应用离散数学

离散数学课程组

2014 年 1 月 17 日

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

6 平面图与图的着色

7 图的矩阵表示

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

6 平面图与图的着色

7 图的矩阵表示

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

6 平面图与图的着色

7 图的矩阵表示

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

6 平面图与图的着色

7 图的矩阵表示

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

6 平面图与图的着色

7 图的矩阵表示

图论

1 图的概念

2 图的连通性

3 割点、割集

4 树与生成树

5 欧拉图和哈密尔顿图

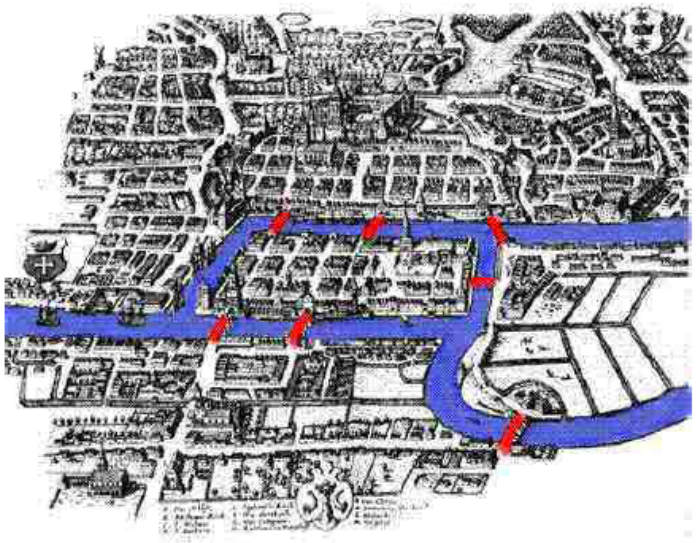
6 平面图与图的着色

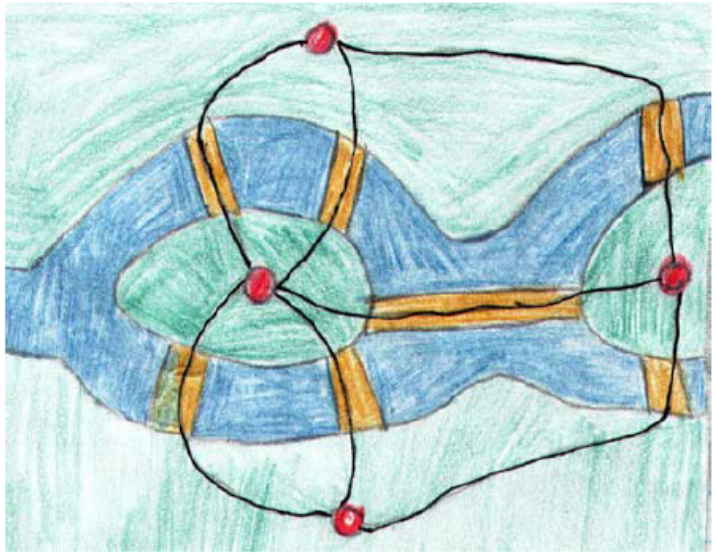
7 图的矩阵表示

图论

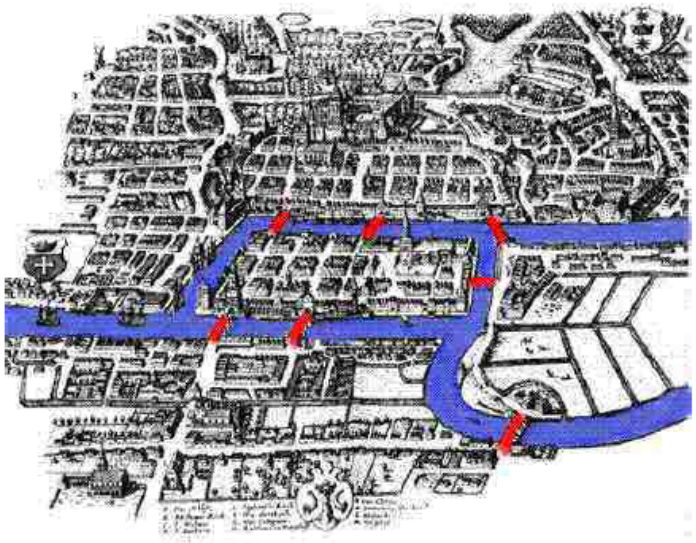
1. 图的概念
2. 图的连通性
3. 割点、割集
4. 树与生成树
5. 欧拉图和哈密尔顿图
6. 平面图与图的着色
7. 图的矩阵表示

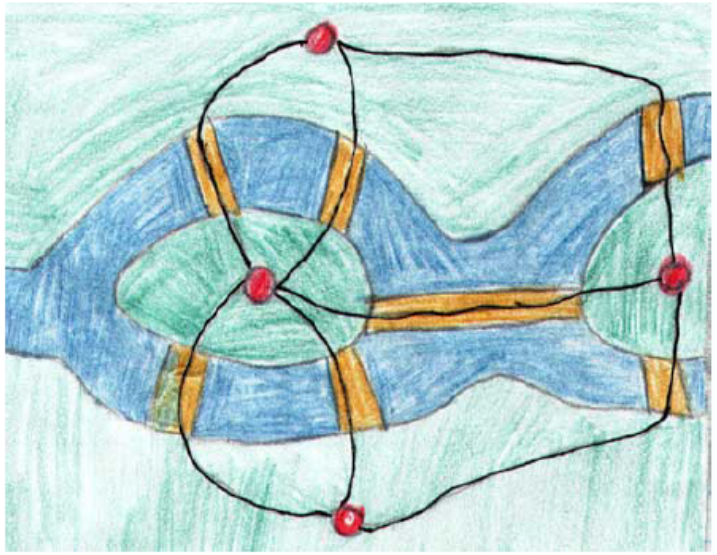
图论的起源—Konigsberg七桥问题：从河岸或岛的某处出发，经过每座桥恰好一次又回到出发点



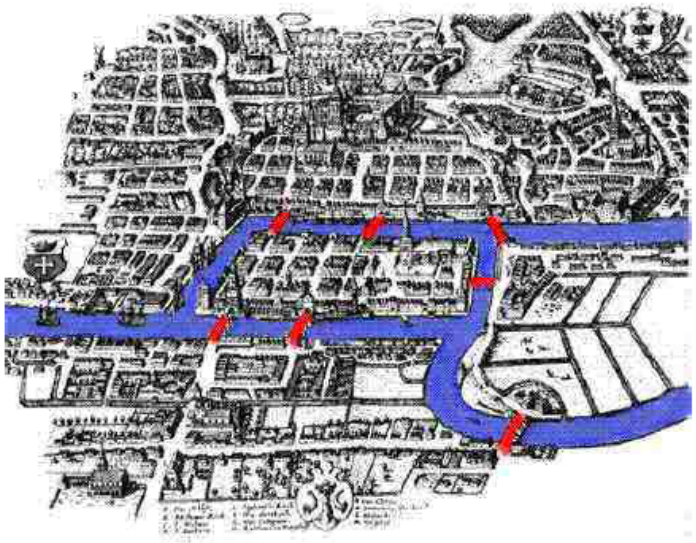


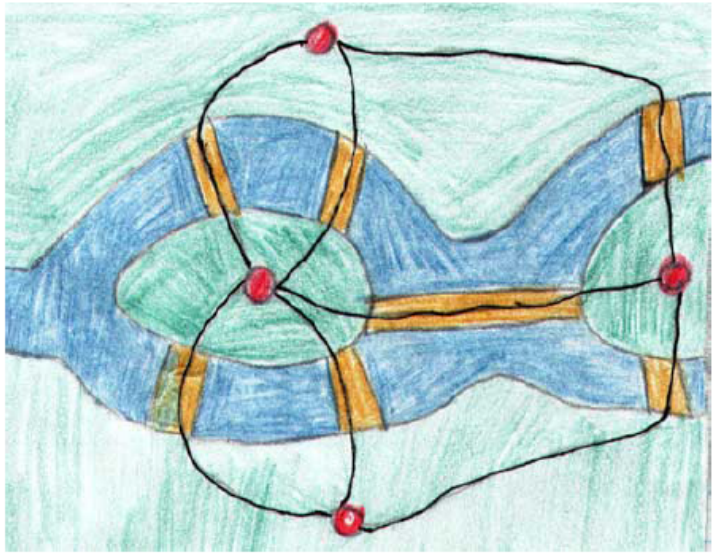
图论的起源—Konigsberg七桥问题：从河岸或岛的某处出发，经过每座桥恰好一次又回到出发点





图论的起源—Konigsberg七桥问题：从河岸或岛的某处出发，经过每座桥恰好一次又回到出发点





Bai百科

1843 éIRe 1943
2½ p
ROWAN HAMILTON

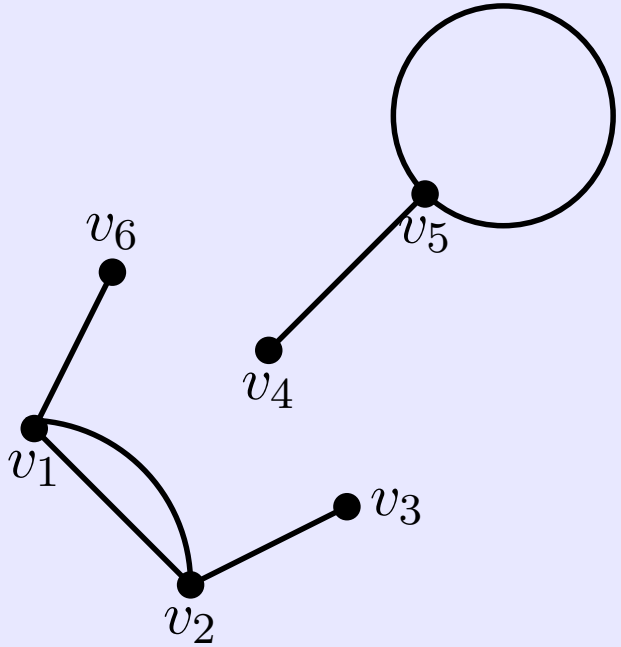
- 莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler，1707年4月15日～1783年9月18日），瑞士数学家、自然科学家。数学史上公认的4名最伟大的数学家分别是：阿基米德、牛顿、欧拉和高斯。“高斯曾说，要像欧拉那样做，我的眼睛也要瞎了。一个人要想做事是没有问题的，只是现在社会比较复杂，我们应该为科学而科学，为艺术而艺术。”
- 哈密尔顿，爱尔兰数学家，自幼聪明，被称为神童。他三岁能读英语，会算术。13岁通晓拉丁语，希伯来语等13种语言，15岁开始对数学产生浓厚的兴趣。在对复数长期研究的基础上，他正式提出四元数这一概念，是代数学中的一项重要成果。此外，他还在矩阵理论中提出了凯莱-哈密尔顿定理。

- 莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler ，1707年4月15日～1783年9月18日），瑞士数学家、自然科学家。数学史上公认的4名最伟大的数学家分别是：阿基米德、牛顿、欧拉和高斯。“高斯曾说，要像欧拉那样做，我的眼睛也要瞎了。一个人要想做事是没有问题的，只是现在社会比较复杂，我们应该为科学而科学，为艺术而艺术。”
- 哈密尔顿，爱尔兰数学家，自幼聪明，被称为神童。他三岁能读英语，会算术。13岁通晓拉丁语，希伯来语等13种语言，15岁开始对数学产生浓厚的兴趣。在对复数长期研究的基础上，他正式提出四元数这一概念，是代数学中的一项重要成果。此外，他还在矩阵理论中提出了凯莱-哈密尔顿定理。

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$：

1. $V \neq \emptyset$为结点；
2. E是$\{(u, v) | u, v \in V\}$的某个多重子集；



右图$G = \langle V, E\rangle$中

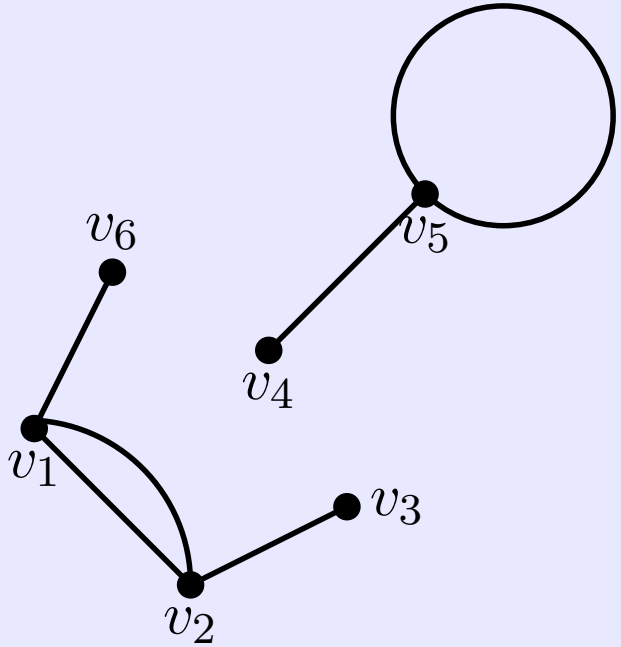
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u,v)|u,v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

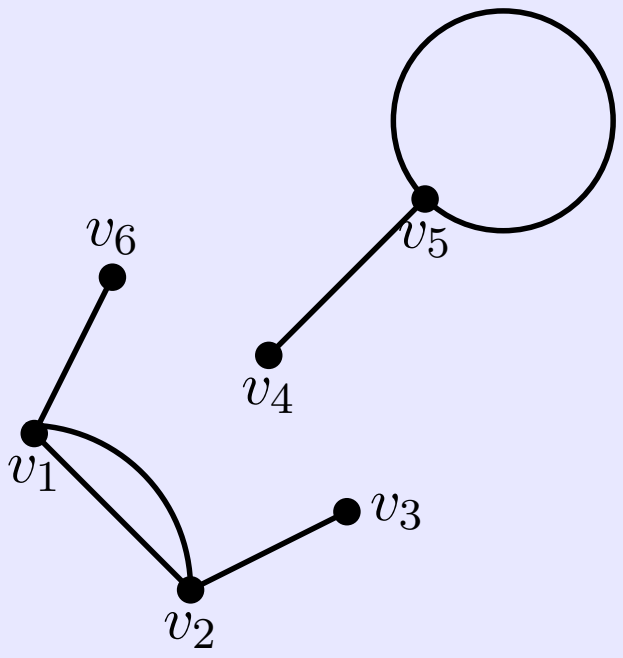
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u,v)|u,v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

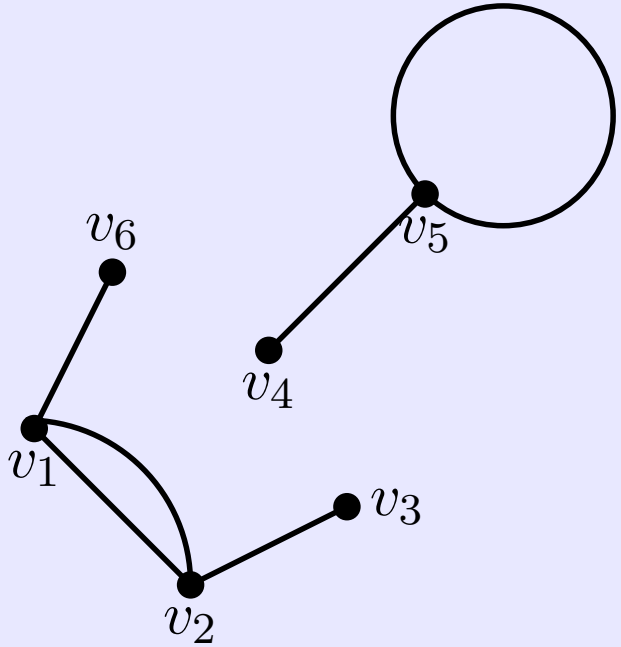
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u,v)|u,v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

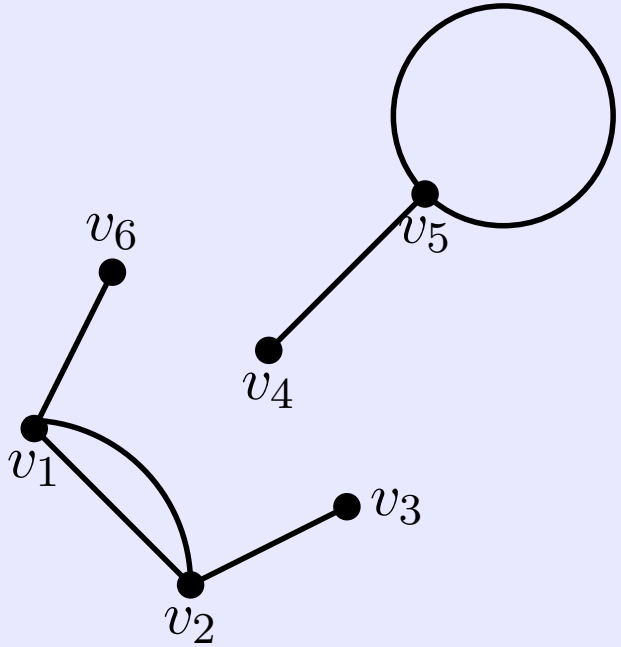
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u,v)|u,v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

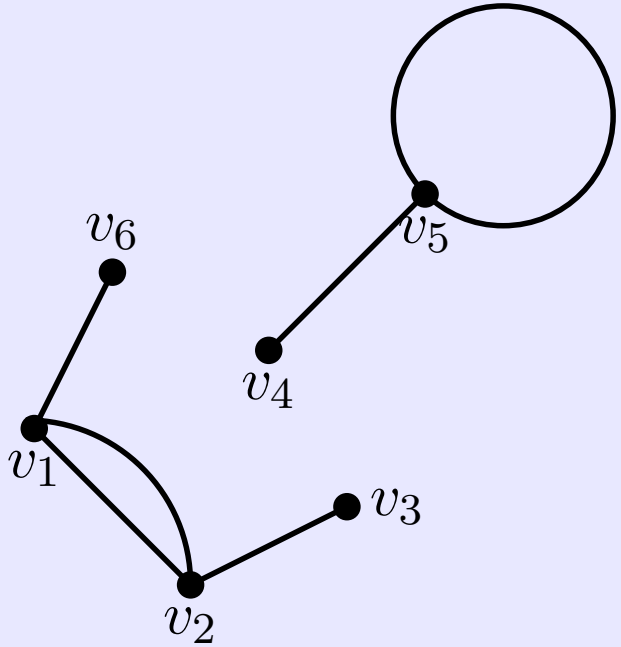
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u, v)|u, v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

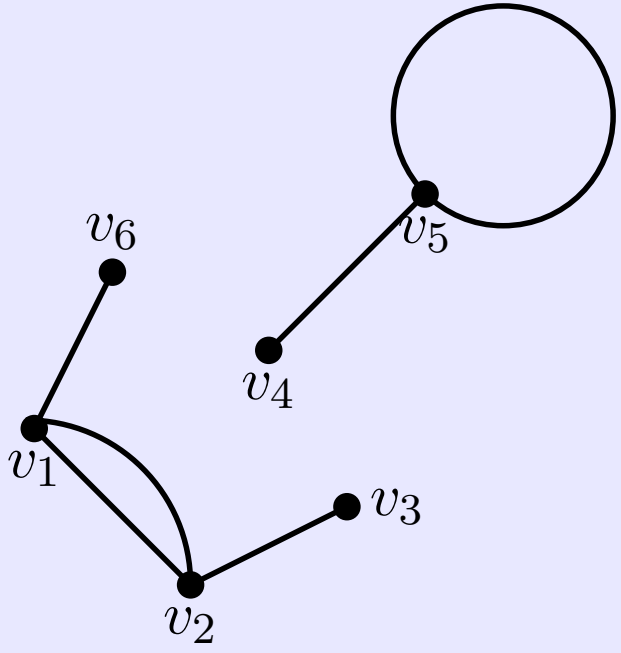
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u, v)|u, v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

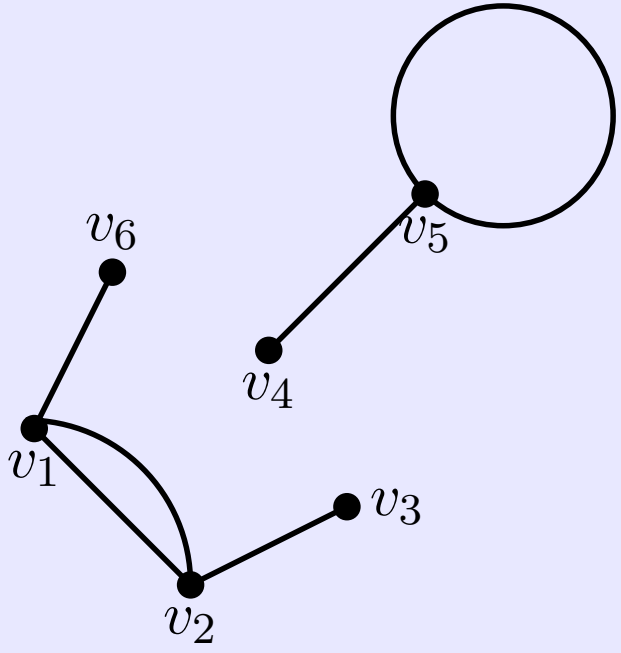
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u, v)|u, v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

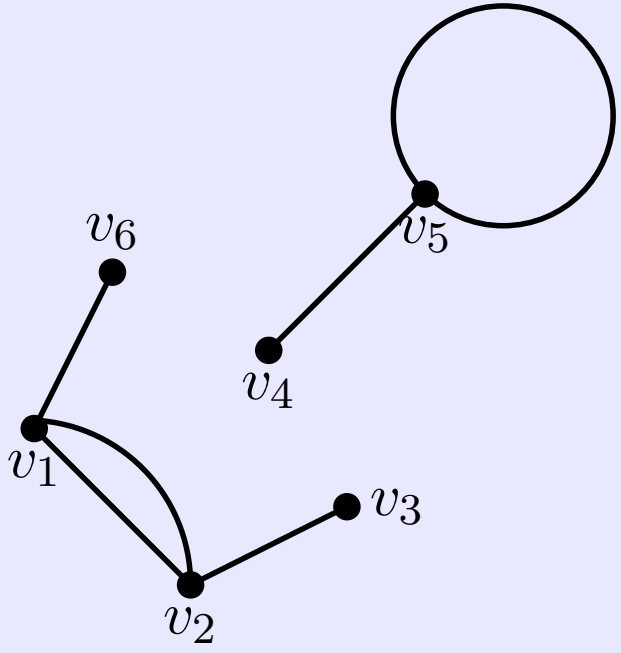
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义1（图）

图是指序偶$\langle V, E\rangle$:

- $V \neq \emptyset$为点集;
- E是$\{(u, v)|u, v \in V\}$的某个多重子集;



右图$G = \langle V, E\rangle$中

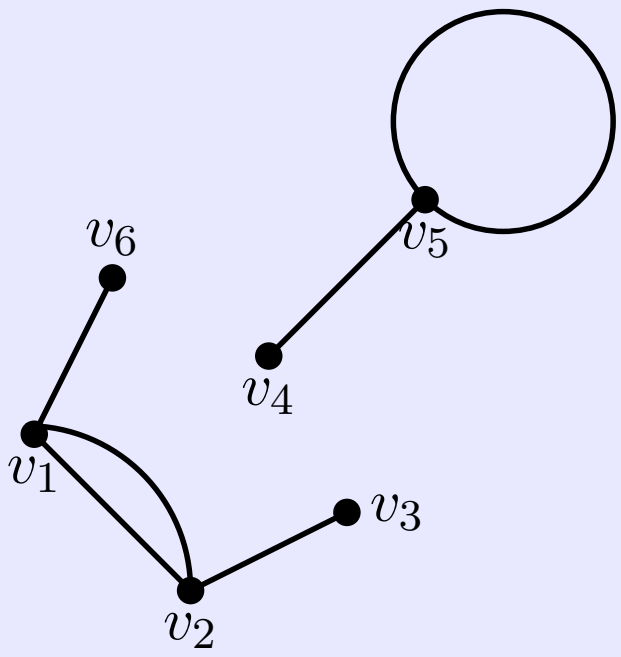
$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$

定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

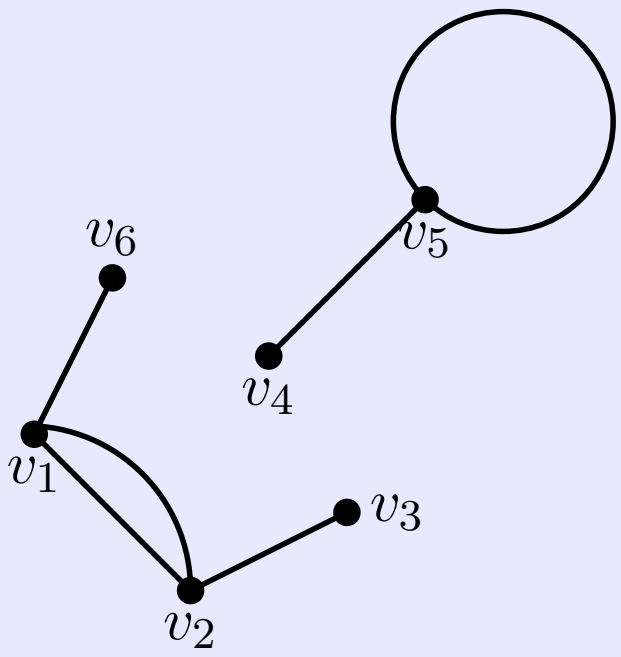
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

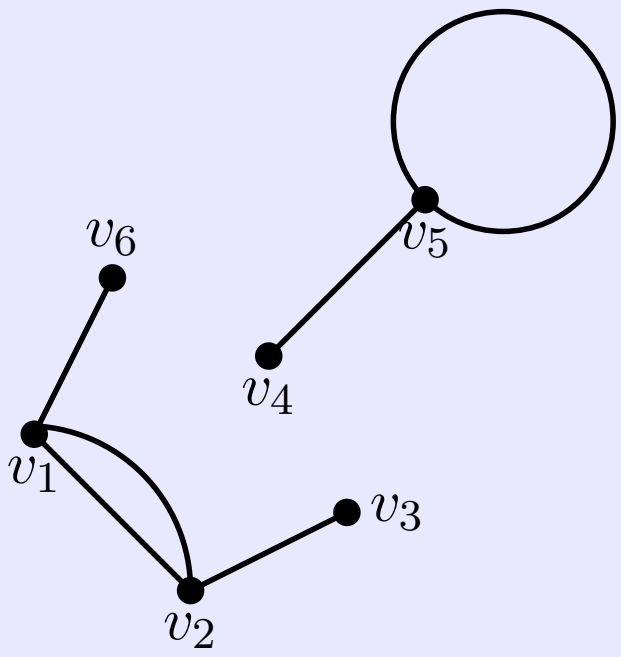
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

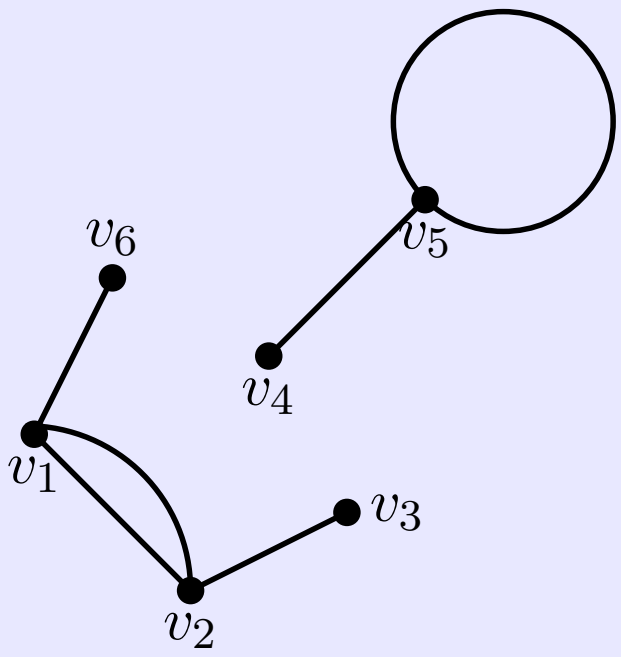
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

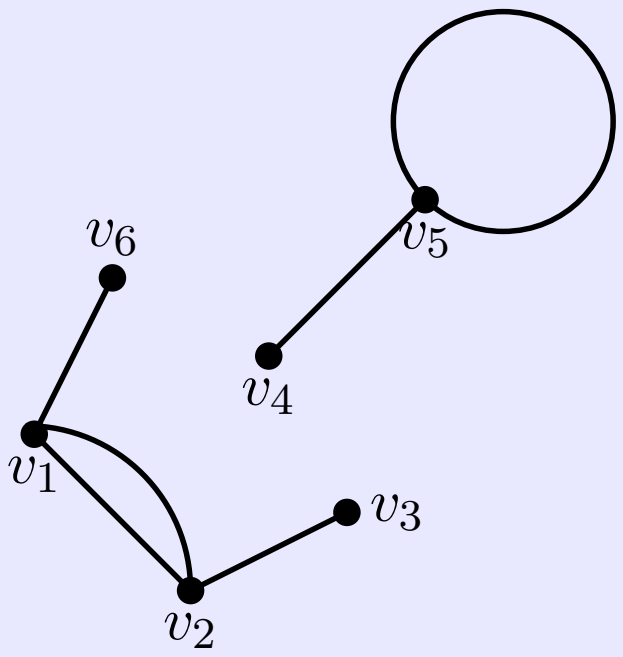
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

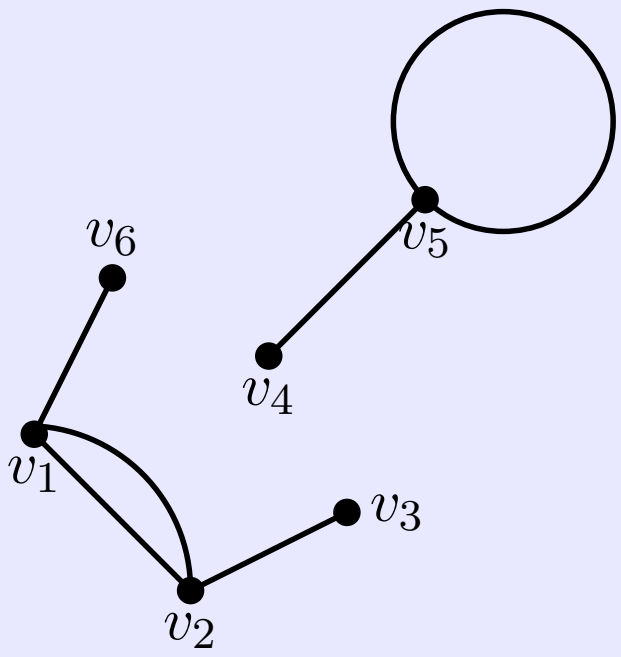
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

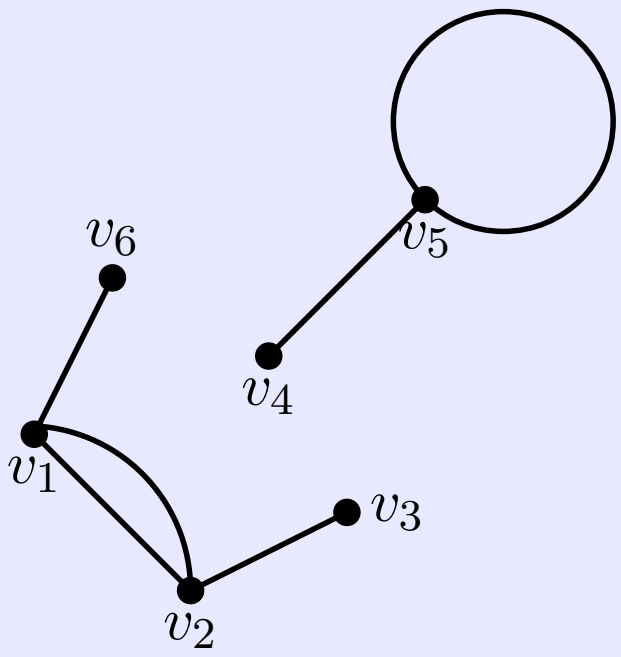
- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.



定义2

对于图$G = \langle V, E \rangle$

- 若$|V| = p, |E| = q$，则称G是(p, q)图，p为图G的阶.
- $(1, 0)$图称为平凡图.
- 若$E = \emptyset$，则称G是零图.
- 若V, E都是有限集，则称G是有限图.
- 若V或E是无限集合，则称G是无限图.

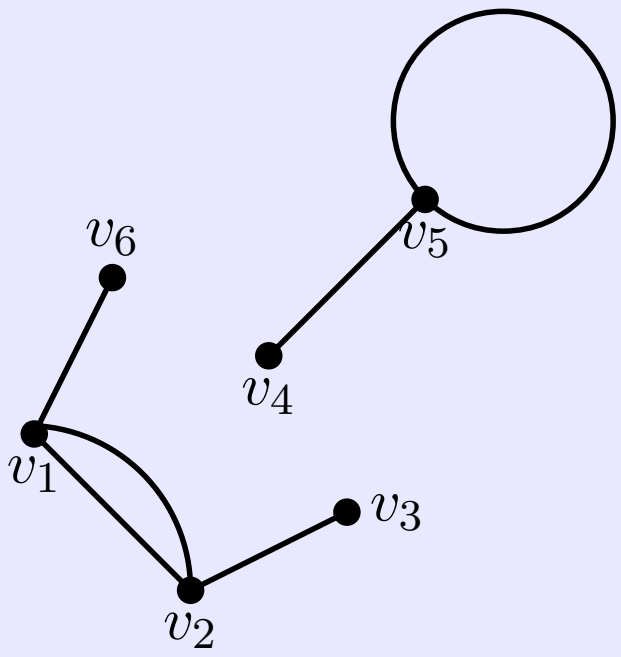


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

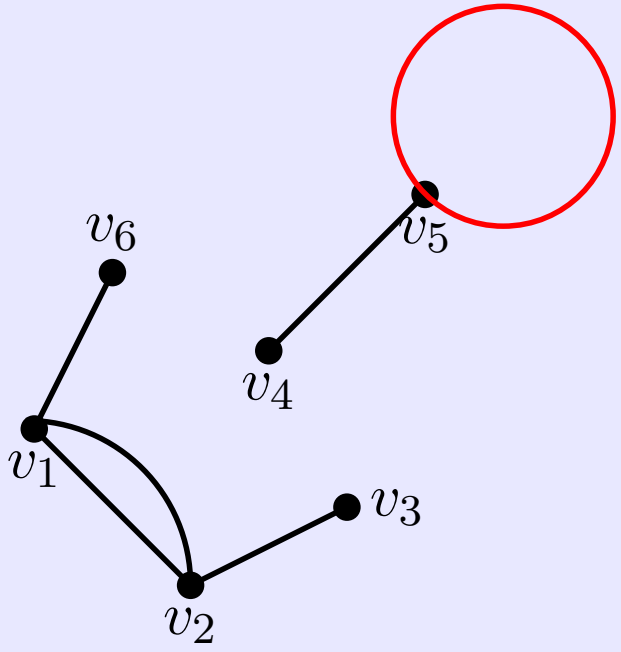


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

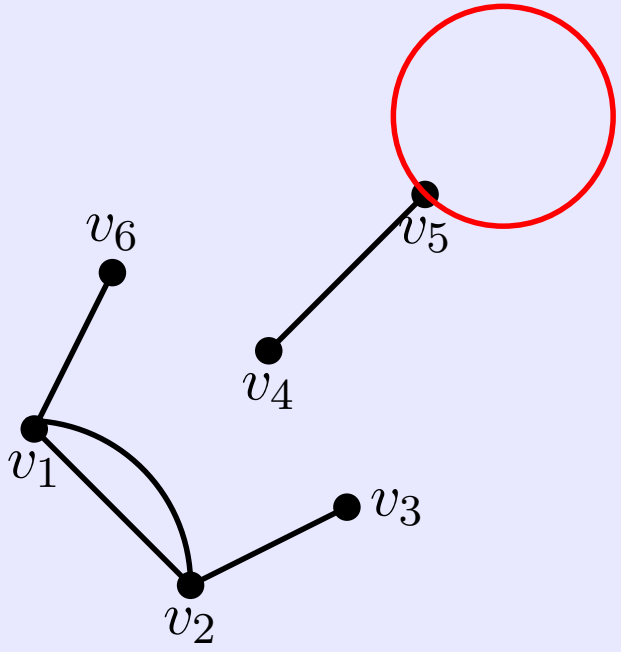


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

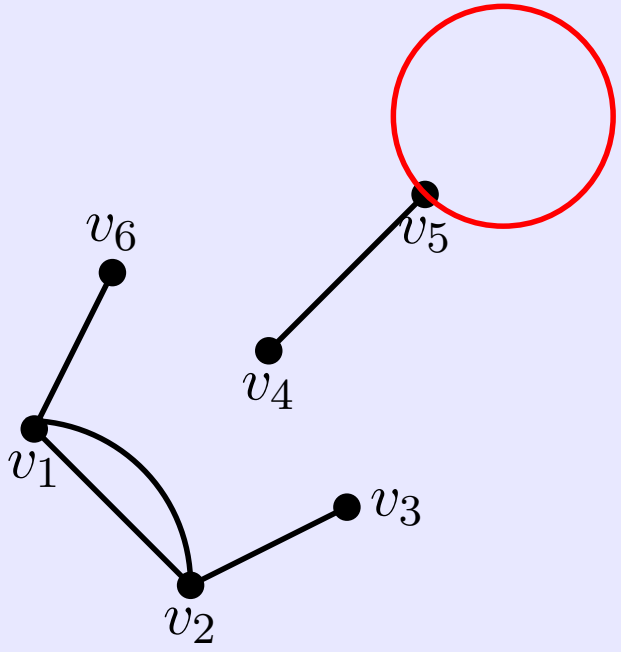


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

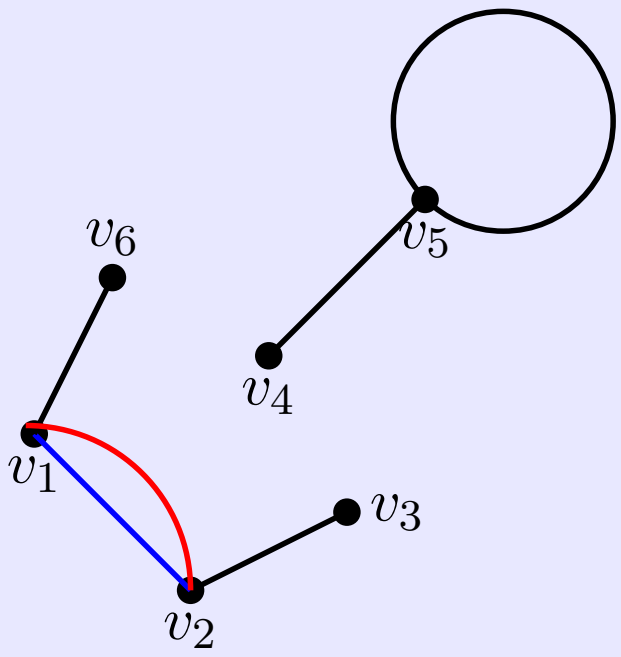


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

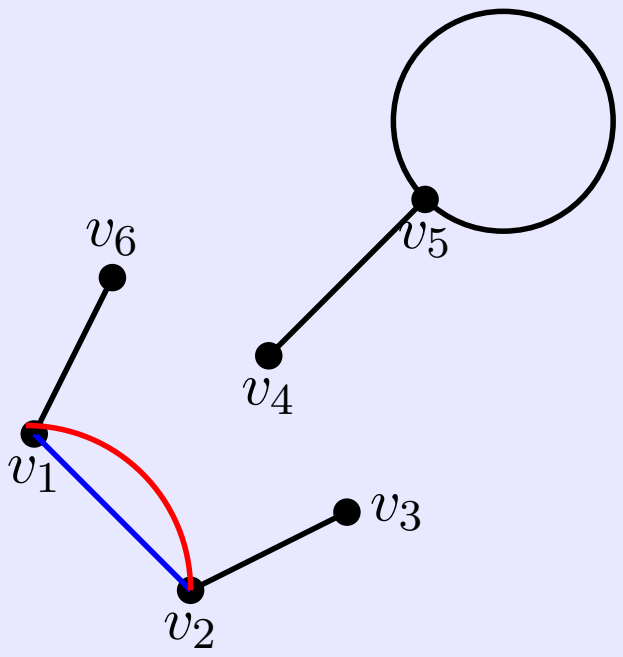


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

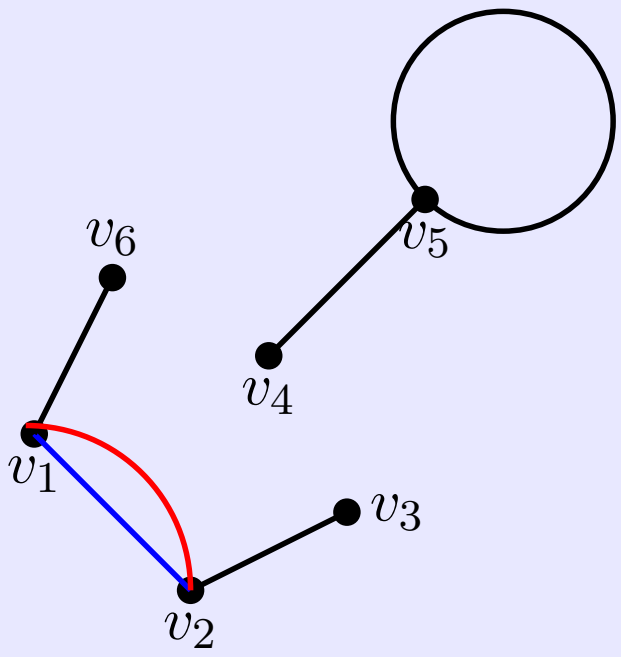


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

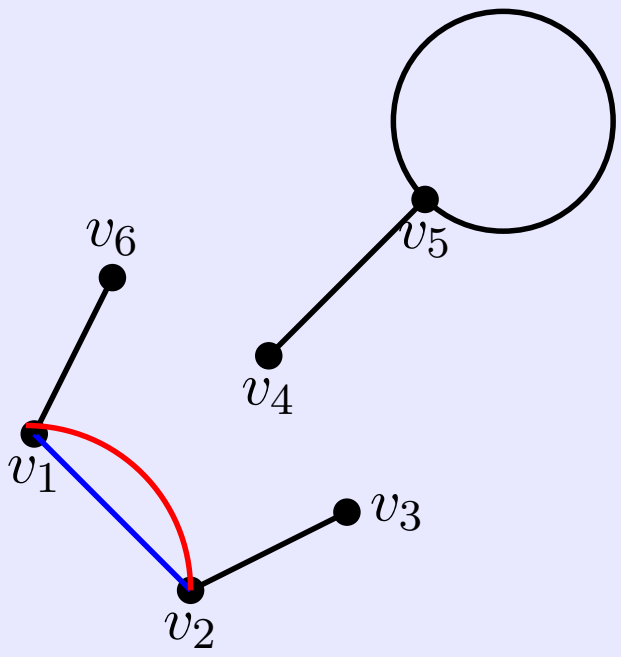


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。

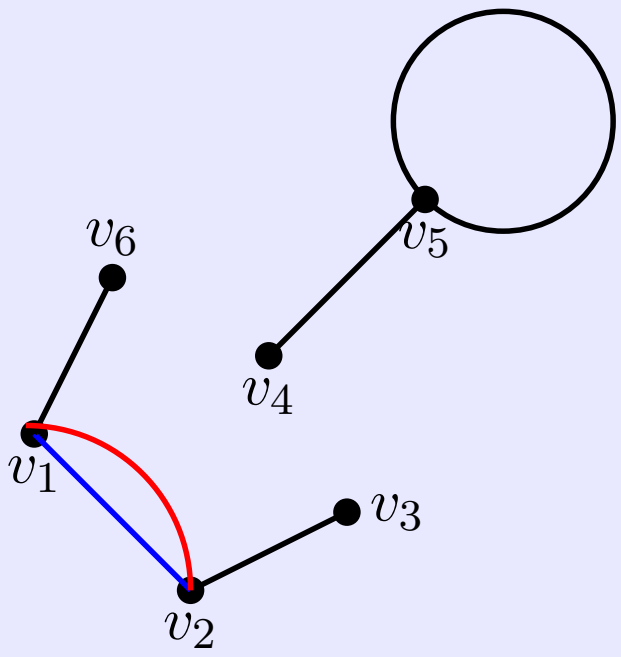


定义3 (圈，平行边)

若边连接同一个点，则称其是圈。两个顶点之间如果有两条或两条以上的边，则称其为平行边。平行边的条数称为重数。

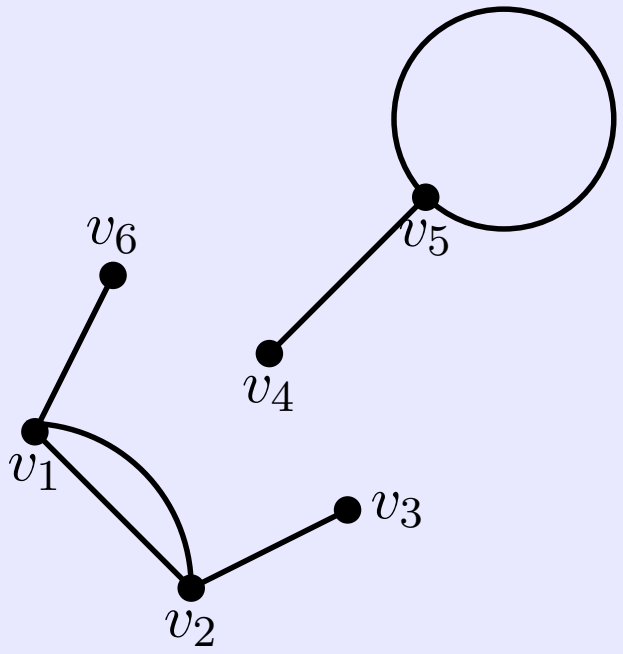
定义4 (带圈、多重、简单图)

有圈的图称为带圈图。有平行边的图称为多重图。没有圈也没有平行边的图称为简单图。



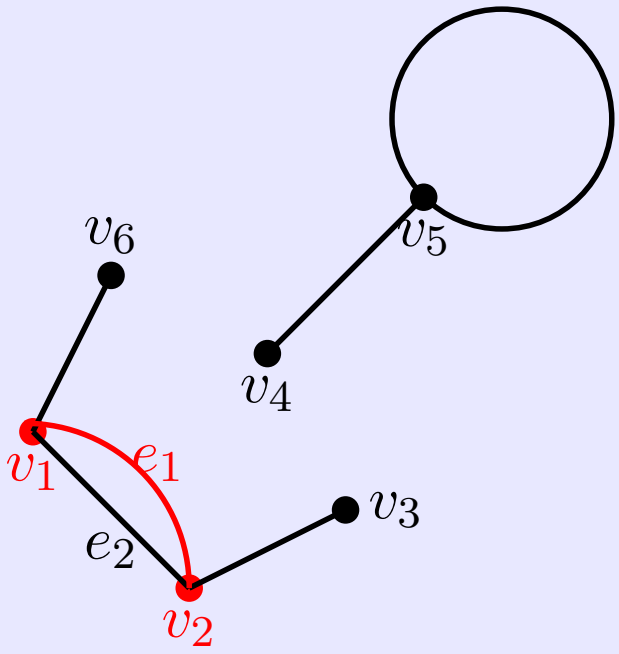
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



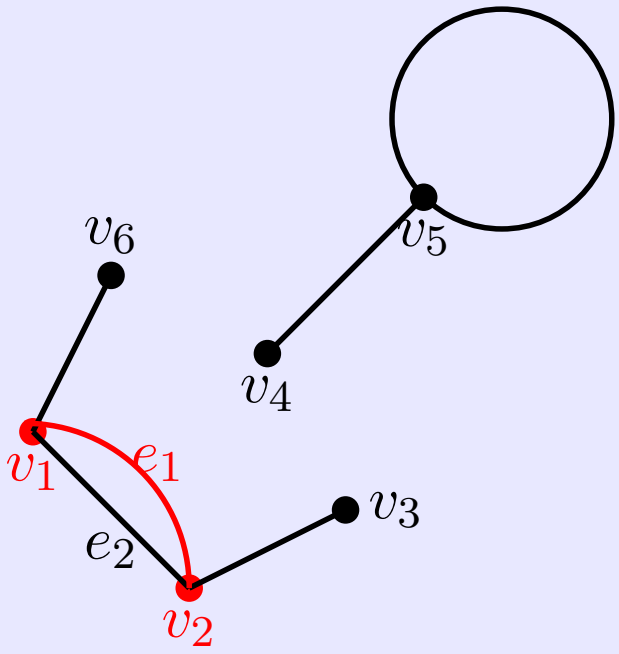
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



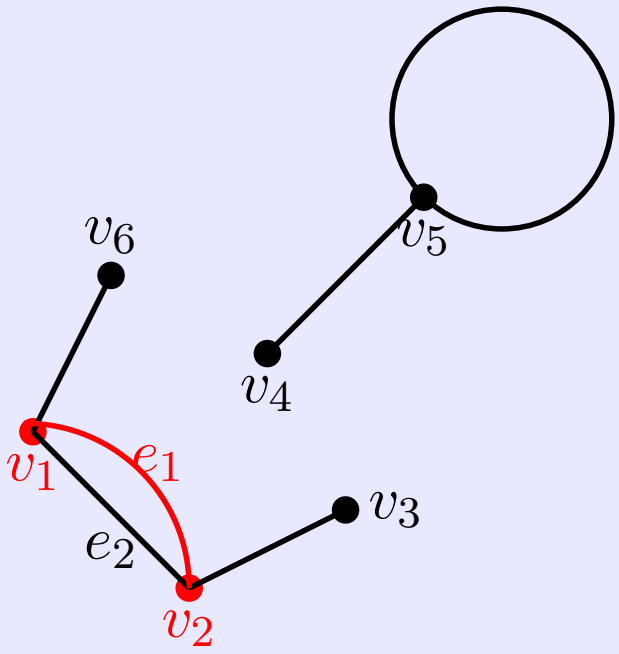
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



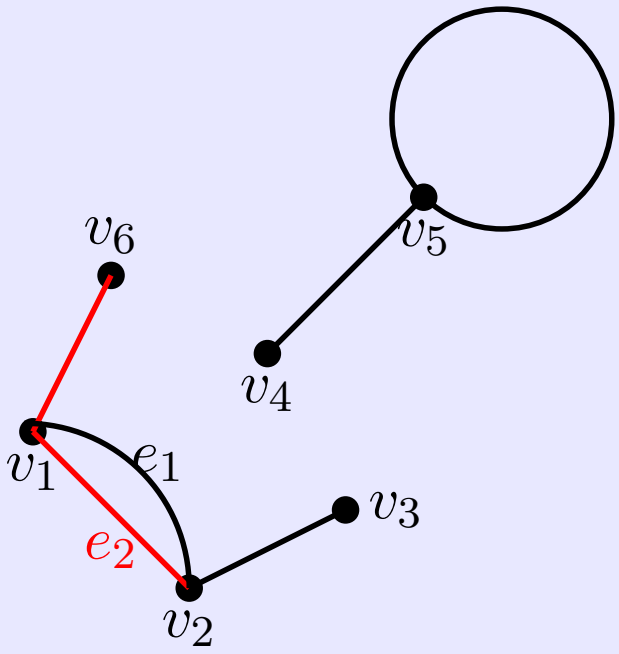
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



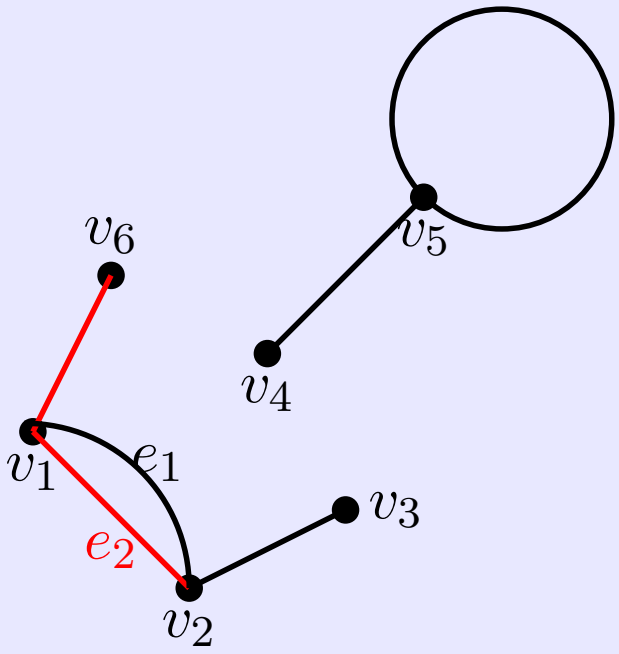
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



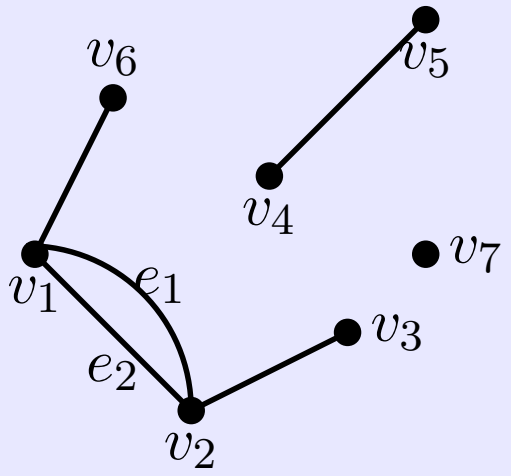
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



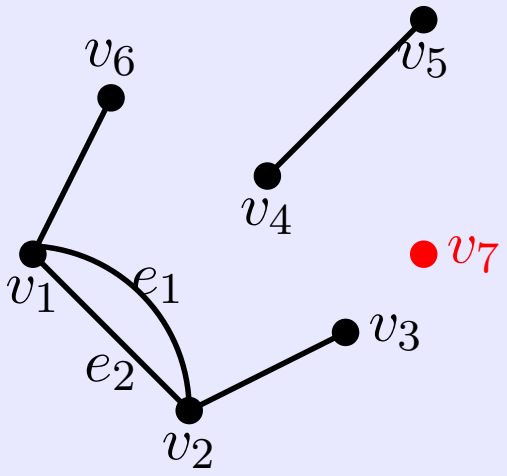
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



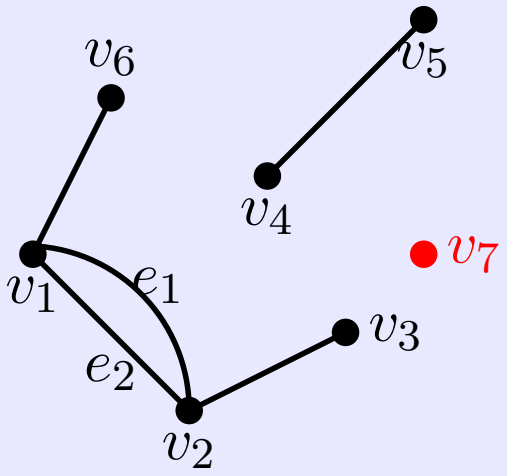
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



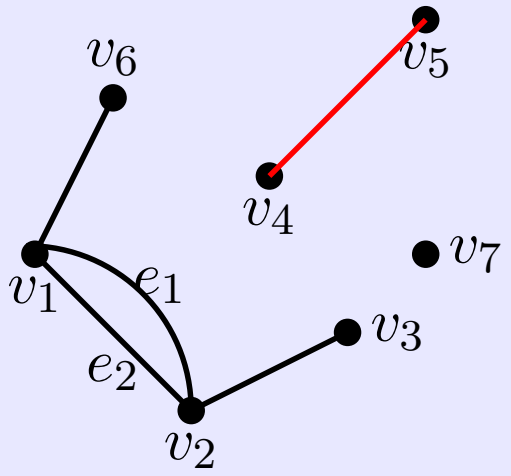
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



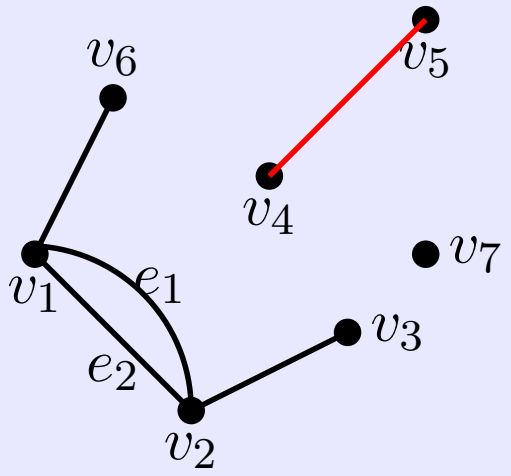
定义5

- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



定义5

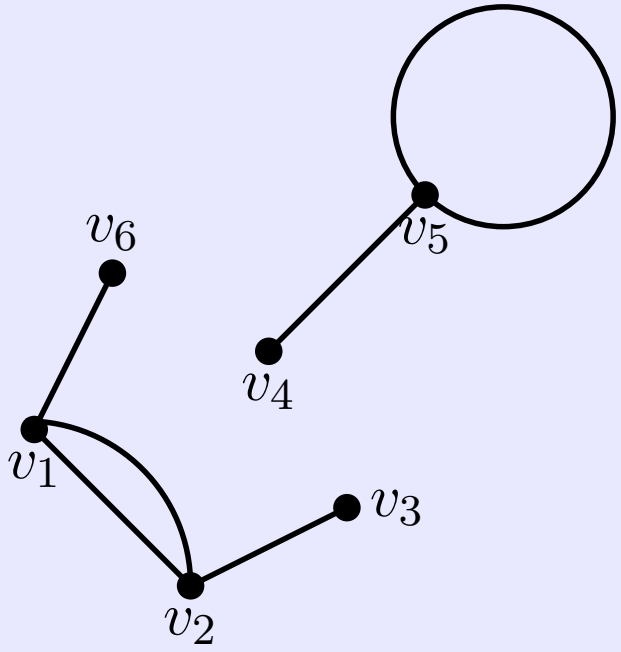
- 若$e=(u,v)$，则称点u,v邻接
- 若$e=(u,v)$，则称点$u(v)$与边e关联
- 若边e,f有公共端点，则称e,f邻接
- 没有边与其关联的点称为孤立点
- 不与其他边邻接的边称为孤立边



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

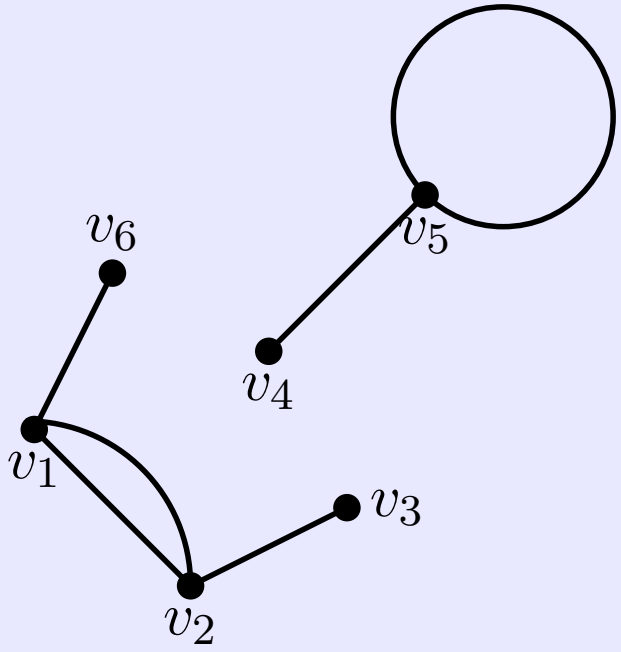
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

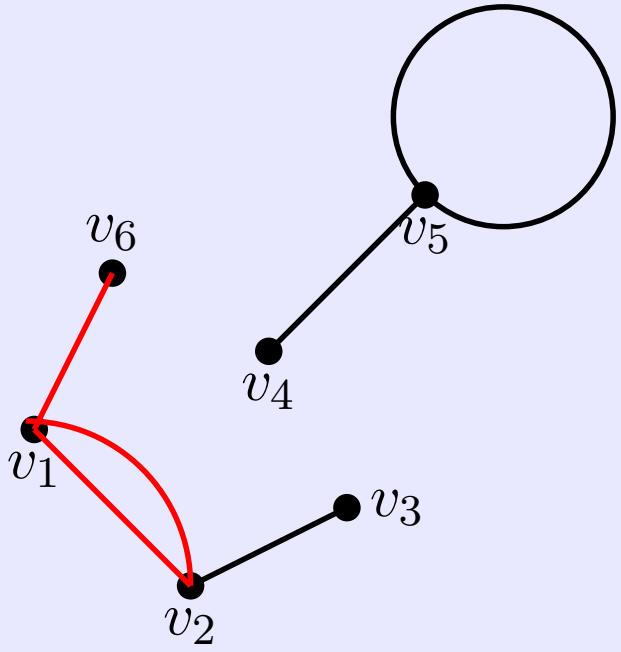
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

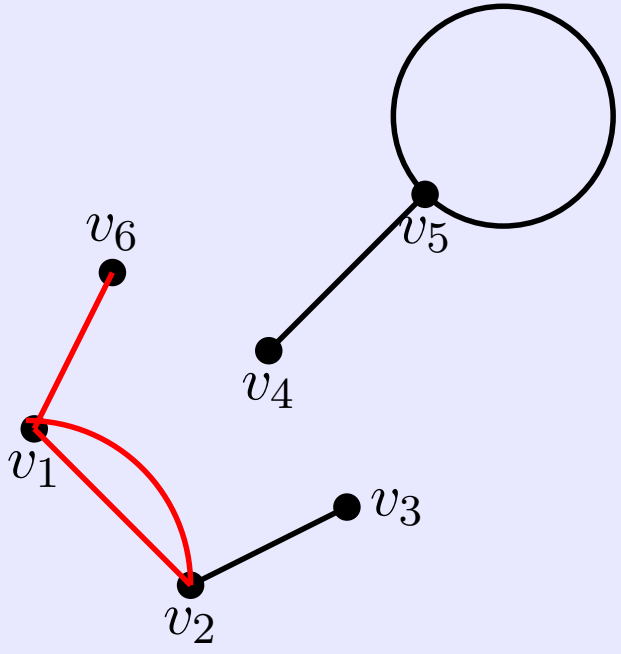
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6（度）

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

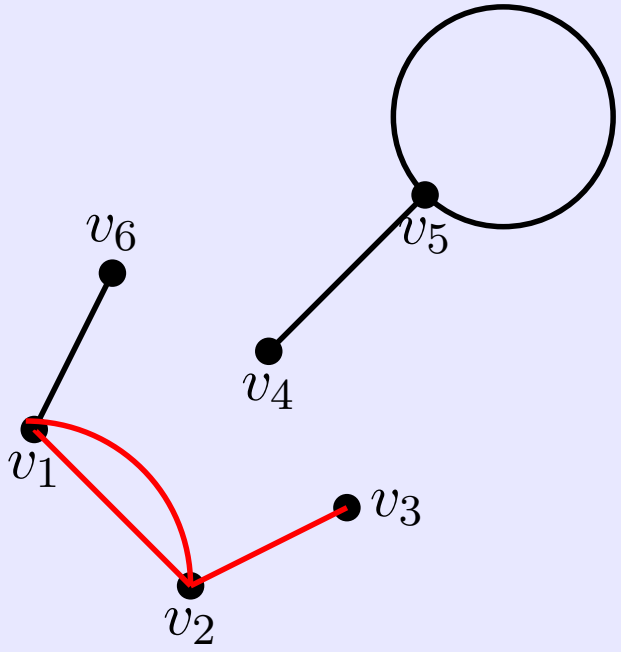


$$d(v_1) = 3$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

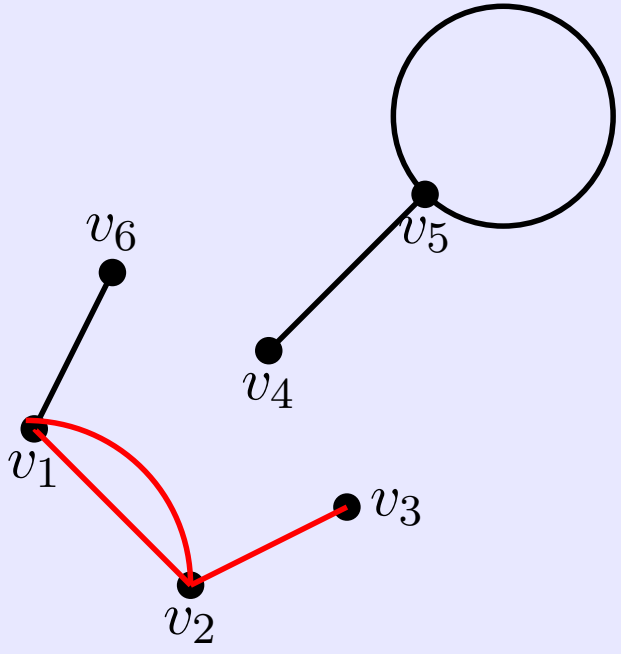
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6（度）

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

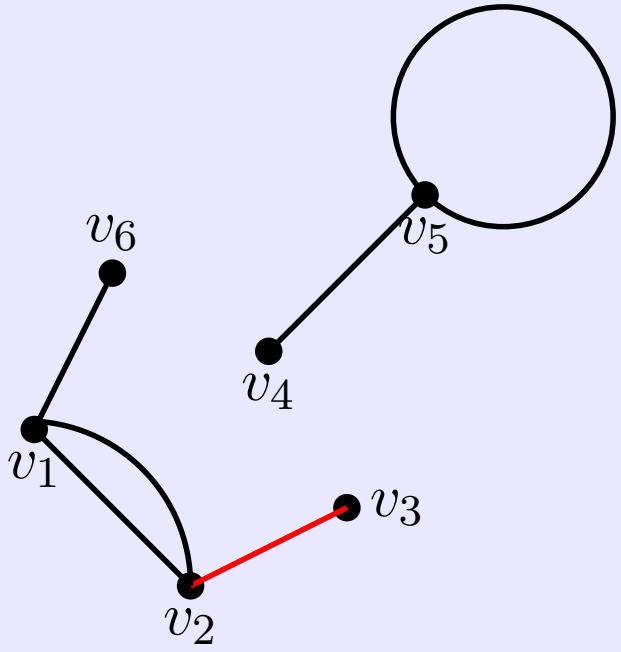


$$d(v_2) = 3$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

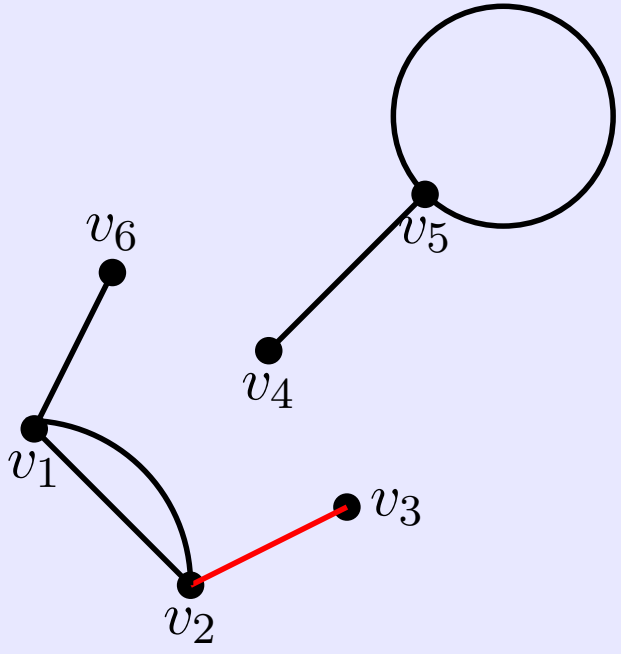
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6（度）

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

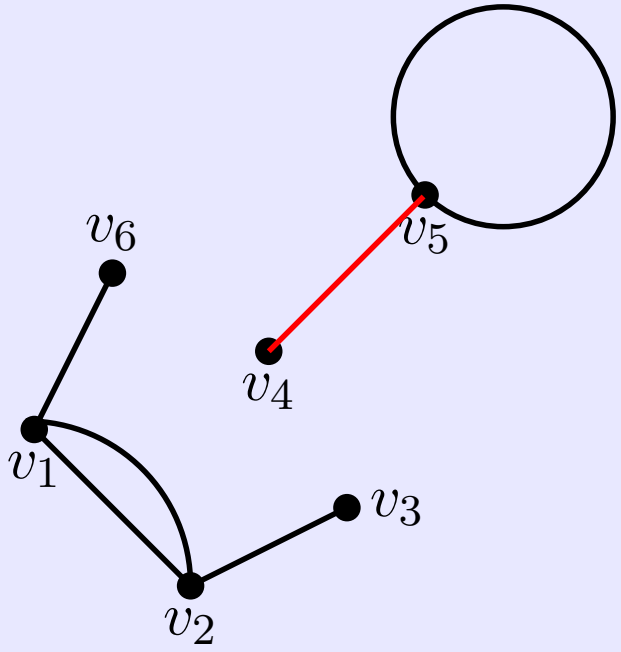


$$d(v_3) = 1$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

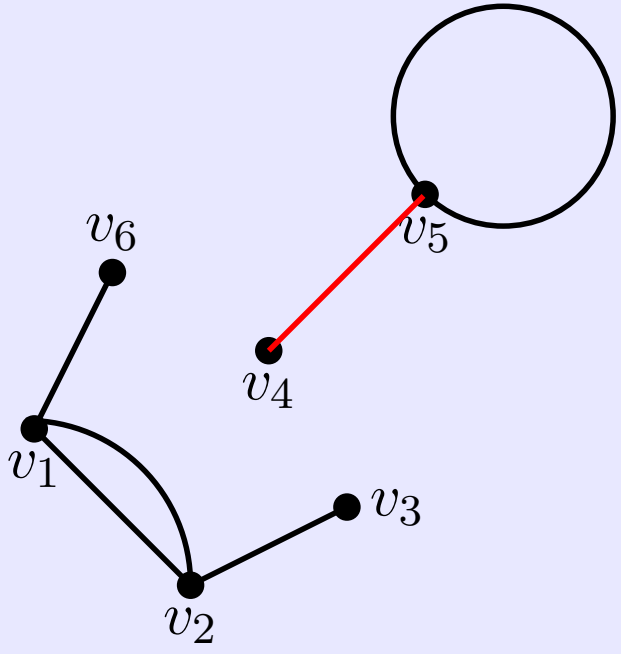
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

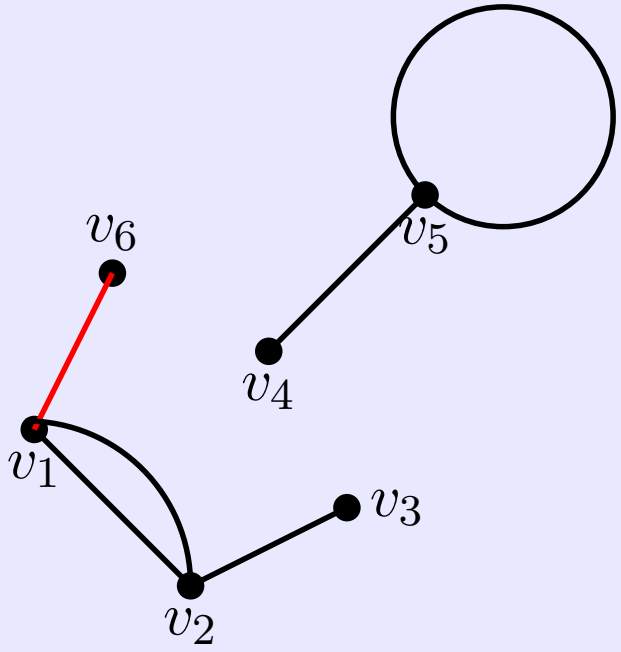


$$d(v_4) = 1$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

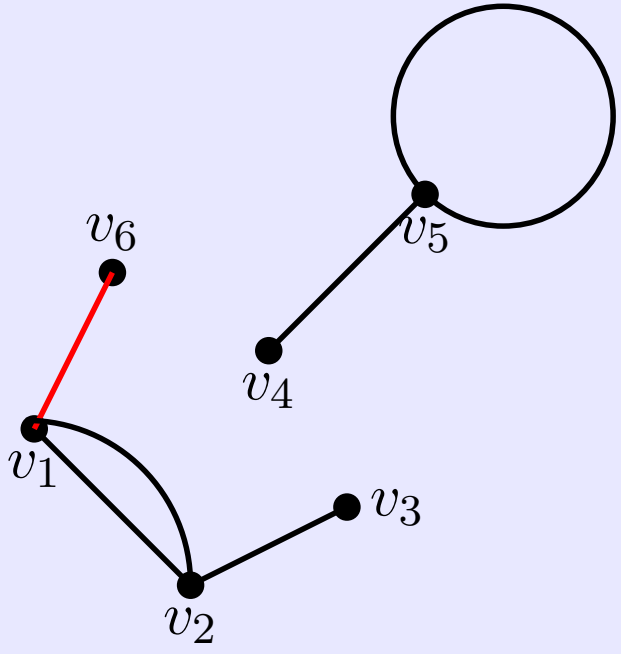
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

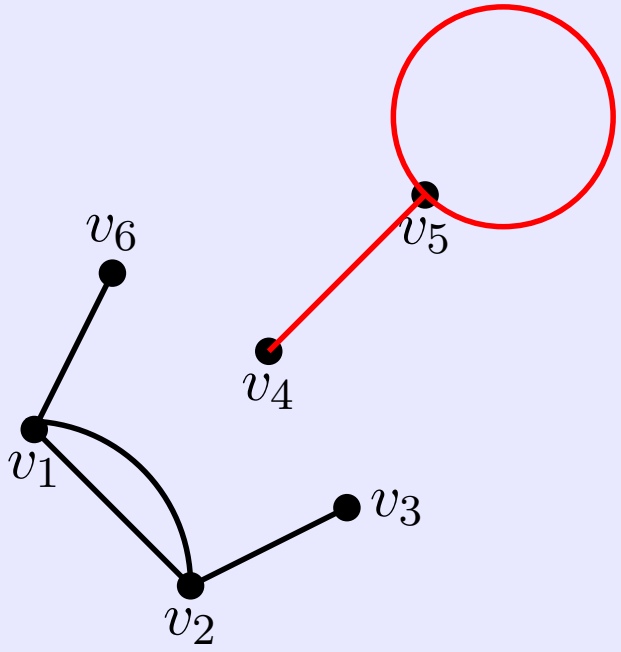


$$d(v_6) = 1$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

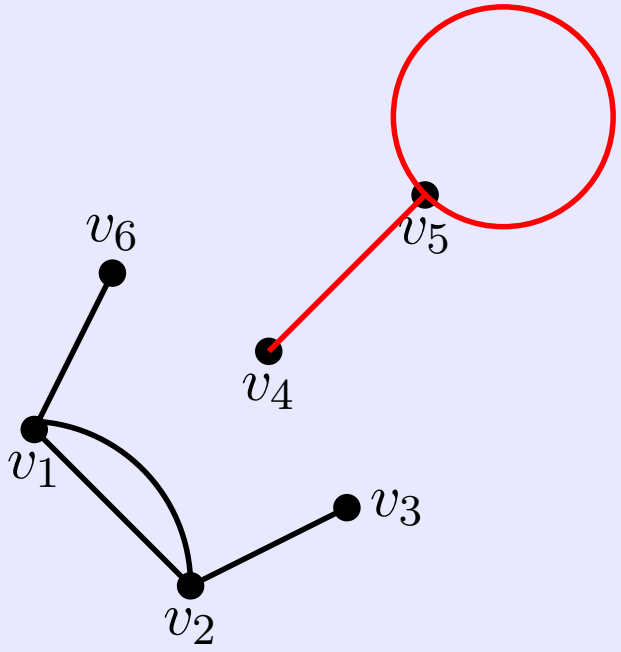
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

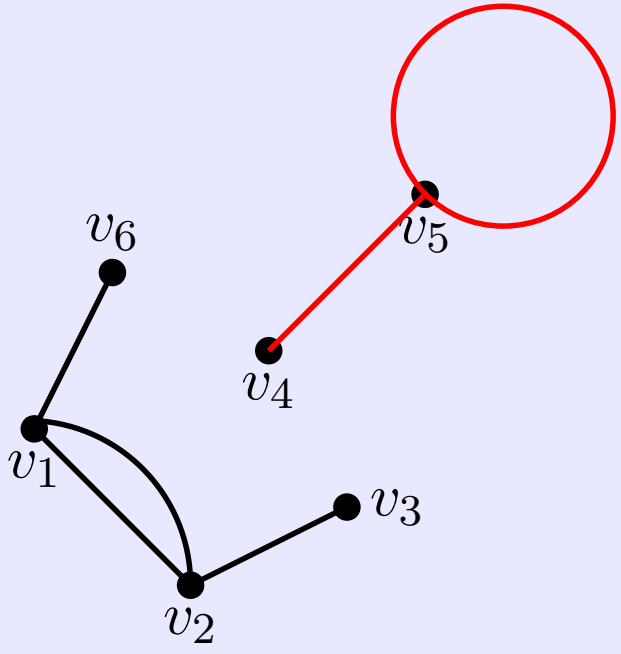
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点; 若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;

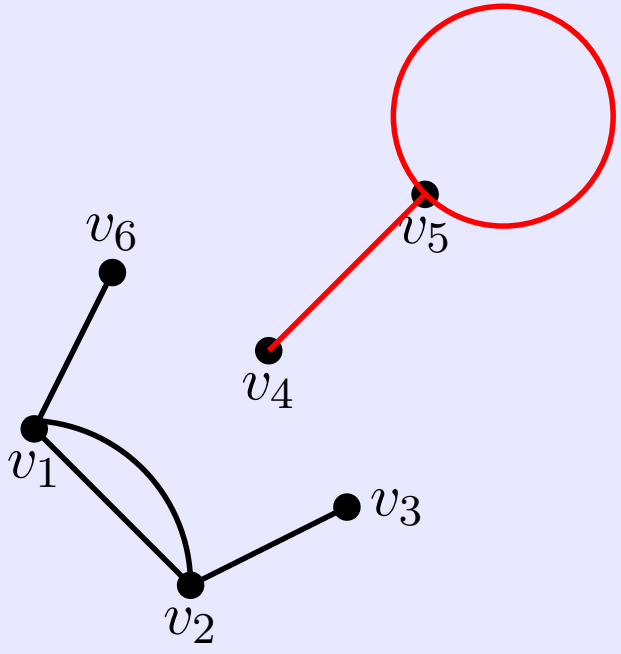


$$d(v_5) = 3$$

定义6（度）

E中与点v关联的边的条数称为v的**度**,记为$d(v)$

若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是**奇点**；若$d(v)$是偶数，则称v是**偶点**; 度为1的点称为**悬挂点**; 与悬挂点关联的边称为**悬挂边**;

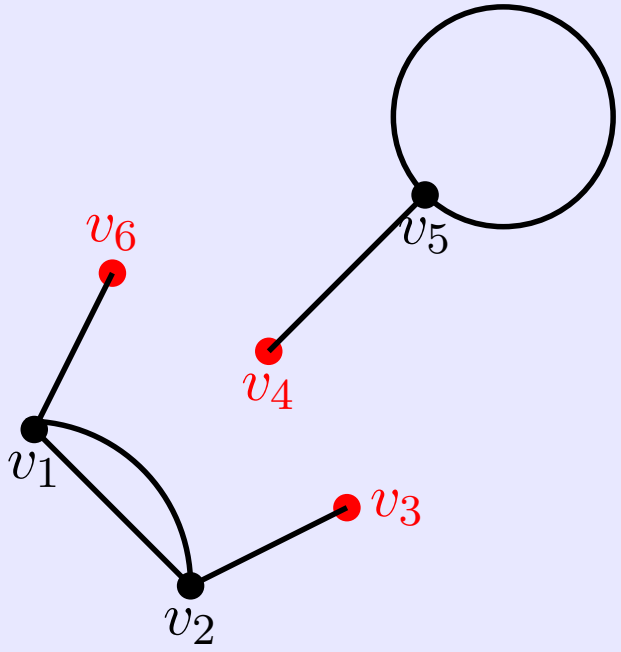


$$d(v_5) = 3$$

定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的度,记为$d(v)$

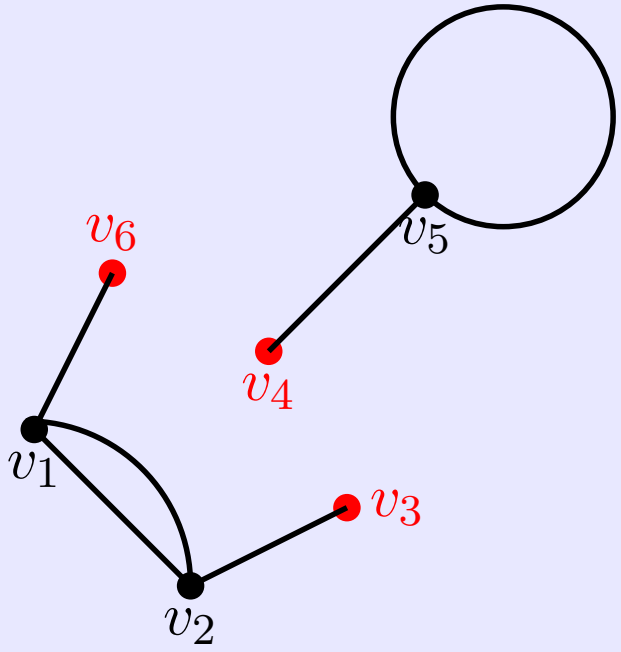
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是奇点；若$d(v)$是偶数，则称v是偶点; 度为1的点称为悬挂点; 与悬挂点关联的边称为悬挂边;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的**度**,记为$d(v)$

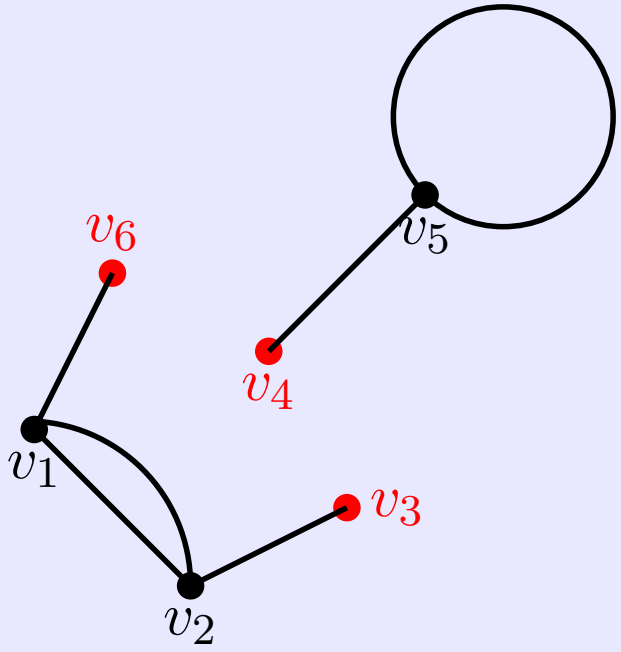
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是**奇点**; 若$d(v)$是偶数，则称v是**偶点**; 度为1的点称为**悬挂点**; 与悬挂点关联的边称为**悬挂边**;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的**度**,记为$d(v)$

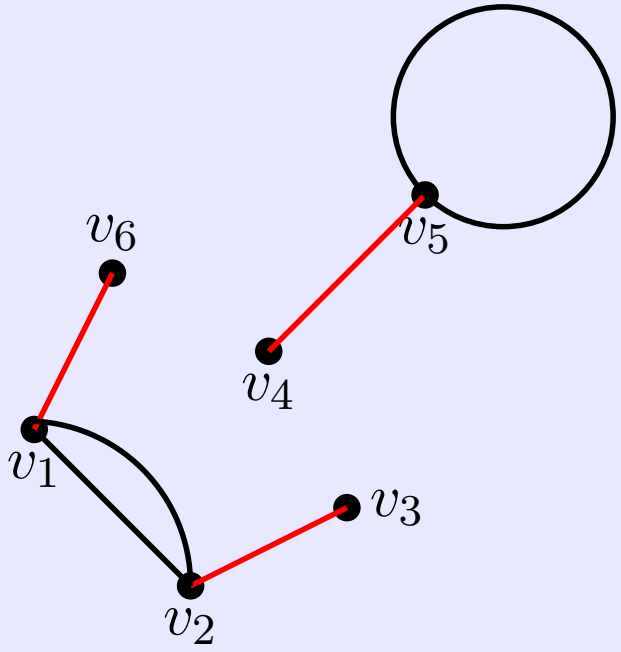
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是**奇点**; 若$d(v)$是偶数，则称v是**偶点**; 度为1的点称为**悬挂点**; 与悬挂点关联的边称为**悬挂边**;



定义6 (度)

E中与点v关联的边的条数称为v的**度**,记为$d(v)$

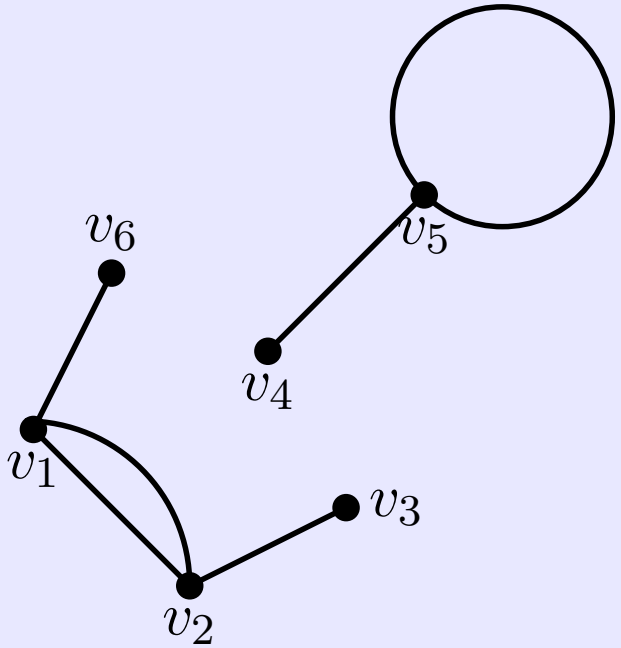
若v处有圈，默认每个圈与该点的关联边数为2; 若$d(v)$是奇数，则称v是**奇点**; 若$d(v)$是偶数，则称v是**偶点**; 度为1的点称为**悬挂点**; 与悬挂点关联的边称为**悬挂边**;



在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

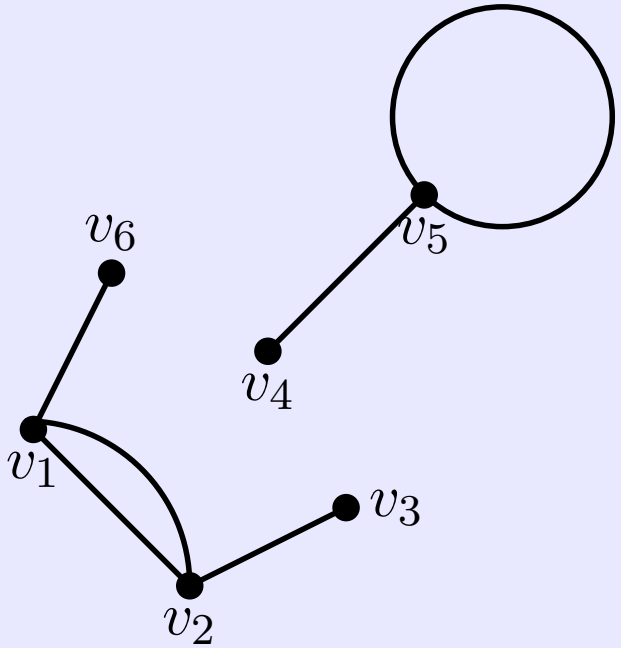
$$\triangle(G) \leq p-1$$



在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

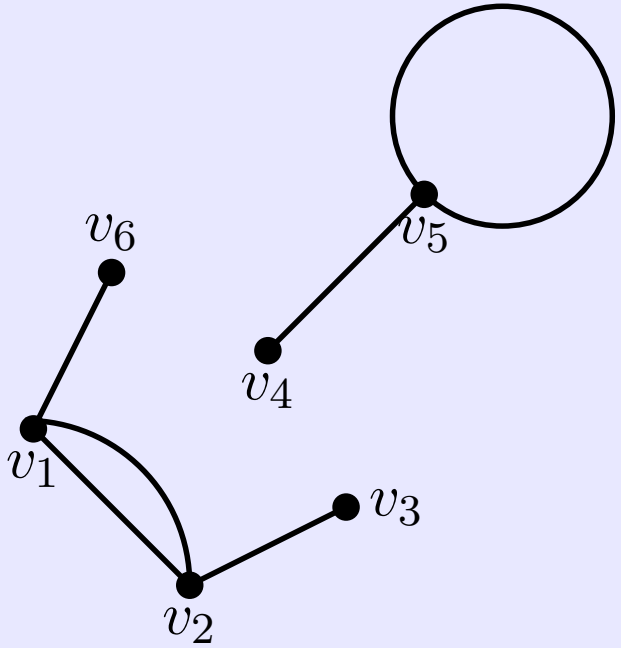
$$\triangle(G) \leq p-1$$



在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

$$\triangle(G) \leq p-1$$

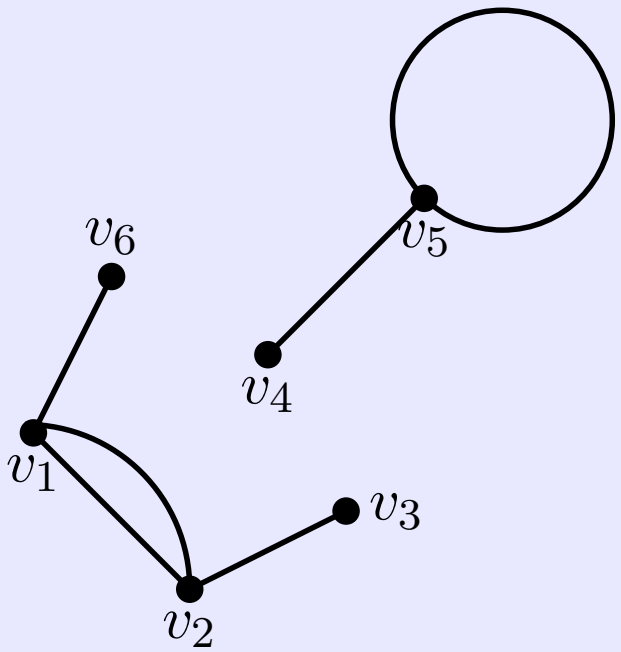


$$\delta(G) = 1$$

在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

$$\triangle(G) \leq p-1$$

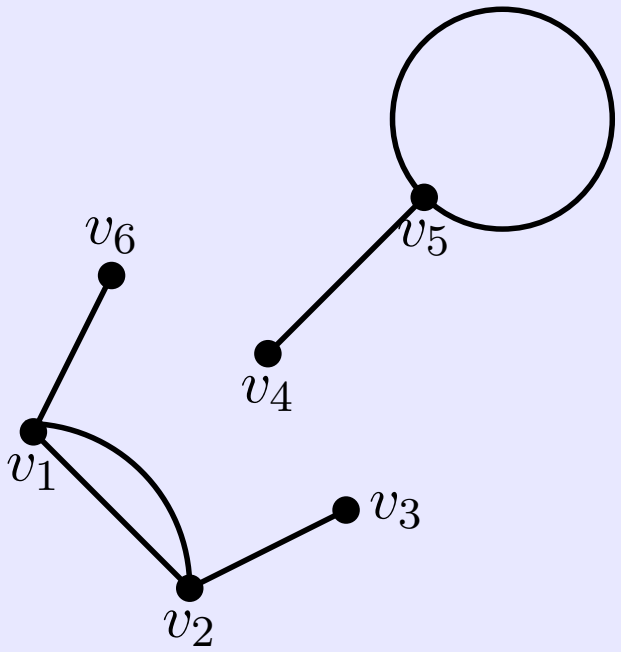


$$\delta(G) = 1$$

在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

$$\triangle(G) \leq p-1$$



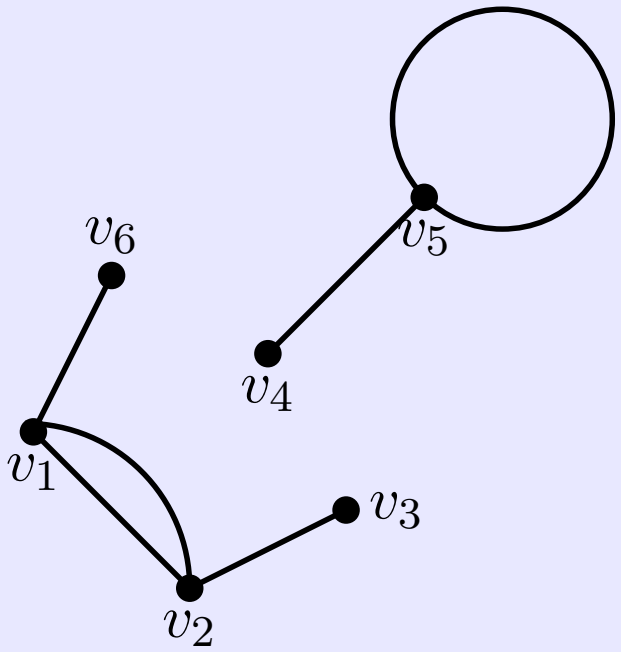
$$\delta(G) = 1$$

$$\triangle(G) = 3$$

在图G中，

- 度数最小的点的度数记为$\delta(G)$;
- 度数最大的点的度数记为$\triangle(G)$;
- 对于p阶简单图，

$$\triangle(G) \leq p-1$$



$$\delta(G) = 1$$

$$\triangle(G) = 3$$

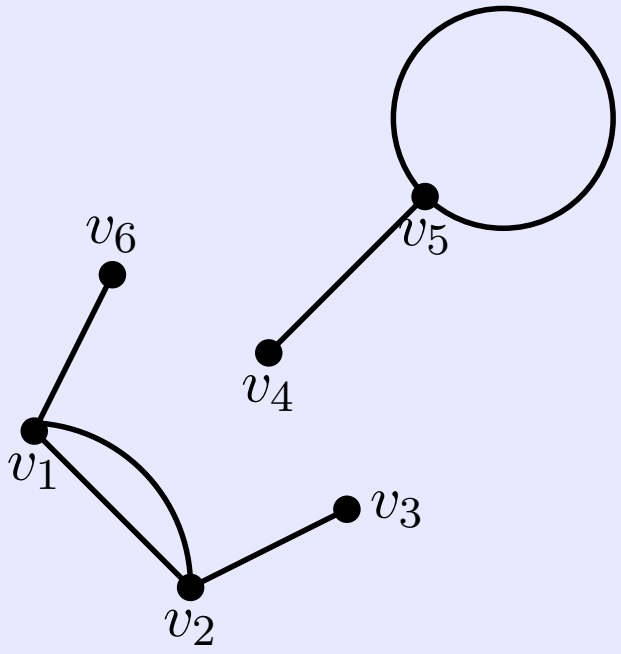
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



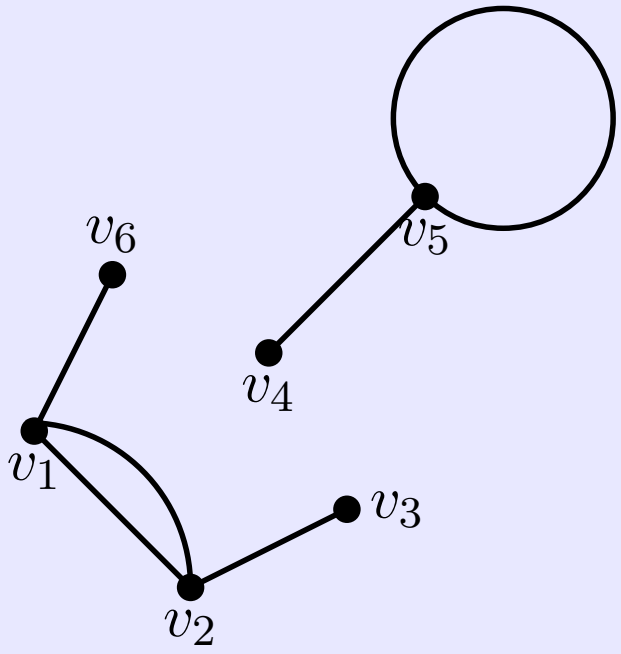
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



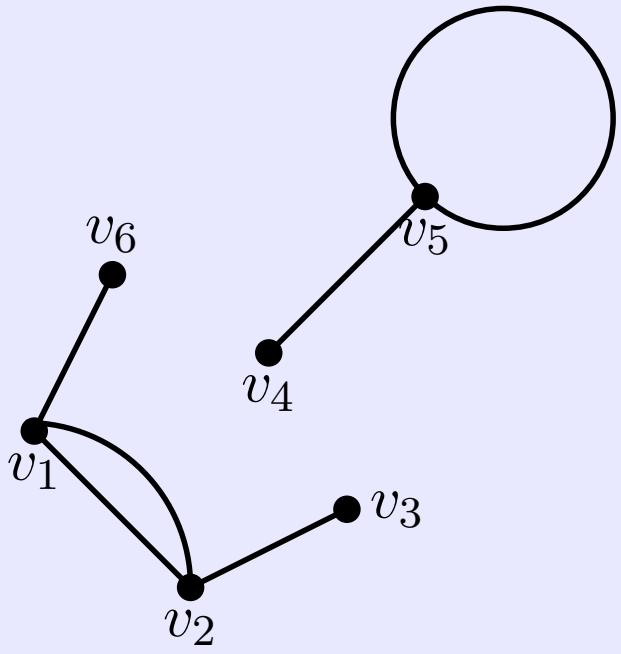
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$$V_1 = \{v_1, v_2\}$$

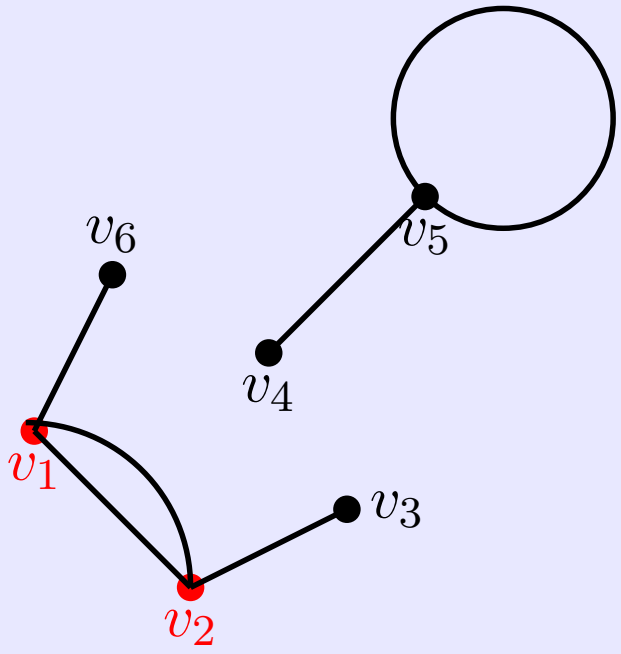
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$$V_1 = \{v_1, v_2\}$$

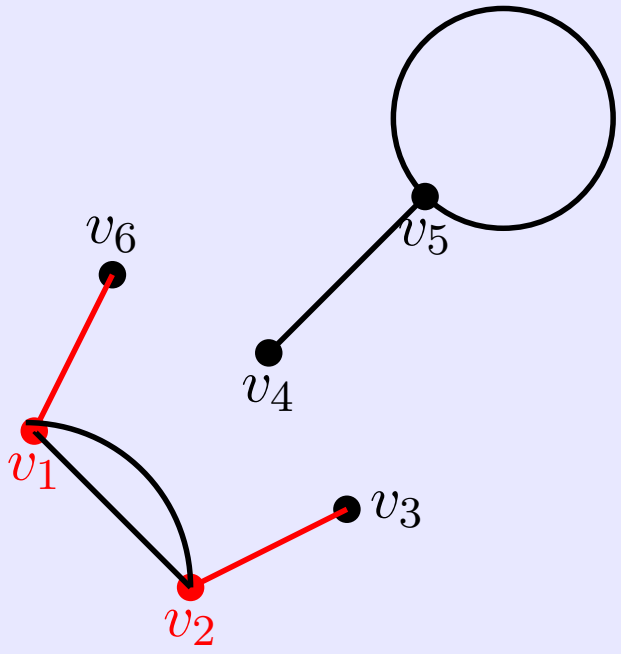
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$$V_1 = \{v_1, v_2\}$$

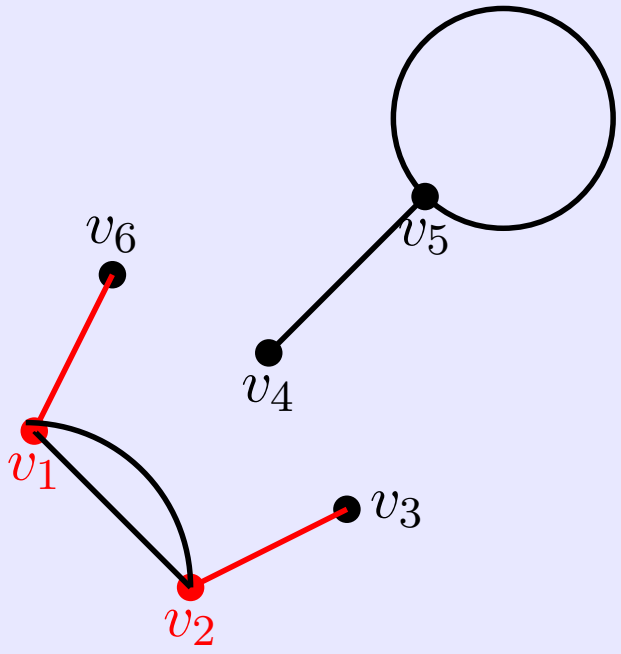
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$V_1 = \{v_1, v_2\} \quad |R(V_1)| = 2$

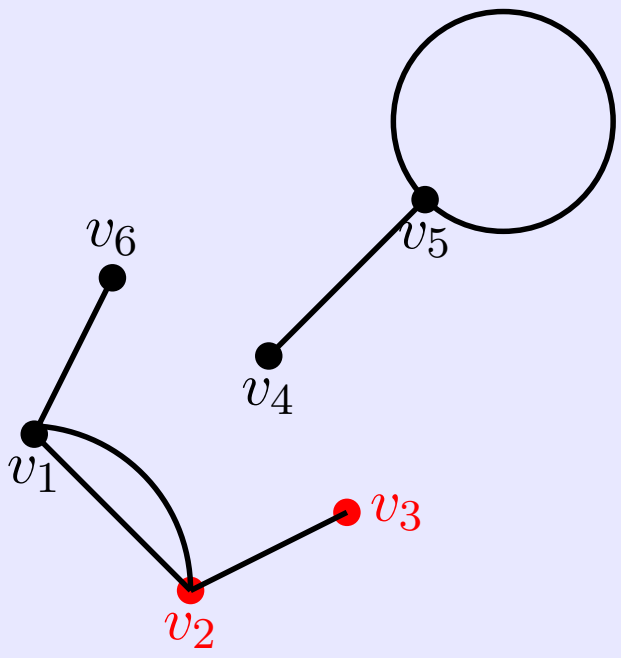
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$$V_1 = \{v_2, v_3\}$$

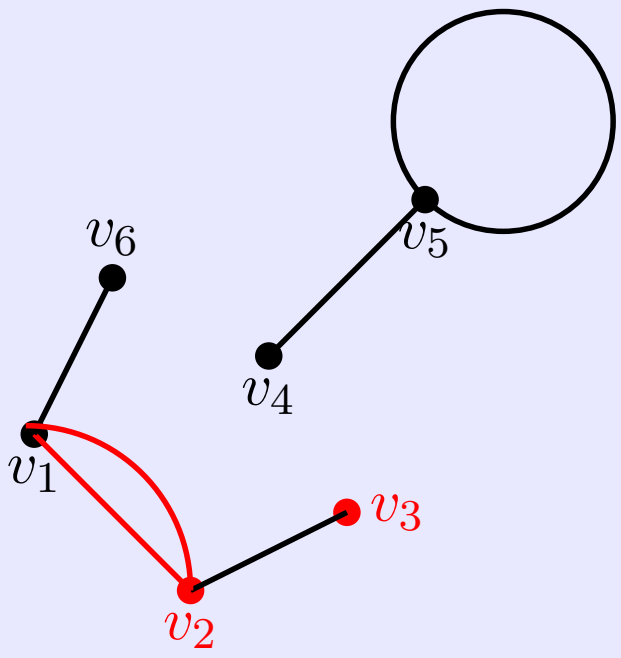
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$$V_1 = \{v_2, v_3\}$$

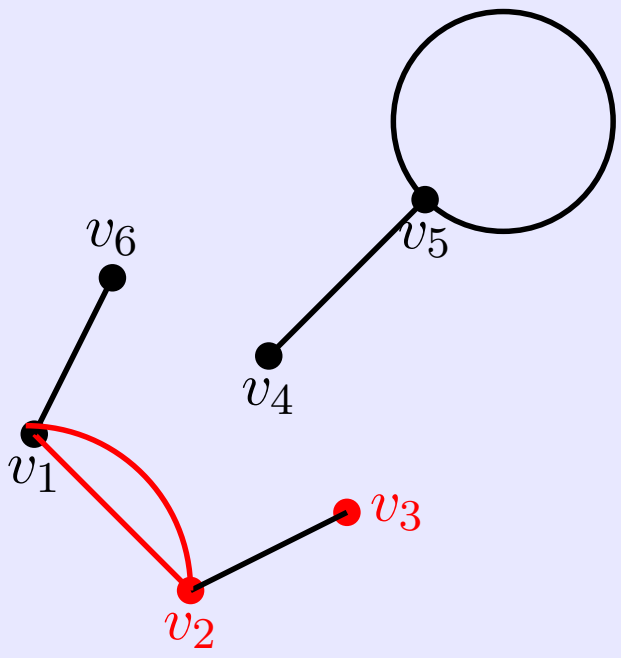
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$V_1 = \{v_2, v_3\} \quad |R(V_1)| = 2$

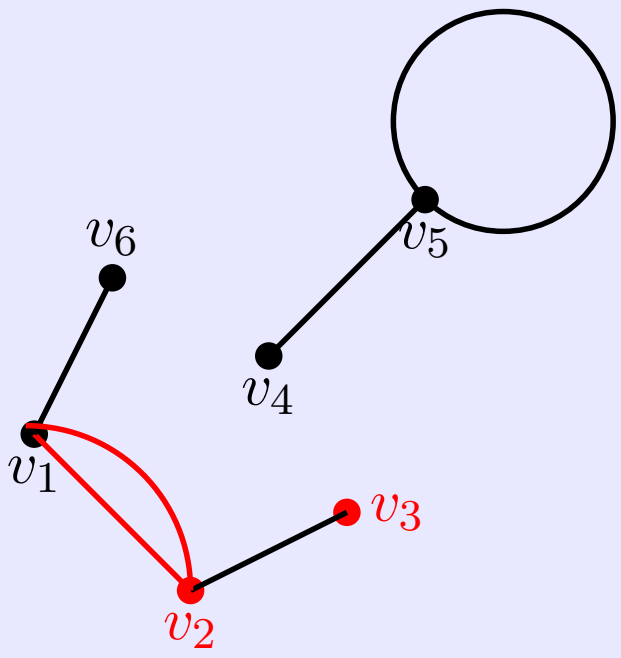
定义7 (点子集的度)

设V_1是点集V的子集，定义

$$R(V_1) = \{(u,v) | u \in V_1 \wedge v \notin V_1 \wedge (u,v) \in E\}$$

称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度。

$|R(V_1)|$表示图G中连结点集V_1外部点与内部点的边的条数。



$V_1 = \{v_2, v_3\} \quad |R(V_1)| = 2$

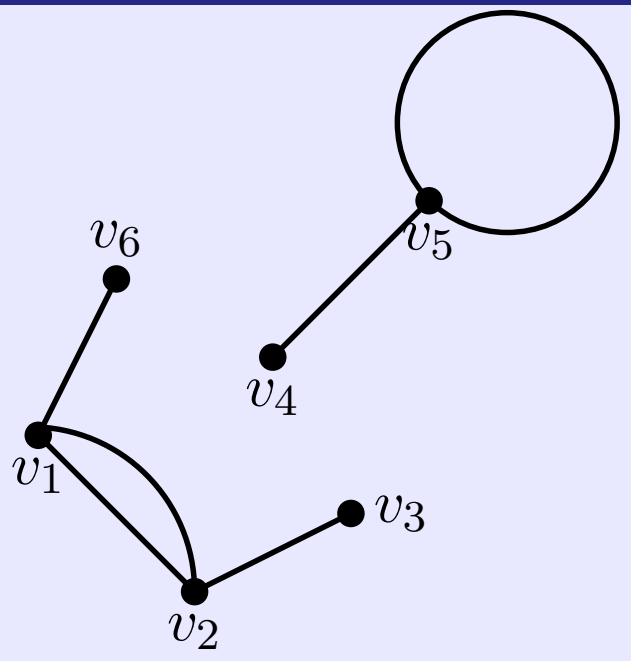
定理1 (握手定理)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$

推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

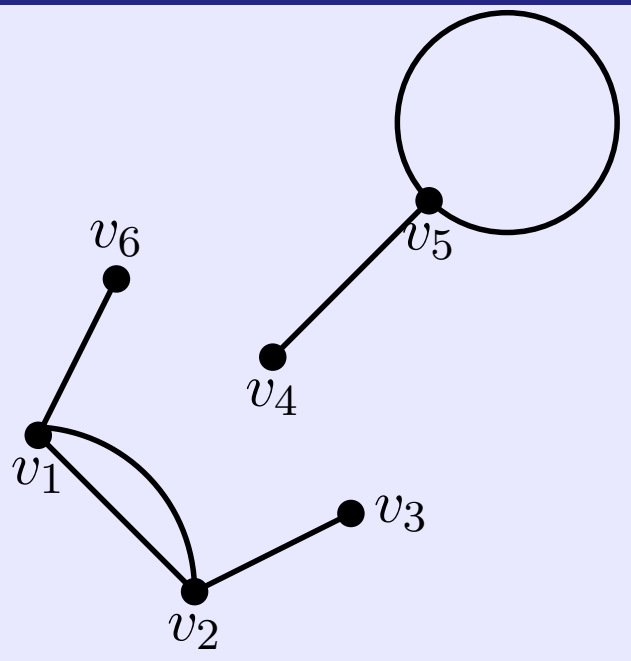
定理1 (握手定理)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$

推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

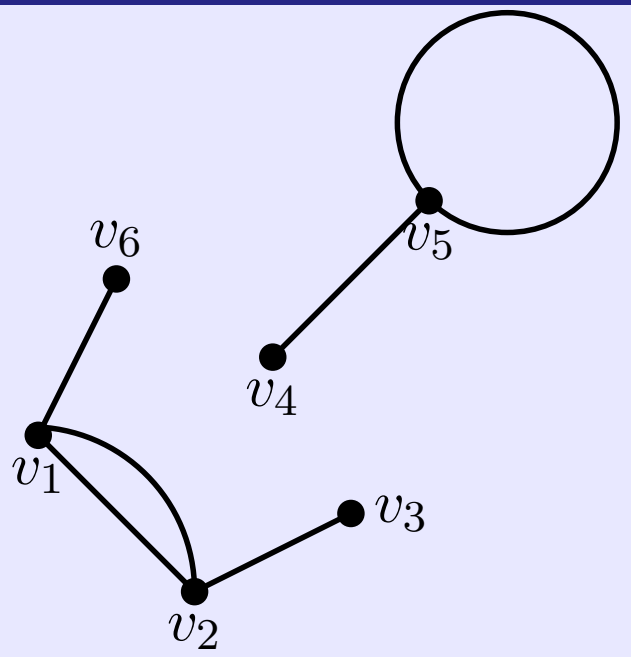
定理1（握手定理）

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$

推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

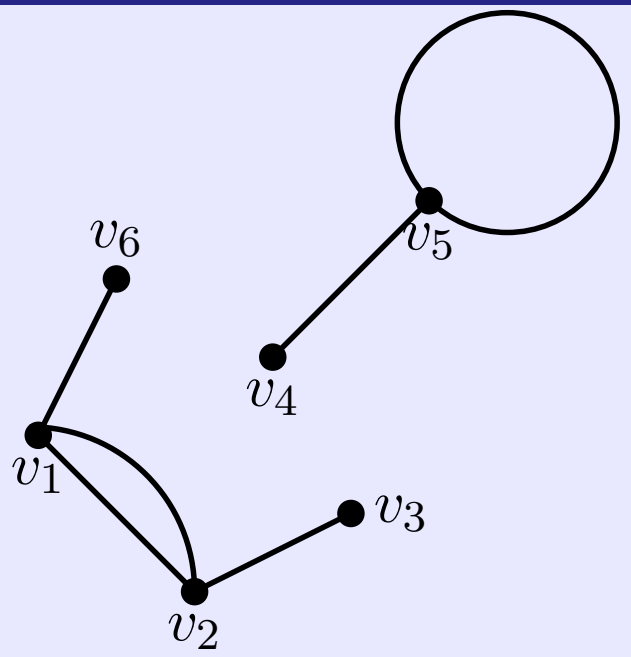
定理1 (握手定理)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$

推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。



$d(v_1)=3,\qquad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\qquad d(v_4)=1$

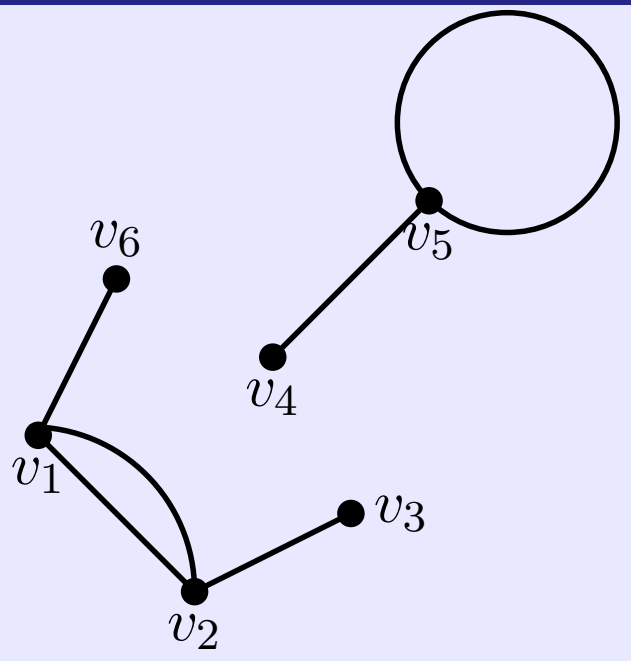
$d(v_5)=3,\qquad d(v_6)=1$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

定理1 (握手定理)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$



$$d(v_1)=3,\qquad d(v_2)=3$$
$$d(v_3)=1,\qquad d(v_4)=1$$
$$d(v_5)=3,\qquad d(v_6)=1$$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

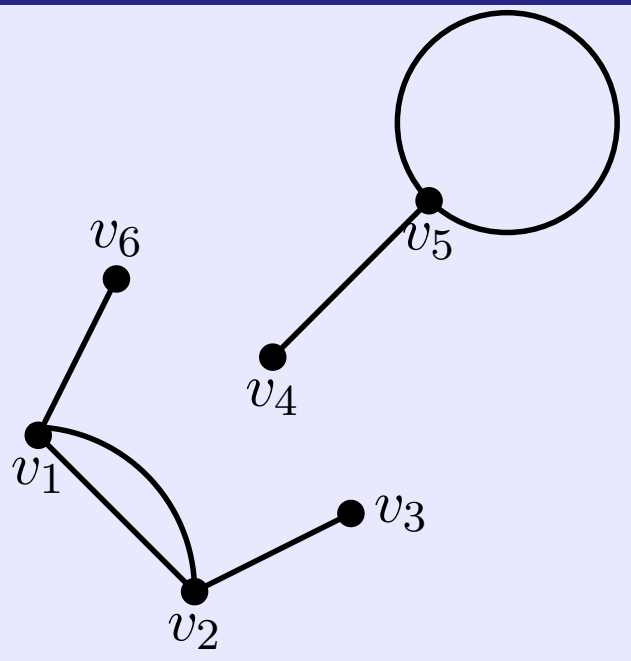
推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。

定理1 (握手定理)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，则

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=2q$$



推论1

在一个图中，奇点的个数必为偶数。

$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

$$\sum_{v_i\in V} d(v_i)=12=2q$$

练习1

设图G有6条边，3度和5度点各一个，其余都是2度点，求图G的点数。

练习2

设9阶图G中，每个顶点的度数不是5就是6，证明G中至少有5个6度点或至少有6个5度点。

练习1

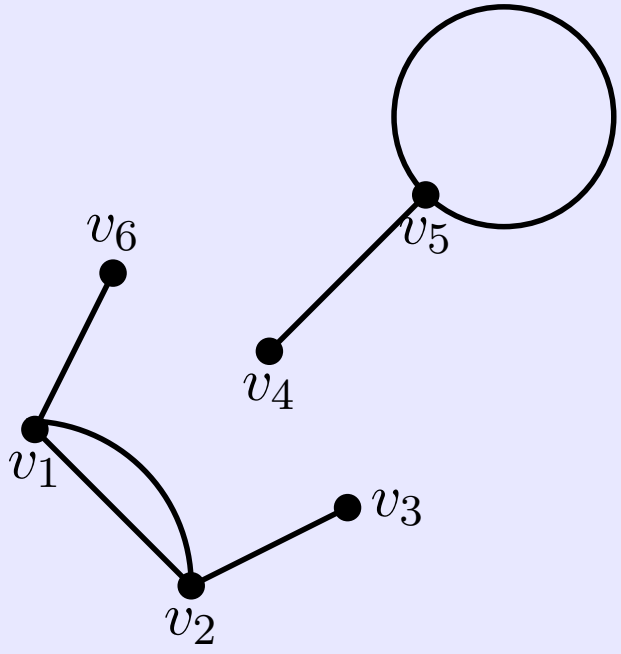
设图G有6条边，3度和5度点各一个，其余都是2度点，求图G的点数。

练习2

设9阶图G中，每个顶点的度数不是5就是6，证明G中至少有5个6度点或至少有6个5度点。

定义8（度序列）

设$G=\langle V,E\rangle$是p阶图，
$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，
称$d(v_1),\cdots,d(v_n)$为G的**度序列**。



定义9（图化）

对于非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若存在以$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$为点集的p阶图，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化**。

$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

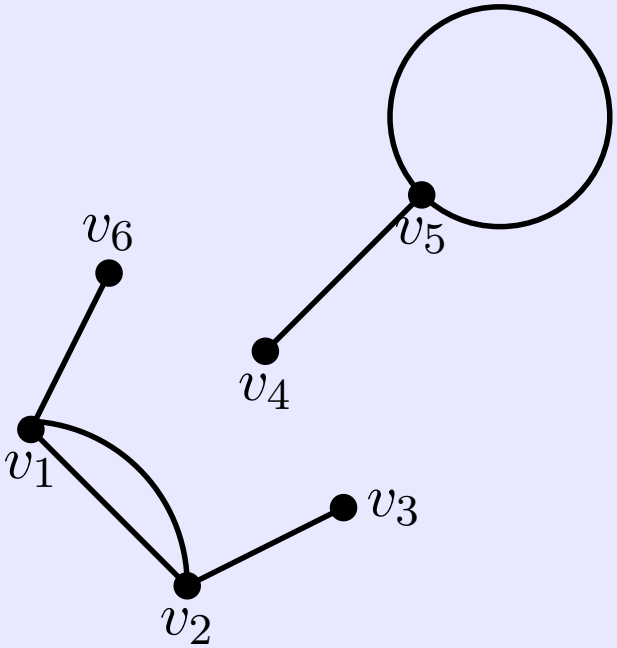
定义8（度序列）

设$G=\langle V,E\rangle$是p阶图，
$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，
称$d(v_1),\cdots,d(v_n)$为G的**度序列**。

定义9（图化）

对于非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若存在以$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$为点集的p阶图，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化**。

若所得的图是简单图，则称d是**可简单图化**。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

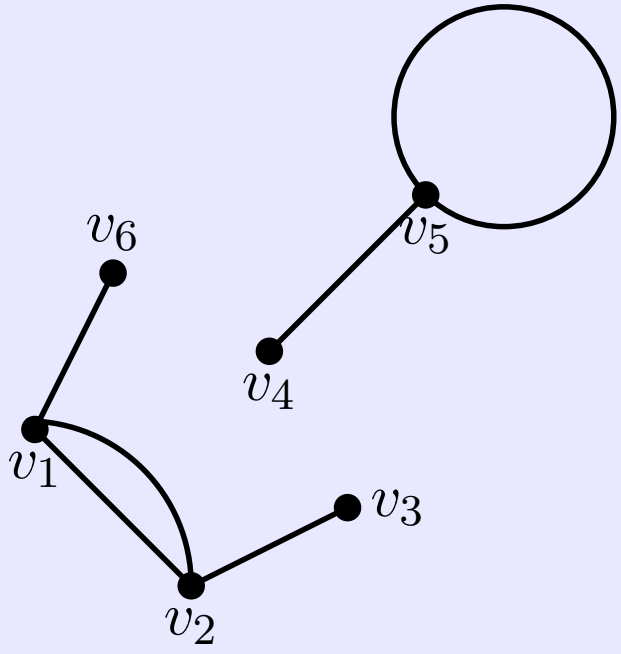
定义8（度序列）

设$G=\langle V,E\rangle$是p阶图，
$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，
称$d(v_1),\cdots,d(v_n)$为G的**度序列**。

定义9（图化）

对于非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若存在以$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$为点集的p阶图，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化**。

若所得的图是简单图，则称d是**可简单图化**。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

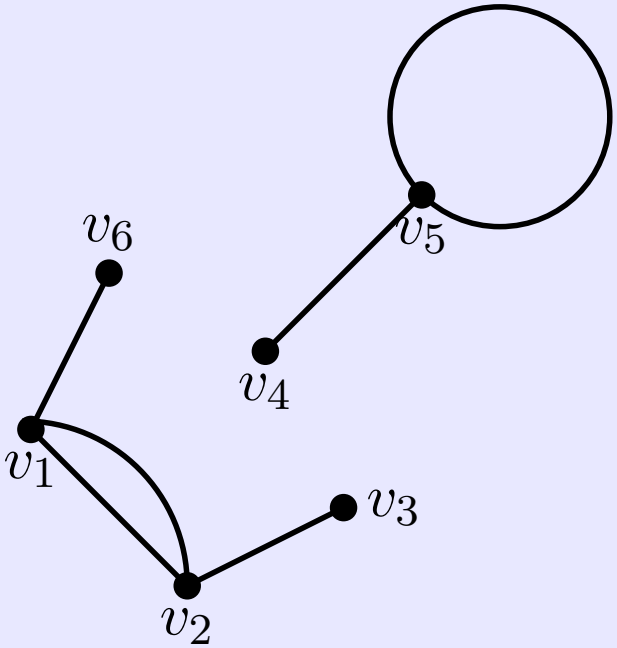
定义8（度序列）

设$G=\langle V,E\rangle$是p阶图，
$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，
称$d(v_1),\cdots,d(v_n)$为G的**度序列**。

定义9（图化）

对于非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若存在以$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$为点集的p阶图，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化**。

若所得的图是简单图，则称d是**可简单图化**。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

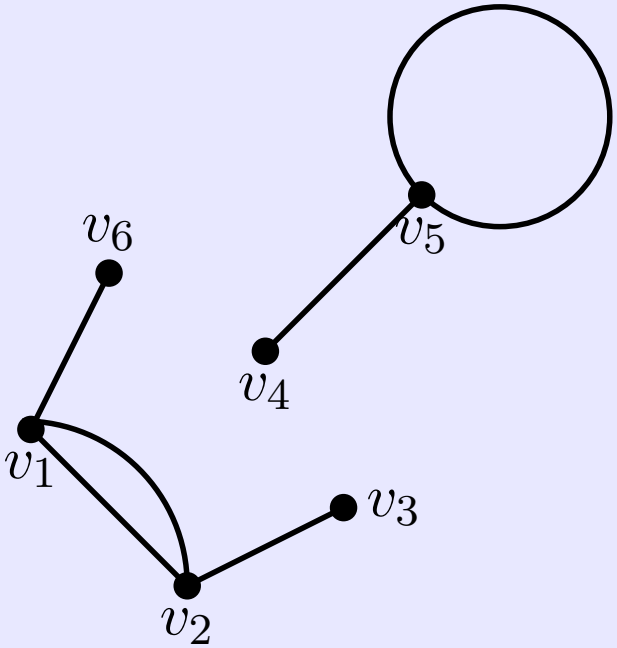
定义8（度序列）

设$G=\langle V,E\rangle$是p阶图，
$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，
称$d(v_1),\cdots,d(v_n)$为G的**度序列**。

定义9（图化）

对于非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若存在以$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$为点集的p阶图，使得$d(v_i)=d_i$，则称d是**可图化**。

若所得的图是简单图，则称d是**可简单图化**。



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

定理2

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，则d可图化的充要条件是$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数。

注1

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若d可简单图化，则必有

$$\sum_{i=1}^{p} d_i \le p(p-1)$$

练习3（能否图化、简单图化）

1. $(5,5,4,4,2,1)$
2. $(5,4,3,2,2)$
3. $(d_1,\cdots,d_p)$,其中 $d_p > d_{p-1} > \cdots > d_1 \ge 1$ 且$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数
4. $(3,3,3,1)$

定理2

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，则d可图化的充要条件是$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数。

注1

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若d可简单图化，则必有

- $\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数；
- $\max(d_1,\cdots,d_p)\le p-1$；

练习3（能否图化、简单图化）

1. $(5,5,4,4,2,1)$
2. $(5,4,3,2,2)$
3. $(d_1,\cdots,d_p)$,其中 $d_p>d_{p-1}>\cdots>d_1\ge 1$ 且$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数
4. $(3,3,3,1)$

定理2

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，则d可图化的充要条件是$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数。

注1

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若d可简单图化，则必有

- $\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数；
- $\max(d_1,\cdots,d_p)\le p-1$；

练习3（能否图化、简单图化）

1. $(5,5,4,4,2,1)$
2. $(5,4,3,2,2)$
3. $(d_1,\cdots,d_p)$,其中 $d_p>d_{p-1}>\cdots>d_1\ge 1$ 且$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数
4. $(3,3,3,1)$

定理2

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，则d可图化的充要条件是$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数。

注1

设非负整数序列$d=(d_1,\cdots,d_p)$，若d可简单图化，则必有

- $\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数；
- $\max(d_1,\cdots,d_p)\le p-1$；

练习3 (能否图化、简单图化)

1. $(5,5,4,4,2,1)$
2. $(5,4,3,2,2)$
3. $(d_1,\cdots,d_p)$,其中 $d_p>d_{p-1}>\cdots>d_1\ge 1$ 且$\sum_{i=1}^{p} d_i$是偶数
4. $(3,3,3,1)$

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

定义10 (正则图、完全图)

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。
$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

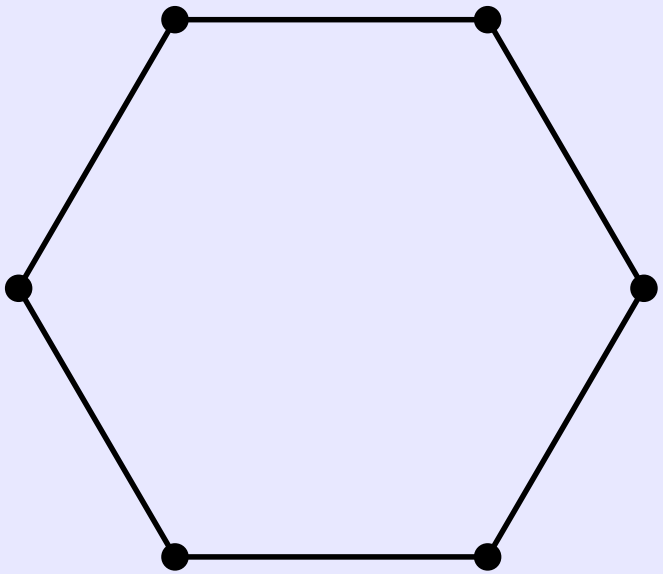
定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。



2度正则图

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

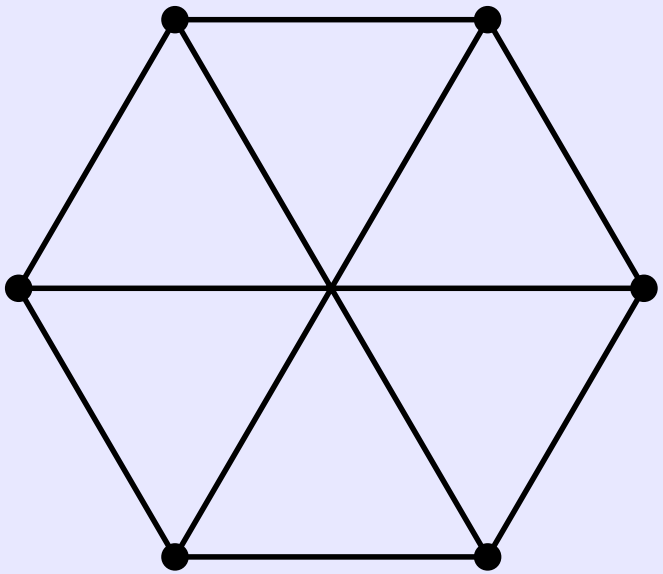
定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。



3度正则图

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

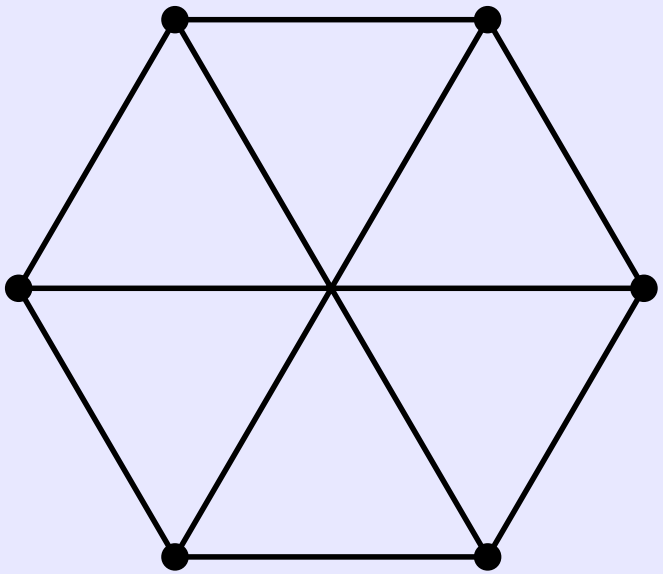
定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。



3度正则图

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

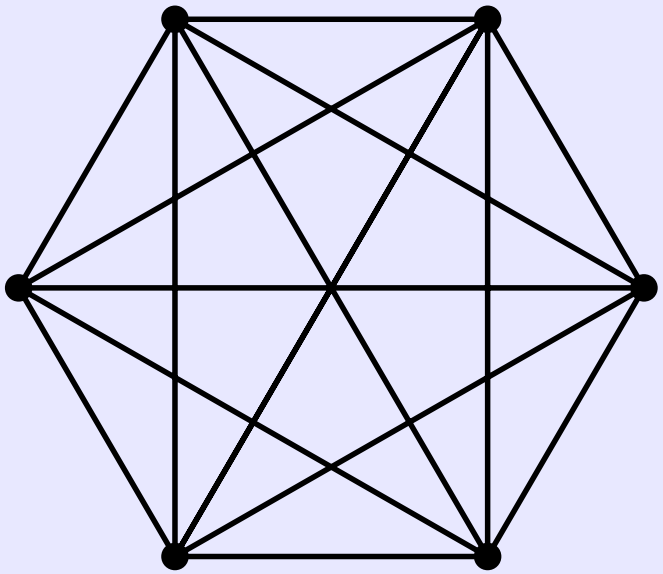
定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。



K_6

例1 (证明在任何两个或两个人以上的组中，存在两个人在组内有相同个数的朋友)

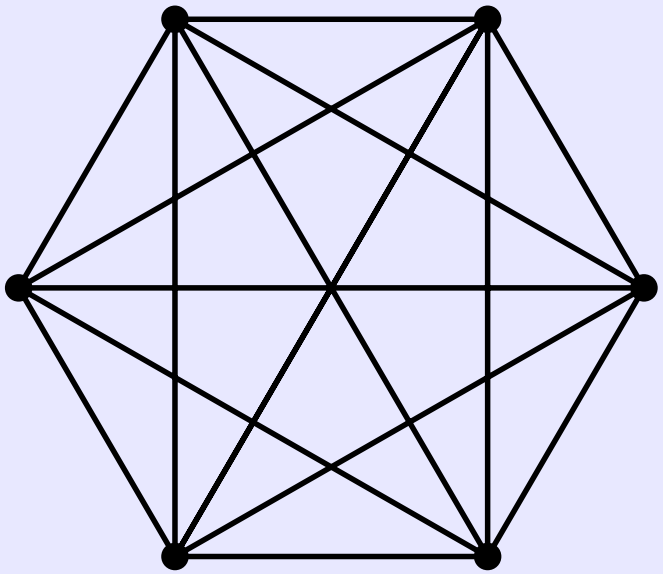
定义10 (正则图、完全图)

设G是(p,q)简单图，若

$$\delta(G) = \triangle(G) = r$$

则称G是r度正则图。

$p-1$度正则图称为完全图，记为K_p。K_p的边数等于$p(p-1)/2$。



K_6

定义11 (二部图)

设$G = \langle V, E \rangle$是简单图，

$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$。

若$\forall (u, v) \in E$，有$u \in V_1, v \in V_2$，

或$u \in V_2, v \in V_1$，则称G是二部图。

若$|V_1| = m, |V_2| = n$，

且$\forall u \in V_1, v \in V_2$，均有$(u, v) \in E$，

则称G是完全二部图，记为$K_{m,n}$。

$K_{m,n}$的边数为$m \times n$。

定义11（二部图）

设$G=\langle V,E\rangle$是简单图，

$V=V_1\cup V_2,\quad V_1\cap V_2=\emptyset$。

若$\forall(u,v)\in E$，有$u\in V_1,v\in V_2$，

或$u\in V_2,v\in V_1$，则称G是二部图。

若$|V_1|=m,|V_2|=n$，

且$\forall u\in V_1,v\in V_2$，均有$(u,v)\in E$，

则称G是完全二部图，记为$K_{m,n}$。

$K_{m,n}$的边数为$m\times n$。

定义11（二部图）

设$G=\langle V,E\rangle$是简单图，

$V=V_1\cup V_2,\quad V_1\cap V_2=\emptyset$。

若$\forall(u,v)\in E$，有$u\in V_1,v\in V_2$，

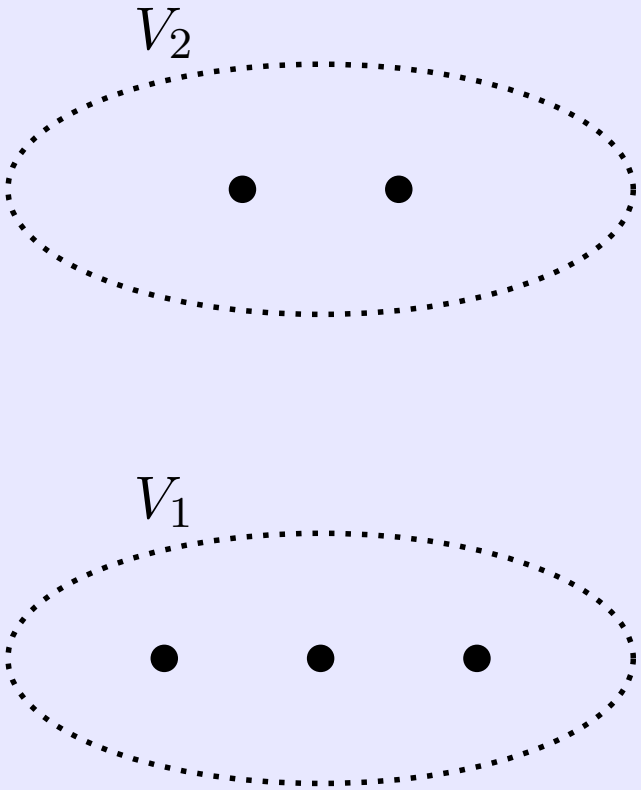
或$u\in V_2,v\in V_1$，则称G是二部图。

若$|V_1|=m,|V_2|=n$，

且$\forall u\in V_1,v\in V_2$，均有$(u,v)\in E$，

则称G是完全二部图，记为$K_{m,n}$。

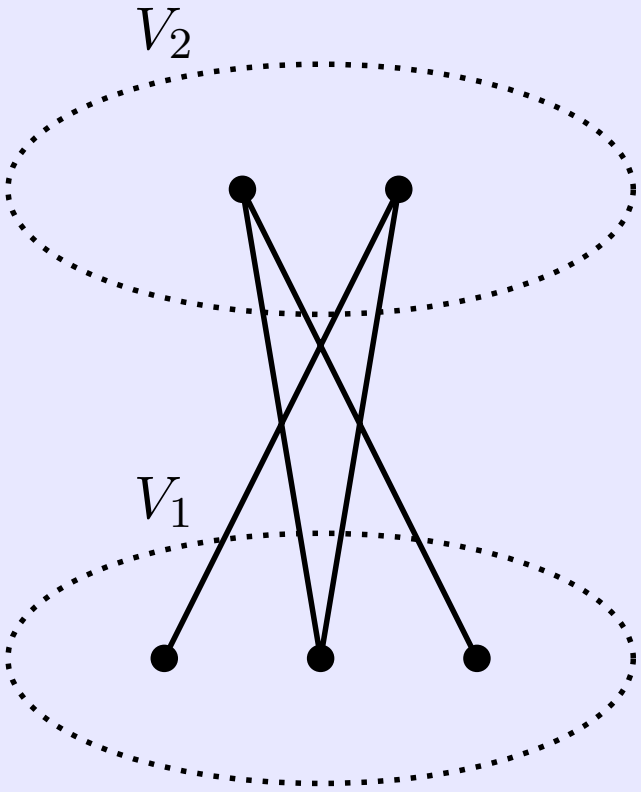
$K_{m,n}$的边数为$m\times n$。



定义11 (二部图)

设$G = \langle V, E\rangle$是简单图，
$V = V_1 \cup V_2$， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$。
若$\forall (u, v) \in E$，有$u \in V_1, v \in V_2$，
或$u \in V_2, v \in V_1$，则称G是二部图。

若$|V_1| = m, |V_2| = n$，
且$\forall u \in V_1, v \in V_2$，均有$(u, v) \in E$，
则称G是完全二部图，记为$K_{m,n}$。
$K_{m,n}$的边数为$m \times n$。



定义11（二部图）

设$G=\langle V,E\rangle$是简单图，

$V=V_1\cup V_2,\quad V_1\cap V_2=\emptyset$。

若$\forall(u,v)\in E$，有$u\in V_1,v\in V_2$，

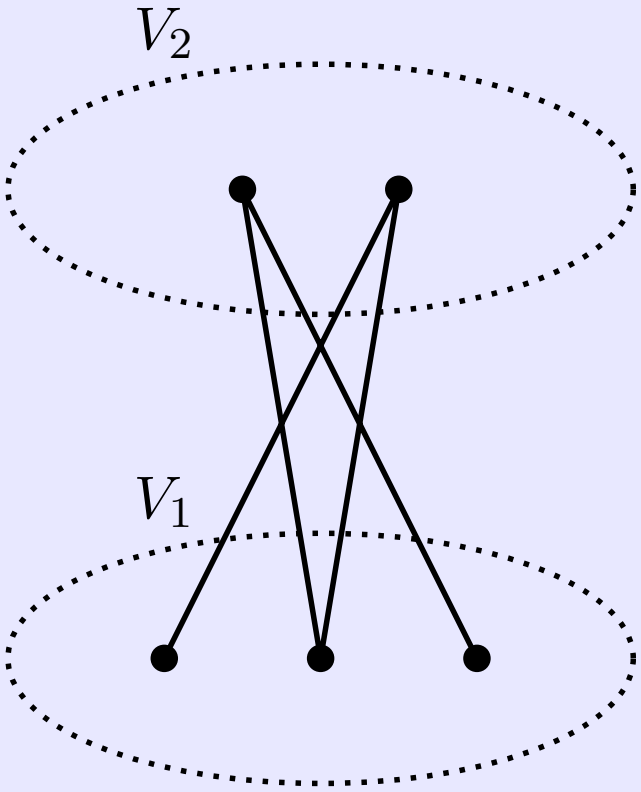
或$u\in V_2,v\in V_1$，则称G是**二部图**。

若$|V_1|=m,|V_2|=n$，

且$\forall u\in V_1,v\in V_2$，均有$(u,v)\in E$，

则称G是**完全二部图**，记为$K_{m,n}$。

$K_{m,n}$的边数为$m\times n$。



定义11（二部图）

设$G=\langle V,E\rangle$是简单图，

$V=V_1\cup V_2,\quad V_1\cap V_2=\emptyset$。

若$\forall(u,v)\in E$，有$u\in V_1,v\in V_2$，

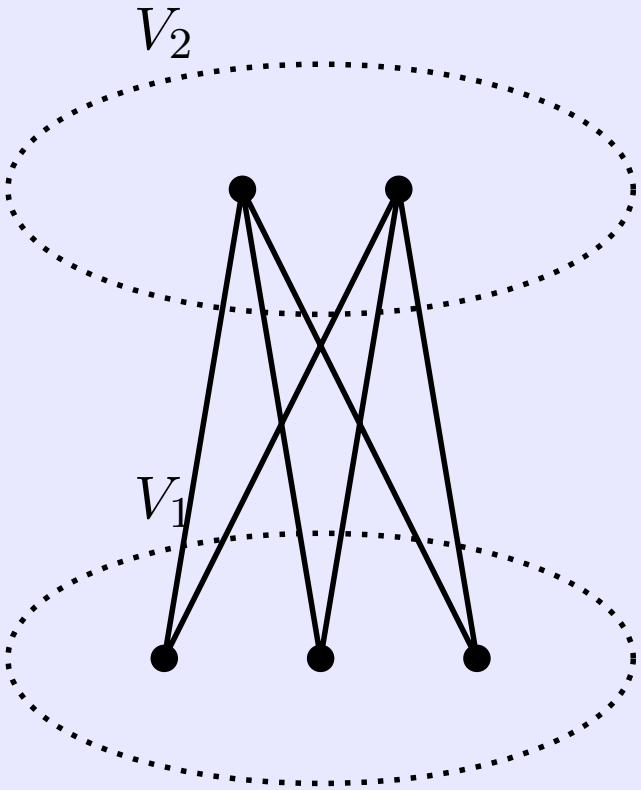
或$u\in V_2,v\in V_1$，则称G是**二部图**。

若$|V_1|=m,|V_2|=n$，

且$\forall u\in V_1,v\in V_2$，均有$(u,v)\in E$，

则称G是**完全二部图**，记为$K_{m,n}$。

$K_{m,n}$的边数为$m\times n$。



定义11 (二部图)

设$G = \langle V, E\rangle$是简单图，

$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$。

若$\forall (u, v) \in E$，有$u \in V_1, v \in V_2$，

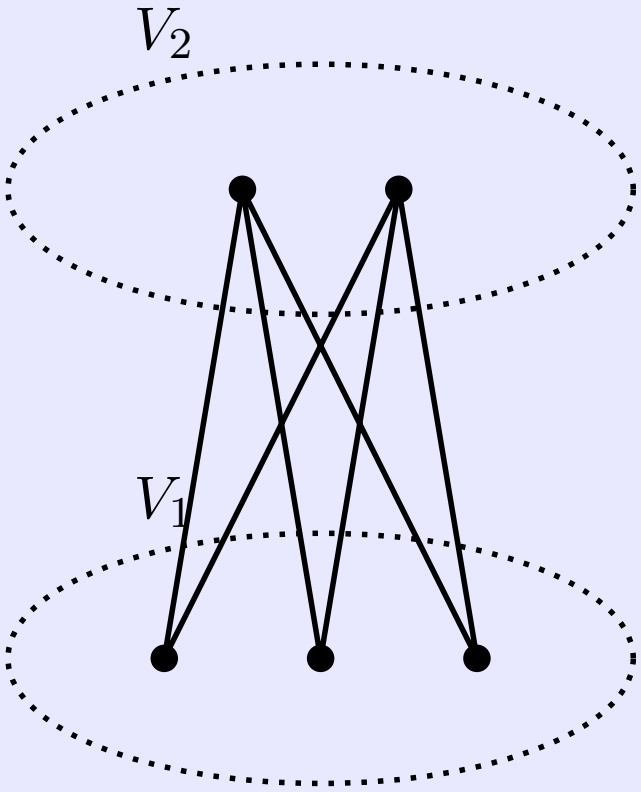
或$u \in V_2, v \in V_1$，则称G是**二部图**。

若$|V_1| = m, |V_2| = n$，

且$\forall u \in V_1, v \in V_2$，均有$(u, v) \in E$，

则称G是**完全二部图**，记为$K_{m,n}$。

$K_{m,n}$的边数为$m \times n$。

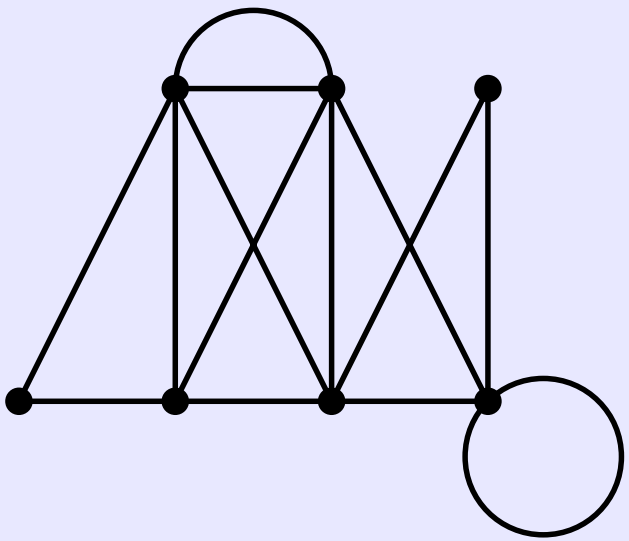


定义12 (子图)

若$G = \langle V, E \rangle, G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



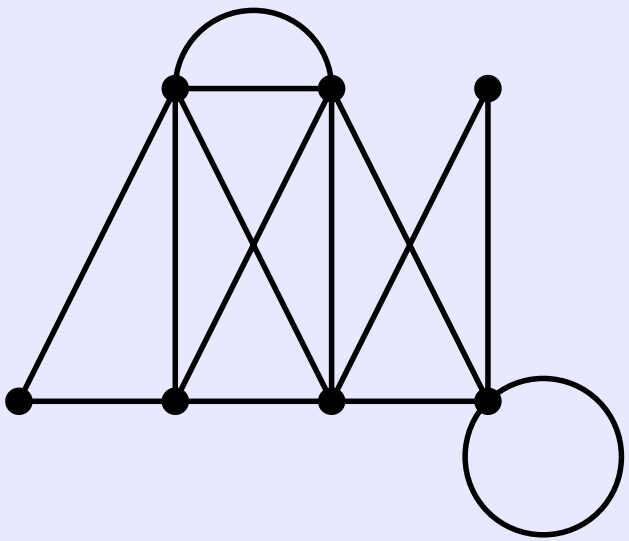
定义12 (子图)

若$G=\langle V,E\rangle, G_1=\langle V_1,E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1\subseteq V, E_1\subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1\subseteq G$。

若$G_1\subseteq G$且$G_1\neq G$，则称G_1是G的真子图



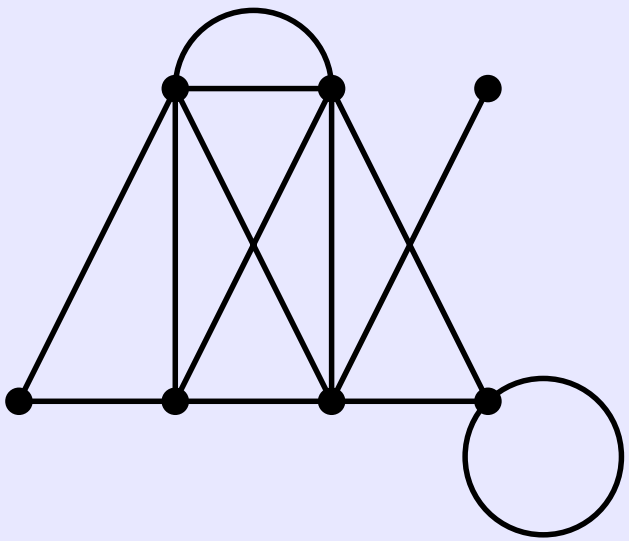
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



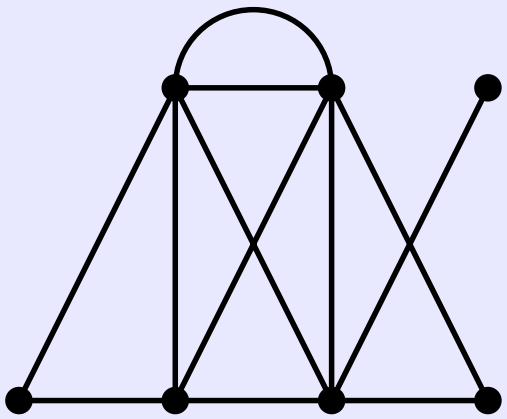
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



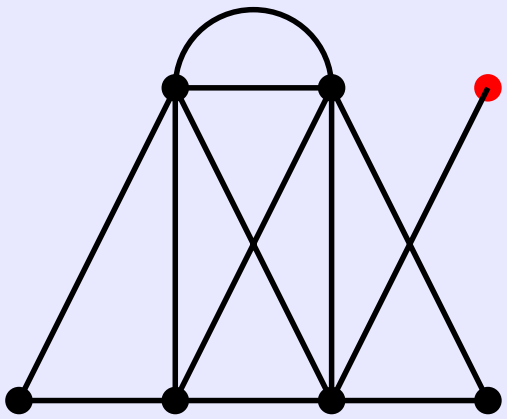
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



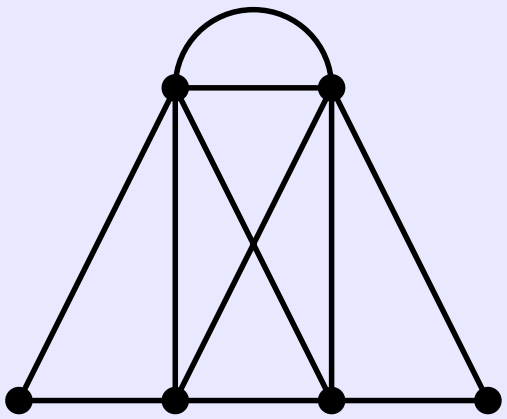
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



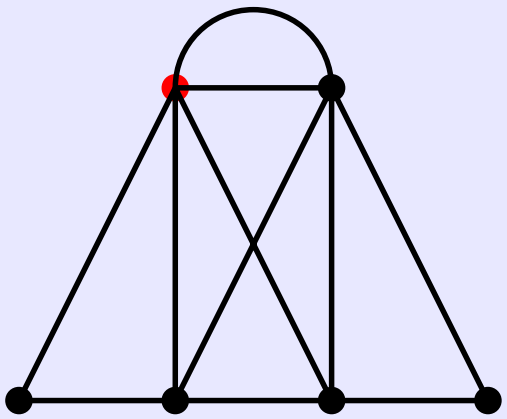
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图



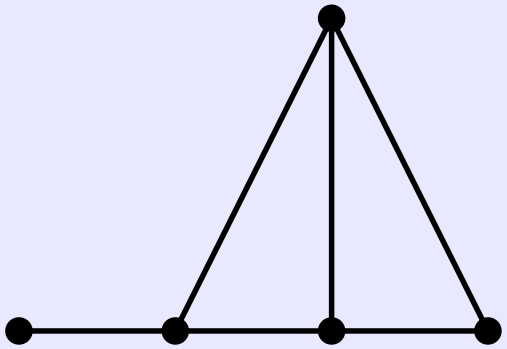
定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。

若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图

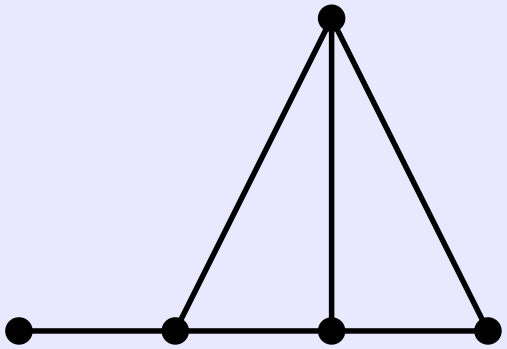


定义12 (子图)

若$G = \langle V, E\rangle, G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$是两个图，满足

$$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$$

则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。若$G_1 \subseteq G$且$G_1 \neq G$，则称G_1是G的真子图

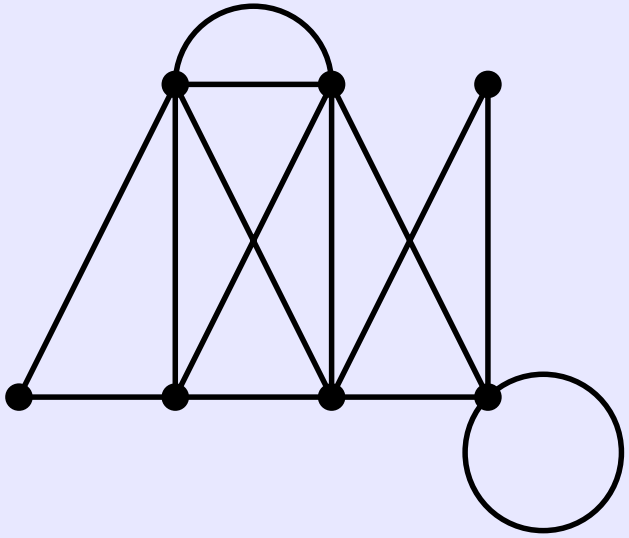


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

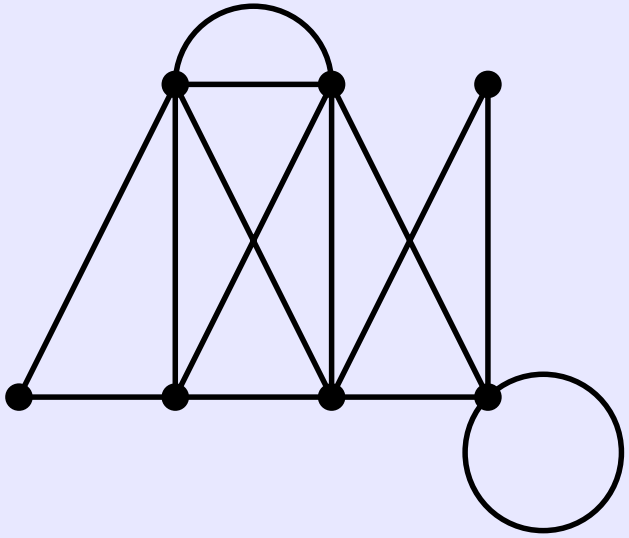


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

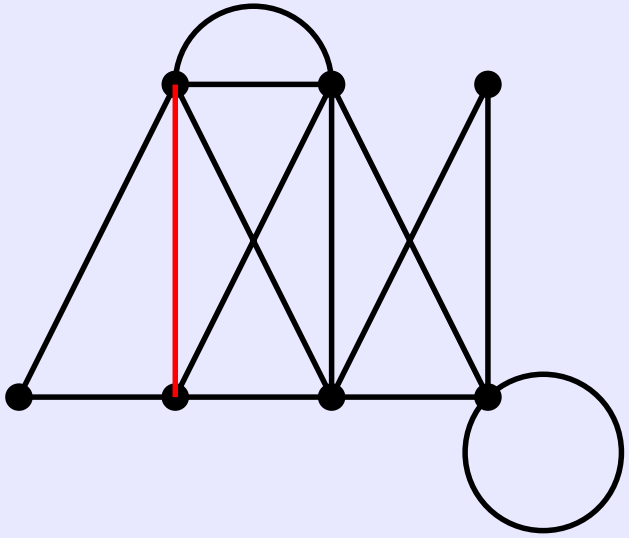


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

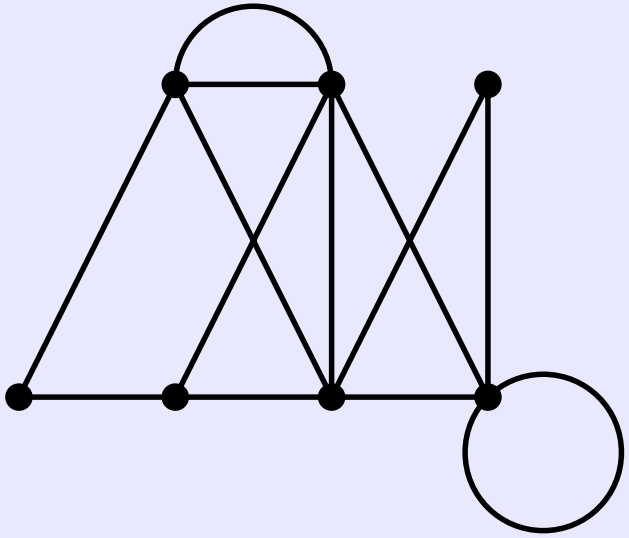


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

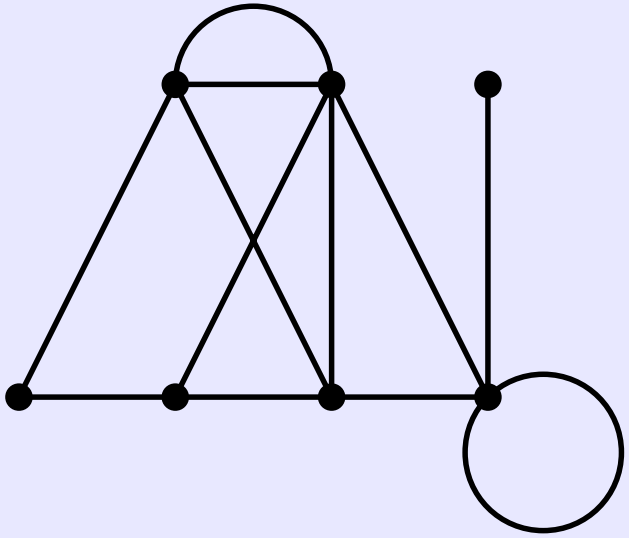


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

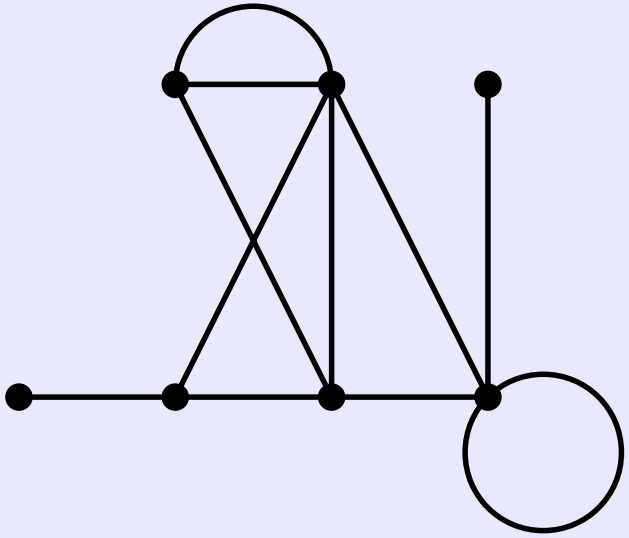


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

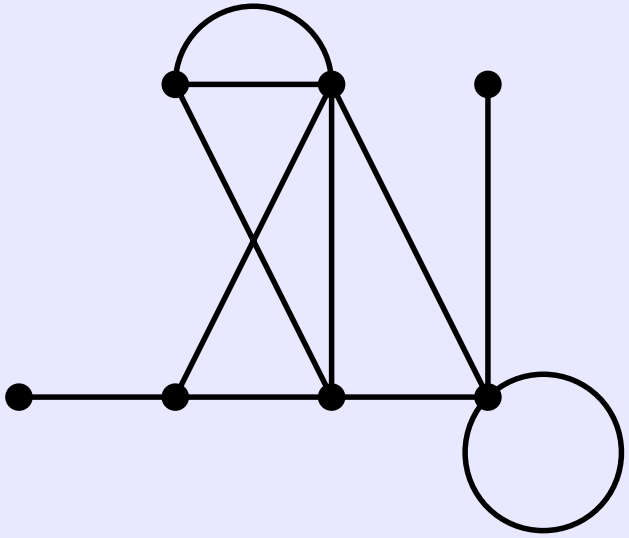


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

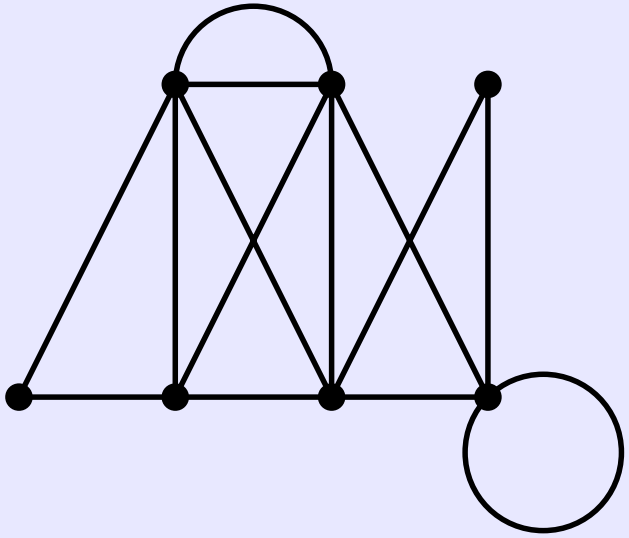


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

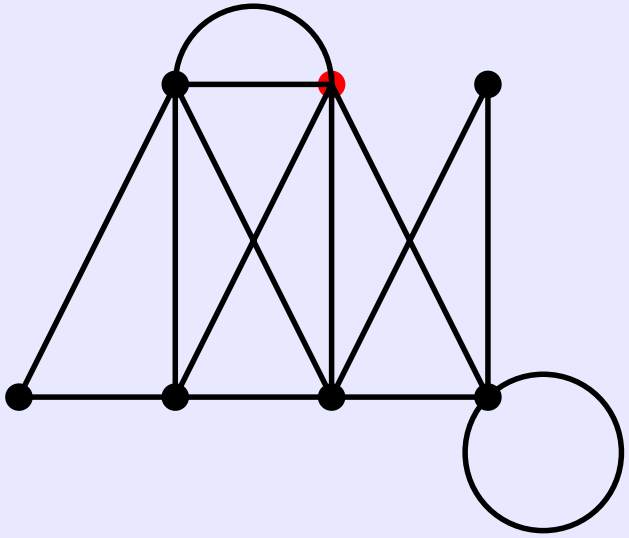


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

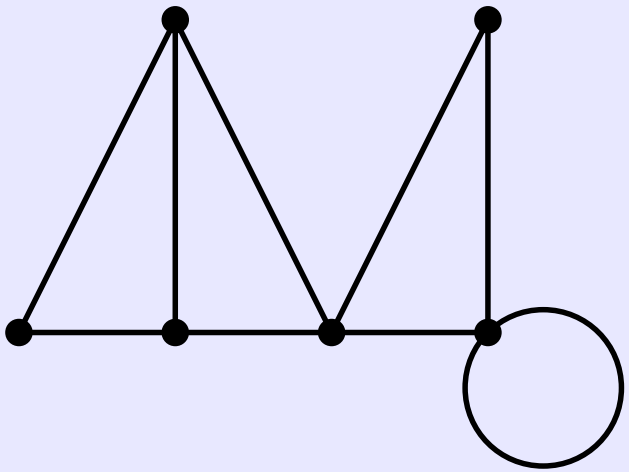


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

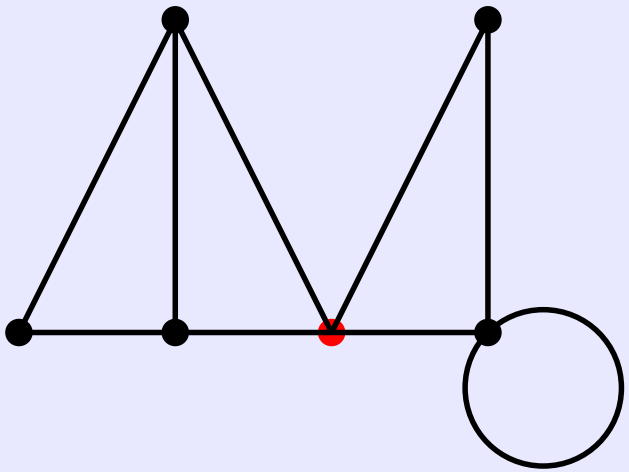


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图

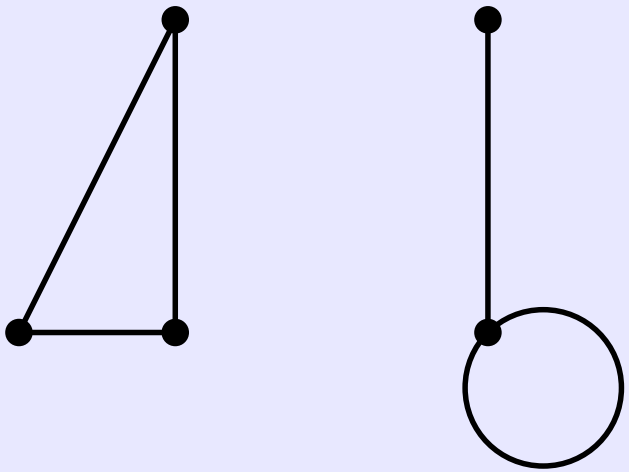


定义13 (生成、导出子图)

- 若$G_1 \subseteq G$且$V_1 = V$，则称G_1是G的生成子图
- 若$G_1 \subseteq G$且

$$E_1 = \{(u,v)|u,v \in V_1\} \cap E$$

则称G_1是G的由点子集V_1确定的导出子图



定义14

设$G=\langle V,E\rangle$,顶点子集$V_1\subseteq V$,边子集$E_1\subseteq E$

- 图G中去掉点子集V_1是表示从G中去除V_1中所有的的顶点以及与之关联的所有边后所得到的图，记为$G-V_1$。若$V_1=\{v\}$，则直接记为$G-v$;
- 图G中去掉边子集E_1表示从G中去除边子集E_1中所有的边，其他不变所得到的图，记为$G-E_1$。当$E_1=\{e\}$时，直接记为$G-e$

作业1（P190-1、6）

定义14

设$G=\langle V,E\rangle$,顶点子集$V_1\subseteq V$,边子集$E_1\subseteq E$

- 图G中去掉点子集V_1是表示从G中去除V_1中所有的的顶点以及与之关联的所有边后所得到的图，记为$G-V_1$。若$V_1=\{v\}$，则直接记为$G-v$;
- 图G中去掉边子集E_1表示从G中去除边子集E_1中所有的边，其他不变所得到的图，记为$G-E_1$。当$E_1=\{e\}$时，直接记为$G-e$

作业1 (P190-1、6)

定义14

设$G=\langle V,E\rangle$,顶点子集$V_1\subseteq V$,边子集$E_1\subseteq E$

- 图G中去掉点子集V_1是表示从G中去除V_1中所有的的顶点以及与之关联的所有边后所得到的图，记为$G-V_1$。若$V_1=\{v\}$，则直接记为$G-v$;
- 图G中去掉边子集E_1表示从G中去除边子集E_1中所有的边，其他不变所得到的图，记为$G-E_1$。当$E_1=\{e\}$时，直接记为$G-e$

作业1 (P190-1、6)

定义14

设$G=\langle V,E\rangle$,顶点子集$V_1\subseteq V$,边子集$E_1\subseteq E$

- 图G中去掉点子集V_1是表示从G中去除V_1中所有的的顶点以及与之关联的所有边后所得到的图，记为$G-V_1$。若$V_1=\{v\}$，则直接记为$G-v$;
- 图G中去掉边子集E_1表示从G中去除边子集E_1中所有的边，其他不变所得到的图，记为$G-E_1$。当$E_1=\{e\}$时，直接记为$G-e$

作业1 (P190-1、6)

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

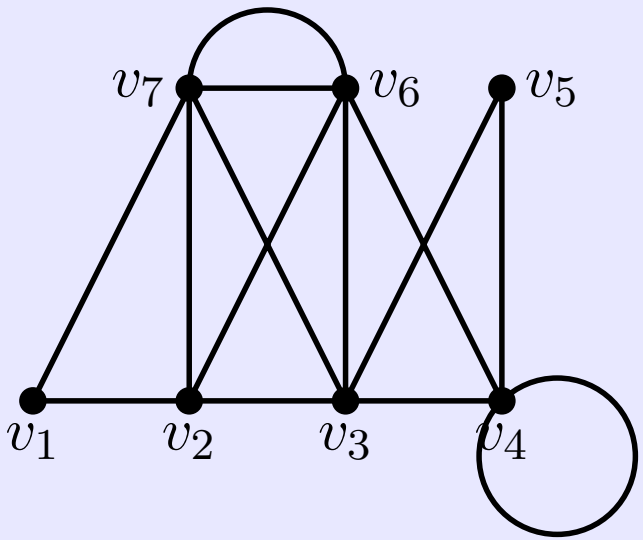
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

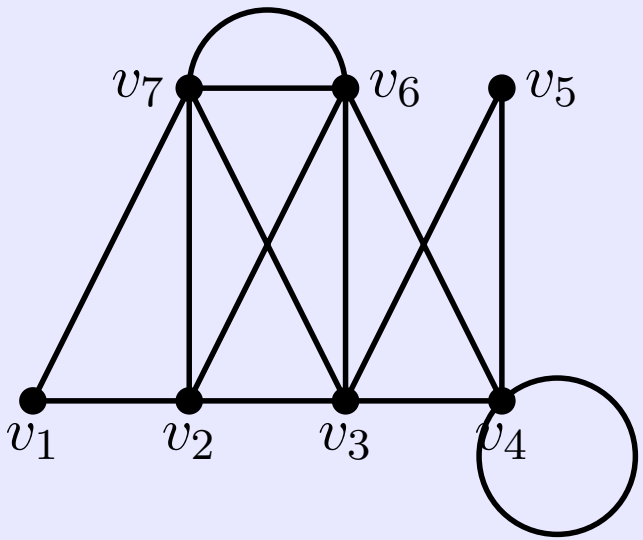
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

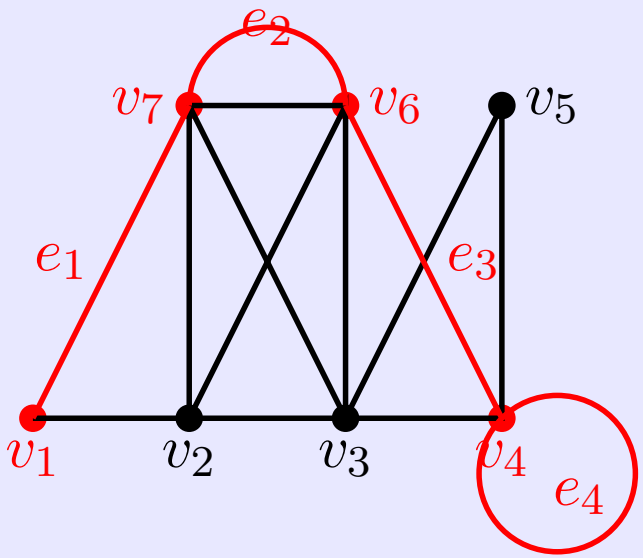
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

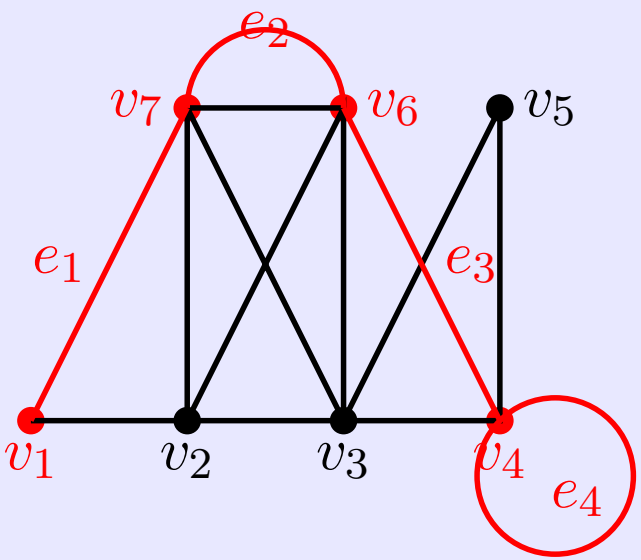
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



$$(v_1,e_1,v_7,e_2,v_6,e_3,v_4,e_4,v_4)$$

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的**通道**，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

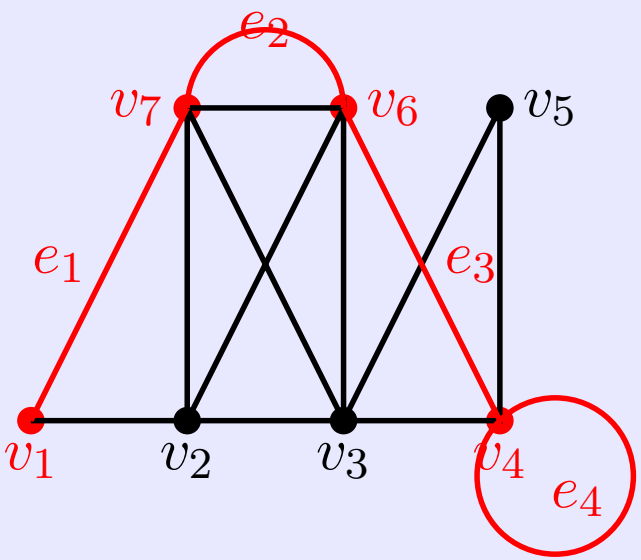
若$v_0=v_n$，则称其为**闭通道**；

若$v_0\neq v_n$，则称其是**开通道**。

通道中边的条数称为**通道的长度**

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



$$(v_1,e_1,v_7,e_2,v_6,e_3,v_4,e_4,v_4)$$

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

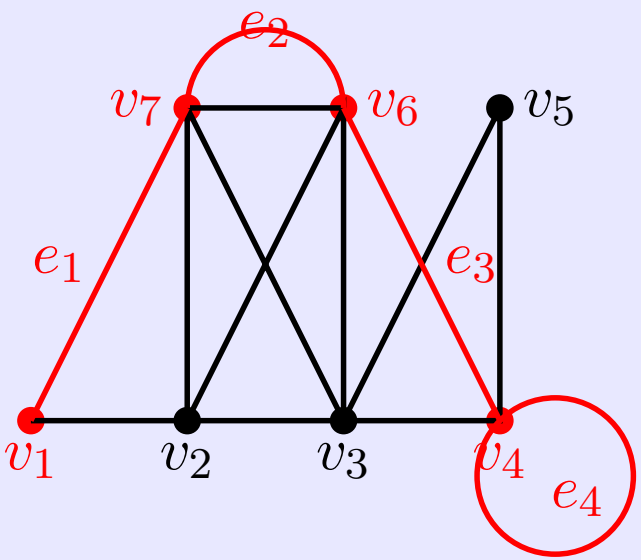
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



$$(v_1,e_1,v_7,e_2,v_6,e_3,v_4,e_4,v_4)$$

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

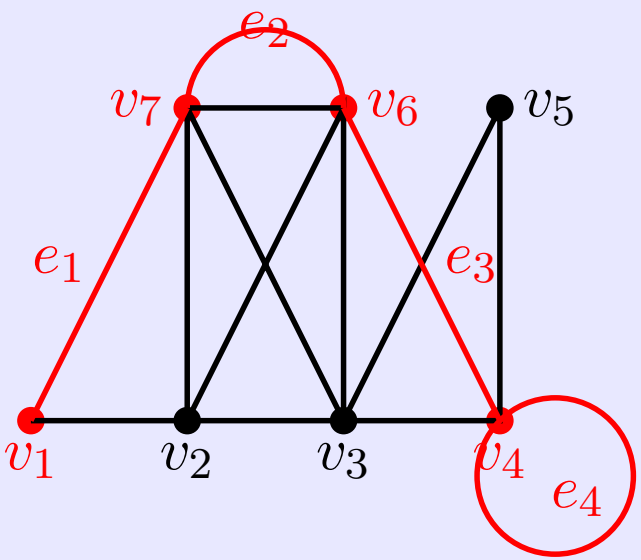
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



$(v_1,e_1,v_7,e_2,v_6,e_3,v_4,e_4,v_4)$

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

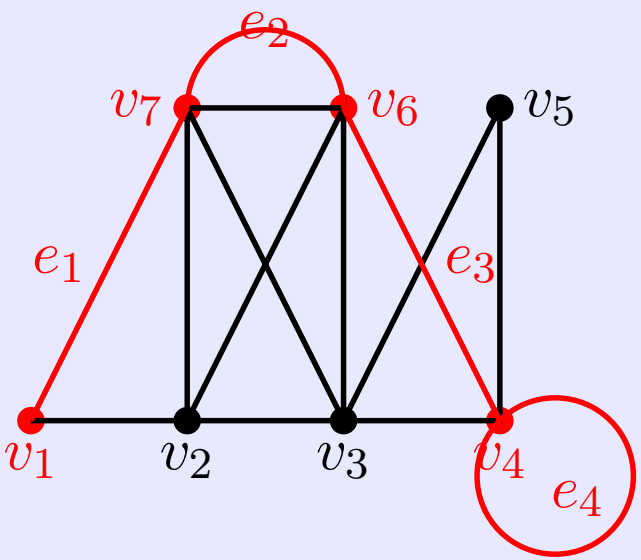
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



(e_1,e_2,e_3,e_4)

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

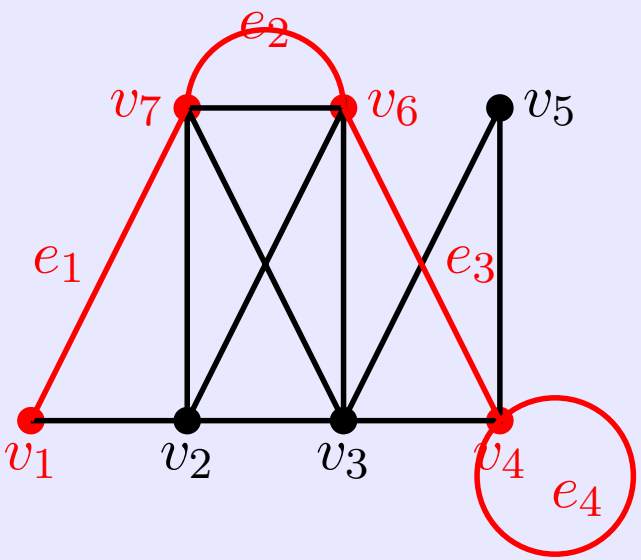
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



(e_1,e_2,e_3,e_4)

定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

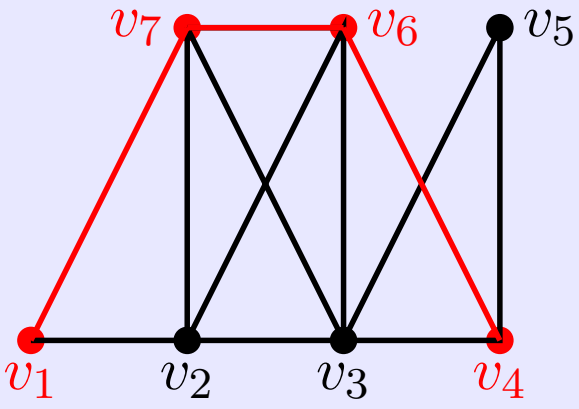
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



定义15 (通道)

设$G=\langle V,E\rangle$是图，G的点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\cdots,v_{n-1},e_n,v_n)$被称为$G$的通道，其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$.

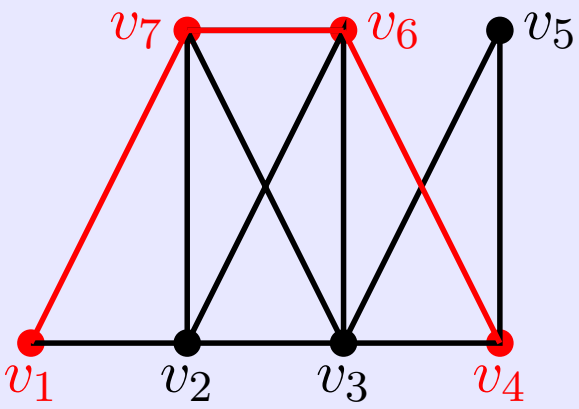
若$v_0=v_n$，则称其为闭通道；

若$v_0\neq v_n$，则称其是开通道。

通道中边的条数称为通道的长度

通道也可以用边序列表示

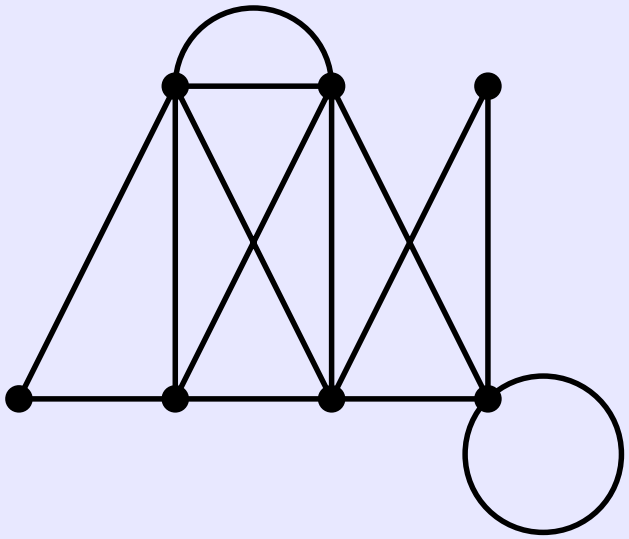
在简单图中，也可以用顶点序列表示通道



(v_1,v_7,v_6,v_4)

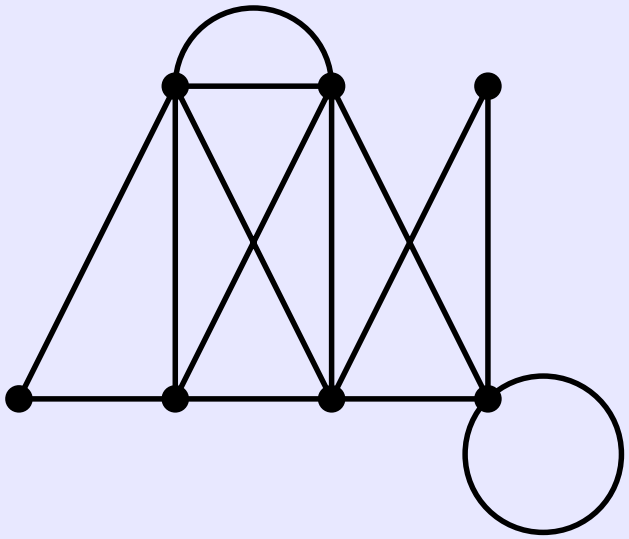
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



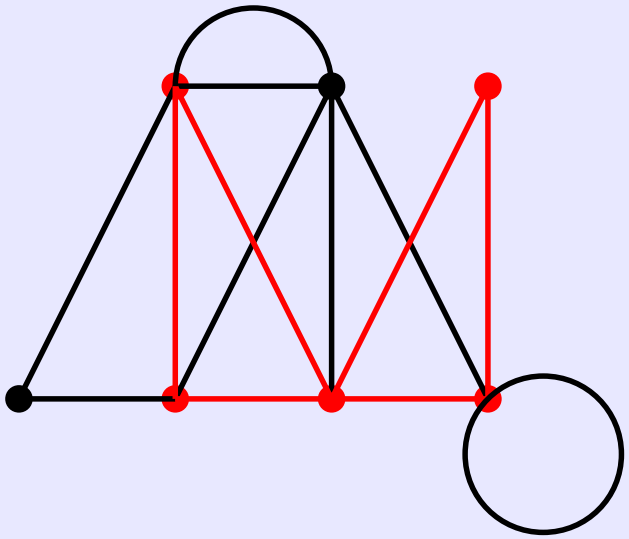
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



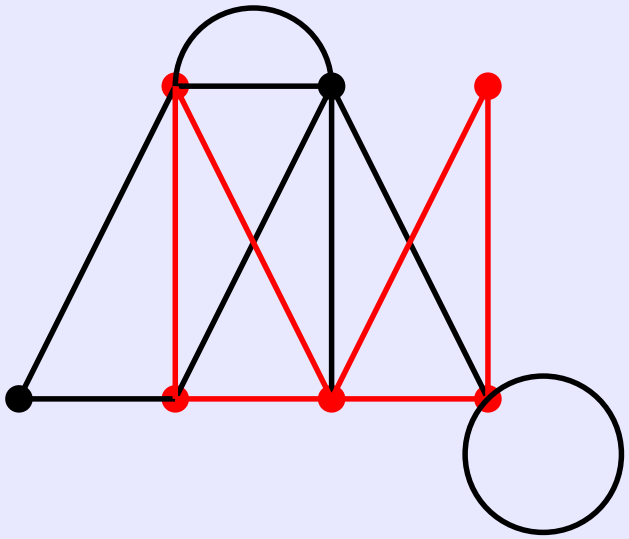
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



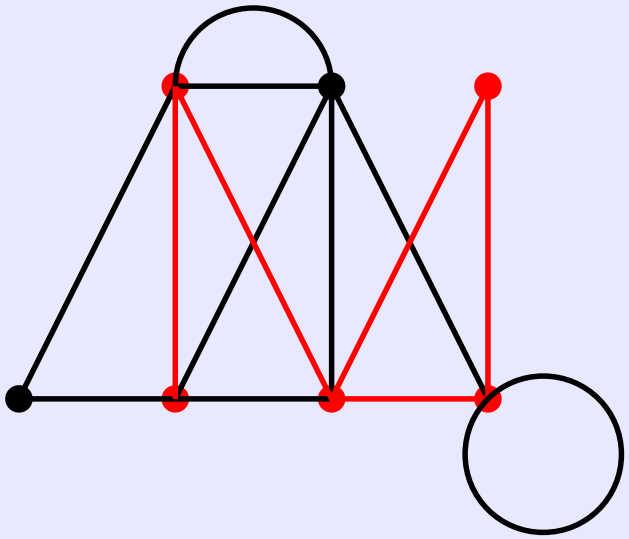
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



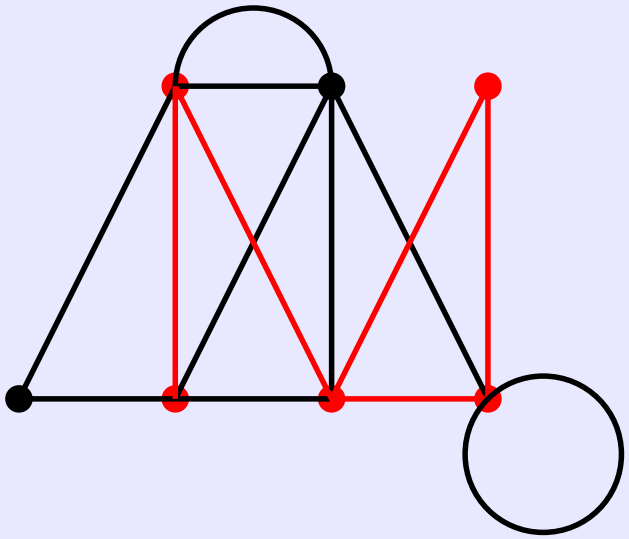
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



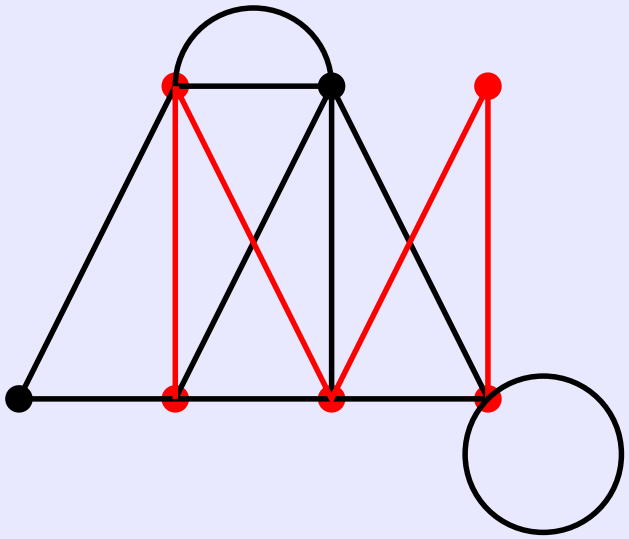
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



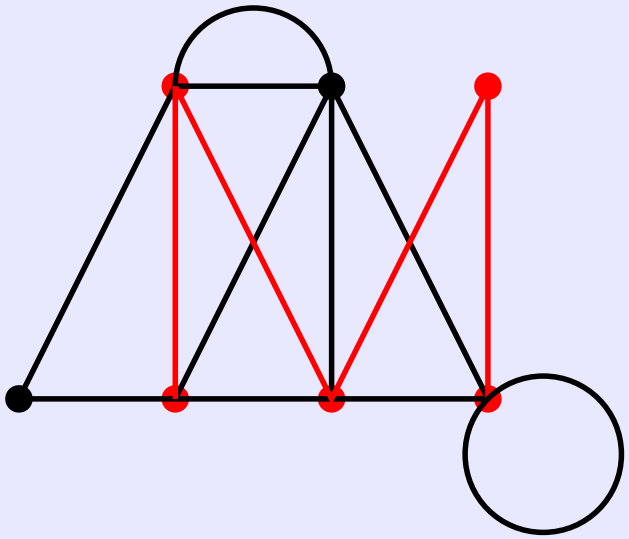
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



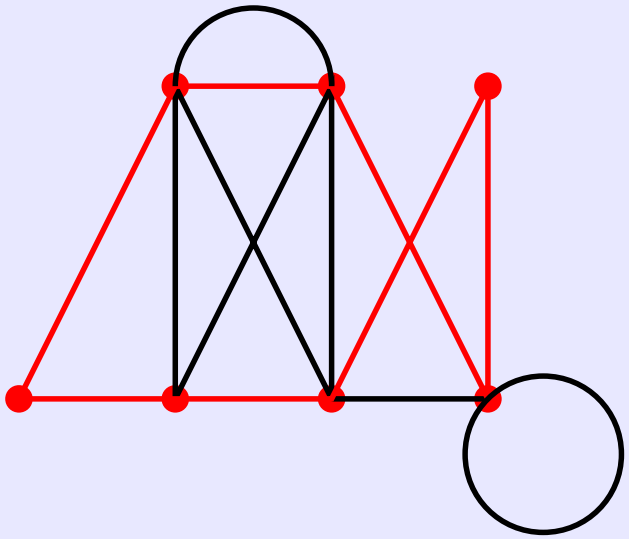
定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



定义16 (迹、路)

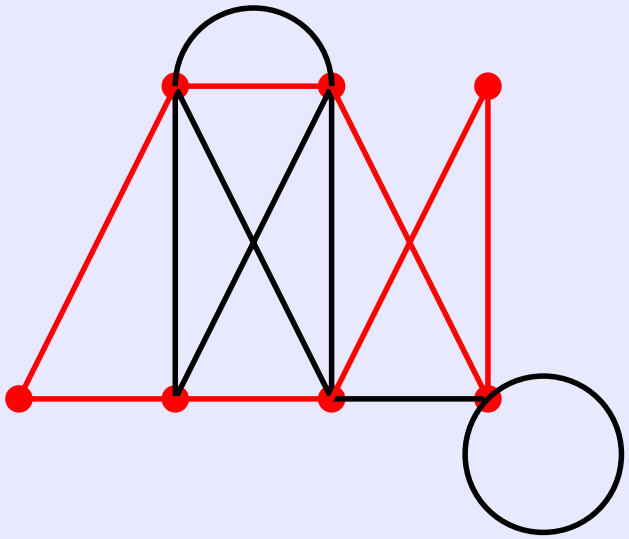
- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；
- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



定义16 (迹、路)

- 若闭通道上的边各不相同，则称其是闭迹；
- 若开通道上的边各不相同，则称其是开迹；开迹、闭迹统称为迹；
- 若开通道上的顶点各不相同，则称其是开路；
- 若闭通道上的点除首尾两点以外各不相同，则称其是回路；开路、回路统称路；

- 若一条开(回)路经过所有的点，则称其是生成开(回)路



例2 (如果非零图G中没有奇点，则G中必有回路。)

定理3 (在p阶图G中，若顶点$v, w(v \neq w)$有通道相连，则v, w之间存在长度不超过$p-1$的路。)

推论2 (在p阶图G中，若存在通过顶点v的闭通道，则必存在过v的长度不超过p的回路。)

例2 (如果非零图G中没有奇点，则G中必有回路。)

定理3 (在p阶图G中，若顶点$v, w(v \neq w)$有通道相连，则v, w之间存在长度不超过$p-1$的路。)

推论2 (在p阶图G中，若存在通过顶点v的闭通道，则必存在过v的长度不超过p的回路。)

例2 (如果非零图G中没有奇点，则G中必有回路。)

定理3 (在p阶图G中，若顶点$v, w(v \neq w)$有通道相连，则v, w之间存在长度不超过$p-1$的路。)

推论2 (在p阶图G中，若存在通过顶点v的闭通道，则必存在过v的长度不超过p的回路。)

练习4

证明或否定:

- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的通道，则G必有回路;
- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的路，则G必有回路;

作业2 (P195-2)

练习4

证明或否定:

- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的通道，则G必有回路;
- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的路，则G必有回路;

作业2 (P195-2)

练习4

证明或否定:

- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的通道，则G必有回路;
- 简单图G中有从点u到点v的两条不同的路，则G必有回路;

作业2 (P195-2)

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E\rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义17 (距离)

对于图$G = \langle V, E \rangle$中的任意两点u, v，从u到v的长度最短的路称为u, v之间的短程线

- 短程线的长度称为u, v之间的距离，记为$d(u, v)$
- 如u, v无通道相连，则记$d(u, v) = \infty$

1. 非负性: $d(u, v) \geq 0$,$u = v$时等号成立
2. 对称性: $d(u, v) = d(v, u)$
3. 三角不等式: $\forall u, v, w \in V$,

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

若$\forall u, v \in V$，均有$u \sim v$，则称G是连通图，否则称为非连通图

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

若$\forall u, v \in V$，均有$u \sim v$，则称G是连通图，否则称为非连通图

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

若$\forall u, v \in V$，均有$u \sim v$，则称G是连通图，否则称为非连通图

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

若$\forall u, v \in V$，均有$u \sim v$，则称G是连通图，否则称为非连通图

定义18 (连通)

设图$G = \langle V, E \rangle$，$u, v \in V, u \neq v$。

- 若G中存在u到v的通道，则称u, v连通，记为$u \sim v$；
- 若G中不存在u到v的通道，则称u, v不连通；
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$

定义19 (连通图)

若$\forall u, v \in V$，均有$u \sim v$，则称G是连通图，否则称为非连通图

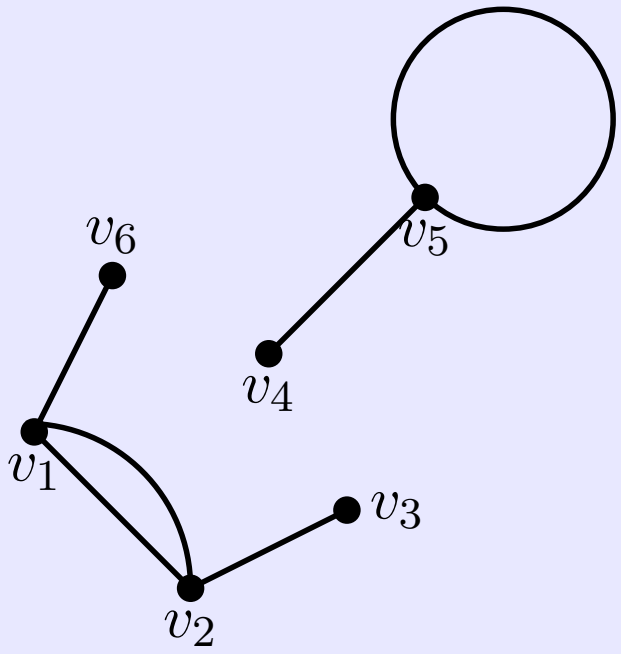
连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。

定义20（非连通图的极大连通子图称为连通分图）

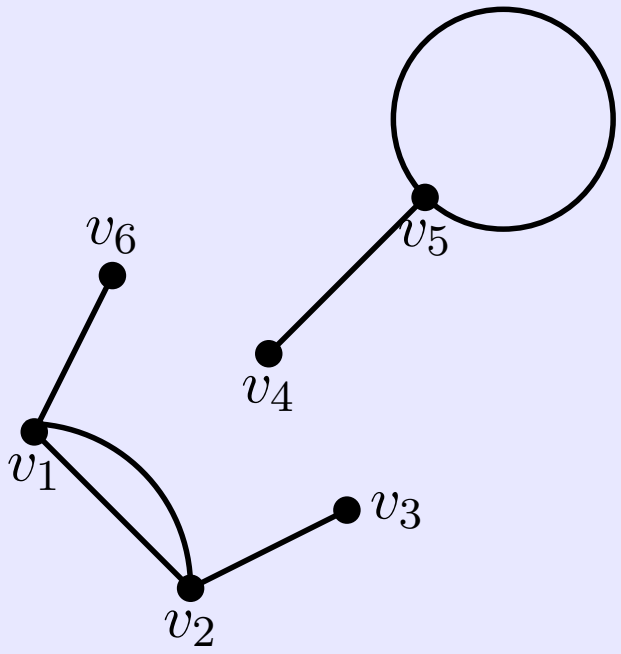
定理4（图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并）



连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。



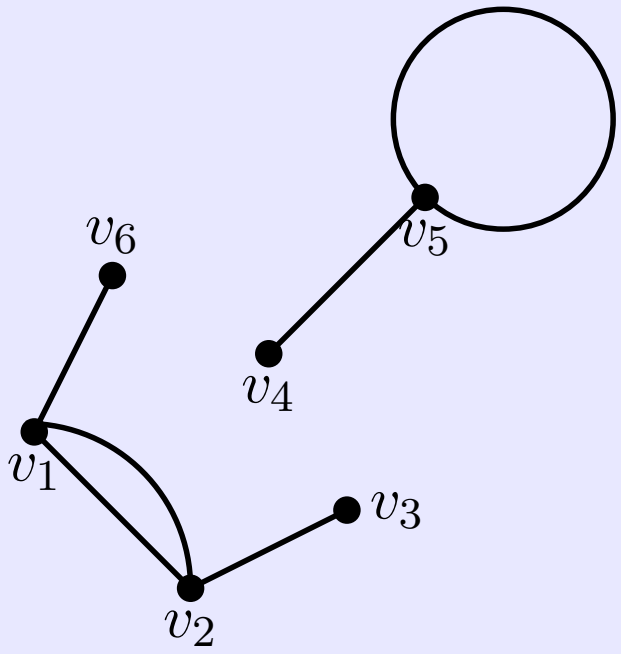
定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)

连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。



定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)

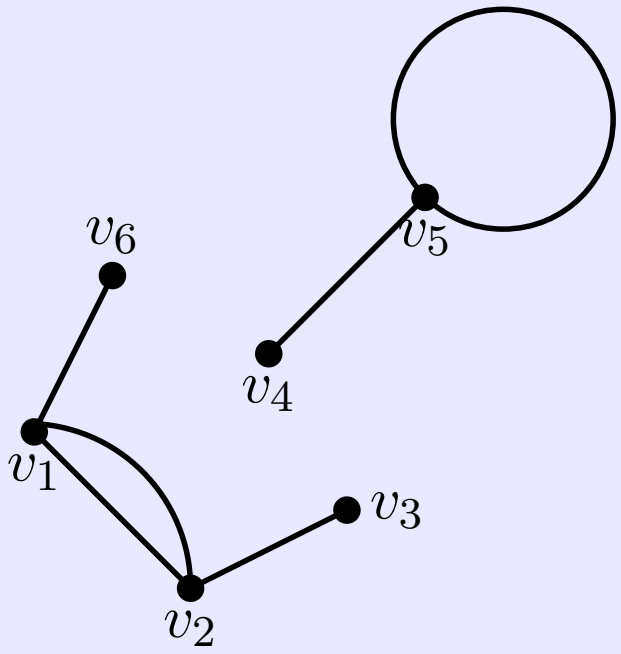
连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系$\sim$是V上的等价关系。

定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

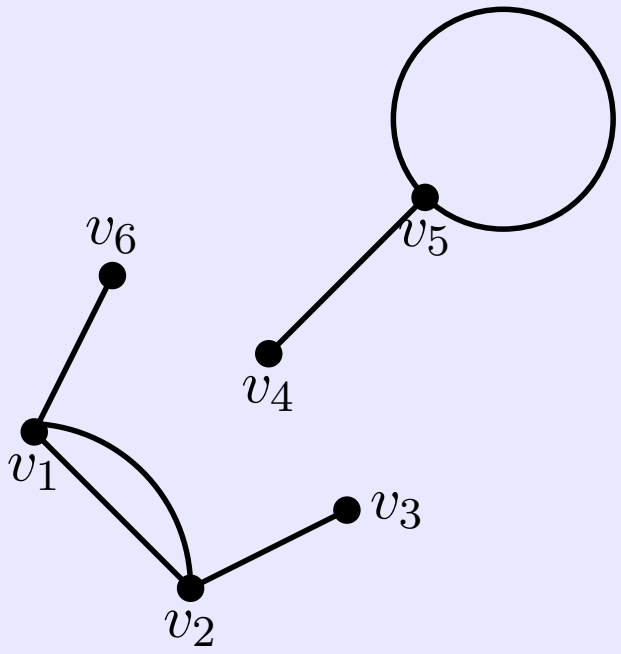
定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)



连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。



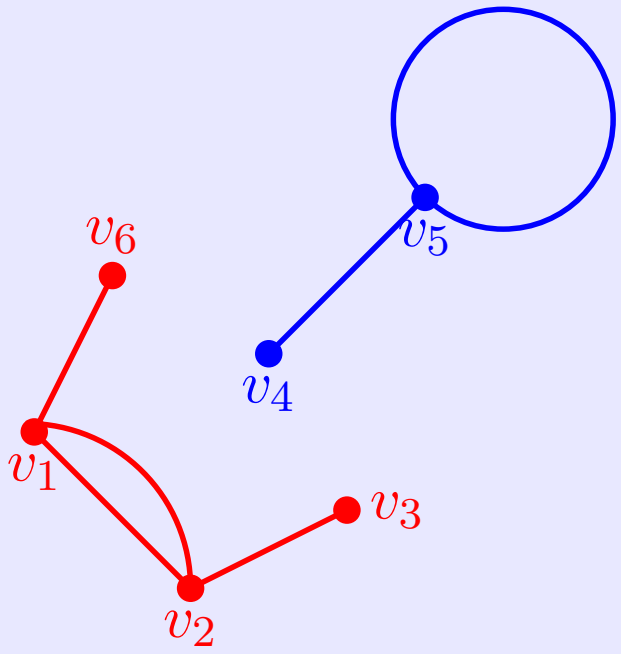
定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)

连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。



定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)

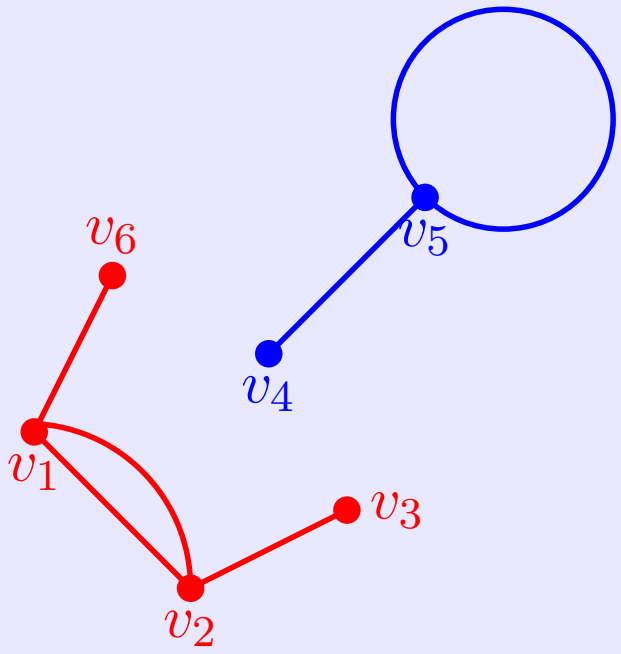
连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。

定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)



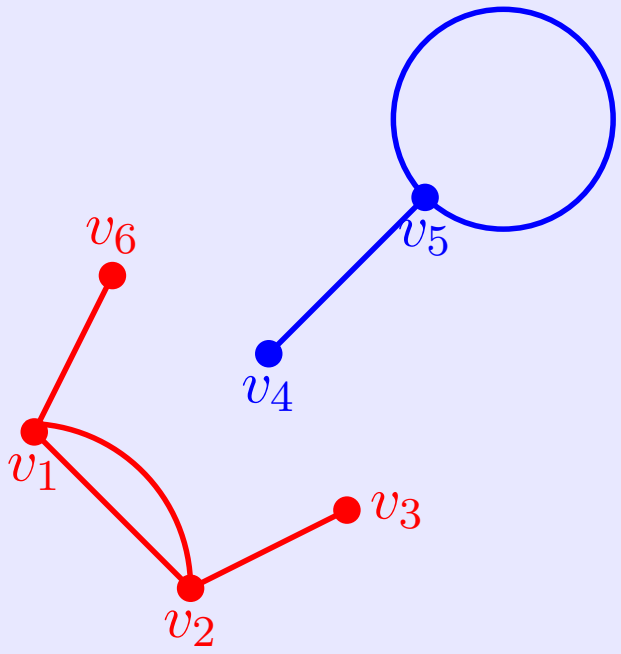
连通关系的性质

1. $\forall u \in V, u \sim u$
2. 若$u \sim v$，则$v \sim u$
3. 若$u \sim v, v \sim w$，则$u \sim w$

连通关系~是V上的等价关系。

定义20 (非连通图的极大连通子图称为连通分图)

定理4 (图可以唯一地划分为其连通分图的不相交的并)



- G连通的充要条件：G只有一个连通分图。
- 点u, v连通的充要条件：u, v在同一个连通分图中。

- G连通的充要条件：G只有一个连通分图。
- 点u, v连通的充要条件：u, v在同一个连通分图中。

- G连通的充要条件：G只有一个连通分图。
- 点u, v连通的充要条件：u, v在同一个连通分图中。

- G连通的充要条件：G只有一个连通分图。
- 点u, v连通的充要条件：u, v在同一个连通分图中。

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理5

1. 图中若恰有2个奇点，则这两个奇点必定连通；
2. 在p阶简单图中，如

$$d(u)+d(v)\geq p-1,\forall u,v\in V$$

   则G是连通图；
3. 在p阶简单图中，若$\delta(G)\geq\frac{p-1}{2}$，则$G$是连通图
4. (p,q)简单图G若有k个连通分图，则$q\leq\frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$
5. (p,q)简单图中，若$q>\frac{(p-1)(p-2)}{2}$，则其必是连通图

定理6 (若(p,q)图G是连通图，则$q \geq p-1$)

例3

简单图$G=\langle V,E\rangle$是二部图的充要条件是G中没有长度为奇数的回路。

定理6 (若(p,q)图G是连通图，则$q \geq p-1$)

例3

简单图$G=\langle V,E\rangle$是二部图的充要条件是G中没有长度为奇数的回路。

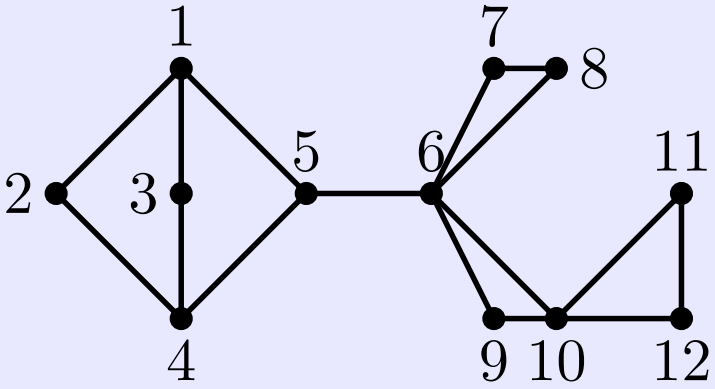
定义21 (点割集,割点)

设$G = \langle V, E \rangle$，点子集$V_1 \subseteq V$。若

1. $G - V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2 \subset V_1, G - V_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1 = \{v\}$时,称v是G的割点.



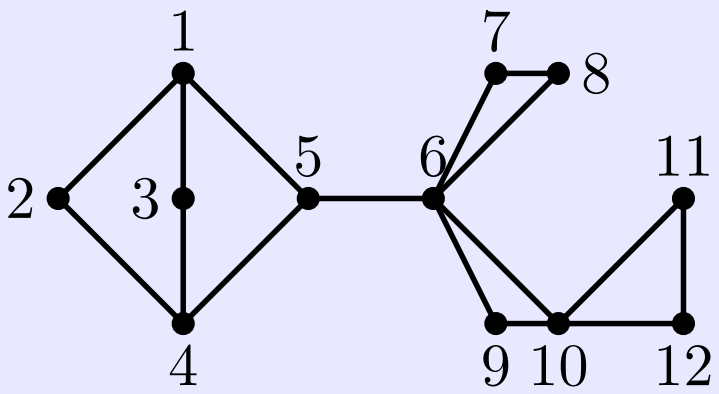
定义21 (点割集,割点)

设$G = \langle V, E \rangle$，点子集$V_1 \subseteq V$。若

1. $G - V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2 \subset V_1$,$G - V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1 = \{v\}$时,称v是G的割点.



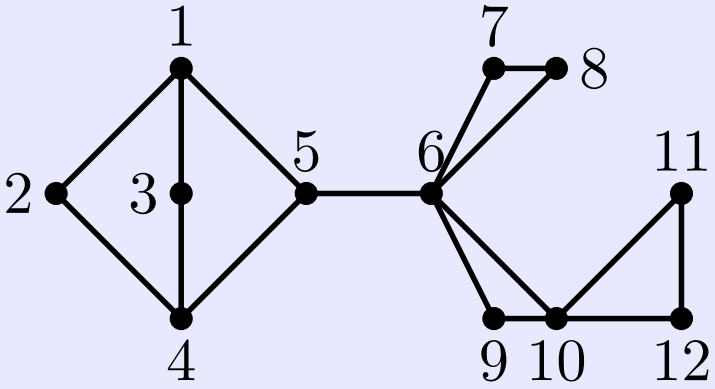
定义21 (点割集,割点)

设$G = \langle V, E \rangle$，点子集$V_1 \subseteq V$。若

1. $G - V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2 \subset V_1, G - V_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1 = \{v\}$时,称v是G的割点.



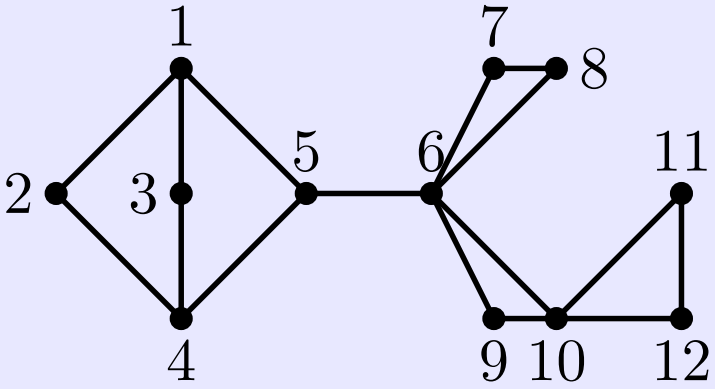
定义21 (点割集,割点)

设$G = \langle V, E \rangle$，点子集$V_1 \subseteq V$。若

1. $G - V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2 \subset V_1$,$G - V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1 = \{v\}$时,称v是G的割点.



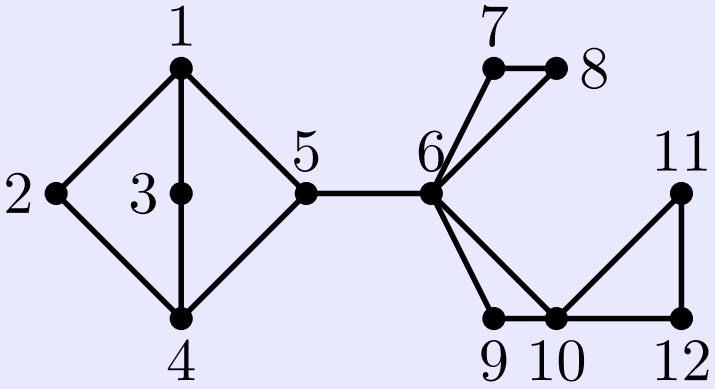
定义21 (点割集,割点)

设$G = \langle V, E \rangle$，点子集$V_1 \subseteq V$。若

1. $G - V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2 \subset V_1$,$G - V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的**点割集**.

当$V_1 = \{v\}$时,称v是G的**割点**.



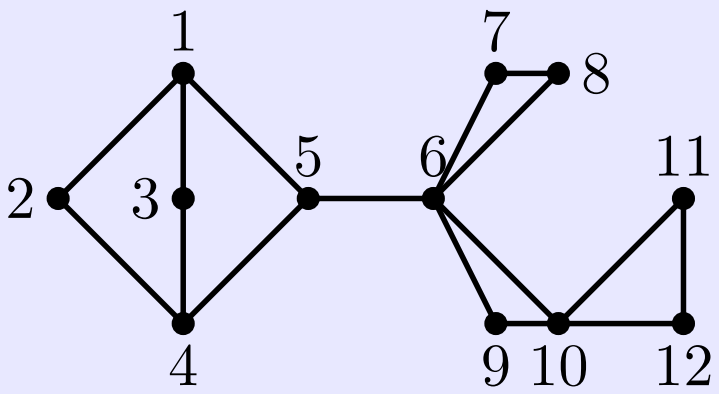
定义21 (点割集,割点)

设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.



定义21 (点割集,割点)

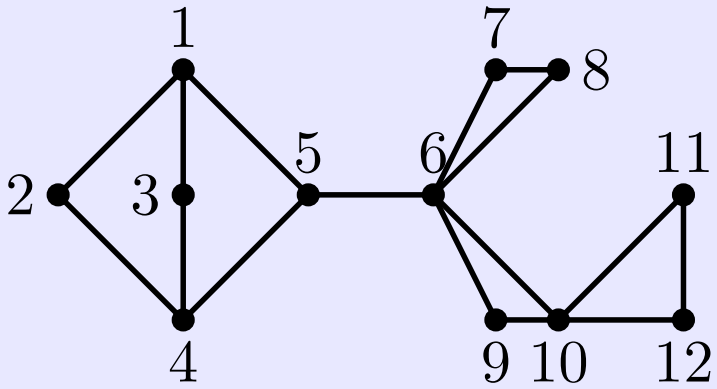
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

点子集$\{1,9\}$



定义21 (点割集,割点)

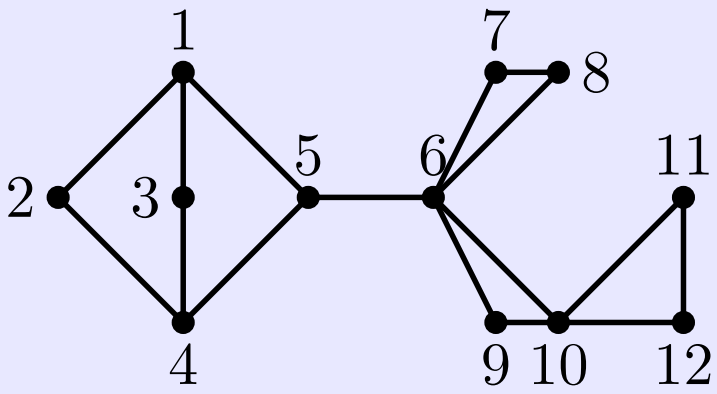
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

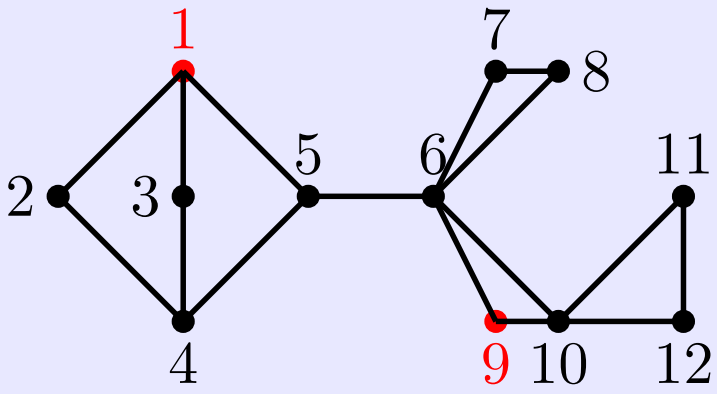
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

点子集$\{1,9\}$





定义21 (点割集,割点)

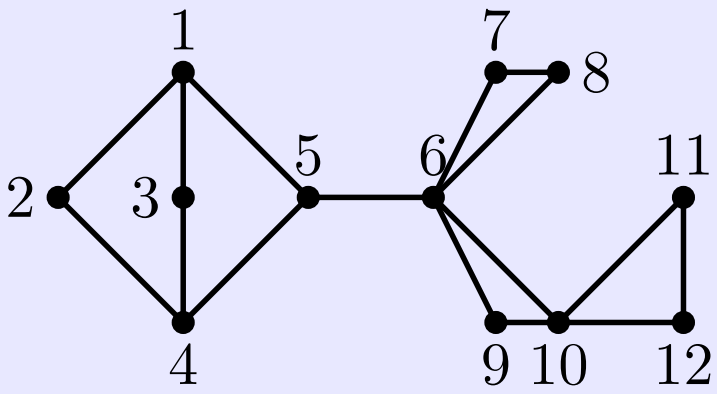
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

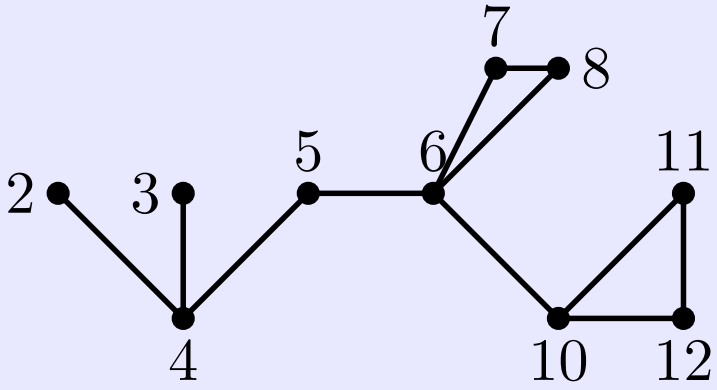
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

点子集$\{1,9\}$





定义21 (点割集,割点)

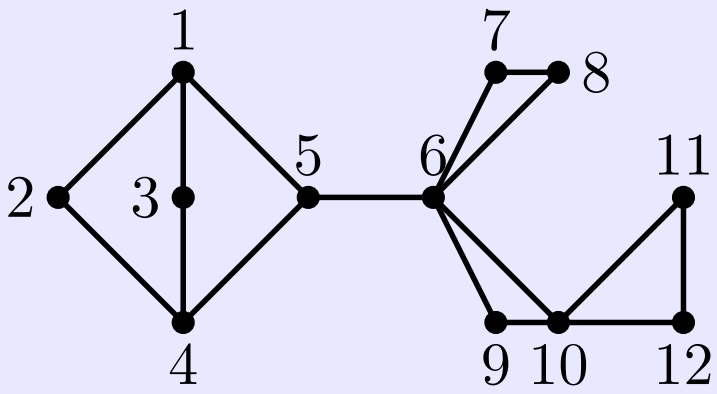
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

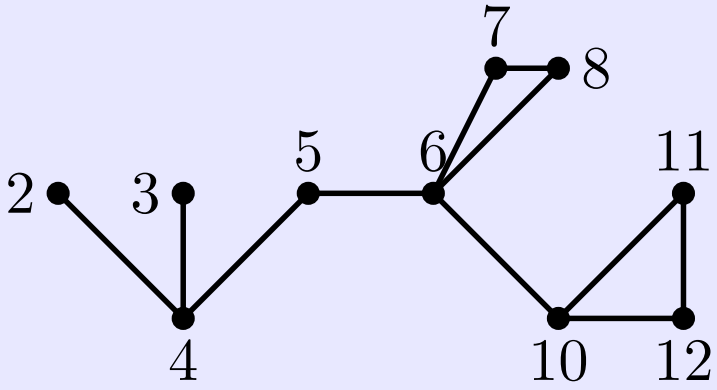
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

点子集$\{1,9\}$　不是





定义21 (点割集,割点)

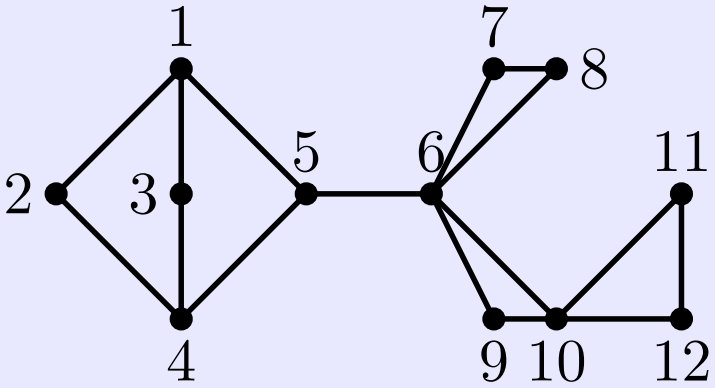
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{4,5\}$



定义21 (点割集,割点)

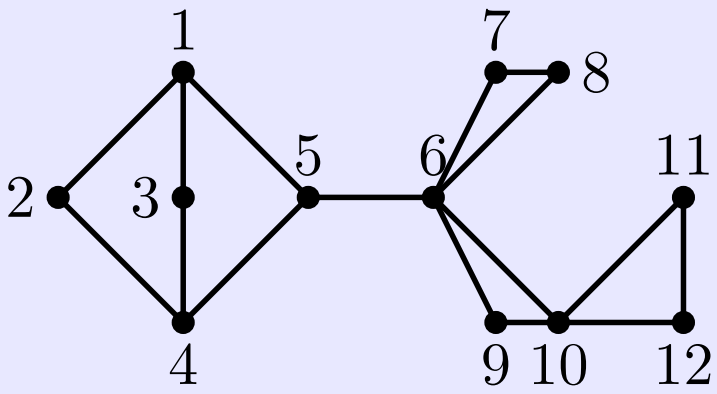
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

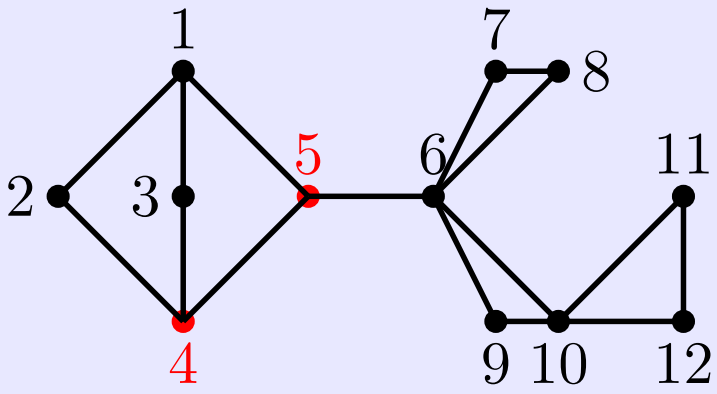
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{4,5\}$





定义21 (点割集,割点)

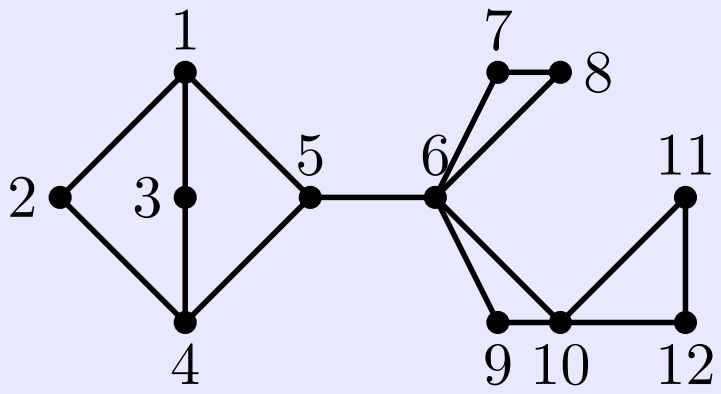
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

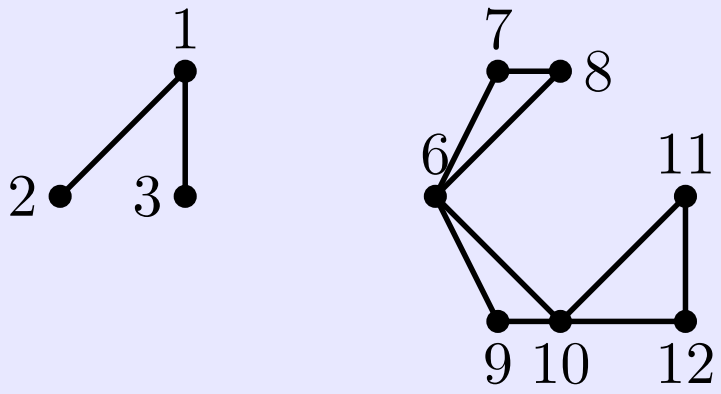
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{4,5\}$





定义21 (点割集,割点)

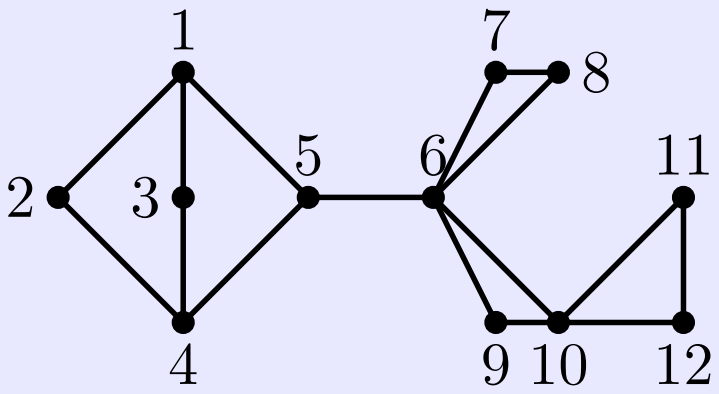
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

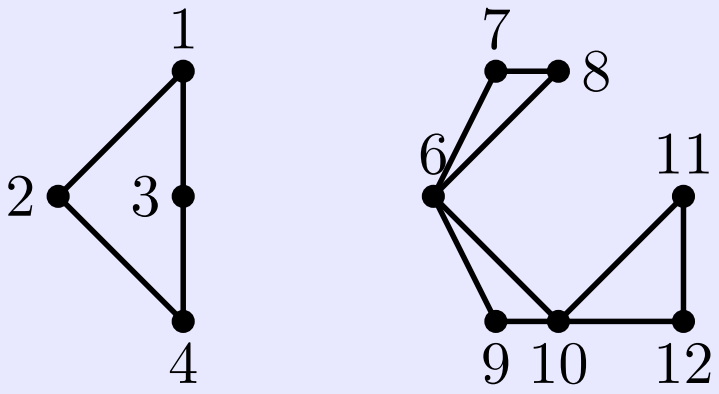
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{4,5\}$





定义21 (点割集,割点)

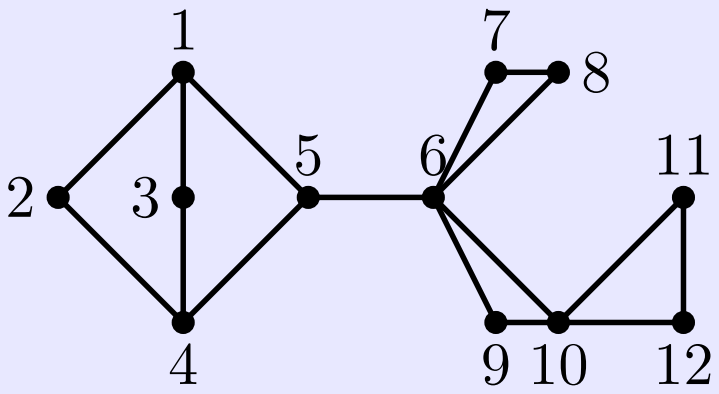
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

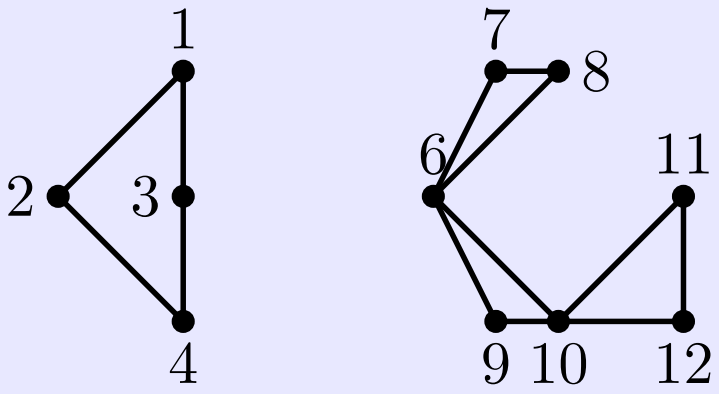
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{4,5\}$ 不是





定义21 (点割集,割点)

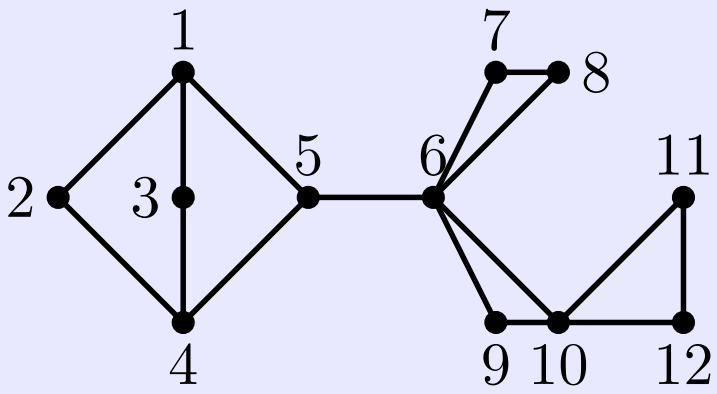
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

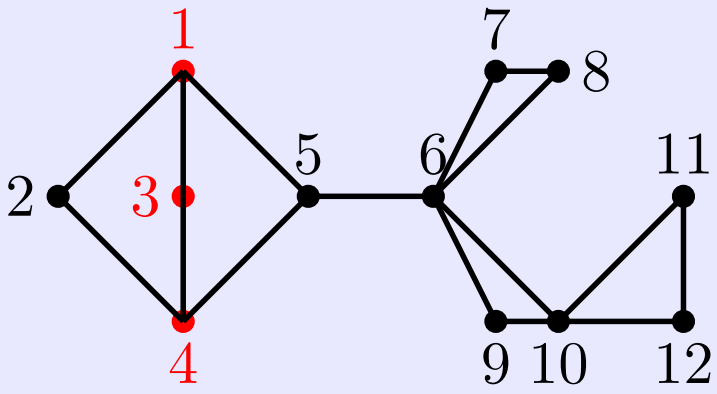
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,3,4\}$





定义21 (点割集,割点)

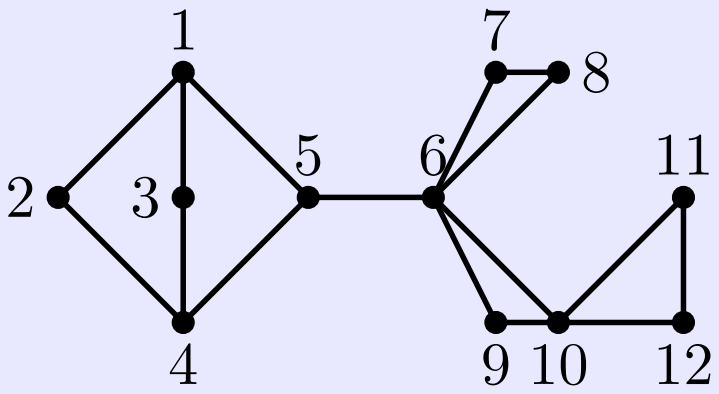
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

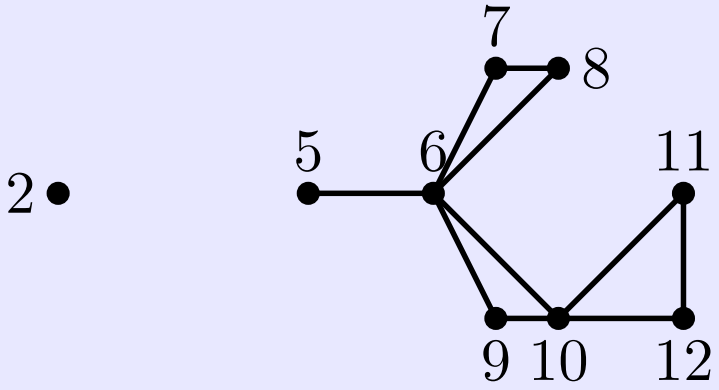
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,3,4\}$





定义21 (点割集,割点)

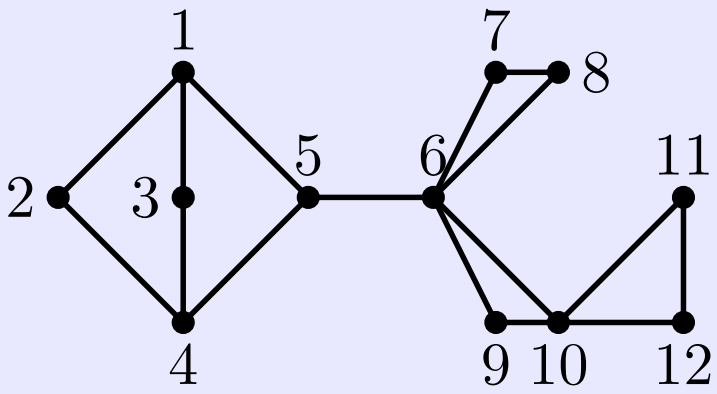
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

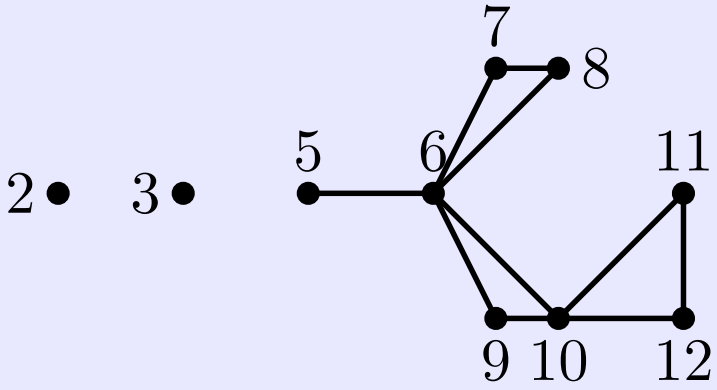
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,3,4\}$





定义21 (点割集,割点)

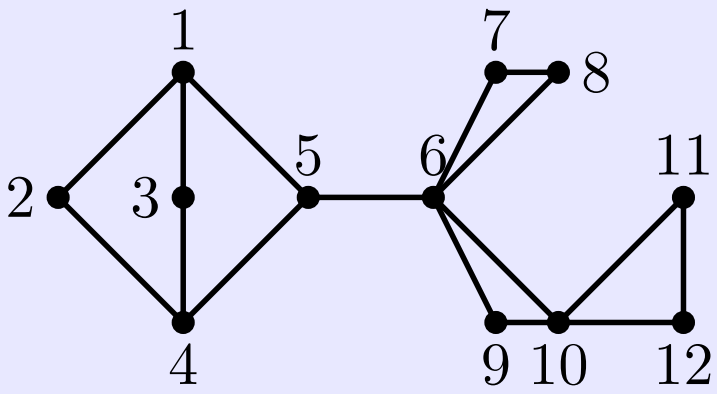
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

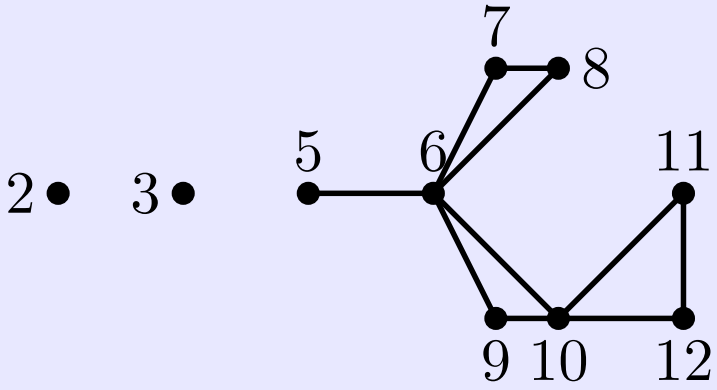
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,3,4\}$ 不是





定义21 (点割集,割点)

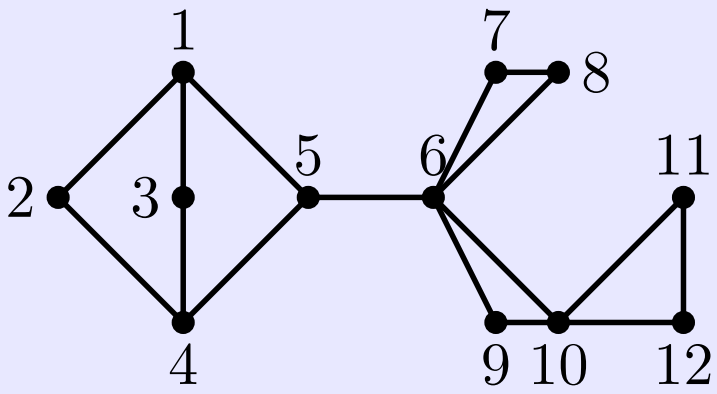
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

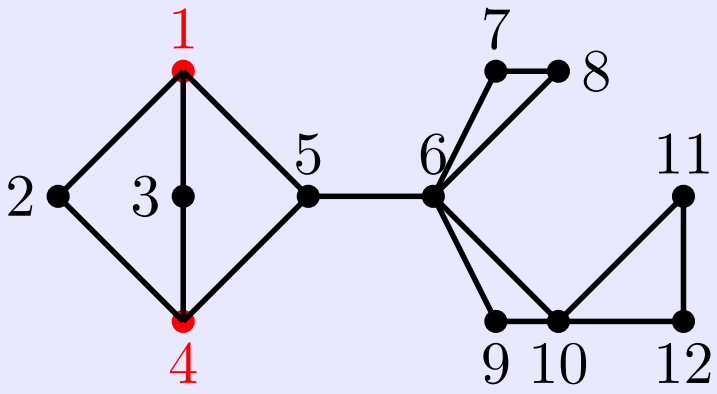
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,4\}$





定义21 (点割集,割点)

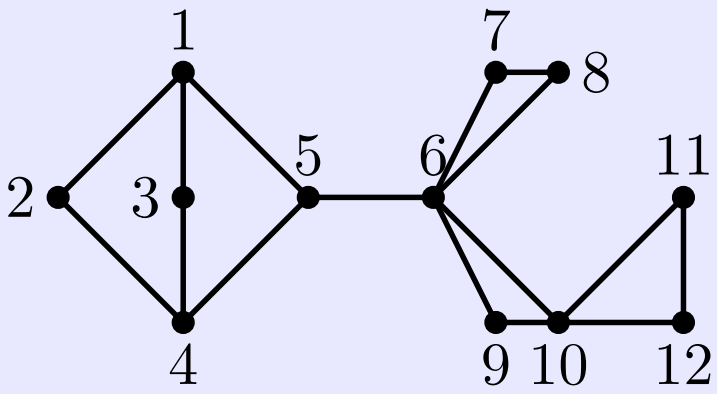
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

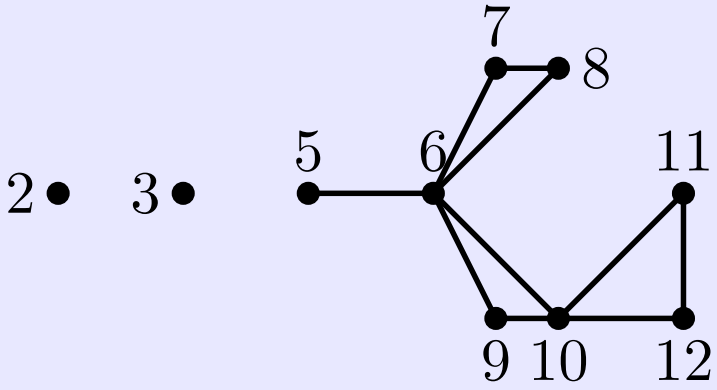
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,4\}$





定义21 (点割集,割点)

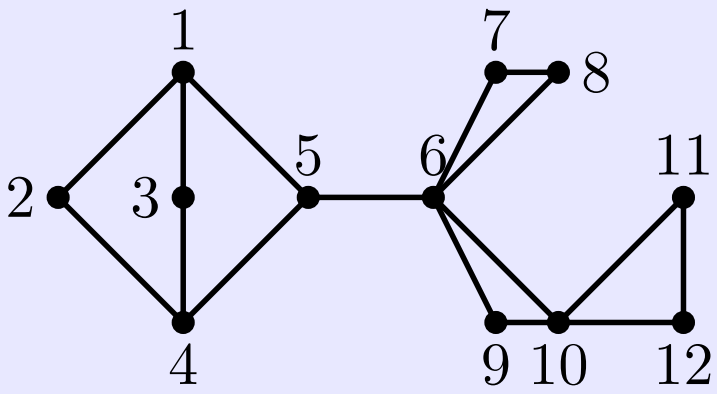
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

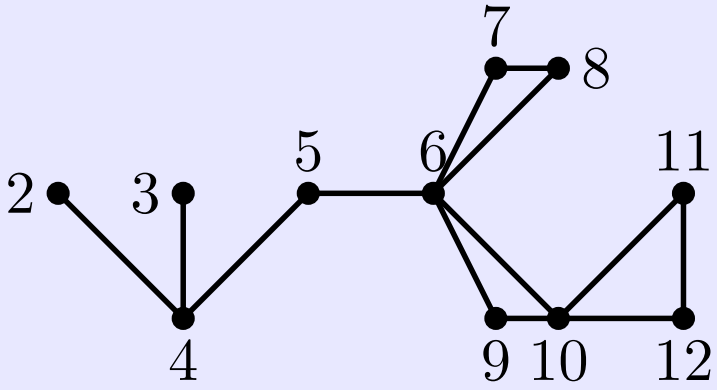
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,4\}$





定义21 (点割集,割点)

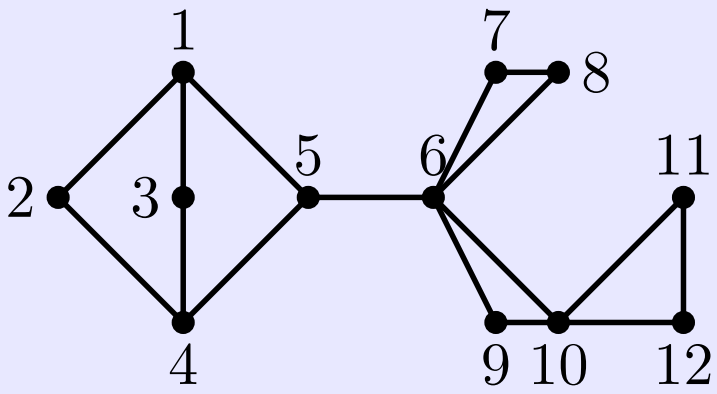
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

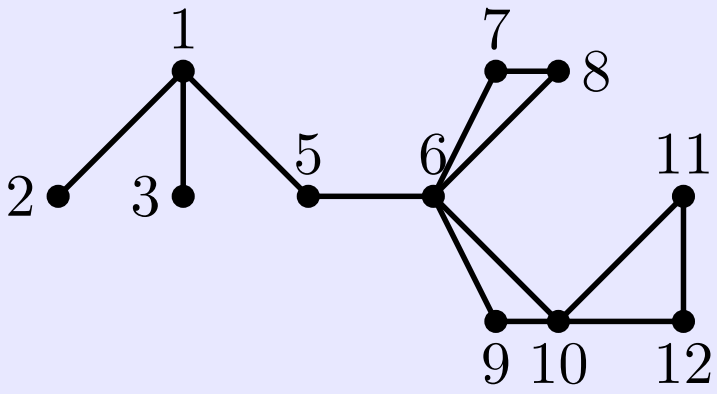
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,4\}$





定义21 (点割集,割点)

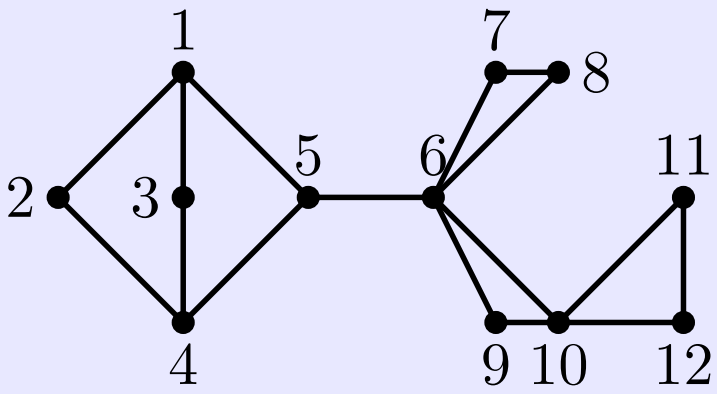
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

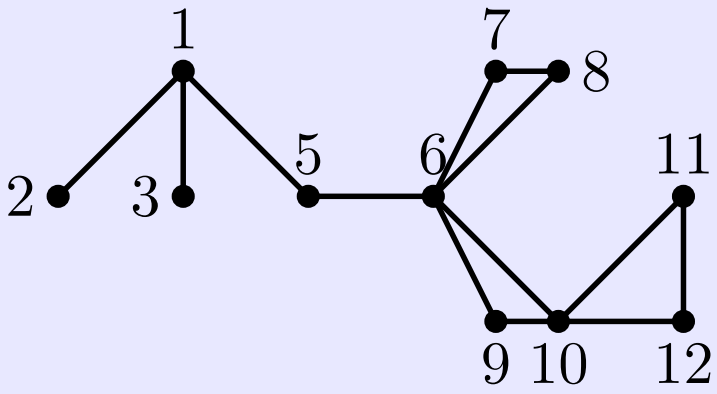
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{1,4\}$ 是





定义21 (点割集,割点)

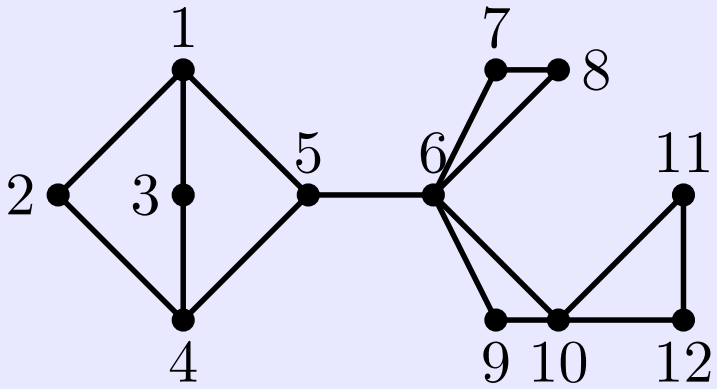
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

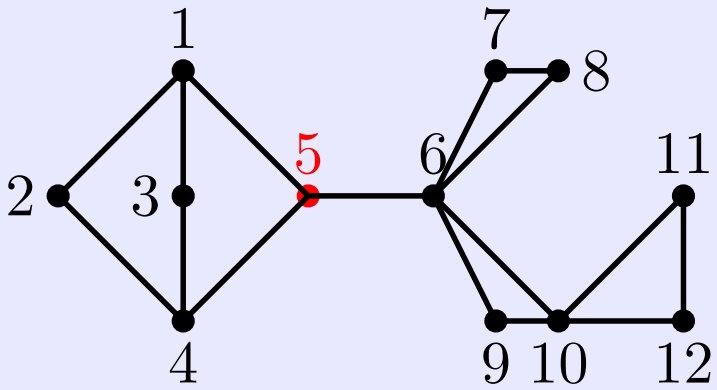
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{5\}$





定义21 (点割集,割点)

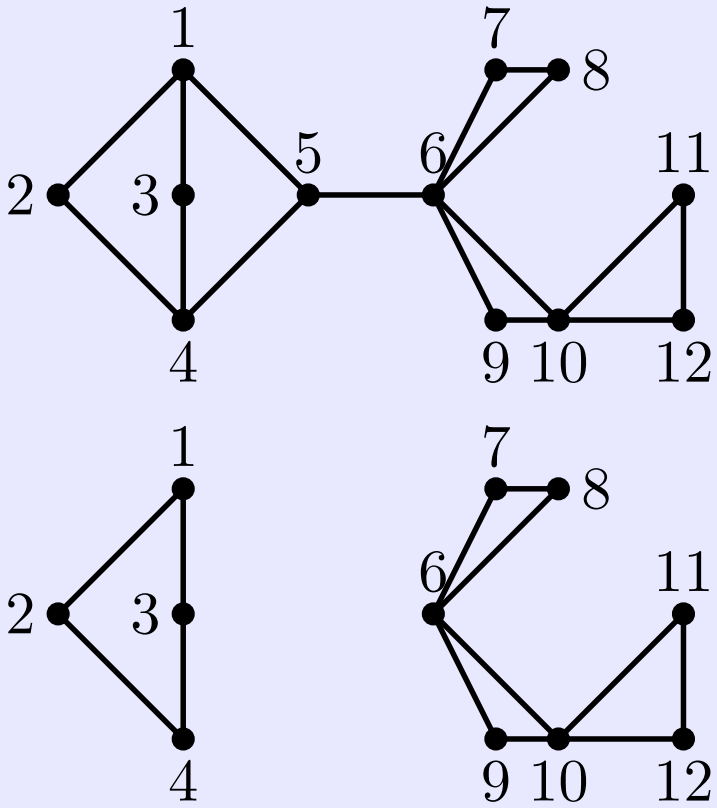
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{5\}$



定义21 (点割集,割点)

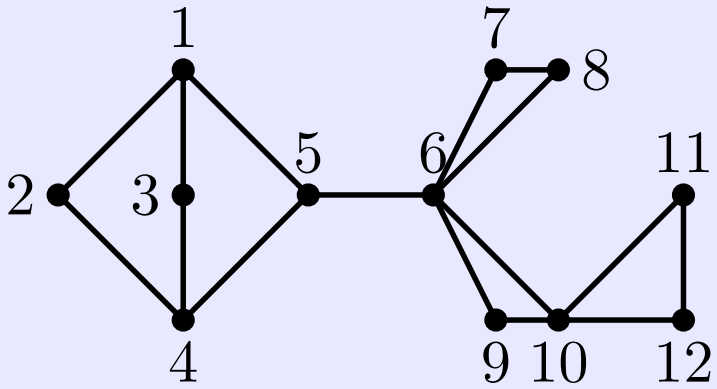
设$G=\langle V,E\rangle$，点子集$V_1\subseteq V$。若

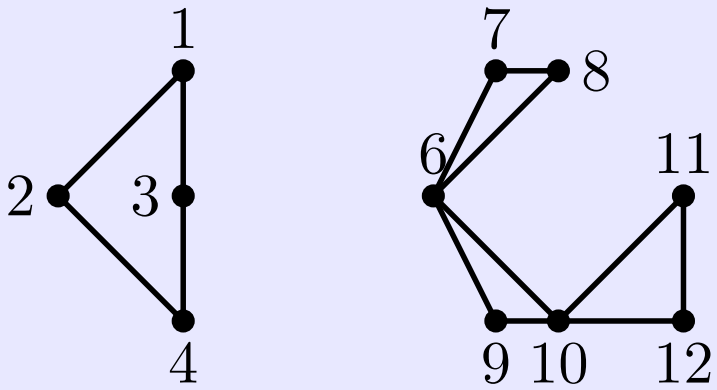
1. $G-V_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall V_2\subset V_1$,$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数;

则称V_1是G的点割集.

当$V_1=\{v\}$时,称v是G的割点.

$\{5\}$ 是





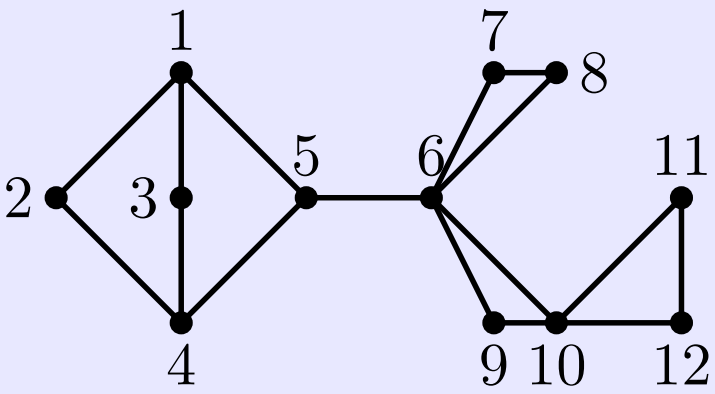
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E \rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.



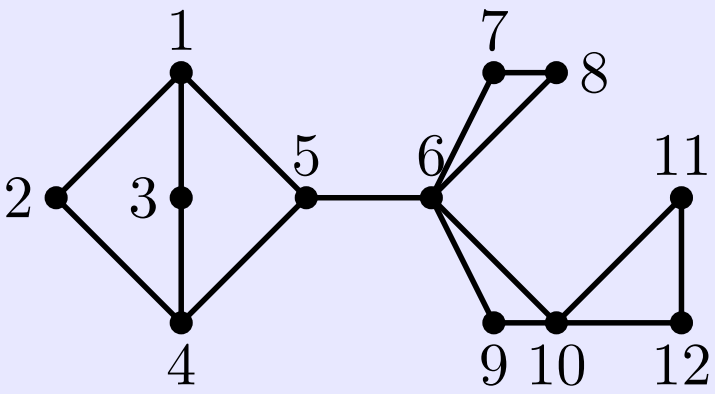
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E \rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.



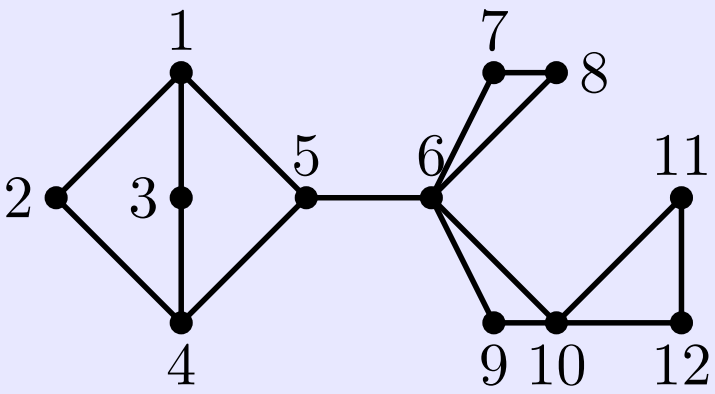
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E \rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.



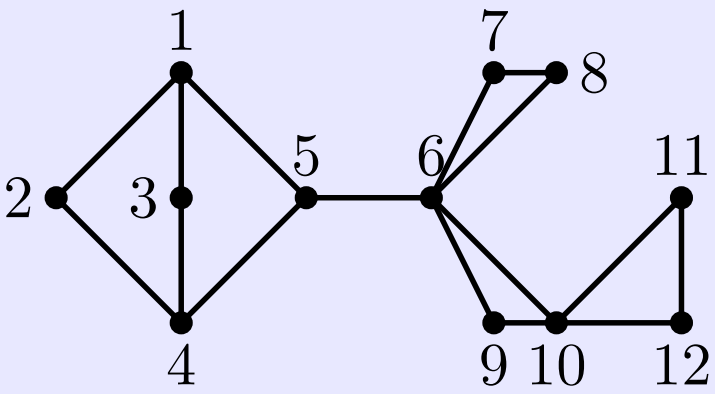
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E \rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.



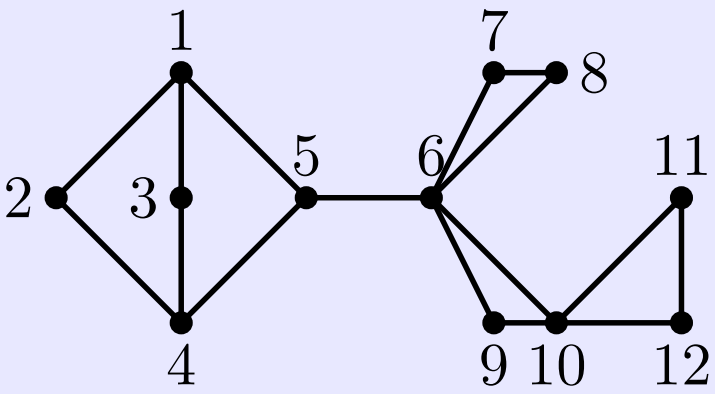
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E \rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.



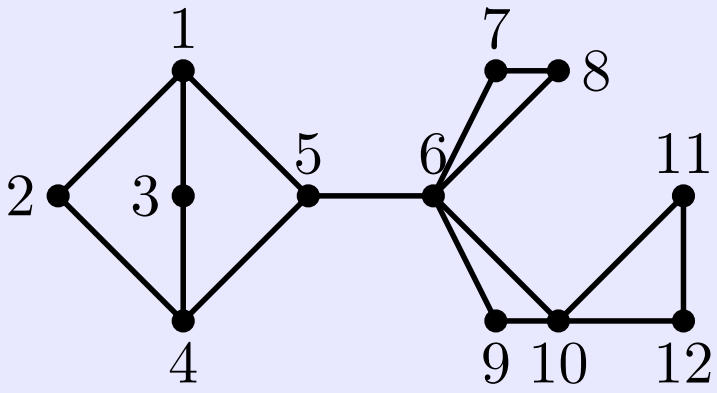
定义22 (边割集、割边)

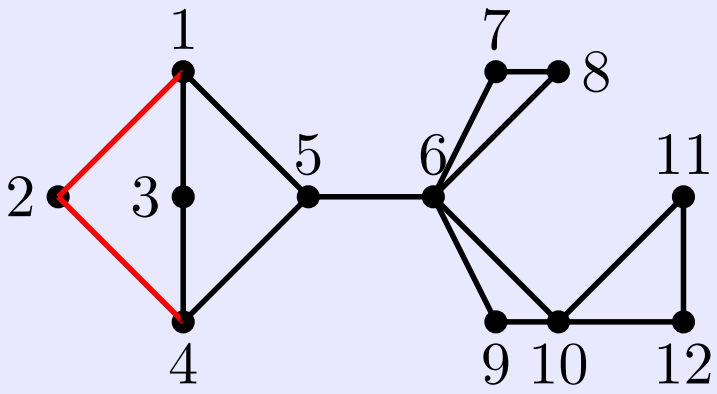
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





$\{(1,2),(2,4)\}$

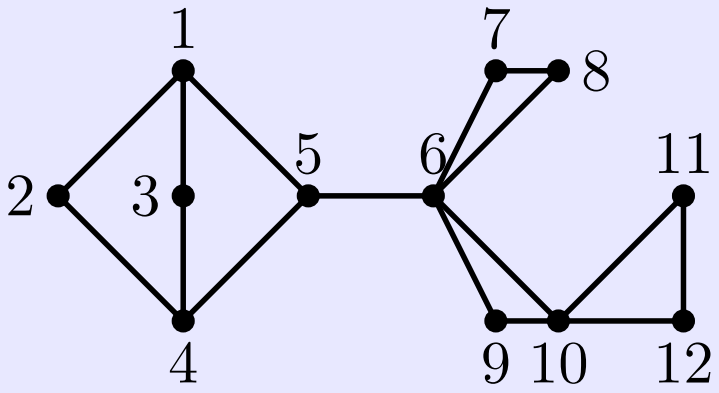
定义22 (边割集、割边)

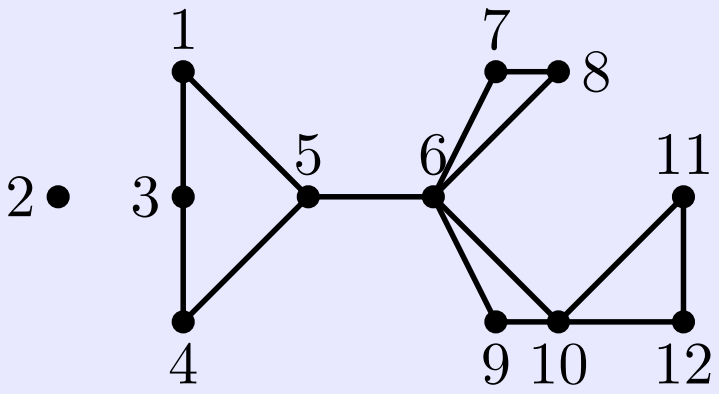
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(1,2),(2,4)\}$

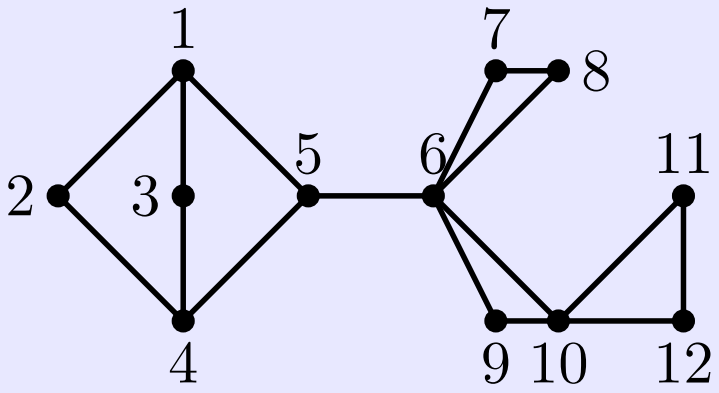
定义22 (边割集、割边)

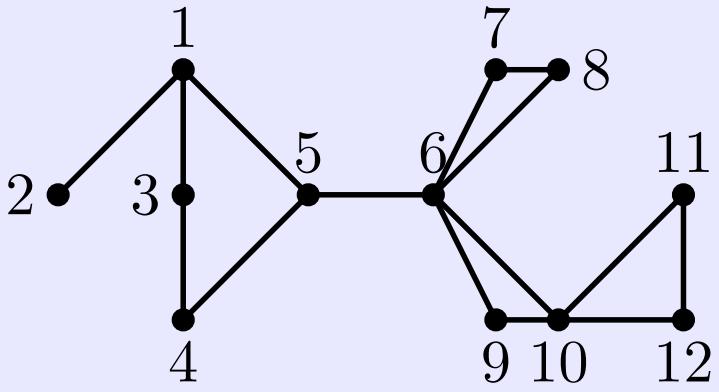
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(1,2),(2,4)\}$

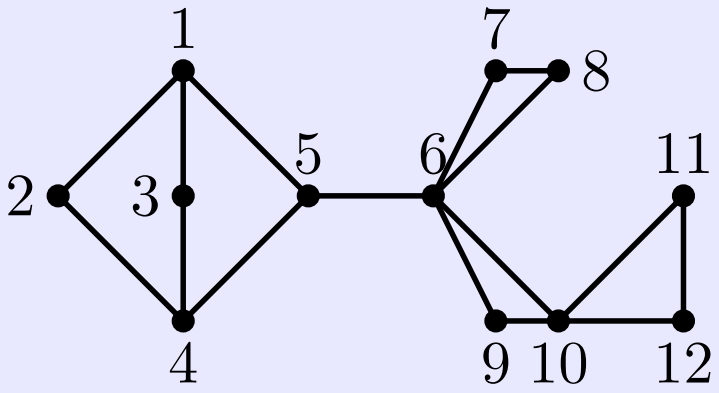
定义22 (边割集、割边)

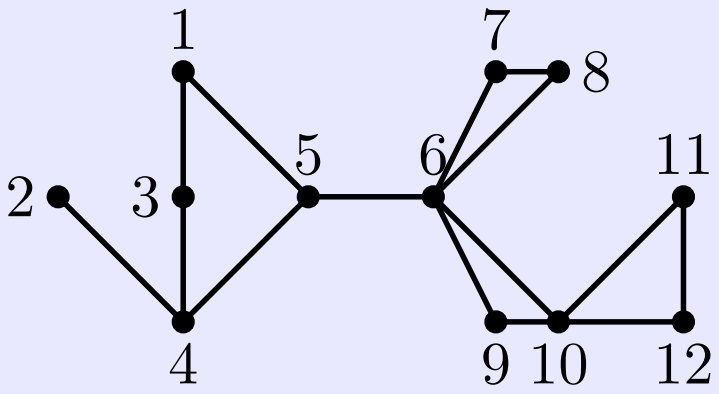
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(1,2),(2,4)\}$

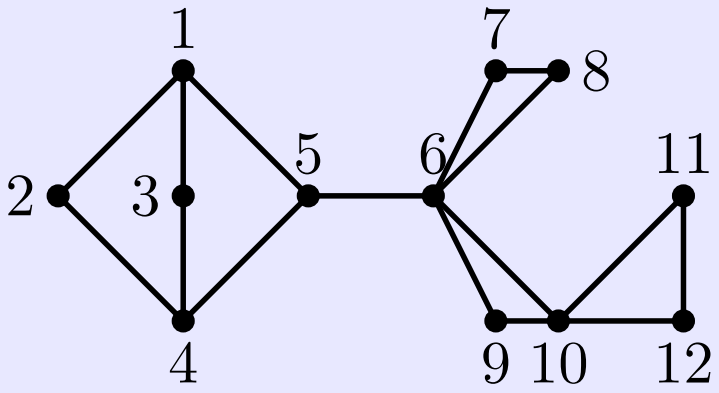
定义22 (边割集、割边)

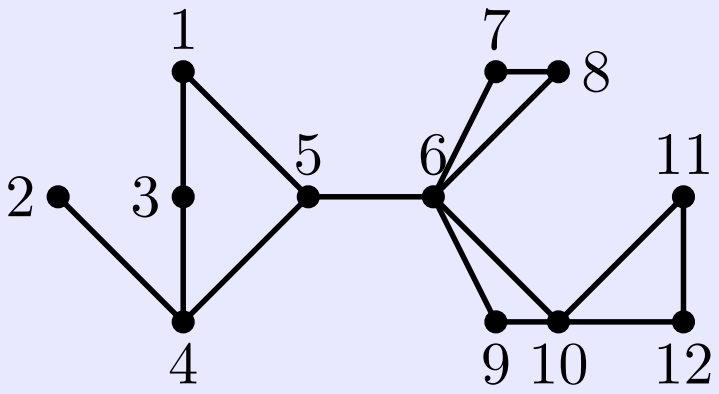
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(1,2),(2,4)\}$是

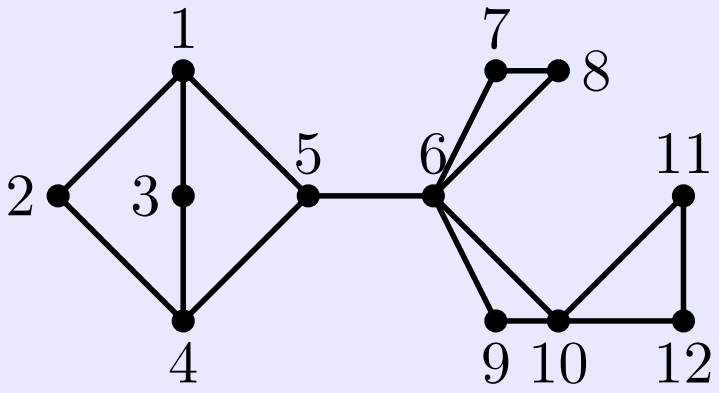
定义22 (边割集、割边)

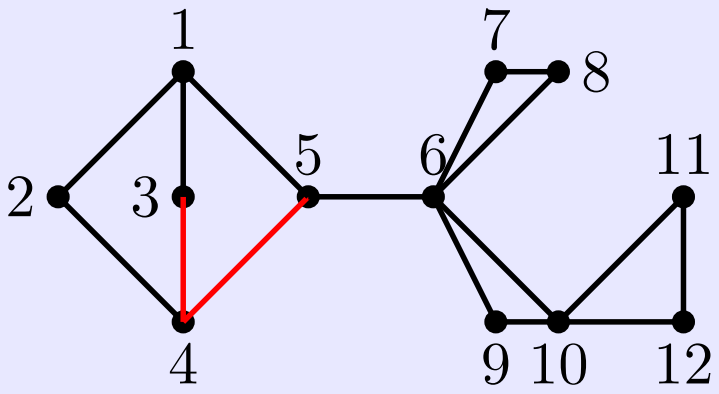
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





$\{(3,4),(4,5)\}$

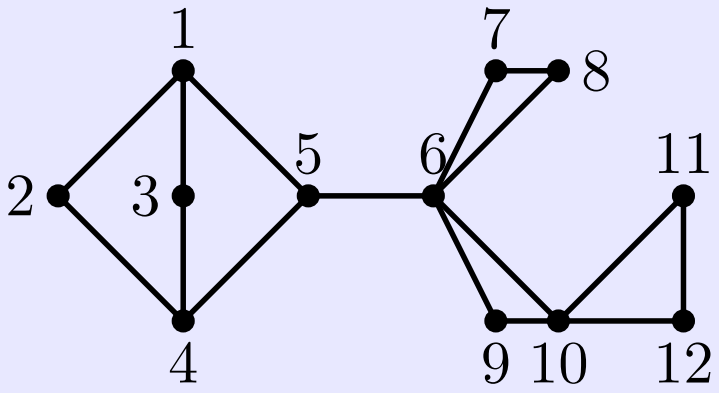
定义22 (边割集、割边)

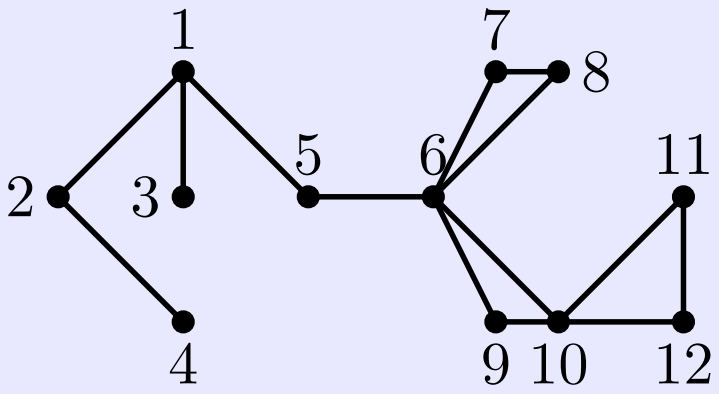
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





$\{(3,4),(4,5)\}$

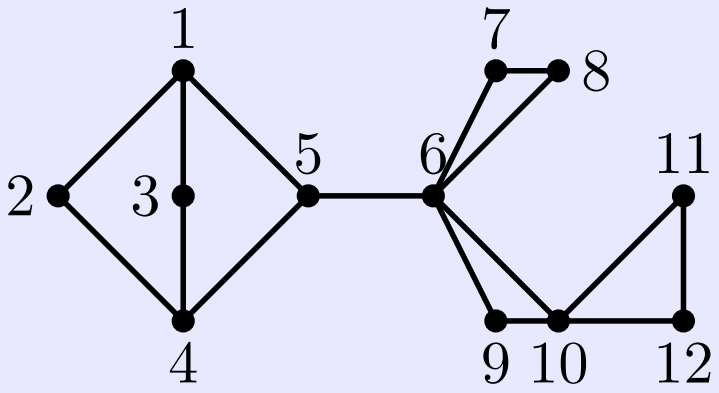
定义22 (边割集、割边)

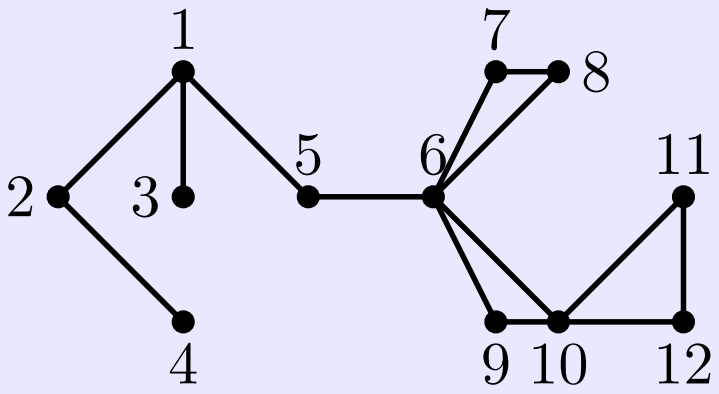
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(3,4),(4,5)\}$不是

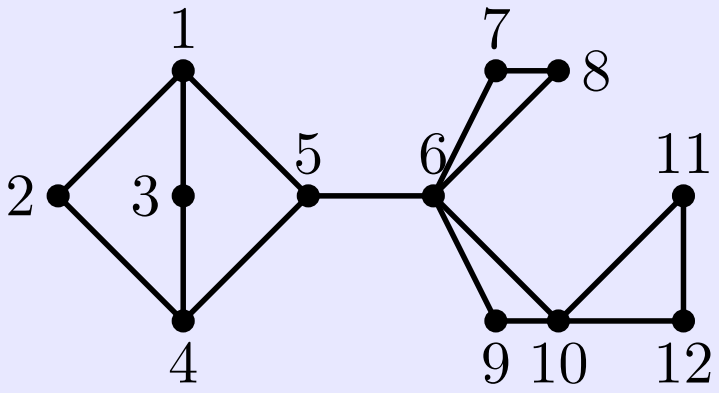
定义22 (边割集、割边)

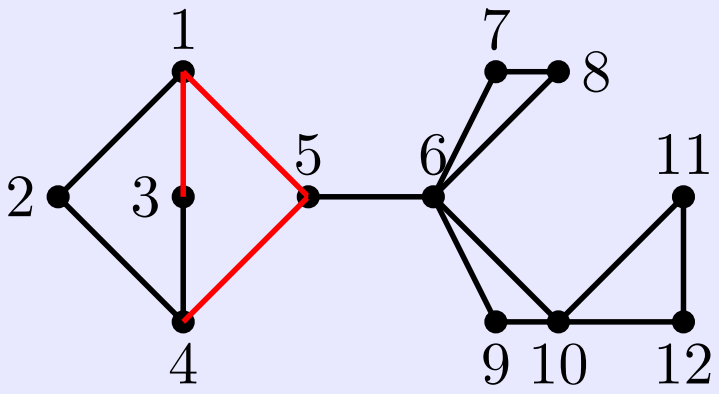
设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$.

若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





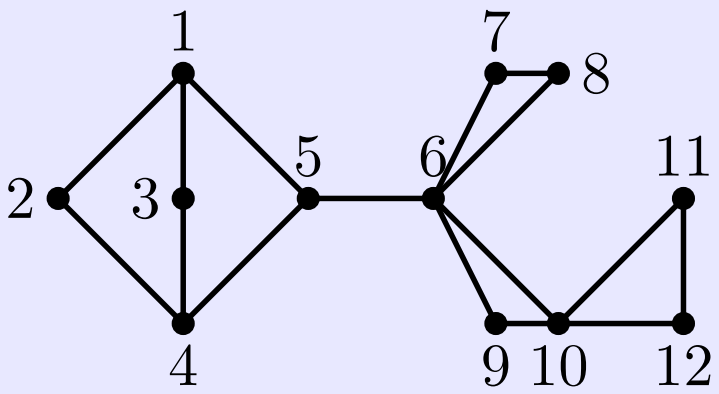
$\{(1,3),(1,5),(4,5)\}$

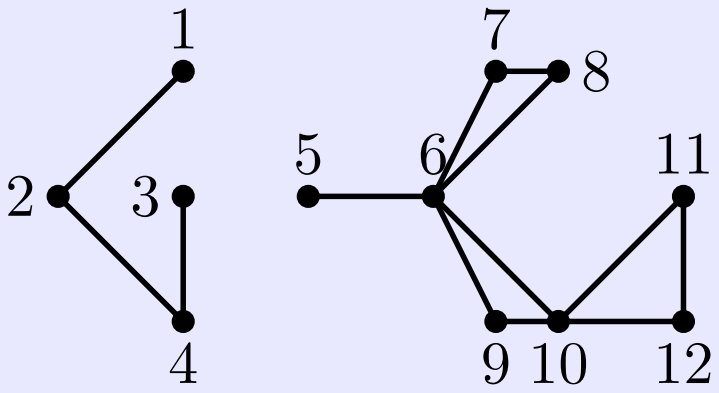
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





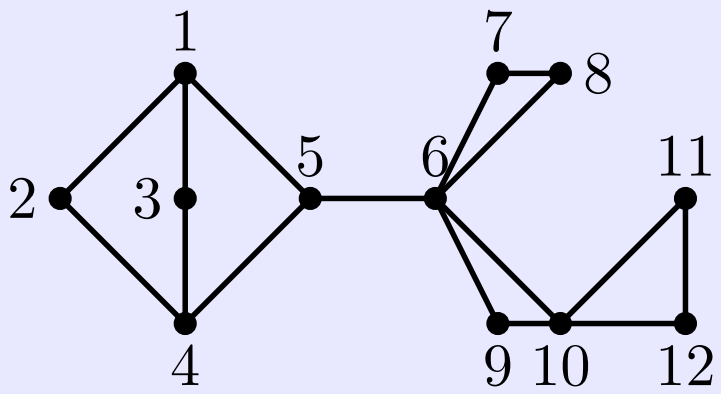
$\{(1,3),(1,5),(4,5)\}$

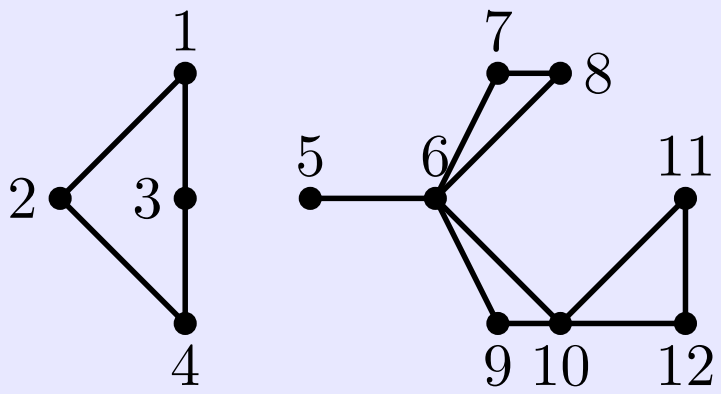
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





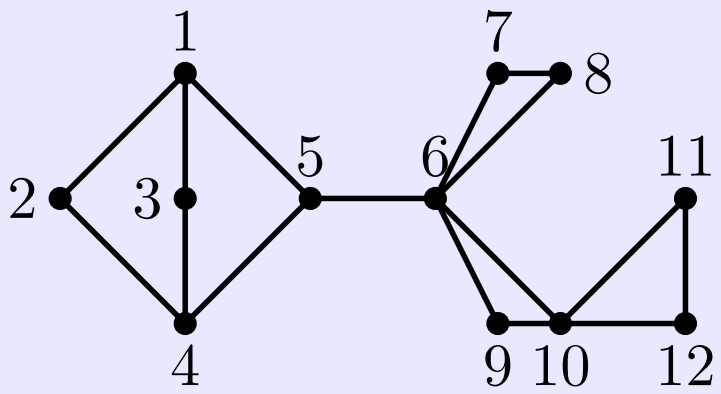
$\{(1,3),(1,5),(4,5)\}$

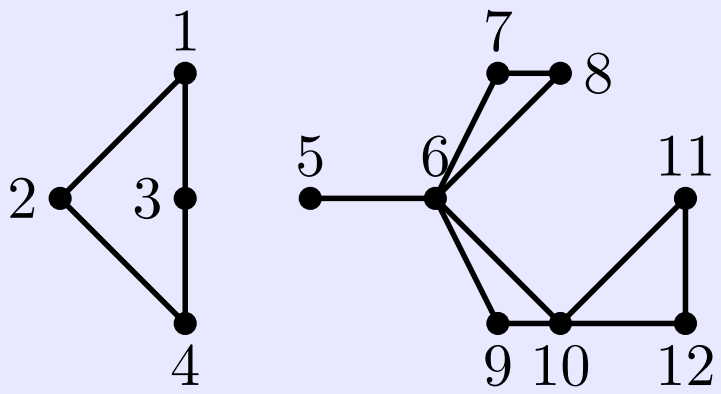
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





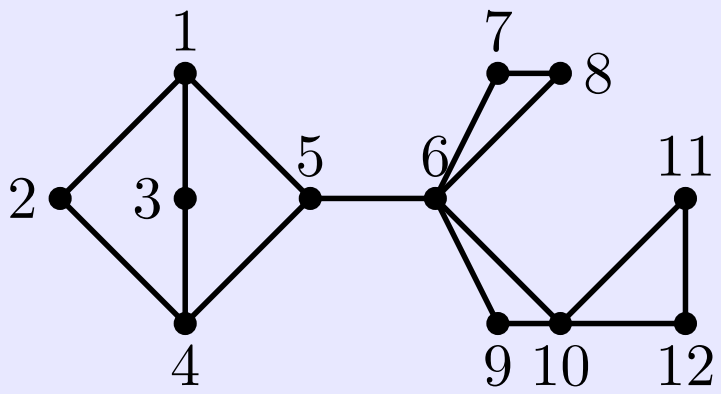
$\{(1,3),(1,5),(4,5)\}$不是

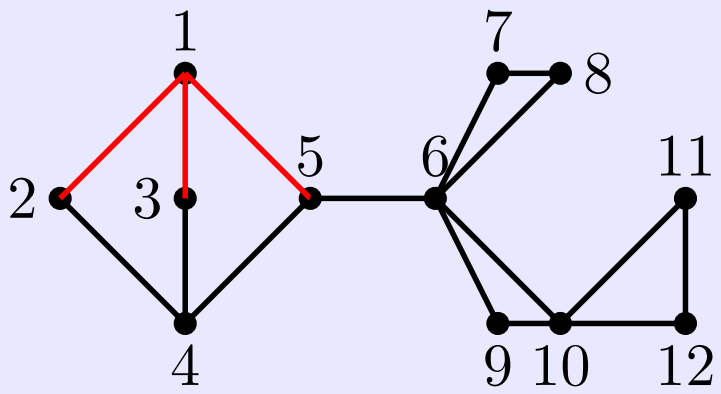
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





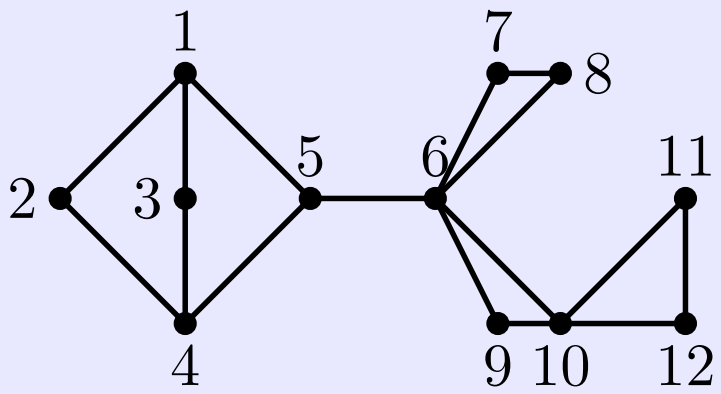
$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$

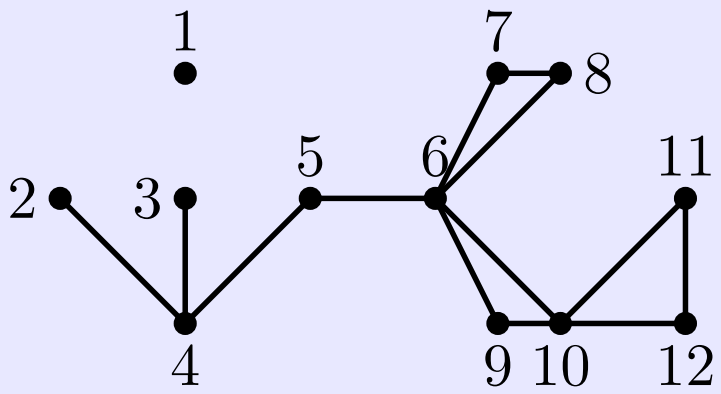
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





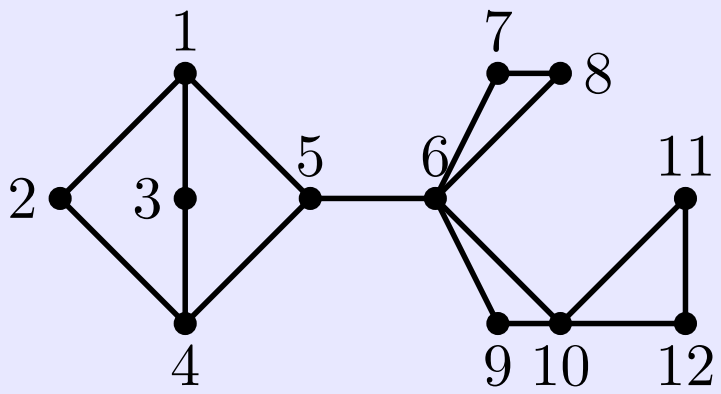
$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$

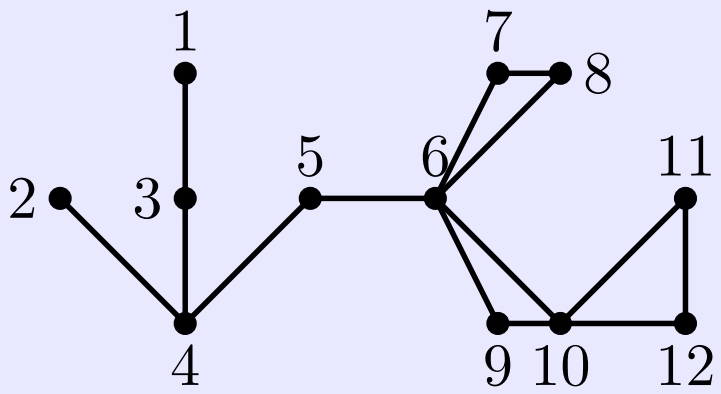
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





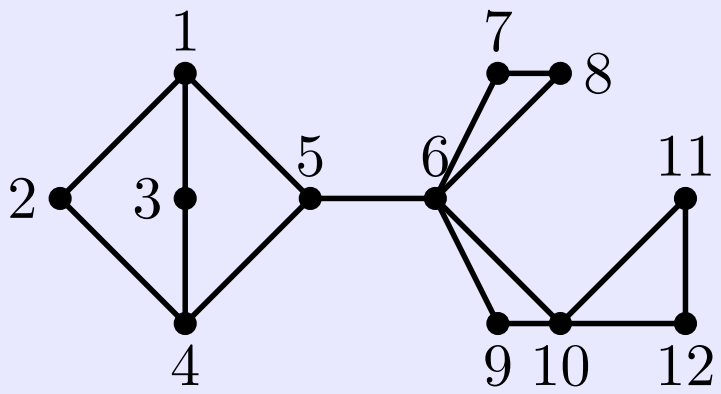
$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$

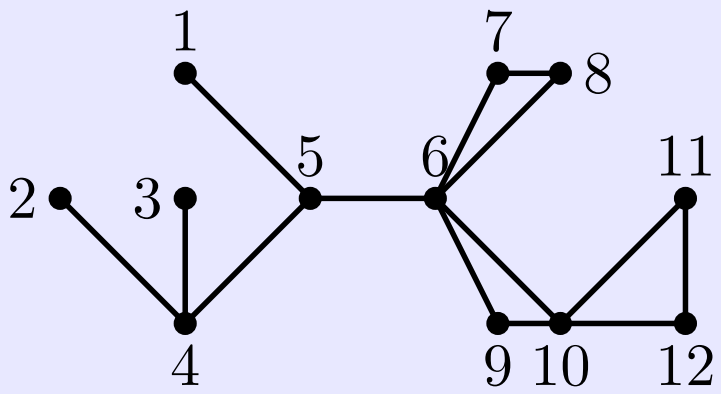
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





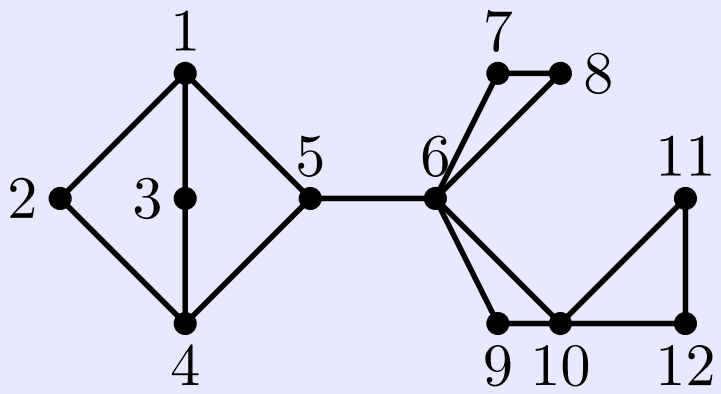
$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$

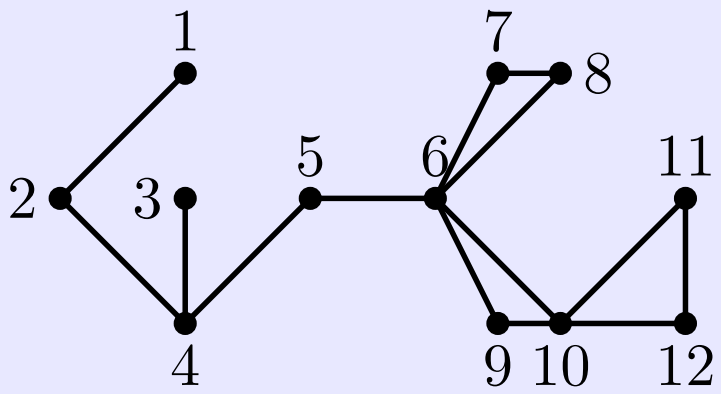
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的边割集，简称割集当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的割边或桥.





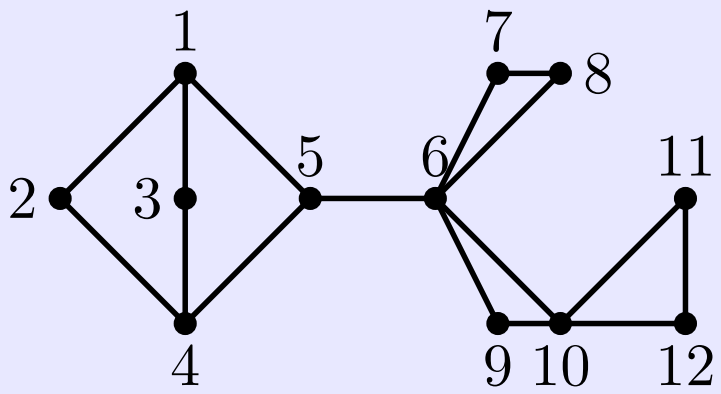
$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$

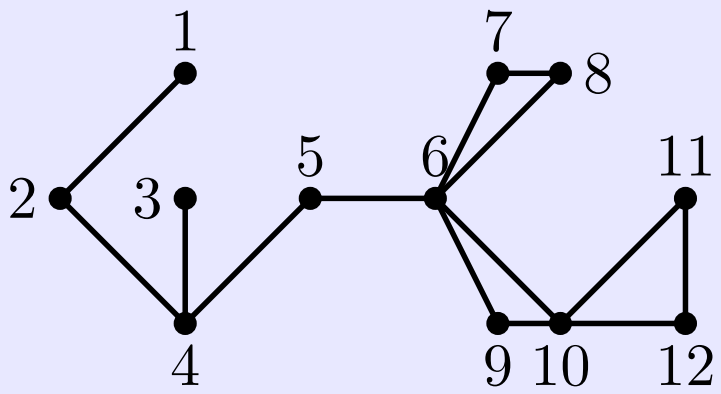
定义22 (边割集、割边)

设图$G = \langle V, E\rangle$，边子集$E_1 \subseteq E$. 若

1. $G - E_1$是平凡图或其连通分图数大于G的连通分图数;
2. $\forall E_2 \subset E_1, G - E_2$的连通分图数不大于$G$的连通分图数;

则称E_1是G的**边割集**，简称**割集**当$E_1 = \{e\}$时，称e是G的**割边**或**桥**.





$\{(1,2),(1,3),(1,5)\}$是

注2

1. 若$e=(u,v)$是桥，且$d(u)>1$，则u必定是割点；
2. 设S是图G的割集。若G是连通图，则$G-S$恰是两个连通分图不相交的并。进一步地，若G的连通分图数为k，则$G-S$恰是$k+1$个连通分图不相交的并。

注2

1. 若$e=(u,v)$是桥，且$d(u)>1$，则u必定是割点；
2. 设S是图G的割集。若G是连通图，则$G-S$恰是两个连通分图不相交的并。进一步地，若G的连通分图数为k，则$G-S$恰是$k+1$个连通分图不相交的并。

注2

1. 若$e=(u,v)$是桥，且$d(u)>1$，则u必定是割点；
2. 设S是图G的割集。若G是连通图，则$G-S$恰是两个连通分图不相交的并。进一步地，若G的连通分图数为k，则$G-S$恰是$k+1$个连通分图不相交的并。

定理7

若v是连通图$G = \langle V, E\rangle$中的点，则下列命题等价

1. v是G的割点
2. G中存在与v不同的两点u, w，使得v在每条从u到w的路上
3. 存在对集合$V - \{v\}$的一个划分$\{U, W\}$，使得$\forall u \in U, w \in W$，v在从u到w的每条路上

定理8

设e是连通图$G = \langle V, E\rangle$中的边，则下列命题等价

定理7

若v是连通图$G=\langle V,E\rangle$中的点，则下列命题等价

1. v是G的割点
2. G中存在与v不同的两点u,w，使得v在每条从u到w的路上
3. 存在对集合$V-\{v\}$的一个划分$\{U,W\}$，使得$\forall u\in U,w\in W$，v在从u到w的每条路上

定理8

设e是连通图$G=\langle V,E\rangle$中的边，则下列命题等价

1. e是G的一个桥
2. e不在G的任一回路上
3. G中存在不同的两点u,w，使得边e在从u到w的每条路上
4. 存在对集合V的划分$\{U,W\}$，使得$\forall u\in U,w\in W$，边e在从u到w的每条路上

例4 (证明在每个非平凡连通图中，至少存在两个点不是割点)

例5 (证明连通图中的任一回路与任一割集如果有公共边，则公共边的条数必为偶数)

问题1

设S是K_p的割集，G_1, G_2是组成$K_p - S$的两个连通分图，G_1, G_2是否是完全图？

例4 (证明在每个非平凡连通图中，至少存在两个点不是割点)

例5 (证明连通图中的任一回路与任一割集如果有公共边，则公共边的条数必为偶数)

问题1

设S是K_p的割集，G_1, G_2是组成$K_p - S$的两个连通分图，G_1, G_2是否是完全图？

例4 (证明在每个非平凡连通图中，至少存在两个点不是割点)

例5 (证明连通图中的任一回路与任一割集如果有公共边，则公共边的条数必为偶数)

问题1

设S是K_p的割集，G_1, G_2是组成$K_p - S$的两个连通分图，G_1, G_2是否是完全图？

定义23 (连通度)

- 图$G=\langle V,E\rangle$的点连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的边连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$

非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

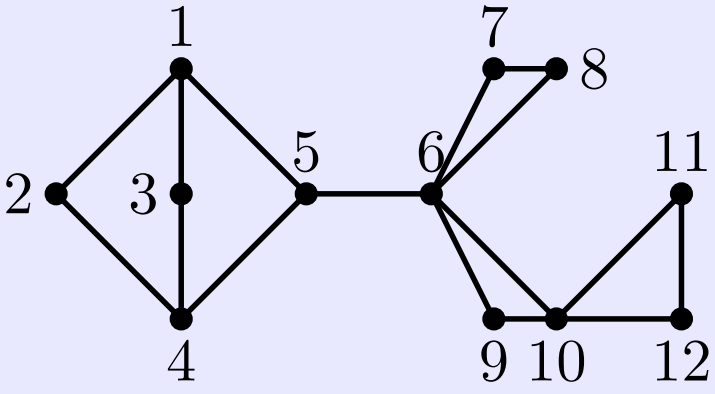
定义23 (连通度)

- 图$G=\langle V,E\rangle$的点连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的边连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$

非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

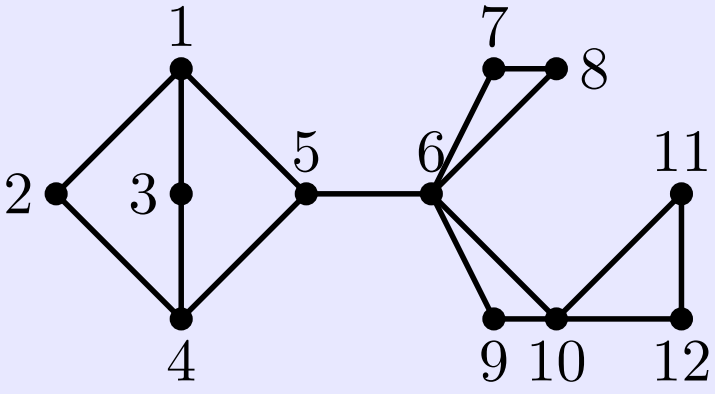
- 图$G=\langle V,E\rangle$的点连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的边连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

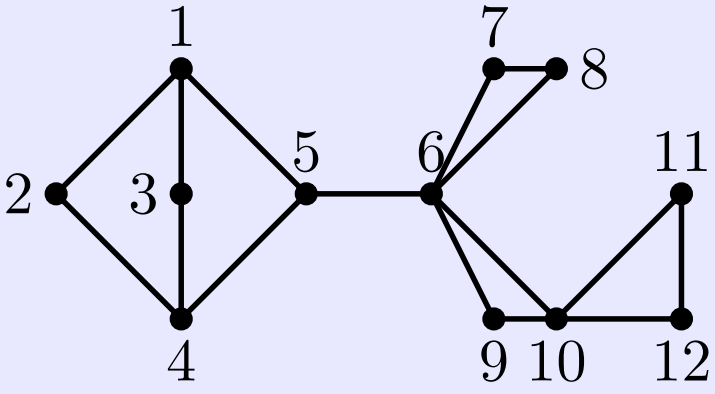
- 图$G=\langle V,E\rangle$的点连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的边连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

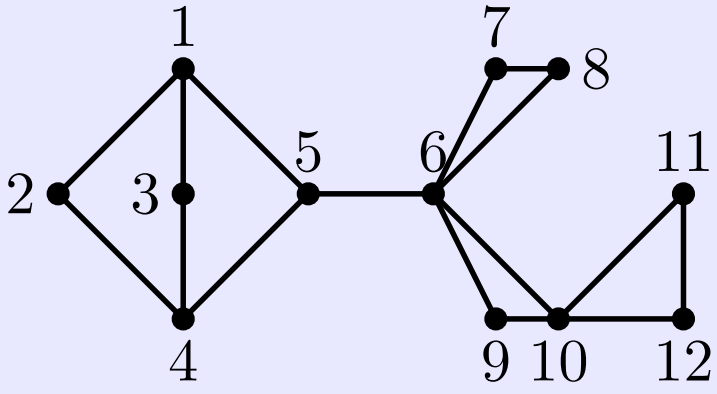
- 图$G=\langle V,E\rangle$的**点连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的**边连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

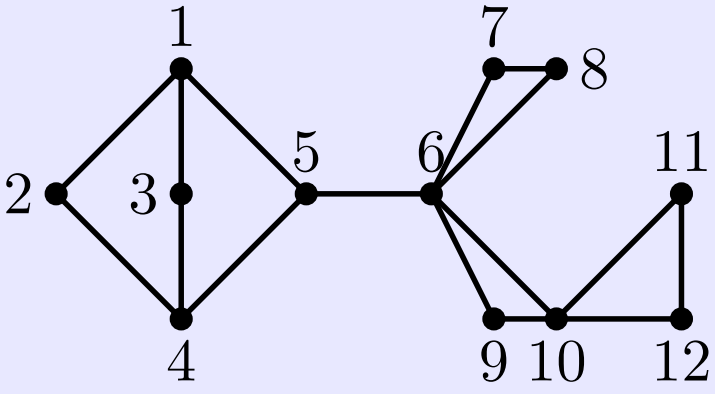
- 图$G=\langle V,E\rangle$的**点连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的**边连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

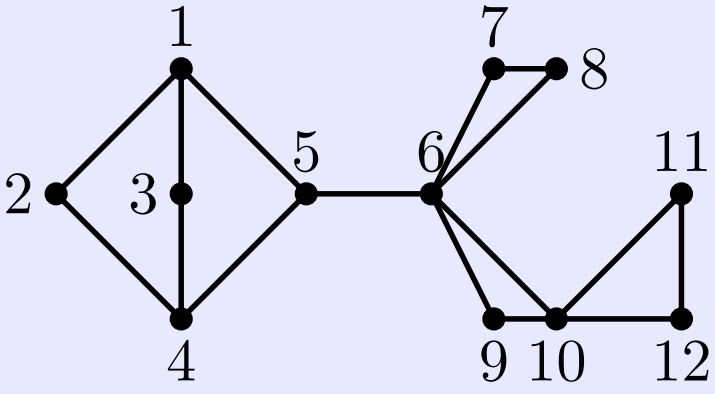
- 图$G=\langle V,E\rangle$的点连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的边连通度是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定义23 (连通度)

- 图$G=\langle V,E\rangle$的**点连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少点数，记为$\kappa(G)$
- 图$G=\langle V,E\rangle$的**边连通度**是指由G产生不连通图或平凡图所需要去掉的最少边数，记为$\lambda(G)$



非连通图和平凡图的点、边连通度是0. $\kappa(K_p)=\lambda(K_p)=p-1$

定理9 (对于任意图G，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。)

定理10 (在简单(p,q)图G中，若$\delta(G) \geq p/2$，则$\lambda(G) = \delta(G)$)

作业3 (P200-9(1)、15)

定理9 (对于任意图G，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。)

定理10 (在简单(p,q)图G中，若$\delta(G) \geq p/2$，则$\lambda(G) = \delta(G)$)

作业3 (P200-9(1)、15)

定理9 (对于任意图G，有$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。)

定理10 (在简单(p,q)图G中，若$\delta(G) \geq p/2$，则$\lambda(G) = \delta(G)$)

作业3 (P200-9(1)、15)

定义24 (树、林)

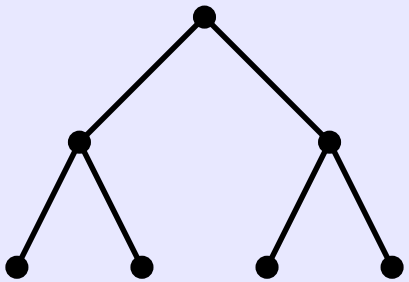
- 无回路的连通图称为树
- 每个连通分图都是树的非连通图称为林

定义24 (树、林)

- 无回路的连通图称为**树**
- 每个连通分图都是树的非连通图称为**林**

定义24 (树、林)

- 无回路的连通图称为**树**
- 每个连通分图都是树的非连通图称为**林**

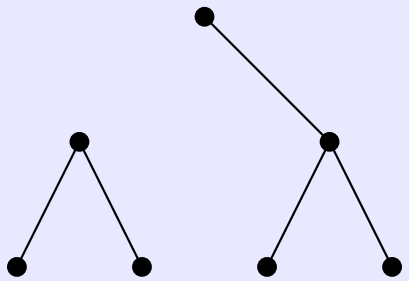


定义24 (树、林)

- 无回路的连通图称为**树**
- 每个连通分图都是树的非连通图称为**林**

定义24 (树、林)

- 无回路的连通图称为**树**
- 每个连通分图都是树的非连通图称为**林**



定理11 (设G是(p,q)图，则下列命题等价)

1. G是树
2. G中任意两点之间有唯一的路
3. G连通且任意边都是桥
4. G连通且$q=p-1$
5. G无回路且$q=p-1$
6. G无回路且在任意不同的两点间加一条边，则恰好形成一个回路

例6

已知树T有5个1度点、3个2度点，其余都是3度点，求T一共有几个点？

例7

证明顶点数大于等于2的树至少有2个悬挂点；顶点数大于等于3的树至少有一个点不是悬挂点。

例6

已知树T有5个1度点、3个2度点，其余都是3度点，求T一共有几个点？

例7

证明顶点数大于等于2的树至少有2个悬挂点；顶点数大于等于3的树至少有一个点不是悬挂点。

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。

$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

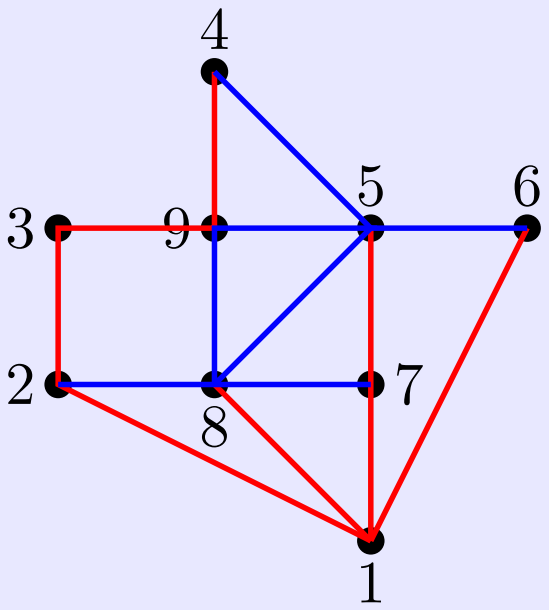
- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。

$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)



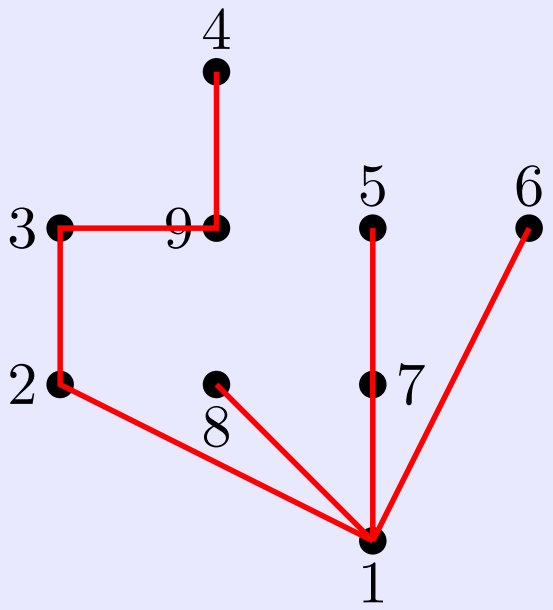
- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。

$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

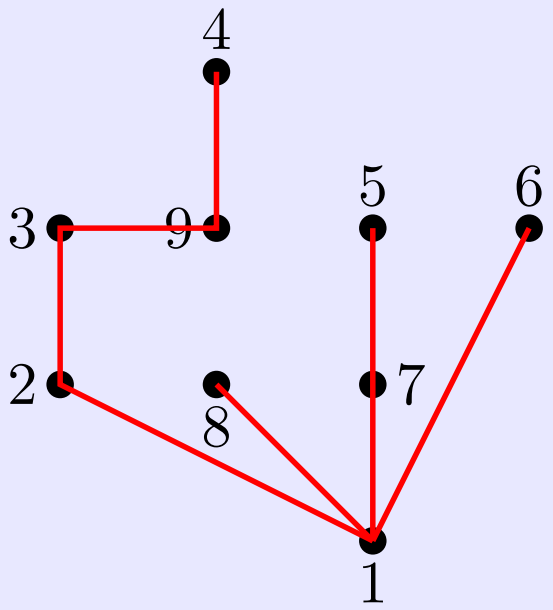


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

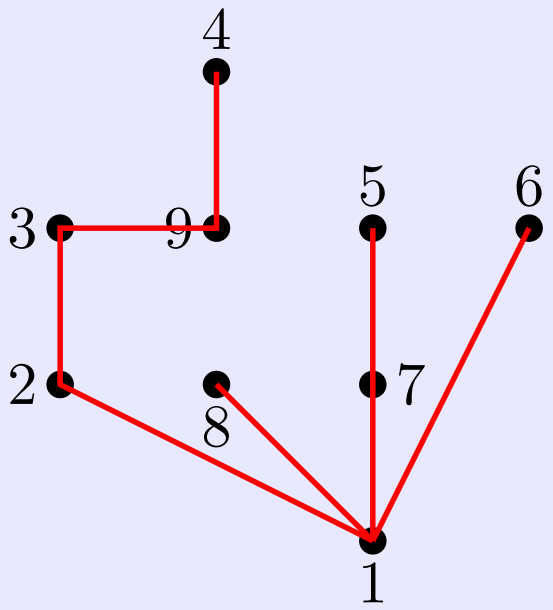


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

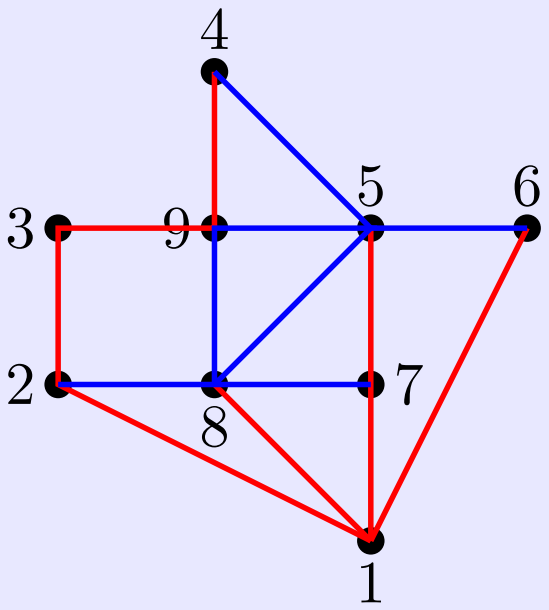


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

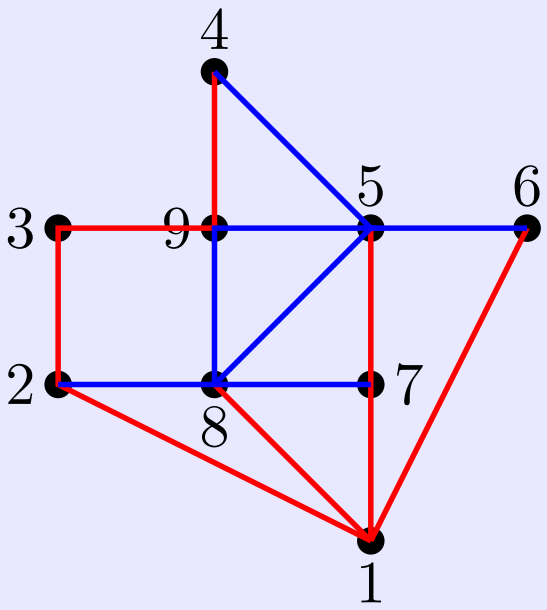


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

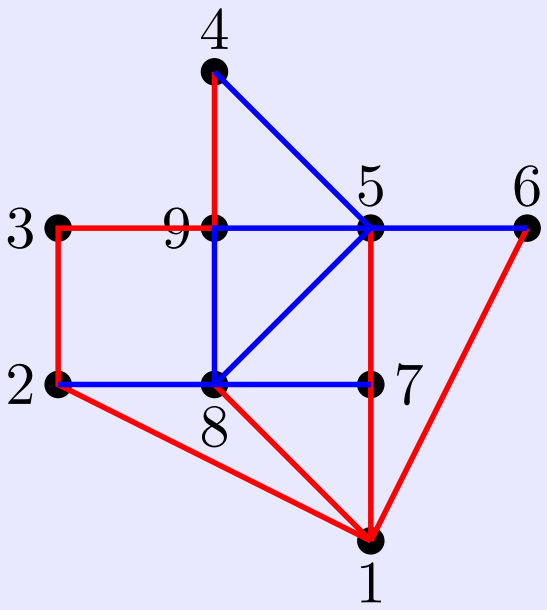


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定义25 (生成树,枝,弦)

若T是图G的生成子图且是一个树，则称T是G的生成树。
$\forall e \in E(G)$，若e在树T上，则称e是T的枝，否则称为弦.

定理12 (G有生成树当且仅当G是连通图)

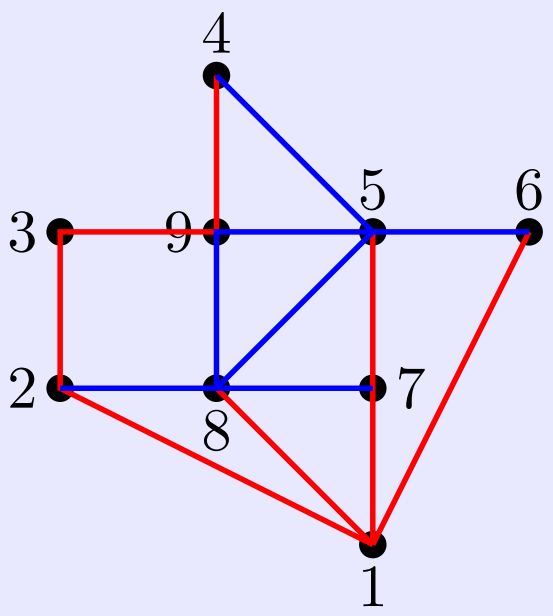


- 若(p,q)图G连通，则$q \geq p-1$
- 生成树T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



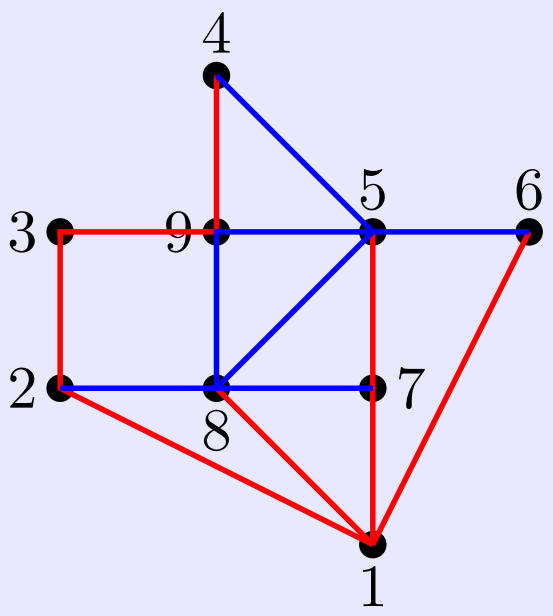
例8

分别求弦(5,9)、(7,8)的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



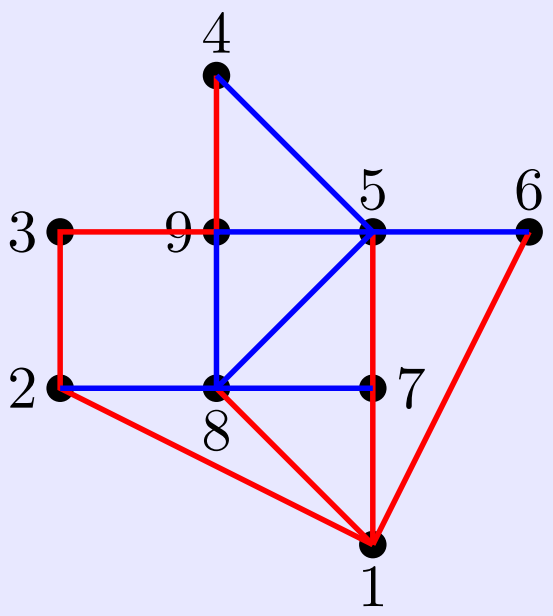
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



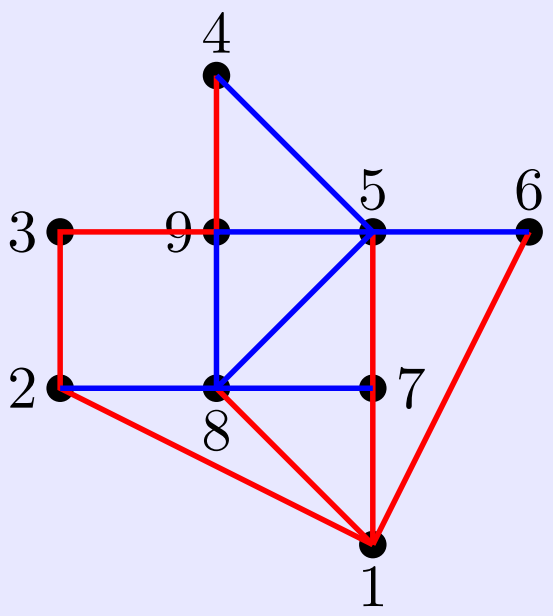
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



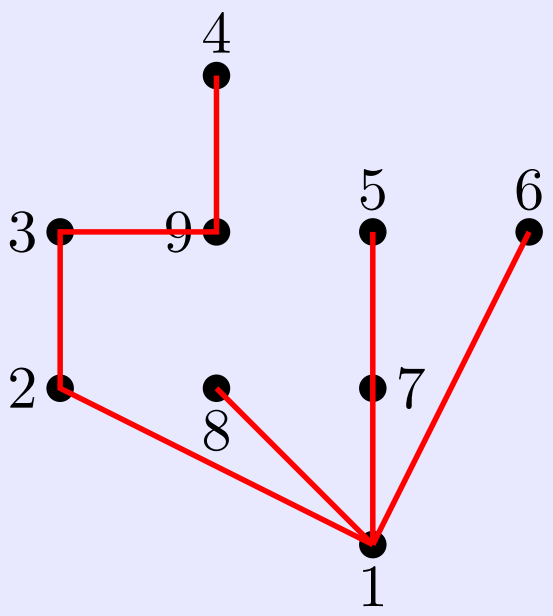
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



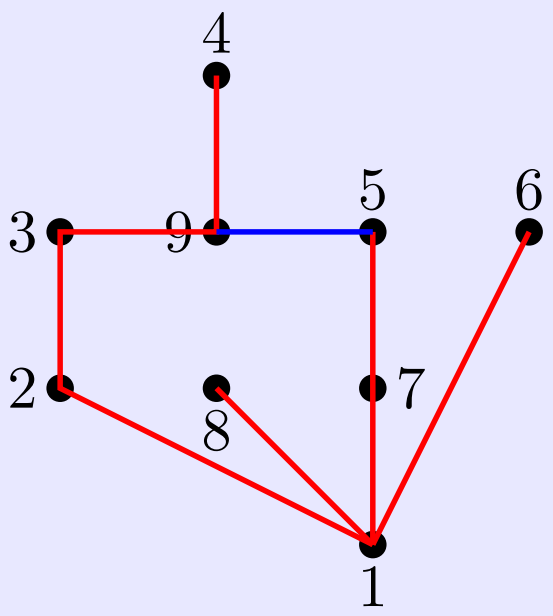
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



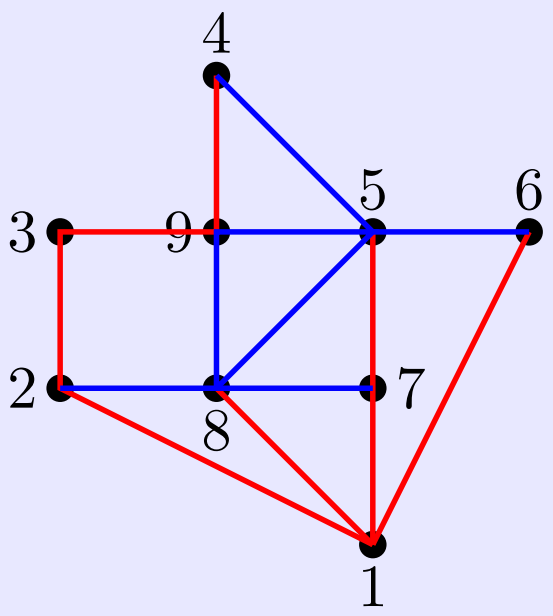
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



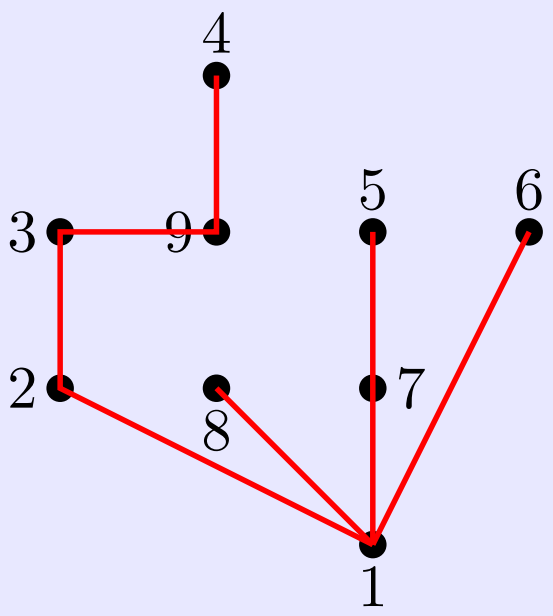
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



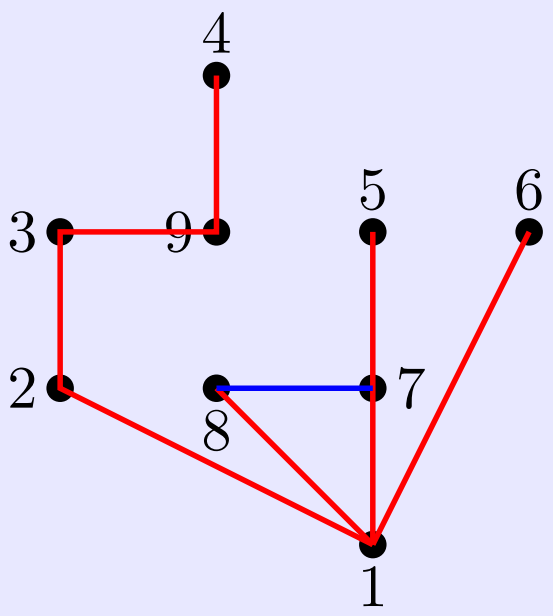
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理13

设T是图G是生成树，则

1. G的每条回路至少包含一条弦；
2. 若e是T的弦，则G中存在一条且只存在一条只包含弦e，其余都是枝的回路。其称为G的对应T的弦e的基本回路



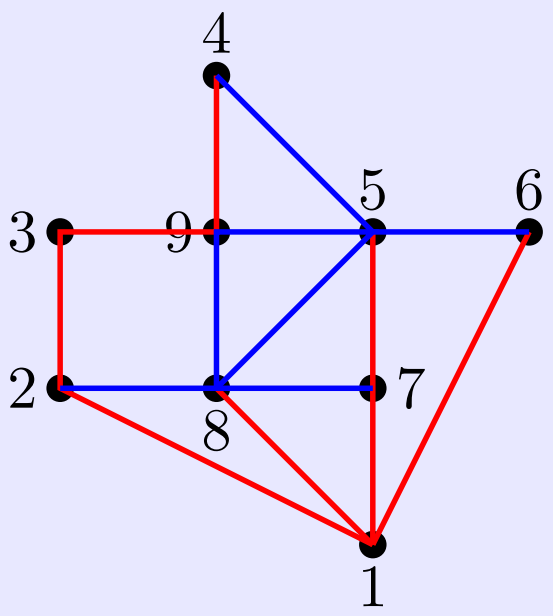
例8

分别求弦$(5,9)$、$(7,8)$的基本回路

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



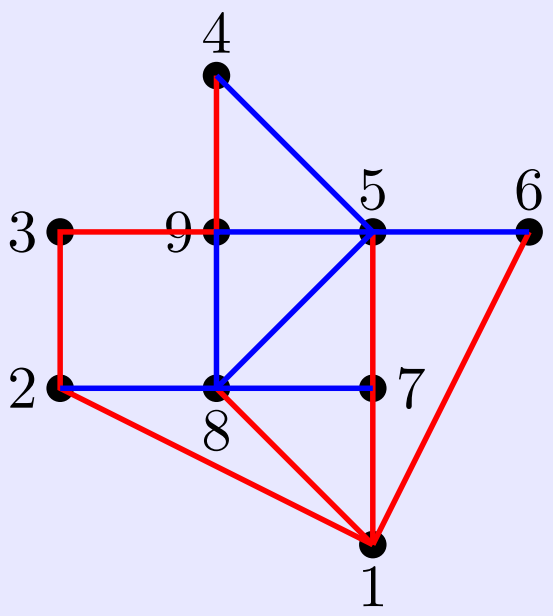
例9

分别求枝(2,3)、(1,2)的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



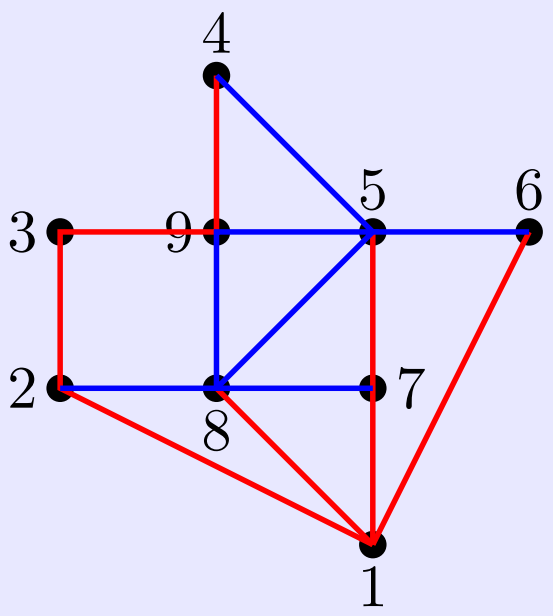
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



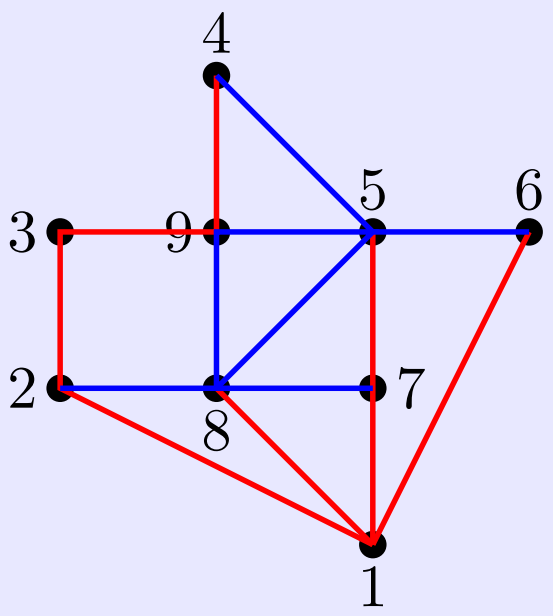
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



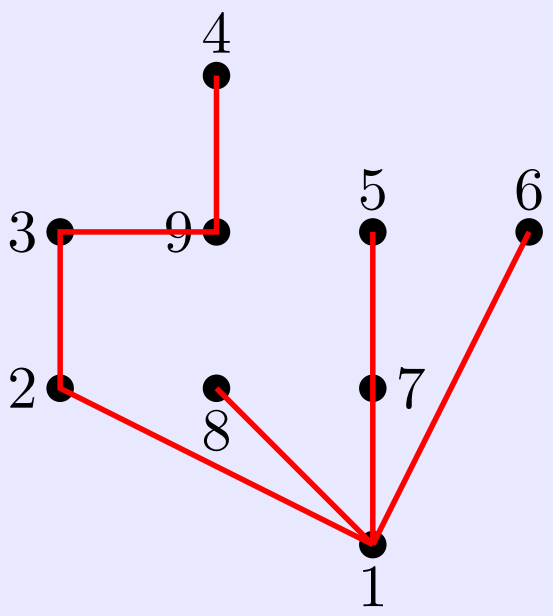
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



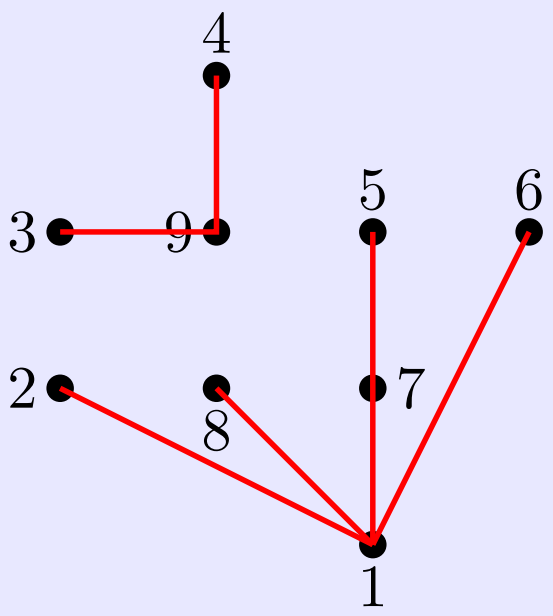
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



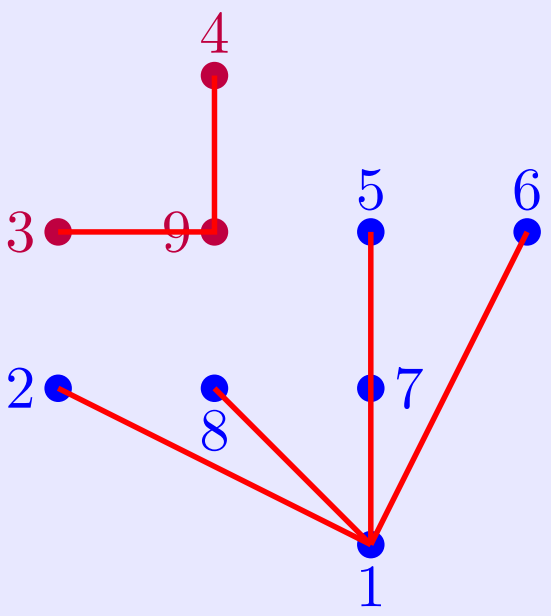
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



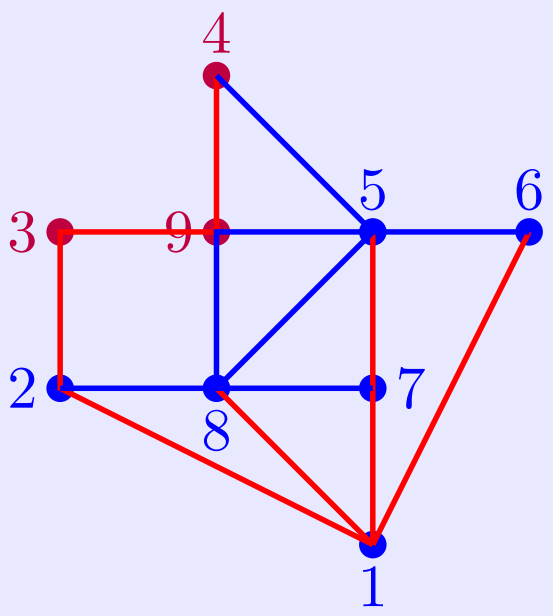
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



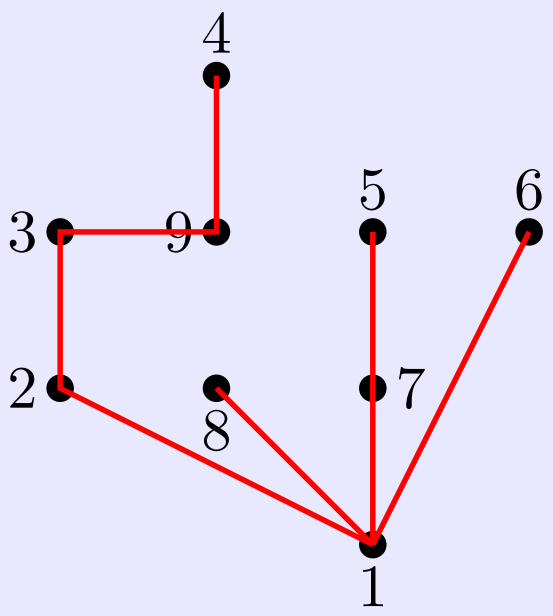
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



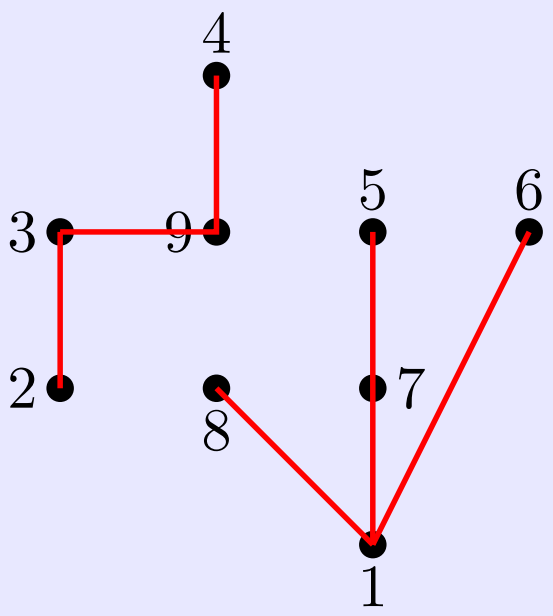
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



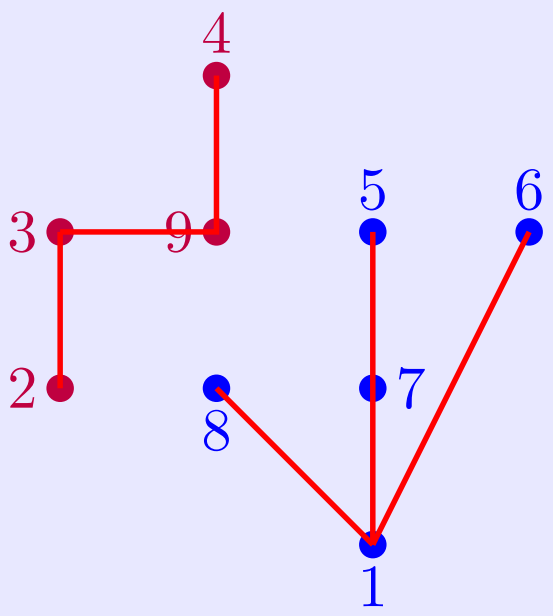
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



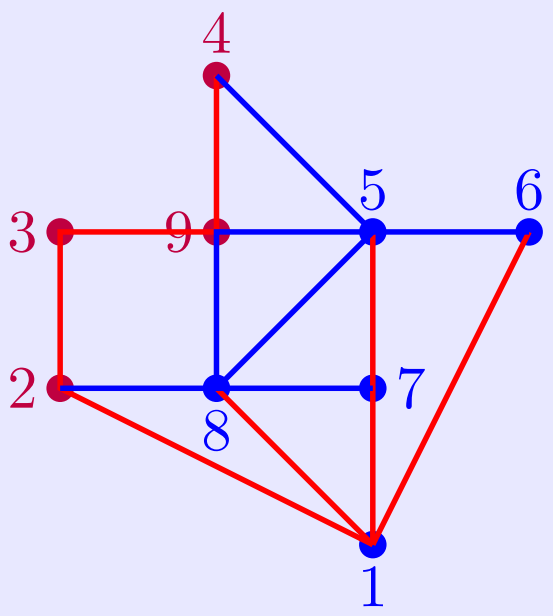
例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

定理14

设T是图G是生成树，则

1. G的任意割集至少包含一条枝；
2. 若e是T的枝，则G中存在一条且只存在一条只包含枝e，其余都是弦的割集。其称为G的对应T的枝e的基本割集



例9

分别求枝$(2,3)$、$(1,2)$的基本割集

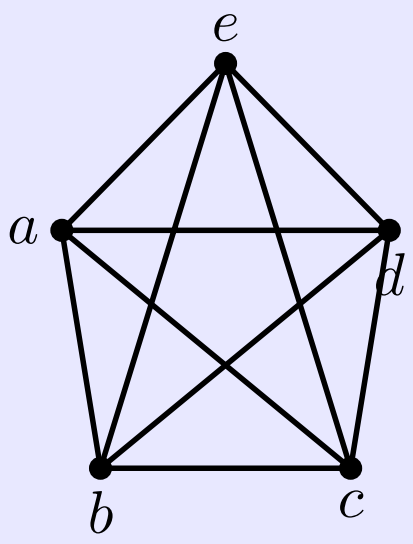
定理15

若T是简单图G的一个生成树，x是T的一条枝，y是T的一条弦，则x在由y确定的基本回路上，当且仅当y在由x确定的基本割集上。

定义26

在一张图中，

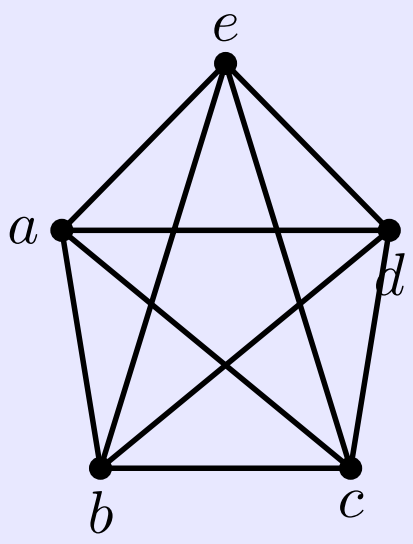
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定义26

在一张图中，

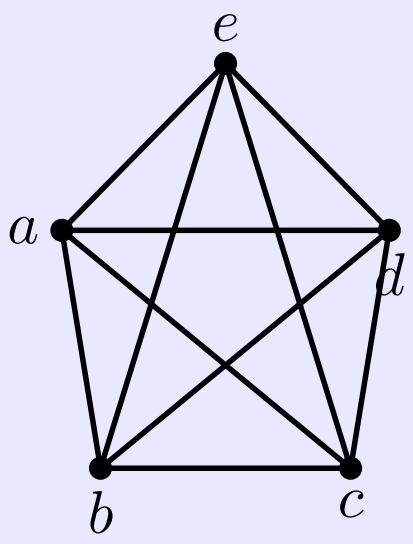
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定义26

在一张图中，

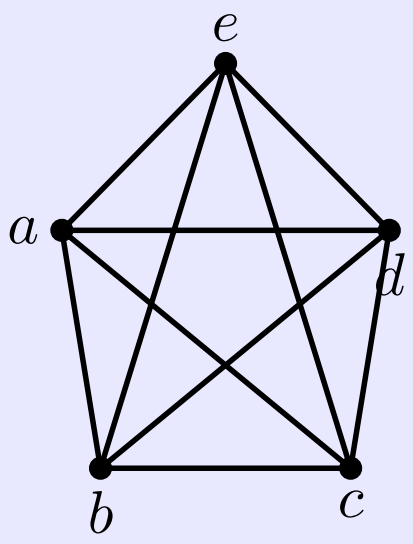
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定义26

在一张图中，

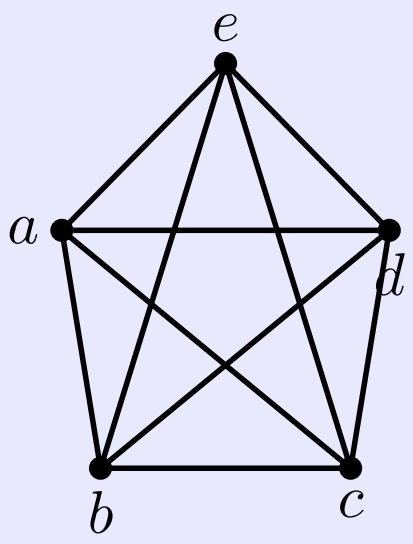
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定义26

在一张图中，

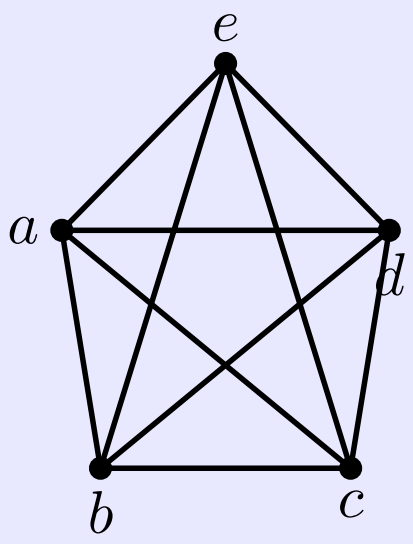
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定义26

在一张图中，

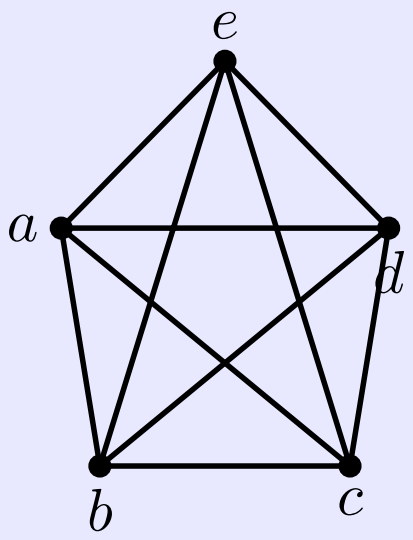
- 包含所有边的迹称为欧拉迹
- 包含所有边的闭迹称为欧拉闭迹
- 包含所有边的开迹称为欧拉开迹
- 具有欧拉闭迹的图称为欧拉图
- 具有欧拉开迹而无欧拉闭迹的图称为半欧拉图



定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

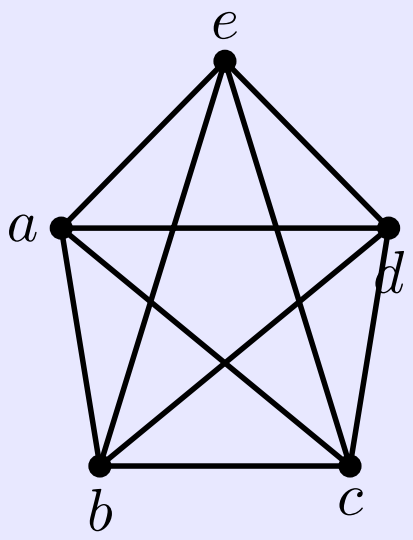


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

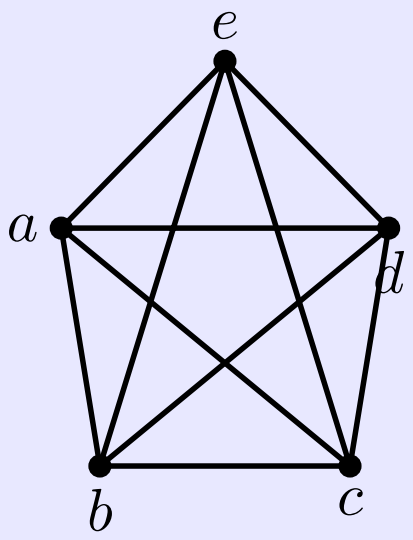


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

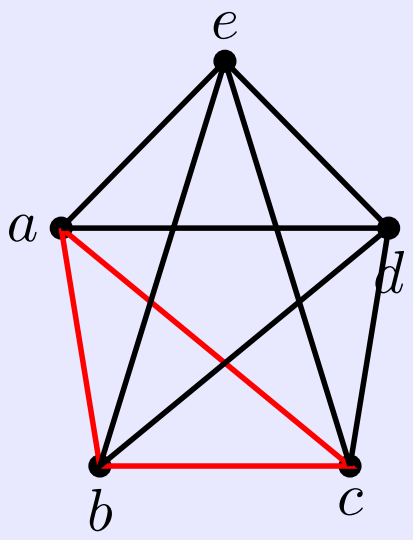


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

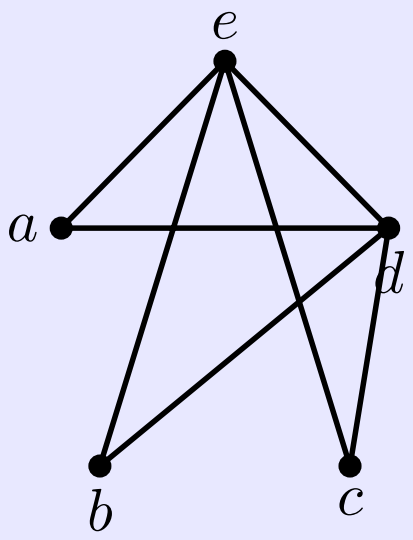


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

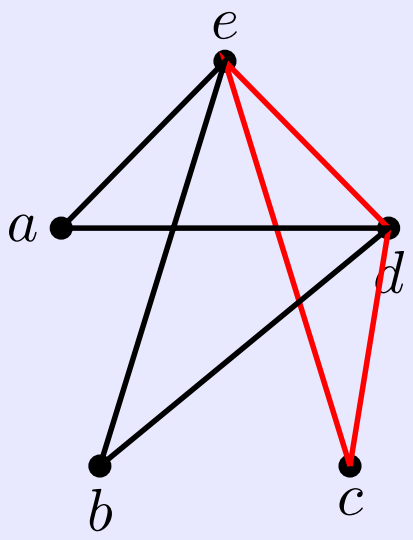


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

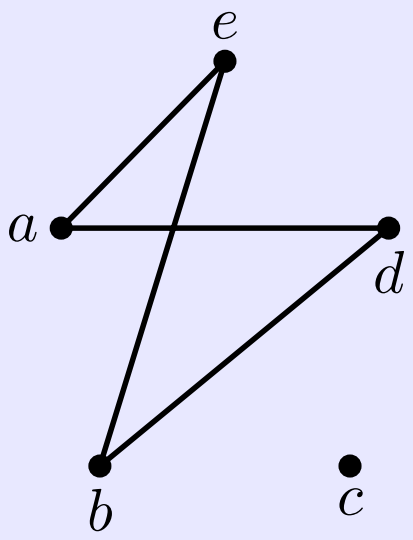


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

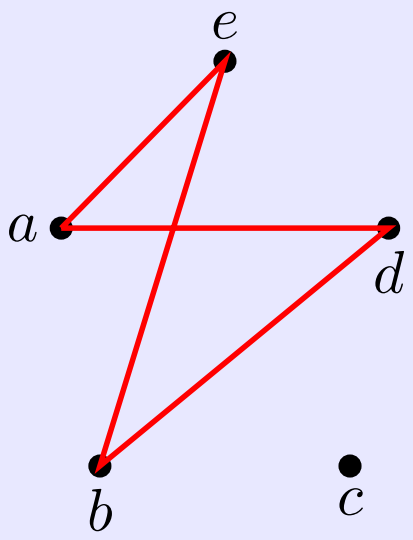


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

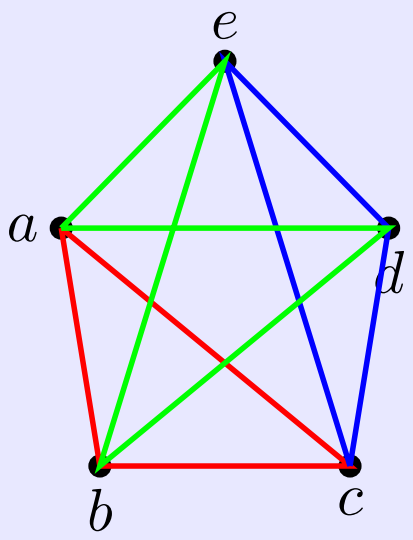


练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并



练习5 (P220-1、4)

定理16

若G是非平凡连通图,则下述命题等价:

1. G是欧拉图
2. G中无奇点
3. G可以表示为若干条回路边不相交的并

练习5 (P220-1、4)

定理17

设G是非平凡连通图，则下述命题等价

1. G是半欧拉图
2. G恰有两个奇点

定理18

若连通图G中恰有$2n$个奇点，则G可以表示为至少n条开迹的边不相交的并。

定理17

设G是非平凡连通图，则下述命题等价

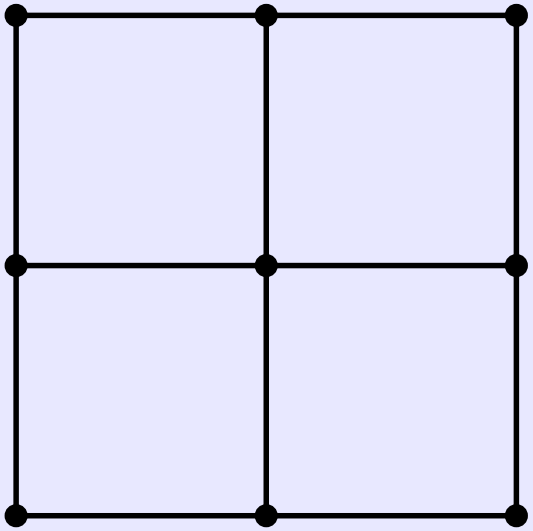
1. G是半欧拉图
2. G恰有两个奇点

定理18

若连通图G中恰有$2n$个奇点，则G可以表示为至少n条开迹的边不相交的并。

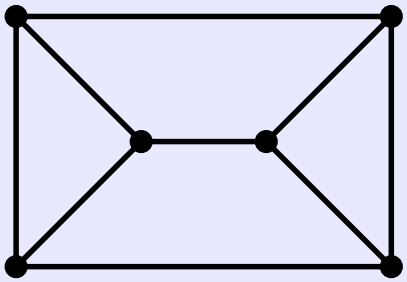
例10

某一工作是用一条连续曲线与图的每条边各相交一次，证明这一工作对于右图可以用一条封闭曲线完成



例10

某一工作是用一条连续曲线与图的每条边各相交一次，证明这一工作对于右图只能用一条非封闭的曲线完成



定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

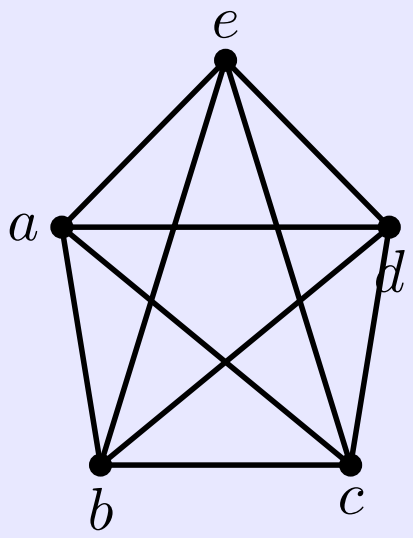
- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)

定义27 (哈密尔顿图)

- 图G的一条生成路称为哈密尔顿路
- 生成回路称为哈密尔顿回路
- 生成开路称为哈密尔顿开路
- 具有汉密尔顿回路的图称为哈密尔顿图
- 具有哈密尔顿开路，没有哈密尔顿回路的图称为半哈密尔顿图

例11 ($K_p, p \geq 3$是哈密尔顿图)



1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路

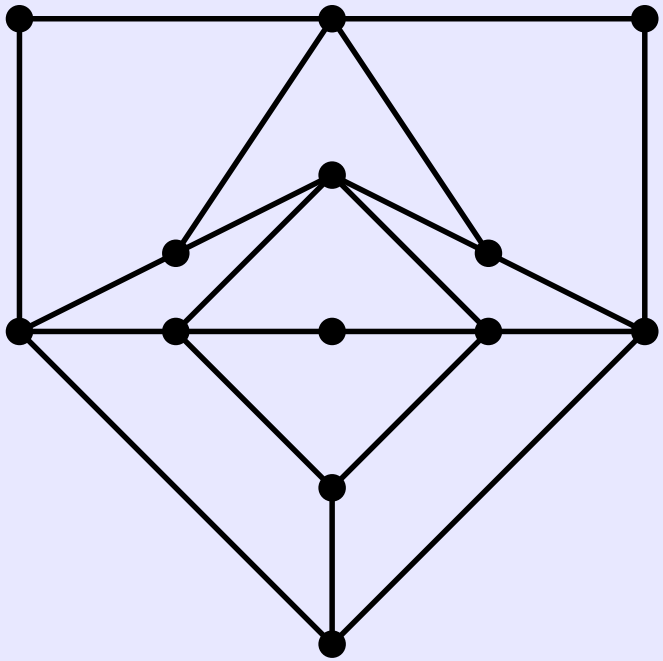
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路

1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路

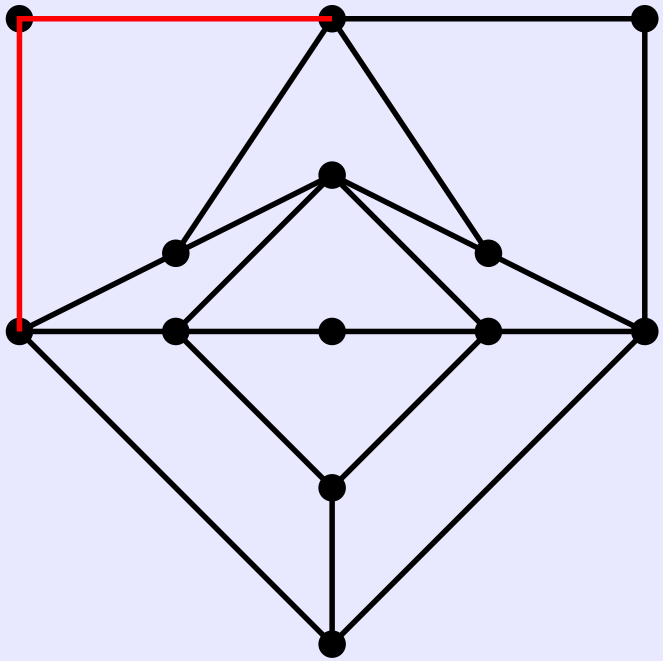
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路

1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路

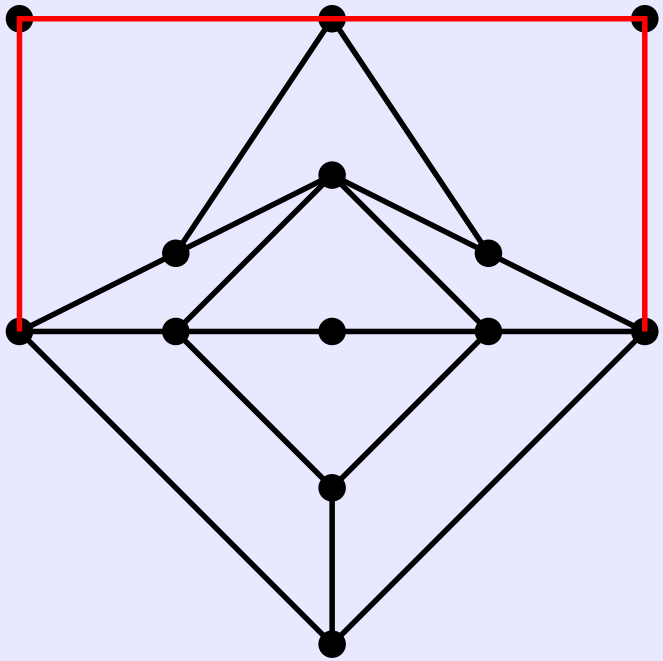
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



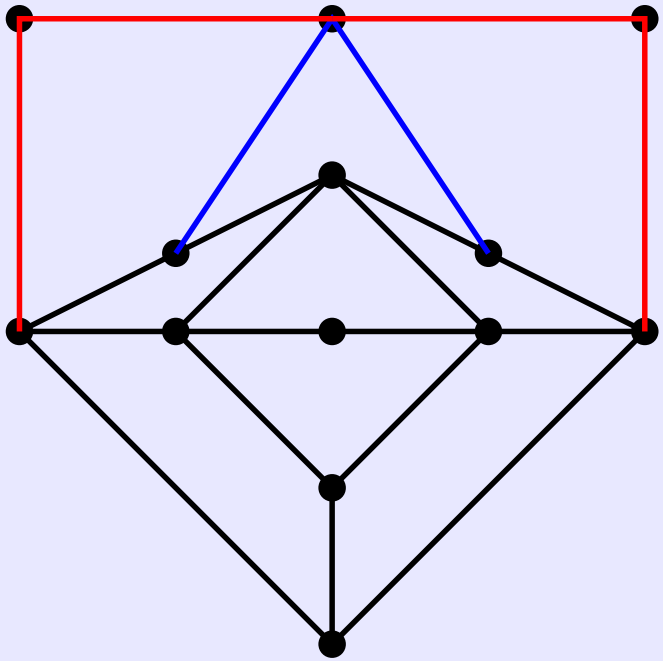
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



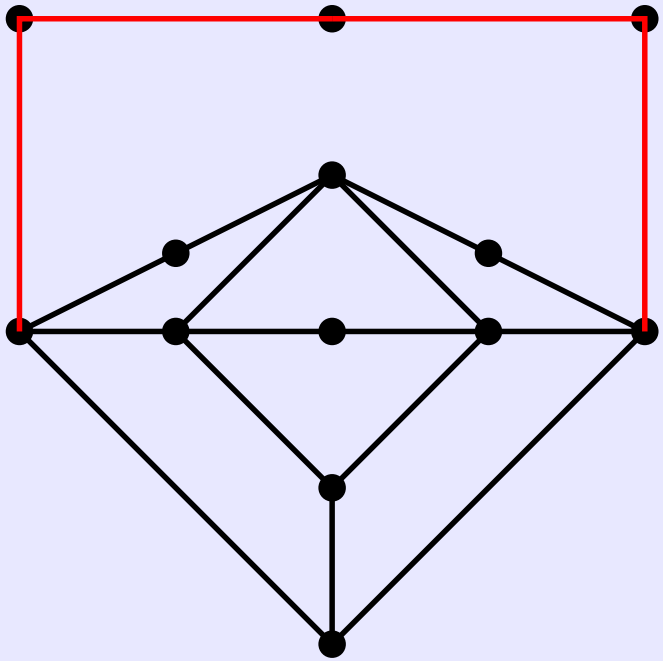
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



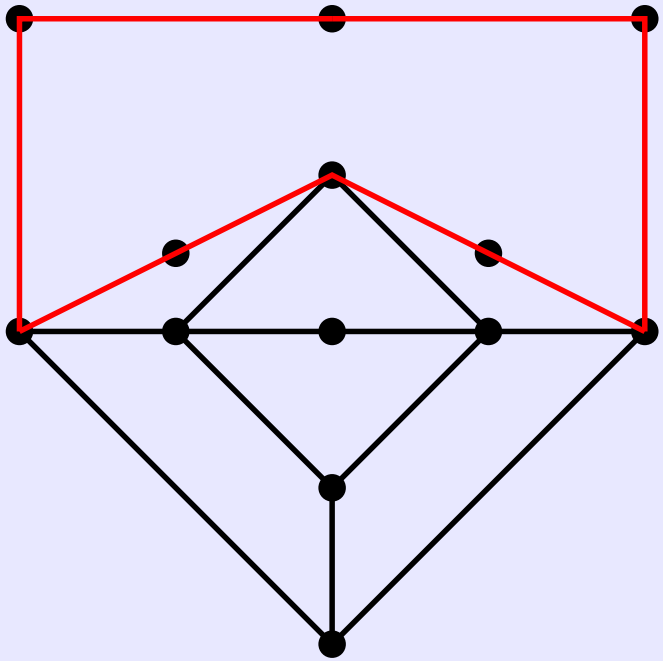
1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



1. 每个哈密尔顿图都连通
2. 哈密尔顿图的每个顶点的度数大于等于2
3. 一个图若有哈密尔顿回路，则度数为2的顶点所关联的两条边一定在哈密尔顿回路上。
4. 若某图有哈密尔顿回路，则必须在该哈密尔顿回路中出现的边不能构成一个未经过所有顶点的回路



定理19

设G是(p,q)简单图，$p \geq 3$。若对于G中任意两点u,v，都有

$$d(u)+d(v) \geq p$$

则G是哈密尔顿图。

定理20

设G是(p,q)简单图，$p \geq 2$。若对于G中任意两点u,v，都有

$$d(u)+d(v) \geq p-1$$

则G是半哈密尔顿图。

定理19

设G是(p,q)简单图，$p \geq 3$。若对于G中任意两点u,v，都有

$$d(u)+d(v) \geq p$$

则G是哈密尔顿图。

定理20

设G是(p,q)简单图，$p \geq 2$。若对于G中任意两点u,v，都有

$$d(u)+d(v) \geq p-1$$

则G是半哈密尔顿图。

定理21

设G是哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过k。

定理22

设G是半哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过$k+1$。

作业4 (P220-8、16)

定理21

设G是哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过k。

定理22

设G是半哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过$k+1$。

作业4 (P220-8、16)

定理21

设G是哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过k。

定理22

设G是半哈密尔顿图，从G中去除任意k个点以及与之关联的边后所得到图记为G'，则G'的连通分图数不超过$k+1$。

作业4 (P220-8、16)

定义28 (“平面图”、平面嵌入、”非平面图”)

- 将图G画在一个曲面S上，使得G的任意两条边均不交叉，则称G被嵌入曲面S;
- 可以嵌入平面的图被称为平面图;
- 一个平面图嵌入平面后得到的任何两条边都不交叉的图称为平面图的一个平面嵌入;

定义28 (“平面图”、平面嵌入、”非平面图”)

- 将图G画在一个曲面S上，使得G的任意两条边均不交叉，则称G被**嵌入曲面**S;
- 可以嵌入平面的图被称为**平面图**;
- 一个平面图嵌入平面后得到的任何两条边都不交叉的图称为平面图的一个**平面嵌入**;

定义28 (“平面图”、平面嵌入、”非平面图”)

- 将图G画在一个曲面S上，使得G的任意两条边均不交叉，则称G被**嵌入曲面**S;
- 可以嵌入平面的图被称为**平面图**;
- 一个平面图嵌入平面后得到的任何两条边都不交叉的图称为平面图的一个**平面嵌入**;

定义28 (“平面图”、平面嵌入、”非平面图”)

- 将图G画在一个曲面S上，使得G的任意两条边均不交叉，则称G被**嵌入曲面**S;
- 可以嵌入平面的图被称为**平面图**;
- 一个平面图嵌入平面后得到的任何两条边都不交叉的图称为平面图的一个**平面嵌入**;

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定义29 (“面、边界、围数”)

设G是平面图的一个平面嵌入，则G的边将G所在平面划分成若干连通的区域

- 每个连通区域被称为G的一个面
- 面积无限的区域称为外部面，用R_0表示
- 面积有限的区域称为内部面，用$R_1, R_2, \cdots$表示
- 包围面的所有边组成该面的边界
- 面R的边界的长度称为该面的围数，记为$bou(R)$

定理23 (“维数定理”)

设G是(p,q)连通平面图的一个平面嵌入，其面为$R_0, R_1, \cdots, R_{f-1}$，则

$$\sum_{i=0}^{f-1} bou(R_i) = 2q$$

并称$\sum_{i=0}^{f-1} bou(R_i)$为该平面图的总围数，记为$bou(G)$。

定理24 (“欧拉公式”)

设G是(p,q)连通平面图的一个平面嵌入，其面数为f，则

$$p-q+f=2$$

若G的有k个连通分图的平面图，则

$$p-q+f=k+1$$

定理25

设G是(p,q)连通平面图的一个平面嵌入，且其每个面至少由$l(l \geq 3)$条边围成，则

$$q \leq \frac{l}{l-2}(p-2)$$

若G是有k个连通分图的平面图，则

$$q \leq \frac{l}{l-2}(p-k+1)$$

定理26

设G是$(p,q), p \geq 3$简单平面图的一个平面嵌入，则$q \leq 3p-6$。

定理27

设G是(p,q)简单平面图的一个平面嵌入，则$\delta(G) \leq 5$

推论3

$K_5, K_{3,3}$均非平面图。

定理26

设G是$(p,q), p \geq 3$简单平面图的一个平面嵌入，则$q \leq 3p-6$。

定理27

设G是(p,q)简单平面图的一个平面嵌入，则$\delta(G) \leq 5$

推论3

$K_5, K_{3,3}$均非平面图。

定理26

设G是$(p,q), p \geq 3$简单平面图的一个平面嵌入，则$q \leq 3p-6$。

定理27

设G是(p,q)简单平面图的一个平面嵌入，则$\delta(G) \leq 5$

推论3

$K_5, K_{3,3}$均非平面图。

定义30 (“同构”)

设$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$是两个图，若存在双射

$$\phi : V_1 \to V_2$$

使得当且仅当$(u, v) \in E_1$有$(\phi(u), \phi(v)) \in E_2$，
且(u, v)与$(\phi(u), \phi(v))$的重数相等，则称G_1, G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$

定义30 (“同构”)

设$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$是两个图，若存在双射

$$\phi : V_1 \to V_2$$

使得当且仅当$(u, v) \in E_1$有$(\phi(u), \phi(v)) \in E_2$，
且(u, v)与$(\phi(u), \phi(v))$的重数相等，则称G_1, G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$

性质1 (“同胚”)

- 设$e=(u,v)$是图G的一条边，在G中增加新顶点w，并用$(u,w),(w,v)$代替原来的边(u,v)，这样的操作称为在G中插入2度顶点
- 设w是G中的2度点，w与u,v邻接，删除w以及关联的边，并增加边(u,v)，这样的操作被称为在G中消去2度顶点
- 若图G_1,G_2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1,G_2同胚

性质1 (“同胚”)

- 设$e=(u,v)$是图G的一条边，在G中增加新顶点w，并用$(u,w),(w,v)$代替原来的边(u,v)，这样的操作称为在G中插入2度顶点
- 设w是G中的2度点，w与u,v邻接，删除w以及关联的边，并增加边(u,v)，这样的操作被称为在G中消去2度顶点
- 若图G_1,G_2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1,G_2同胚

性质1（“同胚”）

- 设$e=(u,v)$是图G的一条边，在G中增加新顶点w，并用$(u,w),(w,v)$代替原来的边(u,v)，这样的操作称为在G中插入2度顶点
- 设w是G中的2度点，w与u,v邻接，删除w以及关联的边，并增加边(u,v)，这样的操作被称为在G中消去2度顶点
- 若图G_1,G_2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1,G_2同胚

性质1（“同胚”）

- 设$e=(u,v)$是图G的一条边，在G中增加新顶点w，并用$(u,w),(w,v)$代替原来的边(u,v)，这样的操作称为在G中插入2度顶点
- 设w是G中的2度点，w与u,v邻接，删除w以及关联的边，并增加边(u,v)，这样的操作被称为在G中消去2度顶点
- 若图G_1,G_2同构，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1,G_2同胚

定理28 (“库拉托斯基定理”)

G是平面图的充要条件是其没有与$K_5, K_{3,3}$同胚的子图。

定义31 (点着色)

- 对无圈图G的每个顶点涂上一种颜色，使得相邻顶点涂不同的颜色，则称对G的一种点着色；
- 如果能够用k中颜色给G点着色，则称G是k点可着色；
- 如果G是k点可着色，但不是$k-1$点可着色，则称G的点色数为k，记为$\chi(G)=k$；

定义31 (点着色)

- 对无圈图G的每个顶点涂上一种颜色，使得相邻顶点涂不同的颜色，则称对G的一种点着色；
- 如果能够用k中颜色给G点着色，则称G是k点可着色；
- 如果G是k点可着色，但不是$k-1$点可着色，则称G的点色数为k，记为$\chi(G)=k$；

定义31 (点着色)

- 对无圈图G的每个顶点涂上一种颜色，使得相邻顶点涂不同的颜色，则称对G的一种点着色；
- 如果能够用k中颜色给G点着色，则称G是k点可着色；
- 如果G是k点可着色，但不是$k-1$点可着色，则称G的点色数为k，记为$\chi(G)=k$；

定义31 (点着色)

- 对无圈图G的每个顶点涂上一种颜色，使得相邻顶点涂不同的颜色，则称对G的一种点着色；
- 如果能够用k中颜色给G点着色，则称G是k点可着色；
- 如果G是k点可着色，但不是$k-1$点可着色，则称G的点色数为k，记为$\chi(G)=k$；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

性质2

- 若G是无圈图，则$\chi(G)=1$的充要条件是G是零图；
- 若G是非零无圈图，则$\chi(G)=2$的充要条件是G是二部图；
- $\chi(K_p)=p$；
- 四色定理平面图的点色数不超过4；

例12

- 求环型图"C_n"的点色数

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n\text{是偶数} \\ 3 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

- 求轮型图"W_n"的点色数

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & n\text{是偶数} \\ 4 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

例12

- 求环型图"C_n"的点色数

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n\text{是偶数} \\ 3 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

- 求轮型图"W_n"的点色数

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & n\text{是偶数} \\ 4 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

例12

- 求环型图"C_n"的点色数

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n\text{是偶数} \\ 3 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

- 求轮型图"W_n"的点色数

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & n\text{是偶数} \\ 4 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

例12

- 求环型图"C_n"的点色数

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n\text{是偶数} \\ 3 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

- 求轮型图"W_n"的点色数

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & n\text{是偶数} \\ 4 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

定理29

对于任意无圈图G，必有

$$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$$

定理30（布鲁克斯定理）

设无圈图G既不是完全图$K_p, p \geq 3$，也不是奇数阶环型图，则

$$\chi(G) \leq \triangle(G)$$

定理29

对于任意无圈图G，必有

$$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$$

定理30 (布鲁克斯定理)

设无圈图G既不是完全图$K_p, p \geq 3$，也不是奇数阶环型图，则

$$\chi(G) \leq \triangle(G)$$

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法:

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列;
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法：

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列；
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法：

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列；
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法：

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列；
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法：

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列；
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例13 (求下列各个图的“点色数”)

Wwlch-powell着色法：

1. 将顶点按度数不增的方式从左至右排列；
2. 将序列中第一个点着色，并按从左至右的次序，凡与已着色顶点不邻接的点着同一种颜色，直至序列末位
3. 从序列中去除已着色点
4. 重复前两个步骤，直至序列为空

例14 (“排课问题”)

如何安排一所大学中的期末考试，使得没有学生在同一时间有两门考试？

定义32 (邻接矩阵)

设$G = \langle V, E \rangle$是一个p阶图，其中$V = \{v_1, \cdots, v_p\}$，称$p \times p$阶矩阵

$$A_G = (a_{ij})_{p \times p}$$

为G的**邻接矩阵**，其中a_{ij}表示连接v_i, v_j的边的数目。

注3

定义32 (邻接矩阵)

设$G=\langle V,E\rangle$是一个p阶图，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，称$p\times p$阶矩阵

$$A_G=(a_{ij})_{p\times p}$$

为G的邻接矩阵，其中a_{ij}表示连接v_i,v_j的边的数目。

注3

- 对于不同次序的顶点序列，同一个图的邻接矩阵可能不同；
- 同一个图的不同邻接矩阵总可以通过交换某些行以及相应的列来相互转化；

定义32 (邻接矩阵)

设$G=\langle V,E\rangle$是一个p阶图，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，称$p\times p$阶矩阵

$$A_G=(a_{ij})_{p\times p}$$

为G的邻接矩阵，其中a_{ij}表示连接v_i,v_j的边的数目。

注3

- 对于不同次序的顶点序列，同一个图的邻接矩阵可能不同；
- 同一个图的不同邻接矩阵总可以通过交换某些行以及相应的列来相互转化；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

性质3

(p,q)图G的邻接矩阵A_G具有如下性质：

- A_G是对称非负整数矩阵；
- G是无圈图，当且仅当A_G主对角线元素全为0；
- G是简单图，当且仅当A_G是主对角线全为0的对称$(0,1)$矩阵；
- G是完全图，当且仅当A_G的元素除主对角线元素全为0外，其余均为1；
- 若G是无圈图，则$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = d(v_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} = 2q$；

例15（求图的邻接矩阵）

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例15 (求图的邻接矩阵)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理31

设A是p阶图G的邻接矩阵，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，则A^n中的元素$a_{ij}^{(n)}$等于连接v_i,v_j的长度为n的通道的数目。

推论4

- $d(v_i,v_j)$是使得A^n中元素$a_{ij}^{(n)}\neq 0$的最小正整数；
- 记$B_k=A+A^2+\cdots+A^k$，则$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}$是图中连接$v_i,v_j$的长度不超过$k$的通道总数，而$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}b_{ij}^{(k)}$是$G$中长度不超过$k$的通道总数。

定理31

设A是p阶图G的邻接矩阵，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，则A^n中的元素$a_{ij}^{(n)}$等于连接v_i,v_j的长度为n的通道的数目。

推论4

- $d(v_i,v_j)$是使得A^n中元素$a_{ij}^{(n)}\neq 0$的最小正整数；
- 记$B_k=A+A^2+\cdots+A^k$，则$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}$是图中连接$v_i,v_j$的长度不超过$k$的通道总数，而$\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}b_{ij}^{(k)}$是$G$中长度不超过$k$的通道总数。

定理31

设A是p阶图G的邻接矩阵，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，则A^n中的元素$a_{ij}^{(n)}$等于连接v_i,v_j的长度为n的通道的数目。

推论4

- $d(v_i,v_j)$是使得A^n中元素$a_{ij}^{(n)}\neq 0$的最小正整数；
- 记$B_k=A+A^2+\cdots+A^k$，则$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}$是图中连接$v_i,v_j$的长度不超过$k$的通道总数，而$\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}b_{ij}^{(k)}$是$G$中长度不超过$k$的通道总数。

定理31

设A是p阶图G的邻接矩阵，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，则A^n中的元素$a_{ij}^{(n)}$等于连接v_i,v_j的长度为n的通道的数目。

推论4

- $d(v_i,v_j)$是使得A^n中元素$a_{ij}^{(n)}\neq 0$的最小正整数；
- 记$B_k=A+A^2+\cdots+A^k$，则$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(k)}$是图中连接$v_i,v_j$的长度不超过$k$的通道总数，而$\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}b_{ij}^{(k)}$是$G$中长度不超过$k$的通道总数。

推论5

- 设$B_{p-1}=A+A^2+\cdots+A^{p-1}$，当$i\neq j$时，若$b_{ij}^{(p-1)}\neq 0$，则存在$v_i$到$v_j$的路。反之亦然；
- 设$B_p=A+A^2+\cdots+A^p$，当$i=j$时，若$b_{ij}^{(p)}\neq 0$，则存在过v_i的回路，反之亦然；

推论5

- 设$B_{p-1} = A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$，当$i \neq j$时，若$b_{ij}^{(p-1)} \neq 0$，则存在$v_i$到$v_j$的路。反之亦然；
- 设$B_p = A + A^2 + \cdots + A^p$，当$i = j$时，若$b_{ij}^{(p)} \neq 0$，则存在过$v_i$的回路，反之亦然；

推论5

- 设$B_{p-1}=A+A^2+\cdots+A^{p-1}$，当$i\neq j$时，若$b_{ij}^{(p-1)}\neq 0$，则存在$v_i$到$v_j$的路。反之亦然；
- 设$B_p=A+A^2+\cdots+A^p$，当$i=j$时，若$b_{ij}^{(p)}\neq 0$，则存在过v_i的回路，反之亦然；

定义33（关联矩阵）

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，$E=\{e_1,\cdots,e_q\}$，则称$p\times q$阶矩阵

$$M_G=(m_{ij})_{p\times q}$$

为G的**关联矩阵**，其中m_{ij}是顶点v_i与边e_j的关联次数。

例16（求图的关联矩阵）

定义33 (关联矩阵)

设$G=\langle V,E\rangle$是(p,q)图，其中$V=\{v_1,\cdots,v_p\}$，$E=\{e_1,\cdots,e_q\}$，则称$p\times q$阶矩阵

$$M_G=(m_{ij})_{p\times q}$$

为G的**关联矩阵**，其中m_{ij}是顶点v_i与边e_j的关联次数。

例16 (求图的关联矩阵)

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;

注4

- M_G的每一列元素之和为2;
- M_G中，平行边对应的列相同;
- M_G中，每一行元素之和等于对应顶点的度数，即$\sum_{j=1}^{q} m_{ij} = d(v_i)$;
- M_G中，所有元素的和等于边数的两倍;
- M_G中，如果某行元素全为0，则其对应顶点为孤立点;