# 应用离散数学

离散数学课程组

2014年1月17日

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \land q) \rightarrow r$$

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \wedge q) \to r$$



- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

 $(p \wedge q) \to r$ 



- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \land q) \to r$$



- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \wedge q) \to r$$



- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \wedge q) \to r$$



- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为p,q,r,

$$(p \wedge q) \to r$$



- 在简单命题中,描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $\exists x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;
- 例1(分析下列语句中的个体词)
- g %%36,24; "8848" 2449; ... 8848.
- 可 9 产 奇 教: " 9" 是 个 体 词: 1

- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $\exists x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;
- 2 3是奇教: 3



- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $母 x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;"苏格拉底"是个体词; a: 苏格拉底
- 2 3是奇数; "3" 是个体词; b:3



- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $\exists x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;"苏格拉底"是个体词; a: 苏格拉底
- 2 3是奇数; "3" 是个体词; b:3



- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为<mark>个体常元</mark>,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $母 x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;"苏格拉底"是个体词; a: 苏格拉底
- 2 3是奇数; "3" 是个体词; b:3



- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为<mark>个体常元</mark>,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $母 x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;"苏格拉底"是个体词; a: 苏格拉底
- 2 3是奇数; "3" 是个体词; b:3

- 在简单命题中, 描述对象的词称为个体词;
- 特定的个体词称为个体常元,用小写字  $母 a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$  表示;
- 不确定的个体词称为个体变元,用小写字  $\exists x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$  表示;

- 苏格拉底是人;"苏格拉底"是个体词; a: 苏格拉底
- 2 3是奇数; "3" 是个体词; b:3

- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合Di被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;
- 例2(分析下列语句中的个体词与谓词)
- m 苏格拉底美人; 所知四分; s美人; 四面
- 图 9是奇数; 河河(())) 是奇数; (()

- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合Di被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- 苏格拉底是人;
- □ 3是奇数: 周围口(金)=是奇器: 口(6)

- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- 1 苏格拉底是人; 谓词P(x): x是人; P(a)
- **2** 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)

- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- I 苏格拉底是人;谓词P(x): x是人; P(a)
- 2 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)



- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- I 苏格拉底是人; 谓词P(x): x是人; P(a)
- ② 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)



- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为谓词。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- I 苏格拉底是人; 谓词P(x): x是人; P(a)
- ② 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)



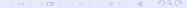
- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为<mark>谓词</mark>。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- I 苏格拉底是人; 谓词P(x): x是人; P(a)
- 2 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)



- 在简单命题中,表示对象所具有的性质或多个对象之间 关系的词称为<mark>谓词</mark>。通常用大写字母*P*, *Q*, ···表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \rightarrow \{0,1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合D<sub>i</sub>被称为个体域;
- 全体事物构成的集合被称为全总个体域;

- I 苏格拉底是人; 谓词P(x): x是人; P(a)
- ② 3是奇数; 谓词Q(x):x是奇数; Q(b)



- n,n > 0元谓词不是命题;
- 只有当n元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常 元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

200

- n, n > 0元谓词不是命题;
- 只有当n元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常 元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

#### 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

- 只有2是质数,4才是质数;
- ❷ 如果地球重于月亮,则太阳重于地球;
- 图 小王热爱自己的母亲;

- n,n > 0元谓词不是命题;
- 只有当n元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

例3 (用0元谓词符号化下列命题)

200

- n, n > 0元谓词不是命题;
- 只有当n元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

例3 (用0元谓词符号化下列命题)



- n,n > 0元谓词不是命题;
- 只有当n元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0元谓词就是命题;

#### 例3 (用0元谓词符号化下列命题)

- 只有2是质数,4才是质数;
- 2 如果地球重于月亮,则太阳重于地球;
- 3 小王热爱自己的母亲;

# 定义3 (全称量词)

设D是个体域,"对于D中的任意个体x" 称为D上的全 称量词,记为 $\forall x$ ;



## 定义3(全称量词)

设D是个体域,"对于D中的任意个体x"称为D上的全称量词,记为 $\forall x$ ;

#### 注2(全称量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

$$\forall x P(x) = 1 : \forall x \in D, P(x) \text{ p.d.}$$

$$\forall x P(x) = 0 : \dot{A} = A \in D, P(x) \times A = 0$$

## 定义3(全称量词)

设D是个体域,"对于D中的任意个体x"称为D上的全称量词,记为 $\forall x$ ;

#### 注2(全称量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

 $\forall x P(x) = 1$ :对任意的 $x \in D, P(x)$ 取值1

 $\forall x P(x) = 0 : \dot{A} = A \in D, P(x) \times A = 0$ 

## 定义3(全称量词)

设D是个体域,"对于D中的任意个体x"称为D上的全称量词,记为 $\forall x$ ;

#### 注2(全称量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

$$\forall x P(x) = 1$$
:对任意的 $x \in D, P(x)$ 取值1

$$\forall x P(x) = 0$$
:存在 $x \in D, P(x)$ 取值0



个体词、谓词与量词

# 注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

例4(求下式的真值)

 $\forall x (P(x) \lor Q(x)),$ 其中 $D = \{1, 2\},$  谓词P(x) : x = 1, Q(x) : x = 2;

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \land P(a_2) \land \cdots \land P(a_n)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ :



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\underbrace{orall x P(x)}_1 = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\underbrace{\forall x P(x)}_{1} = \underbrace{P(a_1) \land P(a_2) \land \cdots \land P(a_n)}_{1}$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$egin{equation} orall x P(x) \ 0 \end{pmatrix} = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n) \ \end{pmatrix}$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\underbrace{orall x P(x)}_0 = \underbrace{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)}_0$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \land P(a_2) \land \dots \land P(a_n)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ :



设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \land P(a_2) \land \dots \land P(a_n)$$

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
, 其中 $D = \{1, 2\}$ , 谓词 $P(x) : x = 1$ ,  $Q(x) : x = 2$ ;



个体词、谓词与量词

# 定义4 (存在量词)

设D是个体域,"ED中存在个体x" 称为D上的存在量词,记为 $\exists x$ ;



# 定义4 (存在量词)

设D是个体域,"在D中存在个体x" 称为D上的存在量词,记为 $\exists x$ ;

## 注4(存在量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

$$\exists x P(x) = 1 : \dot{A} = A \in D, P(x) \times \Delta = 1$$

$$\exists x P(x) = 0$$
:对任意的 $x \in D, P(x)$ 取值0

# 定义4 (存在量词)

设D是个体域,"在D中存在个体x" 称为D上的存在量词,记为 $\exists x$ ;

## 注4(存在量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

 $\exists x P(x) = 1$ :存在 $x \in D, P(x)$ 取值1

 $\exists x P(x) = 0$ :对任意的 $x \in D, P(x)$ 取值0

## 定义4 (存在量词)

设D是个体域,"在D中存在个体x" 称为D上的存在量词,记为 $\exists x$ ;

#### 注4(存在量词的真值)

设P(x)是以D为个体域的一元谓词,

$$\exists x P(x) = 1$$
:存在 $x \in D, P(x)$ 取值1

 $\exists x P(x) = 0$ :对任意的 $x \in D, P(x)$ 取值0

个体词、谓词与量词

# 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

例5 (求下式的真值.P44-3(2,4.6).P44-4)

 $= 3c(P(x) \to Q(x)) \land 1, \ 3cPD = \{0,3\}, \ iii \ iii P(x) : x > 2, ...$ 

Q(x): x = 0;

 $=\exists x \forall y P(x,y),$  其中 $D=\{1,2,3\},$  涓祠 $P(x,y): x=y; y \in \mathbb{R}$ 

个体词、谓词与量词

# 注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

- $\exists x (P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x) : x > 2,
  - Q(x): x=0;
- $\exists x \forall y P(x,y), \ \text{$\mathbb{F}$} \ \text{$\mathbb{P}$} D = \{1,2,3\}, \ \text{$\mathbb{H}$} \ \text{$\mathbb{P}$}(x,y) : x = y;$

设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \land 1$ ,其中 $D = \{0, 3\}$ ,谓词P(x) : x > 2
- $\exists x \forall y P(x,y)$ , 其中 $D = \{1,2,3\}$ , 谓词P(x,y) : x = y;

设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)$$

- $\exists x (P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0, 3\}$ , 谓词P(x) : x > 2, Q(x) : x = 0;

设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{1} = \underbrace{P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)}_{1}$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x) : x > 2, Q(x) : x = 0;
- $\exists x \forall y P(x, y)$ , 其中 $D = \{1, 2, 3\}$ , 谓词P(x, y) : x = y;



设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x) : x > 2, Q(x) : x = 0;
- $\exists x \forall y P(x, y)$ , 其中 $D = \{1, 2, 3\}$ , 谓词P(x, y) : x = y;



设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\underbrace{\exists x P(x)}_{0} = \underbrace{P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)}_{0}$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x): x > 2, Q(x): x = 0;
- $\exists x \forall y P(x, y)$ , 其中 $D = \{1, 2, 3\}$ , 谓词P(x, y) : x = y;



设
$$D = \{a_1, \dots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \lor P(a_2) \lor \cdots \lor P(a_n)$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x): x > 2, Q(x): x = 0;
- $\exists x \forall y P(x,y)$ , 其中 $D = \{1,2,3\}$ , 谓词P(x,y) : x = y;

设
$$D = \{a_1, \cdots, a_n\}$$
是有限个体域,则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \lor P(a_2) \lor \dots \lor P(a_n)$$

- $\exists x (P(x) \to Q(x)) \land 1$ , 其中 $D = \{0,3\}$ , 谓词P(x) : x > 2, Q(x): x = 0;
- $\exists x \forall y P(x,y)$ , 其中 $D = \{1,2,3\}$ , 谓词P(x,y) : x = y;



# 例6(设个体域 $D_1$ : 全体人类, $D_2$ : 全总个体域, 分别在 $D_1, D_2$ 下将下列命题符号化。)

1.凡人都呼吸; 2.有的人用左手写字;

#### 例7(将下列命题符号化)

- 所有的人都长黑头发;
- 2 有的人登上过月球;
- 3 没有人登上过火星;
- 在美国留学的学生未必都是华人;

# 例6(设个体域 $D_1$ : 全体人类, $D_2$ : 全总个体域, 分别在 $D_1, D_2$ 下将下列命题符号化。)

1.凡人都呼吸; 2.有的人用左手写字;

#### 例7(将下列命题符号化)

- 所有的人都长黑头发;
- 2 有的人登上过月球;
- 3 没有人登上过火星;
- ₫ 在美国留学的学生未必都是华人;

## 例8(将下列命题符号化)

- 兔子比乌龟跑得快;
- 2 有的兔子比所有乌龟跑得快;
- 3 并不是所有兔子都比乌龟跑得快;
- 4 不存在跑得同样快的两只兔子;

## 例8 (将下列命题符号化)

- 1 兔子比乌龟跑得快;
- 2 有的兔子比所有乌龟跑得快;
- 3 并不是所有兔子都比乌龟跑得快;
- 4 不存在跑得同样快的两只兔子;

作业1 (P44-3(6)、P45-8(4,7,10))



设 $D_i, 1 \leq i \leq n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

- $\blacksquare D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- 图 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数,  $t_i, 1 \leq i \leq n$  是相 应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- 图 所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

设 $D_i, 1 \leq i \leq n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

定义6 (原子公式)

 $\mathcal{L}P(x_1,\cdots,x_n)$ 是n元谓词, $t_i,1\leq i\leq n$ 是相应于个体域 $D_i$ 的 n 则称 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 是原子公式。

设 $D_i, 1 \le i \le n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

- 1  $D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- ② 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数, $t_i, 1 \leq i \leq n$  是相应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- $\blacksquare$  所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

#### 定义6 (原子公式)

设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 是n元谓词, $t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于个体域 $D_i$ 的 页,则称 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子公式。

设 $D_i, 1 \le i \le n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

- 1  $D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- ② 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数,  $t_i, 1 \leq i \leq n$  是相应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- $\blacksquare$  所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串

#### 定义6 (原子公式)

设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 是n元谓词, $t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于个体域 $D_i$ 的 页,则称 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子公式。

设 $D_i, 1 \le i \le n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

- 1  $D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- ② 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数,  $t_i, 1 \leq i \leq n$  是相应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- 3 所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

#### 定义6 (原子公式)

设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 是n元谓词, $t_i, 1 \le i \le n$ 是相应于个体域 $D_i$ 的 页,则称 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子公式。

设 $D_i$ , 1 < i < n是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列 规则定义的符号串:

- **1**  $D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- ② 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数、 $t_i$ , 1 < i < n 是相 应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- **3** 所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

#### 定义6 (原子公式)



设 $D_i, 1 \leq i \leq n$ 是个体变元 $x_i$ 的个体域,则 $D_i$ 的项 是指按下列规则定义的符号串:

- $\blacksquare D_i$ 中的个体常元和个体变元是相应于 $D_i$ 的项;
- ② 若f是从 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 到 $D_i$ 的n元函数,  $t_i, 1 \leq i \leq n$  是相应于 $D_i$ 的项,则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是相应于 $D_i$ 的项;
- 3 所有相应于 $D_i$ 的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

#### 定义6 (原子公式)

设 $P(x_1,\dots,x_n)$ 是n元谓词, $t_i,1 \le i \le n$ 是相应于个体域 $D_i$ 的项,则称 $P(t_1,\dots,t_n)$ 是原子公式。



# 定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1 0,1 走诮何公式;

2 原子公式是谓词公式:

m 1 2 - () (m 1 2 - ()

谓词公式;

■ 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的

## 定义7(谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

- 1 0,1是谓词公式;
- 2 原子公式是谓词公式;
- 图 A, B是谓词公式,则 $A, B, A \land B, A \lor B, A \to B, A \leftrightarrow B$ 是谓词公式;
- 且 若x是个体变元,A是谓词公式,则 $\forall xA$ ,∃xA是谓词公式;
- 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7(谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

- 1 0,1是谓词公式;
- 2 原子公式是谓词公式;
- 图 A, B是谓词公式,则 $A, B, A \land B, A \lor B, A \to B, A \leftrightarrow B$ 是谓词公式;
- $\boxed{4}$  若x是个体变元,A是谓词公式,则 $\forall xA$ , ∃xA是谓词公式;
- **5** 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7(谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

- 1 0,1是谓词公式;
- 2 原子公式是谓词公式;
- 且  $\exists x$ 是个体变元,A是谓词公式,则 $\forall xA$ ,∃xA是谓词公式;
- **5** 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7(谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

- 1 0,1是谓词公式;
- 2 原子公式是谓词公式;
- $extbf{4}$  若x是个体变元,A是谓词公式,则 $\forall xA$ ,  $\exists xA$ 是谓词公式;
- **5** 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

## 定义7(谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

- 1 0,1是谓词公式;
- 2 原子公式是谓词公式;

- **5** 所有谓词公式都是有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)得到的符号串。

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖
  - 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

200

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \to \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是<mark>指导变元</mark>,A是相应量词的<mark>辖</mark>域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists y P(x,y))$
- $\forall x(Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$



- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x)$
- $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists y P(x,y))$
- $\forall x(Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$



- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\exists \forall x (Q(x) \to \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $\exists \forall x (Q(x) \to \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $2 \ \forall x (Q(x) \to \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$

- 在谓词公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中,称x是指导变元,A是相应量词的<mark>辖</mark>域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

- $2 \ \forall x (Q(x) \to \exists y P(x,y))$
- $\exists \forall x (Q(x) \to R(x)) \land \exists x P(x,y)$



在谓词公式中,将某量词辖域中出现的某个约束变 元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号,而公式的其余部分不变,则谓词公式的等价性不变。

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 9 Q @

在谓词公式中,将某量词辖域中出现的某个约束变 元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号,而公式的其余部分不变,则谓词公式的等价性不变。

#### 定理2(代替规则)

在谓词公式中,将A中某个自由变元的所有出现用A中 出现的某个个体变元符号代替,公式的等价性不变。

在谓词公式中,将某量词辖域中出现的某个约束变 元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符 号,而公式的其余部分不变,则谓词公式的等价性不变。

## 定理2 (代替规则)

在谓词公式中,将A中某个自由变元的所有出现用A中 未出现的某个个体变元符号代替,公式的等价性不变。

在谓词公式中,将某量词辖域中出现的某个约束变 元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符 号,而公式的其余部分不变,则谓词公式的等价性不变。

## 定理2(代替规则)

在谓词公式中,将A中某个自由变元的所有出现用A中 未出现的某个个体变元符号代替,公式的等价性不变。

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

 $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$ 

$$\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$$

$$\forall x P(x, y) \rightarrow \exists y Q(x, y)$$

$$\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$$

$$\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$$

$$\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$$

- $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$  $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$

- $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$  $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$
- $\exists \forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$   $\forall x P(x,s) \to \exists y Q(t,y)$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$

- $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$  $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$
- $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$

- $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$  $\forall x (P(x) \to Q(x,y))$
- $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, y) \to \exists y Q(x, y)$   $\forall x P(x, s) \to \exists y Q(t, y)$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$  $\forall \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \to Q(\mathbf{x}, y))$
- $\exists \forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$  $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$  $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$  $\forall x P(x,s) \rightarrow \exists y Q(t,y)$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall \mathbf{x} \exists y (P(\mathbf{x}, y) \land Q(y, z)) \lor \exists \mathbf{x} R(\mathbf{x}, y, z)$



- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$  $\forall \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \to Q(\mathbf{x}, y))$
- $\exists \forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$  $\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, y) \to \exists y Q(x, y)$  $\forall x P(x,y) \rightarrow \exists y Q(x,y)$  $\forall x P(x,s) \rightarrow \exists y Q(t,y)$
- $\exists \forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists x R(x,y,z)$  $\forall \mathbf{x} \exists y (P(\mathbf{x}, y) \land Q(y, z)) \lor \exists \mathbf{x} R(\mathbf{x}, y, z)$  $\forall x \exists y (P(x,y) \land Q(y,z)) \lor \exists s R(s,t,z)$



- 非空个体域D;
- ② 对A中的每个个体常元符号,指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号, 指定一个具体的谓词。

- 非空个体域D;
- ② 对A中的每个个体常元符号, 指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号,指定一个具体的谓词。



- 非空个体域D;
- ② 对A中的每个个体常元符号, 指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号,指定一个具体的谓词。

- 非空个体域D;
- 2 对A中的每个个体常元符号, 指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号, 指定一个具体的谓词。

- 非空个体域D;
- 2 对A中的每个个体常元符号, 指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号,指定一个具体的谓词。

- 1 非空个体域D;
- 2 对A中的每个个体常元符号, 指定D中的一个固定元素;
- 3 对A中每个函数符号, 指定一个具体的函数;
- 4 对A中每个谓词符号,指定一个具体的谓词。

# 例10 (对下列谓词公式,分别给出一个成真解释与成假 解释)

- $\forall x (P(x) \rightarrow S(x))$
- $\supseteq \forall x P(x) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$
- $\forall x \forall y (P(x) \land P(y) \land Q(x,y) \rightarrow R(f(x,y),g(x,y)))$

设 $p_1, \cdots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \cdots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \leq i \leq n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y) \not\equiv p \to q$  的代换实例。  
 $\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \not\equiv p \to q$ 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

永爽式的代摄实例仍然是永爽式;永恒式的代摄实例 在80年之四子

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

 $P(x) \to Q(x)$ 、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y) \not\equiv p \to q$  的代换实例。  $\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \not\equiv p \to q$ 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、  $\forall x P(x) \to \exists y Q(y) \not\equiv p \to q$  的代换实例。  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、  $\forall x P(x) \to \exists y Q(y) \exists p \to q$  的代换实例。 
$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \exists p \to q$$
 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

 $P(x) \to Q(x)$ 、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 是 $p \to q$  的代换实例。  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

#### 定理3 (谓词公式判定方法1)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 是 $p \to q$  的代换实例。  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

### 定义10 (代换实例)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 是 $p \to q$  的代换实例。  
  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式; 永假式的代换实例 仍然是永假式。



### 定义10 (代换实例)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 是 $p \to q$  的代换实例。  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

### 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式; 永假式的代换实例 仍然是永假式。



### 定义10 (代换实例)

设 $p_1, \dots, p_n$ 是命题公式中出现的n个命题变元, $A_1, \dots, A_n$ 是n个谓词公式,用 $A_i, 1 \le i \le n$ 处处代换A中的 $p_i$ 所得的谓词公式称为A的代换实例。

$$P(x) \to Q(x)$$
、 $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 是 $p \to q$  的代换实例。  
  $\forall x (P(x) \to Q(x))$ 不是 $p \to q$ 的代换实例。

## 定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式; 永假式的代换实例 仍然是永假式。



### 例11 (判断下列谓词公式)

$$\exists \neg (\forall x P(x) \to \exists x \forall y Q(x,y)) \land \exists x \forall y Q(x,y)$$

可满足式的代换实例可能永真、可能永假、可能可满足。



### 例11 (判断下列谓词公式)

$$\exists \neg(\forall x P(x) \to \exists x \forall y Q(x,y)) \land \exists x \forall y Q(x,y)$$

可满足式的代换实例可能永真、可能永假、可能可满足。



# 谓词公式判定方法2-非形式化方法

→□→ →□→ → □→ □ → ○○○

# 谓词公式判定方法2-非形式化方法

### 例12 (判断下列谓词公式)

- $\exists x \exists y P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)$
- $\exists \forall x (P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \forall x Q(x))$

### 练习2 (判断下列谓词公式)

$$P(x,y) \to (Q(x,y) \to P(x,y))$$

$$4 \forall x (P(x) \land Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \land \forall y Q(y))$$

### 练习2 (判断下列谓词公式)

$$P(x,y) \to (Q(x,y) \to P(x,y))$$

$$4 \forall x (P(x) \land Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \land \forall y Q(y))$$

### 作业2 (P50-4(2,4), 6(3))



 $\mathcal{C}A, B$ 是两个谓词公式,如果在任何解释下,A, B具有相同的真值,则称A, B等价,记为A = B。

ご理4

 $\partial A, B$ 是两个谓词公式,则A = B的充要条件。 $A \leftrightarrow B$ 永真。

定理5(量词否定律)

 $(1) \neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x). \qquad (2) \neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x).$ 

设A,B是两个谓词公式,如果在任何解释下,A,B具有相同的真值,则称A,B等价,记为A=B。

定理4

 $\mathcal{C}_{A,B}$ 是两个谓词公式,则A=B的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 永真。



设A,B是两个谓词公式,如果在任何解释下,A,B具有相同的真值,则称A,B等价,记为A=B。

### 定理4

 $\mathcal{C}_A, B$ 是两个谓词公式,则A = B的充要条件 是 $A \leftrightarrow B$ 永真。

定理5 (量词否定律)

 $(1)\neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \qquad (2)\neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$ 

设A,B是两个谓词公式,如果在任何解释下,A,B具有相同的真值,则称A,B等价,记为A=B。

#### 定理4

设A,B是两个谓词公式,则A=B的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 永真。

### 定理5 (量词否定律)

 $(1)\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \qquad (2)\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$ 



设A,B是两个谓词公式,如果在任何解释下,A,B具有相同的真值,则称A,B等价,记为A=B。

#### 定理4

设A,B是两个谓词公式,则A=B的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 永真。

### 定理5 (量词否定律)

$$(1)\neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \qquad (2)\neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$$



# 定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设A,B是谓词公式,B不包含个体变元x,则

- $\forall x (A(x) \land B) = \forall x A(x) \land B$
- $\exists x (A(x) \land B) = \exists x A(x) \land B$
- $\exists x (A(x) \lor B) = \exists x A(x) \lor B$

## 定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设A,B是谓词公式,B不包含个体变元x,则

- $\forall x (A(x) \land B) = \forall x A(x) \land B$
- $\forall x (A(x) \lor B) = \forall x A(x) \lor B$
- $\exists x (A(x) \land B) = \exists x A(x) \land B$
- $\exists x (A(x) \lor B) = \exists x A(x) \lor B$

### 定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设A,B是谓词公式,B不包含个体变元x,则

谓词公式的等价演算 0.00

- $\forall x(A(x) \lor B) = \forall xA(x) \lor B$
- $\exists x(A(x) \land B) = \exists xA(x) \land B$
- $\exists x (A(x) \lor B) = \exists x A(x) \lor B$

谓词公式的等价演算 0000

# 定理7(量词分配率)

$$\exists x (A(x) \lor B(x)) = \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$$

$$= \forall x (A(x) \vee B(x)) \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

$$=\exists x(A(x)\wedge B(x))\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

谓词公式的等价演算 ○○●○

### 定理7(量词分配率)

- $\exists x (A(x) \lor B(x)) = \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

- $\forall x (A(x) \vee B(x)) \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x (A(x) \land B(x)) \exists x A(x) \land \exists x B(x)$

### 定理7(量词分配率)

- $\exists x (A(x) \lor B(x)) = \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

- $\forall x (A(x) \vee B(x)) \stackrel{?}{=} \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
- $\exists x (A(x) \land B(x)) \stackrel{?}{=} \exists x A(x) \land \exists x B(x)$



### 定理7(量词分配率)

- $\exists x (A(x) \lor B(x)) = \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

- $\forall x (A(x) \lor B(x)) \neq \forall x A(x) \lor \forall x B(x)$
- $\exists x (A(x) \land B(x)) \stackrel{?}{=} \exists x A(x) \land \exists x B(x)$



### 定理7(量词分配率)

- $\exists x (A(x) \lor B(x)) = \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

- $\forall x (A(x) \lor B(x)) \neq \forall x A(x) \lor \forall x B(x)$
- $\exists x (A(x) \land B(x)) \neq \exists x A(x) \land \exists x B(x)$



谓词公式的等价演算 0000

### 例13 (证明下列等价关系

设A(x), B(x)是谓词公式, C是不含个体变元x的谓词公式, 证明

- $\exists \forall x (A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

作业3 (P55-3(3,4))

 $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y), \exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$ 

### 例13 (证明下列等价关系)

设A(x), B(x)是谓词公式,C是不含个体变元x的谓词公式,证明

- $\exists x (A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

作业3 (P55-3(3,4))



 $\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y), \exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$ 

## 例13 (证明下列等价关系)

设A(x), B(x)是谓词公式, C是不含个体变元x的谓词公式, 证明

- $\exists x (A(x) \to C) = \exists x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to C) = \forall x A(x) \to C$
- $\exists x (A(x) \to B(x)) = \forall x A(x) \to \exists x B(x)$

作业3 (P55-3(3,4))



- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是永真式。

设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是谓词公式,如果对于 $A_1, \dots, A_n$ 都取值1的任何解释,B必定也取值1,则称B是前是 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑结论,记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ ,或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 

- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的元要条件是 $A \rightarrow B$ 是水真式。

设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是谓词公式,如果对于 $A_1, \dots, A_n$ 都取值1的任何解释,B必定也取值1,则称B是前提 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑结论,记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ ,或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 

- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是永真式

设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是谓词公式,如果对于 $A_1, \dots, A_n$ 都取值1的任何解释,B必定也取值1,则称B是前是 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑结论,记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ ,或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 

- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是水真式。

设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是谓词公式,如果对于 $A_1, \dots, A_n$ 都取值1的任何解释,B必定也取值1,则称B是前提 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑结论,记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ ,或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 

- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是永真式。

设 $A_1, \dots, A_n, B$ 是谓词公式,如果对于 $A_1, \dots, A_n$ 都取值1的任何解释,B必定也取值1,则称B是前提 $A_1, \dots, A_n$ 的逻辑结论,记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ ,或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ 

- A = B的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是永真式。

## 例14 (证明以下推理)

- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \lor B(x))$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x))$
- $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$

### 例14 (证明以下推理)

- $\exists x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$



基本概念与公式

### 例14(证明以下推理)

- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x) \land x B(x) \land \exists x B(x) \land \exists$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

### 例14(证明以下推理)

- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists y \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

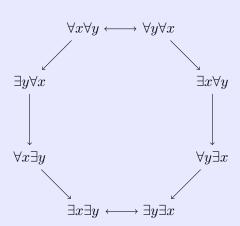
- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

- $\exists x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

- $\exists x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$



- $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- $\exists x A(x) \land \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$
- $\exists \forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$



# 定理9(推理规则)

推理演绎方法

# 定理9(推理规则)

# ■ US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: y不在A(x)中以约束变元形式出现。

### 例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x+1=y

 $1.\forall x \exists y P(x,y)$ 

P

 $2.\exists y P(y,y)$ 

 $US_{(1)}$ 

# 定理9 (推理规则)

# ■ US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: y不在A(x)中以约束变元形式出现。

### 例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x+1=y

$$\exists x \exists y P(x,y)$$

$$2.\exists y P(y,y)$$

$$US_{(1)}$$

# 定理9(推理规则)

■ US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: y不在A(x)中以约束变元形式出现。

例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集,P(x,y): x+1=y

$$\Box \forall x \exists y P(x,y)$$

P

$$2.\exists y P(y,y)$$

 $US_{(1)}$ 

### 定理9 (推理规则)

# ■ US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: y不在A(x)中以约束变元形式出现。

# 例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x+1=y

$$1.\forall x \exists y P(x,y)$$

$$2.\exists y P(y,y)$$

$$US_{(1)}$$

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

- $\blacksquare a$ 是使A(x)为真的特定个体常元;
- $\square$  a个在A(x)和已导出的公式中出现;
- **B** 除x外,A(x)无其他自由变元

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

- $\blacksquare$  a是使A(x)为真的特定个体常元;
- $\square$  a个在A(x)和已导出的公式中出现;
- **B** 除x外,A(x)无其他自由变元;

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

# 要求:

② a不在A(x)和已导出的公式中出现;

 $\mathbf{B}$  除x外,A(x)无其他自由变元。

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

- *a*是使*A*(*x*)为真的特定个体常元;
- 2 a不在A(x)和已导出的公式中出现;
- $\mathbf{3}$  除x外,A(x)无其他自由变元:

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

- a是使A(x)为真的特定个体常元;
- 2 a不在A(x)和已导出的公式中出现;
- $\mathbf{3}$  除x外,A(x) 九县他自田变兀;

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

- *a*是使*A*(*x*)为真的特定个体常元;
- 2 *a*不在*A*(*x*)和已导出的公式中出现;
- 3 除x外, A(x)无其他自由变元;

### 例16 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x):x是正数, Q(x):x是负数,

$$1.\exists x P(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$3.\exists x Q(x)$$

$$ES_{(3)}$$

$$5.P(a) \wedge Q(a)$$

$$T_{(2),(4)}$$

# 例17 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x > y

$$1.\forall x\exists y P(x,y)$$

$$2.\exists y P(z,y)$$

$$US_{(1)}$$

$$ES_{(2)}$$

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求: x不在A(y)中以约束变元形式出现;

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求: x不在A(y)中以约束变元形式出现;

#### 例18 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x > y

$$1.\exists x P(x,y)$$

$$2.\forall x \exists x P(x,x)$$

$$UG_{()}$$

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求: x不在A(y)中以约束变元形式出现;

例18 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x > y

$$1.\exists x P(x,y)$$

$$2.\forall x \exists x P(x,x)$$
  $UG_{(1)}$ 

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求: x不在A(y)中以约束变元形式出现;

### 例18 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, P(x,y): x > y

$$1.\exists x P(x,y)$$

P

$$2.\forall x \exists x P(x,x)$$

 $UG_{(1)}$ 

# 4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求:x不在A(y)/A(a)中以约束变元形式出现。



# 4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求: x不在A(y)/A(a)中以约束变元形式出现。

#### 例19 (证明苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

# 4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求: x不在A(y)/A(a)中以约束变元形式出现。

### 例19 (证明苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。



规则	表示	注意事项
US	$\forall x A(x) \Rightarrow A(a)$	y在A(x)中不约束
	$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$	
ES	$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$	1.a满足 $A(x) = 1$
		2.a不在A(x)和已有公式中出现
		3.除x外, A(x)中无其他自由变元
UG	$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$	1.y取遍整个个体域时, $A(y) = 1$
		2.x在A(y)中不约束
EG	$A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$	1.x在A(y)中不约束
	$A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$	2.x在A(a)中不约束



### 例20(证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

 $\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$ 

### 例20(证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



#### 例20 (证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



#### 例20(证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动 物,R(x): x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



#### 例20(证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



#### 例20 (证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解:设个体域是全总个体域,P(x):x是哺乳动物,Q(x):x是脊椎动物,R(x):x是胎生动物.

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$



推理演绎方法

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.  $\forall x (P(x) \to Q(x))$  P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left($$

$$A = P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(a)} = 10 = O(a) \land \neg R(a)$   $T_{(c,a)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $I_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$6.$$
  $\neg R(a)$  所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.  $\forall x (P(x) \to Q(x))$  P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

$$D_{(1)} = D_{(2)} \setminus D_{(3)} \setminus D_{(4)}$$

$$D_{(1)} = D_{(4)} \setminus D_{(4)} \setminus D_{(4)} \setminus D_{(4)}$$

$$D_{(4)} = D_{(4)} \setminus D_$$

$$A = P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(a)} = 10 \quad O(a) \land \neg R(a)$   $T_{(a,a)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$G.$$
 「 $R(a)$  」 所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

$$D_{(1)} = D_{(2)} \setminus D_{(3)} \setminus D_{(4)}$$

$$D_{(1)} = D_{(4)} \setminus D_{(4)} \setminus D_{(4)} \setminus D_{(4)}$$

$$D_{(4)} = D_{(4)} \setminus D_$$

$$A = P(\alpha) \land -P(\alpha) \qquad F_{-1} = 10 \qquad O(\alpha) \land -P(\alpha) \qquad T_{-1}$$

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$G.$$
 「 $R(a)$  所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.  $\forall x (P(x) \to Q(x))$  P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}$$

$$A = P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(a)} = 10 = O(a) \land \neg R(a)$   $T_{(a,a)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$G_{0}$$
.  $\neg R(a)$  所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.  $\forall x (P(x) \to Q(x))$  P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

$$A = P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(a)} = 10 = O(a) \land \neg R(a)$   $T_{(a,a)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $I_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$G_{0}$$
.  $\neg R(a)$  所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.  $\forall x (P(x))$ 

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$
  $ES_{(2)}$  9.  $Q(a)$   $T_{(5.8)}$ 

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \wedge \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$F(a)$$
 所以推断成立

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$
  $ES_{(2)}$  9.  $Q(a)$   $T_{(5,8)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x (Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$
 P 7.

7. 
$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$
  $E_{(1)}$  8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$   $US_{(7)}$ 

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$
  $ES_{(2)}$  9.  $Q(a)$   $T_{(5,8)}$ 

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$
  $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$   $T_{(6,9)}$ 

5. 
$$P(a)$$
 11.  $\exists x(Q(x) \land \neg R(x)) \quad EG_{(10)}$ 

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

8. 
$$P(a) \to Q(a)$$
  $US_{(}$ 

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

10. 
$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$
  $T($ 

$$\Gamma_{(4)} = 11$$

 $ES_{(2)}$ 

 $E_{(3)}$ 

11. 
$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$
 E

6. 
$$\neg R(a)$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9  $E_{(3)}$  1

$$I_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$Q(a) \wedge \neg R$$

$$I_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$c(Q(x) \land \neg R(x)) = EG_0$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$I_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

8. 
$$P(a) \to Q(a)$$
  $US_0$ 

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9.  $Q(a)$   
 $E_{(3)}$  10.  $Q(a) \land \neg R(a)$ 

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

10. 
$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$
  $T($ 

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$
 11

11. 
$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$
 Eq.

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9. 0  $E_{(3)}$  10. 0

$$\mathcal{Q}(\alpha)$$

$$I_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$Q(a) \wedge$$

$$I_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9.  $E_{(3)}$  10

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$Q(a) \wedge \neg I$$

$$T_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 P

$$7. \quad \forall$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$a) \wedge \neg R(a)$$

$$T_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

 $ES_{(2)}$ 

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 *H*

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

$$2. \quad \exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9.

$$^{1}(5,8)$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$) \wedge \neg R(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 P

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

$$2. \quad \exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9.

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$) \wedge \neg R(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 P

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$ES_{(2)}$$

$$E_{(3)}$$

$$) \wedge \neg R(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 P

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9.

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$a) \wedge \neg R(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(1)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$
 P

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$ES_{(2)}$$

$$E_{(3)}$$

$$\mathcal{L}(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$

9. 
$$Q(a)$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

11. 
$$\exists x(Q)$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$



$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$

9. 
$$Q(a)$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$

$$T_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$Q(x) \wedge \neg R(x))$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$



$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$

9. 
$$Q(a)$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$

$$T_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$^{2}G_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

推理演绎方法

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$
 P

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$
 9

9. 
$$Q(a)$$

$$T_{(5,8)}$$
  
 $T_{(6,9)}$ 

4. 
$$P(a) \wedge \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$T_{(4)}$$

 $E_{(1)}$ 

10. 
$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$
  
11.  $\exists x (Q(x) \wedge \neg R)$ 

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

P(a)

5.

$$T_{(4)}$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)), \neg \forall x (P(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (P(x) \to R(x))$$

7. 
$$\forall x (P(x) \to Q(x))$$

2. 
$$\exists x \neg (\neg P(x) \lor R(x))$$

$$P(a) \to Q(a)$$

$$US_{(7)}$$

Р

3. 
$$\neg(\neg P(a) \lor R(a))$$

$$ES_{(2)}$$

9. 
$$Q(a)$$

$$T_{(5,8)}$$

4. 
$$P(a) \land \neg R(a)$$

$$E_{(3)}$$

$$Q(a) \wedge \neg R(a)$$

$$T_{(6,9)}$$

5. 
$$P(a)$$

$$T_{(4)}$$

$$\exists x (Q(x) \land \neg R(x))$$

$$EG_{(10)}$$

6. 
$$\neg R(a)$$

$$T_{(4)}$$

- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

解:设个体域为全总个体域,P(x):x是学生;Q(x):x是教师; R(x):x是骗子;S(x,y):x相信y。

 $\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$ 

 $\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$ 

- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

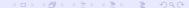
$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \rightarrow S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \rightarrow \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \to \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$



- 1 有些学生相信所有的老师;
- 2 任何一个学生都不相信骗子;
- 3 所以教师都不是骗子。

$$\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \to S(x,y))), \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to \neg S(x,y))$$

$$\Rightarrow \forall x (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$



$$1.\exists x P(x)$$

$$2.P(a)$$

$$3.\forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$$

$$4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$$

$$5.Q(a) \land R(a)$$

$$6.R(a)$$

$$7.P(a) \land R(a)$$

$$8 \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$EG(a)$$

$1.\exists x P(x)$	P
2.P(a)	$ES_{(1)}$
$3. \forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$	P
$4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$	$US_{(3)}$
$5.Q(a) \wedge R(a)$	$T_{(2,4)}$
6.R(a)	$T_{(5)}$
$7.P(a) \wedge R(a)$	$T_{(2,6)}$
$8.\exists x (P(x) \land R(x))$	$EG_{(8)}$

1.
$$\exists x P(x)$$
 P

 2. $P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 

 3. $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \land R(x)))$ 
 P

 4. $P(a) \rightarrow (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 

 5. $Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 

 6. $R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 

 7. $P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 

 8. $\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$1.\exists x P(x)$$

$$2.P(a)$$

$$S(1)$$

$$3.\forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$$

$$4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$$

$$5.Q(a) \land R(a)$$

$$6.R(a)$$

$$7.P(a) \land R(a)$$

$$8 \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$EG(x)$$

$$\exists \forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$1.\exists x P(x)$$
 $P$ 
 $2.P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 
 $3.\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \land R(x)))$ 
 $P$ 
 $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 
 $5.Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 
 $6.R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 
 $7.P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 
 $8.\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$\exists \forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$1.\exists x P(x)$$
 $P$ 
 $2.P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 
 $3.\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \land R(x)))$ 
 $P$ 
 $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 
 $5.Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 
 $6.R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 
 $7.P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 
 $8.\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$\exists \forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$1.\exists x P(x)$$
 $P$ 
 $2.P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 
 $3.\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \land R(x)))$ 
 $P$ 
 $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 
 $5.Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 
 $6.R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 
 $7.P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 
 $8.\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$\exists \forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \land R(x))$$

$$1.\exists x P(x)$$
 $P$ 
 $2.P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 
 $3.\forall x (P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$ 
 $P$ 
 $4.P(a) \to (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 
 $5.Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 
 $6.R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 
 $7.P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 
 $8.\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$1.\exists x P(x)$$
 $P$ 
 $2.P(a)$ 
 $ES_{(1)}$ 
 $3.\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \land R(x)))$ 
 $P$ 
 $4.P(a) \rightarrow (Q(a) \land R(a))$ 
 $US_{(3)}$ 
 $5.Q(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,4)}$ 
 $6.R(a)$ 
 $T_{(5)}$ 
 $7.P(a) \land R(a)$ 
 $T_{(2,6)}$ 
 $8.\exists x (P(x) \land R(x))$ 
 $EG_{(8)}$ 

$$\begin{array}{lll}
2.\forall x \neg Q(x) & E_{(1)} \\
3.\neg Q(y) & US_{(2)} \\
4.\forall x (P(x) \lor Q(x)) & I \\
5.P(y) \lor Q(y) & US_{(5)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textbf{1.} \neg \exists x Q(x) & P \\ 2. \forall x \neg Q(x) & E_{(1)} \\ 3. \neg Q(y) & US_{(2)} \\ 4. \forall x (P(x) \lor Q(x)) & P \\ 5. P(y) \lor Q(y) & US_{(5)} \\ 6. P(y) & T_{(3,5)} \\ 7. \exists x P(x) & EG_{(6)} \end{array}$$

P

## 练习4

$$\begin{array}{lll} 1.\neg\exists x Q(x) & P \\ 2.\forall x \neg Q(x) & E_{(1)} \\ 3.\neg Q(y) & US_{(2)} \\ 4.\forall x (P(x) \lor Q(x)) & P \\ 5.P(y) \lor Q(y) & US_{(5)} \end{array}$$

$$1. \neg \exists x Q(x)$$

$$2.\forall x \neg Q(x)$$

$$3.\neg Q(y)$$

$$4.\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$5.P(y) \vee Q(y)$$

$$7.\exists x P(x)$$

$$E_{(1)}$$

$$US_{(2)}$$

$$US_{(5)}$$

$$T_{(3,5)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$1.\neg \exists x Q(x)$$

$$2.\forall x \neg Q(x)$$

$$3.\neg Q(y)$$

$$4.\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$5.P(y) \lor Q(y)$$

$$7.\exists x P(x)$$

$$E_{(1)}$$

$$US_{(2)}$$

$$US_{(5)}$$

$$T_{(3,5)}$$

$$EG_{(6)}$$

P

## 练习4

$$1.\neg \exists x Q(x)$$

$$2.\forall x \neg Q(x)$$
  $E_{(1)}$ 

$$3.\neg Q(y)$$
  $US_{(2)}$ 

$$4.\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
 P

$$5.P(y) \lor Q(y) \qquad \qquad US_{(5)}$$

$$6.P(y) T_{(3,5)}$$

$$7.\exists x P(x) \qquad EG_{(6)}$$

$$1. \neg \exists x Q(x)$$

$$2.\forall x \neg Q(x)$$

$$3.\neg Q(y)$$

$$4.\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$5.P(y) \vee Q(y)$$

$$7.\exists x P(x)$$

$$E_{(1)}$$

$$US_{(2)}$$

$$US_{(5)}$$

$$T_{(3,5)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$1. \neg \exists x Q(x)$$

$$2.\forall x \neg Q(x) \qquad \qquad E_{(1)}$$

$$3.\neg Q(y)$$
  $US_{(2)}$ 

$$4.\forall x (P(x) \lor Q(x))$$
 P

$$5.P(y) \lor Q(y) \qquad \qquad US_{(5)}$$

$$6.P(y)$$
  $T_{(3,5)}$ 

$$7.\exists x P(x)$$
  $EG_{(6)}$ 

 $7.\exists x P(x)$ 

$$1. \neg \exists x Q(x)$$
  $P$   
 $2. \forall x \neg Q(x)$   $E_{(1)}$   
 $3. \neg Q(y)$   $US_{(2)}$   
 $4. \forall x (P(x) \lor Q(x))$   $P$   
 $5. P(y) \lor Q(y)$   $US_{(5)}$   
 $6. P(y)$   $T_{(3,5)}$   
 $7. \exists x P(x)$   $EG_{(6)}$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1.  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提
  - 2.  $\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x)) \quad E_1$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提
  - 2.  $\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x)) \quad E_1$
  - 3.  $\exists x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_2$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提
  - 2.  $\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x)) \quad E_1$
  - 3.  $\exists x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_2$
- 4.  $A(a) \wedge \neg B(a)$   $ES_3$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$$
  $E_1$ 

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x)) \quad E_1$$

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x)) \quad E_1$$

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
  $EG_6$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
 EG

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$$
  $E_1$  8.  $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ 

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_{3}$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
  $EG_6$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$$
  $E_1$ 

8. 
$$\exists x A(x) \to \forall x B(x)$$
 P

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$ 

9. 
$$\forall x B(x)$$
  $T_{7,8}$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
  $EG_6$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$$
  $E_1$ 

$$E_1$$
 8.  $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$  P  
 $E_2$  9.  $\forall x B(x)$   $T_{7.8}$ 

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$  9.  $\forall x B(x)$ 

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$  10.  $B(a)$   $US_9$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
  $T_4$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
  $EG_6$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

. 
$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提

2. 
$$\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$$
  $E_1$ 

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x)) \qquad E_2 \qquad 9.$$

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$  9.  $\forall x B(x)$   $T_{7,8}$ 

8.

4. 
$$A(a) \wedge \neg B(a)$$
  $ES_3$  10.  $B(a)$   $US_9$ 

5. 
$$\neg B(a)$$
 11.  $B(a) \land \neg B(a)$   $T_{5,10}$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$ 

7. 
$$\exists x A(x)$$
  $EG_6$ 

 $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ 

Р

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \forall x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提  
2.  $\exists x \neg (\neg A(x) \lor B(x))$   $E_1$   
3.  $\exists x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_2$  8.  $\exists x A(x) \to \forall x B(x)$ 

3. 
$$\exists x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_2$  9.  $\forall x B(x)$   $T_{7,8}$ 
4.  $A(a) \land \neg B(a)$   $ES_3$  10.  $B(a)$   $US_9$ 
5.  $\neg B(a)$   $T_4$  11.  $B(a) \land \neg B(a)$   $T_{5,10}$ 

6. 
$$A(a)$$
  $T_4$  11.  $B(a) \land \neg B(a)$   $T_{5,10}$  7.  $\exists x A(x)$   $EG_6$  12. 0  $E_{11}$ 

Ρ

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\forall x (A(x) \to B(x))$  P
- 2.  $A(\mathbf{a}) \to B(\mathbf{a})$   $US_1$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\forall x (A(x) \to B(x))$  P
- 2.  $A(\mathbf{a}) \to B(\mathbf{a})$   $US_1$
- $3. \quad \forall x A(x)$  附加前提

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

2. 
$$A(\mathbf{a}) \to B(\mathbf{a})$$
  $US_1$ 

$$3. \quad \forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(\mathbf{a})$$
  $US_3$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

2. 
$$A(\mathbf{a}) \to B(\mathbf{a})$$
  $US_1$ 

$$3. \quad \forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(\mathbf{a})$$
  $US_3$ 

5. 
$$B(a)$$
  $T_{2,4}$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 P

2. 
$$A(\mathbf{a}) \to B(\mathbf{a})$$
  $US_1$ 

$$3. \quad \forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(\mathbf{a})$$
  $US_3$ 

5. 
$$B(a)$$
  $T_{2,4}$ 

6. 
$$\forall x B(x)$$
  $UG_5$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

2. 
$$A(y) \rightarrow B(y)$$
  $US_1$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\forall x (A(x) \to B(x))$  P
- 2.  $A(y) \to B(y)$   $US_1$
- $3. \quad \forall x A(x)$  附加前提

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

$$2. \quad A(\mathbf{y}) \to B(\mathbf{y}) \qquad US_1$$

3. 
$$\forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(y)$$
  $US_3$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \to B(x))$$
 P

2. 
$$A(\mathbf{y}) \to B(\mathbf{y})$$
  $US_1$ 

$$3. \forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(y)$$
  $US_3$ 

5. 
$$B(y)$$
  $T_{2,4}$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 P

2. 
$$A(\mathbf{y}) \to B(\mathbf{y})$$
  $US_1$ 

$$3. \forall x A(x)$$
 附加前提

4. 
$$A(y)$$
  $US_3$ 

5. 
$$B(y)$$
  $T_{2,4}$ 

6. 
$$\forall x B(x)$$
  $UG_5$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1.  $\neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提



$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$  附加前提
- 2.  $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_1$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提
- 2.  $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_1$
- 3.  $\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$   $E_2$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$ 附加前提
- 2.  $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$  $E_1$
- 3.  $\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$  $E_2$
- 4.  $\forall x A(x)$  $T_3$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$  附加前提
- 2.  $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_1$
- 3.  $\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x) \quad E_2$
- 4.  $\forall x A(x)$   $T_3$
- 5.  $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$  P

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 1.  $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$  附加前提
- 2.  $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$   $E_1$
- 3.  $\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$   $E_2$
- 4.  $\forall x A(x)$   $T_3$
- 5.  $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$  P
- 6.  $\forall x B(x)$   $T_{4,5}$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

- 附加前提  $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$
- $\forall x (A(x) \land \neg B(x))$  $E_1$
- 3.  $\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$  $E_2$
- 4.  $\forall x A(x)$  $T_3$
- 5.  $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$ P
- $\forall x B(x)$ 6.  $T_{4.5}$
- 7. B(y) $US_6$



$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \exists x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提  
8.

2. 
$$\forall x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_1$  8.  $\forall x \neg B(x)$   $T_3$ 

3. 
$$\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x) \quad E_2$$

4. 
$$\forall x A(x)$$
  $T_3$ 

5. 
$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$$
 P

6. 
$$\forall x B(x)$$
  $T_{4,5}$ 

7. 
$$B(y)$$
  $US_6$ 



$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \exists x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提 8.

2. 
$$\forall x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_1$  8.  $\forall x \neg B(x)$   $T_3$ 

3. 
$$\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$$
  $E_1$  9.  $\neg B(y)$   $US_8$ 

4. 
$$\forall x A(x)$$
  $T_3$ 

5. 
$$\forall x A(x) \to \forall x B(X)$$
 P

6. 
$$\forall x B(x)$$
  $T_{4,5}$ 

7. 
$$B(y)$$
  $US_6$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \exists x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提 8.

$$A = \neg \exists x (A(x) \to D(x))$$
 PII JUL III 15E

8. 
$$\forall x \neg B(x)$$
  $T_3$ 

2. 
$$\forall x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_1$ 

9. 
$$\neg B(y)$$
  $US_8$ 

3. 
$$\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$$
  $E_2$ 

10. 
$$B(y) \wedge \neg B(y) \quad T_{7,9}$$

4. 
$$\forall x A(x)$$
  $T_3$ 

5. 
$$\forall x A(x) \to \forall x B(X)$$
 P

6. 
$$\forall x B(x)$$
  $T_{4,5}$ 

7. 
$$B(y)$$
  $US_6$ 

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

1. 
$$\neg \exists x (A(x) \to B(x))$$
 附加前提 8.

2. 
$$\forall x (A(x) \land \neg B(x))$$
  $E_1$ 

$$8. \qquad \forall x \neg B(x)$$

$$T_3$$

3. 
$$\forall x (A(x) \land \neg B(x)) \qquad E_1$$

$$\neg B(y)$$

$$US_8$$

4. 
$$\forall x A(x)$$

$$E_2$$
 $T_3$ 

$$B(y) \wedge \neg B(y) \quad T_{7,9}$$

$$0 \qquad E_{10}$$

5. 
$$\forall x A(x) \to \forall x B(X)$$

3.

6. 
$$\forall x B(x)$$

$$T_{4,5}$$

7. 
$$B(y)$$

7. 
$$B(y)$$

$$US_6$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

### 2.A(a)

$$B. \forall x (A(x) \to B(x))$$

$$4.A(a) \rightarrow B(a)$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

## 2.A(a)

$$5. \forall x (A(x) \to B(x))$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

$$3. \forall x (A(x) \to B(x))$$

$$4.A(a) \rightarrow B(a)$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

### 2.A(a)

$$3. \forall x (A(x) \to B(x))$$

$$4.A(a) \rightarrow B(a)$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

$$3. \forall x (A(x) \to B(x))$$
  
 $4.A(a) \to B(a)$ 

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$1.\exists x A(x)$$

$$3.\forall x (A(x) \to B(x))$$

$$4.A(a) \rightarrow B(a)$$

$$6.\exists x B(x)$$

$$ES_{(1)}$$

$$US_{(3)}$$

$$T_{(2,4)}$$

$$EG_{(6)}$$

$$\forall x (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

 $1.\exists x A(x)$ 

2.A(a)

 $3.\forall x (A(x) \to B(x))$ 

 $4.A(a) \rightarrow B(a)$ 

5.B(a)

 $6.\exists x B(x)$ 

附加前提

 $ES_{(1)}$ 

P

 $US_{(3)}$ 

 $T_{(2,4)}$ 

 $EG_{(6)}$ 

所以推理成立。

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1.\neg\exists x(A(x)\to B(x))$	附加前提

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1.\neg \exists x (A(x) \to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$

7/1 1... 24 1.0

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1. \neg \exists x (A(x) \to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3.\forall x A(x)$	$T_{(2)}$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1. \neg \exists x (A(x) \to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3. \forall x A(x)$	$T_{(2)}$
$4.\forall x \neg B(x)$	$T_{(2)}$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1.\neg \exists x (A(x) \to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3.\forall x A(x)$	$T_{(2)}$
$4.\forall x \neg B(x)$	$T_{(2)}$
$5.\exists x A(x)$	$T_{(3)}$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$$1. \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$
 附加前提  $2. \forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$   $E_{(1)}$   $3. \forall x A(x)$   $T_{(2)}$   $4. \forall x \neg B(x)$   $T_{(2)}$   $5. \exists x A(x)$   $T_{(3)}$   $6. \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$   $P$   $T_{(3)}$   $E_{(4)}$   $E_{(4)}$   $E_{(4)}$   $E_{(4)}$ 

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1. \neg \exists x (A(x) \to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3. \forall x A(x)$	$T_{(2)}$
$4.\forall x \neg B(x)$	$T_{(2)}$
$5.\exists x A(x)$	$T_{(3)}$
$6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$	P
$7.\exists x B(x)$	$T_{(6,7)}$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1.\neg\exists x(A(x)\to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3.\forall x A(x)$	$T_{(2)}$
$4.\forall x \neg B(x)$	$T_{(2)}$
$5.\exists x A(x)$	$T_{(3)}$
$6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$	P
$7.\exists x B(x)$	$T_{(6,7)}$
$8. \neg \exists x B(x)$	$E_{(4)}$

$$\exists x A(x) \to \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \to B(x))$$

$1.\neg\exists x(A(x)\to B(x))$	附加前提
$2.\forall x A(x) \land \forall x \neg B(x)$	$E_{(1)}$
$3.\forall x A(x)$	$T_{(2)}$
$4.\forall x \neg B(x)$	$T_{(2)}$
$5.\exists x A(x)$	$T_{(3)}$
$6.\exists x A(x) \to \exists x B(x)$	P
$7.\exists x B(x)$	$T_{(6,7)}$
$8. \neg \exists x B(x)$	$E_{(4)}$
9.0	$T_{(7,8)}$

练习6 (P62-5(3,4),6(4))

推理演绎方法