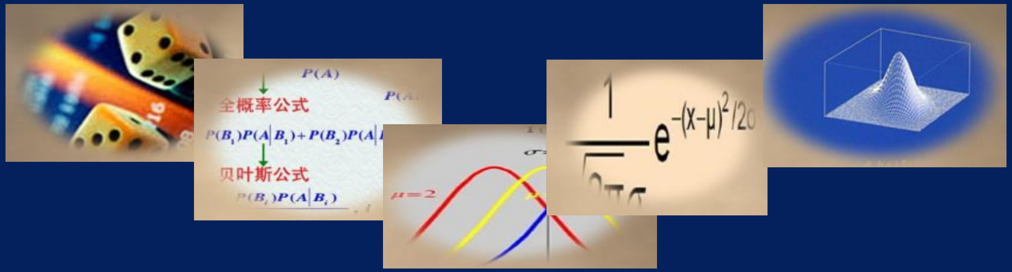
第八章 假设检验

8.1 假设检验



杨建芳

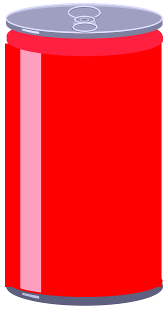
假设检验原理

上一章介绍了两种常用的参数估计方法——点估计与区间估计，在数理统计中，还有另一类重要的统计推断问题，即假设检验问题。

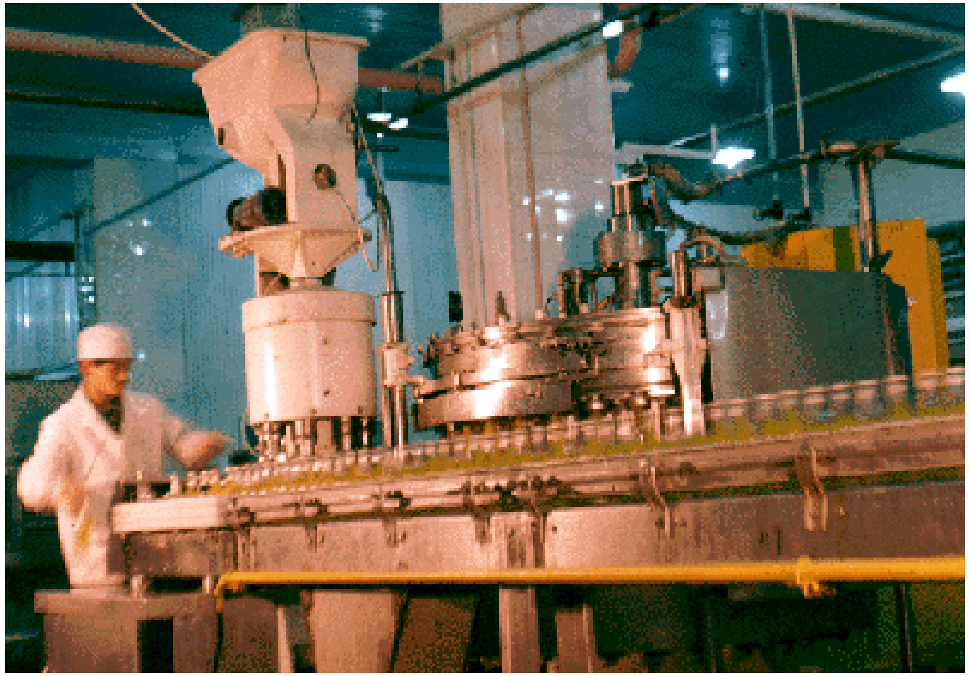
假设检验是另一种有重要理论和应用价值的统计推断形式. 它的基本任务是，在总体的分布函数完全未知或只知其形式但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，首先提出某些关于总体的假设，然后根据样本所提供的信息，对所提假设做出“是”或“否”的结论性判断. 假设检验有其独特的统计思想，许多实际问题都可以作为假设检验问题而得以有效地解决.

假设检验原理

罐装可乐的容量按标准应在350毫升和360毫升之间.



生产流水线上罐装可乐不断地封装，然后装箱外运.　怎么知道这批罐装可乐的容量是否合格呢？

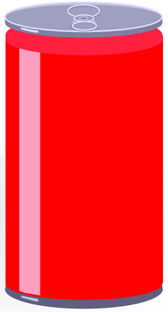


假设检验原理

把每一罐都打开倒入量杯,
看看容量是否合于标准.

这样做显然
不行!

通常的办法是进行抽样检查.



假设检验原理

每隔一定时间，抽查若干罐．如每隔1小时，抽查5罐，得容量为5的样本X_1，…，X_5，根据这些值来判断生产是否正常.

如发现不正常，就应停产，找出原因，排除故障，然后再生产；如没有问题，就继续按规定时间再抽样，以此监督生产，保证质量.

很明显，不能由5罐容量的数据，在把握不大的情况下就判断生产不正常，因为停产的损失是很大的.

当然也不能总认为正常，有了问题不能及时发现，这也要造成损失.

如何处理这两者的关系，假设检验面对的就是这种矛盾.

假设检验原理

一般可以认为$X_1,\ldots,X_5$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，当生产比较稳定时，σ^2是一个常数.

现在要检验的假设是：$H_0:\mu=\mu_0$ （$\mu_0 =$

在实际工作中，往往把不轻易否定的命题作为原假设

它的对立假设是：$H_1:\mu\neq\mu_0$

称H_0为原假设（或零假设 Null Hypothesis ）；

称H_1为备择假设(Alternative Hypothesis

假设检验原理

那么，如何判断原假设H_0 是否成立呢？

由于μ 是正态分布的期望值，它的估计量是样本均值 $\bar{X}$，因此可以根据 $\bar{X}$ 与 μ_0差的绝对值$|\bar{X}-\mu_0|$ 来判断H_0 是否成立.

当 $|\bar{X}-\mu_0|$ 较小时，可以认为H_0是成立的；

当 $|\bar{X}-\mu_0|$ 较大时，应认为H_0不成立，即生产已不正常

较大、较小是一个相对的概念，合理的界限在何处？应由什么原则来确定？

假设检验原理

问题归结为对差异作定量的分析，以确定其

差异可能是由抽样的随机性引起的，称为

“抽样误差”或 “随机误差”

这种误差反映偶然、非本质的因素所引起的随机波动.

然而，这种随机性的波动是有一定限度的，如果差异超过了这个限度，则我们就不能用抽样的随机性来解释了.

此时必须认为这个差异反映了事物的本质差别，即反映了生产已不正常.

这种差异称作“系统误差”.

假设检验原理

根据所观察到的差异，如何判断它究竟是由于偶然性在起作用，还是生产确实不正常？

即差异是“抽样误差”还是“系统误差”所引起的？

这里需要给出一个量的界限．

设想： $\bar{X}$是μ的无偏估计

$|\bar{x}-\mu_0|<k$ 较小——认为机器工作正常

$|\bar{x}-\mu_0|\geq k$ 较大——认为机器工作不正常

如何确定k的值？

假设检验原理

因为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

改进：

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}$$ 接受H_0

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}$$ 拒绝H_0，接受H_1

这是一种

理想状况

假设检验原理

事实上：存在两类不可避免的错误

$\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}$　　机器没有故障，误认为有故障

——第一类错误（弃真）

$\{接受H_0 \mid H_0为假\}$　　机器有故障，误认为没有故障

——第二类错误（取伪）

犯这两类错误所造成的影响常常很不一样。例如我们要求检验病人是否患某种疾病。若假设H_0表示该人患病，则第二类错误(无病当有病)造成后果是使用不必要的药品而引起病人的痛苦和经济上的浪费，但第一类错误(有病当无病)就有可能导致病人的死亡。

假设检验原理

	实际情况	
决定	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	**第一类错误**	正确
接受H_0	正确	**第二类错误**

犯两类错误的概率：

$$P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}=\alpha,$$

$$P\{\text{接受}H_0|H_0\text{不真}\}=\beta.$$

假设检验原理

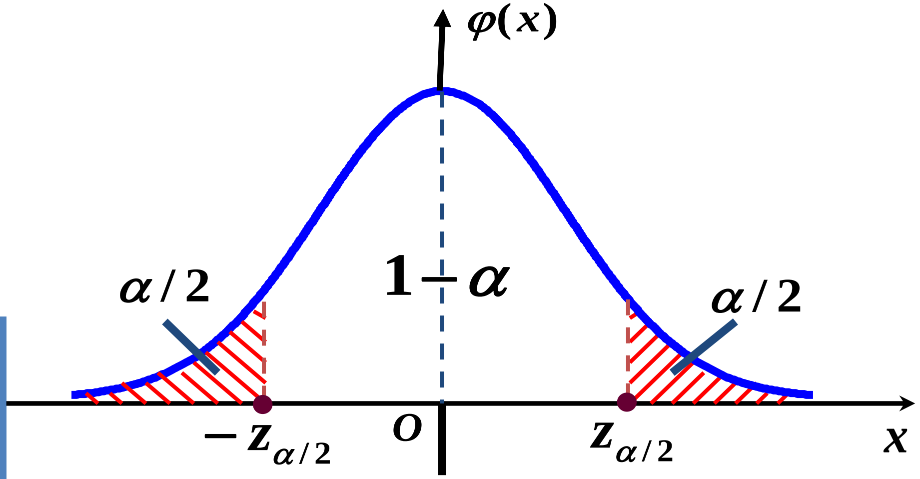
我们当然希望犯这两类错误的概率同时尽可能地小，最好全为零，但实际上这是不可能的。当样本容量确定后，犯这两类错误的概率就不能同时被控制，正好象在区间估计中，要想增大可靠性(即置信概率)，就会使区间长度增加而降低精度。我们的做法是限制第一类错误的概率不超过某指定值α，再在这限制下，使犯第二类错误的概率尽可能小。

$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} \le \alpha$ 显著性水平,α 为较小的数

通常显著性水平 α的选取带有一点随意性，习惯上选取α为0.1，0.05，0.01等，当然，水平α的选取也依赖于我们关于假设的先验知识。如果我们根据以往的经验非常相信H_0是真的，此时要使人乐意放弃这个信念就要有非常令人信服的依据，此时　就需要取得小一点。

假设检验原理

$$P\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \mid H_0\text{为真}\} \leq \alpha$$



$$\frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}$$

一般依据人们在实践中普遍采用的一个原则：

“小概率原理” ：

概率很小的事件在一次试验中几乎不会发生 .

一次实验中如果$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}$发生了，则认为机器工作不正常了

假设检验原理

如前面例子中的备择假设H_1，表示μ可能大于μ_0，也可能小于μ_0，称为双边备择假设，对应的检验称为双边假设检验

有时，我们只关心总体均值是否增大，例如，试验新工艺以提高材料的硬度。这时，所考虑的总体的均值应该越大越好。如果我们能判断新工艺下总体均值较以往正常生产的大，则可考虑采用新工艺。此时，我们需要的检验假设为：

$$H_0: \mu \le \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$ 右边检验

$$H_0: \mu \ge \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$ 左边检验

→ 单边检验

假设检验原理

考虑控制第一类错误——显著性检验问题

基本步骤：

1、提出原假设H_0、备择假设H_1；

2、选择适当检验统计量K；

3、对于检验水平α 查表找分位数λ，求出拒绝域C；

4、由样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 计算统计量之值，将K 与λ进行比较，作出判断：当$|\hat{K}| \geq \lambda$（或$\hat{K} \geq \lambda$或$\hat{K} \leq \lambda$）时否定，否则认为相容.

1、如何理解假设检验的基本原理？

2、如何理解第一类第二类错误的含义？

3、如何理解小概率事件原理？

4、假设检验的基本步骤？

第八章 假设检验

8.2 单正态总体假设检验

杨建芳

单正态总体参数的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，根据样本$(X_1,\cdots,X_n)$，对未知参数 μ 或 σ^2 作以下几种假设检验。

$$
N(\mu,\sigma^2)\begin{cases}\text{对}\mu\text{检验}\begin{cases}\sigma^2\text{已知}\\ \sigma^2\text{未知}\end{cases} & \text{用样本均值}\overline{X}\text{检验}\\ \text{对}\sigma^2\text{检验} & \text{用样本方差}S^2\text{检验}\end{cases}
$$

单正态总体均值的假设检验

一、单个正态总体均值的假设检验

（一）σ^2已知时μ的检验 (Z检验法)

1、双边检验

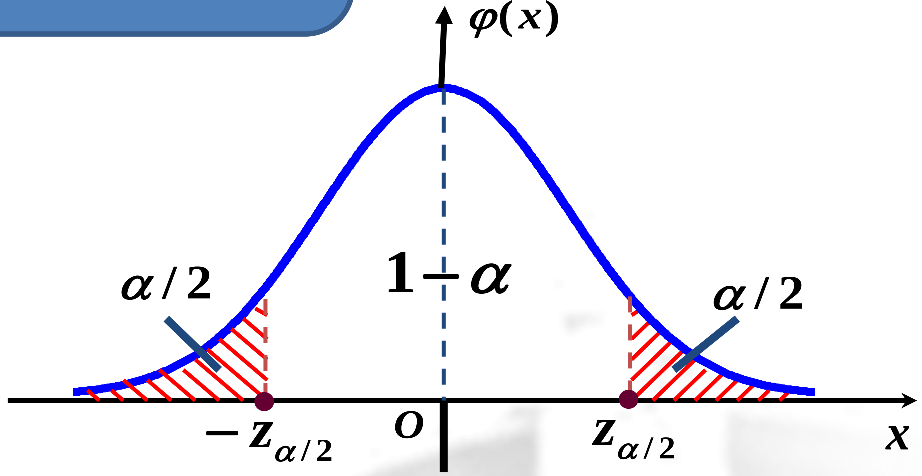
是在原假设下服从正态分布

(1) $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

(2) 检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{下}}{\sim} N(0,1)$,

(3) 对给定的显著性水平α

$$P_{\mu_0}\left\{\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}\right\} \leq \alpha \quad \text{拒绝域}C: \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$$



(4) 代值计算，判断

单正态总体均值的假设检验

2、单边检验（右边检验）

(1) $H_0: \mu \le \mu_0,\quad H_1: \mu > \mu_0$

Z不一定是服从正态分布，我们只知道原假设的均值$\mu \le \mu_0$，我们依旧借助于正态分布来确定界限。

（2）检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

（3）对给定的显著性水平α

$$P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha\right\} \le P_{\mu \le \mu_0}\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha\right\} \le \alpha$$

$x-4 \ge 3 \Rightarrow x \ge 7$

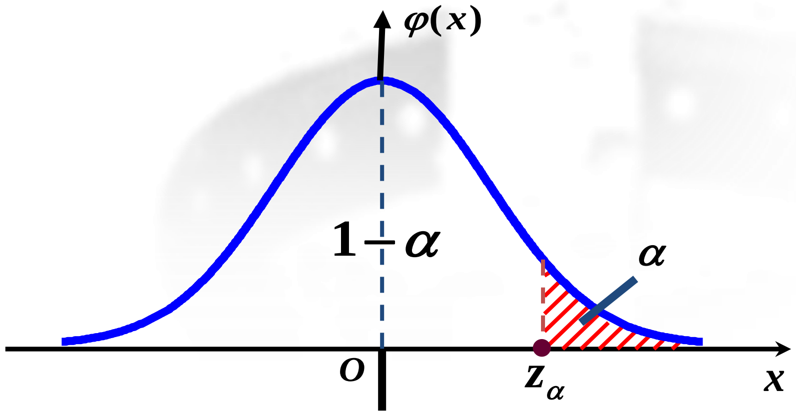
$x-5 \ge 3 \Rightarrow x \ge 8$

$\{x \ge 8\} \subset \{x \ge 7\}$

拒绝域$C: \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$

拒绝域的形式与备择假设一致

（4）代值计算，判断



单正态总体均值的假设检验

2、单边检验（左边检验）

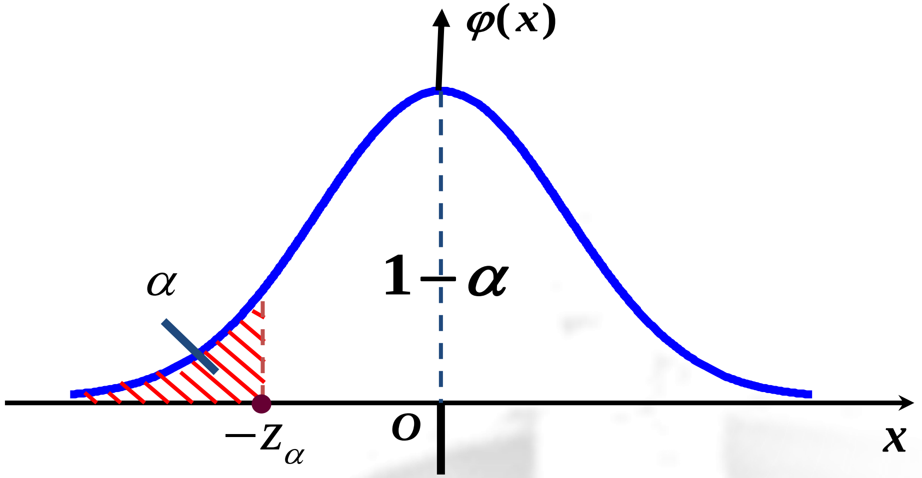
(1) $H_0:\mu\geq\mu_0,\quad H_1:\mu<\mu_0$

（2） 检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

（3） 对给定的显著性水平α

拒绝域$C:\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leq -z_\alpha$

（4） 代值计算，判断



单正态总体均值的假设检验

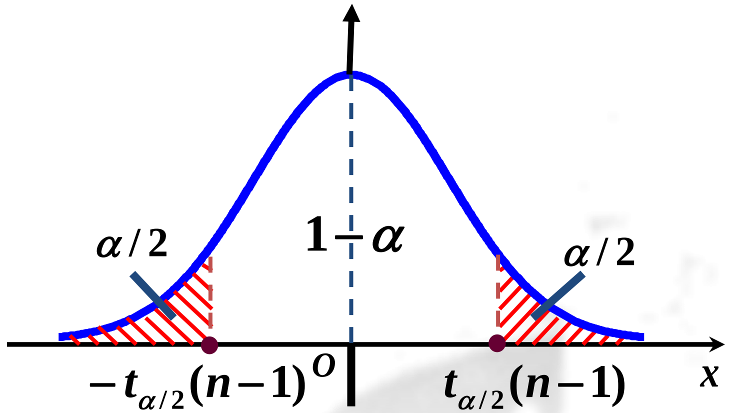
（二）σ^2未知时μ的检验（ t 检验法）

(1) $H_0:\mu=\mu_0,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$ （双边检验）

(2) 检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{下}}{\sim}t(n-1)$

(3) 对给定的显著性水平α

$$\text{拒绝域}C:\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$$



(4) 代值计算，判断

单正态总体均值的假设检验

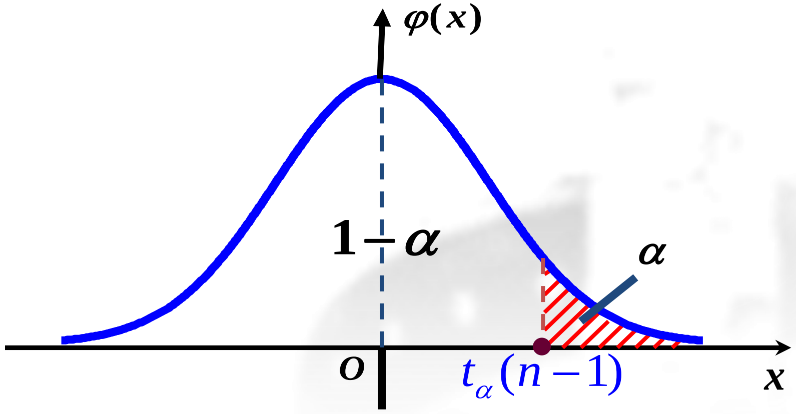
右边检验：

(1) $H_0: \mu \le \mu_0$， $H_1: \mu > \mu_0$

(2) 检验统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

（3） 对给定的显著性水平 α

拒绝域 $C: \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$



(4) 代值计算，判断

单正态总体均值的假设检验

左边检验：

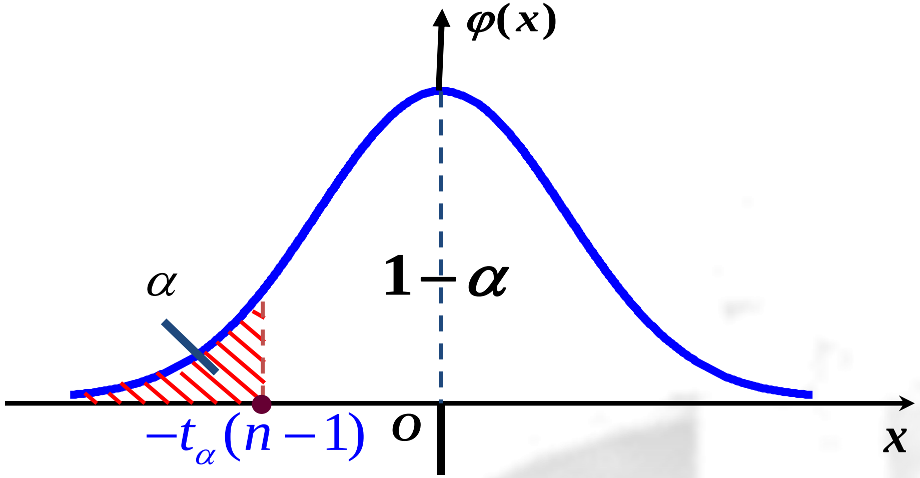
(1) $H_0: \mu \geq \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

(2) 检验统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

(3) 对给定的显著性水平α

拒绝域$C: \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$

(4) 代值计算，判断

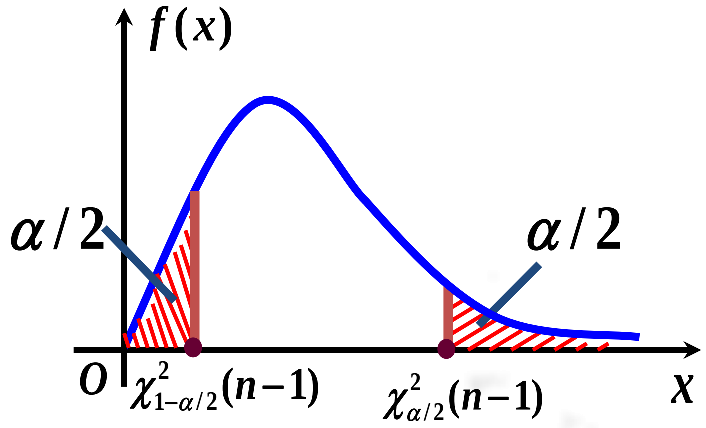


单正态总体方差的假设检验

（三）μ未知时σ^2的检验（χ^2检验法）

(1) $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,\quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

（2）检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{下}}{\sim}\chi^2(n-1)$，



（3）对给定的显著性水平α，有

拒绝域C：$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$或$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，

（4）代值计算，判断

单正态总体方差的假设检验

右边检验

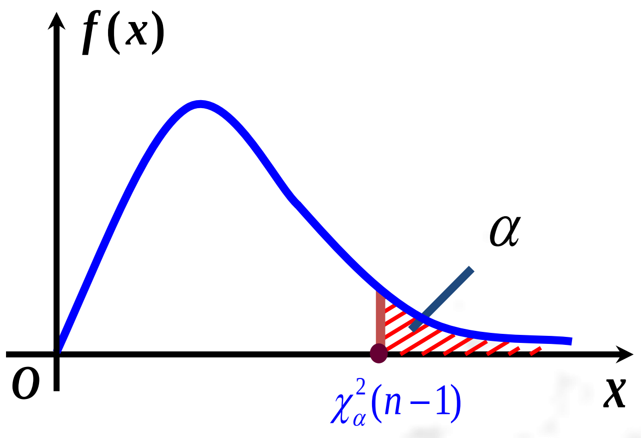
(1) $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2$, $\quad H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$

(2) 检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$,

(3) 对给定的显著性水平α ，有

拒绝域C: $\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$,

(4) 代值计算，判断



单正态总体方差的假设检验

左边检验

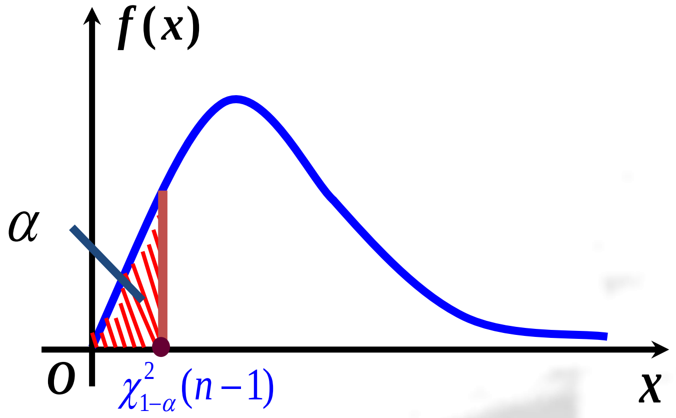
(1) $H_0:\sigma^2 \geq \sigma_0^2$， $H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$

(2) 检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，

(3) 对给定的显著性水平α，有

拒绝域C： $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，

(4) 代值计算，判断

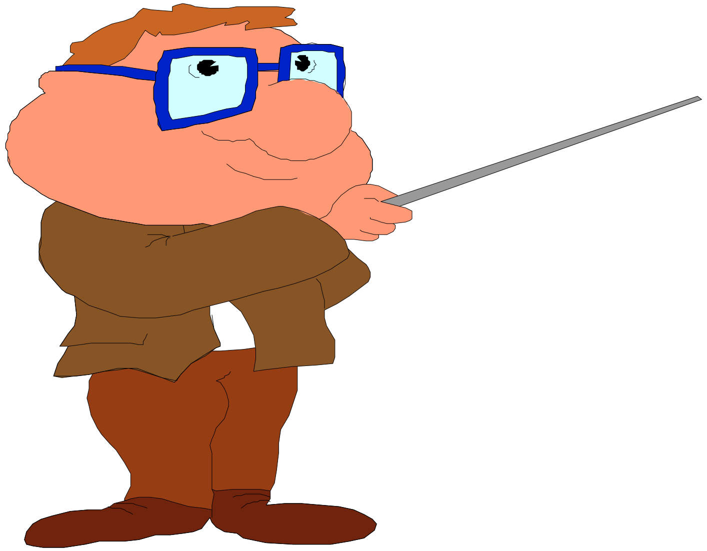


统计量的选取

$$N(\mu,\sigma^2)\quad \begin{cases} Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\ t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \\ \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \end{cases}$$

采用双边检验下的分布，拒绝域不等号方向始终跟备择假设一致

思考



1、如何选择统计量？

2、拒绝域与备择假设之间的关系？

3、如何理解单边检验时统计量未必服从相应的分布？

第八章 假设检验

8.3单正态总体假设检验例子

杨建芳

统计量的选取

$$N(\mu,\sigma^2)\quad \begin{cases} Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\ t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \\ \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \end{cases}$$

采用双边检验下的分布，拒绝域不等号方向始终跟备择假设一致

单正态总体参数的假设检验例子

例1 要求一种元件平均寿命不得低于1000h，生产者从一批这种元件中随机抽取25件，测得其寿命为950h。已知该元件的寿命服从标准差为100h的正态分布，试在显著性水平为$\alpha = 0.05$下判断这批元件平均寿命是否合格？

分析：

对参数平均寿命的估计，如超过1000h, 则认为这产品合格

——对参数μ的单边检验

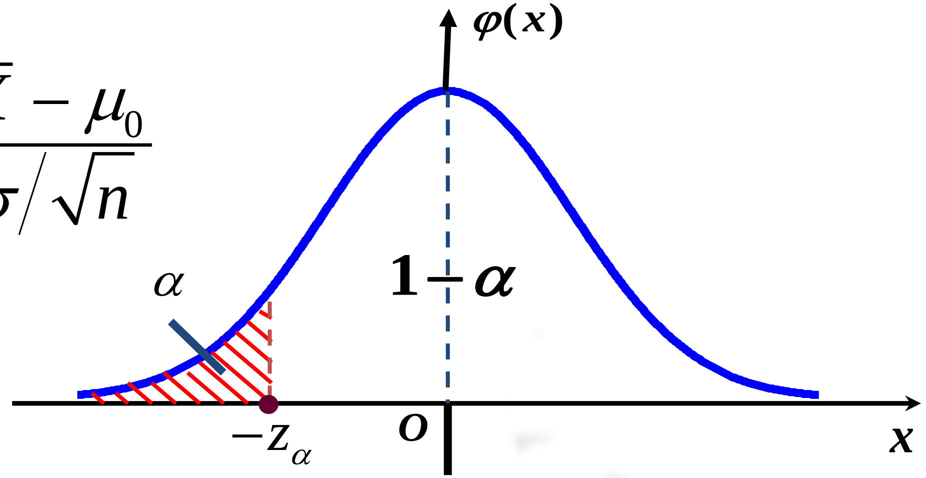
$\sigma = 100$ 已知，因此选择检验统计量$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

单正态总体参数的假设检验例子

解 (1) $H_0: \mu \geq \mu_0 = 1000$，$H_1: \mu < \mu_0 = 1000$

(2) 已知 $\sigma^2 = 100^2$，所以取检验统计量 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

(3)拒绝域$C: \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$



(4) 对于给定的$\alpha = 0.05$，查表得 $z_{0.05} = 1.645$，

$$Z = \frac{950 - 1000}{100/\sqrt{25}} = -2.5 < -1.645$$ 则认为这批产品不合格

单正态总体参数的假设检验例子

例2 要求某种导线电阻的标准差不得超过0.005(欧姆). 今在一批导线中取样品9根, 测得$N(\mu,\sigma^2)$, 设总体为正态分布 $s=0.007$. 问在水平$\alpha=0.05$下能否认为这批导线的的标准差显著地偏大?

分析:

对参数标准差的的估计，判断是否偏大

——对参数σ的单边检验

因此选择检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

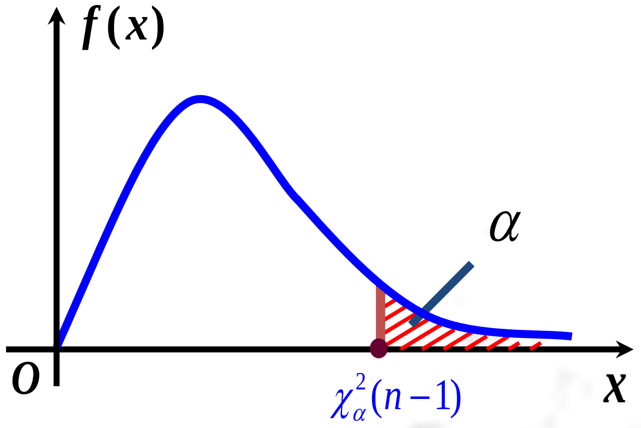
单正态总体参数的假设检验例子

解　(1) 提出假设 $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.005^2$，　$H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.005^2$

(2) 检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

(3) 对给定的显著性水平α，有

拒绝域C：$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$，



(4) 由样本值算得

$$\chi^2 = \frac{8\times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > \chi_{0.05}^2(8) = 15.507,$$

即可以认为这批导线的标准差明显偏大.

单正态总体参数的假设检验例子

例3两家生产同一类产品，其质量指标假定都服从正态分布，标准规格为均值等于120.现从甲厂抽出5件产品,测得其指标值为119,120,119.2,119.7,119.6;从乙厂也抽出5件产品,测得其指标值为110.5,106.3, 122.2,113.8,117.2。试判断这两家厂的产品均值是否符合标准.($\alpha = 0.05$)

分析：

对参数平均寿命的估计，判断甲乙两厂的产品是否合格

——对参数μ的双边检验

σ 未知，因此选择检验统计量

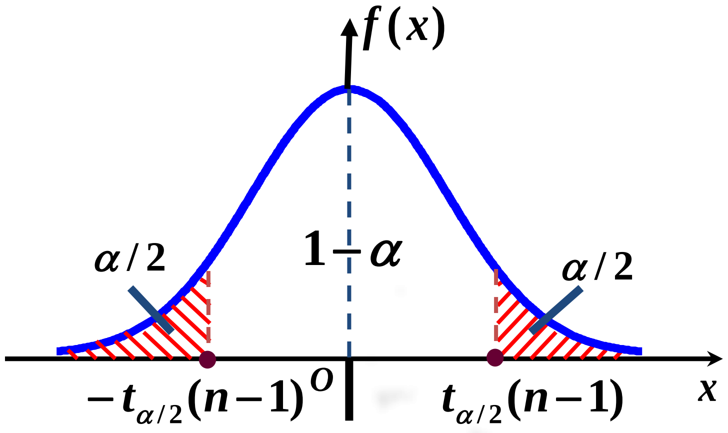
单正态总体参数的假设检验例子

解 (1) $H_0:\mu=\mu_0=120$，$H_1:\mu\neq\mu_0=120$

(2) σ^2未知，所以取检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

(3) 对给定的显著性水平α，有

拒绝域$C:\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$



(4) 对于给定的$\alpha=0.05$，查表得 $t_{0.025}(4)=2.7764$，

下面分别讨论甲乙两厂的产品是否合格

单正态总体参数的假设检验例子

甲厂： $\bar{x} = 119.5$， $s = 0.4,$ 算得 $t = -2.795$，

$\because \ |t| > t_{\alpha/2}$，故否定 H_0，即甲厂的产品不符合标准；

乙厂： $\bar{x} = 114$，$s = 0.6105,$ 算得 $t = -2.198$，

$\because \ |t| < t_{\alpha/2}$，不能否定 H_0 ，

即乙厂的产品可以认为符合标准。

统计量的选取

$$N(\mu,\sigma^2)\begin{cases}\mu\text{的检验}\begin{cases}\sigma^2\text{已知}Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\text{（Z检验）}\\[2ex]\sigma^2\text{未知}t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\text{（t检验）}\end{cases}\\[6ex]\sigma^2\text{的检验}\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\text{（}\chi^2\text{检验）}\end{cases}$$

1、根据题意判断对什么参数进行估计？

2、根据题意和已知条件选择合适的统计量？

3、注意单边检验拒绝域的不等号方向？

4、判断结果？

第八章 假设检验

8.4 双正态总体参数的假设检验

杨建芳

双正态总体参数的假设检验

设有两个相互独立的正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，分别抽取独立的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$，要检验它们的**均值、方差是否相等**的问题。

$$
\begin{matrix} N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{matrix}
\left\{
\begin{aligned}
& Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \\
& t = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \\
& F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)
\end{aligned}
\right.
$$

我们注意到在区间估计中，基本想法是总体参数未知，用样本相应的参数去替代，检验也是这个思想，用相应的样本参数去检验总体参数。

双正态总体均值差的假设检验

一、 两个正态总体均值差的假设检验

（一） σ_1^2,σ_2^2已知

因为$\mu_1-\mu_2=\delta$

（1） $H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,\quad H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$

（2） 检验统计量 $Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\overset{H_0下}{\sim}N(0,1)$

（Z 检验法）

（3） 对给定 α, 查表得 $z_{\alpha/2}$，

$$拒绝域C:\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right|\geq z_{\alpha/2}$$

（4） 由样本值算得z的值；

如果$|z|\geq z_{\alpha/2}$，则拒绝H_0；否则，不拒绝H_0.

双正态总体均值差的假设检验

（1） $H_0:\mu_1-\mu_2\le\delta,\quad H_1:\mu_1-\mu_2>\delta$ （右边检验）

$H_0:\mu_1-\mu_2\ge\delta,\quad H_1:\mu_1-\mu_2<\delta$ （左边检验）

(2) 检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

(3) 对给定 α, 查表得 z_α,

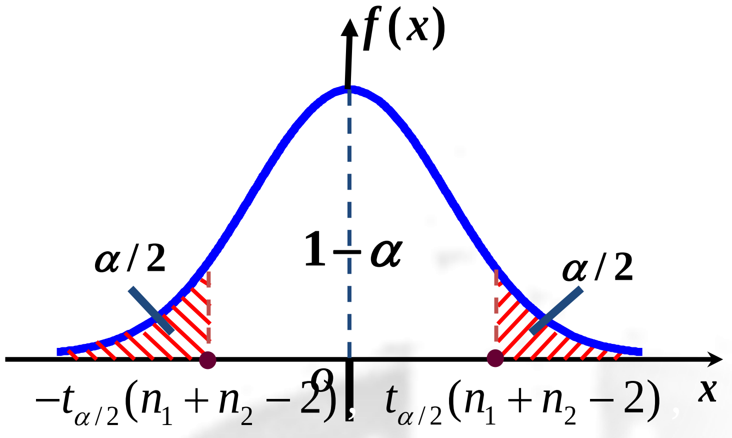
拒绝域 $C: z\ge z_\alpha$ $(C: z\le -z_\alpha)$

双正态总体均值差的假设检验

（二）、σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

检验统计量 $$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

（T检验法）



其中 $$S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

双正态总体均值差的假设检验

（1）$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ （双边检验）

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$ （右边检验）

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$ （左边检验）

（2）检验统计量 $t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

（3）对给定α，查表得 $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$，$(t_\alpha(n_1 + n_2 - 2))$

拒绝域$C: |t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

$C: t \geq t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) \qquad C: t \leq -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$

双正态总体方差比的假设检验

二、两个正态总体方差比的假设检验

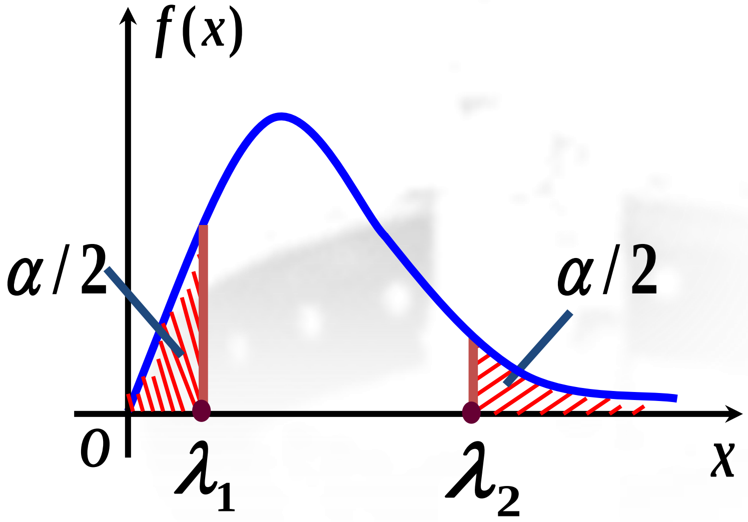
检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\Big/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)\qquad F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\overset{H_0\text{下}}{\sim}F(n_1-1,n_2-1)$$

（F 检验法）

$$\lambda_1=F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$$

$$\lambda_2=F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$



双正态总体方差比的假设检验

(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$（双边检验）

$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$ (右边检验）

(2) 检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

$H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$（左边检验）

(3) 对给定 α, 查表得分位点

拒绝域C：$F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或$F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域C：$F\ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$,

拒绝域$C:F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

统计量的选取

$$N(\mu_1,\sigma_1^2),\ N(\mu_2,\sigma_2^2)\begin{cases}\mu_1-\mu_2\text{的检验}\begin{cases}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}\quad Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\ (Z\text{检验})\\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2\text{未知}\ T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}(T\text{检验})\end{cases}\\ \sigma_1^2\big/\sigma_2^2\text{的检验}\quad F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}(F\text{检验})\end{cases}$$

采用双边检验下的分布，拒绝域不等号方向始终跟备择假设一致

1、如何选择统计量？

2、拒绝域与备择假设之间的关系？

3、如何理解单边检验时统计量未必服从相应的分布？

第八章 假设检验

8.5 双正态总体假设检验例子

杨建芳

统计量的选取

$$N(\mu_1,\sigma_1^2),\ N(\mu_2,\sigma_2^2)\begin{cases}\mu_1-\mu_2\text{的检验}\begin{cases}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}\quad Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\ (Z\text{检验})\\ \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2\text{未知}\ T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}(T\text{检验})\end{cases}\\ \sigma_1^2\big/\sigma_2^2\text{的检验}\quad F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}(F\text{检验})\end{cases}$$

采用双边检验下的分布，
拒绝域不等号方向始终跟
备择假设一致

双正态总体参数的假设检验例子

例1 两台车床生产同一型号滚珠，根据经验可以认为两车床生产的滚珠的直径均服从正态分布，方差分别为 $\sigma_1^2=0.096$ ，$\sigma_2^2=0.026$。现从两台车床的产品中分别抽出8个和9个，测得滚珠直径的样本均值如下：

甲车床：$\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=15.01$， 乙车床：$\bar{y}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}y_i=14.99$， $(\alpha=0.05)$

若两个总体都服从正态分布，问:两个总体的均值是否有显著差异？

分析： 问均值是否有差异——对参数$\mu_1-\mu_2$的双边检验

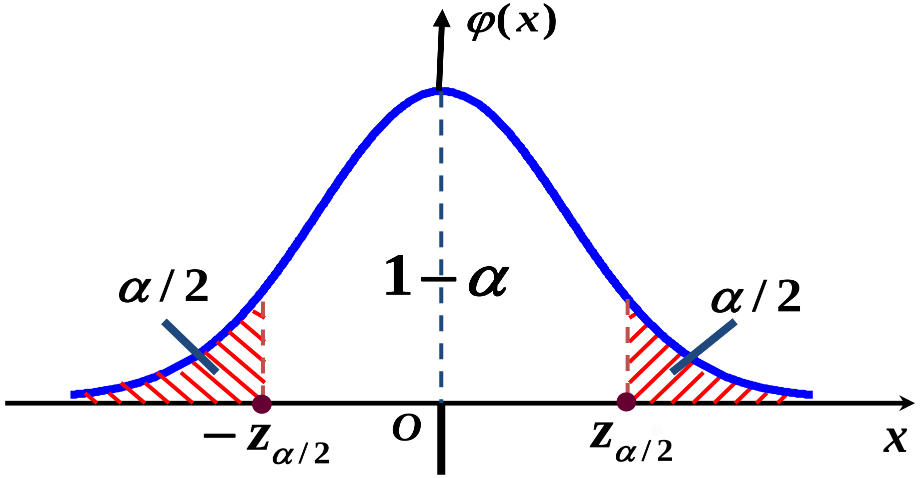
σ_1^2，σ_2^2已知，所以选择检验统计量

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

双正态总体参数的假设检验例子

解　(1) $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

(2) 检验统计量　$Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$



(3) 对给定 α，查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

拒绝域$C: |z| \geq z_{\alpha/2}$

(4) 由样本值算得z的值；$|z| = \left| \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| \approx 0.164$，

$\alpha = 0.05, n_1 = 8, n_2 = 9,$

$|z| = 1.64 < 1.96$，接受H_0，认为两个总体的均值没有明显差异。

双正态总体参数的假设检验例子

例2 为了比较两个国家成年妇女的身高，抽样数据为：

A国：$n_1=12$，$\bar{x}=162.1$，$s_1^2=3.6$

B国：$n_2=15$，$\bar{y}=160.8$，$s_2^2=3.3$

设两个总体均服从正态分布，问：

1、 是否可以认为两个总体的方差相等？

2、 在方差相等的前提下，是否有理由认为**A**国成年妇女的平均身高比**B**国的要高？$(\alpha=0.05)$

分析： 问题1判断方差是否相等，对方差比的检验

问题2对于均值差的检验

双正态总体参数的假设检验例子

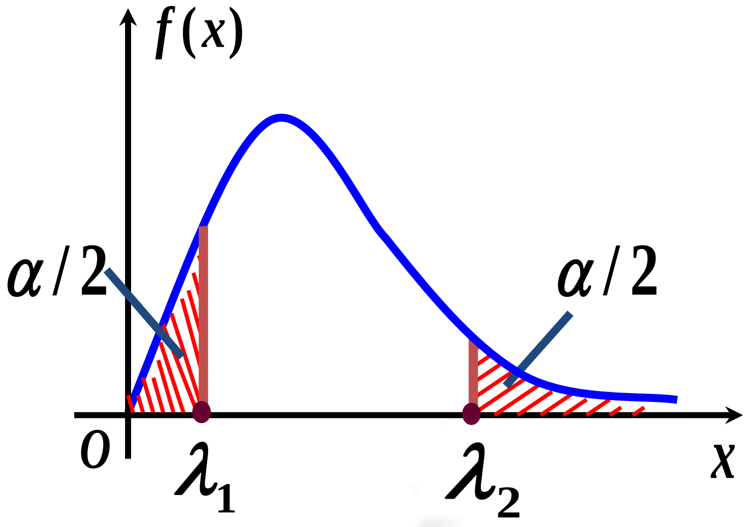
解 (1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 双侧检验

(2) 检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

(3) 对给定 α，得分位点

拒绝域C: $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ (λ_2)

或$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ (λ_1)



(4) 由样本值算得F的值；由 $\alpha = 0.05, n_1 = 12, n_2 = 15$,

$\lambda_1 = 1/F_{\alpha/2}(14,11) = 1/3.55 = 0.28$，$\lambda_2 = F_{\alpha/2}(11,14) = 3.1$，

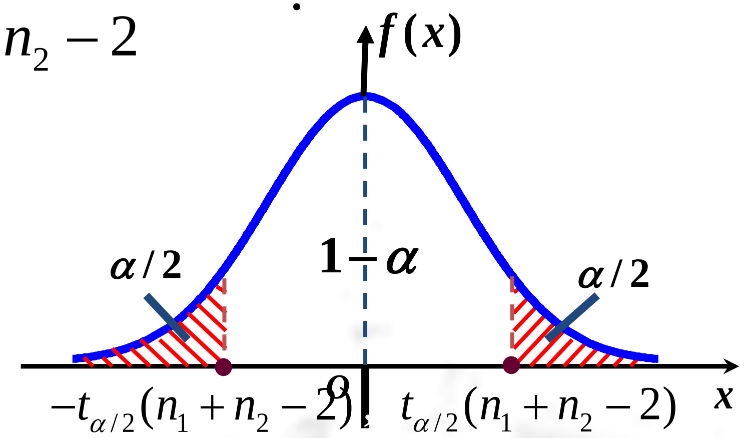
由样本值算得 $F = 3.6/3.3 = 1.09$，

$\because$ $\lambda_1 < F < \lambda_2$，接受$H_0$即方差无明显差异。

双正态总体参数的假设检验例子

解 (1) $H_0:\mu_1 \le \mu_2$, $H_1:\mu_1 > \mu_2$ 右边检验

(2) 检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ 其中 $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.



(3) 对给定α，拒绝域$C: t \ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$

(4) 代值计算判断：$\alpha=0.05, n_1=12, n_2=15$,

查表得 $t_\alpha(25)=1.7081$,

由样本值算得 $t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_\omega\sqrt{1/n_1+1/n_2}}=1.743$， $t=1.743>t_{0.05}(25)=1.7081$,

即可以认为A国成年妇女的平均身高明显比B国的要高.

统计量的选取

$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

- $\mu_1-\mu_2$的检验
  - σ_1^2,σ_2^2已知 $Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ (Z检验)
  - $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ (T检验)
- $\sigma_1^2\Big/\sigma_2^2$的检验 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ (F检验)

采用双边检验下的分布，拒绝域不等号方向始终跟备择假设一致

第八章 假设检验

小结

杨建芳

统计量的选取

$$N(\mu,\sigma^2)\begin{cases}\mu\text{的检验}\begin{cases}\sigma^2\text{已知}Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\text{（}Z\text{检验）}\\ \sigma^2\text{未知}t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\text{（}t\text{检验）}\end{cases}\\ \sigma^2\text{的检验}\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\text{（}\chi^2\text{检验）}\end{cases}$$

我们注意到不管是区间估计还是假设检验，直观的想法就是拿相应的样本值去估计或者检验总体所对应的参数。因此需要考虑构造适当的样本函数，并考虑其分布。

对于正态分布而言，则需要考虑其样本均值和样本方差的分布。

统计量的选取

$$N(\mu_1,\sigma_1^2)\quad N(\mu_2,\sigma_2^2)\begin{cases}\mu_1-\mu_2\text{的检验}\begin{cases}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}\quad Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\ (Z\text{检验})\\[2ex]\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2\text{未知}\ t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\ (t\text{检验})\end{cases}\\[2ex]\sigma_1^2\big/\sigma_2^2\text{的检验}\quad F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\ (F\text{检验})\end{cases}$$

采用双边检验下的分布，拒绝域不等号方向始终跟备择假设一致

假设检验原理

考虑控制第一类错误——显著性检验问题

基本步骤：

1、提出原假设H_0、备择假设H_1；

2、选择适当检验统计量K；

3、对于检验水平α 查表找分位数λ，求出拒绝域C；

4、由样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 计算统计量之值，将K 与λ进行比较，作出判断：当$|\hat{K}| \geq \lambda$（或$\hat{K} \geq \lambda$或$\hat{K} \leq \lambda$）时否定，否则认为相容.

注意：

①拒绝域是指拒绝了零假设H_0,接受备择假设H_1,因此拒绝域的形式与H_1一致.

②检验统计量只有在做双边检验在H_0为真时才服从相应的分布,对于单边检验,检验统计量本身分布未知,但是仍然可以根据双边检验对应的分布来确定拒绝域.

③统计量是随机变量,因此采用大写字母书写,而确定拒绝域是用以比较样本值与界线的大小,通常拒绝域采用小写字母来表示统计值.

④对于双边检验,拒绝域是落在两端的小概率区间,左右两侧各取$\alpha/2$,因此对应临界点分别为$\alpha/2$和$1-\alpha/2$分位点（正态分布和t分布对应的是$\alpha/2$分位点与其相反数）,对于单边检验拒绝域是落在一端小概率区间,因此对应的是α或者$1-\alpha$分位点（正态分布和t分布对应的是α分位点与其相反数）.

$$z_{1-\alpha}=-z_{\alpha}\quad t_{1-\alpha}(n)=-t_{\alpha}(n)\quad F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$$

⑤拒绝域与相应的置信区间互为补集.事实上,通常用中间的大概率事件来估计总体比较合理,如果样本的统计值落在两端的小概率事件对应的区间上,则不用该样本值来估计总体,意味着与原来总体不相容,拒绝了原总体,接受新的状态.

⑥ 注意分布记号和分位点的区别

随机变量	分布	分位点（数）
X	$N(0,1)$	z_α
χ^2	$\chi^2(n)$	$\chi_\alpha^2(n)$
t	$t(n)$	$t_\alpha(n)$
F	$F(n_1,n_2)$	$F_\alpha(n_1,n_2)$

注意分位点是一个实数

⑦ 注意各个分布的自由度.

注意到我们讨论的是正态总体均值和方差的假设检验．当样本容量n充分大，一般分布可用正态分布来接近．

谢谢大家！