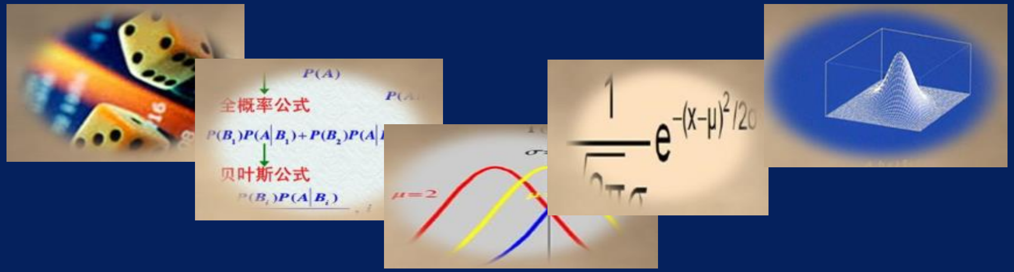
第三章 多维随机变量及其分布

知识要点



杨建芳

本章内容是第二章内容的推广

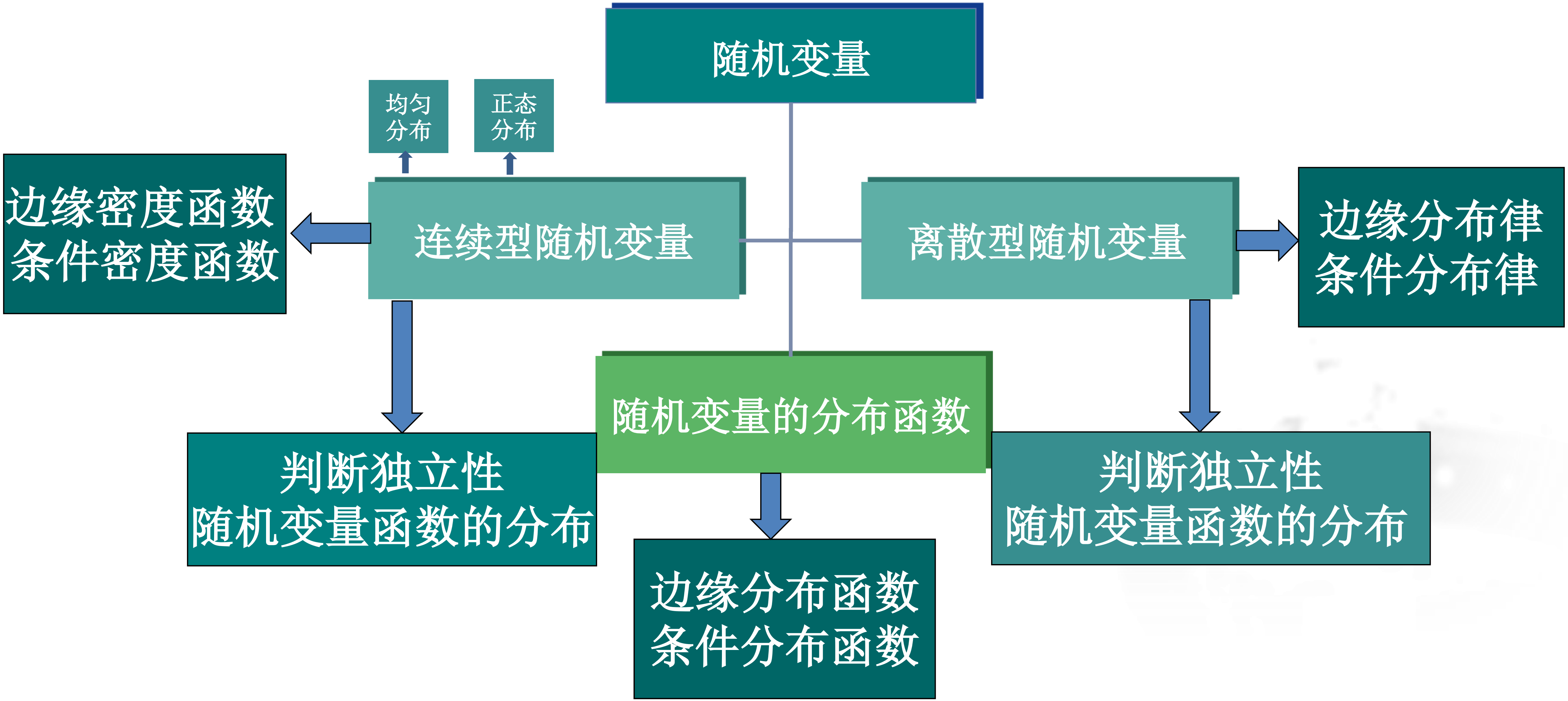
一维随机变量及其分布

↓

<u>多维随机变量及其分布</u>

由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量。

知识框架


随机变量
均匀
分布
正态
分布
边缘密度函数
条件密度函数
连续型随机变量
离散型随机变量
边缘分布律
条件分布律
随机变量的分布函数
判断独立性
随机变量函数的分布
判断独立性
随机变量函数的分布
边缘分布函数
条件分布函数

主要内容

1. 二维随机变量及其分布

内容：分布律、密度函数、分布函数

理解：三者的概念和性质

了解：三者的区别和联系

掌握：与它们有关的概率的计算

2. 边缘分布

内容：离散型边缘分布律和连续型边缘密度

掌握：离散型 由联合分布律求边缘分布律

连续型 由联合密度求边缘密度

以及与它们有关的概率的计算

3. 条件分布

内容：离散型条件分布律，连续型条件分布

理解：条件分布意义

掌握：会求离散型条件分布律

会求简单的连续型条件密度函数

4. 随机变量的独立性

内容：三种形式的定义

已知分布函数，怎么判断独立；

已知分布律，怎么判断独立；

已知密度函数，怎么判断独立；

理解：独立性概念

掌握：会判断和证明*r. v.* 间相互独立性

5. 二维随机变量的函数的分布

内容：离散型$r.v.$的函数分布

连续型$r.v.$ 和、商/积、极值函数

理解：求解步骤及运算公式

掌握：离散型 多类函数分布

连续型 和、最大（小）函数分布

离散型随机变量

联合分布律

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}\ ,\ (i,\ j=1,2,\dots)$$

边缘分布律

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\dots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\dots$$

条件分布律

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1,2,\dots\qquad P(Y=y_j)>0$$

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2,\dots\qquad P(X=x_i)>0$$

分布函数

$$F(x,y)=P(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\})\triangleq P(X\le x,Y\le y)\quad -\infty<x,y<\infty$$

1. $F(x,y)$ 是变量x, y的非减函数。

2. $\forall x,y\in R$ 有 $0\le F(x,y)\le 1$。

3. 右连续性

4. 矩形不等式

对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2$, 且满足 $x_1<x_2$, $y_1<y_2$, 则有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

连续型随机变量

联合密度函数

设$F(x, y)$是二维随机变量(X,Y)的分布函数，如果存在一个非负可积函数 $f(x, y)$，使得对任意的实数 x, y，有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X,Y)是二维连续型随机变量，

称$f(x,y)$为二维连续型$r.v.(X,Y)$的概率密度函数，

或者称为$r.v.$ X和Y的联合概率密度函数。

连续型随机变量

概率密度 $f(x,y)$的性质

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\boxed{F(+\infty,+\infty)=1.}$$

（1） 非负性： $f(x,y)\geq 0$.

（2） 规范性： $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$.

（3） 若 $f(x,y)$ 连续， 则 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

（4） $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$， 其中 D 为平面上的一个区域.

连续型随机变量

(X,Y)关于X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,,$$

(X,Y)关于Y的边缘概率函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,.$$

连续型随机变量

条件概率密度函数

$Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度函数为

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad (-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty)}$$

$$f_Y(y)>0$$

$X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度函数为

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad (-\infty < \boldsymbol{y} < +\infty)}$$

$$f_X(x)>0$$

随机变量独立性

二维 r.v. (X, Y) 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

离散型随机变量X与Y相互独立

$\Longleftrightarrow$ 对一切i,j有 $p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$

即 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

连续型随机变量X与Y相互独立

$\Longleftrightarrow$ 对任何x,y有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $(a.e.)$

即，在平面上**几乎处处**成立.

独立同分布

随机变量函数的分布

1) 当(X,Y)为**离散型r.v.**时，则Z也是离散型的，有

$$Z = z_k = g(x_{i_k}, y_{j_k}) \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\boxed{P(Z = z_k) = \sum_{g(x_{i_k}, y_{j_k}) = z_k} P(X = x_{i_k}, Y = y_{j_k})}$$

2) 当(X,Y)为**连续型r.v.**时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z)$$

$$= \iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{其中 } D_z : \{(x,y) \mid g(x,y) \le z\}$$

谢谢大家！