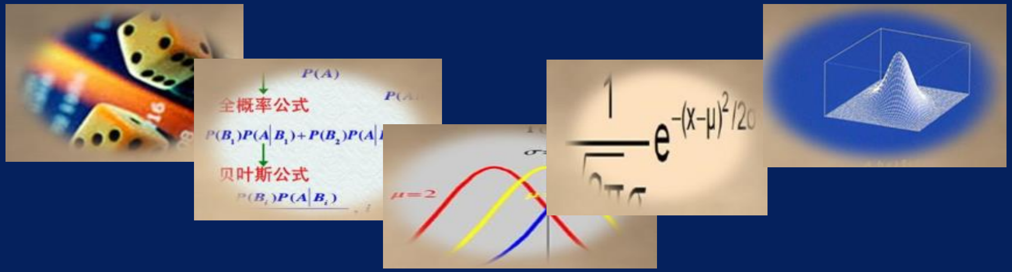
杭州電子科技大學
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

第一章 概率论的基本概念

知识要点



杨建芳

课程简介

概率论是定量研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科

悟道诗

随机非随意，概率破玄机。

无序隐有序，统计解迷离。

基本概念

- 随机试验的特点：
  - 可以在相同的条件下重复进行；
  - 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果(结果不止一个)；
  - 试验进行前不确定哪一个结果会出现。
- 样本空间：随机实验E的所有可能结果组成的集合，记为S。
- 样本点：样本空间的元素，即E的每个结果。
- 随机事件：试验E的样本空间S的子集。

随机事件 ⟶ 事件逻辑关系 ⟶ 集合论方法

事件间的关系

- 包含关系：$A \subset B$; $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
- 和事件：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
- 积事件：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$
- 差事件：$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\} = A - AB = A\overline{B}$
- 互斥事件（互不相容）：$A \cap B = \varnothing$
- 逆事件（对立事件）：$A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$. $\overline{A} = B, \overline{B} = A$

事件间的运算律

- **交换律** $A\cup B=B\cup A$； $A\cap B=B\cap A$
- **结合律** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

  $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
- **分配律** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

  $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
- **德摩根律** $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$； $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

跟集合的运算律完全一致

概率定义

- 定义：设 E 是随机实验，S 是它的样本空间。对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率。如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

- 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geq 0$；
- 规范性　对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；
- 可列可加性：对于 $A_iA_j=\varnothing,\ i \neq j,\ i,j=1,2,\cdots$，有
  $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

概率性质

1. 不可能事件的概率 $P(\varnothing)=0$

2. 有限可加性 对于$A_iA_j=\varnothing$,$i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$ ，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3. 减法公式 $P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A);\ P(B)\geq P(A).$

若$AB=\varnothing$,则有$P(B-A)=P(B).$

4. 有界性 任意事件A, $0\leq P(A)\leq 1.$

5. 逆事件的概率任意事件A, $P(\bar{A})=1-P(A).$

6. 加法公式 设 A，B 为任意两个事件，则有：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

注：$P(A)=0$不能$\Rightarrow A=\varnothing$；

$P(A)=1$不能$\Rightarrow A=S$.

减法公式变形式：$P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B)$

加法公式变形式：$P(A\cup B)-P(A)=P(B)-P(AB)$

加法公式推广式：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

古典概型

- 定义 若试验 E 满足
  - 有限性：样本空间只包含有限个元素；
  - 等可能性：每个基本事件发生的可能性相同

  称这种试验为等可能概型，或古典概型。

每个基本事件发生的概率均为1/n ！

- 概率计算公式

  在古典概型中，事件A的概率为

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_j\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中的基本事件数}}$$

注意：放回抽样或不放回抽样

有序或者无序

实际推断原理

条件概率

1.条件概率： $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}, P(A)>0$

2.乘法公式： $P(AB)=P(B|A)P(A), P(A)>0$

$$P(AB)=P(A|B)P(B), P(B)>0$$

- 推广形式：设 $P(AB)>0$, $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

  设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

3.全概率公式： $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

4. 贝叶斯公式： $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}$

独立性

A,B相互独立 $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

- 定理一：A、B 相互独立 $\Longleftrightarrow P(B\mid A)=P(B)$，$P(A)>0.$

  $\Longleftrightarrow P(A\mid B)=P(A)$，$P(B)>0.$

- 定理二：若两事件A ,B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：

  $\overline{A}$与B; A与$\overline{B}$; $\overline{A}$与$\overline{B}$

- 定理三：必然事件和不可能事件与任一事件独立。

- 定理四：若$P(A)>0$,$P(B)>0$，则A 、B 相互独立与A、B 互不相容不能同时成立。

多个事件独立性

设 A, B ,C 是三个事件，如果满足等式

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{aligned}\right\}\text{（两两独立）} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称三个事件独立。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是$n\ (n \geq 2)$个事件，如果对于其中任意2个，任意3个，… 任意 n 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积。

注：相互独立推出两两独立，反之不成立。

谢谢大家！