1、已知 A、B、C 为三个随机事件，则 A、B 不发生、C 发生的事件为（ C ）.

(A) $\overline{ABC}$　　(B) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(C) $\overline{AB}C$　　(D) $\bar{A}\bar{B}C$

2、设随机事件 A、B 相互独立，则下列等式**不正确**的是（ B ）

(A) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)=0$

(C) $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$　　(D) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$

3、关于标准正态分布、t 分布、F 分布、χ^2 分布的 α 分为点，下列**不正确**的是（ A ）

(A) $\chi^2_{1-\alpha}(n)=-\chi^2_{\alpha}(n)$　　(B) $Z_{1-\alpha}=-Z_{\alpha}$

(C) $t_{1-\alpha}(n)=-t_{\alpha}(n)$　　(D) $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$

4、设随机变量 X 和 Y 相互独立，且他们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则

$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 是（ D ）

(A) $\min\{F_X(z), F_Y(z)\}$

(B) $F_X(z)F_Y(z)$

(C) $1-F_X(z)F_Y(z)$

(D) $1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

5、随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 $P\{\mu < X < 3\} = P\{1 < X < \mu\}$，则 μ 的值是（ C ）

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

得分	

1、设 $P(B) = 0.3$，$P(AB) = 0.2$，$P(A \cup B) = 0.7$，求 $P(A)$= 0.6

2、从 0,1,2，…，9 这 10 个数字中任取 3 个不同数字，则取到的 3 个数字中不

5 的概率= $\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3} = \dfrac{8\times7\times6}{10\times9\times8} = \dfrac{7}{15}$

3、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ k-x, & 1 \le x < 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$，则 k =

4、已知 $X \sim b(10, p)$，$E(X) = 2$，则 p = 0.2

5、已知正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的参数 μ, σ^2 均未知，$\bar{X}, S^2$ 分别为某样本的样本

本方差，则检验单边假设 $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 的显著水平为 α 的拒绝域是

三、(本题 5 分)

得分	

设离散型随机变量 X 的分布律如右表：

X	1	2	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

求随机变量 X 的分布函数 $F(x)$。

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{5} & 1\le x<2\\ \frac{3}{5} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

四、(本题 5 分)

得分	

已知本学期学概率论与数理统计课程的学生数为 1600，根据期末试卷的难度，每位学生期末考试及格的概率为 0.8。设每位学生考试是否及格是相互独立的，试用中心极限定理计算期末考试及格的人数超过 1300 的概率。(结果用 $\Phi(\cdot)$ 表示)

由中心极限定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{1600} X_i - 1600\cdot 0.8}{\sqrt{1600\cdot 0.8\cdot 0.2}}$ 近似 $N(0,1)$

其中 $X_i=\begin{cases}1 & 第 i 个学生及格\\ 0 & 不及格\end{cases}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{1600} X_i \ge 1300\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1600} X_i - 1600\cdot 0.8}{\sqrt{1600\cdot 0.8\cdot 0.2}}\ge \frac{1300-1280}{16}\right)=1-$$

五、(本题 15 分)

得分	

设随机变量(X,Y)的概率分布律如右表。

Y \ X	-1	0	4
-2	3/16	3/8	1/8
2	1/16	1/8	1/8

求：(1) 关于XY的分布律；

(2) $P\{X \le 2 \mid Y = 2\}$；

(3) 计算ρ_{XY}的值（结果保留根号）。

(1) XY可能取值 2 -2 0 -8, 8

XY	-8	-2	0	2	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

(2) $P(X \le 2 \mid Y=2) = P(X=-1\text{或}0 \mid Y=2)$

$$= \frac{P(X=-1\text{或}0,\text{且}Y=2)}{P(Y=2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{5}$$

(3) $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{4}(-1)^2 + \frac{1}{4}4^2 - \left(\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{4}4\right)^2 = \frac{17}{4} - \frac{9}{16} = \frac{57}{16}$

$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{11}{16}(-2)^2 + \frac{5}{16}2^2 - \left(\frac{11}{16}(-2)+\frac{5}{16}2\right)^2 = 4 - \frac{9}{16} = \frac{55}{16}$

$\mathrm{cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{8}(-8) + \frac{1}{16}(-2) + \frac{3}{16}2 + \frac{1}{8}8 + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$

$$= \frac{13}{16}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{13}{16}}{\sqrt{\frac{57}{16}}\sqrt{\frac{55}{16}}} = \frac{13}{\sqrt{57\cdot 55}}$$

六、（本题16分）

得分	

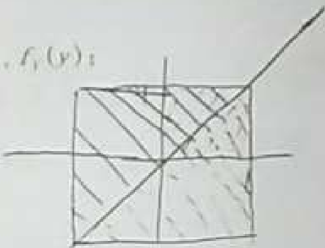
设二维随机变量(X,Y)的概率函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & -1<x<1,-1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则：（1）求关于X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2）求概率$P\{X<Y\}$；

（3）判断X与Y相互独立，并说明理由。



(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2},\ -1<x<1$ $\quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dx=\frac{1}{4}2=\frac{1}{2},\ -1<y<1$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $P(X<Y)=\iint_{x<y} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{1}\frac{1+xy}{4}dy$

$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left((1-x)+\frac{x}{2}y^2\Big|_x^1\right)dx$

$=\frac{1}{\cancel{4}8}\int_{-1}^{1}(2-2x+x-x^3)dx$

$=\frac{1}{2}$

(3) $\because f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\quad\therefore$ 不独立

七、（本题8分）

得分	

设 $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本， $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 为相应的样本值，已知总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

，其中 $\theta>-1$，θ 为未知参数。

试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

矩估计：$\mu = E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,dx$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\theta+1}{\theta+2} = 1-\frac{1}{\theta+2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{1-\mu} - 2$$

$$\because \hat{\mu} = \bar{x} \quad \therefore \hat{\theta} = \frac{1}{1-\bar{x}} - 2$$

最大似然估计：

似然函数 $L = f(x_1)\cdots f(x_n) = (\theta+1)^n x_1^{\theta} x_2^{\theta} \cdots x_n^{\theta}$

$$\ln L = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $(\ln L)' = 0 \Rightarrow \dfrac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

解得 $\hat{\theta} = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} - 1$

八、（本题 8 分）

得分	

已知某地年平均气温 X（单位：°C）近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，又近 5 年该地的平均气温的观测值为：24.3, 20.8, 23.7, 19.3, 17.4，计算得 $\bar{x}=21.1$，$s=2.9$，试求 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间。（已知 $\sqrt{5}\approx 2.2$，$t_{0.025}(5)=2.57$，$t_{0.025}(4)=2.78$，计算结果保留两位小数。）

因条件知 置信区间为 $\left[\bar{x} \pm \sqrt{\frac{s^2}{n}}\, t_{0.025}(4)\right]$ （参见第七章表格）

代入 $\bar{x}=21.1$　$s=2.9$　$n=5$　$t_{0.025}(4)=2.78$

得 $\left[21.1-\frac{2.9}{\sqrt{5}}2.57\ ,\ 21.1+\frac{2.9}{\sqrt{5}}2.57\right]$

九、（本题 8 分）

得分	

设某厂所生产的某种细纱每绞支数服从正态分布 $N(\mu,1.2^2)$。现从该厂某日生产的一批产品中，随机抽 16 绞进行支数测量，求得样本标准差 s=2.1。问当天生产的细纱支数的方差有无显著变化？（已知 $\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.5$，$\chi^2_{0.025}(16)=28.8$，计算结果保留两位小数。）因题知：原假设 H_0：$\sigma^2=1.2^2$

选取检验统计量 $(n-1)S^2$　拒绝域：$(n-1)S^2>\chi^2_{0.025}(n-1)$

或 $(n-1)S^2<\chi^2_{0.975}(n-1)$

代入 $n=16$　$S=2.1$

计得 $15(2.1)^2 \pm > 60 > \chi^2_{0.025}(15)$ 故拒绝 H_0

认为有显著变化

证明题（本题 5 分）

得分	

证明：设 $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ 的一个样本，证明：

$$T = \frac{X_1 - X_3}{|X_2 + X_4 - 2|} \sim t(1)。$$

$$X_1 - X_3 \sim N(0, 2\sigma^2)$$

$$\Rightarrow \frac{X_1 - X_3}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

$$X_2 + X_4 \sim N(2, 2\sigma^2)$$

$$\Rightarrow \frac{X_2 + X_4 - 2}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X_2 + X_4 - 2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$T = \frac{X_1 - X_3}{|X_2 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_3}{\sqrt{2\sigma^2}}}{\sqrt{\left(\frac{X_2 + X_4 - 2}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 / 1}} \sim t(1)$$