一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

得分	

1、对于任意随机事件 A, B，下列等式成立的是（ D ）.

(A) $P(AB) = P(A)P(B)$　　(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(C) $P(B \mid A) = P(B)$　　(D) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2、设 $F(X)$ 为某随机变量 X 的分布函数，则下列等式不正确的是（ B ）

(A) $F(x) \geq 0$　　(B) $F(x) = P\{X = x\}$

(C) $F(x) \leq 1$　　(D) $F(X)$ 是单调递增函数

3、关于两个随机变量“独立”和“不相关”的关系，以下说法正确的是（ C ）

(A)“独立”与“不相关”等价　　(B)“不相关”必定“独立”

(C)“独立”必定“不相关”　　(D) 以上说法都不对

4、设 X_1，X_2，X_3，X_4 是来自总体 $X \sim b(1, p)$ 的随机样本，p 为未知参数，则下列统计量是 p 的无偏估计量是（ D ）

(C) $\sum_{i=1} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(1)$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分

1、设事件 A, B 相互独立，且 P

$=$ 0.36

2、已知某著名乐队的 5 个

者，则选中的人选恰为 1 男 1

3、设随机变量 X 的概率

4、已知 X_1，X_2，…

样本均值和样本方差，则

是______ $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$

5、已知 $X \sim b(100, 0.$

(A) $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3+X_4)$　　　　(B) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3+\frac{1}{3}X_4$

(C) $\frac{1}{6}X_1+\frac{2}{3}X_2-\frac{1}{6}X_3-\frac{1}{6}X_4$　　　　(D) $\frac{1}{4}(X_1+X_2+X_3+X_4)$

5、设 X_1，X_2，X_3，…，X_n 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的样本，x_1，x_2，x_3，…，x_n 为相应的样本值，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则下列结论正确的是（ A ）

(A) $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$　　　　(B) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\sim\chi^2(1)$

(C) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(1)$　　　　(D) $n(x_i-\bar{x})^2\sim\chi^2(1)$

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

得分	

1、设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=P(B)=0.2$，则 A,B 至少一个发生的概率 = 0.36

2、已知某著名乐队的 5 个成员中有 3 个是男的，现随机选 2 个代表参加某产品的代言，则选中的人选恰为 1 男 1 女的概率= $\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$

3、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ce^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0,\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 c= $\frac{1}{2}$

4、已知 X_1，X_2，…，X_n 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 均未知，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则利用 t 检验法检验假设 $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 的检验统计量是 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$

5、已知 $X\sim b(100,0.2)$，$Y\sim\pi(1)$，则 $D(X-Y)$= 17

且X,Y独立

三、(本题 5 分)

得分	

设离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ 0.3, & -3\le x<-2\\ 0.6, & -2\le x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，

求 X 的概率分布律。

X	-3	-2	0
P	0.3	0.3	0.4

四、(本题 5 分)

得分	

某高校将举办 2018 届毕业典礼，由于毕业实习等原因，毕业生参加毕业典礼的概率为 0.7，设毕业生是否参加典礼相互独立，已知该校的毕业生总数为 2100 名，求至少有 1500 名毕业生参加毕业典礼概率。(结果用 $\Phi(\cdot)$ 表示)

设 $X_i=\begin{cases}1 & 第i个学生参加\\ 0 & \cdots\cdots 不参加\end{cases}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2100} X_i - 2100\cdot 0.7}{\sqrt{2100\cdot 0.7\cdot 0.3}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{2100} X_i \geq 1500\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{2100} X_i-1470}{21} \geq \frac{1500-1470}{21}\right)=1-\Phi\left(\frac{10}{7}\right)$$

五、(本题 15 分)

得分	

设随机变量(X,Y)的概率分布律如右表:

Y \ X	0	1
0	0.35	0.05
1	0.15	0.45

求:(1) 关于 XY 的分布律;

(2) $P(Y = 0 \mid X = 1)$ 的值;

(3) $D(Y)$ 的值;

(4) $Cov(X, Y)$ 的值。

(1)

XY	0	1
P	0.55	0.45

(2) $P(X=0 \mid Y=1) = \dfrac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{0.15}{0.15+0.45} = \dfrac{1}{4}$

(3) $D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0.6 \cdot 1^2 + (0.6 \cdot 1)^2 = 0.24$

(4) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= 0.45 - 0.5 \cdot 0.6 = 0.15$

六、（本题 18 分）

得分	

设二维随机变量(X,Y)的概率函数为：

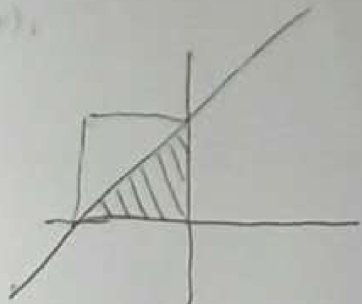
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{3}(1+xy), & -1<x<0,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) 关于X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$；

(2) 概率$P\{Y\le X+1\}$；

(3) 判断X与Y相互独立，并说明理由；

(4) $E(X)$的值。



(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{4}{3}(1+xy)dy=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x$, $-1<x<0$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x, & -1<x<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-1}^{0}\frac{4}{3}(1+xy)dx=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}y$, $0<y<1$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{3}-\frac{1}{2}y, & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $P(Y\le X+1)=\iint\limits_{y\le x+1}\frac{4}{3}(1+xy)dxdy$

$=\int_{-1}^{0}dx\int_0^{x+1}\frac{4}{3}(1+xy)dy=\int_{-1}^{0}\frac{4}{3}(x+1)+\frac{2}{3}x(x+1)^2dx$

$=\frac{23}{36}$

(3) $\because f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ $\therefore$ 不相互独立

(4) $E(X)=\int_{-1}^{0}x(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x)dx=-\frac{4}{9}$

七、（本题 8 分）

得分	

设总体 $X \sim B(1, p)$，p 为未知参数，$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 为相应的样本值，试求 p 的矩估计值和最大似然估计值。

矩估计. $\because \mu = p$　　$\therefore \hat{p} = \hat{\mu} = \bar{x}$

最大似然估计.

似然函数 $L = \prod_{i=1}^{n} P(X=x_i) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$(\because P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$，参见书上例题)

$\ln L = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1-p)$

令 $(\ln L)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i \cancel{+} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$

$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

八、(本题 6 分)

得分	

为测试复兴号高铁行驶最大速度，现对复兴号高铁进行了 9 次独立测速，测得最大速度如下（单位：km/h）420, 410, 395, 390, 415, 410, 390, 410, 405。已知复兴号高铁的最大速度 X 服从正态分布 $N(\mu, 6^2)$，试求复兴号高铁最大行驶速度的置信水平为 0.95 的单侧区间上限。（已知 $z_{0.025} = 1.96$，$z_{0.05} = 1.64$，计算结果保留两位小数。）

由题知 置信区间为 $\left[\bar{x} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\, z_{0.025}\right]$

代入 $n = 9$ $z_{0.025} = 1.96$

计算 $\bar{x} = \frac{1}{9}(420+410+395+\cdots+405) = \frac{1}{9}3635 \approx 404$

∴ 区间 $\left(404 - \frac{6}{3}1.96,\ 404 + \frac{6}{3}1.96\right)$

九、(本题 8 分)

得分	

为研究某学期概率论与数理统计男女生期中成绩差异情况，经随机抽样得：25 名女生的成绩平均分 $\bar{x} = 73$ 分，标准差 $s_1 = 5$ 分；30 名男生的成绩平均分 $\bar{y} = 78$ 分，标准差 $s_2 = 6$ 分。已知男女生成绩分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，试问在显著水平为 $\alpha = 0.1$ 下，能否认为男女生成绩的方差无显著差异？（已知 $F_{0.05}(24, 29) = 2.15$，$F_{0.95}(24, 29) = 0.44$，计算结果保留两位小数。）

由题 令原假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

选取检验统计量 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(24, 29)$

拒绝域：$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{0.05}(24\ 29)$ 或 $\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{0.95}(24, 25)$

代入 $S_1 = 5$ $S_2 = 6$ $\frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36} \in (0.44, 2.15)$

故接受 H_0，认为无显著差异

十、证明题（本题 5 分）

得分	

设 X 为连续性随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$, $x \in R$，且存在期望 $E(X) = \mu$

方差 $D(X) = \sigma^2$，证明：对于任意 $\varepsilon > 0$，成立不等式：$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$。

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \int\limits_{|x-\mu| \geq \varepsilon} \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{R} (x-\mu)^2 f(x)dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

（同书上切比雪夫不等式一模一样）