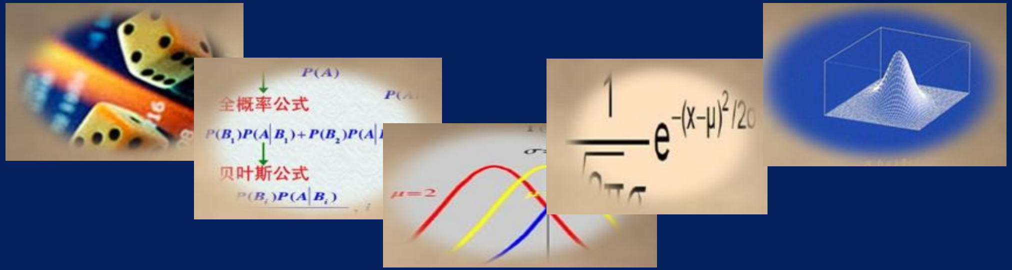
第六章 抽样分布

6.1 随机样本



杨建芳

内容提要

样本和抽样分布

- 基本概念
  - 总体、个体、容量、样本
  - 统计量：　$\overline{X}$、S^2、S、A_k、B_k
- 三大分布（构造、性质、分位点）
  - χ^2分布
  - t分布
  - F分布
- 正态总体的样本均值和方差的分布
  - 单正态总体
    - $\overline{X}$ 的分布
      - 方差已知
      - 方差未知
    - S^2的分布
  - 双正态总体
    - $\overline{X}-\overline{Y}$ 的分布
      - 方差已知
      - 方差未知
    - S_1^2/S_2^2 的分布

第六章 抽样分布

6.3 抽样分布（5）

抽样分布定理（单个正态总体）

杨建芳

1. 关于样本均值和样本方差重要结论

★设总体X（不管服从什么分布）的期望、方差存在，记$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，

X_1，X_2，$\cdots$，X_n是来自总体X的样本，$\bar{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差，则

1）$\boldsymbol{E(\bar{X})}=E(X)=\mu$,（样本均值的期望等于总体的期望）

2）$\boldsymbol{D(\bar{X})}=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$,（样本均值的方差等于总体的方差除以$n$）

3）$\boldsymbol{E(S^2)}=D(X)=\sigma^2$.（样本方差的期望等于总体的方差）

1. 关于样本均值和样本方差重要结论

★证：1）$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}nE(X_i)=\mu,$

2）$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}nD(X_i)=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n},$

3）$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\bar{X}^2\right)\right]$

$$=\frac{1}{n-1}\{\sum_{i=1}^{n}\left[D(X_i)+\left(E(X_i)\right)^2\right]-n[D(\bar{X})+\left(E(\bar{X})\right)^2]\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2.$$

$N(\mu,\sigma^2)$

总体未知？

$\overline{X}, S^2$

服从什么分布？

2. 单个正态总体下样本均值的分布1

★设 X_1，X_2，$\cdots$，X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，

$\bar{X}$是样本均值，则有：

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$$

标准化：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 由于正态分布具有可加性，即相互独立的正态变量的线性组合仍为正态变量

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

3. 单个正态总体下样本方差的分布

★设 X_1 , X_2 , $\cdots$, X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

则

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{n}{\sigma^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}\sim\chi^2(n).$$

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

3. 单个正态总体下样本方差的分布

★设 X_1，X_2，⋯， X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

$\bar{X}$，S^2是样本均值和样本方差，则

1）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

2）$\bar{X}$与S^2相互独立.

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

定理的证明见本章末附录

4. 单个正态总体下样本均值的分布2

★设 X_1，X_2，…，X_n是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,$\bar{X}$，S^2是样本均值和样本方差，

则$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

★**证**：由前面的结论知：

1） $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$； 2）$V=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；

3） $\bar{X}$与S^2相互独立，因此U,V也相互独立

4）由t分布的定义：$t=\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}=\frac{(\bar{X}-\mu)/(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

例 1

★从正态总体$N(\mu，\sigma^2)$中抽取容量为16的样本，S^2为样本方差，试求：

（1）$P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.0386\}$；

（2）$E(S^2), D(S^2)$.

分析:1）包含$\frac{S^2}{\sigma^2}$的分布是什么？

分析:2）包含S^2的分布的期望、方差？

例 1 解

解：（1）因$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$~$\chi^2(n-1)$， $n=16$

则$P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.0386\}= P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le (n-1)\times 2.0386\}=1-P\{\chi^2>30.578\}$,

查表：$\chi_{0.01}{}^2(15)=30.577$

故$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.0386\right\}=1-0.01=0.99$

例 1 解

解：（2）因$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$， $n=16$

则由卡方分布的性质，$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=n-1$

故$E(S^2)=\frac{\sigma^2}{(n-1)}\times(n-1)=\sigma^2$

而$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)$,得$D(S^2)=\frac{2(n-1)}{(n-1)^2}\sigma^4=\frac{2\sigma^4}{15}$

单正态总体抽样分布定理

★设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,

$\bar{X}$，S^2是样本均值和样本方差，则

(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(3) $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

练习题

※设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体X的样本，下列结论不正确的是（　　　　）.

(A)$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(B) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n-1)$

(C) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(D) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

※参考答案：(B)（正确：$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\boldsymbol{\chi^2(n)}$）

第六章 抽样分布

6.3 抽样分布（6）

抽样分布定理（两个正态总体）

杨 建 芳

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\overline{X} - \overline{Y}, S_1^2 / S_2^2$

服从什么分布？

1. 两个正态总体的样本均值差的分布

★设X_1，X_2，…，X_{n1}与Y_1，Y_2，…，Y_{n2}分别是来自正态总体

$X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ 与$Y \sim N\left(\mu_2, {\sigma_2}^2\right)$ 的样本，且这两个样本相互独立.设$\bar{X}$，$\bar{Y}$分别是两

样本的样本均值，${S_1}^2$，${S_2}^2$ 是样本方差，则

（1）$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{{\sigma_1}^2/n_1+{\sigma_2}^2/n_2}} \sim N(0,1)$;（一般用于${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$已知）

（2）当${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$未知时，$t = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$，

其中 $S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

1. 两个正态总体的样本均值差的分布

★（1）分析：1）相互独立的正态分布的线性组合仍是正态分布；

2）确定相应的正态分布的期望、方差；

单个正态总体下样本均值的分布

3）因$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1{}^2}{n_1})$，$\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2{}^2}{n_2})$,独立，故

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}),$$

标准化后$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1{}^2/n_1+\sigma_2{}^2/n_2}}\sim N(0,1).$

（2）分析

1）$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1{}^2/n_1+\sigma_2{}^2/n_2}}\sim N(0,1).$

对$\overline{X}-\overline{Y}$进行标准化

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$$

两个正态总体下，

不能厚此薄彼！

σ未知，考虑用

样本标准方差替代，

用S_1还是用S_2替代？

引进联合样本方差，样本方差关于自由度的加权和

$$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

（2）分析

单个正态总体
样本方差分布

2）$V_1 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $V_2 = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

而V_1，V_2独立，由卡方分布可加性，

$$V = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2),$$

3）因为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$，

则有 $V = \frac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$.

$$S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

（2）分析

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

$$V=\frac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

且U与V相互独立, 则 由t分布定义$t=\dfrac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}}\sim t(n_1+n_2-2)$

得：$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2).$

2. 两个正态总体的样本方差比的分布

★设X_1，X_2，……，X_{n1}与Y_1，Y_2，……，Y_{n2}分别是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ 与$Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ 的样本，且这两个样本相互独立.设$\bar{X}$，$\bar{Y}$分别是两样本的样本均值，${S_1}^2$，${S_2}^2$ 是样本方差，则

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

$$F=\frac{U}{V}\bigg/\frac{n_1}{n_2}\sim F(n_1,n_2).$$

分析：$\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$， $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，

且 S_1^2 与 S_2^2 相互独立, 由**F**分布的定义可得:

$$F=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}\bigg/\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2-1)}=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

例 1

★设正态总体X~$N(20,3)$,从X中抽取两个样本$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{15}$,

试求$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>1\}$.

分析:包含$\bar{X}-\bar{Y}$的分布是什么？

解: 因$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{15}$,独立同分布，

则$\bar{X}\sim N(20,\frac{3}{10}),\ \bar{Y}\sim N(20,\frac{3}{15}),\ \ \bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\frac{3}{10}+\frac{3}{15})$

故$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>1\}=1-P\{-1\le\bar{X}-\bar{Y}\le 1\}$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.5}}\right)-\Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{0.5}}\right)\right]=1-\Phi(\sqrt{2})+[1-\Phi(\sqrt{2})]$$

$$=2(1-0.9207)=0.1586$$

练习题

※从总体$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$和$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$中分别抽取$n_1=10$,$n_2=12$的两个独立样本，而两总体方差分别为${\sigma_1}^2=4$，${\sigma_2}^2=2$，则下列结论正确的是（　　　　）.

(A)$\dfrac{{S_1}^2}{2{S_2}^2}\sim F(11,9)$　　(B) $\dfrac{{S_1}^2}{2{S_2}^2}\sim F(9,11)$

(C) $\dfrac{2{S_1}^2}{{S_2}^2}\sim F(11,9)$　　(D)$\dfrac{2{S_1}^2}{{S_2}^2}\sim F(9,11)$

※参考答案: **(B)**用结论：$\dfrac{{S_1}^2/{S_2}^2}{{\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

两个正态总体抽样分布定理

★设X_1，X_2，…，X_{n1}与Y_1，Y_2，…，Y_{n2}分别是来自正态总体$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$与$Y\sim N\left(\mu_2,{\sigma_2}^2\right)$的样本，且这两个样本相互独立.设$\bar{X}$，$\bar{Y}$分别是两样本的样本均值，${S_1}^2$，${S_2}^2$是样本方差，则

$$(1)\ \ U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

$$(2)\ t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

$$(3)\ \ F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

第六章 抽样分布

6.8 小结

杨建芳

主要内容（要求）

★1）理解总体与样本的概念，理解统计量的概念.

★2）掌握样本均值、样本方差及样本矩的定义、性质和计算.

★3）熟练掌握χ^2分布、t分布、F分布的定义与性质，理解上α分位点.

★4）掌握正态总体的抽样分布（定理）.

三大分布

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $X_i \sim N(0,1)$, 则

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n).$$

(2) 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 相互独立,

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

(3) 设 $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 相互独立,

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n).$$

关于样本均值和样本方差重要结论

设总体 $\boldsymbol{X}$ 的均值和方差均存在 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$,

对样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及其样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 ,

则有

$$E(\bar{X})=\mu, \quad D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}, \qquad E(S^2)=\sigma^2 .$$

单个正态总体抽样分布定理

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，样本均值和样本方差分别记为 $\bar{X}, S^2$,, 则

(1) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$， $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立.

(3) $t = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

两个正态总体抽样分布定理

设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立， 分别抽取样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$，各自的样本均值和样本方差分别记为 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$，则

(1) $Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0,1)$

(2) $t = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

(3) $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

注意符号的含义

随机变量	分布	分位点（数）
X	$N(0,1)$	z_α
χ^2	$\chi^2(n)$	$\chi_\alpha{}^2(n)$
t	$t(n)$	$t_\alpha(n)$
F	$F(n_1,n_2)$	$F_\alpha(n_1,n_2)$

练习题1

※设X_1，X_2，X_3，X_4，X_5为来自总体$N(0,1)$的样本，若$Y=\frac{a(X_4+X_5)}{\sqrt{{X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2}}$服从t分布，则常数$a$的值为（　　）.

（A）$a=3/2$　　（B）$a=2/3$

（C）$a=\sqrt{3/2}$　　（D）$a=\sqrt{2/3}$

※参考答案：$a=\sqrt{3/2}$.

练习题2

※设X_1，X_2，X_3，…，X_n为来自总体$N(\mu,1)$的样本，x_1，x_2，x_3，…，x_n为相应的样本值，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$　　（B）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(1)$

（C）$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(1)$　　（D）$n(x_i-\bar{x})^2\sim\chi^2(1)$

※参考答案：**（A）**.

填空题

1、从标准正态总体 N（0,1）中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_6$，

使统计量 $Y = C[(X_1 + X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 + X_6)^2]$

服从 χ^2 分布.则C________.

2、 从标准正态总体 N（0,1）中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_5$

若统计量 $Y = C\dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$

服从 t 分布，则常数C=________.

1、由于 $X_1+X_2\sim N(0,2)$, $X_3-X_4\sim N(0,2)$, $X_5+X_6\sim N(0,2)$

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)\sim N(0,1) \qquad U_1^2\sim\chi^2(1)$$

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3-X_4)\sim N(0,1) \qquad U_2^2\sim\chi^2(1)$$

$$U_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_3+X_4)\sim N(0,1) \qquad U_3^2\sim\chi^2(1)$$

又易知 U_1^2, U_2^2, U_3^2 相互独立，故 $U_1^2+U_2^2+U_3^2\sim\chi^2(3)$

所以 $C=1/2$

2、因 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$， 从而 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2) \sim N(0,1)$

又因为 $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$ 且与 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)$ 相互独立

故由t分布的构造可知：

$$Y=\frac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} \sim t(3)$$

所以$C=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3、设 $(X_1, X_2, \dots, X_9)$ 和$(Y_1, Y_2, \dots, Y_9)$ 均来自正态总体 $N(0, 0.3^2)$ 的两个独立样本，则统计量

$$U = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}}$$ 服从____________分布。

4、设随机变量*X*与*Y*相互独立，且都服从 $N(0, \sigma^2)$ X_1, X_2, X_3 和 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4分别来自*X*和*Y*的样本，则

统计量 $U = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} X_i^2}{\sum_{j=1}^{4}(Y_j - \overline{Y})^2}$服从____________分布。

3、由于 $X_i \sim N(0, 0.3^2), i = 1, 2, \dots, 9$

则 $\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0, 9 \times 0.3^2)$ 即 $\frac{10}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,1)$

又由于 $Y_i \sim N(0, 0.3^2)$, 即 $\frac{Y_i}{0.3} \sim N(0,1)$， $i = 1, 2, \dots, 9$

从而有 $$\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{0.3}\right)^2 = \frac{100}{9}\sum_{i=1}^{9} Y_i^2 \sim \chi^2(9)$$

又 因为$(X_1, X_2, \dots, X_9)$和$(Y_1, Y_2, \dots, Y_9)$独立，根据t分布

的定义可得：

$$\frac{\frac{10}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\frac{100}{9}\sum_{i=1}^{9} Y_i^9 \Big/ 9}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}} = U \sim t(9)$$

4、易知 $U_1 = \dfrac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \sim \chi^2(3)$

又记 $S^2 = \dfrac{1}{4-1}\sum_{j=1}^{4}(Y_j - \overline{Y})^2$，则 $\dfrac{(4-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4-1)$

得 $V_1 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{4}(Y_j - \overline{Y})^2 \sim \chi^2(3)$

又由题意知 U_1 ,V_1 相互独立，故 $\dfrac{U_1/3}{V_1/3} \sim F(3,3)$

即统计量*U*服从*F*(3,3)分布.

讨论题

1、设总体$X \sim \chi^2(n), X_1, X_2, \ldots, X_{10}$是来自总体$X$的样本，

求$E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$.

2、设总体$X \sim b(1, p), X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$X$的样本，

求：1）$\sum_{i=1}^{n} X_i$，　2) $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$.

1、解：$E(\bar{X})=E(X)=n$; $D(\bar{X})=\dfrac{D(X)}{10}=\dfrac{2n}{10}=\dfrac{n}{5}$;

$$E(S^2)=D(X)=2n.$$

2、解：$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$

$E(\bar{X})=E(X)=p$; $D(\bar{X})=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{p(1-p)}{n}$;

$$E(S^2)=D(X)=p(1-p).$$

3、 在正态总体 N（5,4）中随机抽取一容量为25的样本，求

(1)样本均值 $\overline{X}$ 落在4.2到5.8的概率；

(2)样本方差 S^2 大于6.07的概率。

(3) 求 $D(S^2)$.

3、解：因总体$X \sim N(5,4)$，所以

$$\overline{X} \sim N(5, 4/25),\ \frac{\overline{X}-5}{2/\sqrt{25}} \sim N(0,1),$$

$$\frac{(25-1)S^2}{4} \sim \chi^2(24)$$

（1）$P\{4.2 < \overline{X} < 5.8\} = P\{\frac{4.2-5}{2/\sqrt{25}} < \frac{\overline{X}-5}{2/\sqrt{25}} < \frac{5.8-5}{2/\sqrt{25}}\}$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

（2） $P\{S^2 > 6.07\} = P\{\frac{(25-1)S^2}{4} > \frac{(25-1)\times 6.07}{4}\}$

$$= P\{\frac{24S^2}{4} > 36.42\} = 0.05$$

(查χ^2分布的分位点得)

(3) 因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

所以有$D(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2) = 2(n-1)$

从而有$D(S^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \times 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)} = \frac{2\times 2^4}{24} = \frac{4}{3}$

4、若$X \sim N(6,\sigma_1^2), Y \sim N(5,\sigma_2^2)$,

分别抽取样本$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$，$n_1 = n_2 = 10$

在以下条件下求 $P\{\overline{X} - \overline{Y} < 1.3\}$.

(1) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知，$S_1^2 = 0.9130, S_2^2 = 0.9816$

5、若$X \sim N(\mu,3), Y \sim N(\mu,5)$,

分别抽取样本$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$，

$n_1 = 10, n_2 = 15$，求$P\{S_1^2 / S_2^2 > 1.272\}$.

4、解： (1) $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(6-5)}{\sqrt{1/10+1/10}}\sim N(0,1)$

$$P\{\overline{X}-\overline{Y}<1.3\}=P\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}\text{-}1}{\sqrt{1/5}}<\frac{1.3\text{-}1}{\sqrt{1/5}}\}=\Phi\text{（}0.67\text{）}=07486.$$

(2) $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}}=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(6-5)}{S_\omega\sqrt{1/10+1/10}}\sim t(10+10-2)$

$$s_\omega^2=\frac{9\times S_1^2+9\times S_2^2}{18}=0.9733^2$$

$$P\{\overline{X}-\overline{Y}<1.3\}=P\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}\text{-}1}{s_\omega\sqrt{1/5}}<\frac{1.3\text{-}1}{0.9733\sqrt{1/5}}\}=0.75.$$

$(t_{0.25}(18)=0.6884)$

5、解: $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=F(n_1-1,n_2-1)$;

$$即\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{3}{5}\sim F(9,14)$$

$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{3}{5}>\frac{1.272}{3/5}\}=P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{3}{5}>2.12\}=0.1.$$

$(F_{0.1}(9,14)=2.12)$

谢谢大家!