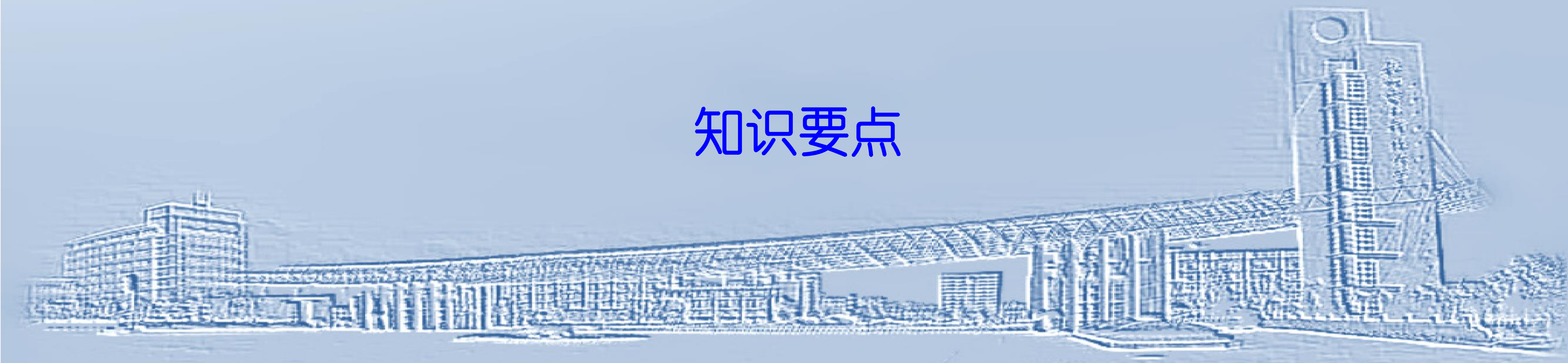
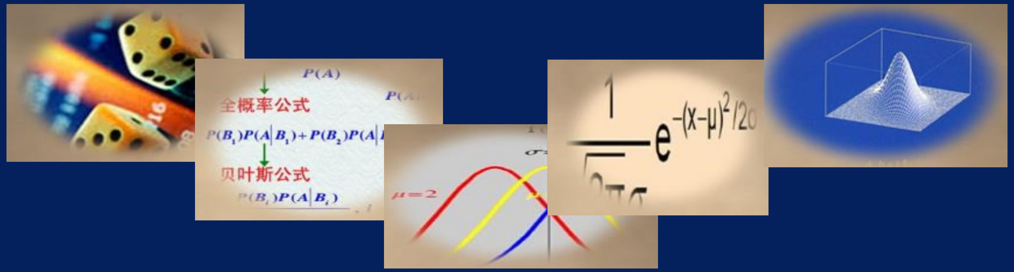
第五章 大数定律及中心极限定理

知识要点





杨建芳

知识框架

- 大数定律及中心极限定理
  - 大数定律
    - 辛钦大数定律
    - 伯努利大数定律
  - 中心极限定理
    - 独立同分布中心极限定理
    - 棣莫弗拉普拉斯中心极限定理

n重伯努利试验

试验n次，A出现的次数n_A，$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$(频率)，$P(A)=p$(概率)

n充分大时，$f_n(A)$在p的左右两侧波动；

$$n\to\infty,\ f_n(A)\xrightarrow{\text{稳定}}p.$$

当$\forall\varepsilon>0, n\to\infty$时，

$\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon$，大部分满足；

大数定律

以什么方式在p的左右两侧波动

中心极限定理

独立同分布的大数定律和中心极限定理

1.设随机变量X_1，$X_2, \dots$ $X_n \cdots$相互独立，服从同一分布

2. $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i = 1,2,3, \dots$

令$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

则有：

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu \ (n \to \infty)}$$

弱大数定律
（辛钦大数定理）

$$\boxed{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0, 1) .}$$

独立同分布的
中心极限定理

独立同分布中心极限定理等价形式

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),}$$

或

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2),}$$

0-1分布的大数定律和中心极限定理

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{如第}i\text{次试验}A\text{发生}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad i=1,2,\ldots,n$$

则$X=\sum_{i=1}^{n}X_i=n_A$，而$E(X_i)=p$，则$X\sim b(n,p)$

$$\boxed{n\to\infty,\ \frac{n_A}{n}\xrightarrow{P}p.}$$

伯努力大数定律

$$\boxed{X\overset{\text{近似地}}{\sim}N(np,npq),}\ \text{或}\ \boxed{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\overset{\text{近似地}}{\sim}N(0,1).}$$

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

基本步骤

- 1、求出均值和方差
- 2、标准化后近似服从标准正态分布
- 3、根据题意求相应事件概率

谢谢大家！