	$r \wedge p$	$p \vee \neg q$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

（3）、（4）、（5）、（6）略

2. 请对下面每个推理前提给出两个结论，使其中之一是有效的，而另一个不是有效的。

（1）前提：$p \to q$，$q \to r$　　　　（2）前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg r$，q

（3）前提：$p \to (q \to r)$，p，q

解　（1）有效结论：$p \to r$，无效结论：$r \to p$，下面的真值表说明了这一点。

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$r \to p$
0	0	0	1	1	1	1

0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

（2）有效结论：$q\wedge\neg r$，无效结论：$p\vee r$，下面的真值表说明了这一点。

p	q	r	$\neg r$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$	$q\wedge\neg r$	$p\vee r$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1

（3）有效结论：$r\to(p\wedge q)$，无效结论：$(p\wedge\neg q)\leftrightarrow r$，下面的真值表说明了这一点。

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$r\to(p\wedge q)$	$(p\wedge\neg q)\leftrightarrow r$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

3. 在下面各推理中没有给出结论。请对每个推理前提给出两个结论，使其中之一是有效的，而另一个不是有效的。

（1）只有天气热，我才去游泳。我正在游泳。所以……

（2）只要天气热，我就去游泳。我没去游泳。所以……

（3）除非天气热并且我有时间，我才去游泳。天气不热或我没有时间。所以……

解 略

4. 用真值表法或等价演算法证明下列推理

（1）$\neg A \Rightarrow A \to B$

（2）$B \Rightarrow A \to B$

（3）$\neg(A \to B) \Rightarrow A$

（4）$\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$

（5）$(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow A \wedge C \to B \wedge D$

（6）$(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow A \vee C \to B \vee D$

（7）$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

（8）$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow \neg A \vee \neg C$

证明 略

5. 用演绎推理法证明下列推理

（1）$p \to (q \to r)$，p，$q \Rightarrow r \vee s$

（2）$p \to q$，$\neg(q \wedge r)$，$r \Rightarrow \neg p$

（3）$p \to q \Rightarrow p \to (p \wedge q)$

（4）$q \to p$，$q \leftrightarrow s$，$s \leftrightarrow t$，$t \wedge r \Rightarrow p \wedge q$

（5）$p \to r$，$q \to s$，$p \wedge q \Rightarrow r \vee s$

（6）$\neg p \vee r$，$\neg q \vee s$，$p \wedge q \Rightarrow t \to (r \vee s)$

（7）$p \to (q \to r)$，$s \to p$，$q \Rightarrow s \to r$

（8）$(p \vee q) \to (r \wedge s)$，$(s \vee t) \to u \Rightarrow p \to u$

（9）$p \to \neg q$，$\neg r \vee q$，$r \wedge \neg s \Rightarrow \neg p$

（10）$p \vee q$，$p \to r$，$q \to s \Rightarrow r \vee s$

证明 （1）、（3）、（5）、（7）、（9）、（10）略

（2）	（1）p	附加前提
	（2）$q \to q$	P 规则
	（3）q	T 规则，（1），（2）
	（4）$\neg(q \wedge r)$	P 规则
	（5）$\neg q \vee \neg r$	E 规则，（4）
	（6）$\neg r$	T 规则，（3），（5）
	（7）r	P 规则
	（8）0	T 规则，（6），（7）

根据所学定理，有 $p \to q$，$\neg(q \wedge r)$，$r \Rightarrow \neg p$。

（4）	（1）$t \wedge r$	P 规则

（2）t　　T 规则，（1）

（3）$s \leftrightarrow t$　　P 规则

（4）s　　T 规则，（2），（3）

（5）$q \leftrightarrow s$　　P 规则

（6）q　　T 规则，（4），（5）

（7）$q \rightarrow p$　　P 规则

（8）p　　T 规则，（6），（7）

（9）$p \wedge q$　　T 规则，（6），（8）

（6）　（1）$p \wedge q$　　P 规则

（2）p　　T 规则，（1）

（3）$\neg p \vee r$　　P 规则

（4）r　　T 规则，（2），（3）

（5）q　　T 规则，（1）

（6）$\neg q \vee s$　　P 规则

（7）s　　T 规则，（5），（6）

（8）$r \vee s$　　T 规则，（4），（7）

（9）$t \rightarrow (r \vee s)$　　T 规则，（8）

（8）　（1）p　　附加前提

（2）$p \vee q$　　T 规则，（1）

（3）$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$　　P 规则

（4）$r \wedge s$　　T 规则，（2），（3）

（5）s　　T 规则，（4）

（6）$s \vee t$　　T 规则，（5）

（7）$(s \vee t) \rightarrow u$　　P 规则

（8）u　　T 规则，（6），（7）

根据所学定理，有$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$，$(s \vee t) \rightarrow u \Rightarrow p \rightarrow u$。

6. 用演绎推理法证明下列说法不可能同时成立。

（1）如果王平因病缺了许多课，那么他考试将不及格。

（2）如果王平考试不及格，则他没有学到知识。

（3）如果王平读了许多书，则他学到了许多知识。

（4）王平因病缺了许多课，而且在家读了许多书。

解　设p：王平因病缺了许多课，q：王平考试将不及格，r：王平没有学到知识，s：王平读了许多书，则上面的 4 种说法可以分别符号化为：

$$p \rightarrow q，\ q \rightarrow r，\ s \rightarrow \neg r，\ p \wedge s$$

而这几个逻辑式子是相互矛盾的，即永假式 0 是它们的逻辑结论：

（1）$p \to q$	P 规则
（2）$q \to r$	P 规则
（3）$p \to r$	T 规则，（1），（2）
（4）$s \to \neg r$	P 规则
（5）$r \to \neg s$	E 规则，（4）
（6）$p \to \neg s$	T 规则，（3），（5）
（7）$p \wedge s$	P 规则
（8）p	T 规则，（7）
（9）s	T 规则，（7）
（10）$\neg s$	T 规则，（6），（8）
（11）0	T 规则，（9），（10）

7. 用演绎推理法证明下列推理过程：如果今天是星期六，我们就要去长城或故宫玩；如果故宫游人太多，我们就不去故宫玩；今天是星期六；故宫游人太多。所以我们去长城玩。

解　略

8. 用演绎推理法证明下列推理过程：如果小王是理科学生，则他的数学成绩一定很好；如果小王不是文科学生，他一定是理科学生；小王的数学成绩不好。所以小王是文科学生。

解　略

9. 用演绎推理法证明下列推理过程：如果王平到过受害者房间并且 11 点以前没有离开，则王平犯谋杀罪；王平曾到过受害者房间；如果王平在 11 点以前离开，门卫会看见他；门卫没有看见他。所以王平犯了谋杀罪。

解　设 p：王平到过受害者房间，q：王平 11 点以前没有离开受害者房间，r：王平犯谋杀罪，s：门卫会看见王平，则上面推理的逻辑前提是：

$$p \wedge q \to r,\ \ p,\ \ \neg q \to s,\ \ \neg s$$

要证明的逻辑结论是：r。

（1）$\neg q \to s$	P 规则
（2）$\neg s \to q$	E 规则，（1）
（3）$\neg s$	P 规则
（4）q	T 规则，（2），（3）
（5）p	P 规则
（6）$p \wedge q$	T 规则，（4），（5）
（7）$p \wedge q \to r$	P 规则
（8）r	T 规则，（6），（7）

§1.6 对偶原理

习题 1.6

1. 求下列公式的对偶式。

（1）$p \vee (\neg q \wedge r) \vee s$　　（2）$\neg(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

（3）$\neg(p \vee \neg q) \wedge (p \vee 0) \wedge 1$　　（4）$(p \wedge 1) \vee \neg q \vee 0$

解　（1）的对偶式为：$p \wedge (\neg q \vee r) \wedge s$

（2）的对偶式为：$\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

（3）的对偶式为：$\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge 1) \wedge 0$

（4）的对偶式为：$(p \vee 0) \wedge \neg q \wedge 1$

2. 根据对偶原理，写出与下列等价式对应的另一个等价式。

（1）$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

（2）$A \wedge (A \vee B) = A$

（3）$A \wedge 0 = 0$

（4）$A \wedge 1 = A$

（5）$\neg A \vee (\neg B \vee C) = \neg(A \wedge B) \vee C$

（6）$(\neg A \wedge (\neg B \wedge C)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) = C$

解　（1）$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

（2）$A \vee (A \wedge B) = A$

（3）$A \vee 1 = 1$

（4）$A \vee 0 = A$

（5）$\neg A \wedge (\neg B \wedge C) = \neg(A \vee B) \wedge C$

（6）$(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C) = C$

3. 根据对偶原理，写出与下列推理式对应的另一个推理式。

（1）$A \Rightarrow A \vee B$

（2）$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

（3）$(\neg A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

（4）$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \Rightarrow \neg A \vee C$

（5）$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

（6）$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow \neg A \vee \neg C$

解（1）$A \wedge B \Rightarrow A$

（2）$A \Rightarrow (A \wedge B) \vee \neg B$

（3）$\neg A \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee \neg B$

（4）$\neg A \wedge C \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C)$

（5）$B \wedge D \Rightarrow (\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge D) \vee (A \wedge C)$

（6）

第 2 章：谓词逻辑

§2.1 个体词、谓词与量词

习题 2.1

1. 将下列命题用 0 元谓词符号化。

（1）小王学过英语和法语。 （2）2 大于 3 仅当 2 大于 4。

（3）3 不是偶数。 （4）2 或 3 是质数。

（5）除非李键是东北人，否则他一定怕冷。

解（1）令 $P(x)$：x 学过英语，$Q(x)$：x 学过法语，c：小王，命题符号化为 $P(c)\wedge Q(c)$。

（2）令 $P(x,y)$：x 大于 y，命题符号化为 $P(2,3)\to P(2,4)$。

（3）令 $P(x)$：x 是偶数，命题符号化为 $\neg P(3)$。

（4）令 $P(x)$：x 是质数，命题符号化为 $P(2)\vee P(3)$。

（5）令 $P(x)$：x 是东北人；$Q(x)$：x 怕冷；c：李键；命题符号化为 $\neg Q(c)\to P(c)$。

2. 设个体域 $D=\{a，b，c\}$，消去下列各式的量词。

（1）$\forall x\exists y(P(x)\wedge Q(y))$ （2）$\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))$

（3）$\forall xP(x)\to\forall yQ(y)$ （4）$\forall x(P(x，y)\to\exists yQ(y))$

解 略

3. 设谓词 $P(x，y)$ 表示“x 等于 y”，个体变元 x 和 y 的个体域都是 $D=\{1，2，3\}$。求下列各式的真值。

（1）$\exists xP(x，3)$ （2）$\forall yP(1，y)$

（3）$\forall x\forall yP(x,y)$ （4）$\exists x\exists yP(x,y)$

（5）$\exists x\forall yP(x,y)$ （6）$\forall y\exists xP(x,y)$

解（1）因为 $P(3，3)=1$，所以 $\exists x(P(x，3)=1$。

（2）因为 $P(1，3)=0$，所以 $\forall y(P(1，y)=0$。

（3）因为 $P(1，3)=0$，所以 $\forall x\forall yP(x,y)=0$。

（4）因为 $P(3，3)=1$，所以 $\exists x\exists yP(x,y)=1$。

（5）$\exists x\forall yP(x,y)=\exists x(P(x,1)\wedge P(x,2)\wedge P(x,3))$

$=(P(1,1)\wedge P(1,2)\wedge P(1,3))\vee(P(2,1)\wedge P(2,2)\wedge P(2,3))\vee(P(3,1)\wedge P(3,2)\wedge P(3,3))$

（6）$\forall x\exists yP(x,y)=\forall x(P(x,1)\vee P(x,2)\vee P(x,3))$

$=(P(1,1)\vee P(1,2)\vee P(1,3))\wedge(P(2,1)\vee P(2,2)\vee P(2,3))\wedge(P(3,1)\vee P(3,2)\vee P(3,3))$

$=1\wedge 1\wedge 1=1$

4. 设下面所有的个体变元的个体域都是整数集合，用自然语言表达下列各式并确定其真值。

（1） $\forall n(n^2 \geq 0)$
（2） $\exists n(n^2 = 2)$
（3） $\forall n(n^2 \geq n)$
（4） $\forall n \exists m(n^2 < m)$
（5） $\exists n \forall m(n < m^2)$
（6） $\forall n \exists m(n + m = 0)$
（7） $\exists n \forall m(n \times m = m)$
（8） $\exists n \exists m(n^2 + m^2 = 5)$
（9） $\exists n \exists m(n^2 + m^2 = 6)$
（10） $\exists n \forall m(n + m = 4 \wedge n - m = 1)$
（11） $\exists n \forall m(n + m = 4 \wedge n - m = 2)$
（12） $\forall n \forall m \exists k(k = (n + m)/2)$

解（1） 对任意的整数 n 有 $n^2 \geq 0$。其值为 1。

（2）存在整数 n 使得 $n^2 = 2$。其值为 0。

（3）对任意的整数 n 有 $n^2 \geq n$。其值为 1。

（4）对任意的整数 n，存在整数 m 使得 $n^2 \leq m$。其值为 1。

（5）存在整数 n 使得对任意的整数 m 都有 $n \leq m^2$。其值为 0。

（6）对任意的整数 n，存在整数 m 使得 $n + m = 0$。其值为 1。

（7）存在整数 n 使得对任意的整数 m 都有 $n \times m = m$。其值为 1。

（8）存在这样的整数 n，m 使得 $n^2 + m^2 = 5$。其值为 1。

（9）存在这样的整数 n，m 使得 $n^2 + m^2 = 6$。其值为 0。

（10）存在整数 n 使得对任意的整数 m 都有 $n + m = 4$且$n - m = 1$。其值为 0。

（11）存在整数 n 使得对任意的整数 m 都有 $n + m = 4$且$n - m = 2$。其值为 0。

（12）对任意的整数 m，n，存在整数 k 使得 $k = (n + m)/2$。其值为 0。

5. 令谓词 $P(x, y)$ 表示“x 访问过 y”，其中 x 的个体域是学校全体学生，y 的个体域是所有网站的集合。用自然语言表达下列各式。

（1） $P(\text{方元}, www.hziee.edu.cn)$。

（2） $\exists x P(x, www.google.com)$。

（3） $\exists y P(\text{冯友}, y)$。

（4） $\exists y(P(\text{吴笛}, y) \wedge P(\text{钱华}, y))$。

（5） $\exists y \forall z(y \neq \text{黄帅} \wedge (P(\text{黄帅}, z) \rightarrow P(y, z)))$。

（6） $\exists x \exists y \forall z((x \neq y) \wedge (P(x, z) \leftrightarrow P(y, z)))$。

解（1）方元访问过 www.hziee.edu.cn。

（2）至少有一个学生访问过 www.google.com。

（3）冯友至少访问过一个网站。

（4）至少有一个网站是吴笛和钱华都访问过的。

（5）有另外一个学生访问过黄帅访问过的所有网站。

（6）至少有两个不同的学生访问过的网站完全相同。

6. 令谓词$P(x)$表示“x说德语”，$Q(x)$表示“x了解计算机语言 C++”，个体域为杭电全体学生的集合。用$P(x)$、$Q(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

（1）杭电有个学生既会说德语又了解 C++。

（2）杭电有个学生会说德语，但不了解 C++。

（3）杭电所有学生或会说德语，或了解 C++。

（4）杭电没有学生会说德语或了解 C++。

假设个体域为全总个体域，谓词$M(x)$表示“x是杭电学生”。用$P(x)$、$Q(x)$、$M(x)$、量词和逻辑联接词再次符号化上面的 4 条语句。

解 个体域为杭电全体学生的集合时：

（1）$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

（2）$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

（3）$\forall x(P(x) \vee Q(x))$

（4）$\neg \exists x(P(x) \vee Q(x))$

若个体域为全总个体域，谓词$M(x)$表示“x是杭电学生”，则：

（1）$\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge Q(x))$

（2）$\exists x(M(x) \wedge P(x) \wedge \neg Q(x))$

（3）$\forall x(M(x) \rightarrow (P(x) \vee Q(x)))$

（4）$\neg \exists x(M(x) \wedge (P(x) \vee Q(x)))$

7. 令谓词$P(x，y)$表示“x爱y”，其中x和y的个体域都是全世界所有人的集合。用$P(x，y)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

（1）每个人都爱王平。

（2）每个人都爱某个人。

（3）有个人人都爱的人。

（4）没有人爱所有的人。

（5）有个张键不爱的人。

（6）有个人人都不爱的人。

（7）恰有一个人人都爱的人。

（8）成龙爱的人恰有两个。

（9）每个人都爱自己。

（10）有人除自己以外谁都不爱。

解（1）$\forall x P(x, \text{王平})$。

（2）$\exists y \forall x P(x, y)$。

（3）$\exists y \forall x P(x, y)$。

（4）$\neg \exists x \forall y P(x, y)$。

（5）$\exists y \neg P(\text{张键，}y)$。

（6）$\exists y \forall x \neg P(x, y)$。

（7）$\exists y(\forall x P(x, y) \wedge \forall v((\forall u P(u, v)) \rightarrow v = y))$（每个人都爱这个人）或

$\exists x(\forall y P(x, y) \wedge \forall u((\forall v P(u, v)) \rightarrow u = x))$（这个人爱每个人）

（8）$\exists x \exists y(x \neq y \wedge P(成龙, x) \wedge P(成龙, y) \wedge \forall z(P(成龙, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$。

（9）$\forall x P(x, x)$。　　　　（10）$\exists x \forall y(P(x, y) \rightarrow x = y)$。

8. 令谓词$P(x，y)$表示“x给y发过电子邮件”，$Q(x，y)$表示“x给y打过电话”，其中x和y的个体域都是实验班所有同学。用$P(x，y)$、$Q(x，y)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

（1）周叶从未给李强发过电子邮件。

（2）方芳从未给万华发过电子邮件，或打过电话。

（3）实验班每个同学都给余涛发过电子邮件。

（4）实验班没有人给吕键打过电话。

（5）实验班每个人或给肖琴打过电话或给他发过电子邮件。

（6）实验班有个学生给班上其他人都发过电子邮件。

（7）实验班有个学生给班上其他人或打过电话，或发过电子邮件。

（8）实验班有两个学生互发过电子邮件。

（9）实验班有个学生给自己发过电子邮件。

（10）实验班至少有两个学生，一个给另一个发过电子邮件，而另一个给这个打过电话。

解（1）$\neg P(周叶，李强)$

（2）$\neg(P(方芳，万华) \vee \neg Q(方芳，万华))$

（3）$\forall x P(x, 余涛)$

（4）$\forall x \neg Q(x, 吕键)$

（5）$\forall x(P(x, 肖琴) \vee Q(x, 肖琴))$

（6）$\exists x \forall y(y \neq x \rightarrow P(x, y))$

（7）$\exists x \forall y(y \neq x \rightarrow (P(x, y) \vee Q(x, y)))$

（8）$\exists x \exists y(x \neq y \wedge P(x, y) \wedge P(y, x))$

（9）$\exists x P(x, x)$

（10）$\exists x \exists y(x \neq y \wedge P(x, y) \wedge Q(y, x))$

§2.2 谓词公式及其解释

习题 2.2

1. 指出下列谓词公式的指导变元、量词辖域、约束变元和自由变元。

（1） $\forall x(P(x) \to Q(x，y))$

（2） $\forall xP(x，y) \to \exists yQ(x，y)$

（3） $\forall x\exists y(P(x，y) \wedge Q(y，z)) \vee \exists xR(x，y，z)$

解 （1）$\forall x$ 中的 x 是指导变元；量词 $\forall x$ 的辖域是 $P(x) \to Q(x,y)$；x 是约束变元，y 是自由变元。

（2）$\forall x$ 中的 x，$\exists y$ 中的 y 都是指导变元；$\forall x$ 的辖域是 $P(x，y)$，$\exists y$ 的辖域是 $Q(x，y)$；$P(x，y)$ 中的 x 是 $\forall x$ 的约束变元，y 是自由变元；$Q(x，y)$ 中的 x 是自由变元，y 是 $\exists y$ 的约束变元。

（3）$\forall x$ 中的 x，$\exists y$ 中的 y 以及 $\exists x$ 中的 x 都是指导变元；$\forall x$ 的辖域是 $\exists y(P(x，y) \wedge Q(y，z))$，$\exists y$ 的辖域是 $P(x，y) \wedge Q(y，z)$，$\exists x$ 的辖域是 $R(x，y，z)$；$P(x，y)$ 中的 x，y 都是约束变元；$Q(y，z)$ 中的 y 是约束变元；z 是自由变元，$R(x，y，z)$ 中的 x 为约束变元，y，z 是自由变元。

2. 设个体域 $D=\{1，2\}$，请给出两种不同的解释 I_1 和 I_2，使得下面谓词公式在 I_1 下都是真命题，而在 I_2 下都是假命题。

（1） $\forall x(P(x) \to Q(x))$ （2） $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

解（1）解释 I_1：个体域 $D=\{1，2\}$，$P(x): x>0, Q(x): x>0$。

（2）解释 I_2：个体域 $D=\{1，2\}$，$P(x): x>0, Q(x): x>2$。

3. 对下面的谓词公式，分别给出一个使其为真和为假的解释。

（1） $\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x，y)))$

（2） $\forall x\forall y(P(x) \wedge Q(y) \to R(x,y))$

解 （1）成真解释：个体域 D＝{1,2,3}，$P(x): x<0$，$Q(y): y>2$，$R(x,y): x+y>3$。

成假解释：个体域 D＝{1,2,3}，$P(x): x>0$，$Q(y): y>2$，$R(x,y): x+y<1$。

（2）成真解释：个体域 D＝{1,2,3}，$P(x): x<0$，$Q(y): y>2$，$R(x,y): x+y>3$。

成假解释：个体域 D＝{1,2,3}，$P(x): x>0$，$Q(y): y>0$，$R(x,y): x+y<1$。

4. 给定解释 I 如下：

个体域 $D=\mathbf{R}$（这里 $\mathbf{R}$ 为实数集合）。

个体常元 $a=0$。

二元函数 $f(x，y)=x-y$。

二元谓词 $P(x, y)$: $x=y$，$Q(x, y)$: $x<y$。

在解释 I 下，下列公式的含义是什么？哪些成为命题哪些不成为？成为命题的其真值又如何？

（1）$\forall x\forall y(Q(x, y)\to\neg P(x, y))$

（2）$\forall x\forall y(P(f(x, y), a)\to Q(x, y))$

（3）$\forall x\forall y(Q(x, y)\to\neg P(f(x, y), a))$

（4）$\forall x\forall y(Q(f(x, y), a)\to P(x, y))$

解（1）公式被解释成"$\forall x\forall y(x<y\to x\neq y)$"，为真命题。

（2）公式被解释成"$\forall x\forall y(x-y=0\to x<y)$"，为假命题。

（3）公式被解释成"$\forall x\forall y(x<y\to x-y\neq 0)$"，为真命题。

（4）公式被解释成"$\forall x\forall y(x-y<0\to x=y)$"，为假命题。

5. 判断下列谓词公式哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，并说明理由。

（1）$P(x)\to\exists xP(x)$　（2）$\exists xP(x)\to P(x)$

（3）$P(x)\to\forall xP(x)$　（4）$\forall xP(x)\to P(x)$

（5）$\forall x(P(x)\to\neg P(x))$　（6）$\forall x\forall yP(x, y)\to\forall y\forall xP(x, y)$

（7）$\forall x\forall yP(x, y)\to\forall x\forall yP(y, x)$　（8）$\forall x\exists yP(x, y)\to\exists x\forall yP(x, y)$

（9）$\exists x\forall yP(x, y)\to\forall y\exists xP(x, y)$　（10）$\forall x\forall y(P(x, y)\to P(y, x))$

解（1）因为当存在某个 x 使 $P(x)$ 取 1 时 $\exists xP(x)$ 一定取 1，所以公式是为永真式。

（3）取解释 I_1：个体域为自然数集合，$P(x)$: $x^2\geq 0$。在 I_1 下公式的前件与后件均为真，所以公式为真，即不是永假式。取解释 I_2：个体域仍为自然数集合，但 $P(x)$ 取为 $x>0$。在 I_2 下公式不成为命题，即不是永真式。综合知公式为可满足式。

（5）取解释 I_1：个体域为自然数集合，$P(x)$: $x^2\geq 0$。在 I_1 下，对任意的 x，$P(x)$ 为真而 $\neg P(x)$ 为假，所以公式为假，即不是永真式。取解释 I_2：个体域仍为自然数集合，但 $P(x)$ 取为 $x^2<0$。在 I_2 下，对任意的 x，$P(x)$ 为假而 $\neg P(x)$ 为真，所以公式为真，即不是永假式。综合知公式为可满足式。

（7）公式为永真式，用非形式化的反证法证明如下：若公式非永真，则存在一个解释，使得 $\forall x\forall yP(x, y)$ 取 1 而 $\forall x\forall yP(y, x)$ 取 0。$\forall x\forall yP(y, x)$ 取 0 表明存在某对 x_0, y_0 使得 $P(y_0, x_0)$ 取 0，从而 $\forall x\forall yP(x, y)$ 也应取 0。这与前面说 $\forall x\forall yP(x, y)$ 取 1 矛盾。故公式是永真式。

（9）　设 I 为任意一个解释，个体域为 D。若 $\exists x\forall yP(x, y)$ 取 1，即存在 $x_0\in D$，使得 $\forall yP(x_0, y)$ 为真，从而 $\forall y\exists xP(x, y)$ 为真，故 $\exists x\forall yP(x, y)\to\forall y\exists xP(x, y)$ 为真。所以在解释 I 下公式为真，由 I 的任意性可知，公式为永真式。

（2）、（4）、（6）、（8）、（10）略。

6. 判断下列谓词公式哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，并说明理由。

（1）$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y))$

（2）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee \forall yQ(y))$

（3）$\neg(\forall xP(x) \to \exists yQ(y)) \wedge \exists yQ(y)$

（4）$\forall x(P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \forall xQ(x))$

（5）$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(x) \to \forall xQ(x))$

（6）$\neg(P(x) \to (\forall yQ(x，y) \to P(x)))$

（7）$P(x，y) \to (Q(x，y) \to P(x，y))$

解 略

7. 给出一个非闭式的永真式，给出一个非闭式的永假式，给出一个非闭式的可满足式。

解 略

§ 2.3　谓词公式的等价演算与范式

习题 2.3

1. 将下列命题符号化，要求用两种不同的等价形式。

（1）没有小于负数的正数。　　（2）相等的两个角未必都是对顶角。

解 略

2. 利用非形式化方法证明下列等价式。

（1）$\neg\exists x A(x)=\forall x\neg A(x)$　　（2）$\forall x(A(x)\vee B)=\forall x A(x)\vee B$

（3）$\exists x(A(x)\wedge B)=\exists x A(x)\wedge B$　　（4）$\exists x(A(x)\vee B)=\exists x A(x)\vee B$

（5）$\exists x(A(x)\vee B(x))=\exists x A(x)\vee\exists x B(x)$

解 略

3.设 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x，y)$ 都是谓词，证明下列各等价式

（1）$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))=\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$

（2）$\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$

（3）$\neg\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\rightarrow R(x，y))=\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge\neg R(x，y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge R(x，y))=\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\rightarrow\neg R(x，y))$

证明：（1）左边$=\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

$=\forall x\neg(P(x)\wedge Q(x))$

$=\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$

$=\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$＝右边

（2）左边$=\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

$=\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=\exists x\neg(\neg P(x)\vee Q(x))$

$=\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$＝右边

（3）左边$=\neg\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\rightarrow R(x，y))$

$=\neg\forall x\forall y(\neg(P(x)\wedge Q(y))\vee R(x，y))$

$=\exists x\exists y\neg(\neg(P(x)\wedge Q(y))\vee R(x，y))$

$=\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge\neg R(x，y))$＝右边

（4）左边$=\neg\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y)\wedge R(x，y))$

$=\forall x\forall y\neg(P(x)\wedge Q(y)\wedge R(x,y)$

$=\forall x\forall y\neg(P(x)\wedge Q(y))\vee\neg R(x,y)$

$=\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\rightarrow\neg R(x，y))$＝右边

4. 求下列谓词公式的前束析取范式和前束合取范式。

（1）$\forall x P(x)\rightarrow\exists y Q(x，y)$

（2）$\forall x(P(x，y)\rightarrow\exists y Q(x，y，z))$

（3） $\exists x \neg \exists y P(x, y) \to (\exists z Q(z) \to R(x))$

（4） $\forall x(P(x) \to Q(x, y)) \to (\exists y(R(y) \to \exists z S(y, z))$

解 略

5. 将下列命题符号化，要求符号化的公式为前束范式。

（1）有的汽车比有的火车跑的快。

（2）有的火车比所有的汽车跑的快。

（3）说“所有的火车比所有的汽车都跑的快”是不对的。

（4）说“有的飞机比有的汽车慢”是不对的。

解 本题没有指明个体域，我们这里采用全总个体域。设一元谓词 $P(x)$: x 是汽车，$Q(y)$: y 是火车，$R(y)$: z 是飞机，二元谓词 $S(x, y)$: x 比 y 跑得快。这 4 个命题可分别符号化为

$$\exists x \exists y(P(x) \wedge Q(y) \wedge S(x, y))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \to S(x, y)))$$

$$\neg \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \to S(x, y))$$

$$\neg \exists x \exists y(P(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y))$$

§ 2.4　谓词公式的推理演算

习题 2.4

1. 利用非形式化证明方法或等价演算法证明如下推理关系：

（1）$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$

（2）$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

（3）$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

（4）$\exists xA(x) \to \exists xB(x) \Rightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

（5）$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$

（6）$\forall xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

解 略

2. 指出下面演绎推理中的错误，并给出正确的推导过程。

（1）① $\forall xP(x) \to Q(x)$　　P 规则

② $P(y) \to Q(y)$　　US 规则：①

（2）① $\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P 规则

② $P(a) \to Q(b)$　　US 规则：①

（3）① $P(x) \to \exists xQ(x)$　　P 规则

② $P(a) \to Q(a)$　　ES 规则：①

（4）① $P(a) \to G(a)$　　P 规则

② $\forall x(P(x) \to G(x))$　　UG 规则：①

（5）① $P(a) \wedge G(b)$　　P 规则

② $\exists x(P(x) \wedge G(x))$　　EG 规则：①

（6）① $P(y) \to Q(y)$　　P 规则

② $\exists x(P(c) \to Q(x))$　　EG 规则：①

解 略

3. 指出下面演绎推理中的错误，并给出正确的推导过程。

（1）$\forall x\exists y(x > y)$　　P 规则

（2）$\exists y(z > y)$　　US 规则：（1）

（3）$z > a$　　ES 规则：（2）

（4）$\forall x(x > a)$　　UG 规则：（3）

（5）$a > a$　　US 规则：（4）

解 错误出现在步骤（3）。因为$\exists y(z > y)$中含有自由变元，所以不能使用 ES 规则得到$z > a$。 正确的推导过程为：

（1）$\forall x\exists y(x > y)$　　P 规则

（2）$\exists y(z > y)$　　US 规则：（1）

4. 指出下面演绎推理中的错误，并给出正确的推导过程。

（1）$\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P 规则

（2）$P(y) \to Q(y)$　　US 规则：（1）

（3）$\exists x P(x)$　　P 规则

（4）$P(y)$　　ES 规则：（3）

（5）$Q(y)$　　T 规则：（2），（4）

（6）$\exists x Q(x)$　　EG 规则：（5）

解 错误出现在步骤（4）。使用 ES 规则得到的 $P(y)$ 中的 y 已经出现在前面的公式中，所以错误，正确的推导过程为：

（1）$\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P 规则

（2）$P(y) \to Q(y)$　　US 规则：（1）

（3）$\exists x P(x)$　　P 规则

（4）$P(a)$　　ES 规则：（3）

5. 用演绎法证明下列推理式

（1）$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

（2）$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$

（3）$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

（4）$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$

证明（1）式的证明：

（1）$\exists x A(x)$　　附加前提

（2）$A(a)$　　（1），US 规则

（3）$\forall x(A(x) \to B(x))$　　P 规则

（4）$A(a) \to B(a)$　　（3），US 规则

（5）$B(a)$　　（2），（4），T 规则

（6）$\exists x B(x)$　　（5），EG 规则

根据附加前提法知 $\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

（2）式的证明：

（1）$\neg \exists x(A(x) \to B(x))$　　附加前提

（2）$\forall x(A(x) \land \neg B(x))$　　（1），E 规则

（3）$\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$　　（2），E 规则

（4）$\forall x A(x)$　　（3），T 规则

（5）$A(a)$　　（4），US 规则

（6）$\exists x A(x)$ （5），EG 规则

（7）$\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ P 规则

（8）$\exists x B(x)$ （6），（7），T 规则

（9）$B(b)$ （8），ES 规则

（10）$\forall x \neg B(x)$ （3），T 规则

（11）$\neg B(b)$ （10），US 规则

（12）$B(a) \wedge \neg B(a)$ （9），（11），T 规则

（13）0 （12），E 规则

所以根据附加前提法知 $\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$

（3）式的证明：

（1）$\forall x A(x)$ 附加前提

（2）$A(y)$ （1），US 规则

（3）$\forall x (A(x) \to B(x))$ P 规则

（4）$A(y) \to B(y)$ （3），US 规则

（5）$B(y)$ （2），（4），T 规则

（6）$\exists x B(x)$ （5），EG 规则

所以根据附加前提法知 $\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

（4）式的证明略。

6. 用演绎法证明下列推理式

（1）$\exists x P(x) \to \forall y ((P(x) \vee Q(y)) \to R(y))$，$\exists x P(x) \Rightarrow \exists x R(x)$

（2）$\forall x (P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$，$\exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge R(x))$

（3）$\forall x (P(x) \vee Q(x))$，$\neg \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

（4）$\forall x (P(x) \vee Q(x))$，$\forall x (\neg Q(x) \vee \neg R(x))$，$\forall x R(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

证明（2）式的证明：

（1）$\exists x P(x)$ P 规则

（2）$P(a)$ （1），ES 规则

（3）$\neg \exists x (P(x) \wedge R(x))$ 附加前提

（4）$\forall x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$ （3），E 规则

（5）$\neg P(a) \vee \neg R(a)$ （4），US 规则

（6）$\neg R(a)$ （2），（5），T 规则

（7）$\forall x (P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$ P 规则

（8）$P(a) \to (Q(a) \wedge R(a))$　　（7），US 规则

（9）$Q(a) \wedge R(y)$　　（2），（8），T 规则

（10）$R(a)$　　（9），T 规则

（11）$R(a) \wedge \neg R(a)$　　（6），（10），T 规则

（12）0　　（11），E 规则

所以根据附加前提法知 $\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)))$，$\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$

（4）式的证明：

（1）$\forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x))$　　P 规则

（2）$\neg Q(y) \vee \neg R(y)$　　（1），US 规则

（3）$\forall x R(x)$　　P 规则

（4）$R(y)$　　（3），US 规则

（5）$\neg Q(y)$　　（2），（4），T 规则

（6）$\forall x(P(x) \vee Q(x))$　　P 规则

（7）$P(y) \vee Q(y)$　　（3），US 规则

（8）$P(y)$　　（5），（7），T 规则

（9）$\forall x P(x)$　　（8），UG 规则

（1），（3）式的证明略。

7. 将下列命题符号化，并用演绎推理法证明其结论是有效的。

（1）有理数、无理数都是实数；虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。（个体域取全总个体域）

（2）所有的舞蹈者都很有风度；万英是个学生并且是个舞蹈者。因此，有些学生很有风度。（个体域取人类全体组成的集合）

（3）每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车；每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车；有的人不喜欢乘汽车。所以有的人不喜欢步行。（个体域取人类全体组成的集合）

（4）每个旅客或者坐头等舱或者坐经济舱；每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱；有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此有些旅客坐经济舱。（个体域取全体旅客组成的集合）

解　（1），（2）略。

（3）命题符号化为：$F(x)$：x 喜欢步行，$G(x)$：x 喜欢骑自行车，$H(x)$：x 喜欢坐汽车。

前提：$\forall x(F(x) \to \neg G(x))$，$\forall x(G(x) \vee H(x))$，$\exists x(\neg H(x))$

结论：$\exists x(\neg F(x))$.

① $\exists x(\neg H(x))$　　P 规则

② $\neg H(c)$　　①，ES 规则

③ $\forall x(G(x) \vee H(x))$　　P 规则

④ $G(c) \vee H(c)$　　③，US 规则

⑤ $G(c)$　　②，④，T 规则

⑥ $\forall x(F(x) \to \neg G(x))$　　P 规则

⑦ $F(c) \to \neg G(c)$　　⑥，US 规则

⑧ $\neg F(c)$　　⑤，⑦，T 规则

⑨ $\exists x(\neg F(x))$　　⑧，EG 规则

（4）命题符号化为：$F(x)$：x 坐头等舱，$G(x)$：x 坐经济舱，$H(x)$：x 富裕。

前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$，$\forall x(F(x) \leftrightarrow H(x))$，$\exists x H(x) \wedge \exists x \neg H(x)$

结论：$\exists x G(x)$.

① $\exists x H(x) \wedge \exists x \neg H(x)$　　P 规则

② $\exists x \neg H(x)$　　①，T 规则

③ $\neg H(c)$　　②，ES 规则

④ $\forall x(F(x) \leftrightarrow H(x))$　　P 规则

⑤ $F(c) \leftrightarrow H(c)$　　④，US 规则

⑥ $\neg F(c)$　　③，⑤，T 规则

⑦ $\forall x(F(x) \vee G(x))$　　P 规则

⑧ $F(c) \vee G(c)$　　⑦，US 规则

⑨ $G(c)$　　⑥，⑧，T 规则

⑩ $\exists x G(x)$　　⑨，EG 规则

8. 令谓词 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 分别表示“x 是教授”，“x 无知”和“x 爱虚荣”，个体域为所有人的集合。用 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

（1）没有无知的教授。

（2）所有无知者均爱虚荣。

（3）没有爱虚荣的教授。

请问，能从（1）和（2）推出（3）吗？若不能，请写出（1）和（2）的一个有效结论，并用演绎推理法证明之。

解　略

9. 令谓词 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$ 和 $S(x)$ 分别表示“x 是婴儿”，“x 的行为符合逻辑”、“x 能管理鳄鱼”和“x 被人轻视”，个体域为所有人的集合。用 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$、$S(x)$、量词和逻辑联接词符号化下列语句。

（1）婴儿行为不合逻辑。

（2）能管理鳄鱼的人不被人轻视。

（3）行为不合逻辑的人被人轻视。

（4）婴儿不能管理鳄鱼。

请问，能从（1）、（2）和（3）推出（4）吗？若不能，请写出（1）、（2）和（3）的一个有效结论，并用演绎推理法证明之。

解 四个语句符号化为：

（1）$\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$　　（2）$\forall x(R(x)\to\neg S(x))$

（3）$\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$　　（4）$\forall x(P(x)\to\neg R(x))$

能从（1）、（2）、（3）推出（4）。证明如下：

（1）	$\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$	P 规则
（2）	$P(y)\to\neg Q(y)$	（1），US 规则
（3）	$\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$	P 规则
（4）	$\neg Q(y)\to S(y)$	（3），US 规则
（5）	$P(y)\to S(y)$	（2），（4），T 规则
（6）	$\forall x(R(x)\to\neg S(x))$	P 规则
（7）	$R(y)\to\neg S(y)$	（6），US 规则
（8）	$S(y)\to\neg R(y)$	（7）， T 规则
（9）	$P(y)\to\neg R(y)$	（5），（8），T 规则
（10）	$\forall x(P(x)\to\neg R(x))$	（9），UG 规则

§3.1 集合及其运算

习题 3.1

1. 判断下列命题成真还是成假（这里ϕ表示空集）

（1）$\phi \subseteq \phi$ （2）$\phi \in \phi$

（3）$\phi \subseteq \{\phi\}$ （4）$\phi \in \{\phi\}$

（5）$\{a\} \subseteq \{a\}$ （6）$\{a\} \in \{a\}$

（7）$\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ （8）$\{a\} \in \{\{a\}\}$

（9）$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ （10）$\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

（11）$\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ （12）$\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解 略

2. 求下列幂集（这里ϕ表示空集）

（1）$p(\{a\})$ （2）$p(\{a, b, c\})$

（3）$p(\{a, b, \{a, b\}\})$ （4）$p(\{\phi\})$

（5）$p(\{\phi, \{\phi\}\})$ （6）$p(p(\phi))$

（7）$p(\{\{\phi, a\}, \{a\}\})$ （8）$p(\{\phi, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$

解 （1）、（2）、（3）、（4）略

（5）$p(\{\phi, \{\phi\}\}) = \{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

（6）$p(p(\phi)) = p(\phi) = \phi$

（7）$p(\{\{\phi, a\}, \{a\}\}) = \{\phi,\{\{\phi,a\}\},\{\{a\}\},\{\{\phi,a\},a\}\}$

（8）$p(\{\phi,a,\{a\},\{\{a\}\}\}) = \{\phi,\{\phi\},\{a\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\{\phi,a\},\{\phi,\{a\}\},\{\phi,\{\{a\}\}\},$
$\{a,\{a\}\},\{a,\{\{a\}\}\},\{\{a\},\{\{a\}\}\},\{\phi,a,\{a\}\},\{\phi,a,\{\{a\}\}\},\{\phi,\{a\},\{\{a\}\}\},$
$\{a,\{a\},\{\{a\}\}\},\{\phi,a,\{a\},\{\{a\}\}\}\}$

3. 设$A = \{1, 4\}$，$B = \{1, 2, 5\}$，$C = \{2, 4\}$，全集$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，求下列集合

（1）$A \cap B^c$ （2）$(A \cap B) \cup C^c$

（3）$(A \cap B)^c$ （4）$p(A) \cap p(B)$

（5）$p(A) - p(B)$

解 略

4. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有两人会打这三种球。已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球。求不会打球的人数。

解 略

5. 设A，B，C是全集E的任意子集，证明

（1）交换律： $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

（2）结合律：　$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$

（3）分配律：　$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

（4）等幂律：　$A\bigcup A=A$，$A\bigcap A=A$

（5）单位律：　$A\bigcup\phi=A$，$A\bigcap E=A$

（6）零律：　$A\bigcup E=E$，$A\bigcap\phi=\phi$

（7）互补律：　$A\bigcup A^c=E$，$A\bigcap A^c=\phi$

（8）双补律：　$(A^c)^c=A$

（9）吸收律：　$A\bigcup(A\bigcap B)=A$，$A\bigcap(A\bigcup B)=A$

（10）德·摩根律：　$(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$，$(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$

$A-(B\bigcap C)=(A-B)\bigcup(A-C)$

解　略

6. 设A，B，C是任意集合，证明

（1）$(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

（2）$(A-B)-C=A-(B\bigcup C)$

（3）$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

（4）$(A-B)-C=(A-C)-B$

（5）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

（6）$A\bigcap(B\oplus C)=(A\bigcap B)\oplus(A\bigcap C)$

解　（1）、（3）、（4）、（5）略

（2）因为$x\in(A-B)-C\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\notin C\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in B\wedge\neg x\in C\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\bigcup C)\Leftrightarrow x\in A-(B\bigcup C)$

所以$(A-B)-C=A-(B\bigcup C)$。

（6）因为$x\in(A\bigcap B)\oplus(A\bigcap C)=x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\wedge\neg x\in A\bigcap B\bigcap C$

$\Leftrightarrow((x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C))\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B\bigcap C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B\bigcup C)\wedge(\neg x\in A\vee\neg x\in B\bigcap C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B\bigcup C\wedge\neg x\in A)\vee(x\in A\wedge x\in B\bigcup C\wedge\neg x\in B\bigcap C)$

$\Leftrightarrow 0\vee(x\in A\wedge(x\in B\bigcup C\wedge\neg x\in B\bigcap C))$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\oplus C\Leftrightarrow x\in A\bigcap(B\oplus C)$

所以$A\bigcap(B\oplus C)=(A\bigcap B)\oplus(A\bigcap C)$。

7. 设A，B是任意集合，证明

（1）$p(A)\bigcap p(B)=p(A\bigcap B)$

（2）$p(A)\bigcup p(B)\subseteq p(A\bigcup B)$

（3）针对（2）举一反例，说明 $p(A)\cup p(B)=p(A\cup B)$ 对某些集合 A，B 是不成立的。

解 略

8. 设 A，B，C，D 是任意集合，判断下列式子是否正确。如果正确请给出证明，否则请举一个反例。

（1） $A\cup C=B\cup C\Rightarrow A=B$

（2） $A\cap C=B\cap C\Rightarrow A=B$

（3） $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

（4） $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C\subseteq B-C\Rightarrow A\subseteq B$

（5） $A\subseteq B$，$C\subseteq D\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$

（6） $A\subset B$，$C\subset D\Rightarrow A\cup C\subset B\cup D$

解 （1)、（2)、（5)、（6）略

（3） $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

正确，用反证法证明，若 $B\neq C$，可不妨设 $x\in B\wedge x\notin C$。

（a）若 $x\in A$，则根据集合对称差运算的定义，$x\notin A\oplus B$，$x\in A\oplus C$，与 $A\oplus B=A\oplus C$ 矛盾。

（b）若 $x\notin A$，则根据集合对称差运算的定义，$x\in A\oplus B$，$x\notin A\oplus C$，也与 $A\oplus B=A\oplus C$ 矛盾。

所以 $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$。

（4） $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C\subseteq B-C\Rightarrow A\subseteq B$

正确，用反证法证明，若 $A\subseteq B$ 不成立，则存在 $x\in A\wedge x\notin B$。

（a）若 $x\in C$，则 $x\in A\cap C$，从而 $x\in B\cap C$，与 $x\notin B$ 矛盾。

（b）若 $x\notin C$，则 $x\in A-C$，从而 $x\in B-C$，也与 $x\notin B$ 矛盾。

所以 $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C\subseteq B-C\Rightarrow A\subseteq B$。

9 设 A，B，C 是任意集合，根据对偶原理，写出与下列式子对应的另一个式子。

（1） $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$

（2） $A\cap B\cap C\subseteq A\cap B$

（3） $A=(B^c\cap A)\cup(A\cap B)$

（4） $(A\cup B\cup C)^c=(A\cup C)^c\cap(A\cup B)^c$

解 略

10. 假定全集 $E=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$

（1）用位串表示下列集合：

$\{3，4，5\}$ $\{1，3，6，10\}$

$\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

（2）写出下列位串各自代表的集合

1 111 001 111　　　　0 101 111 000

1 000 000 001

解　略

11. 说明怎样用位串的按位运算求下列集合，其中 $A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, c, d, g, p, t, v\}$，$C=\{c, e, i, o, u, x, y, z\}$，$D=\{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$。

（1）$A\bigcup B$　　　　（2）$A\bigcap B$

（3）$(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C)$　　　　（4）$A\bigcup B\bigcup C\bigcup D$

解　在全集 $E=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ 中考虑问题，则

集合 A 的位串是：11 111 000 000 000 000 000 000 000，

集合 B 的位串是：01 110 010 000 000 010 001 010 000，

集合 C 的位串是：00 101 000 100 000 100 000 100 111，

集合 D 的位串是：00 011 001 100 001 100 001 100 110，

集合 $A\bigcup B$ 的位串是 11 111 010 000 000 010 001 010 000，

集合 $A\bigcap B$ 的位串是 01 110 000 000 000 000 000 000 000，

集合 $B\bigcup C$ 的位串是 01 111 010 100 000 110 001 110 111，

集合 $(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C)$ 的位串是 01 111 010 000 000 010 001 010 000，

集合 $C\bigcup D$ 的位串是 00 111 001 100 001 100 001 100 111，

集合 $A\bigcup B\bigcup C\bigcup D$ 的位串是 11 111 011 100 001 110 001 110 111，

这些位串表示的集合为：

$$A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,g,p,t,v\}$$

$$A\bigcap B=\{b,c,d\}$$

$$(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C)=\{b,c,d,e,g,p,t,v\}$$

$$A\bigcup B\bigcup C\bigcup D=\{a,b,c,d,e,g,h,i,n,o,p,t,u,v,x,y,z\}$$

12. 对应于两个集合之差的位串是什么？对应于两个集合的对称差的位串又是什么？

解　略

§3.2 二元关系及其运算

习题 3.2

1. 设$A=\{\phi, \{\phi\}\}$，求$A\times P(A)$。

解 略

2. 设A，B，C是任意集合，若$A\times B\subseteq A\times C$，是否一定有$B\subseteq C$成立？为什么？

解 当$A=\phi$时，若$A\times B\subseteq A\times C$，$B\subseteq C$不一定成立；

当$A\neq\phi$时，若$A\times B\subseteq A\times C$，则$B\subseteq C$一定成立，反证如下：

若$B\subseteq C$不成立，则存在$y\in B\wedge x\notin C$；又因为$A\neq\phi$，所以存在$x\in A$，这样，序偶$<x,y>\in A\times B\wedge <x,y>\notin A\times C$，与$A\times B\subseteq A\times C$矛盾。

3. 设A，B，C，D是任意集合，下列等式中哪些成立？哪些不成立？对于成立的给出证明，对于不成立的举一反例。

（1）$(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$

（2）$(A\bigcup B)\times(C\bigcup D)=(A\times C)\bigcup(B\times D)$

（3）$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

解 （1）成立，证明如下：

$<x,y>\in(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)\Leftrightarrow x\in A\bigcap B\wedge y\in C\bigcap D$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\wedge <x,y>\in B\times D\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times C)\bigcap(B\times D)$

（2）不成立，例如取$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，$D=\{d\}$，则左边$=\{a,b\}\times\{c,d\}=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$，右边$=\{<a,c>,<b,d>\}$。

（3）不成立，例如取$A=\{a,b\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c,d\}$，$D=\{d\}$，则左边$=\{a\}\times\{c\}$ $=\{<a,c>\}$，右边$=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}-\{<b,d>\}$ $=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>\}$。

4. 列出集合$A=\{2, 3, 4\}$上的恒等关系I_A，全域关系E_A，小于或等于关系L_A，整除关系D_A所包含的序偶。

解 $I_A=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$，

$E_A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,4>\}$

$L_A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,3>,<3,4>,<4,4>\}$

$D_A=\{<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$

5. 列出集合

$$A=\{\phi, \{\phi\}, \{\phi,\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$$

上的包含关系所包含的序偶。

解 略

6. 设 $A=\{1，2，4，6\}$，求出下列关系（列出其中的序偶）及其定义域和值域。

（1） $R_1=\{<x，y>|x，y\in A\wedge x+y\neq 2\}$

（2） $R_2=\{<x，y>|x，y\in A\wedge |x-y|=1\}$

（3） $R_3=\{<x，y>|x，y\in A\wedge \frac{x}{y}\in A\}$

（4） $R_4=\{<x，y>|x，y\in A\wedge y\text{为质数}\}$

解 略

7 设集合 $A=\{0，2，3，4\}$，给出 A 上的二元关系 $R=\{<0，0>,<0，3>,<2，0>,<2，1>,<2，3>,<3，2>\}$ 的关系矩阵和关系图。

解 略

8. 设 $A=\{a，b，c，d\}$，R 和 S 是 A 上的二元关系：

$$R=\{<a，a>,<a，b>,<b，d>\}$$

$$S=\{<a，d>,<b，c>,<b，d>,<c，b>\}$$

求下列关系及其关系矩阵和关系图。

（1） $R\cup S$　　（2） $R\cap S$

（3） R^c　　（4） $R-S$

（5） $R\oplus S$　　（6） $R\circ S$

（7） $S\circ R$　　（8） R^2

（9） S^3　　（10） R^{-1}

解 （2）、（4）、（6）、（8）、（10）略

（1） $R\cup S=\{<a,a>,<a,b>,<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$

（3） $R^c=\{<a,c>,<a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>,<c,d>,<d,a>,<d,b>,<d,c>,<d,d>\}$

（5） $R\oplus S=R\cup S-R\cap S=\{<a,a>,<a,b>,<a,d>,<b,c>,<c,b>\}$

（7） $S\circ R=\{<c,d>\}$

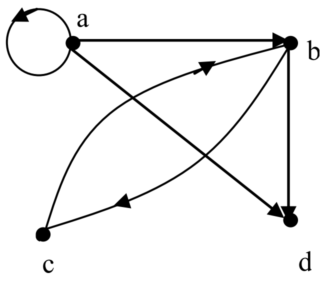
（9） $S^3=S\circ S^2=\{<a，d>,<b，c>,<b，d>,<c，b>\}\circ\{<b,b>,<c,c>\}$
$=\{<b，c>,<c，b>\}$

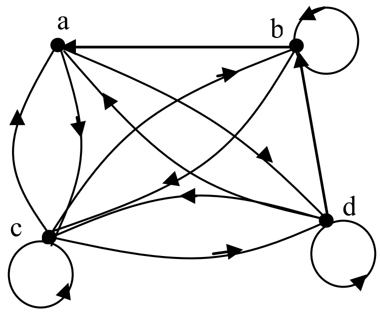
他们的关系矩阵分别如下：

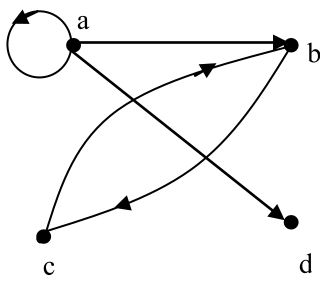
$$\boldsymbol{M}_{R\cup S}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R^C}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R\oplus S}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

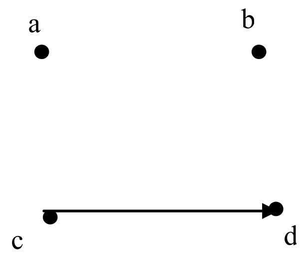
$$\boldsymbol{M}_{S\circ R}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{S^3}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

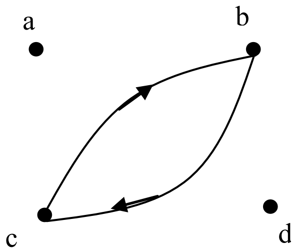
他们的关系图分别如下：











9. 二元关系 R 和 S 的关系矩阵如下：

$$\boldsymbol{M}_{R}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{S}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

求下列关系的关系矩阵。

（1）$R\cup S$　　　　（2）$R\cap S$

（3）R^{c}　　　　（4）$R-S$

(5) $R \oplus S$ (6) $R \circ S$

(7) $S \circ R$ (8) R^2

(9) S^3 (10) R^{-1}

解 略

10. 设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系，S_1，S_2 是从集合 B 到集合 C 的一个关系，T 是从集合 C 到集合 D 的一个关系，证明下列等式。

(1) $R \circ (S_1 \bigcup S_2) = (R \circ S_1) \bigcup (R \circ S_2)$

(2) $R \circ (S_1 \bigcap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \bigcap (R \circ S_2)$

(3) $(S_1 \bigcup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \bigcup (S_2 \circ T)$

(4) $(S_1 \bigcap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \bigcap (S_2 \circ T)$

解 (1)、(3)、(4) 略

(2) $<x,z> \in R \circ (S_1 \bigcap S_2) \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S_1 \wedge <y,z> \in S_2)$

$\Leftrightarrow \exists y((<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S_1) \wedge (<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S_2))$

$\Rightarrow \exists y(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S_1) \wedge \exists y(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S_2)$

$\Rightarrow <x,z> \in R \circ S_1 \wedge <x,z> \in R \circ S_2 \Leftrightarrow <x,z> \in (R \circ S_1) \bigcap (R \circ S_2)$

11. 设 R 和 S 都是从集合 A 到集合 B 的一个关系，证明下列等式。

(1) $(R \bigcup S)^{-1} = R^{-1} \bigcup S^{-1}$ (2) $(R \bigcap S)^{-1} = R^{-1} \bigcap S^{-1}$

(3) $(R^c)^{-1} = (R^{-1})^c$ (4) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

(5) $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

解 略

§3.3 二元关系的性质与闭包

习题 3.3

1. 确定下列整数集合上的关系 R 是否是自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的，其中 $<x，y>\in R$，当且仅当

（1）$x \neq y$

（2）$xy \geq 1$

（3）$x = y+1$ 或 $x = y-1$

（4）$x \equiv y(\bmod 7)$

（5）$x = y^2$

（6）$x \geq y^2$

（7）x 是 y 的倍数

（8）x 与 y 都是负的或都是非负的

解 （2）、（4）、（6）、（8）略

（1）不是自反的，是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。

（3）不是自反的，是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。

（5）不是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，不是传递的。

（7）是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，是传递的。

2. 设 $A=\{a，b，c，d\}$，

（1）给出 A 上的一个关系 R，要求 R 既不是自反的又不是反自反的；

（2）给出 A 上的一个关系 R，要求 R 既是对称的又是反对称的；

（3）给出 A 上的一个关系 R，要求 R 既不是对称的又不是反对称的；

（4）给出 A 上的一个关系 R，要求 R 是传递的但 $R\cup R^{-1}$ 不是传递的。

解 略

3. 设 A 是一个 n 元集合，问 A 上有多少个关系？这其中又有多少个关系是

（1）对称的？

（2）反对称的？

（3）非对称的？

（4）反自反的？

（5）自反的和对称的？

（6）既不是自反的也不是反自反的？

解 （2）、（4）、（6）略

A 是一个 n 元集合，所以 $A\times A$ 有 n^2 个元素，它的子集的个数为 2^{n^2}，所以 A 上有 2^{n^2} 个关系。

（1）将 $A\times A$ 中的元素分为三部分：第一部分是 n 个 $<a,a>$ 类型的序偶，第二部分是 $n(n-1)/2$ 个 $<a,b>$ 类型的序偶，第三部分是 $n(n-1)/2$ 个 $<b,a>$ 类型的序偶。

A 上对称关系的个数 $=(C_{n(n-1)/2}^{0}+C_{n(n-1)/2}^{1}+\cdots+C_{n(n-1)/2}^{n(n-1)/2})(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$

$$=2^{n(n-1)/2}\cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}$$

（2）A 上反对称关系的个数与 A 上对称关系的个数相等 $=2^{n(n+1)/2}$。

（3）A 上对称关系的个数为 $(C_{n(n-1)/2}^{0}+C_{n(n-1)/2}^{1}+\cdots+C_{n(n-1)/2}^{n(n-1)/2})(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$，其中又是自反的仅为

$(C_{n(n-1)/2}^{0}+C_{n(n-1)/2}^{1}+\cdots+C_{n(n-1)/2}^{n(n-1)/2})\cdot C_{n}^{n}=2^{n(n-1)/2}$个。

4. 根据下列关系的关系矩阵判断它们是否是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？并求出相应的关系，画出相应的关系图。

$$\boldsymbol{M}_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}_3}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R_4}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R_5}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}_6}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R_7}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R_8}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}_9}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{R_{10}}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{R_{11}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}_{12}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

解 略

5. 设R和S是集合A上的二元关系，试证表 3.2 的有关论断，即：

（1）当R和S是自反的，则$R\cup S$、$R\cap S$、$R\circ S$和R^{-1}也是自反的；而R^{c}和$R-S$则不一定。

（2）当R和S是反自反的，则$R\cup S$、$R\cap S$、$R-S$和R^{-1}也是反自反的；而R^{c}和$R\circ S$则不一定。

（3）当R和S是对称的，则$R\cup S$、$R\cap S$、R^{c}、$R-S$和R^{-1}也是对称的；而$R\circ S$则不一定。

（4）当R和S是反对称的，则$R\cap S$、$R-S$和R^{-1}也是反对称的；而$R\cup S$、R^{c}和$R\circ S$则不一定。

（5）当R和S是传递的，则$R\cap S$和R^{-1}也是传递的。而$R\cup S$、R^{c}、$R-S$和$R\circ S$则不一定。

解 （2）、（4）、（5）略

（1）因为R和S是自反的，所以$\forall a\in A$，都有$<a,a>\in R\wedge<a,a>\in S$，从而$\forall a\in A$，都有$<a,a>\in R\cup S$、$<a,a>\in R\cap S$、$<a,a>\in R\circ S$和$<a,a>\in R^{-1}$，所以他们也是自反的。

而R^{c}和$R-S$则不一定是自反的，例如：取集合$A=\{a，b，c\}$及其上的自反关系$R=\{<a，a>,<a,b>,<b，b>,<c，c>\}$和$S=\{<a，a>,<a,b>,<b，b>\}$，而$R^{c}=\{<a,c>,<b,a>,<b,c>,<c,a>,<c,b>\}$和$R-S=\{<a,b>\}$都不是自反的。

（3）因为R和S是对称的，所以$\forall a,b\in A$，若$<a,b>\in R$则$<b,a>\in R$，若$<a,b>\in S$则$<b,a>\in S$，从而$\forall a,b\in A$，若$<a,b>\in R\bigcup S$，则$<b,a>\in R\bigcup S$；若$<a,b>\in R\bigcap S$，则$<b,a>\in R\bigcap S$；若$<a,b>\in R^c$，则$<b,a>\in R^c$；若$<a,b>\in R-S$，则$<b,a>\in R-S$；若$<a,b>\in R^{-1}$，则$<b,a>\in R^{-1}$，所以他们也是对称的。

而$R\circ S$则不一定是对称的，例如：取集合$A=\{a, b, c\}$及其上的对称关系$R=\{<a,b>,<b, a>\}$和$S=\{<b, b>\}$，而$R\circ S=\{<a,b>\}$不是对称的。

6. 设$A=\{a, b, c\}$及其上的关系$R=\{<a, a>,<a, b>,<b, c>,<c, c>\}$，求自反闭包$r(R)$、对称闭包$s(R)$和传递闭包$t(R)$。

解 自反闭包$r(R)=\{<a, a>,<a, b>,<b,b>,<b, c>,<c, c>\}$

对称闭包$s(R)=\{<a, a>,<a, b>,<b,a>,<b, c>,<c,b>,<c, c>\}$

传递闭包$t(R)=\{<a, a>,<a, b>,<b, c>,<c, c>,<a,c>\}$

7. 设关系$R=\{<1, 2>,<1, 4>,<3, 3>,<4, 1>\}$，求包含$R$的最小关系使得它是

（1）自反的和传递的。（2）对称的和传递的。

（3）自反的、对称的和传递的。

解 略

8. 根据下列关系的关系矩阵分别求出它们的自反闭包$r(R)$、对称闭包$s(R)$和传递闭包$t(R)$的关系矩阵。

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{M}_S=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

解 两个关系的闭包的关系矩阵分别如下：

$$\boldsymbol{M}_{r(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{s(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{r(S)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{s(S)}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_{t(S)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

9. 设R的关系图如图3.5所示，试给出自反闭包$r(R)$、对称闭包$s(R)$和传递闭包$t(R)$的关系图。

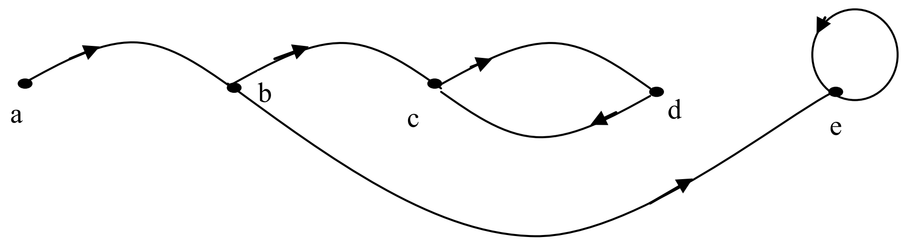


图 3.5　习题 9 的图

解 略

10. 设 R 是集合 A 上的关系，

（1）若 R 是自反的，证明 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的。

（2）若 R 是对称的，证明 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的。

（3）若 R 是传递的，证明 $r(R)$ 也是传递的。

解 略

11. 设 R 和 S 是集合 A 上的关系，且 $R \supseteq S$，证明

$$r(R) \supseteq r(S),\ s(R) \supseteq s(S),\ t(R) \supseteq t(S)$$

解 略

§3.4　等价关系与划分

习题 3.4

1. 对于给定的集合 A 和其上的二元关系 R，判断 R 是否为等价关系。

（1）A 为实数集，$\forall x，y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x - y = 2$。

（2）$A = \{1，2，3\}$，$\forall x，y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x + y \neq 3$。

（3）$A = \mathsf{Z}^+$，即正整数集，$\forall x，y \in A$，$xRy \Leftrightarrow xy$ 是奇数。

（4）$A = P(X)$，集合 X 的基数 $|X| \geq 2$，$\forall x，y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x$。

（5）$A = P(X)$，集合 X 和 C 满足 $C \subseteq X$，$\forall x，y \in A$，$xRy \Leftrightarrow x \oplus y \subseteq C$。

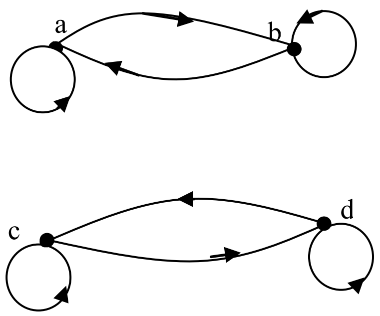
解　略

2. 设 $A = \{a，b，c，d\}$，对于 A 上的等价关系

$$R = \{<a，b>, <b，a>, <c，d>, <d，c>\} \cup I_A$$

画出 R 的关系图，并求出 A 中各元素关于 R 的等价类。

解　R 的关系图如下：



A 中各元素关于 R 的等价类分别为：

$$[a] = [b] = \{a,b\}，[c] = [d] = \{c,d\}$$

3. 考虑单词的集合 $W = \{sheet，last，sky，wash，wind，sit\}$。$R_1$ 和 R_2 分别是由“具有同样多的字母”和“具有相同的开头字母”定义的等价关系。求由 R_1 和 R_2 确定的商集 W/R_1 和 W/R_2。

解　略

4. 给出模 6 同余关系，并求出所有的模 6 同余类。

解　模 6 同余关系 $R = \{<a，b> | a，b \in \mathsf{Z} \wedge a \equiv b (\mathrm{mod}\ 6)\}$

所有的模 6 同余类为：

$$[i] = \{5z + i \mid z \in \mathsf{Z}\}，i = 0，1，\cdots,5$$

即

$$[0] = \{\cdots,-20,-15,-10,-5,0,5,10,15,20,\cdots\}$$

$$[1] = \{\cdots,-19,-14,-9,-4,1,6,11,16,21,\cdots\}$$

$$[2]=\{\cdots,-18,-13,-8,-3,2,7,12,17,22,\cdots\}$$
$$[3]=\{\cdots,-17,-12,-7,-2,3,8,13,18,23,\cdots\}$$
$$[4]=\{\cdots,-16,-11,-6,-1,4,9,14,19,24,\cdots\}$$

5. 设 $A=\{<0，2>,<1，2>,<2，4>,<3，4>,<4，6>,<5，6>,\cdots\}$，判断下列关系是否等价关系，若是等价关系，试给出它的等价类。

（1）$R=\{<<x_1，x_2>,<y_1，y_2>>|<x_1，x_2>,<y_1，y_2>\in A\wedge x_1+y_2=x_2+y_1\}$

（2）$R=\{<<x_1，x_2>,<y_1，y_2>>|<x_1，x_2>,<y_1，y_2>\in A\wedge x_1+y_1=x_2+y_2\}$

解 略

6. 假如 R 和 S 是集合 A 上的等价关系，问下面的关系是否一定是等价关系，是的给予证明，不是的举出反例。

（1）$R\cup S$　　（2）$R\cap S$

（3）R^c　　（4）$R-S$

（5）$R\circ S$　　（6）R^{-1}

解 （1）、（2）、（3）、（4）略

（5）$R\circ S$ 不一定是等价关系，例如：取集合 $A=\{a，b，c\}$ 及其上的等价关系

$$R=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>\}$$
$$S=\{<a,a>,<b，b>,<b,c>,<c,b>,<c,c>\}$$

有 $R\circ S=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,b>,<c,c>\}$，它不是对称的，从而不是等价关系。

（6）R^{-1} 一定是等价关系，证明如下：

$\forall x\in A$，因为 R 是自反的，所以 $<x,x>\in R$，从而 $<x,x>\in R^{-1}$，即 R^{-1} 是自反的；

$\forall <x,y>\in R^{-1}$，有 $<y,x>\in R$，因为 R 是对称的，所以 $<x,y>\in R$，从而 $<y,x>\in R^{-1}$，即 R^{-1} 是对称的；

$\forall <x,y>,<y,z>\in R^{-1}$，有 $<y,x>,<z,y>\in R$，因为 R 是传递的，所以 $<z,x>\in R$，从而 $<x,z>\in R^{-1}$，即 R^{-1} 是传递的；

综上所述，若 R 是集合 A 上的等价关系，则 R^{-1} 一定是等价关系。

7. 当我们构造一个关系的自反闭包的对称闭包的传递闭包时，一定得到一个等价关系吗？是的请证明，不是的请举出反例。

解 略

8. 假如 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系，π_1 和 π_2 分别是对应于 R_1 和 R_2 的划分。证明

$R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当 π_1 是 π_2 的加细。（如果在划分 π_1 中的每个集合都是划分 π_2 中某个集合的子集，则 π_1 叫做 π_2 的加细）

证明 （1）由 $R_1 \subseteq R_2$ 推出 π_1 是 π_2 的加细，这就是要证明对于 π_1 中的任何集合 A_1，在 π_2 中都存在集合 A_2，使得 $A_1 \subseteq A_2$。

因为 π_1 中的任何集合 A_1 是 A 中的某个元素 a 关于等价关系 R_1 的等价类，即

$$A_1 = [a]_{R_1} = \{b \mid <a,b> \in R_1\}$$

现构造

$$A_2 = [a]_{R_2} = \{b \mid <a,b> \in R_2\}$$

它是 A 中元素 a 关于等价关系 R_2 的等价类，从而是 π_2 中的一个集合。又由于 $R_1 \subseteq R_2$，所以有 $A_1 \subseteq A_2$。

（2）由 π_1 是 π_2 的加细推出 $R_1 \subseteq R_2$，这就是要证明如果对于 π_1 中的任何集合 A_1，在 π_2 中都存在集合 A_2，使得 $A_1 \subseteq A_2$，那么 $R_1 \subseteq R_2$。

$\forall <a,b> \in R_1$，有 $[a]_{R_1} = [b]_{R_1}$，所以在 π_1 中存在集合 $A_1 = [a]_{R_1} = [b]_{R_1}$，使得 $a,b \in A_1$。

根据条件，在 π_2 中存在集合 A_2 使得 $A_1 \subseteq A_2$，从而 $a,b \in A_2$。由于 A_2 是 A 中某个元素关于等价关系 R_2 的等价类，根据等价类的定义，有 $<a,b> \in R_2$。所以 $R_1 \subseteq R_2$。

§3.5 函数

习题 3.5

1\. 设函数 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若}x\text{为奇数}\\ \dfrac{x}{2} & \text{若}x\text{为偶数}\end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(\{0\})$，$f(3)$，$f(\{3\})$，$f(\{0，2，4，6，\cdots\})$，$f(\{1，3，5，7，9\})$，$f(\{4，6，8\})$。

解 略

2\. 设函数 f: $X\to Y$，$A\subseteq X$，$B\subseteq X$，证明

（1）$f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$　　（2）$f(A\bigcap B)\subseteq f(A)\bigcap f(B)$

解 略

3\. 设可逆函数 f: $X\to Y$，$A\subseteq Y$，$B\subseteq Y$，证明

（1）$f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$　　（2）$f^{-1}(A\bigcap B)\subseteq f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$

解（1）因为

$$\begin{aligned}y\in f^{-1}(A\bigcup B)&\Leftrightarrow\exists x(x\in A\bigcup B\wedge f(x)=y)\\&\Leftrightarrow\exists x((x\in A\wedge f(x)=y)\vee(x\in B\wedge f(x)=y))\\&\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge f(x)=y)\vee\exists x(x\in B\wedge f(x)=y)\\&\Leftrightarrow y\in f^{-1}(A)\vee y\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow y\in f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$

（2）因为

$$\begin{aligned}y\in f^{-1}(A\bigcap B)&\Leftrightarrow\exists x(x\in A\bigcap B\wedge f(x)=y)\\&\Leftrightarrow\exists x((x\in A\wedge f(x)=y)\wedge(x\in B\wedge f(x)=y))\\&\Rightarrow\exists x(x\in A\wedge f(x)=y)\wedge\exists x(x\in B\wedge f(x)=y)\\&\Leftrightarrow y\in f^{-1}(A)\wedge y\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow y\in f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$

4\. 给定函数 f 和集合 A、B 如下：

（1）f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x$，$A=\{8\}$，$B=\{4\}$

（2）f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{+}$，$f(x)=2^{x}$，$A=\{1\}$，$B=\{1，2\}$

（3）f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(x)=<x，x+1>$，$A=\{5\}$，$B=\{<2，3>\}$

（4）f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=2x+1$，$A=\{2，3\}$，$B=\{1，3\}$

（5）f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|$，$A=\{-1，2\}$，$B=\{1\}$

（6）f: $S\to S$，$S=[0，1]$，$f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$，$A=(0，1)$，$B=[\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{2}]$

（7） f：$S \to \mathbf{R}$，$S=[0,+\infty)$，$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$A=\{0,\ \dfrac{1}{2}\}$，$B=\{\dfrac{1}{2}\}$

（8） f：$S \to \mathbf{R}^{+}$，$S=(0,\ 1)$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$A=S$，$B=\{2,\ 3\}$

对以上每一组函数 f 和集合 A、B，分别回答以下问题：

（a）求 A 在 f 下的像 $f(A)$ 和 B 在 f 下的原像 $f^{-1}(B)$。

（b）f 是不是满射、单射和双射？

（c）如果 f 是双射，求 f 的逆函数。

解 （1）、（2）、（3）、（5）、（6）、（7）略

（4）$f(A)=\{5,7\}$，$f^{-1}(B)=\{0,1\}$，f 不是满射，是单射。

（8）$f(A)=(1,+\infty)$，$f^{-1}(B)=\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\}$，$f$ 不是满射，是单射。

5. 设 X 和 Y 分别是 m 元集和 n 元集，试就三种情况：$m>n$，$m=n$，$m<n$ 求解下列问题：

（1）从 X 到 Y 的单射函数有多少个？ （2）从 X 到 Y 的双射函数有多少个？

解 （1）$m>n$：不存在，

$m=n$：$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=m!$ 个，

$m<n$：$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=\dfrac{n!}{m!}$ 个。

（2）$m>n$：不存在，

$m=n$：$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=m!$ 个，

$m<n$：不存在。

6. 设 f，g，$h \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，即 f，g，h 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数，且有

$$f(n)=n+1,\qquad g(n)=2n,\qquad h(n)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ 1 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

求 $f\circ f$，$g\circ f$，$f\circ g$，$h\circ g$，$g\circ h$，$h\circ g\circ f$。

解 略

7. 设 f：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$f(<x,\ y>)=<\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}>$，证明 f 是双射并求出其逆函数。

证明：$\forall <u,v>\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，令 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$，则 $f(<x,\ y>)=<u,\ v>$，所以 f 是满射。

若 $<\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}>=<\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}>$，则 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{u+v}{2}$，$\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{u-v}{2}$，从而 $x=u,y=v$，即 $<x,y>=<u,v>$，所以 f 是单射。

从而 f 是双射，其逆函数为：

$$f^{-1}\text{：}\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}\text{，}f(<x\text{，}y>)=<x+y\text{，}x-y>$$

8. 设全集 $E=\{1，2，3，4\}$，集合 $A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{1，2\}$，$C=\{2\}$，$D=\phi$，求特征函数 ψ_A，ψ_B，ψ_C 和 ψ_D。

解 略

9. 若 A，B 是全集 E 的两个子集，证明

（1）$\forall x(\psi_A(x)=1)\Leftrightarrow A=E$

（2）$\forall x(\psi_A(x)=0)\Leftrightarrow A=\phi$

（3）$\forall x(\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x))\Leftrightarrow A\subseteq B$

（4）$\forall x(\psi_A(x)=\psi_B(x))\Leftrightarrow A=B$

（5）$\psi_{A^c}(x)=1-\psi_A(x)$

（6）$\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)\times\psi_B(x)$

（7）$\psi_{A-B}(x)=\psi_{A\cap B^C}(x)=\psi_A(x)\times(1-\psi_B(x))$

解 略

10. 设 $A=\{a，b，c\}$，$R=\{<a，b>，<b，a>\}\cup I_A$ 为 A 上的等价关系，求自然映射 g：$A\to A/R$。

解 略

11. 对于底函数和顶函数，证明如下结论（下面的 x 为实数）：

（1）$\lfloor x\rfloor=n$ 当且仅当 $n\le x<n+1$，其中 n 为整数。

（2）$\lceil x\rceil=n$ 当且仅当 $n-1<x\leqslant n$，其中 n 为整数。

（3）$\lfloor x\rfloor=n$ 当且仅当 $x-1<n\leqslant x$，其中 n 为整数。

（4）$\lceil x\rceil=n$ 当且仅当 $x\leqslant n<x+1$，其中 n 为整数。

（5）$x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lceil x\rceil<x+1$。

（6）$\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil$，$\lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$。

（7）$\lfloor x+m\rfloor=\lfloor x\rfloor+m$，其中 m 为整数。

（8）$\lceil x+m\rceil=\lceil x\rceil+m$，其中 m 为整数。

解 略

12. 有些计算器上有 INT 函数，当 x 为非负实数时 $INT(x)=\lfloor x\rfloor$，当 x 为负实数时 $INT(x)=\lceil x\rceil$。证明这一 INT 函数满足 $INT(-x)=-INT(x)$。

解 略

13. 数据在某以太网上以 1 500 个字节为信息块进行传输。请问下面的数据量在这个以太网上各需要多少个信息块进行传输？

（1）150 千字节的数据。

（2）384 千字节的数据。

（3）1.544 兆字节的数据。

（4）45.3 兆字节的数据。

解 略

14. 令a和b为实数，且$a<b$，用底函数及/或顶函数表示使$a<n<b$成立的整数n的数目。

15. 画出下列各函数的图像：

（1）$f(x)=\lfloor x+0.5\rfloor$

（2）$f(x)=\lfloor 2x+1\rfloor$

（3）$f(x)=\lceil x/3\rceil$

（4）$f(x)=\lceil 1/x\rceil$

（5）$f(x)=\lceil x-2\rceil+\lfloor x+2\rfloor$

（6）$f(x)=\lfloor 2x\rfloor\times\lceil x/2\rceil$

（7）$f(x)=\lfloor\lceil x-0.5\rceil+0.5\rfloor$

解 略

§3.6　集合的等势与基数

习题 3.6

1. 判断下列集合是否为无限可数集，若是，给出自然数集合和该集合之间的一个双射函数。

（1）偶整数。

（2）0 和 0.5 之间的实数。

（3）是 7 的倍数的整数。

（4）不能被 3 整除的整数。

（5）能被 5 整除但不能被 7 整除的整数。

（6）十进制表示中只含数字 1 的实数。

（7）十进制表示中只含数字 1 或 9 的实数。

解（5）、（6）、（7）略

（1）　$A=\{$偶整数$\}$是无限可数集，其中的一个双射函数为

$$f\text{：}\ \mathbf{N}\to A,\qquad f(x)=2x$$

（2）　$A=$（0，0.5）不是无限可数集。

（3）　$A=\{$是 7 的倍数的整数$\}$是无限可数集，其中的一个双射函数为

$$f\text{：}\ \mathbf{N}\to A,\qquad f(x)=7x$$

（4）　$A=\{$不能被 3 整除的整数$\}$是无限可数集，其中的一个双射函数为

$$\begin{array}{cccccccccccccc}1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -4 & 5 & -5 & 7 & -7 & 8 & -8 & 10 & -10\cdots\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\end{array}$$

2. 若 A 为不可数集合而 B 是可数集合，$A-B$ 必定是不可数集合吗？若是请给予证明，若不是，请举出反例。

解 略

3. 设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 是可列集，证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可列集。即可列个可列集的并仍是可列集。

证明 因为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 是可列集，所以不妨假设

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n},\ \cdots\}$$

$$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots\}$$

$$A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ \cdots,\ a_{3n},\ \cdots\}$$

$$\vdots$$

这样，类似于课本上 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$ 的证明，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 中的元素 a_{ij} 可以按下列方式进行排列：先排 $i+j=2$ 的元素，再排 $i+j=3$ 的元素，然后是 $i+j=4$ 的元素，等等，这样集合 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},\cdots\}$ 也是可列集。

4. 设 A_1，A_2，…，A_n，… 是连续集，证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是连续集。即可列个连续集的并仍是连续集。

解 略

5. 设 A、B、C、D 是 4 个集合，且 $A \sim C$，$B \sim D$，证明 $A \times B \sim C \times D$。

解 略

6. 证明所有位串组成的集合是可数的。

解 略

7. 证明用特定的一种程序语言写的计算机程序组成的集合是可数的。[提示：可以认为以某种程序语言写的计算机程序是由有限字母集中字母组成的符号串。]

证明 对于有限的字母表，只有有限多个长度为 n 的位串，其中 n 为正整数，这样，根据习题 3 知，有限字母表上长度不超过给定正整数的位串只有有限多个。由于用特定程序语言写的计算机程序集合是某个有限字母表上的所有位串之集合的子集，所以作为可数集合的子集，程序集合也是可数的。

8. 证明从正整数集合到集合 $\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$ 的函数组成的集合是不可数的。[提示：找一个 0 到 1 之间的实数集合到这个函数组成的集合的一个子集的双射函数。为此可以让实数 $0.d_1d_2\cdots d_n\cdots$ 对应函数 f，而 $f(n)=d_n$。]

解 略

9. 如果有计算机程序能计算函数的值，就说这一函数是**可计算的**。利用上面的习题 7 和习题 8 证明存在不可计算的函数。

解 略

10. 设 A 为任意集合，则 $P(A) \approx \{0，1\}^A$，这里 $\{0，1\}^A$ 是所有从集合 A 到二值集合 $\{0，1\}$ 的函数组成的集合。[提示：$P(A)$ 中的任意元素 B 与 B 的特征函数 $\Psi_B \in \{0，1\}^A$ 一一对应。]

解 略

11. 证明 $2^{\aleph_0} = \aleph$，即证明无限可数集的幂集是连续集。[提示：结合习题 8 的提示和习题 10 的提示进行证明。]

解 略

习题 3.7

1. 列出关系$\{<a, b, c, d>| a, b, c, d \in \mathbf{Z}^+ 且 a\cdot b\cdot c\cdot d=6\}$中所有有序 4 元组。

解 $\{<a, b, c, d>| a, b, c, d \in \mathbf{Z}^+ 且 a\cdot b\cdot c\cdot d=6\}$

$=\{<1,1,1,6>,<1,1,6,1>,<1,6,1,1>,<6,1,1,1>,<1,1,2,3>,<1,1,3,2>,<1,2,1,3>,<1,3,1,2>,$
$<1,2,3,1>,<1,3,2,1>,<2,3,1,1>,<3,2,1,1>,<2,1,3,1>,<3,1,2,1>,<2,1,1,3>,<3,1,1,2>$

2. 列出二维表 3.18 所表示的多元关系中所有 5 元组。假设不增加新的 5 元组，找出二维表 3.18 所有的主键码。

表 3.18 航班信息

航空公司	航班	登机口	目的地	起飞时间
Nadir	112	34	底特律	08:10
Acme	221	22	丹佛	08:17
Acme	122	33	安克雷奇	08:22
Acme	323	34	檀香山	08:30
Nadir	199	13	底特律	08:47
Acme	222	22	丹佛	09:10
Nadir	322	34	底特律	09:44

解 略

3. 当施用投影运算$\pi_{2,3,5}$到有序 5 元组$<a, b, c, d>$时你能得到什么？

解 略

4. 哪个投影运算用于除去一个 6 元组的第一、第二和第四个分量？

解 略

5. 给出分别施用投影运算$\pi_{1,2,4}$和选择运算$\sigma_{航空公司=Nadir}$到二维表 3.18 以后得到的表。

解 对航班信息二维表进行投影运算$\pi_{2,3,5}$后得到的二维表

航班	登机口	起飞时间
112	34	08:10
221	22	08:17
122	33	08:22
323	34	08:30
199	13	08:47
222	22	09:10
322	34	09:44

对航班信息二维表进行选择运算$\sigma_{航空公司=Nadir}$后得到的二维表

航空公司	航班	登机口	目的地	起飞时间
Nadir	112	34	底特律	08:10
Nadir	199	13	底特律	08:47
Nadir	322	34	底特律	09:44

6. 把连接运算J_3用到 5 元组二维表和 8 元组二维表后所得二维表中有序多元组有多少个分量？

解 略

7. 构造把连接运算J_2用到二维表 3.19 和二维表 3.20 所得到的二维表。

表 3.19　零件供应商

供货商	零件号	项目
23	1092	1
23	1101	3
23	9048	4
31	4975	3
31	3477	2
32	6984	4
32	9191	2
33	1001	1

表 3.20　零件数量和颜色代码

零件号	项目	数量	颜色代码
1001	1	14	8
1092	1	2	2
1101	3	1	1
3477	2	25	2
4975	3	6	2
6984	4	10	1
9048	4	12	2
9191	2	80	4

解　零件供应商二维表与零件数量和颜色代码二维表连接运算J_2结果

供货商	零件号	项目	数量	颜色代码
33	1001	1	14	8
23	1092	1	2	2
23	1101	3	1	1
31	3477	2	25	2
31	4975	3	6	2
32	6984	4	10	1
23	9048	4	12	2
32	9191	2	80	4

第 4 章：群、环、域

习题 4.1

1. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

（1）集合 $n\mathbf{Z}=\{n\times z \mid z\in\mathbf{Z}\}$ 关于普通加法和普通乘法运算，其中 n 是正整数。

（2）集合 $S=\{x \mid x=2n-1，n\in\mathbf{Z}^{+}\}$ 关于普通加法和普通乘法运算。

（3）集合 $S=\{0，1\}$ 关于普通加法和普通乘法运算。

（4）集合 $S=\{x \mid x=2^{n}，n\in\mathbf{Z}^{+}\}$ 关于普通加法和普通乘法运算。

（5）n 阶 $(n\geq 2)$ 实可逆矩阵集合 $\hat{M}_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵加法和矩阵乘法运算。

对于封闭的二元运算，判断它们是否满足交换律、结合律和分配律，并在存在的情况下求出它们的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

解 略

2. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

（1）正实数集合 $\mathbf{R}^{+}$ 和∗运算，其中∗运算定义为：

$$\forall a，b\in\mathbf{R}^{+}，a*b=a\cdot b-a-b$$

（2）$A=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}，n\geq 2$。∗运算定义为：

$$\forall a，b\in A，a*b=b$$

对于封闭的二元运算，判断它们是否满足交换律、结合律和等幂律，并在存在的情况下求出它们的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

解 （1）不封闭，例如：$0.5*0.5=0.5\times 0.5-0.5-0.5=-0.75\notin\mathbf{R}^{+}$

（2）封闭。

不满足交换律：$\forall a,b\in A，a*b=b\neq a=b*a$ $a*b=b$ $b*a=a$

满足结合律：$\forall a,b\in A$ $(a*b)*c=b*c=c$，$a*(b*c)=a*c=c$

满足等幂律：$\forall a\in A$ $a*a=a$

$a_1，a_2，\cdots，a_n$ 都是左单位元，但无右单位元。

$a_1，a_2，\cdots，a_n$ 都是右零元，但无左零元。

因为无单位元，所以无逆元。

3. 设 $S=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$，这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数集合，∗为 S 上的二元运算，$\forall <u，v>,<x，y>\in S$，

$$<u，v>*<x，y>=<ux，uy+v>$$

（1）∗运算在 S 上是否可交换、可结合？是否为等幂的？

（2）∗运算是否有单位元、零元？如果有，请指出，并求 S 中所有可逆元素的逆元。

（3）∗运算在 S 上是否满足消去律？

解 略

4. $\mathbf{R}$ 为实数集合，定义以下六个函数 $f_1，\cdots，f_6$。$\forall x，y\in\mathbf{R}$ 有

$f_1(<x, y>)=x+y$ $f_2(<x, y>)=x-y$

$f_3(<x, y>)=|x-y|$ $f_4(<x, y>)=xy$

$f_5(<x, y>)=\min(x, y)$ $f_6(<x, y>)=\max(x, y)$

（1）指出哪些函数是R上的二元运算。

（2）若是R上的二元运算，说明是否是可交换的、可结合的、等幂的？

（3）若是R上的二元运算，在存在的情况下求出单位元、零元以及每个可逆元素的逆元。

（4）若是R上的二元运算，说明是否满足消去律。

解 略

5. 设$G=\{1, 2, \cdots, 10\}$，问下面定义的运算$*$在G上是否封闭？对于封闭的二元运算，请说明运算是否满足交换律、结合律，并并在存在的情况下求出运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

（1）$x*y=\gcd(x, y)$，$\gcd(x, y)$表示x与y的最大公因数。

（2）$x*y=\mathrm{lcm}(x, y)$，$\mathrm{lcm}(x, y)$表示x与y的最小公倍数。

（3）$x*y=$大于等于x和y的最小整数。

（4）$x*y=$质数p的个数，其中$x\le p\le y$。

解 （1）封闭。满足交换律，满足结合律，满足等幂律。无单位元，1 是零元。因为无单位元，所以无逆元。

（2）不封闭，例如：$3*5=\mathrm{lcm}(3,5)=15\notin G$

（3）封闭。满足交换律，满足结合律，满足等幂律。1 是单位元，10 是零元。1 的逆元为 1，其他无逆元。

（4）封闭。不满足交换律，不满足结合律，不满足等幂律。无单位元，无零元。因为无单位元，所以无逆元

§ 4.2　半群与群

习题 4.2

1. 设G是所有形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵组成的集合， $*$表示矩阵乘法。试问$<G, *>$是半群吗？是有么半群吗？这里a_{11}、a_{12}是实数。

解 任取G中的 2 个元素　$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、

∵　$A*B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in G$

∴　$<G, *>$是一个代数系统。且因为矩阵的乘法满足结合律，所以$<G, *>$是半群。

又因为，只要$a_{11}=1$，则

$$A*B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

对任何的$B\in G$成立，即$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是左单位元（不论$a_{12}$取什么值）。但右单位元不存在，因为不论$b_{11}$，$b_{12}$取什么值，

$$A*B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

不可能对任何的$A\in G$成立。

所以单位元不存在（事实上，若单位元存在，则左、右单位元都存在且相等还唯一），所以$<G, *>$不是有么半群。

2. 在正实数集合$\mathbf{R}^+$上定义运算$*$如下

$$a*b=\frac{a+b}{1+ab}$$

试问$<\mathbf{R}^+, *>$是半群吗？是有么半群吗？

解 略

3. 在自然数集合$\mathbf{N}$上定义运算$\vee$和$\wedge$如下：

$$a\vee b=\max\{a, b\}, \qquad a\wedge b=\min\{a, b\}$$

试问$<\mathbf{N}, \vee>$和$<\mathbf{N}, \wedge>$是半群吗？是有么半群吗？

解 略

4. 设$<G, *>$是半群，它有一个左零元θ，令

$$G_\theta=\{x*\theta \mid x\in G\}$$

证明$<G_\theta, *>$构成半群。

解 略

5. 在一个多于一个元素的有么半群中，证明一个右零元不可能有右逆元。

解 略

6. 设G是一个多于一个元素的集合，G^G是G上所有函数组成的集合，证明有么半群$<G^G, \circ>$有多于一个的右零元，但没有左零元。这里$\circ$表示复合运算。

解 略

7. 设$\mathbf{Z}$为整数集合，在$\mathbf{Z}$上定义二元运算$*$如下：

$$x*y=x+y-2, \quad \forall x, y\in\mathbf{Z}$$

问$\mathbf{Z}$关于运算$*$能否构成群？为什么？

解 略

8. $G=\{f(x)=ax+b \mid a\neq 0, a, b\in\mathbf{R}\}$，证明$<G, \circ>$是群，这里$\circ$是复合运算。

解 略

9. 设$G=\{r, 1/r, 1-r, 1/(1-r), (r-1)/r, r/(r-1)\}$，证明$<G, *>$是群，这里，运算$a*b$表示将$b$代换到$a$中$r$所在位置。

解 略

10. 设$A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x\neq 0, 1\}$。在$A$上定义六个函数如下：

$f_1(x)=x$　　　　$f_2(x)=x^{-1}$

$f_3(x)=1-x$　　　　$f_4(x)=(1-x)^{-1}$

$f_5(x)=(x-1)x^{-1}$　　　　$f_6(x)=x(x-1)^{-1}$

令G为这六个函数构成的集合，$\circ$是复合运算。

（1）给出$<G, \circ>$的运算表。　　　　（2）验证$<G, \circ>$是群。

解 （1）$<G, \circ>$的运算表如下：

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

（2）从上运算表可以看出，运算具有封闭性，满足结合律，单位元为f_1，每个元都有逆元，所以$<G, \circ>$构成群。

11. 在群$<\mathbf{R}, +>$中计算下列元素的幂：

$0.5^2=?$　　　　$0.5^{10}=?$

$0.5^0=?$　　　　$\sqrt{4}^2=?$

$\sqrt{4}^{10}=?$　　　　$\sqrt{4}^0=?$

解 $0.5^2=1$　　　　$0.5^{10}=5$

$0.5^0 = 0$ $\sqrt{4}^2 = 4$

$\sqrt{4}^{10} = 20$ $\sqrt{4}^0 = 0$

12 在群$<G,\ *>$中，证明

$$x^m * x^n = x^{m+n}，\ (x^m)^n = x^{m\times n}，\ \forall m，n \in \mathbf{Z}$$

解 略

13. 设$G=\{1，2，3，4，5，6\}$，对于G上的二元运算"模 7 乘法$\times_7$"：

$$i \times_7 j = (i \times j)(\bmod 7)$$

$<G，\times_7>$构成群。请

（1）给出$<G，\times_7>$的运算表。 （2）验证$<G，\times_7>$构成群。

（3）给出每个元的次数。

解 略

14. 设$G=\{1，2，4，7，8，11，13，14\}$，对于G上的二元运算"模 15 乘法$\times_{15}$"：

$$i \times_{15} j = (i \times j)(\bmod 15)$$

请

（1）给出$<G，\times_{15}>$的运算表。 （2）验证$<G，\times_{15}>$构成群。

（3）给出每个元的次数。

解 （1）$<G，\circ>$的运算表如下：

$\times_{15}$	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

（2）从上运算表可以看出，运算具有封闭性，满足结合律，单位元为"1"，每个元都有逆元（元素$1，2，4，7，8，11，13，14$的逆元分别是：1，8，4，13，2，11，7，14），所以$<G，\times_{15}>$构成群。

（3）元素$1，2，4，7，8，11，13，14$的次数分别是：1，4，2，4，4，2，4，2。

习题 4.3

1. 设$<G,*>$是群，若$\forall x \in G$有$x^2 = e$，证明$<G,*>$为交换群。

解 略

2. 设$<G,*>$是群，证明G是交换群的充分必要条件是$\forall a, b \in G$有$(a*b)^2 = a^2 * b^2$。

解 必要性：如果G是交换群，$\forall a, b \in G$有$(a*b)^2 = a^2 * b^2$是显然的。

充分性：根据$(a*b)^2 = a^2 * b^2$得$a*b*a*b = a*a*b*b$，再由消去律得$b*a = a*b$，即交换律成立，所以G是交换群。

3. 设$<G,*>$是群，并且对任意的$a, b \in G$都有$(a*b)^3 = a^3 * b^3$，$(a*b)^5 = a^5 * b^5$，证明G是交换群。

解 略

4. 设$<G,*>$是有限半群，且满足消去律，证明G是群。

解 对于$\forall a \in G$，考虑集合

$$G_a = \{a, a^2, a^3, \cdots, a^m, \cdots\}$$

由封闭性可知$G_a \subseteq G$。又由于G是有限集，所以G_a也是有限集。故必有$n, k > 0$，使得

$$a^n = a^{n+k}$$

所以$\forall b \in G$有

$$a^n * b = a^{n+k} * b$$

由消去律可得

$$b = a^k * b$$

这表明a^k是左单位元，同理可证它是右单位元，所以a^k是单位元。又因为

$$a^{k-1} * a = a * a^{k-1} = a^k = e$$

所以，a有逆元a^{k-1}。因此，$<G,*>$是群。

5. 设$<G,*>$是群，$a, b, c \in G$，证明

$$|a*b*c| = |b*c*a| = |c*a*b|$$

解 略

6. 设$<G,*>$是群，$a, b \in G$且$a*b = b*a$。如果$|a| = n$，$|b| = m$且n与m互质，证明$|a*b| = n \times m$。

解 略

7. 证明循环群一定是交换群，举例说明交换群不一定是循环群。

解 略

8. 证明由 1 的n次复根的全体所组成的集合在复数乘法下构成一个n阶循环群。

解 由代数的知识可知，1 的n次复根的全体所组成的集合为

$$G = \{e^{\frac{2k\pi}{n}i} \mid k = 0,1,2,\cdots,n-1\}$$

$\forall e^{\frac{2p\pi}{n}i}, e^{\frac{2q\pi}{n}i} \in G, p, q \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$，有$e^{\frac{2p\pi}{n}i} \times e^{\frac{2q\pi}{n}i} = e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}$。若$p+q<n$，

则 $e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}\in G$；若 $p+q>=n$，则存在 $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $p+q=n+k$，而 $e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}=e^{\frac{2(n+k)\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$。因此 G 关于数的乘法是封闭的。故 $<G,\times>$ 是代数系统。

数的乘法运算满足结合律。故 $<G,\times>$ 是半群。

因为 $\forall e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$，有 $1\times e^{\frac{2k\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\times 1=e^{\frac{2(k+0)\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$，所以 $1=e^{\frac{2\times 0\times\pi}{n}i}$ 是 G 的幺元。故 $<G,\times>$ 是有幺半群。

$\forall e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$，存在 $e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}\in G$，使得

$e^{\frac{2k\pi}{n}i}\times e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}=e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}\times e^{\frac{2k\pi}{n}i}=e^{2\pi i}=1$，所以 $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ 的逆元存在。故 $<G,\times>$ 是群。

因为 $e^{\frac{2k\pi}{n}i}=[e^{\frac{2\pi}{n}i}]^k$，故 $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 是群 G 的一个生成元，因此 G 是循环群。

9. 阶数为 5、6、14、15 的循环群的生成元分别有多少个？

解 设 a 是阶数为 5 的循环群的生成元，因在比 5 小的正整数中有且仅有 2，3，4 与 5 互质，所以 a^2， a^3， a^4 也是生成元，因此生成元个数为 4。

设 a 是阶数为 6 的循环群的生成元，因在比 6 小的正整数中有且仅有 5 与 6 互质，所以 a^5 也是生成元，因此生成元个数为 2。

设 a 是阶数为 14 的循环群的生成元，因在比 14 小的正整数中有且仅有 3，5，9，11，13 与 14 互质，所以 a^3， a^5， a^9 a^{11} a^{13} 也是生成元，因此生成元个数为 6。

设 a 是阶数为 15 的循环群的生成元，因在比 15 小的正整数中有且仅有 2，4，8，11，13，14 与 15 互质，所以 a^2， a^4， a^8 a^{11} a^{13} a^{14} 也是生成元，因此生成元个数为 7。

10. 设 $G=\{1,5,7,11\}$，对于 G 上的二元运算“模 12 乘法 $\times_{12}$”：

$$i\times_{12} j=(i\times j)(\bmod 12)$$

（1）证明 $<G,\times_{12}>$ 构成群。　　（2）求 G 中每个元素的次数。

（3）$<G,\times_{12}>$ 是循环群吗？

习题 4.4

1. 给出群$< Z_8, +_8 >$的全部子群。

解 两个非平凡子群是：$\{0, 2, 4, 6\}$和$\{0, 4\}$，两个平凡子群是：Z_8和$\{0\}$。

2. 设$G=\{1, 5, 7, 11\}$，对G上的二元运算"模 12 乘法$\times_{12}$"：

$$i \times_{12} j = (i \times j)(\bmod 12)$$

$< G, \times_{12} >$构成群，请求出$< G, \times_{12} >$的所有子群。

解 略

3. 设$< G, * >$是群，H是其子群，任给$a \in H$，令

$$aHa = \{a * h * a^{-1} \mid h \in H\}$$

证明aHa^{-1}是G的子群（称为H的**共轭子群**）

解 略

4. 设$< G, * >$是群，H和K是其子群，证明HK和KH是$< G, * >$的子群当且仅当$HK = KH$，其中

$$HK = \{h * k \mid h \in H \wedge k \in K\} \qquad KH = \{k * h \mid k \in K \wedge h \in H\}$$

解 略

5. 设$< G, * >$是群，H是G的子集，证明H是G的子群当且仅当$H^2 = H, H^{-1} = H$，这里

$$H^2 = \{h_1 * h_2 \mid h_1, h_2 \in H\} \qquad H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}$$

证（1）因为H是G的子集，根据H^2，H^{-1}的定义，显然有：$H^2 \subseteq H, H^{-1} \subseteq H$

又因为H中任意元素h可以写成$e * h$，所以$H \subseteq H^2$，还因为H中任意元素h可以写成$(h^{-1})^{-1}$，所以$H \subseteq H^{-1}$，因此

$$H^2 = H, \quad H^{-1} = H$$

（2）$\forall h_1, h_2 \in H$，因为$H^2 = H$，$H^{-1} = H$，所以

$$h_1 * h_2^{-1} = h_1 * h_3 = h_4 \in H$$

由子群的判定定理知，H是G的子群。

6. 某一通讯编码的码字$x = (x_1, x_2, \cdots, x_7)$，其中$x_1$，$x_2$，$x_3$和$x_4$为数据位，$x_5$，$x_6$和$x_7$为校验位（$x_1, x_2, \cdots, x_7$都是 0 或 1），并且满足

$$x_5 = x_1 +_2 x_2 +_2 x_3 \qquad x_6 = x_1 +_2 x_2 +_2 x_4 \qquad x_7 = x_1 +_2 x_3 +_2 x_4$$

这里$+_2$是模 2 加法。设H是所有这样的码字构成的集合。在H上定义二元运算如下：

$$\forall x, y \in H, \ x * y = (x_1 +_2 y_1, x_2 +_2 y_2, \cdots, x_7 +_2 y_7)$$

证明$< H, * >$构成群，且是$< G, * >$的子群，其中G是长度为 7 的位串构成的集合。

解 略

7. 设$G =< a >$是循环群，$H =< a^s >$和$K =< a^t >$是它的两个子群。证明$H \cap K =< a^u >$，这里$u = \mathrm{lcm}(s, t)$是s和t的最小公倍数。

解 $\forall a^l \in H \cap K$，则根据定理，l应是s的倍数，也应是t的倍数，从而l应是s和t的最小公倍数$u = \text{lcm}(s，t)$的倍数，所以$a^l \in < a^u >$。

$\forall a^l \in < a^u >$，则l应是s和t的最小公倍数$u = \text{lcm}(s，t)$的倍数，从而l是s的倍数，也是t的倍数，所以$a^l \in H$，$a^l \in K$，即$a^l \in H \cap K$。

8. 设 5 阶置换为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

计算$\alpha\beta$，$\beta\alpha$，α^{-1}，$\alpha^{-1}\beta\alpha$，$\beta^{-1}\alpha\beta$。

解 略

9. 设$S = \{1，2，3，4\}$，写出S上的所有 4 元置换。

解 略

10. 列出 4 元对称群$< S_4, \circ >$的运算表，求出单位元，每个元的逆元，每个元的次数以及它的所有子群

§4.5 陪集与商群

习题 4.5

1. 集合$\mathbb{Z}_{20}=\{0,1,2,\cdots,19\}$在“模 20 加法$+_{20}$”下构成群。设$H$是由元素 5 生成的$\mathbb{Z}_{20}$的子群。

（1）求H的每个元素及其次数。 （2）求H在$\mathbb{Z}_{20}$中的所有左陪集。

解 （1）$H=\{0,5,10,15\}$，$0,5,10,15$的次数分别为：1，4，2，4。

（2）H在$\mathbb{Z}_{20}$中的所有左陪集如下：

$$H=\{0,5,10,15\},\ 1H=\{1,6,11,16\},\ 2H=\{2,7,12,17\}$$

$$3H=\{3,8,13,18\},\ 4H=\{4,9,14,19\}$$

2. 求 12 阶循环群$G=\{e,a,a^2,a^3,a^4,\cdots,a^{11}\}$的子群$H=\{e,a^4,a^8\}$在$G$中的所有左陪集。

解 所有左陪集如下：

$$H=\{e,a^4,a^8\},\ aH=\{a,a^5,a^9\},\ a^2H=\{a^2,a^6,a^{10}\}$$

3. 设H是群$<G,*>$的子群，证明H的所有不同左陪集（右陪集）中有且仅又一个在$*$下构成$<G,*>$的子群。

解 略

4. 证明 6 阶群必含有 3 次元。

解 略

5. 证明偶数阶群必含 2 次元。

解 设$<G,*>$是偶数阶群，若它无二次元，则对G中的非单位元a，有

$$a\neq a^{-1}$$

所以，G中的元素，除单位元外，其他都是成对出现的，所以G中的元素是偶数个，矛盾。故偶数阶群必含 2 次元。

6. 证明在有限群中次数大于 2 的元素的个数必定是偶数。

解 略

7. 设$<G,*>$是一个阶数为p的有限群，其中p是质数，证明G是循环群并求它的所有子群。

解 略

8. 设H和K分别是群$<G,*>$的r，s阶子群，若r，s互质，证明$H\cap K=\{e\}$。

解 略

9. 设i为虚数单位，即$i^2=-1$，令

$$G=\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\pm\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right\}$$

证明G在矩阵乘法下构成群，并

（1）给出G的运算表。 （2）找出G的所有子群。

（3）证明G的所有子群都是正规子群。

解 略

10. 设$<G,*>$是群，H和K是其子群，若H或K是正规子群，则$HK=KH$，其中

$$HK=\{h*k \mid h\in H\wedge k\in K\},\qquad KH=\{k*h \mid k\in K\wedge h\in H\}$$

解 略

11. 设$<G,*>$是群，H是其子群，证明H是正规子群当且仅当对任意的$a\in G$，都有$aHa^{-1}=H$。

解 略

12. 令$G=<\mathsf{Z},+>$是整数加群。求商群$\mathsf{Z}/4\mathsf{Z}$，$\mathsf{Z}/12\mathsf{Z}$和$4\mathsf{Z}/12\mathsf{Z}$，其中，集合$4\mathsf{Z}=\{4\times z \mid z\in \mathsf{Z}\}$，$12\mathsf{Z}=\{12\times z \mid z\in \mathsf{Z}\}$。

解 略

习题 4.6

1. 对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2 以及映射 φ，说明 φ 是否为群 G_1 到 G_2 的同态。如果是，说明是否为单同态，满同态和同构，并求同态像 $\varphi(G_1)$ 和同态核 $\ker(\varphi)$。

（1）$G_1 =< \mathbf{Z}, + >$，$G_2 =< \mathbf{R}^*, \times >$，其中 $\mathbf{R}^*$ 为非零实数的集合，＋和×分别表示实数加法和实数乘法运算。

$$\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^*, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x\text{是偶数} \\ -1 & x\text{是奇数} \end{cases}$$

（2）$G_1 =< \mathbf{Z}, + >$，$G_2 =< A, \times >$，其中 $A = \{x \mid x \in \mathbf{C} \wedge |x| = 1\}$，$\mathbf{C}$ 为复数集合，＋和×分别表示实数加法和实数乘法运算。

$$\varphi: \mathbf{Z} \to A, \quad \varphi(x) = \cos x + i\sin x$$

（3）$G_1 =< \mathbf{R}, + >$，$G_2 =< A, \times >$，其中 A，＋和×的定义同（2）。

$$\varphi: \mathbf{R} \to A, \quad \varphi(x) = \cos x + i\sin x$$

解 （1）因为，当 x，y 都为偶数，有 $\varphi(x+y)=2$，$\varphi(x)+\varphi(y)=2$

当 x，y 都为奇数，有 $\varphi(x+y)=2$，$\varphi(x)+\varphi(y)=-2$

当 x，y 一个为偶数一个为奇数，有 $\varphi(x+y)=-1$，$\varphi(x)+\varphi(y)=0$

所以 φ 不是群 G_1 到 G_2 的同态。

（2）因为，$\varphi(x+y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$，

$\varphi(x)+\varphi(y)=\cos x+i\sin x+\cos y+i\sin y$

从而，$\varphi(1+0)=\cos(1+0)+i\sin(1+0)=\cos 1+i\sin 1$

$\varphi(1)+\varphi(0)=\cos 1+i\sin 1+\cos 0+i\sin 0=1+\cos 1+i\sin 1$

所以 φ 不是群 G_1 到 G_2 的同态。

（3）根据（2），φ 也不是群 G_1 到 G_2 的同态。

2. $< \mathbf{Z}, \times >$，$< A, \times >$ 都是有么半群，其中 $A = \{0,\ 1\}$，×表示实数乘法运算。

$$\varphi: \mathbf{Z} \to A, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x = 2^k\,(k \in \mathbf{N})\text{时} \\ 0 & \text{其它情况} \end{cases}$$

证明 φ 是从 $\mathbf{Z}$ 到 A 的同态映射。

解 略

3. $< \mathbf{R}, + >$，$< \mathbf{R}, \times >$ 都是有么半群，＋和×分别表示实数加法和实数乘法运算。

$\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = 10^x$

证明 φ 是从 $< \mathbf{R}, + >$ 到 $< \mathbf{R}, \times >$ 的单同态，但不是同构。

解 略

4. $< \mathbf{Z}, + >$ 是整数加法群，$< G, * >$ 是任意一个群，对于 G 中的任一固定元素 a，令 $g(n) = a^n\,(n \in \mathbf{Z})$，证明 g 是从 $\mathbf{Z}$ 到 G 的同态映射，并求同态核。

解 略

5. $< \mathbf{R}, + >$ 是实数加法群，$< \mathbf{C}_1, \times >$ 是模为 1 的复数对于乘法运算的群，这两个群同态吗？同构吗？请说明理由。

解 略

6. $<\mathrm{Z}^+,+>$和$<\mathrm{Z}^+,\times>$分别是正整数对于加法和乘法构成的半群，试问从$<\mathrm{Z}^+,+>$到$<\mathrm{Z}^+,\times>$，从$<\mathrm{Z}^+,\times>$到$<\mathrm{Z}^+,+>$都存在同态映射吗？说明理由。

解 $<\mathrm{Z}^+,+>\to<\mathrm{Z}^+,\times>$的同态映射如下：

$$f(n)=1,\forall n\in\mathrm{Z}^+$$

而$<\mathrm{Z}^+,\times>\to<\mathrm{Z}^+,+>$不存在同态映射，这可用反证法进行证明。

若存在$<\mathrm{Z}^+,\times>\to<\mathrm{Z}^+,+>$的同态映射$g$，则有：

$$g(m+n)=g(m)+g(n),\forall m,n\in\mathrm{Z}^+$$

特别地令$m=n=1$，则得到$g(1)=0$，这与g是$<\mathrm{Z}^+,\times>\to<\mathrm{Z}^+,+>$的映射矛盾，所以$<\mathrm{Z}^+,\times>\to<\mathrm{Z}^+,+>$不存在同态映射。

7. 设f是从群$<G,*>$到群$<H,\bullet>$的同态映射，g是从群$<H,\bullet>$到群$<K,\Diamond>$的同态映射，证明复合函数$f\circ g$是从群$<G,*>$到群$<K,\Diamond>$的同态映射。

解 略

8. 设$<G,*>$、$<H,\bullet>$是代数系统，$*,\bullet$都是二元运算，ϕ是从G到H的同态映射，则

（1）$\bullet$是$\phi(G)$上的运算，即$<\varphi(G),\bullet>$是代数系统。

（2）如果$*$在G上满足交换律，则$\bullet$在$\phi(G)$上也满足交换律。

（3）如果$*$在G上满足结合律，则$\bullet$在$\phi(G)$上也满足结合律。

（4）如果$*$在G上满足等幂律，则$\bullet$在$\phi(G)$上也满足等幂律。

（5）如果θ是$<G,*>$的零元，则$\phi(\theta)$是$<\varphi(G),\bullet>$的零元。

解 略

9. 设$<G,*,*'>$、$<H,\bullet,\bullet'>$是代数系统，$*,*',\bullet,\bullet'$都是二元运算，ϕ是从G到H的同态映射，证明如果在G上，$*$和$*'$满足吸收律，则在$\phi(G)$上，$\bullet$和$\bullet'$也满足吸收律。

解 略

10. 设$<G,*>$是群，定义映射φ：$G\to G$为$\varphi(x)=x^{-1}$，证明φ是G的自同构当且仅当G是交换群。

解 略

11. 设φ是从群$<G,*>$到群$<H,\bullet>$的同态映射，证明若G是循环群，则$\varphi(G)$也是循环群。

解 略

12. 设$<G,*>$和$<H,\bullet>$分别是m阶群和n阶群，若从G到H存在单同态，证明$m\mid n$，即m是n的因子。

解 略

13. 设φ是从群$<G,*>$到群$<H,\bullet>$的同态映射，对任意的$a\in G$，记$b=\varphi(a)$，试问b和a的次数是否一定相同？如果不同，它们之间有何关系？

解 略

14. 给出群$<Z_6, +_6>$的全部自同态。

解 略

习题 4.7

1. 设 $A=\{a+bi \mid a，b\in Z，i^2=-1\}$。证明 A 关于复数的加法和乘法构成环，称为**高斯整数环**。

2. 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ 为实数，称 $f(x)$ 为实数域上的 n 次多项式，令

$$A=\{f(x) \mid f(x)\text{为实数域上的}n\text{次多项式，}n\in N\}。$$

证明 A 关于多项式的加法和乘法构成环，称为**实数域上的多项式环**。

3. 判断下列集合和给定运算是否构成环、整环和域，如果不能构成，请说明理由。

（1）$A=\{a+bi \mid a，b\in \mathbf{Q}，i^2=-1\}$，运算为复数的加法和乘法。

（2）$A=\{2z+1 \mid z\in \mathbf{Z}\}$，运算为实数的加法和乘法。

（3）$A=\{2z \mid z\in \mathbf{Z}\}$，运算为实数的加法和乘法。

（4）$A=\{x \mid x\geq 0\wedge x\in \mathbf{Z}\}$，运算为实数的加法和乘法。

（5）$A=\{a+b\sqrt[4]{5} \mid a，b\in \mathbf{Q}\}$，运算为实数的加法和乘法。

4. 设 $<R,+,\times>$ 是环，证明

（1）$\forall a\in R，a0=0a=0$

（2）$\forall a，b\in R，\ (-a)b=a(-b)=-(ab)$

（3）$\forall a，b，c\in R，\ a(b-c)=ab-ac，\ (b-c)a=ba-ca$

5. 设 $<R,+,\times>$ 是环，令

$$C=\{x \mid x\in R\wedge \forall a\in R(xa=ax)\}$$

C 称作环 R 的**中心**，证明 C 是 R 的子环。

6. 设 a 和 b 是含幺环中的两个可逆元，证明：

（1）$-a$ 可逆，且 $(-a)^{-1}=-a^{-1}$

（2）ab 可逆，且 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

7. 在域 $<\mathbf{Z}_5,+_5,\times_5>$ 中解下列方程和方程组：

（1）$3x=2$

（2）$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

8. 类似于子环，给出子整环和子域的定义

习题 5.1

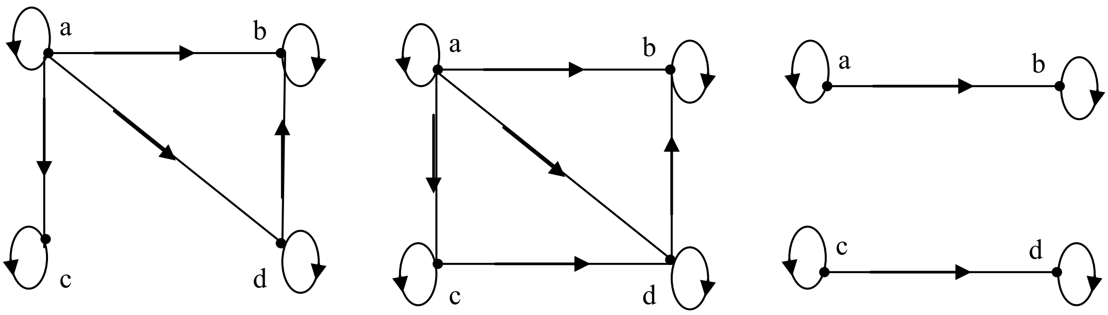
1. 下面哪些集合是偏序集？

（1） $<Z,=>$ （2） $<Z,\neq>$

（3） $<Z,\geq>$ （4） $<Z,\ngtr>$

解 （1）是偏序集，（2）不是偏序集，（3）是偏序集，（4）不是偏序集

2. 确定由下面的关系图 5.6 表示的表示的 3 个关系是否为偏序？并列出这些关系中的所有序偶来进行验证。



(a) (b) (c)

解 略

图 5.6 习题 2 的图

3. 确定由下面的关系矩阵表示的关系是否为偏序？

（1） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ （2） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ （3） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

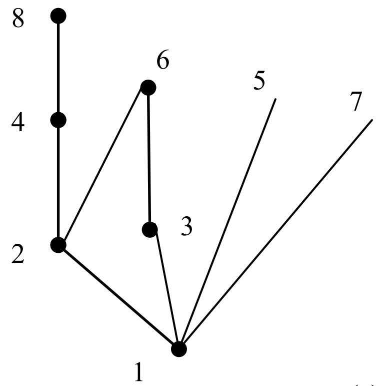
解 略

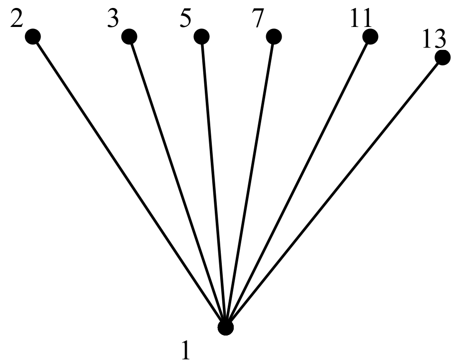
4. 画出在下述集合上的整除关系的哈斯图。

（1） {1，2，3，4，5，6，7，8} （2） {1，2，3，5，7，11，13}

（3） {1，2，3，6，12，24，36，48} （4） {1，2，4，8，16，32，64}

解 （1）、（2）的哈斯图如下：





(a)

（3）、（4）略

5. 在下面偏序集中找出两个不可比的元素。

（1）$<p(\{0, 1, 2\}), \subseteq>$　　　　（2）$<\{1\ 2, 4, 6, 8\}, |>$

解 略

6. $<\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |>$是偏序集。

（1）求极大元素和极小元素。

（2）存在最大元素吗？存在最小元素吗？如果存在，请求出。

（3）找出子集$\{3, 5\}$的所有上界。如果它的上确界存在的话，上确界。

（4）找出子集$\{15, 45\}$的所有下界。如果它的下确界存在的话，求出下确界。

解 （1）极大元素为 9，15，24 和 45，极小元素为 3 和 5。

（2）不存在最大元素，也不存在最小元素。

（3）子集$\{3, 5\}$的上界有 15 和 45，上确界是 15。

（4）子集$\{15, 45\}$的下界有 3，5 和 15，下确界是 15。

7. $<\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq>$是偏序集。

（1）求极大元素和极小元素。

（2）存在最大元素吗？存在最小元素吗？

（3）找出子集$\{\{2\}, \{4\}\}$的所有上界。如果它的上确界存在的话，上确界。

（4）找出子集$\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$的所有下界。如果它的下确界存在的话，求出下确界。

解 略

8. 给出满足下列性质的偏序集。

（1）有一个极小元素但没有极大元素。　　（2）有一个极大元素但没有极小元素。

（3）既没有极大元素也没有极小元素。

解 略

9. 设R是集合X上的半序。

（1）证明$R \cap R^{-1}$是等价关系。

（2）定义商集$Y = X/(R \cap R^{-1})$上的关系S：$\forall C, D \in Y$，$<C, D> \in S$当且仅当在C、D中分别存在元素c、d使得$<c, d> \in R$。证明S是商集Y上的偏序。

解 略

10. 给出下面小写英文字母串的字典序。

（1）quack，quick，quicksilver，quicksand，quacking

（2）open，opener，opera，operand，opened

（3）zoo，zero，zoom，zoology，zoological

解 略

11. 给出二进制串 0，01，11，001，010，011，0001 和 0101 的基于$0<1$的字典顺序。

解 略

12. 假设$<X_1, \preceq_1>$和$<X_2, \preceq_2>$是两个偏序集。在笛卡儿积$X_1 \times X_2$上定义一个关系：$<a_1, a_2> \preceq <b_1, b_2>$当且仅当$a_1 \preceq_1 b_1$且$a_2 \preceq_2 b_2$。证明这样定义的关系$\preceq$是集合$X_1 \times X_2$上的偏序关系。

解 略

13. 求一个与集合$\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$上的整除关系相容的全序。

14. 如果表示建筑一座房子所需任务的哈斯图如下图 5.7 所示，通过制定这些任务的顺序来安排他们。

解 略

15. 对一个软件项目的任务进行排序，关于这个项目任务的哈斯图给在图 5.8 中。

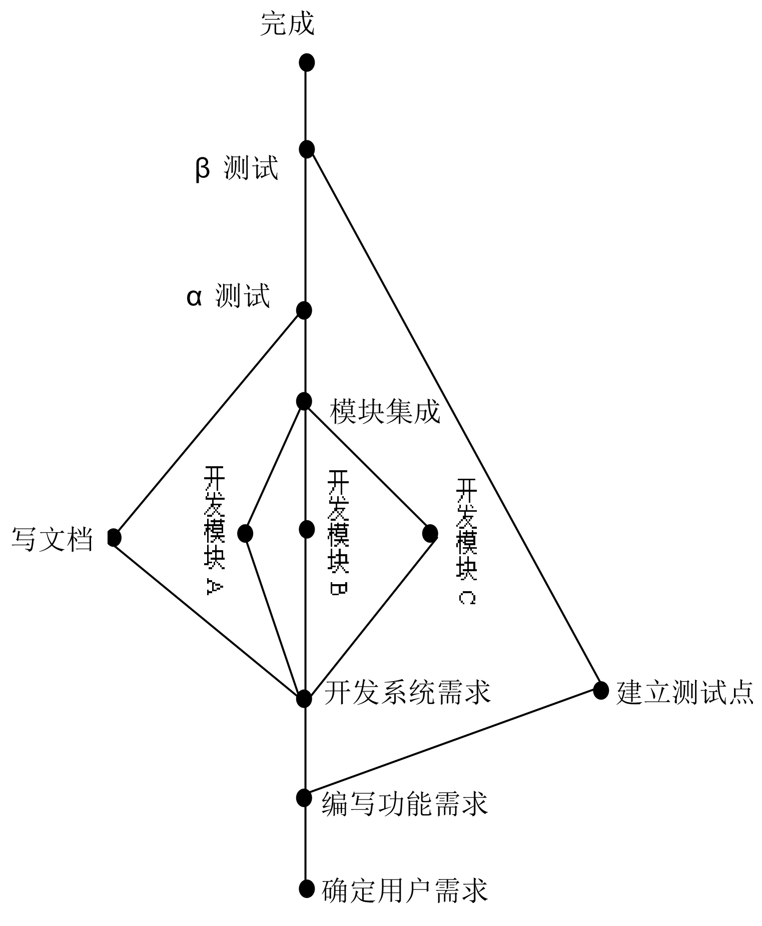


图 5.8　习题 15 的图

解 对一个软件项目的任务排序如下：

确定用户需求，编写功能需求，开发系统需求，建立测试点，开发模块 A，开发模块 B，开发模块 C，模块集成，写文档，α 测试，β 测试，完成。

习题 5.2

1. 确定具有下面图 5.11 所示哈斯图的偏序集是否为格，

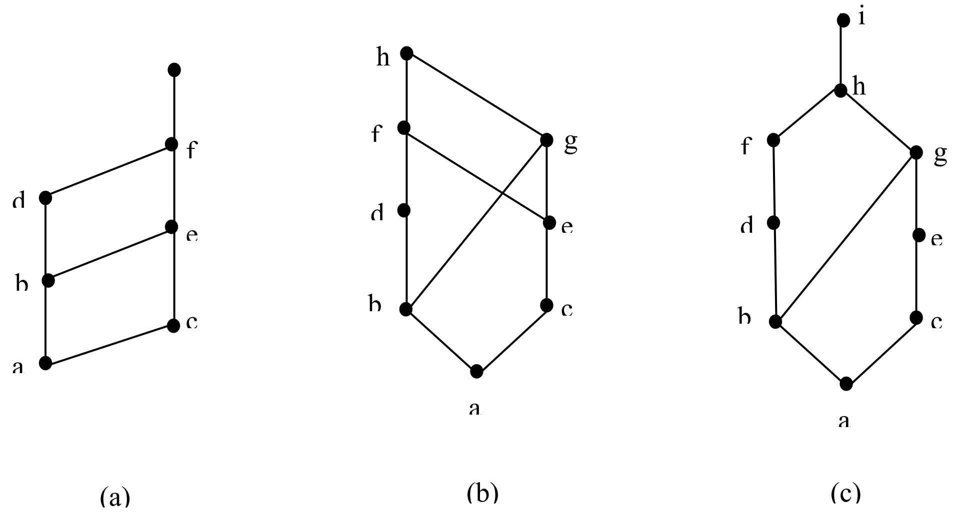


图 5.11　习题 1 的图

解 图(a)是格，图(b)是格，图(c)是格。

2. 在一个公司里用信息流的格模型控制敏感信息，公司的每个部门都具有由有序对 (A, C) 表示的安全类别，其中 A 是权限级别，C 是种类。这里，权限级别 A 可以是 0（非私有的），1（私有的），2（受限制的）或 3（注册的）。种类 C 是集合{猎豹，黑鹰，美洲狮}的子集（在公司里常常使用动物的名字作为项目的代码名字）。试问

（1）信息允许从（私有的，{猎豹，美洲狮}）流向（受限制的，{美洲狮}）吗？

（2）信息允许从（受限制的，{猎豹}）流向（注册的，{猎豹，黑鹰}）吗？

（3）信息从（私有的，{猎豹，美洲狮}）允许流向哪些安全类？

（4）信息允许从那些安全类流向（受限制的，{黑鹰，美洲狮}）？

解 略

3. 证明每个有限格都有一个最小元素和一个最大元素。

解 略

4. 给出一个无限格的例子，使得

（1）既没有最小元素也没有最大元素。

（2）有最小元素但没有最大元素。

（3）有最大元素但没有最小元素。

（4）有最小元素也有最大元素。

解 略

5. 设 $<L, \preceq>$ 是格，其哈斯图如图 5.12 所示，取

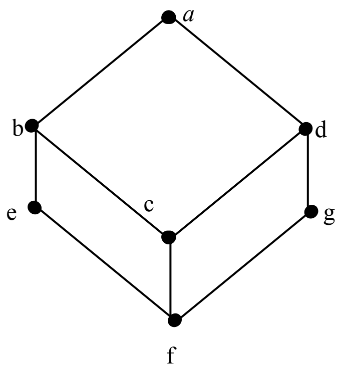


图 5.12　习题 5 的图

$S_1=\{a, b, c, d\}$, $S_2=\{a, b, d, f\}$, $S_3=\{c, d, e, f\}$, $S_4=\{a, b, f, g\}$。试问$<S_1, \preceq_1>$, $<S_2, \preceq_2>$, $<S_3, \preceq_3>$, $<S_4, \preceq_4>$中哪些是格，哪些是$<L, \preceq>$的子格，这里关系$\preceq_i=\preceq\cap(S_i\times S_i)$, $i=1, 2, 3, 4$。

解 略

6. 设 $<L, |>$ 和 $<S, \leq>$ 是两个格，其中 $L=\{2, 4, 8, 16\}$，$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，“$|$”是数的整除关系，“$\leq$”是数的小于等于关系。试给出从$L$到$S$上的两个不同的格同态映射。

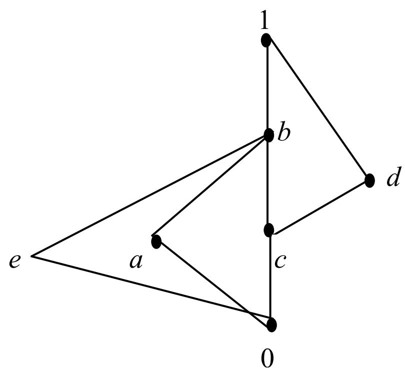
解 略

7. 设ϕ是从格$<L_1, \preceq_1>$到格$<L_2, \preceq_2>$的满同态映射，若$<L_1, \preceq_1>$是有界格，证明$<L_2, \preceq_2>$也是有界格。

解 略

8. 给出一个有限格的例子，其中至少 1 个元素有多于 1 个的补元，且至少 1 个元素没有补元。

解 如下哈斯图所示的偏序集是一个格，元素e有补元a和d，元素a有补元e和d，元素d有补元a和e，但元素b和c都没有补元。



9. 设$<L, \preceq>$是有界格，证明：

（1）若$|L| \geq 2$，则L中不存在以自身为补元的元素。

（2）若$|L| \geq 3$，且$<L, \preceq>$是链（全序集），则$<L, \preceq>$不是有补格。

解 略

10. 格$<\mathrm{Z}^{+}, |>$是分配格吗？试分析之。

解 略

11. 给出一个不是分配格的例子。

解 略

12. 试证明，在有界分配格中，所有具有补元的元素组成的集合构成子格。

解 略

习题 5.3

1. 对以下各小题给定的集合和运算判断它们是哪一类代数系统（半群、有么半群、群、环、域、格、布尔代数），并说明理由。

（1）$S_1=\{1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4\}$，$*$为普通乘法。

（2）$S_2=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，$\forall a_i,\ a_j\in S_2,\ a_i*a_j=a_i$。这里的$n$是给定正整数，且$n\geq 2$。

（3）$S_3=\{0,\ 1\}$，$*$为普通乘法。

（4）$S_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，$\forall x,\ y\in S_4$，$x*y$和$x\bullet y$分别表示求x和y的最小公倍数和最大公因数。

（5）$S_5=\{0,\ 1\}$，$*$为模 2 加法，$\bullet$为模 2 乘法。

解（1）$S_1=\{1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4\}$，$*$为普通乘法。是群。

（2）$S_2=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，$\forall a_i,\ a_j\in S_2,\ a_i*a_j=a_i$。这里的$n$是给定正整数，且$n\geq 2$。是半群（无单位元）。

（3）$S_3=\{0,\ 1\}$，$*$为普通乘法。是有幺半群（0 没有逆元）。

（4）$S_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，$\forall x,\ y\in S_4$，$x*y$和$x\bullet y$分别表示求x和y的最小公倍数和最大公因数。是布尔代数。

（5）$S_5=\{0,\ 1\}$，$*$为模 2 加法，$\bullet$为模 2 乘法。是布尔代数。

2. 在布尔代数中证明

$$a\preceq b\Leftrightarrow a\oplus b^c=1\Leftrightarrow a\otimes b^c=0$$

解 略

3. 对于$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，给出所有不同构的n元格，并说明其中那些是分配格、有补格和布尔格。

解 略

4. 设$<B,\ \oplus,\ \otimes,\ ^c,\ 0,\ 1>$是布尔代数，在$B$上定义二元运算$*$，$\forall x,\ y\in B$有

$$x*y=(x\otimes y^c)\oplus(x^c\otimes y)$$

问$<B,\ *>$能否构成代数系统？如果能，指出是哪一种代数系统。为什么？

解 略

5. 在布尔代数中化简下列式子

（1）$(a\otimes b)\oplus(a^c\otimes b\otimes c^c)\oplus(b\otimes c)$

（2）$((a\otimes b^c)\oplus c)\otimes(a\oplus b^c)\otimes c$

（3）$(a\otimes b)\oplus(a\otimes b^c\otimes c)\oplus(b\otimes c)$

（4）$(a\otimes b)^c\oplus(a\oplus b)^c$

（5）$(1\otimes a)\oplus(0\otimes a^c)$

（6）$(a^c \otimes b^c \otimes c) \oplus (a \otimes b^c \otimes c) \oplus (a^c \otimes b^c \otimes c^c)$

解 略

6. 在布尔代数中证明下列等式

（1）$a \oplus (a^c \otimes b) = a \oplus b$

（2）$a \otimes (a^c \oplus b) = a \otimes b$

（3）$(a \otimes c) \oplus (a^c \otimes b) \oplus (b \otimes c) = (a \otimes c) \oplus (a^c \otimes b)$

（4）$(a \oplus b^c) \otimes (b \oplus c^c) \otimes (c \oplus a^c) = (a^c \oplus b) \otimes (b^c \oplus c) \otimes (c^c \oplus a)$

（5）$(a \otimes b) \oplus (a^c \otimes c) \oplus (b^c \otimes c) = (a \otimes b) \oplus c$

解 略

7. 设ϕ是从布尔代数$< B,\ \oplus,\ \otimes,\ ^c,\ 0,\ 1 >$到布尔代数$< B',\ \oplus',\otimes',\ ^{c}{'},\ 0',\ 1'>$的同态映射，证明$\phi(B)$构成$B'$的子布尔代数。

解 略

习题 5.4

1. 用非门、与门和或门构造产生下列输出的电路。

（1）$\bar{x}+y$　　（2）$\overline{(x+y)x}$

（3）$xyz+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$　　（4）$\overline{(\bar{x}+z)(y+\bar{z})}$

解 略

2. 试设计一个电路来实现五个人的少数服从多数的表决系统。

解 略

3. 试设计一个由四个开关控制的电灯混合控制器，使得当电灯在打开时，按动任意一个开关都可关闭它，在电灯关闭时，按动任意一个开关都可打开它。

解 略

4. 构造一个电路来比较二进制整数$(x_1x_0)_2$和$(y_1y_0)_2$，使得当第一个整数大于第二个时，输出 1，否则输出 0。

解 略

5. 使用与非门构造具有下列输出的电路。

（1）$\bar{x}$　　（2）$x+y$

（3）xy　　（4）$x \nleftrightarrow y$

解 略

6. 使用或非门构造具有下列输出的电路。

（1）$\bar{x}$　　（2）$x+y$

（3）xy　　（4）$x \nleftrightarrow y$

解 略

§ 5.1 偏序关系与偏序集

习题 5.1

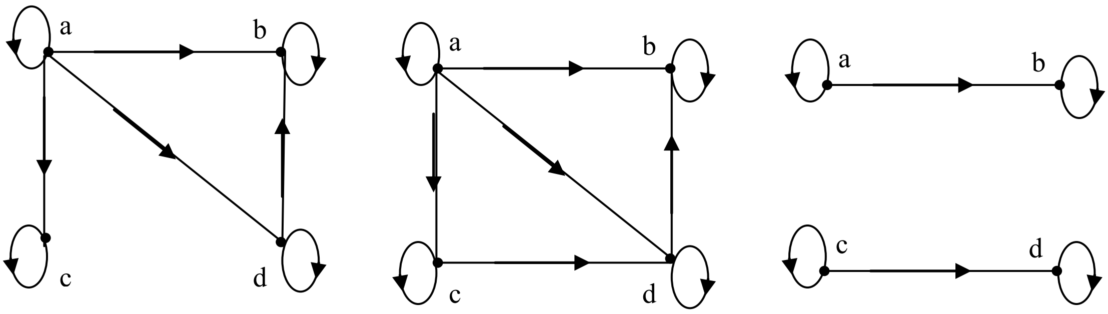
1. 下面哪些集合是偏序集？

（1）$<Z, =>$　　　　（2）$<Z, \neq>$

（3）$<Z, \geq>$　　　　（4）$<Z, \nmid>$

解　（1）是偏序集，（2）不是偏序集，（3）是偏序集，（4）不是偏序集

2. 确定由下面的关系图 5.6 表示的表示的 3 个关系是否为偏序？并列出这些关系中的所有序偶来进行验证。



(a)　　　(b)　　　(c)

解 略

图 5.6 习题 2 的图

3. 确定由下面的关系矩阵表示的关系是否为偏序？

（1）$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$　　（2）$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$　　（3）$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$

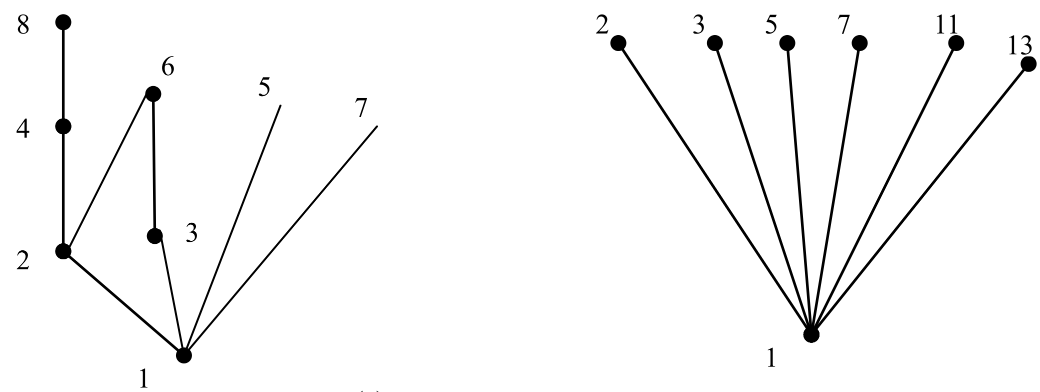
解 略

4. 画出在下述集合上的整除关系的哈斯图。

（1）{1，2，3，4，5，6，7，8}　　　　（2）{1，2，3，5，7，11，13}

（3）{1，2，3，6，12，24，36，48}　　（4）{1，2，4，8，16，32，64}

解　（1）、（2）的哈斯图如下：



(a)

（3）、（4）略

5. 在下面偏序集中找出两个不可比的元素。

（1）$<p(\{0,1,2\}),\subseteq>$　　（2）$<\{1\ 2,4,6,8\},|>$

解 略

6. $<\{3,5,9,15,24,45\},|>$是偏序集。

（1）求极大元素和极小元素。

（2）存在最大元素吗？存在最小元素吗？如果存在，请求出。

（3）找出子集$\{3,5\}$的所有上界。如果它的上确界存在的话，上确界。

（4）找出子集$\{15,45\}$的所有下界。如果它的下确界存在的话，求出下确界。

解 （1）极大元素为 9，15，24 和 45，极小元素为 3 和 5。

（2）不存在最大元素，也不存在最小元素。

（3）子集$\{3,5\}$的上界有 15 和 45，上确界是 15。

（4）子集$\{15,45\}$的下界有 3，5 和 15，下确界是 15。

7. $<\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},\subseteq>$是偏序集。

（1）求极大元素和极小元素。

（2）存在最大元素吗？存在最小元素吗？

（3）找出子集$\{\{2\},\{4\}\}$的所有上界。如果它的上确界存在的话，上确界。

（4）找出子集$\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$的所有下界。如果它的下确界存在的话，求出下确界。

解 略

8. 给出满足下列性质的偏序集。

（1）有一个极小元素但没有极大元素。　　（2）有一个极大元素但没有极小元素。

（3）既没有极大元素也没有极小元素。

解 略

9. 设R是集合X上的半序。

（1）证明$R\cap R^{-1}$是等价关系。

（2）定义商集$Y=X/(R\cap R^{-1})$上的关系S：$\forall C,D\in Y$，$<C,D>\in S$当且仅当在C、D中分别存在元素c、d使得$<c,d>\in R$。证明S是商集Y上的偏序。

解 略

10. 给出下面小写英文字母串的字典序。

（1）quack，quick，quicksilver，quicksand，quacking

（2）open，opener，opera，operand，opened

（3）zoo，zero，zoom，zoology，zoological

解 略

11. 给出二进制串 0，01，11，001，010，011，0001 和 0101 的基于 $0<1$ 的字典顺序。

解 略

12. 假设 $<X_1, \preceq_1>$ 和 $<X_2, \preceq_2>$ 是两个偏序集。在笛卡儿积 $X_1 \times X_2$ 上定义一个关系：$<a_1, a_2> \preceq <b_1, b_2>$ 当且仅当 $a_1 \preceq_1 b_1$ 且 $a_2 \preceq_2 b_2$。证明这样定义的关系 $\preceq$ 是集合 $X_1 \times X_2$ 上的偏序关系。

解 略

13. 求一个与集合 $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$ 上的整除关系相容的全序。

14. 如果表示建筑一座房子所需任务的哈斯图如下图 5.7 所示，通过制定这些任务的顺序来安排他们。

解 略

15. 对一个软件项目的任务进行排序，关于这个项目任务的哈斯图给在图 5.8 中。

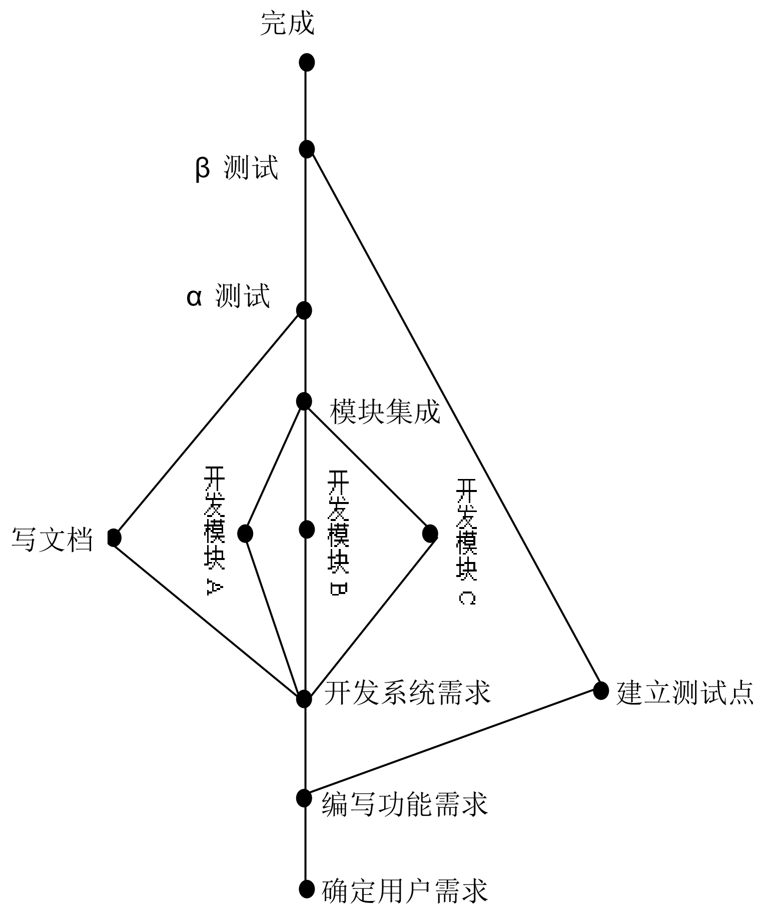


图 5.8　习题 15 的图

解 对一个软件项目的任务排序如下：

确定用户需求，编写功能需求，开发系统需求，建立测试点，开发模块 A，开发模块 B，开发模块 C，模块集成，写文档，α 测试，β 测试，完成