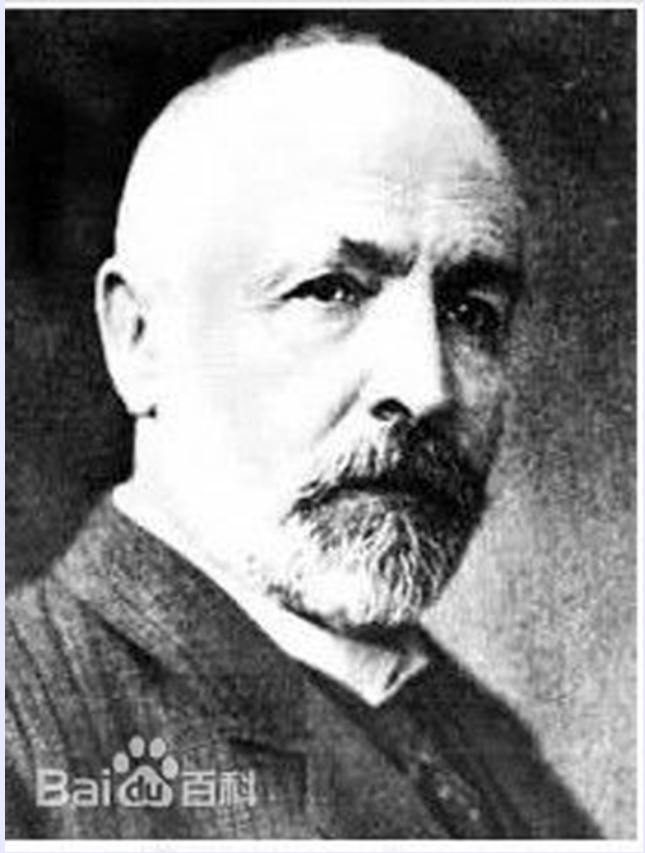
应用离散数学

离散数学课程组

2014 年 1 月 16 日



- 勒奈·笛卡尔（Rene Descartes），1596年3月31日生于法国都兰城。笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家，也是解析几何的创始人。笛卡儿是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”，在哲学史上产生了深远的影响。同时他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义，被誉为“近代科学的始祖”。
- 格奥尔格·康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）德国数学家，集合论的创始人。生于俄国列宁格勒（今俄罗斯圣彼得堡）。早期在数学方面的兴趣是数论，1870年开始研究三角级数并由此导致19世纪末、20世纪初最伟大的数学成就——集合论和超穷数理论的建立

- 勒奈·笛卡尔（Rene Descartes），1596年3月31日生于法国都兰城。笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家，也是解析几何的创始人。笛卡儿是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”，在哲学史上产生了深远的影响。同时他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义，被誉为“近代科学的始祖”。
- 格奥尔格·康托尔（Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp，1845.3.3-1918.1.6）德国数学家，集合论的创始人。生于俄国列宁格勒（今俄罗斯圣彼得堡）。早期在数学方面的兴趣是数论，1870年开始研究三角级数并由此导致19世纪末、20世纪初最伟大的数学成就——集合论和超穷数理论的建立。

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

集合与关系

1 集合及其运算

2 二元关系及其运算

3 二元关系的性质与闭包

4 等价关系与划分

5 函数

6 集合的等势与基数

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定义1 (子集)

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

- 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

- A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\mathcal{P}(A)$或2^A。

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

定理1 (证明空集是一切集合的子集，并且是唯一的。)

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的真子集，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的幂集，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},$$

$$\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},$$

$$\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0\text{元}},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1\text{元}},\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2\text{元}},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3\text{元}}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},$$

$$\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

例1（求$A=\{a,b,c\}$的幂集）

解：

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0元},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1元},\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2元},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3元}\}$$

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A| = n$，求$|p(A)|$)

$|p(A)| = 2^{|A|} = 2^n$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A| = n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义3 (基数)

集合A中元素的“个数”被称为A的基数，记为$Card(A)$或$|A|$

例2 (设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$)

$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

练习1 (P71-1,2(1,3))

定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x :$
- $A \cap B = \{x :$
- $A^c = \{x :$

定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

定义4 (并、交、补)

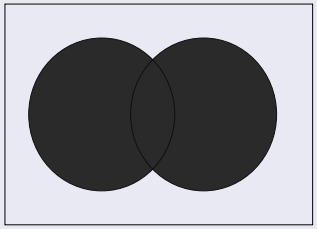
设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

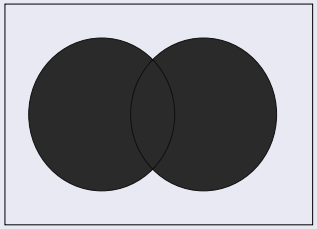
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$



定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

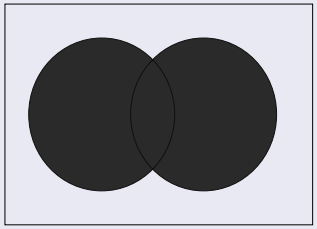
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$



定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

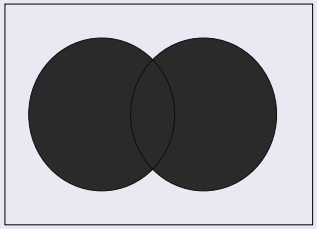
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

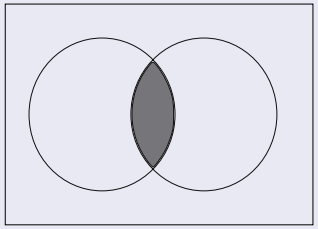


定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

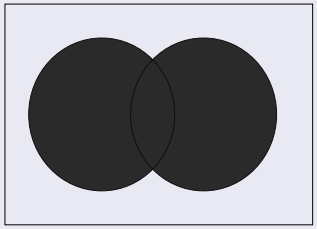


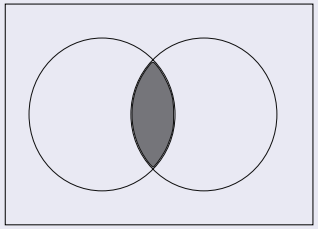


定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

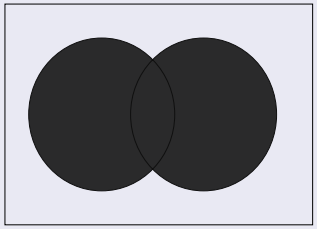


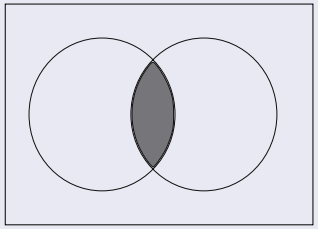


定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$

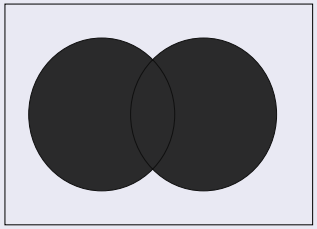


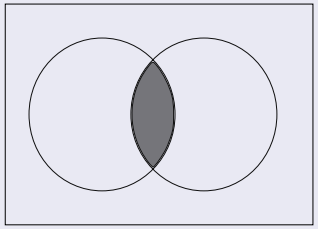


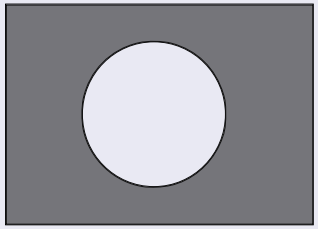
定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$







定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义5 (差、对称差)

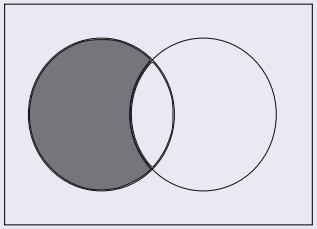
设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$

定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
  $= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  $= (A \cup B) - (A \cap B)$



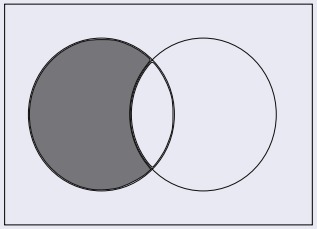
定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$



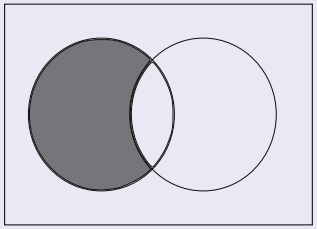
定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$



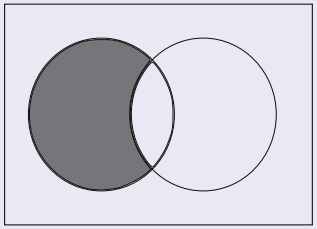
定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$



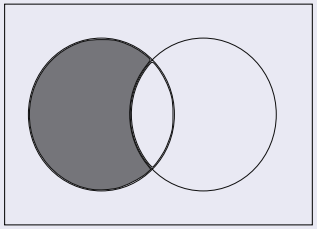
定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$



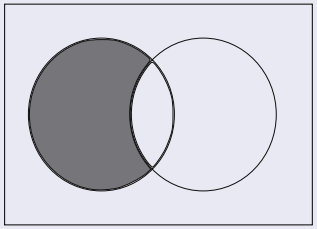
定义5 (差、对称差)

设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$



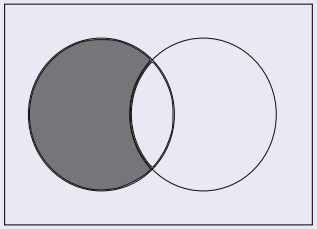
定义5 (差、对称差)

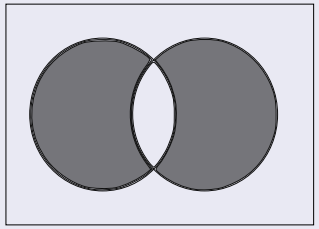
设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$





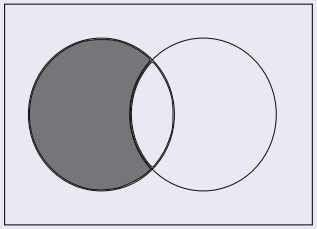
定义5 (差、对称差)

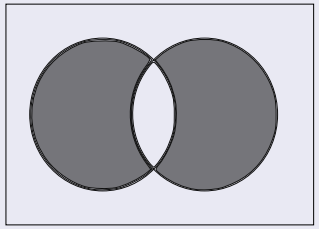
设A, B是两个集合，则

- 差$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$





例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A^c = \{x,y,z\}$$

$$A - B = \{b,c\}$$

$$B - A = \{x,y\}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{b,c,x,y\} \end{aligned}$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A^c = \{x,y,z\}$$

$$A - B = \{b,c\}$$

$$B - A = \{x,y\}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{b,c,x,y\} \end{aligned}$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A^c = \{x,y,z\}$$

$$A - B = \{b,c\}$$

$$B - A = \{x,y\}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{b,c,x,y\} \end{aligned}$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A^c = \{x,y,z\}$$

$$A - B = \{b,c\}$$

$$B - A = \{x,y\}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{b,c,x,y\} \end{aligned}$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$A \cup B = \{a,b,c,x,y\}$$

$$A \cap B = \{a\}$$

$$A^c = \{x,y,z\}$$

$$A - B = \{b,c\}$$

$$B - A = \{x,y\}$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{b,c,x,y\} \end{aligned}$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C))\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & x\in A-B\wedge x\in A-C\\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

定理2 (集合运算的性质)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律 ：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律 ：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C) A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

练习2 (判断下列各式是否正确)

1. $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$
2. $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$
3. $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$
4. $A \cap C \subseteq B \cap C, A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$
5. $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$
6. $A \subset B, C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$

练习3 (证明

$$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$$

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c\\ &= (A\cap B^c)\cap C^c\\ &= A\cap(B^c\cap C^c)\\ &= A\cap(B\cup C)^c\\ &= A-(B\cup C)\end{aligned}$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap (B^c\cap C^c) \\
&= A\cap (B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap (B^c\cap C^c) \\
&= A\cap (B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap(B^c\cap C^c) \\
&= A\cap(B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap (B^c\cap C^c) \\
&= A\cap (B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap (B^c\cap C^c) \\
&= A\cap (B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

练习3 (证明

$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c \\
&= (A\cap B^c)\cap C^c \\
&= A\cap (B^c\cap C^c) \\
&= A\cap (B\cup C)^c \\
&= A-(B\cup C)
\end{aligned}
$$

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业1 (P72-6(4,6))

定义6（序偶）

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

[illegible]

定义7（笛卡尔积）

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

定义6（序偶）

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7（笛卡尔积）

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

定义6 (序偶)

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7 (笛卡尔积)

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

定义6 (序偶)

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7 (笛卡尔积)

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

定义6 (序偶)

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7 (笛卡尔积)

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

定义6 (序偶)

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7 (笛卡尔积)

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

例6

设$A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

定理3

1. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
2. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
3. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$,
   $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

练习4 (P79-3 判断下列等式是否成立)

1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
2. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
3. $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

定理3

1. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
2. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
3. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$,
   $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

练习4 (P79-3 判断下列等式是否成立)

1. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$
2. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$
3. $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个*(二元)关系*。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$ 恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ 全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$ 恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ 全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个*(二元)关系*。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$ 恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ 全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个*(二元)关系*。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$ 恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ 全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$ 恒等关系 $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ 全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个*(二元)关系*。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$R_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个*(二元)关系*。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A|\cdot|B|}$个

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|}$个

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a\not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a\not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$；
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a\not R b$；
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域；
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域；

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a \not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a \not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a \not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a \not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$，

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a \not R b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的定义域;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的值域;

练习5 (P79-6)

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的**关系矩阵**，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{,,,\}$，求关系矩阵M_R。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not{R}b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义11 (关系图)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{,$
$,,,\}$，求R的关系图。

定义11 (关系图)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{,$
$,,,\}$，求R的关系图。

定义11 (关系图)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{,$
$,,,\}$，求R的关系图。

定义11 (关系图)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。

定义11 (关系图)

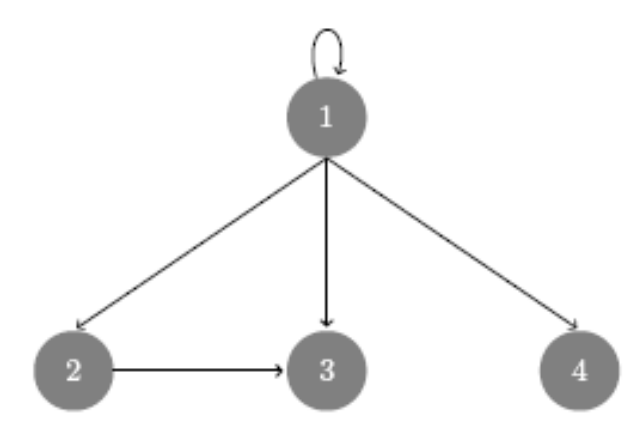
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



定义11 (关系图)

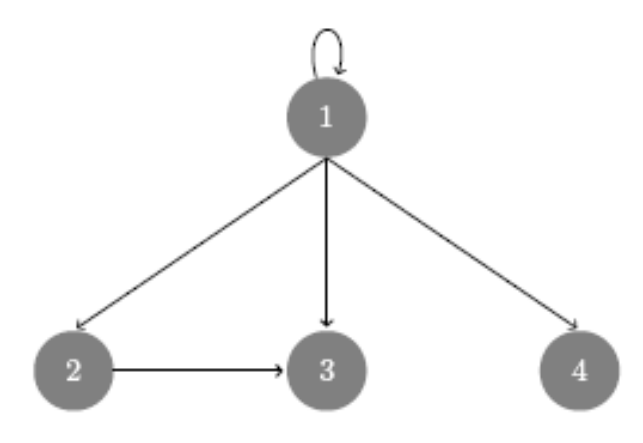
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



定义11 (关系图)

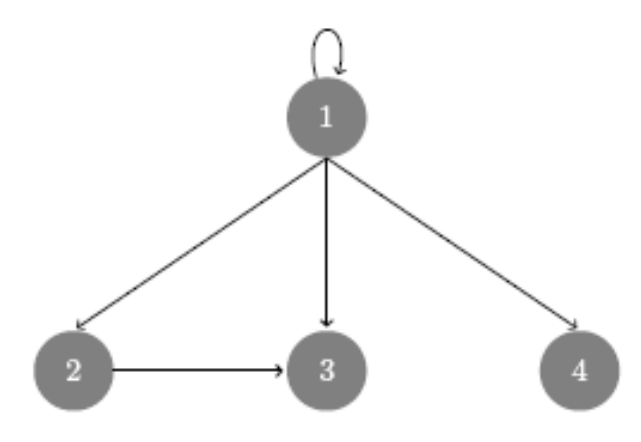
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



定义11 (关系图)

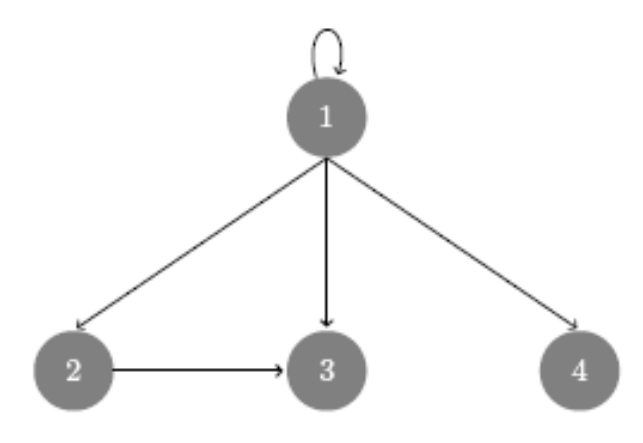
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



定义11 (关系图)

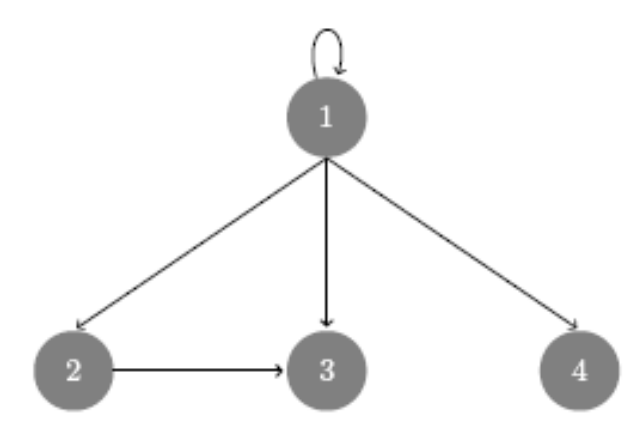
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



定义11 (关系图)

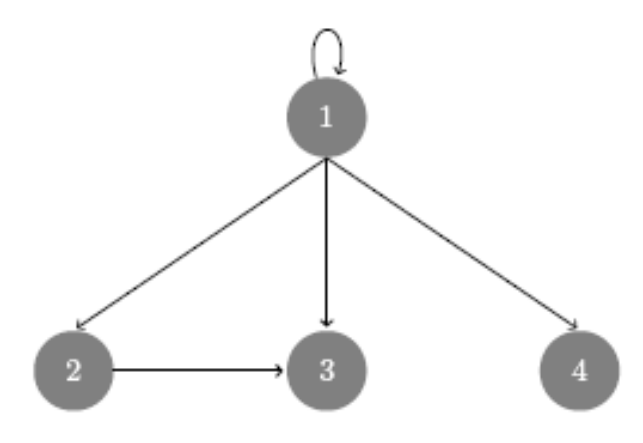
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的**关系图**，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



例9 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例9 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\} \\
M_{R^c} =& (\neg r_{ij})
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$
\begin{aligned}
R^c =& \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in A\times A \\
& \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\
=& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$M_{R^c} = (\neg r_{ij})$$

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?\text{P79-8(1-5)}$$

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?\text{P79-8(1-5)}$$

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$ P79-8(1-5)

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R-S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$$M_{R-S}=M_{R\cap S^c}$$

$$=(r_{ij}\wedge\neg s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$R\oplus S=?, M_{R\oplus S}=?$P79-8(1-5)

定义12 (复合关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，S是集合B到集合C的一个关系，则称从A到C的关系

$$R \circ S = \{\langle a, c\rangle | \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}$$

为R到S的复合关系。

定义12 (复合关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，S是集合B到集合C的一个关系，则称从A到C的关系

$$R \circ S = \{\langle a, c\rangle | \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}$$

为R到S的复合关系。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$

复合运算不满足交换律。

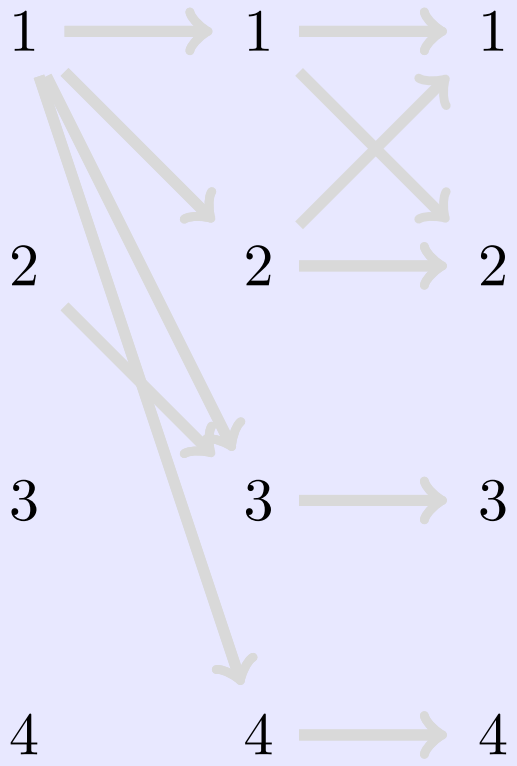
例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

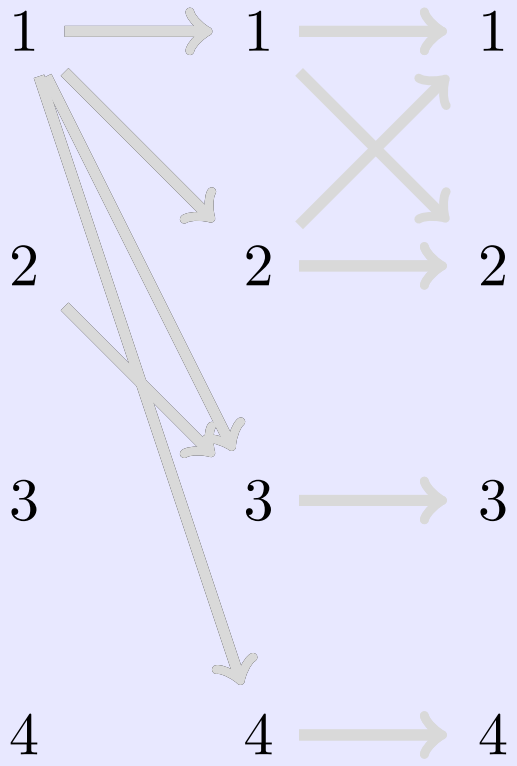
$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

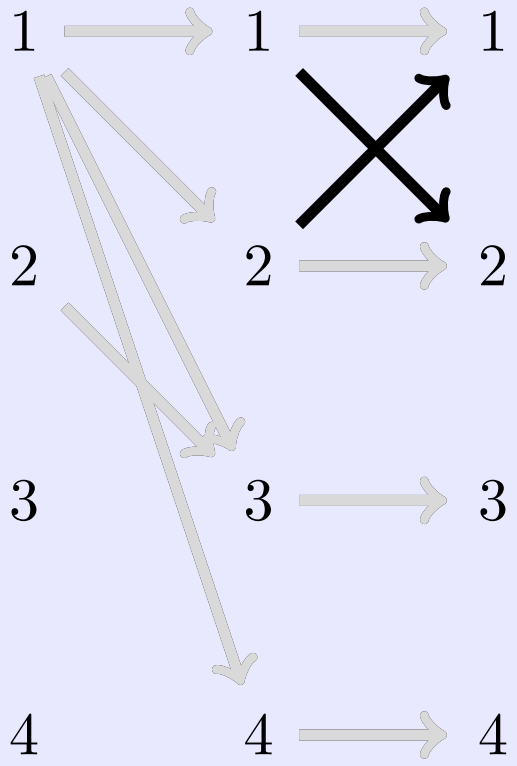
$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



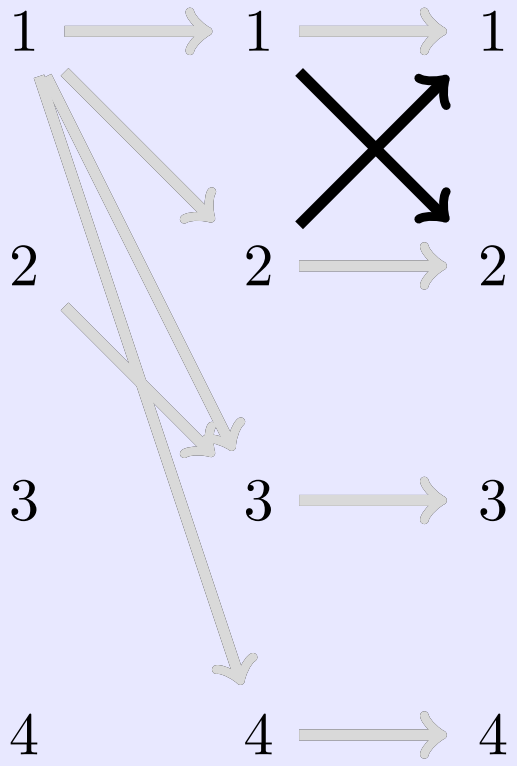
$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



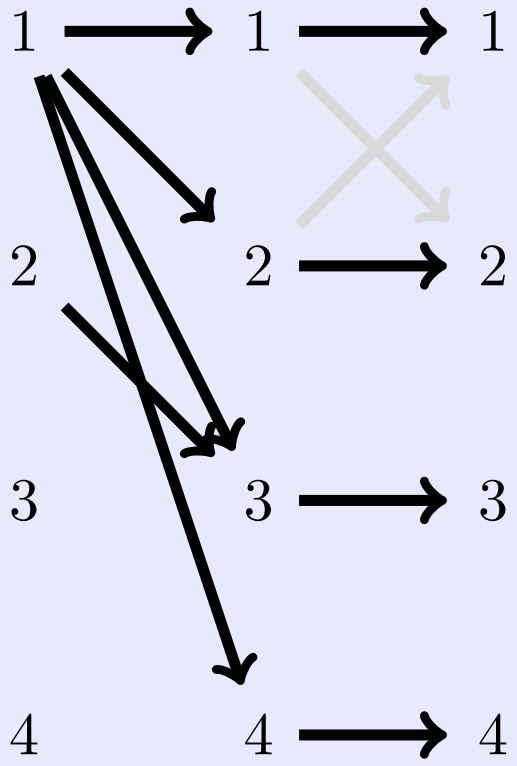
$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

复合关系矩阵的计算

设R, S都是集合$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上的关系，记

$$M_R = (r_{ij})_{n\times n}, M_S = (s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S} = (t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R, S, R\circ S$的关系矩阵。记$B = \{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j\rangle \in R\circ S \\
\Leftrightarrow & \exists a_k \in A(\langle a_i, a_k\rangle \in R \wedge \langle a_k, a_j\rangle \in S) \\
\Leftrightarrow & \exists k \in B(r_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = 1) \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\
\hline
1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
i & & & \cdots & & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & \cdots & j & \cdots & n \\
\hline
1 & s_{11} & \cdots & & \cdots & s_{1n} \\
2 & s_{21} & \cdots & & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
k & s_{k1} & \cdots & & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & s_{n1} & \cdots & & \cdots & s_{nn}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik} & \cdots & r_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & s_{kj} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik} & \cdots & r_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & s_{kj} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik} & \cdots & r_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & s_{kj} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik} & \cdots & r_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & s_{kj} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik} & \cdots & r_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & s_{kj} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & s_{nj} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ(S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ(S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ(S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ(S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ (S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

定理4 (复合关系的结合律)

设A, B, C, D是四个集合，R, S, T分别是A到B、B到C，C到D的关系，则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

记$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$，特别地，$R^0 = I_A$。

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}, \qquad (R^m)^n = R^{mn}$$

定理4 (复合关系的结合律)

设A, B, C, D是四个集合，R, S, T分别是A到B、B到C，C到D的关系，则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

记$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$，特别地，$R^0 = I_A$。

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$，　　$(R^m)^n = R^{mn}$

定理4 (复合关系的结合律)

设A, B, C, D是四个集合，R, S, T分别是A到B、B到C，C到D的关系，则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

记$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$，特别地，$R^0 = I_A$。

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$, $\quad (R^m)^n = R^{mn}$

定理4 (复合关系的结合律)

设A, B, C, D是四个集合，R, S, T分别是A到B、B到C，C到D的关系，则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

记$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$，特别地，$R^0 = I_A$。

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}, \qquad (R^m)^n = R^{mn}$$

定理5 (复合关系的性质)

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5 (复合关系的性质)

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5（复合关系的性质）

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5 (复合关系的性质)

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5（复合关系的性质）

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5 (复合关系的性质)

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定理5 (复合关系的性质)

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的**逆关系**。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$\begin{aligned}
&\langle x, z\rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\iff &\langle z, x\rangle \in R \circ S \\
\iff &\exists y(\langle z, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in S) \\
\iff &\exists y(\langle x, y\rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1}) \\
\iff &\langle x, z\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}$$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$\begin{aligned}
& \langle x, z\rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\iff & \langle z, x\rangle \in R \circ S \\
\iff & \exists y(\langle z, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in S) \\
\iff & \exists y(\langle x, y\rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1}) \\
\iff & \langle x, z\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}$$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$
\begin{aligned}
& \langle x, z \rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle z, x \rangle \in R \circ S \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle z, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in S) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y \rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z \rangle \in R^{-1}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x, z \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$
\begin{aligned}
& \langle x, z \rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\iff & \langle z, x \rangle \in R \circ S \\
\iff & \exists y(\langle z, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in S) \\
\iff & \exists y(\langle x, y \rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z \rangle \in R^{-1}) \\
\iff & \langle x, z \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$
\begin{aligned}
& \langle x, z\rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle z, x\rangle \in R \circ S \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle z, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in S) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y\rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z\rangle \in R^{-1}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x, z\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.)

证明.

$$
\begin{aligned}
& \langle x, z \rangle \in (R \circ S)^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle z, x \rangle \in R \circ S \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle z, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in S) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y \rangle \in S^{-1} \wedge \langle y, z \rangle \in R^{-1}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x, z \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

练习6 (P79-8(6-10))

作业2 (P80-9)

练习6 (P79-8(6-10))

作业2 (P80-9)

定义14 (自反性、反自反性)

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14 (自反性、反自反性)

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	$(集族, \subseteq)$	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义14（自反性、反自反性）

设R是集合A上的关系，

- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \in R$，则称$R$是自反的
- 若对于任意的$a \in A$，都有$\langle a, a\rangle \notin R$，则称$R$是反自反的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R}, \leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+, \mid)$	$(L, \perp)$	$(L, \parallel)$
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	$(集族,\subseteq)$	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
对称	×	×	×	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	$(集族,\subseteq)$	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
对称	×	×	×	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	$(集族,\subseteq)$	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
对称	×	×	×	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是**对称的**
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是**反对称的**

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	×	×	×	✓	✓	
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	
反对称	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$

定义15 (对称性、反对称性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R$，必有$\langle b,a\rangle \in R$，则称R是对称的
- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,a\rangle \in R$，必有$a=b$，则称$R$是反对称的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$	$(\mathbb{Z},\mid)$
对称	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	
反对称	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

定义16 (传递性)

设R是集合A上的关系，

- 若$\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$，必有$\langle a,c\rangle \in R$，则称$R$是传递的

记L表示直线集合，

	$(\mathbb{R},\leq)$	(集族, $\subseteq$)	$(\mathbb{Z}^+,\mid)$	$(L,\perp)$	$(L,\parallel)$
传递	✓	✓	✓	×	×

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7（设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质）

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A = \{1, 2, 3, 4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4 = \emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5 = A \times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A = \{1, 2, 3, 4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4 = \emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5 = A \times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

练习7 (设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下关系的性质)

1. $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$ $\times\times\times\checkmark\checkmark$
2. $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$
3. $R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ $\times\checkmark\times\checkmark\times$
4. 空关系$R_4=\emptyset$ $\times\checkmark\checkmark\checkmark\checkmark$
5. 全域关系$R_5=A\times A$ $\checkmark\times\checkmark\times\checkmark$

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置， M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置， M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置， M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，M_R中相应位置也是1

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于$i \neq j$,若$r_{ij} = 1$，则$r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于M_R^2中1的位置，
		M_R中相应位置也是1

例16

设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下A上关系的性质：

- $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
- $S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

练习8 (P86-4(1-6))

例16

设$A=\{1,2,3,4\}$，判断以下A上关系的性质：

- $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
- $S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

练习8 (P86-4(1-6))

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R \cup S$	✓	✓	✓	×	×
$R \cap S$	✓	✓	✓	✓	✓
R^c	×	×	✓	×	×
$R - S$	×	✓	✓	✓	×
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R \circ S$	✓	×	×	×	×

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'
3. 对于A上任何包含R的关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的闭包 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'
3. 对于A上任何包含R的关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的闭包 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'
3. 对于A上任何包含R的关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的闭包 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'自反
3. 对于A上任何包含R的关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的闭包 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'自反
3. 对于A上任何包含R的自反关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的闭包 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'自反
3. 对于A上任何包含R的自反关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的**自反闭包** 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'对称
3. 对于A上任何包含R的对称关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的**对称闭包** 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'传递
3. 对于A上任何包含R的传递关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的**传递闭包** 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定义17 (闭包)

设R是集合A上的关系，若A上的关系R'满足

1. $R \subseteq R'$
2. R'传递
3. 对于A上任何包含R的传递关系R''，都有$R' \subseteq R''$

则称R'是R的**传递闭包** 分别将R的自反、对称、传递闭包记为$r(R), s(R), t(R)$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9（闭包的计算）

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9（闭包的计算）

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9（闭包的计算）

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9（闭包的计算）

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9（闭包的计算）

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理8

设R是A上的关系，则

- R自反$\Leftrightarrow r(R)=R$
- R对称$\Leftrightarrow s(R)=R$
- R传递$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理9 (闭包的计算)

设R是A上的关系，则

- $r(R)=R\cup I_A$
- $s(R)=R\cup R^{-1}$
- $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

定理10 (若$|A|=n$，则$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$)

例17 (设$A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

R是自反的 iff $r(R)=R\cup I_A$ iff $M_{r(R)}=M_R+E$

R是对称的 iff $s(R)=R\cup R^{-1}$ iff $M_{s(R)}=M_R+M_{R^{-1}}$

R是传递的 iff $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

定理10 (若$|A|=n$，则$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$)

例17 (设$A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

- 若R是自反的，则$t(R)$是R的自反闭包
- 若R是对称的，则$t(R)$是R的对称闭包
- 若R是传递的，则$t(R)$是R的传递闭包

定理10 (若$|A| = n$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$)

例17 (设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

1. $s(R)$是满足$R \subseteq R'$的A上的对称关系R'的交集。
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $s(R)$是满足$R \subseteq R'$的A上的对称关系R'的最小关系。

定理10 (若$|A| = n$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$)

例17 (设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

1. 若R是自反的，则$r(R), s(R), t(R)$也自反；
2. 若R对称，则$r(R), s(R), t(R)$也对称；
3. 若R传递，则$r(R), t(R)$传递；

定理10 (若$|A| = n$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$)

例17 (设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

1. 若R是自反的，则$r(R), s(R), t(R)$也自反；
2. 若R对称，则$r(R), s(R), t(R)$也对称；
3. 若R传递，则$r(R), t(R)$传递；

定理10 (若$|A| = n$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$)

例17 (设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

1. 若R是自反的，则$r(R), s(R), t(R)$也自反；
2. 若R对称，则$r(R), s(R), t(R)$也对称；
3. 若R传递，则$r(R), t(R)$传递；

定理10 (若$|A| = n$，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$)

例17 (设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，求$R$的闭包)

练习9 (求P86-4(4,5,6)中的各个关系的各个闭包)

定理11

设R是A上的关系，则

1. 若R是自反的，则$r(R), s(R), t(R)$也自反；
2. 若R对称，则$r(R), s(R), t(R)$也对称；
3. 若R传递，则$r(R), t(R)$传递；

定义18（等价关系）

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的**等价关系**。

例18（判断以下关系是否是等价关系）

设A是一个人的集合，R是A上的关系，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 有共同的父亲}\}$

设A是一个人的集合，R是A上的关系，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 有共同的祖父母}\}$

设A是一个人的集合，R是A上的关系，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 有共同的兄弟}\}$

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

例18 (判断以下关系是否是等价关系)

- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

- 练习*P91-1(1,2,3,4)*

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

例18 (判断以下关系是否是等价关系)

- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

- 练习P91-1(1,2,3,4)

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

例18 (判断以下关系是否是等价关系)

- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

- 练习P91-1(1,2,3,4)

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

例18 (判断以下关系是否是等价关系)

- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

- 练习 P91-1(1,2,3,4)

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

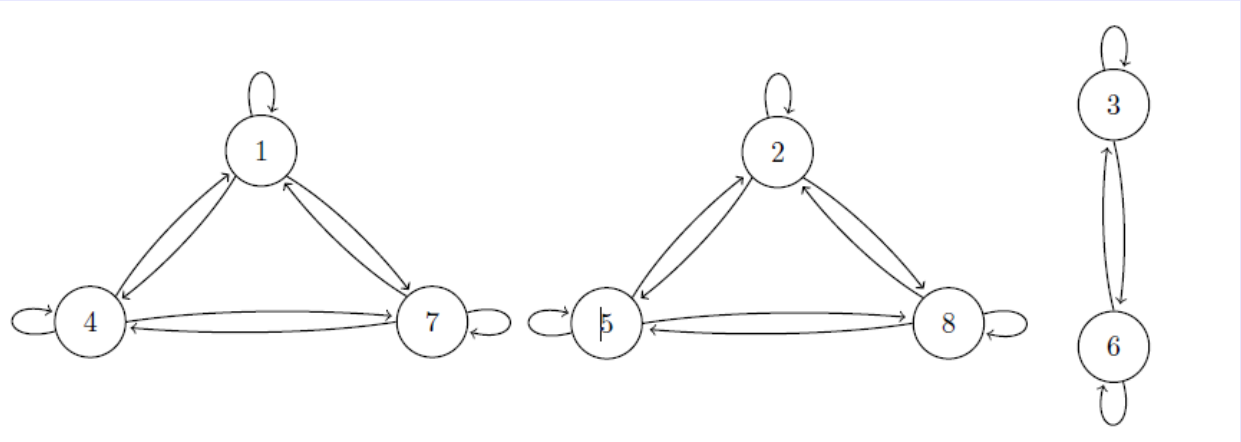
例18 (判断以下关系是否是等价关系)

- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

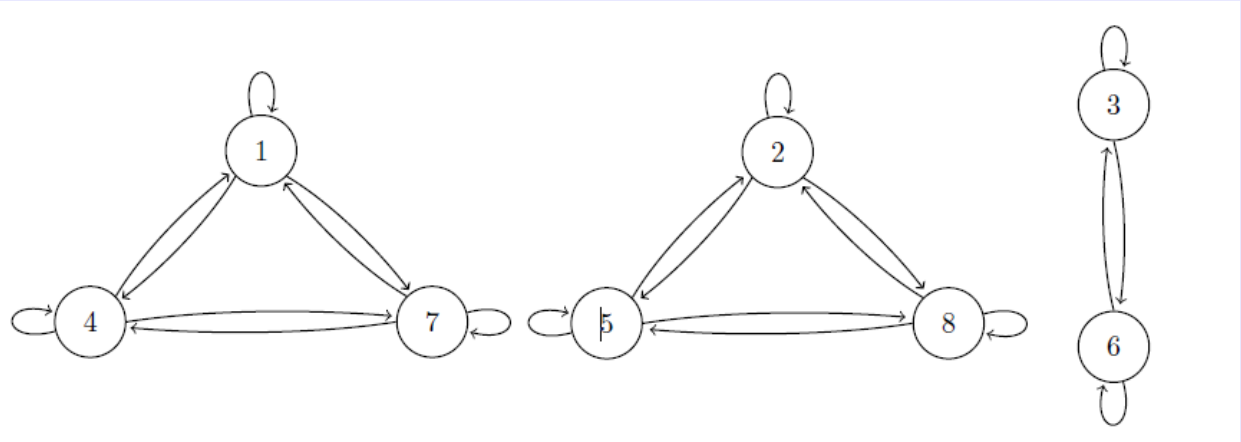
$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

- 练习*P91-1(1,2,3,4)*

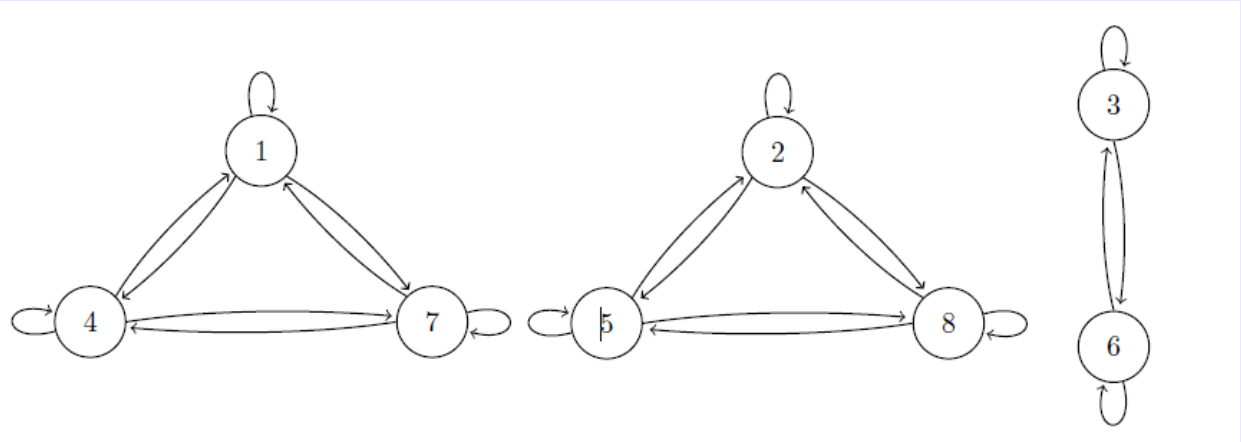
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



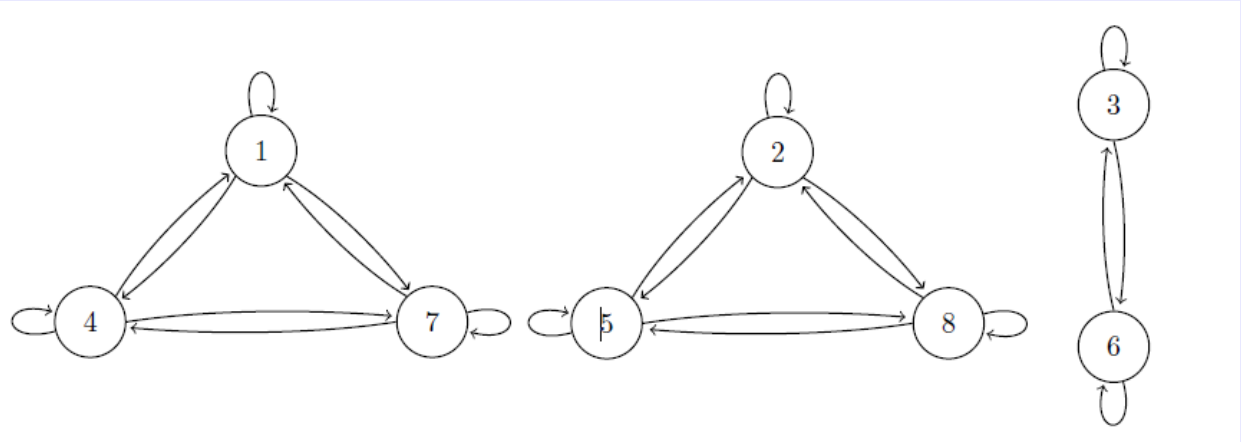
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



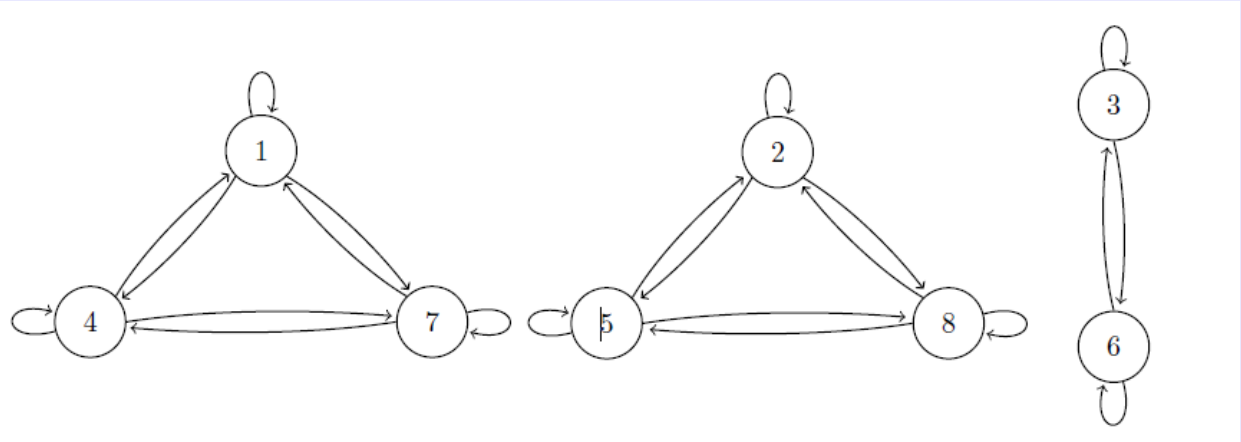
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



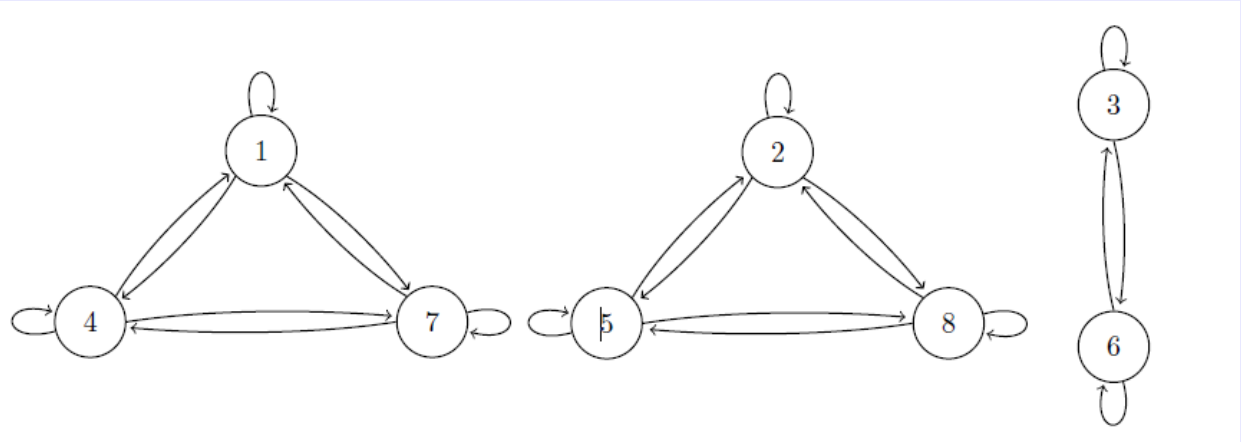
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



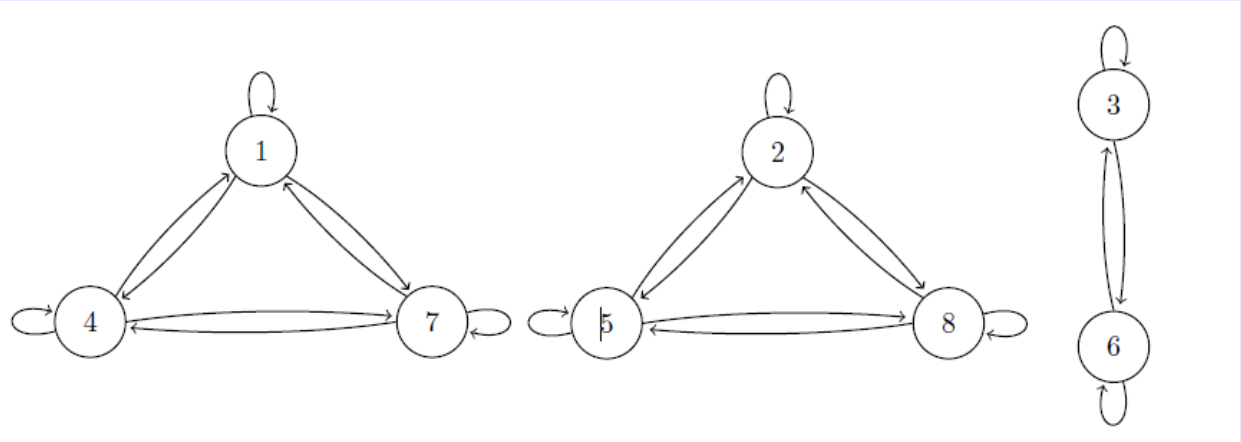
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



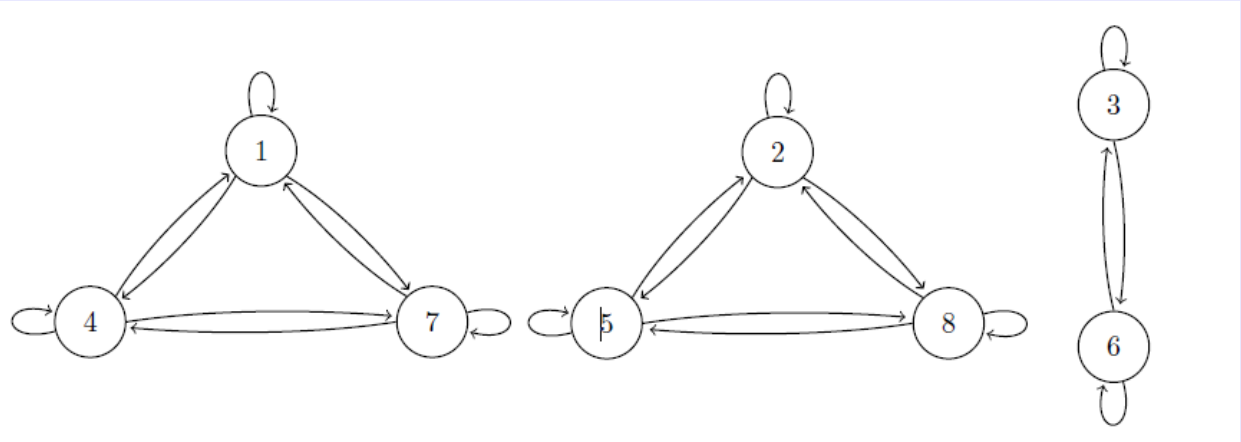
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



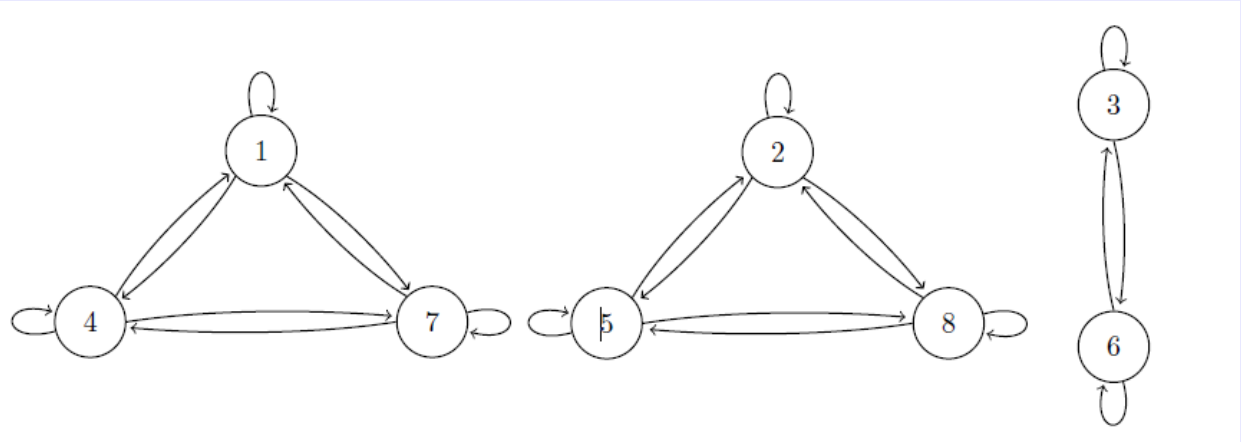
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



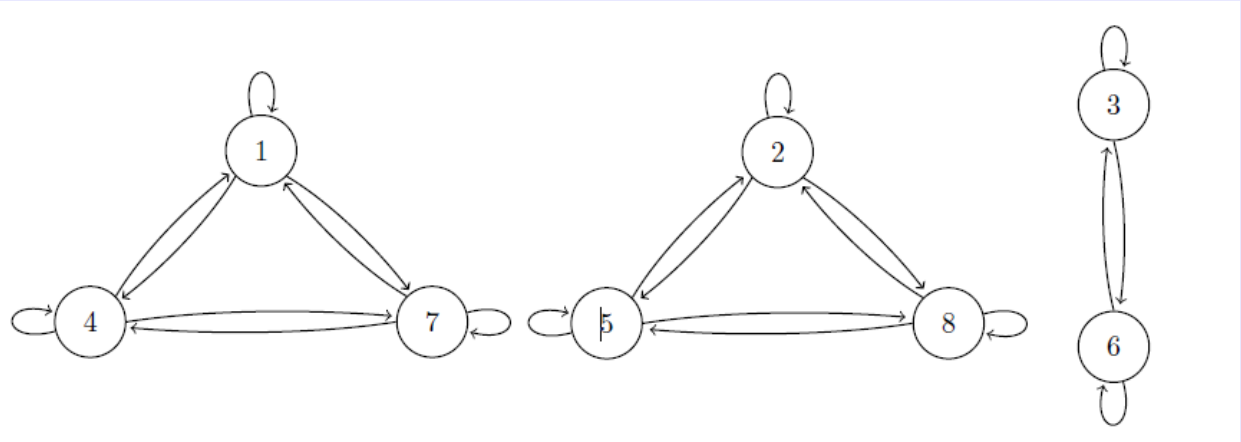
$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的**等价类**。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$
$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$
$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$
$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$
$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$

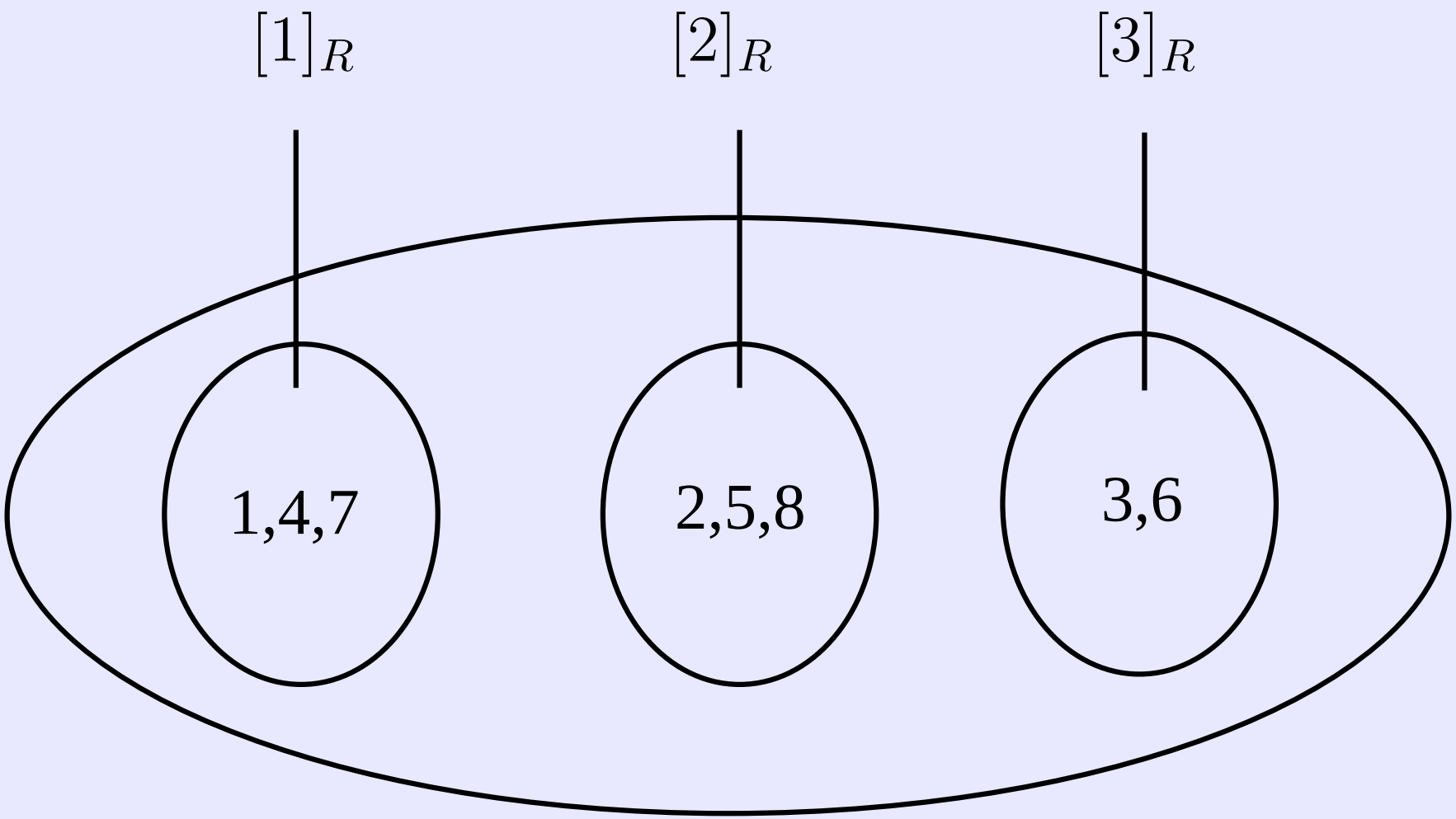
定义19 (等价类)

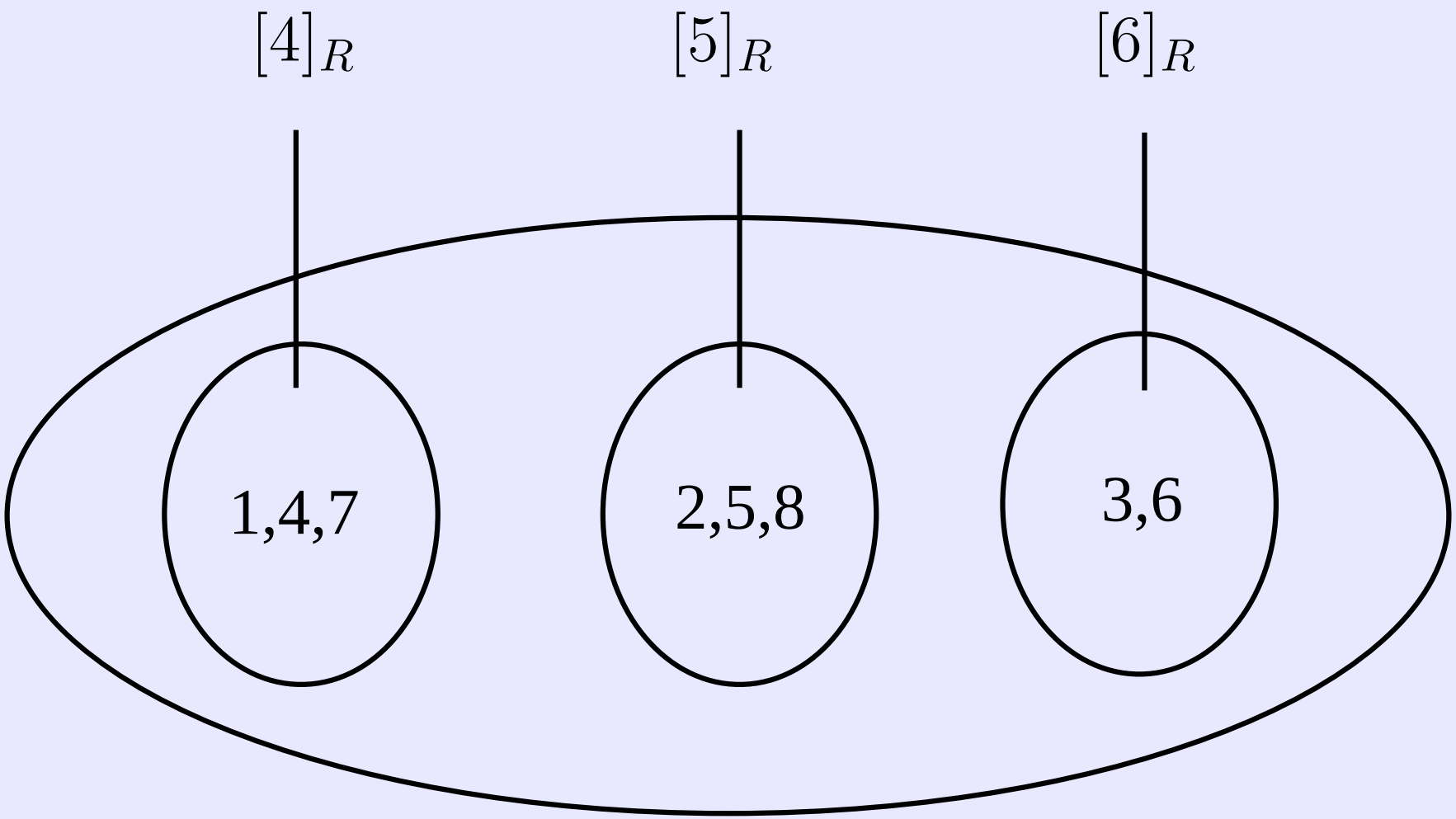
设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b \rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$
$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$
$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$


$[1]_R$
$[2]_R$
$[3]_R$
1,4,7
2,5,8
3,6


$[4]_R$
$[5]_R$
$[6]_R$
1,4,7
2,5,8
3,6

定义20（商集）

称$\{[a]_R | a \in A\}$为A关于等价关系R的**商集**，记为A/R。

$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

例19

设m是一个正整数，列出$\mathbb{Z}$在模m同余关系下所有的等价类，并指出对应的商集。

定义20（商集）

称$\{[a]_R | a \in A\}$为A关于等价关系R的商集，记为A/R。

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$

例19

设m是一个正整数，列出$\mathbb{Z}$在模m同余关系下所有的等价类，并指出对应的商集。

定义20 (商集)

称$\{[a]_R | a \in A\}$为A关于等价关系R的商集，记为A/R。

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$

例19

设m是一个正整数，列出$\mathbb{Z}$在模m同余关系下所有的等价类，并指出对应的商集。

定理12 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a \not R b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$

定理12 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a \not R b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$

定理12 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a \not R b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$

定理12 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a \not R b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

定理12 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a \not R b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

定义21 (划分)

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

定理13

对于集合A的任意划分$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$，如下定义$A$上的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$$

则R是A上的等价关系，且该等价关系对应的商集为$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$。

例21（求出$A = \{a, b, c\}$上所有的等价关系。）

练习10（P92-5）

定理13

对于集合A的任意划分$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$，如下定义$A$上的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$$

则R是A上的等价关系，且该等价关系对应的商集为$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$。

例21（求出$A = \{a, b, c\}$上所有的等价关系。）

练习10（P92-5）

定理13

对于集合A的任意划分$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$，如下定义$A$上的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$$

则R是A上的等价关系，且该等价关系对应的商集为$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$。

例21（求出$A = \{a, b, c\}$上所有的等价关系。）

练习10 (P92-5)

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

定义22 (函数)

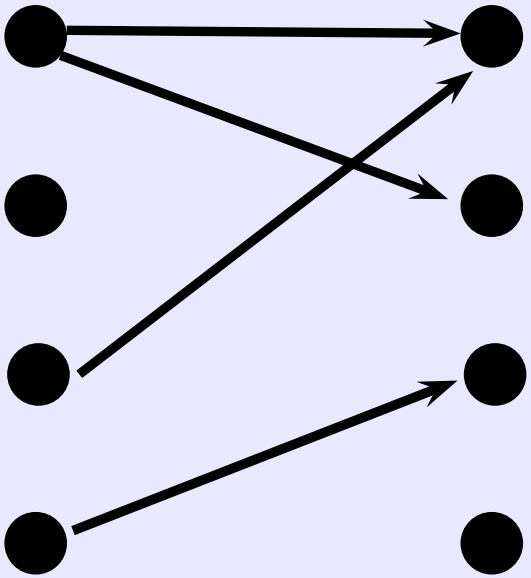
设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

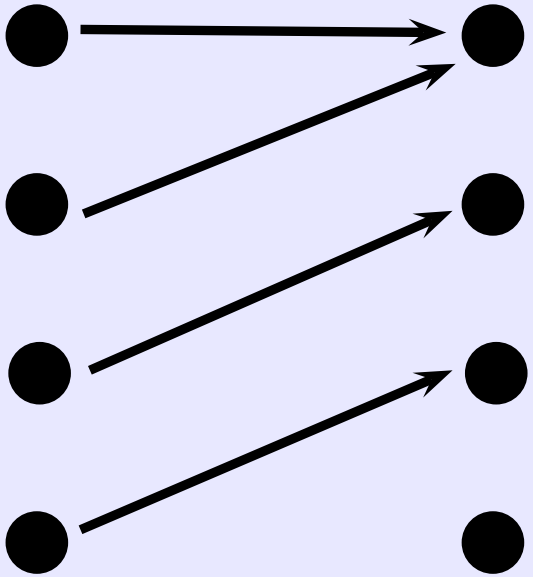
则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X, \exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.

Relationship



Function



注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{y\mid \exists x(x\in A\wedge \langle x,y\rangle\in f)\}$为$A$在$f$下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x\mid \exists y(y\in B\wedge \langle x,y\rangle\in f)\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\} \quad f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\} \quad f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\},Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\} \quad f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\} \quad f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X,B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\} \quad f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\} \quad f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_1(\{1\})=$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_1(\{1\})=\{a\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_2(\{1,2\})=$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_2(\{1,2\})=\{a,b\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\} \quad f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\} \quad f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_1^{-1}(\{a\})=$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_1^{-1}(\{a\})=\{1,2\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_2^{-1}(\{a\})=$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_2^{-1}(\{a\})=\{1\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射: $\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

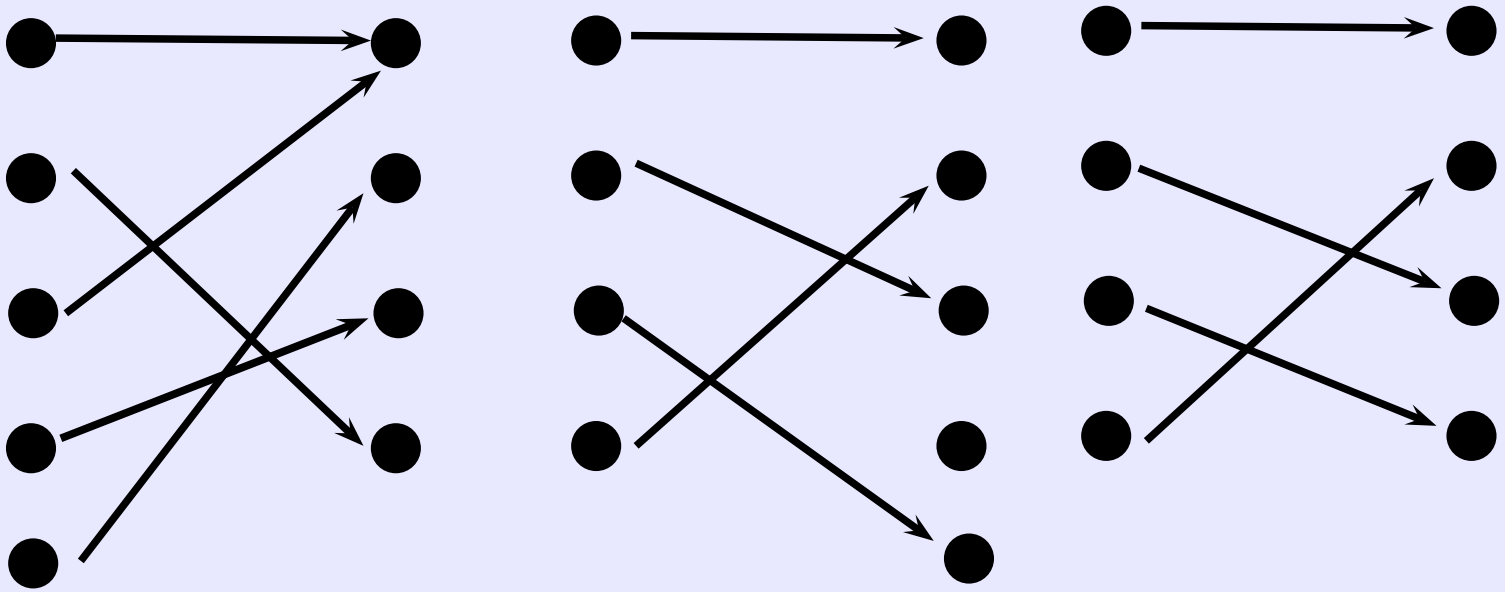
设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射

定义24 (单射、满射、双射)

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是满射
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是单射
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f即是满射也是单射，则称f是双射或一一映射



例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习11 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

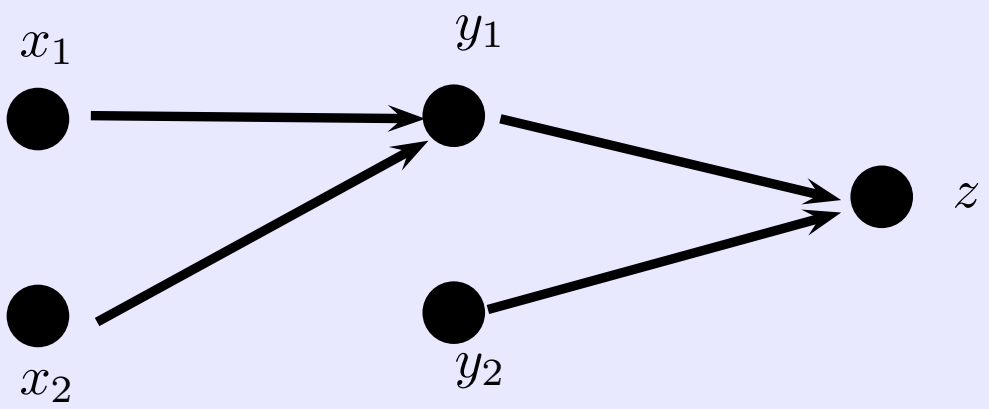
定义25 (复合函数)

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

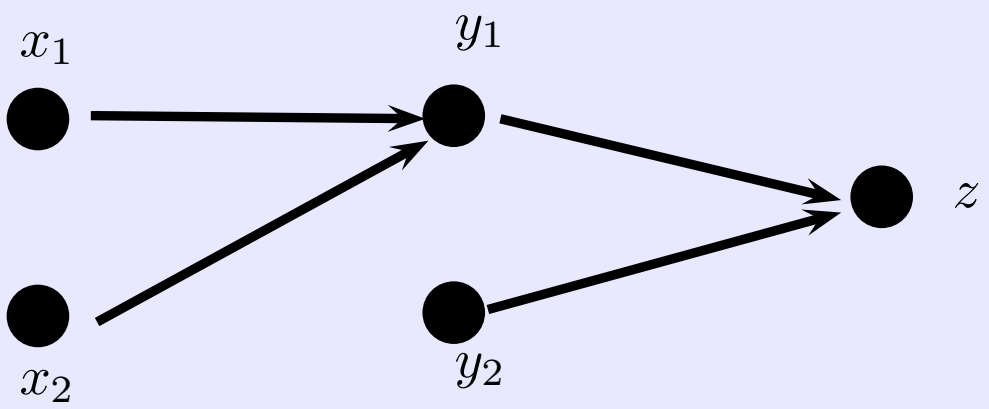
设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

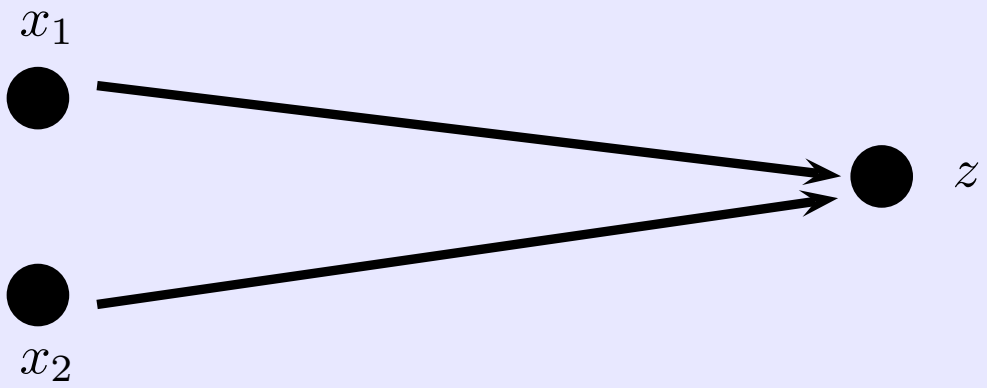
例24（若$f \circ g$是满射，f是满射吗？）



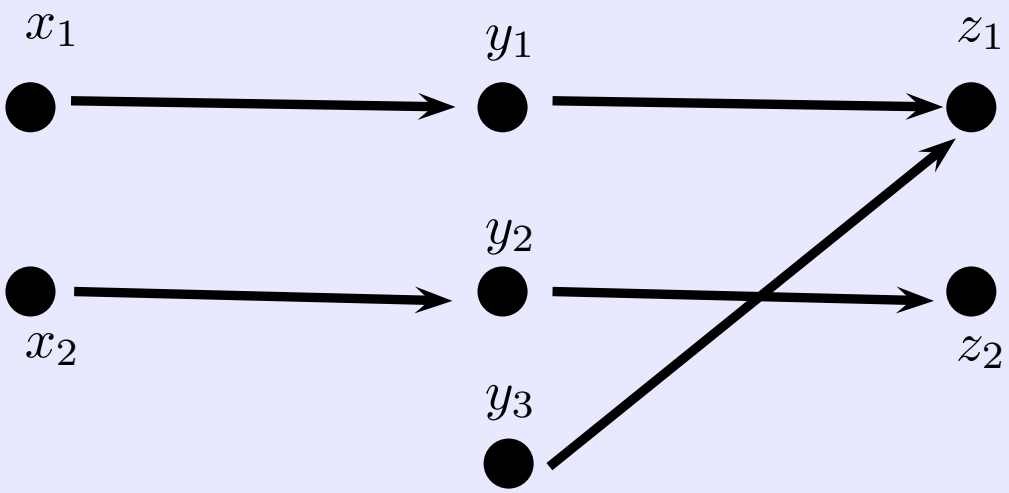
例24（若$f \circ g$是满射，f是满射吗？）



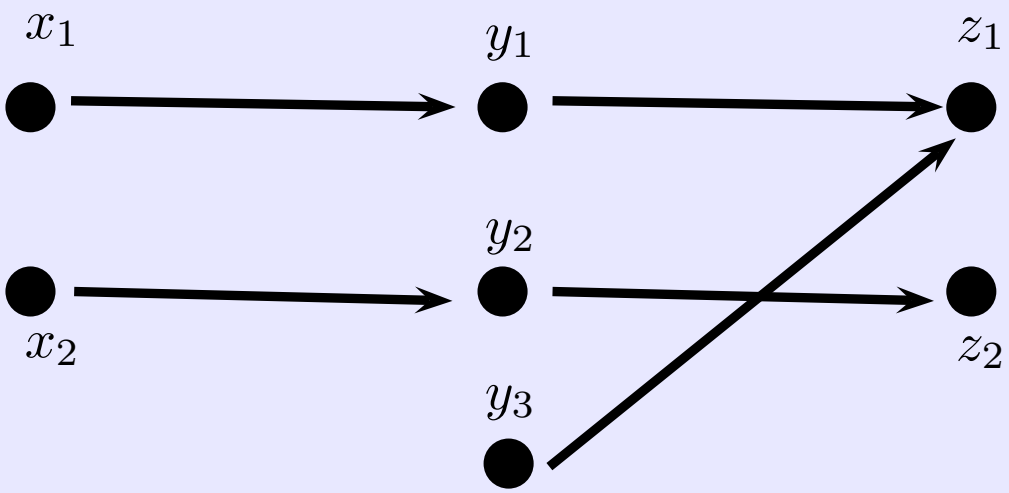
例25（若$f \circ g$是满射，f是满射吗？）



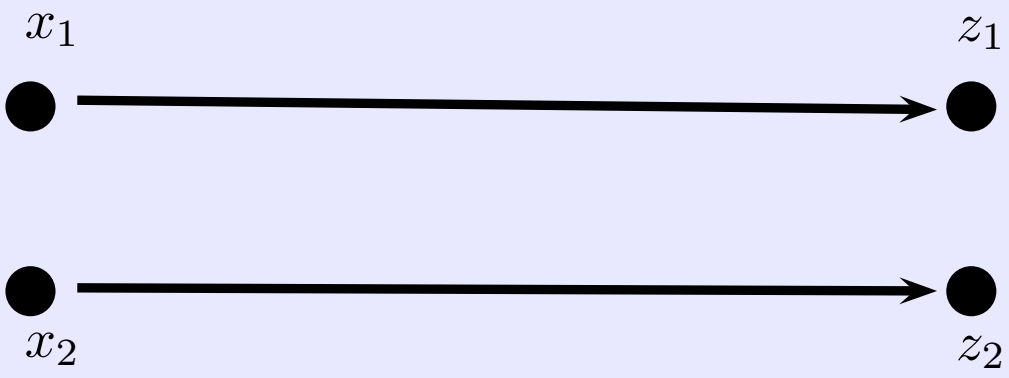
例26（若$f \circ g$是单射，g是单射吗？）



例26（若$f \circ g$是单射，g是单射吗？）



例27（若$f \circ g$是单射，g是单射吗？）



定理14 (逆函数)

若函数$f: X \to Y$是双射，则f的逆关系f^{-1}是Y到X的函数，且也是双射。称f^{-1}是f的逆函数。

定理15

设$f: X \to Y$是双射函数，g是Y到X的函数，则$f^{-1} = g$的充要条件是$f \circ g = I_X, g \circ f = I_Y$。

定理14 (逆函数)

若函数$f: X \to Y$是双射，则f的逆关系f^{-1}是Y到X的函数，且也是双射。称f^{-1}是f的逆函数。

定理15

设$f: X \to Y$是双射函数，g是Y到X的函数，则$f^{-1} = g$的充要条件是$f \circ g = I_X, g \circ f = I_Y$。

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B等势，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B**等势**，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B**等势**，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B**等势**，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B**等势**，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
- $[0,1] \sim (0,1) \sim [a,b] \sim (a,b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$